A propos de cosinus et sinus hyperboliques

I

On sait comment sont définies, en classe de première, les fonctions,(petit)cosinus et (petit)sinus. On sait d'autre part que :

$$\forall t \in \mathbb{R}\ , \quad \cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \text{et} \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

<u>Problème</u> : <u>Peut-on définir de façon analogue cosinus et sinus hyperboliques ?</u>

1) On étudie, en première, le groupe $(\mathcal{R}, \circ)$ des rotations planes, le groupe $(M, \times)$ des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ telles que $a^2 + b^2 = 1$, le groupe $(\mathcal{A}, +)$ des angles et, en terminale, le groupe $(\mathcal{U}, +)$ des nombres complexes de module 1. Ces groupes sont isomorphes.

Soit : $F : M \longrightarrow [-1, +1]$ $\qquad$ $G : M \longrightarrow [-1, +1]$

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = m \longmapsto a$ $\qquad$ $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = m \longmapsto b$

l'homomorphisme canonique θ de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(M, \times)$ permet de définir les applications (petit)cosinus et (petit)sinus ...

$$\cos : \begin{tikzcd} & M \arrow[dr, "F"] & \\ \mathbb{R} \arrow[ur] \arrow[rr, "F_\circ \theta"'] & & {[-1\ ,\ +1]} \end{tikzcd} \qquad \sin : \begin{tikzcd} & M \arrow[dr, "G"] & \\ \mathbb{R} \arrow[ur] \arrow[rr, "G_\circ \theta"'] & & {[-1\ ,\ +1]} \end{tikzcd}$$

$$t \longmapsto \cos t \qquad\qquad t \longmapsto \sin t$$

Posons $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \theta(t) = e^{it}$ avec $a^2 + b^2 = 1$

(On identifie ainsi $(M, \times)$ et $(\mathcal{U}, +)$)

alors: $\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a$

$\frac{1}{2}(e^{it} - e^{-it}) = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ib$

par identification de $\mathbb{R}$ et de l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ où $x \in \mathbb{R}$

d'où : $\qquad \cos t = F(\theta(t)) = a = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$

$\qquad\qquad \sin t = G(\theta(t)) = b = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$

en conclusion, toute matrice de rotation peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) & -\frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) \\ \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) & \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \end{pmatrix}$$

2) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $a' = \frac{1}{2}(e^{t} + e^{-t})$

$\qquad\qquad\qquad b' = \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t})$

on a : $a'^2 - b'^2 = 1$; de plus $a' + b' = e^{t}$ ne prend que des valeurs positives (de même que $a' - b'$). Considérons alors M' , ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ telles que $a'^2 - b'^2 = 1$ et $a' + b' > 0$. On démontre que $(M', \times)$ est un groupe et on démontre que l'application :

$$\begin{aligned} \theta' : \mathbb{R} &\longrightarrow M' \\ t &\longmapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(e^{t} + e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t}) \\ \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^{t} + e^{-t}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un homomorphisme surjectif.

Soit alors : $F' : M' \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad\qquad G' : M' \longrightarrow \mathbb{R}$

$\qquad \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = m' \longmapsto a' \qquad\qquad \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = m' \longmapsto b'$

On définit alors les applications cosinus et sinus hyperboliques :

$$\mathrm{Ch} : \begin{tikzcd} & M' \arrow[dr, "F'"] & \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "\theta'"] \arrow[rr] & & \mathbb{R} \\ t \arrow[rr, mapsto, "F' \circ \theta'"] & & \mathrm{Ch}\ t \end{tikzcd} \qquad \mathrm{Sh} : \begin{tikzcd} & M' \arrow[dr, "G'"] & \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "\theta'"] \arrow[rr] & & \mathbb{R} \\ t \arrow[rr, mapsto, "G' \circ \theta'"] & & \mathrm{Sh}\ t \end{tikzcd}$$

et on peut démontrer des formules concernant cosinus et sinus hyperbloiques de façon analogue à la démonstration des formules trigonomètriques.

3) C'est cette idée qui est à l'origine d'un énoncé de problème fabriqué par un groupe de stagiaires à l'I.R.E.M. de Strasbourg il y a trois ans :

<u>Problème 1</u>.

Soit M l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres réels tels que $a^2 - b^2 = 1$ et $a + b > 0$.

1) Montrer que $(M, \times)$ (où $\times$ désigne la multiplication des matrices) est un sous-groupe du groupe multiplicatif des matrices 2×2 à coefficients réels. Ce sous-groupe est-il commutatif ?

2) Si $m = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ est un élément de M , on pose $a = F(m)$ et $b = G(m)$.

Soit m et m' deux éléments de M : calculer $F(m' \times m)$, $G(m' \times m)$, $F(m^2)$, $G(m^2)$, $F(m^{-1})$, $G(m^{-1})$ en fonction de $F(m)$, $G(m)$, $F(m')$, $G(m')$. Démontrer que pour tout p de $\mathbb{N}^*$ et pour tout m de M :

$$(F(m) + G(m))^p = F(m^p) + G(m^p)$$

3) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension deux, et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de E. Soit m un élément de M : m est la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ d'un endomorphisme φ de E . La matrice de φ dans une autre base orthonormée de E est-elle un élément de M ?

Comparer la situation avec celle des matrices de rotation.

4) On définit l'application $m \longmapsto t$, de M dans $\mathbb{R}$, comme composée des applications :

$$\begin{array}{ccccccc} M & \longrightarrow & \mathbb{R}^+_* & \quad \text{et} \quad & \mathbb{R}^+_* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = m & \longmapsto & a + b & & x & \longmapsto & \operatorname{Log} x = t \end{array}$$

Montrer que cette application est un isomorphisme de $(M, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.

On définira alors les fonctions :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & a \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & b \end{array}$$

Etudier f et g . Soit t et t' deux nombres réels. Calculer $f(t' + t)$, $g(t' + t)$, $f(2t)$, $g(2t)$, $f(-t)$, $g(-t)$ en fonction de $f(t)$, $g(t)$, $f(t')$, $g(t')$.

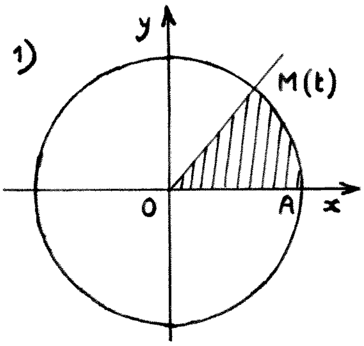
Démontrer que pour tout p de $\mathbb{Z}$ et tout t de $\mathbb{R}$:

$$(f(t) + g(t))^p = f(pt) + g(pt) .$$

5) Avec quelles fonctions F , G , f , g présentent-elles des analogies ?

II

1)

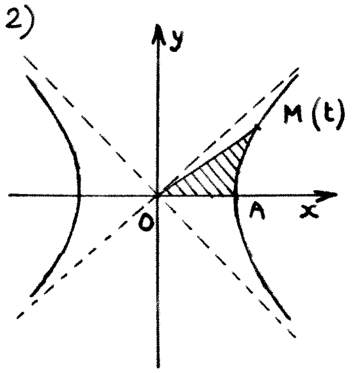


Le cercle trigonométrique a pour équation $x^2 + y^2 = 1$. Si t est la détermination de $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}})$ de $[0 , 2\pi[$, l'aire du secteur angulaire est $t/2 = S$. Dans la représentation paramétrique du cercle trigonométrique :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0 , 2\pi[$$

t représente donc le double de l'aire du secteur angulaire "balayée" par OM .

2)



On considère l'hyperbole équilatère d'équation $x^2 - y^2 = 1$
On cherche une représentation paramétrique de la branche H_1 de cette hyperbole dont les points sont d'abcisses positives , où le paramètre t soit le double de l'aire S du triangle curviligne OAM .
En fonction de l'abcisse x de M , l'aire S est :

$$S = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

d'où $t = 2S = \operatorname{Log} \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$, ce qui équivaut à $x = \frac{1}{2} \left(e^t + e^{-t} \right)$ car $x > 0$. D'où une représentation paramétrique de H_1 :

$$\begin{cases} x = 1/2 \left(e^t + e^{-t} \right) \\ y = 1/2 \left(e^t - e^{-t} \right) \end{cases}$$

3) C'est cette idée qui est à l'origine d'un énoncé de problème fabriqué par un groupe de stagiaires de l' I.R.E.M. de Strasbourg il y a trois ans :

Problème 2 ;

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'Ox$, $y'Oy$; (unité 2 cm).

1) Construire la courbe (C) d'équation $x^2 - y^2 = 1$. Préciser ses éléments remarquables. Pour $y \geqslant 0$ donner l'expression de y en fonction de x . Soit A l'intersection de (C) avec la demi-droite Ox $(x \geqslant 0)$.

2) Montrer que la fonction $Z = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$ est une primitive de $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

3) On considère la partie (Γ) de (C) correspondant à $x > 0$, $y \geqslant 0$. Soit $P(x,y)$ un point de (Γ) . Evaluer en fonction de x l'aire intérieure au contour formé par les segments OA , OP et l'arc AP de (Γ) .
Application numérique : $x = 5$.

4) Soit $t = 2\mathcal{a}$, $\mathcal{a}$ étant l'aire trouvée dans la question précédente en fonction de x . Exprimer les coordonnées x et y de P en fonction de t . Montrer que x et y peuvent s'écrire :

$$x = f(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad ; \quad y = g(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

Etudier les variations de ces deux fonctions de la variable t . Graphique.

5) Calculer $(f(t))^2$ et $(g(t))^2$ et en déduire une relation simple entre $f(t)$ et $g(t)$. Démontrer les relations :

$$f(a + b) = f(a) . f(b) + g(a) . g(b)$$
$$g(a + b) = g(a) . f(b) + f(a) . g(b)$$

En déduire les expressions de $f(2a)$ et $g(2a)$ en fonction de $f(a)$ et $g(a)$.

Démontrer la relation : $(f(t) + g(t))^n = f(nt) + g(nt)$. Avec quelles fonctions bien connues $f(t)$ et $g(t)$ présentent-elles des analogies ?

<u>N. B.</u> En posant $t = \frac{1}{2} \text{Log} \left(\frac{1 + u}{1 - u} \right)$ on obtient :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \\ y = \dfrac{u}{\sqrt{1 - u^2}} \end{cases}$$

autre représentation paramétrique de H_1 ; (cf. le problème de baccalauréat deSTrasbourg -- session de remplacement de 1974).