surjective. L'application h de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{U}$ étant bijective admet une application réciproque h^{-1} de source $\mathcal{U}$, de but $\mathcal{R}$ vérifiant $\forall z \in \mathcal{U} \quad \forall z' \in \mathcal{U} \quad h^{-1}(z.z') = h^{-1}(z) \circ h^{-1}(z')$

- l'application θ de source $\mathbb{R}$ de but $\mathcal{R}$ définie par $\theta = h^{-1} \circ \psi$, composée de deux applications surjectives, est surjective

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$ $\theta(x+y) = h^{-1}[\psi(x+y)] = h^{-1}[\psi(x).\psi(y)] =$
  $h^{-1}[\psi(x)] \circ h^{-1}[\psi(y)] = \theta(x) \circ \theta(y)$

- Il est facile de vérifier de la fonction sin définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\sin x = \sin \theta(x)$ est la fonction $\mathcal{J}$ qui est dérivable et de dérivée 1 pour $x = 0$. ce qui achève d'établir l'existence d'une application θ vérifiant les propriétés citées page 13.

ANGLES SANS TRIGONOMETRIE

1) Etant donné un couple (D,D') de demi-droites vectorielles il existe une rotation vectorielle φ et une seule telle que $\varphi(D) = D'$ (cette rotation est l'unique rotation vectorielle "en voyant" le vecteur unitaire de D sur celui de D'). A chaque couple (D,D') on associe un élément φ et un seul de l'ensemble $\mathcal{R}$ des rotations vectorielles.

$\mathcal{D}$ désignant l'ensemble des demi-droites vectorielles, on définit ainsi une application de $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ dans $\mathcal{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \times \mathcal{D} &\longrightarrow \mathcal{R} \\ (D,D') &\longrightarrow \varphi \end{aligned}$$

soit f cette application : f est surjective.

On considère ensuite la relation r dans $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ définie par $(D,D') \, r \, (D_1,D'_1) \Leftrightarrow f(D,D') = (D_1,D'_1)$ r est une relation d'équivalence ; les classes d'équivalences (éléments de $\dfrac{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}{r}$) sont appelées angles.

On notera $\widehat{(D,D')}$ la classe d'équivalence de l'élément (D,D'). Si l'on désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles $\left(\mathcal{A} = \dfrac{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}{r}\right)$, on peut définir une application g de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{R}$.

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\;g\;} \mathcal{R}$$

$$\widehat{(D,D')} \longmapsto g(\widehat{D,D'}) = f(D,D') = \varphi$$

$g(\widehat{D,D'})$ est définie à l'aide d'un représentant de $(\widehat{D,D'})$ il faut s'assurer que $g(\widehat{D,D'})$ ne dépend pas du représentant de $(\widehat{D,D'})$ choisi, ce qui est immédiat par définition de la relation r. L'application g est une bijection de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{R}$ comme il est facile de le vérifier.

$\mathcal{R}$ est muni d'une structure de groupe commutatif pour la loi de composition o des rotations, il reste à munir $\mathcal{A}$ d'une structure.

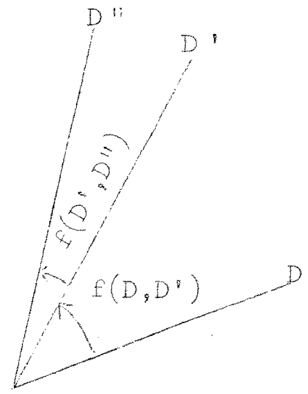
Pour cela munissons $\mathcal{A}$ d'une opération notée + définie par :

$$\widehat{(D,D')} + \widehat{(D_1,D_1')} = g^{-1}[g(D,D') \circ g(D_1',D_1')] = g^{-1}[f(D,D') \circ f(D_1,D_1')]$$

Cette loi de composition est interne dans $\mathcal{A}$ et $\widehat{(D,D')} + \widehat{(D_1,D_1')}$ ne dépend pas des représentants des angles $\widehat{(D,D')}$ et $\widehat{(D_1,D_1')}$ choisis (parce que $g\widehat{(D,D')}$ est définie indépendamment du représentant de (D,D')).

Il est facile d'établir que $\mathcal{A}$+ a une structure de groupe commutatif : l'élément neutre de ce groupe est l'angle dont (D,D) est un représentant ; le symétrique pour la loi notée + de l'angle dont (D,D') est un représentant est l'angle dont (D',D) est un représentant.

Relation de Chasles :



$$\widehat{(D,D')} + \widehat{(D',D'')} = g^{-1}[f(D,D') \circ f(D',D'')]$$

or $\mathcal{R}$o est un groupe commutatif

$$\widehat{(D,D')} + \widehat{(D',D'')} = g^{-1}[f(D',D'') \circ f(D,D')] = g^{-1}[\varphi' \circ \varphi]$$

$f(D,D')$ est la rotation φ définie par $\varphi(D) = D'$

$f(D',D'')$ est la rotation $\varphi' \circ \varphi$ définie par $\varphi'(D') = D''$

$$D \xmapsto{\;\varphi\;} D' \xmapsto{\;\varphi'\;} D''$$

$\varphi' \circ \varphi$ est donc la rotation définie par $\varphi' \circ \varphi(D) = D''$ et par conséquent :

$\varphi' \circ \varphi = f(D,D'')$ et par conséquent

$$(\widehat{D,D'}) + (\widehat{D',D''}) = g^{-1}[f(D,D'')] = g^{-1}[g(\widehat{D,D''})] = (\widehat{D,D''})$$

Notons que nous avons eu à utiliser la commutativité de la loi des compositions des rotations pour établir la relation de Chasles.

TRIGONOMETRIE ET ANGLES

L'application g de $\mathcal{A}+$ dans $\mathcal{R}_o$ est un isomorphisme en effet

1) g est bijective

2) $g[(\widehat{D,D_1}) + (\widehat{D',D'_1})] = g[g^{-1}[g(\widehat{D,D'}) \circ g(\widehat{D_1,D'_1})]] = g(\widehat{D,D'}) \circ g(\widehat{D_1,D'_1})$

Si l'on désigne par θ' l'application $g^{-1} \circ \theta$

$$R \xrightarrow{\theta} \mathcal{R} \xrightarrow{g^{-1}} \mathcal{A}$$

θ' est une application de R dans $\mathcal{A}$

θ' , composée de deux applications surjectives est surjective

$\forall x \in R \quad \forall y \in R \quad \theta'(x + y) = g^{-1}[\theta(x+y)] = g^{-1}[\theta(x)\circ\theta(y)] = g^{-1}[\theta(x)] + g^{-1}[\theta(y)]$

$= \theta'(x) + \theta'(y)$

Cette application θ' est celle nommée θ dans les programmes officiels.

On peut alors en utilisant θ' et $\mathcal{A}$ refaire les calculs que nous avons faits en utilisant θ et $\mathcal{R}$ et lier la trigonométrie aux angles.

Nous n'avons pas voulu donner un exposé type de l'enseignement de la trigonométrie, il est bien clair que le programme suggère de mêler plus intimement la trigonométrie et les angles que nous ne l'avons fait, nous avons choisi ce mode d'exposition de façon à ce qu'il soit facile au lecteur de rédiger lui-même une progression conforme aux programmes.

Nous avons utilisé le mot isomorphisme à la fin de cet exposé, il aurait suffit de citer les propriétés de g pour éviter ce mot.

Nous aurions pu, si nous avions voulu utiliser les propriétés des isomorphismes établir directement (à l'aide de l'isomorphisme g) que $\mathcal{A}$ + est un groupe commutatif.

Il resterait à traiter maintenant du cercle trigonométrique et des figures usuelles rencontrées en trigonométrie, les commentaires officiels le font fort bien et il ne paraît guère utile d'apporter des compléments à ce sujet.

Ce travail a été rédigé avant la parution des commentaires officiels, il ne prétend pas être un guide du professeur de première mais il permet de faciliter la rédaction d'un exposé conforme à ces commentaires.

P. BUISSON et J. SAMSON