TRIGONOMETRIE SANS ANGLE

1) <u>Application de l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels dans l'ensemble Ω des rotations vectorielles planes.</u>

On admet l'existence d'une application θ de source $\mathbb{R}$, de but Ω

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\theta} & \Omega \\ x & \longmapsto & \theta(x) \end{array}$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1) θ est surjective

2) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \theta(x + y) = \theta(x) \circ \theta(y)$. (autrement dit θ est un homomorphisme de $\mathbb{R}_+$ dans Ωo)

L'existence de l'application θ permet de définir une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ notée cos définie par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\theta} & \Omega & \xrightarrow{\mathrm{Cos}} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \theta(x) & \longmapsto & \mathrm{Cos}\ \theta(x) = \cos x. \end{array}$$

et, si le plan vectoriel euclidien est orienté, une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ notée sin définie par :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\theta} & \Omega & \xrightarrow{\mathrm{Sin}} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \theta(x) & \longmapsto & \mathrm{Sin}\ \theta(x) = \sin x. \end{array}$$

On admettra, conformément au programme, que l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ notée sin est dérivable et de dérivée égale à 1 pour $x = 0$.

Il nous est possible maintenant de trouver tous les résultats usuels de la trigonométrie.

a) Application vérifiant les propriétés 1, et 2, (θ est un homomorphisme surjectif de $\mathbb{R}$ + dans Ω o) ou en déduit immédiatement que $\theta(0) = \mathrm{Id}$, Id désignant la rotation vectorielle identique, élément neutre de Ω, et que pour tout réel x
$\theta(-x) = \left[\theta(x)\right]^{-1}$

La matrice de Id étant $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ il en résulte que : $\cos 0 = \mathrm{Cos}\ \mathrm{Id} = 1.$
$\sin 0 = \mathrm{Sin}\ \mathrm{Id} = 0.$

Si la matrice de $\theta(x)$ est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ alors la matrice de $\left[\theta\ (a)\right]^{-1}$ est $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ par conséquent $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$.

donc la fonction cos est paire, la fonction sin est impaire.

$$\forall\ x \in \mathbb{R}\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

b) "formules d'addition".

$\forall\ x \in \mathbb{R}\ \forall\ y \in \mathbb{R}\quad \cos(x + y) = \mathrm{Cos}\ \theta(x + y) = \mathrm{Cos}[\theta(x) o\ \theta(y)]$ par définition des applications Cos et θ

Or $\mathrm{Cos}\left[\theta(x) o \theta(y)\right] = \mathrm{Cos}\ \theta(x)\ \mathrm{Cos}\ \theta(y) - \mathrm{Sin}\ \theta(x)\ \mathrm{Sin}\ \theta(y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

et par conséquent : $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \forall\ y \in \mathbb{R}\ \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$.

On établit de façon analogue que $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \ \forall\ y \in \mathbb{R}\ \sin(x+y) =$ $\sin x \cos y + \sin y \cos x$.

La fonction cos étant paire, la fonction sin étant impaire

$\forall\ x \in \mathbb{R}\ \ \forall\ y \in \mathbb{R}\ \cos(x - y) = \cos\left[x+(-y)\right] = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) =$ $\cos x \cos y + \sin x \sin y$.

$\sin(x - y) = \sin\left[x+(-y)\right] = \sin x \cos(-y) + \sin(-y) \cos x =$ $\sin x \cos y - \sin y \cos x$

On en déduit les formules classiques de trigonométrie par les procédés habituels nous ne les établirons pas ici mais nous ne nous interdirons pas de les utiliser par la suite.

Dérivées des fonctions sin et cos.

(par hypothèse) la fonction sin est dérivable pour $x = 0$ et sa dérivée est 1.

donc $\quad \sin h = h + h\ \mathcal{E}\ (h) \quad$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \mathcal{E}\ (h) = 0$

dérivée de la fonction cos pour $x = 0$.

$\cos h - \cos 0 = \cos h - 1 = -2 \sin^2 \frac{h}{2} = -2\left[\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\ \mathcal{E}\left(\frac{h}{2}\right)\right]^2 = -h\ .\ \frac{h}{2}(1 + \mathcal{E}(\frac{h}{2})^2$

$-\frac{h}{2}\ (1 + \mathcal{E}(\frac{h}{2}))^2$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0 on peut poser $-\frac{h}{2}(1+\mathcal{E}(\frac{h}{2})^2 = \mathcal{E}_1(h)$

avec $\lim\limits_{k \to 0} \mathcal{E}_1(h) = 0$

donc $\cos h = \cos 0 + h\, \mathcal{E}_1(h)$ avec $\lim\limits_{h \to 0} \mathcal{E}_1(h) = 0$. Donc la fonction cosinus est dérivable pour $x = 0$ et sa dérivée est 0 au point 0.

Dérivée de la fonction sin au point xo.

$\forall x_o \in \mathbb{R}\ \forall h \in \mathbb{R} \quad \sin(x_o + h) = \sin x_o \cos h + \cos x_o \sin h$

$= \cos x_o \left[h + h\mathcal{E}(h)\right] + \sin x_o \left(1 + h\, \mathcal{E}_1(h)\right]$

$\sin(x_o + h) = \sin x_o + h \cos x_o + h(\cos x_o\, \mathcal{E}(h) + \sin x_o \mathcal{E}_1(h)) =$

$\sin x_o + h \cos x_o + h\, \mathcal{E}_2(h) \qquad \lim\limits_{k \to o} \mathcal{E}_2(h) = o$

donc la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$

la fonction dérivée de la fonction sin est la fonction cos.

Dérivée de la fonction cos au point x_o

$\forall x_o \in \mathbb{R} \quad \cos(x_o + h) = \cos x_o \cos h - \sin x_o \sin h =$

$\cos x_o \,(1 + h\ \mathcal{E}_1(h)) - \sin x_o \left[h + h\, \mathcal{E}(h)\right] =$

$\cos(x_o + h) = \cos x_o - h \sin x_o + h\left[\cos x_o\, \mathcal{E}_1(h) - \sin x_o\, \mathcal{E}(h)\right] =$

$\cos(x_o + h) = \cos x_o - h \sin x_o - h \sin x_o + h\, \mathcal{E}_2(h)$

la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$, sa fonction dérivée est la fonction - sin

les fonctions sin et cos étant dérivables sur $\mathbb{R}$ sont continues sur $\mathbb{R}$

Le nombre Π

L'application θ étant surjective il existe $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $\theta(\xi) = \delta$, δ étant la rotation définie par sa matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc il existe $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Cos}\ \theta(\xi) = \cos \xi = 0$.

L'équation $\cos \xi = 0$ admet donc au moins une solution.

Désignons par E l'ensemble des solutions de l'équation $\cos \xi = 0$

1) $E \neq \emptyset$, 2) $0 \notin E$ (en effet $\cos 0 = 1$) 3) $\forall \xi \in E \quad -\xi \in E$ (en effet la fonction cos est paire) donc l'ensemble E_1

$E_1 = \{\xi \in \mathbb{R} \mid \xi > 0 \text{ et } \cos \xi = 0\}$ n'est pas vide.

On pourra admetre qu'il existe un élément ξ_o de E_1 inférieur à tous les autres. La démonstration, qui ne peut guère être faite en première, de l'existence de ξ, tient du fait que E_1, image réciproque d'un fermé par une fonction continue, est un fermé. E_1 étant borné intérieurement admet une borne inférieure, E_1 étant fermé cette borne inférieure appartient à E_1.

ξ_o désignant le plus petit réel positif tel que $\cos \xi_o = 1$ on désigne par π le nombre $2\xi_o$ par conséquent $\xi_o = \frac{\pi}{2}$.

La fonction cos étant continue sur $\mathbb{R}$, cos étant égal à 1 et $\frac{\pi}{2}$ étant le plus petit réel positif dont le cosinus est nul, la fonction cos est strictement positive sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ en effet s'il existait $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $\cos \alpha \leq 0$ alors il existerait $\beta \in [0,\alpha]$ tel que $\cos \beta = 0$ et $\frac{\pi}{2}$ ne serait pas le plus petit réel x positif tel que $\cos x = 0$. (théorème des valeurs intermédiaires).

La fonction sinus, continue sur $\mathbb{R}$ donc dans $[0,\frac{\pi}{2}]$ dérivable sur $\mathbb{R}$ donc dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ est telle que sa fonction dérivée soit positive dans $]0,\frac{\pi}{2}[$. La fonction sin est donc croissante dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ il en résulte : $\sin \frac{\pi}{2} > \sin 0$

soit $\sin \frac{\pi}{2} > 0$

de l'égalité $\cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1$ on déduit $|\sin \frac{\pi}{2}| = 1$.

or $\sin \frac{\pi}{2} > 0$ donc $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

De $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ on déduit $\cos \pi = 2 \cos^2 \frac{\pi}{2} - 1 = -1$,

$\sin \pi = 2 \sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$\cos \frac{3\pi}{2} = \cos (\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$, $\sin \frac{3\pi}{2} = \sin(R + \frac{\pi}{2}) = -1$, $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$ 1) $\cos (\pi-x) = \cos \pi \cos x + \sin \pi \sin x = -\cos x$

2) $\sin (\pi-x) = \sin \pi \cos x - \cos \pi \sin x = \sin x$

de même 3) $\cos (\pi+x) = -\cos x$

4) $\sin (\pi+x) = -\sin x$

5) $\cos (2\pi+x) = \cos x$

6) $\sin (2\pi+x) = \sin x$

7) $\cos (\frac{\pi}{2} -x-) = \sin x$

8) $\sin (\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$

9) $\cos (\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$

10) $\sin (\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$

Les égalités 5) et 6) montrent que les fonctions sin et cos sont périodiques et que 2π est une période.

On étudie alors les fonctions sin et cos dans $[0,\frac{\pi}{2}]$

Nous avons déjà étudié la croissance de la fonction sinus dans $[0,\frac{\pi}{2}]$, cette étude montre que la fonction sinus est positive d $[0,\frac{\pi}{2}]$, cette étude montre que la fonction sinus est positive dans $]0,\frac{\pi}{2}]$ et que la fonction cos, continue dans $[0,\frac{\pi}{2}]$, dérivable dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ qui admet dans $]0,\frac{\pi}{2}[$ une dérivée strictement négative est donc décroissante dans $[0,\frac{\pi}{2}]$. Les égalités 1....10 permettent de prolonger cette étude à un intervalle d'amplitude 2π et de montrer que 2π est la plus petite période des fonctions sin et cos. Le calcul de cos $\frac{\pi}{4}$, sin $\frac{\pi}{4}$; cos $\frac{\pi}{3}$, sin $\frac{\pi}{3}$ permettent de préciser quelques points des représentations graphiques des fonctions cos et sin et de représenter graphiquement ces fonctions.

Les fonctions tangente et cotangente peuvent être alors introduites et étudiées à partir des fonctions sin et cos.

NOTES SUR LA FONCTION θ

Ces notes, qu'il n'est pas question d'utiliser en classe de 1ère, ne sont là que pour justifier, de façon sommaire, l'existence et les propriétés de l'application θ de $\mathbb{R}$ dans Ω vérifient les propriétés admises page 13

1) L'ensemble Ω des rotations vectorielles, muni de la loi de composition des applications notée $\circ$, est isomorphe au groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

Une rotation vectorielle f étant définie, dans le plan orienté, indépendamment de la base orthonormée choisie par $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$, on peut identifier une rotation vectorielle à sa matrice, la composée de deux rotations vectorielles, au produit des matrices de ces rotations.

L'application h