Les égalités 5) et 6) montrent que les fonctions sin et cos sont périodiques et que 2π est une période.

On étudie alors les fonctions sin et cos dans $[0,\frac{\pi}{2}]$

Nous avons déjà étudié la croissance de la fonction sinus dans $[0,\frac{\pi}{2}]$, cette étude montre que la fonction sinus est positive d $[0,\frac{\pi}{2}]$, cette étude montre que la fonction sinus est positive dans $]0,\frac{\pi}{2}]$ et que la fonction cos, continue dans $[0,\frac{\pi}{2}]$, dérivable dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ qui admet dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ une dérivée strictement négative est donc décroissante dans $[0,\frac{\pi}{2}]$. Les égalités 1....10 permettent de prolonger cette étude à un intervalle d'amplitude 2π et de montrer que 2π est la plus petite période des fonctions sin et cos. Le calcul de $\cos\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{\pi}{4}$; $\cos\frac{\pi}{3}$, $\sin\frac{\pi}{3}$ permettent de préciser quelques points des représentations graphiques des fonctions cos et sin et de représenter graphiquement ces fonctions.

Les fonctions tangente et cotangente peuvent être alors introduites et étudiées à partir des fonctions sin et cos.

NOTES SUR LA FONCTION θ

Ces notes, qu'il n'est pas question d'utiliser en classe de 1ère, ne sont là que pour justifier, de façon sommaire, l'existence et les propriétés de l'application θ de $\mathbb{R}$ dans Ω vérifient les propriétés admises page 13

1) L'ensemble Ω des rotations vectorielles, muni de la loi de composition des applications notée $\circ$, est isomorphe au groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

Une rotation vectorielle f étant définie, dans le plan orienté, indépendamment de la base orthonormée choisie par $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$, on peut identifier une rotation vectorielle à sa matrice, la composée de deux rotations vectorielles, au produit des matrices de ces rotations.

L'application h

$$\mathcal{R} \xrightarrow{h} \mathcal{U}$$

$$f = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \longmapsto z = h(f) = a+bi \text{ avec } \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$$

est bijective et vérifie :

$\forall f_1 \in \mathcal{R}$, $\forall f_2 \in \mathcal{R}$ $h(f_1 \circ f_2) = h(f_1).h(f_2)$ et définit donc un isomorphisme de $\mathcal{R}$. dans $\mathcal{U}$.

2) L'étude des fonctions de variables complexes permet d'établir que, pour z complexe, la série entière $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots\ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots\ldots$ est absolument convergente sa somme :

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ définit une fonction $z \longrightarrow e^z$ en notant $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

La fonction $z \longrightarrow e^z$ est continue, dérivable, sa dérivée est la fonction $z \longrightarrow e^z$

Cette fonction vérifie : $e^o = 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$ $\forall z' \in \mathbb{C}$ $e^{z+z'} = e^z . e^{z'}$, $\overline{(e^z)} = e^{\bar{z}}$

Cette fonction permet de définir une application ψ

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{ix} \end{array}$$

ψ est la composée des applications $x \longmapsto ix = z$, $z \longmapsto e^z$

_ ψ est continue, dérivable, $\psi'(x) = i\,\psi(x)$

- $\forall x \in \mathbb{R}$ $\|\psi(x)\|^2 = \psi(x)\,\overline{\psi(x)} = e^{ix}\,e^{-ix} = e^o = 1$

et par conséquent $\forall x \in \mathbb{R}$ $\psi(x) \in \mathcal{U}$ donc ψ est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{U}$

- $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$ $\psi(x+y) = \psi(x).\psi(y)$; $\psi(o)=1$

Désignons par $\mathcal{R}_e(x)$ et $\mathcal{J}(x)$ les parties réelles et imaginaires de $\psi(x)$

Les fonctions $x \longmapsto \mathcal{R}_e(x)$ et $x \longmapsto \mathcal{J}(x)$ sont développables en séries entières de rayon de convergence infini ; $\mathcal{R}_e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ $\mathcal{J}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Ces deux fonctions sont dérivables

$(\mathcal{R}_e(x))' = -\mathcal{J}(x)$; $(\mathcal{J}(x))' = \mathcal{R}_e(x)$ et vérifient

$\forall x \in \mathbb{R}$ $[\mathcal{R}_e(x)]^2 + [\mathcal{J}(x)]^2 = 1$

On se propose de démontrer que l'application $\mathbb{R} \xrightarrow{\psi} \mathcal{U}$ est surjective

pour cela on constate que $\mathcal{R}_e(o) = 1$ et que

$$\mathcal{R}_e(2) = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2^{2n} = 1 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{4!} \cdot 2^4 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^{4n+2}}{(4n+2)!} - \frac{2^{4n+4}}{(4n+4)!} \right)$$

soit $\mathcal{R}_e(2) = -\frac{1}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{4n+4}}{(4n+4)!} (4n^2 + 7n + 2)$ ce qui montre que $\mathcal{R}_e(2) < 0$

- La fonction continue $x \longrightarrow \mathcal{R}_e(x)$ prend une valeur positive pour $x = 1$, négative pour $x = 2$, donc il existe au moins un réel x de $]0,\ [$ tel que $\mathcal{R}_e(x) = 0$ (théorème des valeurs intermédiaires).

- L'ensemble des réels x positifs tels que $\mathcal{R}_e(x) = 0$ admet un plus petit élément que l'on notera $\frac{\pi}{2}$.

La fonction $x \longrightarrow \mathcal{R}_e(x)$ est positive dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ on en déduit que $\mathcal{J}(x)$ est croissante dans $[0,\frac{\pi}{2}]$ et que $\mathcal{J}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Les variations dans $[0,\frac{\pi}{2}]$ de $\mathcal{J}$ permettent de déduire les variations dans $[0,\frac{\pi}{2}]$ de $\mathcal{R}_e$ dont on connait la dérivée dans $[0,\frac{\pi}{2}]$

- $\psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathcal{R}_e\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathcal{J}\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

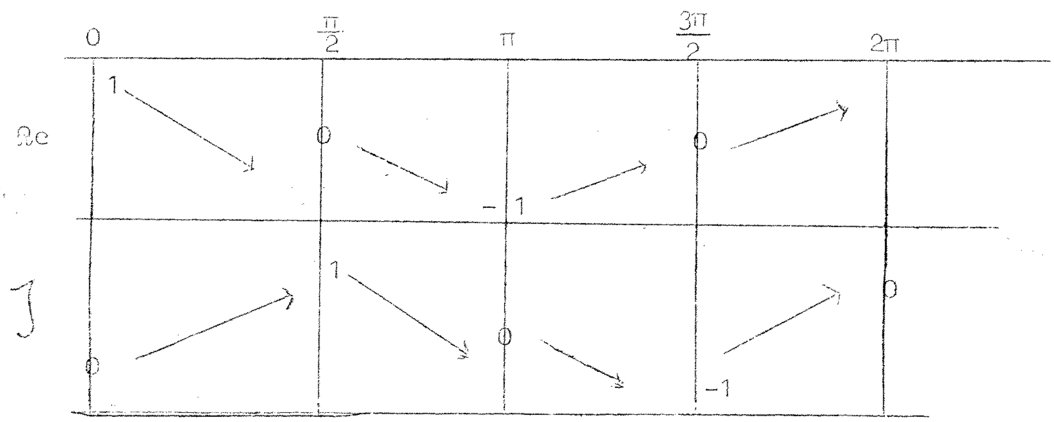
  $\psi(\pi) = \psi\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)$ d'où $\mathcal{R}_e(\pi) = -1$, $\mathcal{J}(\pi) = 0$

  $\psi(2\pi) = \psi(\pi + \pi) = \psi(\pi + \pi) = \psi(\pi) \cdot \psi(\pi) = (+1)$ d'où $\mathcal{R}_e(2\pi) = 1$ $\mathcal{J}(2\pi) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\psi(\pi - x) = \psi(\pi)\psi(-x) = -\overline{\psi(x)}$ d'où : $\mathcal{R}_e(\pi - x) = -\mathcal{R}_e(x)$; $\mathcal{J}(\pi - x) = +\mathcal{J}(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\psi(\pi + x) = \psi(\pi)\psi(x) = -\psi(x)$ d'où : $\mathcal{R}_e(\pi + x) = -\mathcal{R}_e(x)$ $\mathcal{J}(\pi + x) = -\mathcal{J}(x)$

Ces relations permettent d'étudier les fonctions $\mathcal{R}_e(x)$ et $\mathcal{J}(x)$ dans $[0, 2\pi]$



L'étude de ces tableaux de variations montre que tout nombre complexe module 1 est image d'au moins un réel par ψ autrement dit que ψ autrement dit que ψ est surjective. L'application h de Ω dans $\mathcal{U}$ étant bijective admet une application réciproque h^{-1} de source $\mathcal{U}$, de but Ω vérifiant $\forall z \in \mathcal{U}$ $\forall z' \in \mathcal{U}$ $h^{-1}(z.z') = h^{-1}(z) \circ h^{-1}(z')$

- l'application θ de source $\mathbb{R}$ de but Ω définie par $\theta = h^{-1} \circ \psi$, composée de deux applications surjectives, est surjective

- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$ $\theta(x + y) = h^{-1}[\psi(x + y)] = h^{-1}[\psi(x).\psi(y)] =$
  $h^{-1}[\psi(x)] \circ h^{-1}[\psi(y)] = \theta(x) \circ \theta(y)$

- Il est facile de vérifier de la fonction sin définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\sin x = \sin \theta(x)$ est la fonction $\mathcal{J}$ qui est dérivable et de dérivée 1 pour $x = 0$. ce qui achève d'établir l'existence d'une application θ vérifiant les propriétés citées page 13.

ANGLES SANS TRIGONOMETRIE

1) Etant donné un couple(D,D') de demi-droites vectorielles il existe une rotation vectorielle φ et une seule telle que $\varphi(D) = D'$ (cette rotation est l'unique rotation vectorielle "en voyant" le vecteur unitaire de D sur celui de D'). A chaque couple (D,D') on associe un élément φ et un seul de l'ensemble Ω des rotations vectorielles.

$\mathcal{D}$ désignant l'ensemble des demi-droites vectorielles, on définit ainsi une application de $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ dans Ω

$$\mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \Omega$$

$$(D,D') \longrightarrow \varphi$$

soit f cette application : f est surjective.

On considère ensuite la relation r dans $\mathcal{D}\times\mathcal{D}$ définie par $(D,D')r(D_1,D_1') \Leftrightarrow f(D,D') = (D_1,D_1')$ r est une relation d'équivalence ; les classes d'équivalences (éléments de $\frac{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}{r}$) sont appelées angles.

On notera $\widehat{(D,D')}$ la classe d'équivalence de l'élément (D,D'). Si l'on désigne par $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles $(\mathcal{A} = \frac{\mathcal{D} \times \mathcal{D}}{r})$, on peut définir une application g de $\mathcal{A}$ dans Ω.