Cet exposé permettra peut-être quand même à chacun d'entre nous de préparer un cours de première conforme aux recommandations officielles.

J. SAMSON

LE ROLE DES FIGURES

De tout temps, une étude géométrique s'est accompagnée et illustrée de figures.

Dans la "géométrie plane" (au sens traditionnel du mot) on identifie le plan à un "plan physique" (feuille de papier, tableau noir).
On sait représenter des points, des droites (règle), des droites perpendiculaires (équerre), des cercles (compas).

Les figures permettent d'illustrer un problème en rassemblant toutes les hypothèses, de suggérer certaines recherches, certaines démonstrations, de retrouver des résultats rigoureusement établis par ailleurs.

Les figures, tenant compte de toutes les "données" du problème, permettent d'appréhender "en bloc" une situation complexe, alors que le raisonnement, qui se déroule de façon linéaire, ne permet d'envisager une situation que lorsque précédente a été débrouillée.

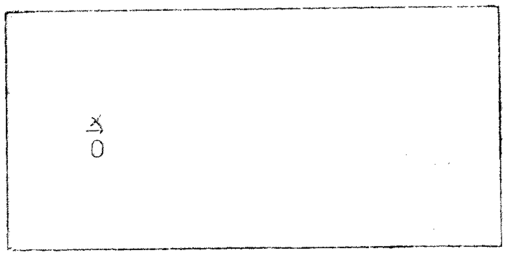
Les figures jouent un rôle appréciable d'aide mémoire : le candidat au baccalauréat qui fait un "petit dessin" pour comparer $\cos(\pi-x)$ et $\cos x$ en est bien convaincu.

Sauf dans quelques cas très particuliers, la figure seule ne justifie pas le résultat et ne le démontre pas.

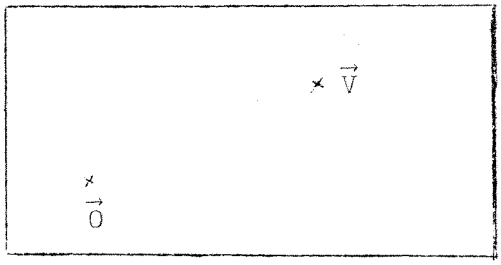
En "géométrie vectorielle" les figures jouent le même rôle qu'en "géométrie traditionnelle".

Le plan vectoriel Euclidien peut-être représenté à l'aide du "plan physique" de la manière suivante :

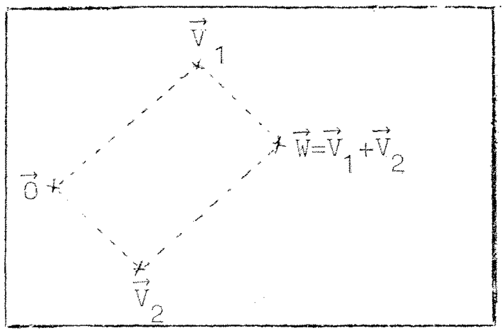
- On pointe le plan physique en marquant un point noté $\vec{0}$.



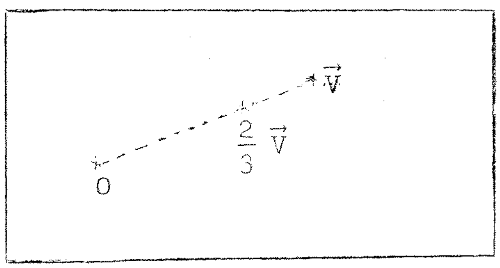
- Un point représente un vecteur :



La somme de deux vecteurs est représentée par un point, à l'aide de la règle du parallélogramme.

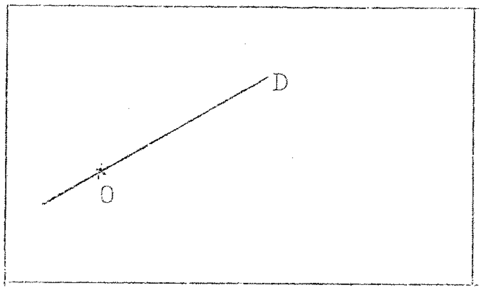


Le produit d'un vecteur par un nombre est représenté par un point construit par le procédé habituel (Thalès lorsque ce nombre est rationnel).



Une droite vectorielle D est représentée par une droite passant par $\vec{O}$.

L'orthogonalité de deux droites est obtenue par l'equerre.



Le cercle de rayon 1 ($\Gamma = \{\vec{V}\} \ \|\vec{V}\| = 1$) est construit à l'aide du compas en prenant comme centre le point représentant $\vec{O}$ et en prenant une certaine "ouverture" comme unité.

Notons que le compas est un instrument très commode pour représenter un produit scalaire, un plan vectoriel muni d'un produit scalaire sera facilement représenté à l'aide d'un tableau noir et d'un compas.

CE QUE L'ON SUPPOSE CONNU

Le but de cet article étant l'étude de la trigonométrie en classe de première, nous supposons connues les notions du programme de première indispensables à l'introduction de la trigonométrie, c'est à dire :

- Le produit scalaire et ses applications (titre V n°1 des programmes officiels) en particulier les deux résultats suivants qui seront très utiles dans l'étude des rotations :

(A) Si un vecteur $\vec{V}$ a comme coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ alors $a = \vec{v}.\vec{e}_1$, $b = \vec{v}.\vec{e}_2$ ($\vec{x}.\vec{y}$ désignant le produit scalaire du vecteur $\vec{x}$ par le vecteur $\vec{y}$).

(B) Il existe deux vecteurs unitaires $\vec{v}$ et $-\vec{v}$ et deux seulement, orthogonaux à un vecteur unitaire $\vec{u}$ donné.

- Le fait que les matrices, dans une base orthonormée, des applications linéaires du plan vectoriel dans lui-même qui conservent le produit scalaire (isométries) sont du type (1) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou (2) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

De nombreux manuels utilisent desnotions manifestement hors du programme (déterminant d'une application, changement de base). Il n'est absolument pas nécessaire de déborder du programme pour traiter la trigonométrie, comme nous allons tenter de le montrer.

<u>Classification des isométries</u> :

Le plan vectoriel étant rapporté à une base orthonormée B $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ il est possible de classer les isométries en deux familles (I) et (II) suivant que leurs matrices sont du type (1) ou du type (2). Cette classification étant définie en fonction d'une base B $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ n'est pas à priori intrinsèque.

Notons que :

- le déterminant d'une matrice du type (1) est égal à (+1), celui d'une matrice du type (2) est égal à (-1).
- l'ensemble des applications (I) muni de la composition des applications a une structure de groupe commutatif.
- l' ensemble des applications du type II n'est pas un groupe.

Il est possible de classer, de façon intrinsèque de la base choisie, les isométries en remarquant que :

1) l'application identique appartient à la famille (I)
2) toute application f de la famille (I) autre que l'application identique est telle que l'équation $f(\vec{v}) = \vec{v}$ n'admette comme solution que $\vec{v} = \vec{o}$.
3) l'équation $f(\vec{v}) = \vec{v}$ admet d'autres solutions que $\vec{v} = \vec{o}$ pour toute application du type (II).

Les applications du type (I) sont caractérisées indépendamment de la base choisie : on les appelle rotations vectorielles planes : on désignera par

$\mathcal{R}$ l'ensemble des rotations vectorielles planes. Notons que $\mathcal{R}$ muni de la loi de composition des applications o est un groupe commutatif et que la matrice d'une application f de $\mathcal{R}$ dans une base orthonormée est de type (1) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

ROTATIONS VECTORIELLES

La matrice de la rotation vectorielle f rapportée à la base orthonormée B $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ étant égale à $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, les coefficients a et b dépendent à priori de l'application f et de la base B c'est pourquoi nous noterons la matrice M de f dans la base B :

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} a(f,B) & -b(f,B) \\ b(f,B) & a(f,B) \end{pmatrix} \qquad (C)$$

Cette notation paut, à priori, paraître lourde mais elle a, entre autres avantages, celui de bien mettre en relief les paramètres dont sont susceptibles de dépendre a et b.

Théorème préliminaire :

Etant donné deux vecteurs unitaires $\vec{x}$ et $\vec{y}$ il existe une rotation φ et une seule telle que $\varphi(\vec{x}) = \vec{y}$. Les démonstrations de ce théorème peuvent être laissées au soin du maître ou de ses élèves. Notons que comme dans bien d'autres questions de mathématiques la démonstration la plus simple n'est pas toujours la plus naturelle donc celle qui sera à priori proposée par les élèves.

Une méthode consiste à rapporter le plan à une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ à désigner par $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ les coordonnées des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans cette base et à rechercher l'existence d'un couple (a,b) vérifiant $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ sachant que $\|\vec{x}\|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 1$ et que $\|y\|^2 = u^2 + v^2 = 1$.