MINI ORDINATEUR EN 6 EME ET 5 EME

par J. SAMSON Professeur au Lycée de Strasbourg-Neudorf.

S'il est vrai que "comprendre les mathématiques" ne signifie pas savoir calculer, il est bien clair que certains échecs en mathématiques se produisent chez des sujets aux capacités intellectuelles normales qui, pour des raisons diverses, n'ont pas pris l'habitude de calculer correctement et qui finissent par ne pas pouvoir comprendre les diverses articulations d'une démonstration, parce que, dans cette démonstration figure une suite de calculs ("algébriques" ou autre) qu'ils n'arrivent que péniblement à reconstituer.

En l'état actuel des choses (1), pour bien comprendre ce qui se passe, il est peut-être bon d'analyser au niveau de l'entrée en 6 ème , puis au niveau du B.E.P.C. , les connaissances et les faiblesses des élèves dans la pratique du "calcul quotidien".

Un élève sortant du CM 2 sait en pratique faire les quatre opérations : il ne confond que rarement l'addition et la multiplication (2) . Il peut dans un problème où il s'agit de "mathématiser" une situation "concrète"(3) ne pas savoir quelle opération faire ; mais, quelle que soit l'opération considérée, même si elle n'a aucun rapport avec le problème posé, le résultat en est en général correct. La signification de l'opération n'est pas toujours, et de loin, bien comprise mais la technique est en général bien assimilée.

(1) Les nouveaux programmes de 6ème et 5ème puis ceux de 4ème et 3ème vont peut-être modifier favorablement la situation décrite.

(2) Il est curieux de constater que la confusion entre 2×3 et $2 + 3$ ne se produit presque jamais au début de la classe de 6ème et voit sa fréquence augmenter en 4ème et en 3ème. N'est-pas au moment où les élèves apprennent que $a^m \times a^n = a^{m+n}$ que cette confusion se prépare ?

(3) "concrète" est mis entre guillemets parce-que de nombreux problèmes dits concrets sont en réalité très artificiels et ne reflètent en aucun cas la réalité.

Un élève qui entre en 6 ème n'a (et ceci est parfaitement normal) aucune notion de l'ordre dans lequel les opérations doivent être effectuées au sein d'une suite d'opérations. Il effectuera, dans presque tous les cas, les opérations dans l'ordre où elles se présentent dans le sens habituel de la lecture.

Ainsi $8 + 2 \times 3 = 30$ (on effectue successivement de gauche à droite l'addition puis la multiplication)

$2 \times 3 + 8 = 14$ (cette fois la multiplication se présentant en premier sera effectuée en premier).

En classe de 3 ème , à l'épreuve de mathématiques du B.E.P.C., surgissent un certain nombre de fautes dites graves : celles qui provoquent des réactions "épidermiques" violents chez qui les rencontre et dont la fréquence peut être cause d'un certain nombre d'infarctus ou de dépressions nerveuses.

J'en cite quelques unes : $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ (A)

$(a + b)^2 = a^2 + b^2$ (B)

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$ (C)

$\frac{a + c}{a + d} = \frac{c}{d}$ (on simplifie par a) (D) (4)

Si on analyse les origines de ces fautes (les autres fautes constatées en sont bien souvent des variétés allotropiques). On constate en gros trois causes possibles deux d'entre elles sont d'ordre mathématique la troisième plutôt d'ordre psychologique.

(4) On peut remarquer que (B) est une conséquence tout à fait logique de (A) et que (D) s'explique très bien à partir de (C) si l'on confond l'élément neutre de l'addition et celui de la multiplication.

1) Confusion entre la structure additive et la structure multiplicative (exemple (C) et (D)).

2) Non connaissance de l'importance de l'ordre dans lequel les opérations sont effectuées et ignorance des codifications régissant cet ordre : ainsi pour justifier (B) un élève pourrait très bien dire "on m'a demandé d'additionner, d'élever au carré, c'est ce que j'ai fait" .

3) Le manque de réflexion, la tentation d'appliquer un mécanisme non compris, de bâcler, de se débarrasser le plus vite possible de son travail (5) .

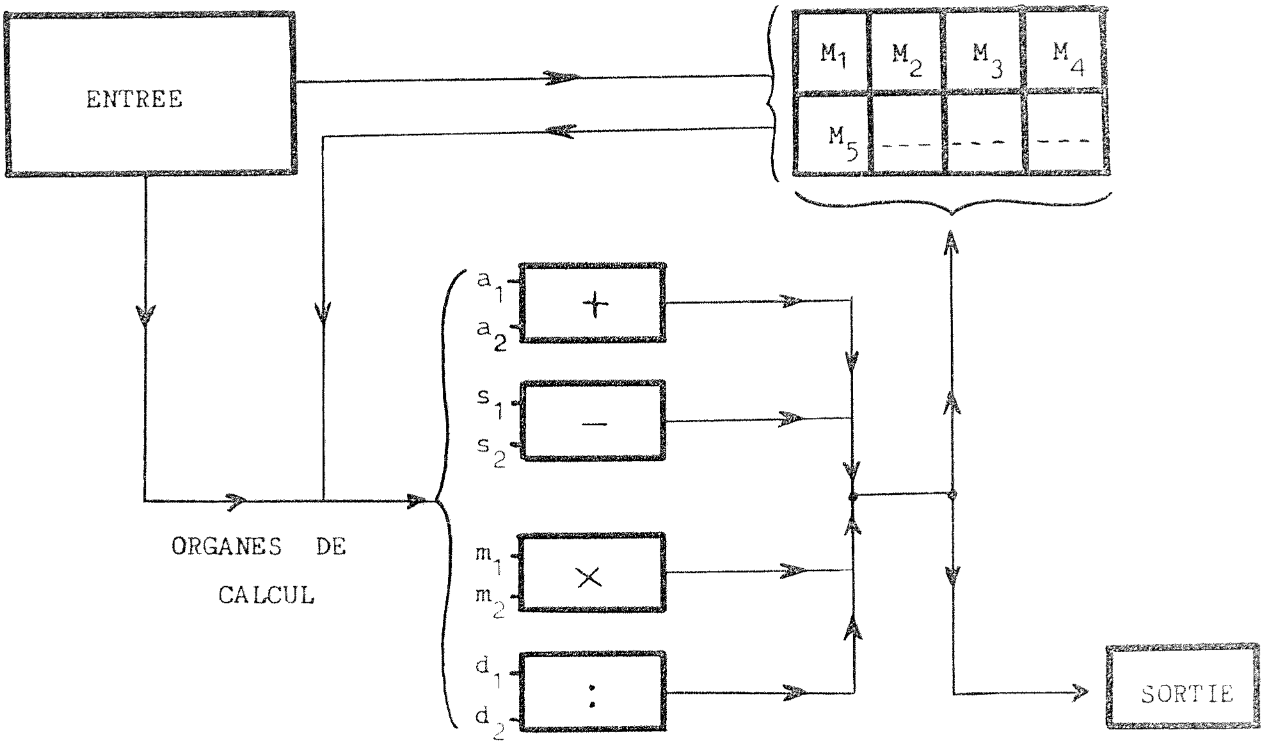
Il est assez évident que ces trois causes ne sont pas "indépendantes" qu'une motivation suffisante permet de favoriser l'attention nécessaire pour éviter les fautes citées, qu'une connaissance des règles régissant l'ordre dans lequel des opérations doivent être effectuées permet d'éviter les confusions entre deux structures distinctes et par conséquent qu'un remède apporté à l'une des trois causes de "déviation" citées réagit favorablement sur les deux autres.

Le "mini ordinateur" a été expérimenté dans mes classes à différents niveaux ; je l'ai en particulier utilisé en 6 ème et 5 ème pour permettre aux élèves de bien comprendre l'ordre dans lequel les opérations doivent être effectuées au cours d'une suite de calculs.

Le mini-ordinateur n'est qu'un plan, qu'un dessin sur une feuille de papier ; figurent sur ce plan, une entrée, des mémoires, des organes de calculs, une sortie .

(5) L'élève de seconde ou première qui calcule un discriminant et qui ne peut interpréter le résultat trouvé en est une illustration. Dans quelle mesure est-il bon de faire acquérir des "automatismes" ? Ne vaut-il pas mieux essayer de reprendre, même de façon succinte un raisonnement plutôt que d'appliquer un résultat que l'on ne sait pas toujours rapprocher de son contexte ?

Un schéma permet de comprendre aisément son fonctionnement.



Les données peuvent être envoyées en mémoire ou aux entrées des organes de calcul, les contenus des mémoires peuvent être envoyés dans les entrées des organes de calculs, les résultats des calculs effectués peuvent être acheminés soit vers le mémoire soit vers la sortie.

Si l'on effectue une opération $(x,y) \longmapsto x * y$ le premier élément du couple (x,y) doit nécessairement être adressé à une entrée de calcul portant le n° 1, le deuxième élément à une entrée portant le n° 2. Les diverses données se combinent entre elles au moyen d'opérations qu'il est nécessaire de préciser et dont il est nécessaire de préciser l'ordre. L'élève qui doit indiquer la suite des opérations à effectuer se comporte comme un aiguilleur, il doit indiquer l'origine et la destination des nombres qu'il manipule (6). La suite d'instructions donnée par l'élève constitue un programme et nous utilisons le verbe programmer à la place de la locution "fabriquer un programme".

Ainsi pour programmer $7 + 3$ nous formons le schéma suivant :

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{l} 7\ E \longrightarrow a_1 \\ 3\ E \longrightarrow a_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} S$$

$3 + 7$ se programmera de la façon suivante :

$$(2) \qquad \left.\begin{array}{l} 3\ E \longrightarrow a_1 \\ 7\ E \longrightarrow a_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} S$$

Un élève ayant à programmer $7 + 3$ utilise le programme (2) est-ce grave ? En aurait-il été de même pour les opérations $\times$? : ? - ?

La notion de commutativité apparait alors très vite.

Programmons maintenant $2 \times 3 \times 5$: les élèves entrant en 6ème et effectuant les opérations dans l'ordre indiqué de droite à gauche proposeront alors de calculer 2×3 et de multiplier le produit obtenu par 5 (7).

Nous obtenons alors le programme suivant :

$$\left.\begin{array}{l} 2\ \ E \longrightarrow m_1 \\ 3\ \ E \longrightarrow m_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times} M_1$$

$$\left.\begin{array}{l} \ \ \ M_1 \longrightarrow m_1 \\ 5\ \ E \longrightarrow m_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times} S$$

Ce programme nécessite l'utilisation d'une mémoire.

(6) Il est possible avec des élèves de 6ème de réaliser effectivement ces manipulations en matérialisant les nombres sur de petits bouts de carton découpé et en promenant ces cartons comme des wagons, dans une gare de triage.
Certains films de Dienes montrent des réalisations analogues effectuées dans un contexte différent (classification d'éléments en fonction de "critères" donnés).

(7) Cette "invocation" au bon sens de l'élève est tout à fait artificielle programmer à ce stade $2 + 3 \times 5$ conduirait à une catastrophe ; l'élève est ce qu'il est, et une certaine "directivité" est nécessaire dans le choix des exemples.

Il est difficile de réaliser à ce stade des programmes plus compliqués, il vaut mieux faire analyser des programmes "tout fait" pour faire découvrir aux élèves les "règles de priorité" régissant les diverses opérations.

<u>Exemple</u> : soit le programme :

$$\left.\begin{array}{l} 2 \quad E \longrightarrow a_1 \\ 3 \quad E \longrightarrow a_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\;+\;} M_1$$

$$\left.\begin{array}{l} M_1 \longrightarrow m_1 \\ 5 \quad E \longrightarrow m_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\;\times\;} S$$

Entourer d'un rectangle, pour écrire ce programme sur une seule ligne, les termes entrant dans le même registre de calcul.

On trouve successivement $\boxed{M_1 \quad 5} \longrightarrow S$

puis en demandant d'expliciter le contenu de M

$$\boxed{\boxed{2 \quad 3} \quad 5} \longrightarrow S$$

en explicitant les opérations à effectuer et en désignant par s le contenu de S on est amené à écrire

$$\boxed{\boxed{2 + 3} \times 5} = s$$

On demande alors aux élèves d'effectuer les calculs dans l'ordre proposé par le programme. On trouve successivement

$\boxed{\boxed{2 + 3} \times 5}$ $\quad$ $\boxed{5 \times 5} = 25$ qui permet de préciser le contenu de S

Le programme

$$\left.\begin{array}{l} 3 \quad E \longrightarrow m_1 \\ 5 \quad E \longrightarrow m_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\;\times\;} M_1$$

$$\left.\begin{array}{l} 2 \quad E \longrightarrow a_1 \\ M_1 \longrightarrow a_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\;+\;} S$$

conduit à écrire $\boxed{2 + M_1} = s$ soit $\boxed{2 + \boxed{3 \times 5}} = s$

puis $\boxed{2 + \boxed{3 \times 5}} \quad = \quad \boxed{2 + 15} \quad = \ 17$ résultat que l'on peut vérifier en utilisant le programme donné .

Il est alors possible de faire passer les élèves des "rectangles" à un programme. Par exemple :

programmer $\boxed{\boxed{\boxed{2 \times 3} \ + 5} \ \times 2}$

on trouve le programme suivant :

$$\left.\begin{array}{l} 2 \quad E \longrightarrow m_1 \\ 3 \quad E \longrightarrow m_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times} M_1$$

$$\left.\begin{array}{l} M_1 \longrightarrow a_1 \\ 5 \quad E \longrightarrow a_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} M_2$$

$$\left.\begin{array}{l} M_2 \longrightarrow m_1 \\ 2 \quad E \longrightarrow m_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times} S$$

Nous sommes alors arrivés à la connaissance d'une écriture qui permet de représenter tout programme et dont la lecture permet de reconstituer le programme correspondant. La prise de conscience de cette espèce de "correspondance bijective" étant faite, il reste, lorsque cette écriture est bien comprise c'est-à-dire lorsque tout élève est capable de faire la liaison écriture $\leftrightarrows$ programme (ce qui est rapide même chez les élèves dits "non doués") à passer de cette écriture à l'écriture usuelle.

Pour ce faire, il suffit d'expliquer que les parenthèses ont même effet que lesrectangles, par exemple on pourra remplacer :

$\boxed{\boxed{\boxed{2 \times 3} \ + 5} \ \times 2}$ par $(((2 \times 3) + 5) \times 2)$ puis (quelques précautions oratoires sont nécessaires) par $[(2 \times 3) + 5] \times 2$

Il reste alors à expliquer la règle de priorité de la multiplication par rapport à l'addition qui s'énonce simplement par le fait qu'il est inutile d'entourer d'un rectangle les deux facteurs d'un produit ce qui pourra par exemple s'exprimer de la façon suivante :

$$\boxed{2 + \boxed{3 \times 15}} \quad = \quad \boxed{2 + 3 \times 15} \quad \text{ou} \quad 2 + 3 \times 15 = 2 + (3 \times 15)$$

Il reste alors à s'assurer que l'élève est capable de transcrire l'écriture traditionnelle soit en utilisant les rectangles soit en réalisant le programme correspondant à cette écriture, par exemple écrire :

$7 + 2 \times 3$ sous la forme $\boxed{7 + \boxed{2 \times 3}}$ puis rédiger le programme

$$\left.\begin{array}{l} 2 \;\; E \longrightarrow m_1 \\ 3 \;\; E \longrightarrow m_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\times} M_1$$

$$\left.\begin{array}{l} 7 \;\; E \longrightarrow a_1 \\ M_1 \longrightarrow a_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{+} S$$

Il est bon, si l'on introduit le mini ordinateur en classe, de l'introduire avant l'étude de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Cette notion parait difficile parce que les élèves comprennent mal le problème posé. L'étude de quelques programmes permet de mieux faire comprendre ce qui se passe.