ORIENTATION DU PLAN, PLAN VECTORIEL ORIENTE

On considère dans l'ensemble des bases orthonormées du plan vectoriel euclidien la relation r définie par :

$$B \; r \; B' \Leftrightarrow \mathcal{E}(B,B') = (+1) \Leftrightarrow \exists \, \varphi \in \mathcal{R}_o \mid \varphi(\vec{e}_1) = e'_1, \; \varphi(\vec{e}_2) = e'_2$$

Il est immédiat de vérifier que r est une relation d'équivalence (ce qui résulte du fait que $\mathcal{R}o$ est un groupe), cette relation d'équivalence définit une partition de l'ensemble des bases orthonormées du plan vectoriel Euclidien formée de deux classes d'équivalence. Orienter le plan signifie choisir une de ces classes d'équivalences. Un plan vectoriel euclidien orienté est un triplet $(\mathcal{P}, \cdot, \mathcal{B})$ ou $\mathcal{P}$ est un plan vectoriel, $\cdot$ un produit scalaire et $\mathcal{B}$ une base orthonormée.

COSINUS ET SINUS D'UNE ROTATION VECTORIELLE

$\mathcal{R}$ désignant l'ensemble des rotations vectorielles planes nous avons vu que la matrice dans une base orthonormée $\mathcal{B}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ d'un élément f de $\mathcal{R}$ s'écrit :

$$M\,(f,B) = \begin{pmatrix} a(f,B) & -\,b(f,B) \\ b(f,B) & a(f,B) \end{pmatrix}$$

nous avons vu que $a(f,B)$ ne dépend pas de la base orthonormée B choisie. $a(f,B)$ ne dépend donc que de la rotation vectorielle f choisie; à chaque élément f de $\mathcal{R}$ on associe le réel $a(f)$. On définit ainsi une application de $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}$ notée Cos

$$\mathcal{R} \xrightarrow{\text{Cos}} \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto a(f) = \text{Cos } f.$$

Remarques : 1) Il n'est pas nécessaire de supposer le plan orienté pour définir l'application Cos.

2) f est une rotation, Cos f est un réel, Cos f est un réel,

Cos f est appelé le cosinus de la rotation vectorielle f.

Sinus d'une rotation vectorielle

Le nombre $b(f,B)$ dépend de la base B choisie de la façon indiquée par le théorème 2. Si on s'astreint à ne choisir les bases orthonormées B que dans l'une des deux classes d'équivalence de la relation r, c'est à dire si l'on suppose le plan vectoriel le plan vectoriel euclidien orienté, alors $b(f,B)$ ne dépend pas de la base orthonormée B choisie. Ce qui nous permet de définir une application de Ω dans $\mathbb{R}$ notée Sin

$$\Omega \xrightarrow{\text{Sin}} \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto b(f) = \text{Sin} f.$$ Sin f est le sinus de la rotation vectorielle f.

* $\text{Cos}^2 f + \text{Sin}^2 f = 1$

et, dans le plan vectoriel orienté la matrice d'une rotation f s'écrira

$$M(f) = \begin{pmatrix} \text{Cos } f & -\text{Sin } f \\ \text{Sin } f & \text{Cos } f \end{pmatrix}$$

De l'égalité $M(f\circ f') = M(f).M(f')$ on déduit immédiatement

$$\begin{pmatrix} \text{Cos}(f\circ f') & -\text{Sin}(f\circ f') \\ \text{Sin}(f\circ f') & \text{Cos}(f\circ f') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Cos } f & -\text{Sin } f \\ \text{Sin } f & \cos f \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \text{Cos } f' & -\text{Sin } f' \\ \text{Sin } f' & \text{Cos } f' \end{pmatrix}$$

puis $\text{Cos}(f \circ f') = \text{Cos } f \text{ Cos } f' - \text{Sin } f \text{ Sin } f'$

$\text{Sin}(f \circ f') = \text{Sin } f \text{ Cos } f' + \text{Cos } f \text{ Sin } f'$