ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

Revue internationale de didactique des mathématiques

Rédacteurs en chef :

PHILIPPE R. RICHARD, LAURENT VIVIER

Volume 29 - 2024

IREM de Strasbourg

Université de Strasbourg

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
ISSN 0987-7576 (imprimé) – ISSN : 2804-2514 (en ligne)

Éditeur

IREM de Strasbourg – Université de Strasbourg
7, rue René Descartes 67084 Strasbourg CEDEX
Tél. : +33 (0)3 68 85 01 30
irem@math.unistra.fr

Bibliothèque et édition électronique

Christine CARABIN
Tél : +33 (0)3 68 85 01 61
http://irem.unistra.fr

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
VOLUME 29 – 2024

SOMMAIRE

ÉDITORIAL DU NUMERO 29

Pourquoi les *Annales de didactique et de sciences cognitives* portent-elles ce nom ? Lors de leur fondation en 1988, ce choix audacieux traduisait une ambition forte : explorer les liens entre la didactique des mathématiques et les sciences cognitives. Cette démarche s'appuyait sur trois axes théoriques majeurs : l'intelligence artificielle, alors en plein essor (Newell & Simon, 1972) ; les recherches sur la mémoire sémantique et la compréhension du langage naturel (Schank, 1972) ; et la logique naturelle de J.B. Grize (1983). Comme le rappelle Raymond Duval (voir ci-après), ces fondations interdisciplinaires ont ouvert des perspectives prometteuses pour analyser l'activité mathématique. Aujourd'hui, alors que l'intelligence artificielle occupe une place centrale dans les débats éducatifs et sociétaux, revisiter ces origines met en lumière la pertinence et la modernité de cette approche visionnaire. En particulier, nous sommes très attentifs à la soumission d'étude sur la prise en compte de l'intelligence artificielle en didactique des mathématiques.

Ce numéro est d'abord marqué par un hommage à François Pluvinage, cofondateur des *Annales*. En écho à celui publié dans le numéro 25, cette contribution rédigée par Raymond Duval offre un regard très personnel sur l'immense apport de François à la didactique des mathématiques, notamment à travers ses travaux sur la visualisation mathématique et la sémio-cognition. Son influence durable imprègne non seulement notre revue, mais également la communauté didactique dans son ensemble, constituant ainsi un héritage vivant et inspirant.

Dans ce numéro 29, les travaux présentés explorent une diversité de thématiques et de problématiques. L'article de Nadine Chapdelaine et ses collègues examine le lien entre raisonnement fluide et fonctions exécutives chez des élèves ayant un trouble du spectre de l'autisme. En mettant en évidence le rôle central du raisonnement fluide pour améliorer les compétences mathématiques de ces élèves, cet article offre des perspectives concrètes pour une pédagogie plus inclusive. À un autre niveau, Rozenn Texier-Picard, Ghislaine Gueudet et Murielle Gerin se penchent sur les asymétries genrées dans les classes préparatoires scientifiques. Leur analyse, basée sur des observations et des carnets de bord, propose des pistes pour déconstruire les stéréotypes qui influencent les trajectoires des étudiantes.

Les articles suivants mettent l'accent sur l'innovation pédagogique et les dynamiques institutionnelles. Lalina Coulange et Grégory Train interrogent l'enseignement des fractions à l'école primaire française en testant des tâches issues d'autres contextes éducatifs. Leur contribution explore comment ces approches peuvent enrichir le curriculum et faciliter l'apprentissage des concepts fondamentaux. Dans une perspective complémentaire, Éric Mounier et son équipe analysent l'impact de la taille des nombres sur les stratégies utilisées par les élèves pour résoudre des problèmes arithmétiques. Ces résultats offrent des recommandations pour améliorer les pratiques pédagogiques au primaire.

Les questions d'articulation entre production et institutionnalisation des savoirs sont abordées dans deux articles. Julián Santos explore, à travers un essai théorique, l'équilibre entre les composantes adidactiques et didactiques en ingénierie didactique, soulignant l'importance d'intégrer l'institutionnalisation dans le processus de conception. Parallèlement, Jean-Pierre Bourgade et Clément Durringer étudient comment les manuels scolaires reflètent les tensions dans l'organisation didactique, mettant en lumière des leviers pour renforcer la cohérence pédagogique.

Enfin, Derya Diana Cosan se concentre sur les écarts praxéologiques dans la transition entre le secondaire inférieur et supérieur, en prenant le cas de l'algèbre scolaire au Danemark. En examinant les différences dans l'approche des institutions, cet article offre des perspectives pour mieux accompagner les élèves dans cette étape critique de leur parcours éducatif.

Nous remercions chaleureusement les auteurs pour leurs contributions, les relecteurs pour leur engagement et leur rigueur, ainsi que l'IREM de Strasbourg, qui assure avec dévouement la publication et la diffusion des *Annales*. Ce numéro offre des perspectives riches et stimulantes pour la communauté et témoigne de la vitalité et de la diversité des recherches en didactique des mathématiques. Nous vous souhaitons une lecture enrichissante et inspirante.

L'équipe de direction scientifique des ADSC : Philippe R. Richard et Laurent Vivier

NADINE CHAPDELAINE, ERIKA-LYNE SMITH, NATHALIE POIRIER

LIENS ET VALEURS PRÉDICTIVES DU RAISONNEMENT FLUIDE ET DES FONCTIONS EXÉCUTIVES SUR LES HABILETÉS EN MATHÉMATIQUES D'ÉLÈVES QUÉBÉCOIS AYANT UN TROUBLE DU SPECTRE DE L'AUTISME

Abstract. Links and predictive values of fluid reasoning and executive functions on the mathematical skills of adolescents with autism spectrum disorder. Autism Spectrum Disorder (ASD) is a neurodevelopmental disorder characterized by deficits in social communication and restricted/repetitive patterns of behaviours. Mathematical abilities can be influenced by executive functions and fluent reasoning. This study describes the mathematical skills of 20 Quebec students with ASD and the predictive values of fluent reasoning and executive functions on these skills. Results reveal overall mathematics scores within the low average range. Fluid reasoning and executive functions are significantly correlated with mathematical skills. According to the regression analysis, fluent reasoning skills significantly predict mathematical abilities unlike executive functions. To optimize mathematical success, intervention should target fluent reasoning.

Keywords. adolescents, autism spectrum disorder, mathematical skills, fluent reasoning, executive functioning

Résumé. Le trouble du spectre de l'autisme (TSA) est un trouble neurodéveloppemental manifesté par des déficits de la communication sociale et par le caractère restreint des comportements. Les habiletés en mathématiques semblent influencées par les fonctions exécutives et le raisonnement fluide. Cette étude décrit les habiletés en mathématiques de 20 élèves québécois ayant un TSA ainsi que les valeurs prédictives du raisonnement fluide et des fonctions exécutives. Les habiletés en mathématiques sont au niveau de la moyenne faible. L'indice de raisonnement fluide et les fonctions exécutives sont corrélés aux habiletés en mathématique, mais seulement les habiletés de raisonnement fluide prédisent significativement les habiletés en mathématique. Les résultats montrent l'importance de développer le raisonnement fluide.

Mots-clés. adolescents, trouble du spectre de l'autisme, habiletés en mathématiques, raisonnement fluide, fonctions exécutives

---

Les adolescents ayant un trouble du spectre de l'autisme (TSA) peuvent présenter des difficultés associées à leur diagnostic pouvant influencer leurs apprentissages scolaires. La littérature scientifique documente la présence de particularités telles qu'un profil cognitif hétérogène (Bernard *et al.*, 2016 ; Courchesne *et al.*, 2016 ; Mayes & Calhoun, 2008 ; Nader *et al.*, 2015 ; Oliveras-Rentas *et al.*, 2012), des

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 29, p. 9 – 29.

lacunes sur le plan des fonctions exécutives (Kim & Cameron, 2016) ainsi qu'une force relevant des habiletés de raisonnement fluide (Bernard *et al.*, 2016 ; Courchesne *et al.*, 2016 ; Mayes & Calhoun, 2008 ; Nader *et al.*, 2015 ; Oliveras-Rentas *et al.*, 2012). Plusieurs élèves ayant un TSA obtiennent des résultats inférieurs à ceux attendus selon leur profil cognitif (Estes *et al.*, 2011). En effet, les particularités cognitives semblent influencer la réussite scolaire de ces jeunes et peuvent mener à des défis scolaires supplémentaires, notamment en lien avec la réussite en mathématique.

En plus des changements propres à l'adolescence ainsi qu'à ceux liés à l'environnement de l'école secondaire, les élèves présentant un TSA doivent s'adapter à l'augmentation des exigences scolaires. En mathématiques, les apprentissages deviennent davantage abstraits et nécessitent des capacités d'analyse et de raisonnement plus approfondies (MÉES, 2016 ; MÉLS, 2009). La littérature scientifique documente peu les habiletés en mathématiques des adolescents ayant un TSA. Toutefois, certaines études suggèrent un lien entre la réussite dans ce domaine et les habiletés de raisonnement fluide (Oswald *et al.*, 2016) et des fonctions exécutives, « principalement dans la mémoire de travail et l'inhibition » (Polo-Blanco *et al.*, 2024, p. 361).

Cette étude permet de documenter la réalité scolaire de 20 élèves québécois ayant un TSA en lien avec leurs habiletés en mathématiques. De plus, l'implication des habiletés de raisonnement fluide ainsi que des fonctions exécutives sur ce domaine d'apprentissage est explorée. Accroître ces connaissances est nécessaire afin de mieux comprendre les défis de ces élèves et de mettre en place des interventions ciblées dans le but d'optimiser leur réussite en mathématiques.

1. Cadre théorique

1.1. Trouble du spectre de l'autisme

Le TSA est un trouble neurodéveloppemental qui se manifeste par des déficits de la communication sociale et par le caractère restreint et répétitif des comportements, des intérêts et/ou des activités. Les symptômes du TSA influencent le fonctionnement quotidien, incluant les mécanismes d'apprentissage des élèves (American Psychiatric Association (APA), 2015). Par exemple, les élèves ayant un TSA sont susceptibles de porter attention aux détails et de présenter des atouts dans l'application des règles et des procédures (Baron-Cohen, 2002). Par ailleurs, une étude récente effectuée auprès de plus de 40 000 enfants et adolescents ayant un TSA rapporte qu'une grande majorité (74 %) de ceux-ci présentent un trouble associé, dont le plus fréquent est le déficit de l'attention/hyperactivité (TDAH, 35,3 % ;

Khachadourian *et al.*, 2023). Les jeunes qui présentent un TSA tendent, de surcroit, à être pourvus d'un profil intellectuel hétérogène.

1.2. Profil intellectuel des adolescents ayant un trouble du spectre de l'autisme

L'évaluation du profil intellectuel permet d'expliquer de façon générale les forces et les faiblesses des jeunes, ainsi que de prévoir d'éventuelles difficultés scolaires (Lafay *et al.*, 2014). Les adolescents ayant un TSA montrent une hétérogénéité quant à leurs habiletés intellectuelles (Bernard *et al.*, 2016 ; Courchesne *et al.*, 2016 ; Mayes & Calhoun, 2008 ; Nader *et al.*, 2015 ; Oliveras-Rentas *et al.*, 2012). Plus précisément, leur performance à l'échelle d'intelligence de Wechsler pour enfants varie d'un sous-test à l'autre (Cederlund & Gillberg, 2004). Certaines études montrent que les élèves ayant un TSA font preuve de meilleures habiletés pour l'indice de raisonnement fluide (Courchesne *et al.*, 2016 ; Mayes & Calhoun, 2008 ; Nader *et al.*, 2015 ; Oliveras-Rentas *et al.*, 2012) et pour l'indice de compréhension verbale (Courchesne *et al.*, 2016 ; Mayes & Calhoun, 2008 ; Nader *et al.*, 2015 ; Oliveras-Rentas *et al.*, 2012). Par ailleurs, le profil intellectuel des jeunes qui présentent un TSA peut influencer leurs apprentissages en mathématiques. En effet, certaines habiletés intellectuelles prédisent les compétences en mathématiques d'élèves tout-venant, telles que l'indice de raisonnement fluide (Green *et al.*, 2017 ; Taub *et al.*, 2008) et l'indice de vitesse du traitement de l'information (Taub *et al.*, 2008). La même tangente est observée chez les élèves ayant un TSA, mais peu de littérature scientifique concerne l'apprentissage des mathématiques de ces derniers (Oswald *et al.*, 2016). Selon une étude réalisée auprès de 27 adolescents âgés entre 11 et 17 ans ayant un TSA, l'indice de raisonnement fluide serait un prédicteur important de la réussite en mathématiques de ces élèves (Oswald *et al.*, 2016). Le raisonnement fluide est défini comme étant la capacité de raisonner, de formuler des concepts et de résoudre des problèmes en intégrant de nouvelles informations et de nouvelles règles aux connaissances déjà acquises (Au *et al.*, 2015 ; Otero, 2017). Certains auteurs proposent également que les fonctions exécutives influencent la réussite en mathématique des élèves qui présentent un TSA (Polo-Blanco *et al.*, 2024).

1.3. Fonctions exécutives

Les fonctions exécutives sont un ensemble de processus mentaux nécessaires à la réalisation d'un objectif et à l'adaptation de la personne à son environnement (Plumet, 2013). Elles s'illustrent entre autres, par les habiletés à planifier, à organiser, à initier et à orienter l'attention, à inhiber les stimulations non pertinentes et à s'adapter aux situations nouvelles (O'Hearn *et al.*, 2008). L'étude d'Ozonoff et Jensen (1999) indique que les enfants ayant un TSA présentent un manque de flexibilité cognitive et de planification. De plus, celle de Kim et Cameron (2016) rapporte une difficulté à manipuler l'information mentalement. Bien que la contribution des fonctions cognitives à la réussite scolaire des jeunes ayant un TSA manque de compréhension (John *et al.*, 2018), plusieurs études font un lien entre les fonctions exécutives et l'apprentissage des mathématiques chez les enfants tout-venant (Bull & Lee, 2014 ; Cragg & Gilmore, 2014) et chez des enfants de 6 à 12 ans qui présentent un TSA (Polo-Blanco *et al.*, 2024). Selon la revue de la littérature scientifique effectuée par Kim et Cameron (2016), les études répertoriées illustrent des difficultés plus importantes chez les élèves ayant un TSA en lien avec les exercices en mathématiques qui nécessitent un traitement complexe (résolution de problème, opérations numériques). Conséquemment, ces élèves tendent à montrer de plus grandes lacunes pour les activités en mathématiques qui font appel aux fonctions exécutives (Polo-Blanco *et al.*, 2024). Selon John *et al.* (2018), les fonctions exécutives prédisent la réussite en mathématiques de ces élèves à l'école primaire. Or, cette réalité au niveau secondaire est peu documentée dans la littérature scientifique.

1.4. Mathématiques au secondaire

Au Québec, les compétences mathématiques développées en milieu scolaire secondaire s'énoncent ainsi : résoudre une situation-problème, déployer un raisonnement mathématique et communiquer à l'aide du langage mathématique (MÉLS, 2001). La première compétence, résoudre une situation-problème, nécessite que l'élève puisse décoder, modéliser, vérifier, expliquer et valider. La résolution d'un problème mathématique implique d'anticiper et d'avoir un jugement critique. Tel que le spécifie le MÉLS (2006), ce processus dynamique favorise la démarche « de découverte » et fait appel au raisonnement et à l'intuition créatrice. La deuxième compétence, déployer un raisonnement mathématique, fait appel à la formulation de conjectures, à la critique, à la justification et à l'affirmation ou l'infirmation d'énoncés.

Sur le plan des apprentissages en mathématiques, plusieurs savoirs essentiels comme les nombres et les opérations, les nombres naturels, les fractions et les nombres décimaux (MÉES, 2009 ; MÉES, 2016) sont abordés de différentes façons, ce qui rend difficile la généralisation des apprentissages d'un niveau scolaire à l'autre (Bednarz *et al.*, 2009). À l'école secondaire, les apprentissages par mémorisation sont par ailleurs délaissés, au profit du traitement approfondi et de l'intégration de l'information (Attwood, 2008 ; Lafortune, 2013). De plus, plusieurs changements conceptuels s'effectuent avec l'apprentissage de l'algèbre et de la géométrie analytique, qui réfère à la description des objets par des équations à l'aide d'un système de coordonnées (Bednarz & Janvier, 1996). Les notions enseignées au secondaire font davantage appel au raisonnement mathématique, à la pensée abstraite et à la résolution de problème. Cette transition entre l'école élémentaire, où l'accent est mis sur les activités procédurales, à l'école secondaire, où l'approche est plus conceptuelle, peut expliquer pourquoi les élèves ayant un TSA commencent à prendre du retard par rapport à leurs pairs au développement typique au secondaire (Barnett & Cleary, 2015). Cependant, les aptitudes sur le plan du traitement visuel des objets des élèves ayant un TSA peuvent leur être bénéfiques dans l'apprentissage de l'algèbre, qui inclut la reconnaissance de motifs et la résolution de problèmes numériques (Iuculano *et al.*, 2014). Il semble pertinent de mieux comprendre les habiletés en mathématiques des adolescents ayant un TSA puisque selon Iuculano *et al.* (2014), l'apprentissage des mathématiques favorise une meilleure organisation structurelle du cerveau de ces élèves et améliore leur développement cognitif.

2. Objectifs

Les objectifs de cette étude sont de : a) documenter les habiletés en mathématiques (opérations numériques et raisonnement mathématique) de 20 élèves québécois qui présentent un TSA ainsi que b) d'identifier les liens et les valeurs prédictives du raisonnement fluide et des fonctions exécutives sur leurs habiletés en mathématiques.

3. Méthodologie de la recherche

3.1. Participants

Vingt adolescents présentant un TSA ont participé à l'étude (19 garçons et une fille). Tous les participants sont âgés entre 12 et 17 ans (M = 14,73) et ont reçu un diagnostic de TSA à un âge moyen de six ans. Ceux-ci sont scolarisés dans une école ordinaire de niveau secondaire ; sept fréquentent une classe ordinaire, douze fréquentent une classe spécialisée et un jeune est scolarisé à la maison. Quelques adolescents reçoivent du soutien individuel de la part des professionnels du milieu scolaire, soit en orthopédagogie ($n = 4$), en éducation spécialisée ($n = 2$) ou en psychologie ($n = 2$). De plus, plusieurs participants ont un traitement pharmacologique ($n = 14$) qui a été respecté lors de l'expérimentation. Plusieurs participants présentent au moins un trouble concomitant (M = 1,47 ; min = 0 ; max = 4) soit le déficit de l'attention/hyperactivité (TDAH) ($n = 12$), les troubles spécifiques des apprentissages ($n = 5$), le trouble développemental de la coordination ($n = 3$), les troubles anxieux ($n = 3$), le trouble de la communication ($n = 3$), le syndrome de Gilles de la Tourette ($n = 1$) et d'autres troubles non répertoriés ($n = 2$) dans le Manuel diagnostique et statistique des troubles mentaux – cinquième édition (APA, 2015).

3.2. Instruments

3.2.1 Fiche signalétique

Afin d’obtenir des renseignements sociodémographiques ainsi que des informations plus spécifiques sur l’adolescent, les parents ont rempli une fiche signalétique. Cette dernière fut développée pour la présente recherche et inclut des informations telles que les diagnostics et l’âge auquel ils ont été émis, les services offerts à l’adolescent ainsi que son type de classe.

3.2.2 Échelle d’intelligence de Wechsler pour enfants - Cinquième version

Les participants de l’étude ont passé les 10 sous-tests principaux de l’Échelle d’intelligence de Wechsler pour enfants – Cinquième version [WISC-V] (Wechsler, 2014) afin d’évaluer leurs habiletés intellectuelles. Les normes standardisées canadiennes francophones ont été utilisées. Toutefois, cet article s’intéresse à l’indice de raisonnement fluide qui consiste en deux sous-tests, soit Matrices et Balances. Au sous-test Matrices, une série d’images telle une matrice incomplète est présentée à l’adolescent qui doit sélectionner, parmi un choix d’images, celle qui complète le modèle. Cette tâche évalue ainsi le raisonnement logique. Lors du sous-test Balances, l’adolescent regarde une balance imagée et doit identifier l’image qui permet de réaliser l’égalité parmi un choix de réponse, ce qui examine le raisonnement quantitatif. Aucune manipulation ou verbalisation de la part du participant n’est nécessaire pour ces deux sous-tests, qui requièrent seulement le traitement visuel.

3.2.3 Test de rendement individuel de Wechsler – Deuxième édition, version pour francophones du Canada

Les sous-tests Opérations numériques et Raisonnement mathématique du Test de rendement individuel de Wechsler (WIAT-II) ont été administrés. Ces épreuves ont permis d’obtenir le score de composante en mathématiques des jeunes de l’étude. Lors du sous-test Opérations numériques, l’adolescent doit résoudre des équations mathématiques à l’écrit, qui impliquent des additions, des soustractions, des multiplications, des divisions et de l'algèbre, selon son niveau scolaire. Pour le sous-test Raisonnement mathématique, une question est lue par l’examinateur et un soutien visuel est donné à l’adolescent afin d’évaluer sa capacité à résoudre des problèmes simples et complexes (qui nécessitent plus d’une étape). Les concepts de temps, de mesure et d’argent, l’interprétation de graphique, les statistiques et les probabilités peuvent être abordés, selon le niveau scolaire du participant.

3.2.4 Test d'évaluation de l'attention chez l'enfant

Les trois sous-tests du Test d'évaluation de l'attention chez l'enfant (TEA-Ch) qui mesurent les fonctions exécutives, celles-ci étant impliquées dans le contrôle attentionnel, ont été utilisés. Au sous-test Petits-hommes verts – note de temps, qui mesure la flexibilité cognitive, l'adolescent doit compter à l'endroit ou à rebours, le plus rapidement possible, en suivant le sens indiqué par des flèches. Au sous-test Mondes contraires, le jeune doit inhiber une réponse automatique et nommer un chiffre différent de celui qui lui est présenté. Finalement, lors du sous-test Marche-Arrête, l'adolescent doit effectuer un trait de crayon ou rester immobile, selon un signal sonore donné. Il doit ainsi ajuster son mouvement au rythme et l'inhiber au signal d'arrêt.

3.3. Procédure

Les participants ont été sollicités via les professionnels qui œuvrent auprès de ces jeunes ainsi que via les réseaux sociaux. Ceux-ci ont pris part à trois rencontres, lors desquelles la même expérimentatrice, une doctorante en neuropsychologie, a effectué l'administration des outils standardisés. La séquence d'administration des outils est demeurée la même pour chaque participant. Lors de la première rencontre, la fiche signalétique a été remplie et le WISC-V a été administré. À la seconde rencontre, les participants ont effectué le TEA-Ch et le WIAT-II a été administré lors de la dernière séance. De manière générale, les rencontres se sont déroulées sur une période de deux heures, dans une salle d'évaluation où le participant était seul avec l'expérimentatrice, qui lui était inconnue au début de la procédure.

3.4. Analyse des données

Grâce aux normes appropriées à l'âge de chaque participant, les scores bruts de chaque outil ont été transformés en scores pondérés. Afin d'identifier les forces et les faiblesses des adolescents, ces scores pondérés ont été comparés à la courbe normale. Des analyses descriptives et de fréquences ont été réalisées (moyenne, écarts-types et étendues) et des analyses de corrélation ont été effectuées afin d'identifier le lien entre les variables.

Par la suite, la réalisation d'une régression avec entrée forcée a permis de déterminer la variance expliquée par les variables, tout en contrôlant la variance expliquée par la présence d'un diagnostic associé de TDA/H. Les variables indépendantes entrées dans le modèle sont l'indice de raisonnement fluide et les résultats aux sous-tests qui mesurent les fonctions exécutives. Enfin, la variable dépendante est le score de composante en mathématiques.

4. Considérations éthiques

Le comité d'éthique de la recherche pour les projets étudiants (CERPE) qui impliquent des êtres humains de la Faculté des sciences humaines de l'Université du Québec à Montréal (UQAM) a accordé un certificat d'approbation éthique pour cette étude. Aussi, une lettre de convenance de la commission scolaire de la Pointe-de-l'Île (CSPI) a été obtenue.

5. Résultats

Le tableau 1 présente une synthèse de l'ensemble des résultats moyens obtenus des participants aux différents sous-tests administrés, ainsi que les écarts-types et les étendues. Ceux-ci sont élaborés dans la section qui suit.

5.1. Fonctionnement intellectuel et raisonnement fluide

Le quotient intellectuel (QI) moyen obtenu par les participants au WISC-V est de 95,68 et varie entre 75 et 139, ce qui le situe dans la moyenne de la courbe normative. Le résultat moyen de 101,57 (min = 74 ; max = 131) à l'indice de raisonnement fluide (IRF) se situe dans la moyenne de la courbe normale. La moyenne des scores pondérés au sous-test Matrices se situe dans la moyenne de la courbe normale, soit à 10,52 et varie entre 7 et 15. Finalement, la moyenne des scores pondérés de 10,05 au sous-test Balances est également dans la moyenne normative, variant entre 4 et 18.

5.2. Habiletés en mathématiques

Le résultat moyen au score de composante en mathématiques des participants, obtenu grâce à l'addition des sous-tests Opérations numériques et Raisonnement mathématique, est de 83,05 (min = 44 ; max = 141) et se situe dans la basse moyenne de la courbe normative. La moyenne des scores au sous-test Opérations numériques est de 84,84, variant entre 53 et 134, et se situe dans la basse moyenne. Selon les résultats obtenus à ce sous-test, 50 % de l'échantillon (n = 10) se situe à plus de –2 écarts-types de la moyenne normative, 5 % (n = 1) à -1,5 écart-type, 10 % (n = 2) à -1 écart-type, 10 % (n = 2) à 0 écart-type, 10 % (n = 2) à 0,5 écart-type, 5 % (n = 1) à 1 écart-type, 5 % (n = 1) à 1,5 écart-type et 5 % (n = 1) à 2 écarts-types et plus.

Lorsque comparés à la courbe normale, les résultats obtenus des adolescents au sous-test Raisonnement mathématique se situent dans la basse moyenne. Plus précisément, la moyenne des scores est de 81,70 et celle-ci varie entre 40 et 141. À ce sous-test, 50 % de l'échantillon (n = 10) se situe à plus de –2 écarts-types de la moyenne normative, 10 % (n = 2) à –1,5 écart-type, 5 % (n = 1) à –1 écart-type, 10 % (n = 2) à –0,5 écart-type, 10 % (n = 2) à 0 écart-type, 10 % (n = 2) à 1,5 écart-type et 5 % (n = 1) à 2 écarts-types et plus en comparaison à la moyenne normative attendue.

5.3. Fonctions exécutives

Sur le plan de la flexibilité cognitive, la moyenne des scores standards obtenus à l'épreuve les Petits-hommes verts est de 8,1 (min = 3 ; max = 15) et se situe dans la moyenne de la courbe normale. En lien avec le sous-test Mondes contraires, la moyenne des résultats pour la tâche Monde à l'endroit est de 7,6 (min = 1 ; max = 15) et elle est de 8,2 (min = 1 ; max = 17) pour Monde à l'envers. Ces résultats situent ainsi les participants au niveau de la basse moyenne et de la moyenne pour ces deux tâches. Finalement, la moyenne des résultats à l'épreuve d'inhibition, mesurée par le sous-test Marche-Arrête, est de 12,15 et varie entre 1 et 16, ce qui situe les participants dans la haute moyenne de la courbe normative. Le tableau 1 illustre les moyennes, les écarts-types et les étendues des scores obtenus pour les diverses variables.

Tableau 1. Les moyennes, les écarts-types et les étendues des scores obtenus

Variables	Moyennes	Écarts-types	Étendues
Indice de raisonnement fluide (IRF)	101,57	15,22	74 – 131
Matrices (Ma)	10,52	2,7373	7 – 15
Balances (Ba)	10,05	3,34	4 – 18
Score de composante en mathématiques (Sc-M)	83,05	28,05	44 – 141
Opérations numériques (ON)	84,84	23,62	53 – 134
Raisonnement mathématique (RM)	81,70	30,88	40 – 141
Petits-hommes verts - note de temps (PHV-n)	8,1	3,61	3 – 15
Marche-Arrête (M-A)	12,15	4,18	1 – 16
Mondes contraires - monde à l'envers (MC-env)	8,2	3,95	1 – 17
Mondes contraires - monde à l'endroit (MC-end)	7,6	4,03	1 – 15

5.4. Corrélations entre les variables

Afin d'identifier le lien entre les variables, une matrice de corrélation de Pearson a été effectuée. L'analyse des liens corrélationnels entre les variables et les habiletés en mathématiques des adolescents ayant un TSA révèle plusieurs corrélations positives et significatives. Tout d'abord, le score de composante en mathématiques est corrélé de manière significative avec l'IRF ($r = 0,911$; $p < 0,001$) et les sous-tests Matrices ($r = 0,669$; $p < 0,001$), Balances ($r = 0,844$; $p < 0,001$), Petits-hommes verts – note de temps ($r = 0,652$; $p = 0,002$), Marche-arrête ($r = 0,453$; $p = 0,045$), Monde à l'endroit ($r = 0,456$; $p = 0,043$) et Monde à l'envers ($r = 0,578$; $p = 0,008$). Le tableau 2 présente les liens corrélationnels entre les différentes variables.

Tableau 2. Les corrélations entre les variables

Variables	IRF	Ma	Ba	PHV-n	M-A	MC-end	MC-env
Sc-M	0,911**	0,669**	0,844**	0,652**	0,453*	0,456*	0,578**
IRF		0,835**	0,886**	0,652**	0,297	0,584**	0,586**
Ma			0,483*	0,488*	0,210	0,451	0,402
Ba				0,621*	0,284	0,546*	0,593**
PHV-n					0,438	0,711**	0,850**
M-A						0,178	0,418
MC-end							0,748**

Note : ** La corrélation est positive au niveau 0.01 (bilatéral) * La corrélation est significative au niveau 0.05 (bilatéral)

5.5. Régression linéaire multiple

Les analyses de normalité ont été effectuées et indiquent une distribution normale des données, respectant ainsi le postulat de base (indices d'asymétrie et d'aplatissement se situant entre –1 et 1). Afin de déterminer la valeur prédictive des habiletés de raisonnement fluide et des fonctions exécutives sur les habiletés en mathématiques, une régression linéaire multiple à entrée forcée a été effectuée en contrôlant la variance expliquée par la présence du diagnostic concomitant de TDA/H. Le modèle obtenu est significatif et explique 84,3 % de la variance du score de composante en mathématiques (F (5,13) = 13,988 ; p < 0,001). Les habiletés de raisonnement fluide sont ainsi un prédicteur significatif (B = 0,881 ; p < 0,001) de la réussite en mathématiques des adolescents ayant un TSA de cet échantillon. Toutefois, le modèle révèle que les fonctions exécutives ne semblent pas prédire les habiletés en mathématiques de ces jeunes. Le tableau 3 illustre les valeurs de Bêta pour les variables incluses dans le modèle.

Tableau 3. Les valeurs de Bêta pour les variables incluses dans le modèle

Variables	Bêta	Sig.
Indice de raisonnement fluide	,881	,000
Petits-hommes verts - note de temps	,084	,717
Mondes contraires - monde à l'envers	,051	,826
Mondes contraires - monde à l'endroit	-,130	,490
Marche-Arrête	,068	,591

6. Discussion

Le premier objectif de cette étude était de documenter les compétences en mathématiques des adolescents ayant un TSA. Dans un second temps, il visait à identifier les liens entre le raisonnement fluide, les fonctions exécutives et les habiletés en mathématiques, ainsi qu'à identifier la variance expliquée par les variables.

Globalement, le profil intellectuel des 20 élèves québécois ayant un TSA de l'étude se situe au niveau de la moyenne. Conformément à la littérature scientifique, leurs scores globaux en mathématiques ainsi que leurs résultats aux sous-tests Opérations numériques (Estes *et al.*, 2011 ; Mayes & Calhoun, 2008 ; Jones *et al.*, 2009 ; Goldstein *et al.*, 2001) et Raisonnement mathématique (Jones *et al.*, 2009) se situent au niveau de la moyenne faible. Cet écart entre le QI et les habiletés en mathématiques est également observé dans la littérature scientifique (Chiang & Lin, 2007 ; Estes *et al.*, 2011 ; Mayes & Calhoun, 2008). Conséquemment, une hétérogénéité est obtenue ; 50 % des participants de cette étude présentent de grandes difficultés d'apprentissage en mathématiques et se situent à 2 écarts-types sous le niveau attendu. Or, d'autres performent au niveau attendu ou au-delà de celui-ci (25 %), ce qui corrobore les écrits de la littérature scientifique (Charman *et al.*, 2011 ; King *et al.*, 2016 ; Wei *et al.*, 2012). Selon Estes *et al.* (2011), 13 % des adolescents ayant un TSA montrent des habiletés en mathématiques supérieures à leur QI. Considérant cette grande variance au sein des élèves ayant un TSA, les études futures devraient tenter d'identifier les variables qui peuvent expliquer les résultats des élèves qui se situent aux extrémités de la courbe normale.

Les résultats obtenus par les 20 élèves québécois ayant un TSA à l'indice de raisonnement fluide et aux tests évaluant les fonctions exécutives sont corrélés de manière positive et significative au score de composante en mathématiques. Les adolescents de cette étude qui performent davantage au niveau du raisonnement et des fonctions exécutives tendent ainsi à avoir plus de succès sur le plan des mathématiques. Les analyses de corrélation montrent plusieurs liens entre les variables, ce qui illustre la complexité à bien comprendre les habiletés en mathématiques, mais ne garantit pas la prédiction de ces dernières.

Selon les résultats de la régression linéaire multiple, les habiletés de raisonnement fluide prédisent significativement les habiletés en mathématiques. Cette variable explique ainsi 84,3 % de la variance en mathématiques et illustre l'importance du raisonnement fluide dans les compétences en mathématiques. Cette valeur prédictive significative a également été montrée auprès d'enfants ayant un TSA, mais en expliquant moins de variances (Oswald *et al.*, 2016). Malgré le lien entre les variables, le modèle obtenu par les analyses statistiques de cette étude ne permet pas de confirmer ou d'infirmer que les fonctions exécutives seraient prédictives du score de composante en mathématiques des 20 élèves ayant un TSA de l'échantillon. Les résultats de l'étude de John *et al.* (2018) affirment que les fonctions exécutives évaluées chez des enfants ayant un TSA de six ans représentent l'unique variance de leur réussite en mathématiques à l'âge de neuf ans, au-delà de la contribution du QI. Toutefois, cette présente étude a été réalisée auprès d'adolescents, ce qui peut expliquer l'écart entre les résultats. Il est toutefois possible que des sous-tests évaluant d'autres fonctions exécutives (par exemple : planification, organisation) prédisent davantage la réussite en mathématique. Conséquemment, il serait intéressant que les recherches futures ciblent différentes sous-catégories de fonctions exécutives, ce qui permettrait de mieux comprendre leur influence sur le score de composante en mathématiques.

Afin d'optimiser la réussite en mathématiques des élèves ayant un TSA, les résultats de cette étude montrent qu'il peut être pertinent de développer les habiletés de raisonnement fluide. En effet, il semble que lorsque les adolescents ayant un TSA présentent des lacunes dans la formulation de concepts impliquant le raisonnement logique et quantitatif, les habiletés en mathématiques sont plus difficiles. En travaillant les habiletés de raisonnement fluide, il est possible de croire que les élèves pourraient obtenir de meilleurs résultats en mathématiques, mais des recherches futures afin de vérifier cette hypothèse sont nécessaires. Dans l'optique d'intervenir de manière précoce, l'administration d'épreuves évaluant l'IRF au primaire peut être utile afin de cibler les élèves à risque de développer des difficultés plus importantes en mathématiques. Les élèves identifiés pourraient bénéficier d'interventions précoces en lien avec les habiletés de raisonnement fluide, et ce, dès les premières années du primaire. Les études futures devraient vérifier le lien entre les interventions prodiguées de façon précoce et les habiletés en mathématiques au secondaire. Niklas *et al.* (2018) suggèrent de faire des activités de comparaisons entre des objets ou des images afin d'identifier les règles implicites en détectant les régularités. Dans le cadre de l'apprentissage des mathématiques, l'enseignant peut demander aux élèves de relever les similitudes entre un problème mathématique résolu et un nouveau, afin de mettre en lumière les connaissances acquises et de faciliter la résolution du nouveau problème. Au meilleur des connaissances, aucun programme d'intervention ciblant le développement du raisonnement fluide et les mathématiques n'est disponible pour les élèves ayant un TSA. Il semble pertinent qu'un tel programme soit mis sur pieds et que les recherches futures en évaluent l'efficacité sur le plan de l'apprentissage des mathématiques chez ces élèves en particulier. Toutefois, certaines interventions basées sur les données probantes peuvent être suggérées afin de mieux cibler le développement des habiletés en mathématiques et ainsi, d'optimiser les apprentissages.

Les enseignants et les professionnels qui travaillent auprès des élèves ayant un TSA devraient tout d'abord vérifier si des notions préalables manquent aux connaissances du jeune. La diversification des activités et du matériel pour favoriser les apprentissages en mathématiques est mise à l'avant-plan. Certains auteurs suggèrent l'utilisation d'aides externes tels que la calculatrice, les supports visuels (par exemple : tables d'additions, de multiplications, de divisions) et les outils informatiques (Browder *et al.*, 2008). Par exemple, l'utilisation d'acronymes et de schémas pour illustrer visuellement les étapes de la résolution de problèmes met en évidence les effets positifs des supports visuels sur les élèves ayant un TSA (Barnett & Cleary, 2019 ; Cox & Root, 2020). Miller *et al.* (1998) mettent également en avant des stratégies efficaces reposant sur l'autorégulation (liste à cocher d'un procédurier pour suivre les étapes d'une démarche), les instructions directes (par exemple : consignes verbales immédiates pour diriger les apprentissages) et les objectifs personnels suivis de récompenses lorsqu'ils sont atteints. Aussi, les auteurs recommandent la technique séquentielle à trois niveaux d'instruction, nommée *concret-representational-abstract,* pour l'apprentissage des différents concepts mathématiques abstraits comme les additions, les soustractions, les multiplications, ou les fractions, pour les élèves du secondaire (Miller *et al.*, 1998). Le premier niveau, concret, implique la manipulation d'objets afin de promouvoir la compréhension conceptuelle. Par exemple, l'enseignant peut se servir d'un sandwich ou d'une banane pour illustrer une moitié. Le deuxième niveau, représentationnel, consiste à résoudre des problèmes en utilisant des dessins pour représenter les nombres plutôt que de manipuler des objets. L'élève pourrait ainsi poursuivre l'apprentissage d'une demie grâce à l'image d'une pizza coupée en deux. Ce niveau d'enseignement fait le lien vers le niveau final, abstrait, où l'élève utilise des nombres pour résoudre les problèmes, comme le concept mathématique chiffré (½). Finalement, l'utilisation d'événements de la vie réelle est une méthode d'enseignement fondamentale pour apprendre aux élèves présentant un TSA de nouveaux concepts (Donaldson & Zager, 2010). L'équipe-école peut mettre sur pied des activités d'apprentissages qui reflètent les expériences concrètes de la vie des jeunes. Par exemple, les élèves peuvent effectuer des calculs en simulant une sortie au cinéma, au restaurant ou l'achat de nourriture. Le fait de feindre une expérience connue favorise l'apprentissage, c'est-à-dire que la consolidation est facilitée, de même que la capacité à généraliser à d'autres situations (Donaldson & Zager, 2010). Dans le même ordre d'idée, Bae *et al.* (2015) suggèrent d'intégrer les expériences quotidiennes des élèves dans les questions écrites de résolution de problèmes afin de les aider à en comprendre le sens. Browder *et al.* (2008) valorisent la variation des activités d'enseignement comme la modélisation, la répétition du modèle, la pratique et la rétroaction.

Considérant qu'un grand nombre de participants de cette étude présente des difficultés importantes en mathématiques qui se distinguent de leur profil intellectuel, le soutien des professionnels scolaires tel que les orthopédagogues s'avère essentiel afin d'aider les jeunes à maximiser leur potentiel. Toutefois, au secondaire, une baisse des services se fait sentir pour les élèves qui rencontrent des difficultés d'apprentissage ou des besoins particuliers (Kucharczy *et al.*, 2015). Bien qu'au cours des dernières années, beaucoup d'améliorations ont été apportées aux pratiques orthopédagogiques sur le plan de l'évaluation et de la remédiation des difficultés en lecture, les services orthopédagogiques en mathématiques ont été mis de côté (Giroux & Ste-Marie, 2015). Le travail au secondaire est ainsi complexifié par le manque de documentation sur les difficultés en mathématiques et sur les interventions à favoriser (Bélanger-Fortin, 2015). Les services d'orthopédagogie en mathématiques doivent alors être documentés davantage afin d'élaborer les besoins des élèves ayant un TSA et d'encourager la mise en place de programmes d'intervention pour faciliter leurs apprentissages dans cette matière.

7. Limites méthodologiques

Lors de l'interprétation des résultats de cette étude, certaines limites sont à considérer. Tout d'abord, la généralisation des résultats est limitée par le nombre restreint de participants à l'étude (N = 20). La représentativité du genre est limitée, plus précisément, 19 garçons et 1 fille ont participé à l'étude alors que le ratio de genre pour les personnes ayant un TSA est de 5 garçons pour 1 fille. Il serait possible que le profil des filles ayant un TSA se distingue de celui des garçons sur le plan des habiletés en mathématiques. Aussi, la fréquentation scolaire des adolescents peut influencer leurs résultats en mathématiques. Les contraintes associées aux classes spécialisées en milieu scolaire ordinaire peuvent limiter l'exposition des élèves à certains contenus mathématiques, comparativement à ceux en classe ordinaire. De plus, les résultats doivent être interprétés avec prudence, considérant que plusieurs adolescents présentent au moins un trouble associé à celui du TSA. Par exemple, 12 des 20 participants présentent un TDAH, ce qui représente une proportion plus importante que celle récemment rapportée (35,3 %) concernant une vaste population d'enfants et d'adolescents ayant un TSA (Khachadourian *et al.*, 2023). Toutefois, pour limiter les effets du TDAH sur les résultats, le diagnostic a été ajouté aux analyses statistiques en tant que variable à contrôler, et tous les participants avaient pris leur traitement pharmacologique. Par ailleurs, la présence de troubles associés chez les 20 élèves québécois ayant un TSA de cette étude demeure représentative de celle estimée dans la littérature scientifique récente, qui se situe à au moins un trouble concomitant chez 74 % des jeunes, en addition au diagnostic de TSA (Khachadourian *et al.*, 2023).

8. Conclusion

La présente étude permet de documenter les habiletés en mathématiques chez 20 élèves québécois ayant un TSA, et de révéler que celles-ci sont en deçà de leurs aptitudes intellectuelles. Cette recherche contribue également à constater les liens entre le raisonnement fluide, les fonctions exécutives et les habiletés en mathématiques. Les résultats des analyses statistiques mettent en évidence l'importance des habiletés de raisonnement fluide sur les compétences en mathématiques des 20 élèves québécois présentant un TSA qui fréquentent l'école secondaire ordinaire. Considérant le poids prédictif de l'IRF, il serait pertinent de mettre au point des interventions spécifiques au développement du raisonnement fluide afin d'optimiser le potentiel d'apprentissage en mathématiques de ces élèves.

Bibliographie

AMERICAN PSYCHIATRIC ASSOCIATION (2015). *DSM-5 : Manuel Diagnostique et Statistique des Troubles mentaux* (M.-A. Crocq & D. Guelfi, trad. ; 5è éd.). Elsevier Masson.

ATTWOOD, T. (2008). An overview of autism spectrum disorders. *Learners on the autism spectrum: Preparing highly qualified educators*, 18-43.

AU, J., SHEEHAN, E., TSAI, N., DUNCAN, G. J., BUSCHKUEHL, M., & JAEGGI, S. M. (2015). Improving fluid intelligence with training on working memory: A meta-analysis. *Psychonomic Bulletin & Review*, *22*, 366–377. https://doi.org/10.1037/0033-2909.131.1.30

BAE, Y. S., CHIANG, H. M., & HICKSON, L. (2015). Mathematical word problem solving ability of children with autism spectrum disorder and their typically developing peers. *Journal of Autism and Developmental Disorders, 45*(7), 2200–2208. https://doi.org/10.1007/s10803-015-2387-8

BARNETT, J. E. H., & CLEARY, S. (2015). Review of evidence-based mathematics interventions for students with autism spectrum disorders. *Education and training in autism and developmental disabilities*, *50*(2), 172–185. https://www.jstor.org/stable/24827533

BARNETT, J. H., & CLEARY, S. (2019). Visual supports to teach algebraic equations to a middle school student with autism spectrum disorder. *Preventing School Failure: Alternative Education for Children and Youth, 63*(4), 345–351. 10.1080/1045988x.2019.1608897

BARON-COHEN, S. (2002). The extreme male brain theory of autism. *Trends in cognitive sciences, 6*(6), 248–254.

BEDNARZ, N., & JANVIER, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. BERNARZ, C. KIERAN & L. LEE (Dir.), *Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching* (p. 115–136). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-1732-3_8

BEDNARZ, N., LAFONTAINE, J., AUCLAIR, M., MORELLI, C. E., & LEROUX, C. (2009). Pour une plus grande harmonisation dans la transition du primaire au secondaire en mathématiques. *Bulletin AMQ*, *49*(1), 7–18.

BELANGER-FORTIN, A. (2015). *Étude de la pratique de l'orthopédagogue en mathématiques au secondaire auprès d'une élève ayant un trouble d'apprentissage non verbal.* [Thèse de doctorat, Université du Québec à Rimouski]

BERNARD, M. A., THIEBAUT, E., MAZETTO, C., NASSIF, M. C., DE SOUZA, M. C. C., NADER-GROSBOIS, N., SEYNHAEVE, I., DE LA IGLESIA GUTIERREZ, M., OLIVAR PARRA, J.-S., DIONNE, C., ROUSSEAU, M., STEFANIDOU, K., AIAD, F., SAM, N., BELAL, L., FEKIH, L., BLANC, R., BONNET-BRILHAULT, F., GATTEGNO, M.P., KAYE, K., & ADRIEN, J.-L. (2016). L'hétérogénéité du développement cognitif et socio-émotionnel d'enfants atteints de trouble du spectre de l'autisme en lien avec la sévérité des troubles. *Neuropsychiatrie de l'Enfance et de l'Adolescence*, *64*(6), 376–382. https://doi.org/10.1016/j.neurenf.2016.05.002

BERNARZ, N., KIERAN, C., & LEE, L. (Dir.) (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. Springer. 10.1007/978-94-009-1732-3

BROWDER, D.M., SPOONER, F., AHLGRIM-DELZELL, L., HARRIS, A.A., & WAKEMANXYA, S. (2008). A meta-analysis on teaching mathematics to students with significant cognitive disabilities. *Exceptional children*, *74*(4), 407–432. https://doi.org/10.1177/001440290807400401

BULL, R., & LEE, K. (2014). Executive functioning and mathematics achievement. *Child Development Perspectives*, *8*(1), 36–41. https://doi.org/10.1111/cdep.12059

CEDERLUND, M., & GILLBERG, C. (2004). One hundred males with Asperger syndrome: A clinical study of background and associated factors. *Developmental Medicine and Child Neurology*, *46*(10), 652–660. https://doi.org/10.1017/S0012162204001100

CHARMAN, T., JONES, C. R., PICKLES, A., SIMONOFF, E., BAIRD, G., & HAPPÉ, F. (2011). Defining the cognitive phenotype of autism. *Brain research*, *1380*, 10–21. https://doi.org/10.1016/j.brainres.2010.10.075

CHIANG, H. M., & LIN, Y. H. (2007). Mathematical ability of students with Asperger syndrome and high-functioning autism: A review of literature. *Autism*, *11*(6), 547–556. https://doi.org/10.1177/1362361307083259

COURCHESNE, V., NADER, A. M., GIRARD, D., BOUCHARD, V., DANIS, É., & SOULIERES, I. (2016). Le profil cognitif au service des apprentissages : optimiser le potentiel des enfants sur le spectre de l'autisme. *Revue québécoise de psychologie*, *37*(2), 141–173. https://doi.org/10.7202/1040041ar

COX, S. K., & ROOT, J. R. (2020). Modified schema-based instruction to develop flexible mathematics problem-solving strategies for students with autism spectrum disorder. *Remedial and Special Education*, *41*(3), 139–151. https://doi.org/10.1177/0741932518792660

CRAGG, L., & GILMORE, C. (2014). Skills underlying mathematics: The role of executive function in the development of mathematics proficiency. *Trends in neuroscience and education*, *3*(2), 63–68. https://doi.org/10.1016/j.tine.2013.12.001

DONALDSON, J. B., & ZAGER, D. (2010). Mathematics interventions for students with high functioning autism/asperger's syndrome. *Teaching Exceptional Children*, *42*(6), 40–46. https://doi.org/10.1177/004005991004200605

ESTES, A., RIVERA, V., BRYAN, M., CALI, P., & DAWSON, G. (2011). Discrepancies between academic achievement and intellectual ability in higher-functioning school-aged children with autism spectrum disorder. *Journal of autism and developmental disorders*, *41*(8), 1044–1052. 10.1007/s10803-010-1127-3

GIROUX, J., & STE-MARIE, A. (2015). Approche didactique en orthopédagogie des mathématiques dans le cadre d'un partenariat. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la scolarisation*, *2*(70-71), 195–207.

GOLDSTEIN, G., BEERS, S. R., SIEGEL, D. J., & MINSHEW, N. J. (2001). A comparison of WAIS-R profiles in adults with high-functioning autism or differing subtypes of learning disability. *Applied Neuropsychology*, *8*(3), 148–154.

GREEN, C. T., BUNGE, S. A., CHIONGBIAN, V. B., BARROW, M., & FERRER, E. (2017). Fluid reasoning predicts future mathematical performance among children and adolescents. *Journal of experimental child psychology*, *157*, 125–143. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2016.12.005

IUCULANO, T., ROSENBERG-LEE, M., SUPEKAR, K., LYNCH, C. J., KHOUZAM, A., PHILLIPS, J., UDDIN, L. Q., & MENON, V. (2014). Brain organization underlying superior mathematical abilities in children with autism. *Biological psychiatry*, *75*(3), 223–230. https://doi.org/10.1016/j.biopsych.2013.06.018

JOHN, T. S., DAWSON, G., & ESTES, A. (2018). Brief report: executive function as a predictor of academic achievement in school-aged children with ASD. *Journal of autism and developmental disorders*, *48*(1), 276–283. 10.1007/s10803-017-3296-9

JONES, C. R., HAPPÉ, F., GOLDEN, H., MARSDEN, A. J., TREGAY, J., SIMONOFF, E., BAIRD, G., & CHARMAN, T. (2009). Reading and arithmetic in adolescents with autism spectrum disorders: peaks and dips in attainment. *Neuropsychology*, *23*(6), 718–728. https://doi.org/10.1037/a0016360

KHACHADOURIAN, V., MAHJANI, B., SANDIN, S., KOLEVZON, A., BUXBAUM, J. D., REICHENBERG, A., & JANECKA, M. (2023). Comorbidities in autism spectrum disorder and their etiologies. *Translational Psychiatry*, *13*(1), 71–77. https://doi.org/10.1038/s41398-023-02374-w

KIM, H., & CAMERON, C. E. (2016). Implications of visuospatial skills and executive functions for learning mathematics: Evidence from children with autism and Williams syndrome. *AERA Open*, *2*(4), 1–16. https://doi.org/10.1177/2332858416675124

KING, S. A., LEMONS, C. J., & DAVIDSON, K. A. (2016). Math interventions for students with autism spectrum disorder: A best-evidence synthesis. *Exceptional Children, 82*(4), 443–462. https://doi.org/10.1177/0014402915625066

KUCHARCZYK, S., REUTEBUCH, C. K., CARTER, E. W., HEDGES, S., EL ZEIN, F., FAN, H., & GUSTAFSON, J. R. (2015). Addressing the needs of adolescents with autism spectrum disorder: Considerations and complexities for high school interventions. *Exceptional Children*, *81*(3), 329–349. 10.1177/0014402914563703

LAFAY, A., SAINT-PIERRE, M. C., & MACOIR, J. (2014). L’évaluation des habiletés mathématiques de l’enfant : inventaire critique des outils disponibles. *Glossa*, *116*, 33–58.

LAFORTUNE, J. B. (2013). *A Look into the Lived Experiences of College Students with Asperger's Disorder*. [Thèse de doctorat, Antioch University]

MAYES, S. D., & CALHOUN, S. L. (2008). WISC-IV and WIAT-II profiles in children with high-functioning autism. *Journal of autism and developmental disorders*, *38*(3), 428–439.

MILLER, S. P., BUTLER, F. M., & KIT-HUNG, L. (1998). Validated practices for teaching mathematcis to students with learning disabilities: A review of literature. *Focus on Exceptional Children*, *31*(1), 1–24.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ET DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR (MÉES) (2016). *Programme de formation de l'école québécoise. Progression des apprentissages au secondaire. Mathématique*. Gouvernement du Québec.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION, DU LOISIR ET DU SPORT (MÉLS) (2001). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire, enseignement primaire.* Gouvernement du Québec.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION, DU LOISIR ET DU SPORT (MÉLS) (2006). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle.* Gouvernement du Québec.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION, DU LOISIR ET DU SPORT (MÉLS) (2009). *Programme de formation de l'école québécoise. Progression des apprentissages au primaire. Mathématique.* Gouvernement du Québec.

NADER, A. M., JELENIC, P., & SOULIERES, I. (2015). Discrepancy between WISC-III and WISC-IV cognitive profile in autism Spectrum: What does it reveal about autistic cognition? *PLoS ONE*, *10*(12), 1–16. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0144645

NIKLAS, F., COHRSSEN, C., & TAYLER, C. (2018). Making a difference to children's reasoning skills before school-entry: the contribution of the home learning environment. *Contemporary Educational Psychology*, *54*, 79–88. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2018.06.001

O'HEARN, K., ASATO, M., ORDAZ, S., & LUNA, B. (2008). Neurodevelopment and executive function in autism. *Development and psychopathology*, *20*(4), 1103–1132. https://doi.org/10.1017/S0954579408000527

OLIVERAS-RENTAS, R. E., KENWORTHY, L., ROBERSON, R. B., MARTIN, A., & WALLACE, G. L. (2012). WISC-IV profile in high-functioning autism spectrum disorders: impaired processing speed is associated with increased autism communication symptoms and decreased adaptive communication abilities. *Journal of autism and developmental disorders*, *42*(5), 655–664.

OSWALD, T. M., BECK, J. S., IOSIF, A. M., MCCAULEY, J. B., GILHOOLY, L. J., MATTER, J. C., & SOLOMON, M. (2016). Clinical and cognitive characteristics associated with mathematics problem solving in adolescents with autism spectrum disorder. *Autism Research*, *9*(4), 480–490. https://doi.org/10.1002/aur.1524

OTERO, T. M. (2017). Brief review of fluid reasoning: Conceptualization, neurobasis, and applications. *Applied Neuropsychology: Child*, *6*(3), 204–211. https://doi.org/10.1080/21622965.2017.1317484

OZONOFF, S., & JENSEN, J. (1999). Brief report: Specific executive function profiles in three neurodevelopmental disorders. *Journal of autism and developmental disorders*, *29*(2), 171–177.

PLUMET, M. H. (2013). Fonctions exécutives et autisme. Dans PERRIN, J., & MAFFRE, T. (Éds.), *Autisme et psychomotricité* (p.249–282). De Boeck Supérieur.

POLO-BLANCO, I., SUAREZ-PINILLA, P., GOÑI-CERVERA, J., SUAREZ-PINILLA, M., & PAYA, B. (2024). Comparison of mathematics problem-solving abilities in autistic and non-autistic children: the influence of cognitive profile. *Journal of autism and developmental disorders*, *54*(1), 353–365. https://doi.org/10.1007/S10803-022-05802-W

TAUB, G. E., KEITH, T. Z., FLOYD, R. G., & MCGREW, K. S. (2008). Effects of general and broad cognitive abilities on mathematics achievement. *School Psychology Quarterly*, *23*(2), 187–198. https://doi.org/10.1037/1045-3830.23.2.187

WECHSLER, D. (2014). *WISC-V: Administration and scoring manual*. NCS Pearson.

WEI, X., LENZ, K. B., & BLACKORBY, J. (2012). Math growth trajectories of students with disabilities: Disability category, gender, racial, and socioeconomic status differences from ages 7 to 17. *Remedial and Special Education*, *34*, 154–165. https://doi.org/10.1177/0741932512448253

NADINE CHAPDELAINE
Université du Québec à Montréal
chapdelaine.nadine@courrier.uqam.ca

ERIKA-LYNE SMITH
NeurOcoeur, Clinique de psychologie et neuropsychologie
erika.lyne.smith@gmail.com

NATHALIE POIRIER
Université du Québec à Montréal
poirier.nathalie@uqam.ca

ROZENN TEXIER-PICARD, GHISLAINE GUEUDET, MURIELLE GERIN

ÉGALITE FEMMES-HOMMES EN CLASSE PREPARATOIRE SCIENTIFIQUE : UNE ETUDE EXPLORATOIRE EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Abstract. Gender equality in French scientific preparatory classes: an exploratory study in mathematics education. In this paper we study the issue of gender equality in mathematics at tertiary level. While most studies about this topic use a quantitative approach, we choose here a qualitative approach, in order to take into account the mathematical contents at stake, in a didactics perspective. We study gender equality in the context of a specific project-based course ("supervised personal interest work", TIPE in French), in a scientific preparatory class. Our methodology combines observations of sessions and logbooks for a gender-mixed group over a four-month period. The analysis shows asymmetries in the students' topoi and in topogenetic positions.

Keywords. gender, equality, inquiry, anthropological theory of the didactic, topos, topogenetic position

Résumé. Dans cet article, nous étudions la question de l'égalité femmes-hommes dans l'enseignement supérieur en mathématiques. Alors que la plupart des études sur ce sujet utilisent une approche quantitative, nous choisissons ici une approche qualitative, afin de prendre en compte les savoirs mathématiques en jeu, dans une perspective didactique. Nous étudions l'égalité femmes-hommes dans le contexte d'un dispositif spécifique de type projet, le « travail d'intérêt personnel encadré » (TIPE) en classe préparatoire aux grandes écoles scientifiques. Notre méthodologie croise des observations de séances et des recueils de carnets de bord sur une période de quatre mois, pour un groupe mixte. L'analyse montre des asymétries dans les topoi et les positions topogénétiques des étudiantes et étudiant.

Mots-clés. genre, égalité, investigation, théorie anthropologique du didactique, topos, position topogénétique

---

Le sujet de l'égalité femmes-hommes dans l'enseignement des mathématiques, notamment dans le contexte de l'enseignement supérieur, est d'une importance sociale majeure sur le plan international. En France, la constitution en 2021 d'un groupe de travail APMEP – Femmes&Maths, réunissant une dizaine de membres de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (APMEP) et de l'association Femmes & Mathématiques, pour « travailler sur les questions liées à l'égalité entre les filles et les garçons et en particulier sur les pratiques de classe qui permettent de déconstruire des stéréotypes »[1], montre que le corps enseignant de mathématiques se questionne. Ce sujet est également pris en charge au niveau institutionnel, comme en témoigne la publication récente de rapports (Gauchard, 2023), de ressources à destination du corps enseignant notamment sur les sites institutionnels[2], ou encore la mise en œuvre de projets parfois à large échelle comme le projet Maryam Mirzakhani[3] dans l'Académie de Lille.

Considérant que la recherche en didactique des mathématiques doit se saisir de cet enjeu, nous présentons ici une étude qui aborde la question de l'égalité femmes-hommes dans l'apprentissage des mathématiques, en se focalisant sur un dispositif spécifique aux classes préparatoires scientifiques. Dans la suite, nous parlerons d'égalité filles-garçons en éducation lorsque nous nous intéresserons à des élèves du primaire ou du secondaire, et d'égalité femmes-hommes lorsqu'il s'agira d'étudiantes et étudiants du supérieur, qui sont le plus souvent des adultes.

Notre objectif est d'étudier avec une approche didactique un dispositif institutionnel basé sur l'investigation, présent dans le système français des classes préparatoires scientifiques, le « travail d'intérêt personnel encadré » ou TIPE. Nous nous demandons dans quelle mesure les spécificités de ce dispositif (présentées ci-dessous) contribuent à mettre en œuvre l'égalité femmes-hommes dans les apprentissages en mathématiques. Atteindre cet objectif requiert l'élaboration d'une approche théorique et méthodologique permettant d'analyser les questions d'égalité femmes-hommes en didactique des mathématiques, approche que nous mobiliserons pour l'étude du TIPE.

Les questions d'égalité filles-garçons ont fait l'objet de recherches dans les sciences de l'éducation, notamment avec des approches sociologiques, psychologiques, historiques ou économiques essentiellement depuis les années 1970. La littérature anglo-saxonne en *mathematics education* sur le thème des inégalités filles-garçons et des mathématiques est riche, mais principalement constituée d'études quantitatives prenant peu en compte les contenus de savoir (par exemple Hanna, 1996). En France, les travaux abordant ce sujet en didactique des mathématiques (Roditi & Salles, 2015 ; Sayac & Grapin, 2016) sont peu nombreux, et semblent

[1] https://www.apmep.fr/Groupe-de-travail-APMEP-Femmes-Maths, consulté le 29 mai 2023.

[2] https://eduscol.education.fr/3739/faire-evoluer-les-representations-des-eleves-sur-les-mathematiques, consulté le 29 mai 2023.

[3] https://filles-maths-nsi-projet-maryam-mirzakhani.site.ac-lille.fr/presentation/ consulté le 5 juin 2024.

principalement porter sur l'analyse des résultats aux évaluations de mathématiques selon la catégorie de sexe ; nous en donnons un aperçu en section 02.300000.

Par ailleurs peu de travaux de didactique des mathématiques se sont penchés sur les classes préparatoires (Castela, 2002 ; Farah, 2018 ; Lalaude-Labayle, 2016), et, à notre connaissance, le TIPE n'a pas été étudié en tant que tel. Or le TIPE semble permettre la mise en œuvre d'une démarche d'investigation, forme d'apprentissage potentiellement propice à l'égalité femmes-hommes selon certains travaux (Laursen *et al.*, 2014). Ainsi notre travail s'intéresse à des enjeux peu ou pas abordés dans la littérature de recherche.

L'article est organisé comme suit. Dans la partie 1, nous explicitons le contexte et les motivations de l'étude, qui s'appuie notamment sur des résultats de travaux antérieurs en dehors du champ de la didactique. Dans la partie 2, nous définissons le concept de genre et présentons quelques travaux de recherche portant un regard didactique sur les questions de genre. Dans la partie 3, nous détaillons notre cadre théorique, à la croisée de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 1985, 1999), et des études de genre (Bereni *et al.*, 2020 ; Collet, 2021 ; Duru-Bellat, 2017 ; Jarlégan, 1999), nous précisons ainsi notre question de recherche. Dans les parties 4 et 5, nous présentons le travail mené autour du TIPE en mathématiques et informatique. Nous décrivons en partie 4 la méthodologie de recueil de données et la méthodologie de traitement et d'analyses, et nous donnons en partie 5 quelques résultats issus de ces analyses. Enfin, la partie 6 comporte une discussion des résultats et des perspectives pour la suite du travail.

1. Contexte et motivations de l'étude

1.1. Le contexte de la classe préparatoire aux grandes écoles (CPGE)

L'enseignement supérieur scientifique en France repose pour une part significative sur des écoles d'ingénieures et ingénieurs hors universités, qui regroupent 19 % du public étudiant en sciences (Direction de l'Évaluation, de la Prospective et de la Performance, 2021). Une large partie de cet effectif est recrutée sur concours, après une classe préparatoire, une formation de deux ans caractérisée notamment par un rythme de travail très soutenu en vue de la préparation des concours d'entrée aux grandes écoles. On trouve sur ces filières des études sociologiques qui mettent notamment en évidence l'emprise institutionnelle exercée sur les élèves par la classe préparatoire, c'est-à-dire la « capacité institutionnelle à former, transformer, fabriquer des dispositions et des élèves » (Darmon, 2015, p. 21), les mécanismes de construction d'aspirations différenciées selon le sexe (Blanchard *et al.*, 2016) et de reproduction de trajectoires scolaires marquées par les différences sociales

(Blanchard *et al.*, 2017). En 2020, la part des femmes dans les classes préparatoires scientifiques s'élève à 30,9 %, contre 42,0 % en moyenne dans les filières scientifiques universitaires (hors santé) et 29,4 % en écoles d'ingénieures et ingénieurs. La féminisation des effectifs des filières scientifiques est un enjeu important des politiques publiques d'égalité en France[4], et la compréhension d'éventuelles inégalités dans les rapports aux savoirs des étudiantes et étudiants en classe préparatoire est donc cruciale.

Notre recherche se déroule dans ces classes préparatoires aux grandes écoles, en première année, dans la filière « Mathématiques, physique, sciences de l'ingénieur » (MPSI). Nous nous intéressons en particulier à un dispositif institutionnel appelé travail d'intérêt personnel encadré (TIPE). Le TIPE est une épreuve présente dans la plupart des concours de grandes écoles scientifiques, à l'issue de la deuxième année de classe préparatoire. Elle se déroule sous la forme d'un entretien de 30 minutes avec un jury, permettant aux candidates et candidats de présenter un travail réalisé tout au long de leur année, en lien avec une thématique générale large définie par les écoles (SCEI, 2023). Ce travail consiste principalement en une étude bibliographique et une recherche originale, contenant une part d'expérimentation ou de simulation informatique. En première année, pour se familiariser avec cet exercice, les étudiantes et étudiants préparent en groupes de trois ou quatre, et sur une durée de cinq mois un exposé suivant le format du TIPE. Deux heures dédiées à cette préparation sont prévues chaque semaine dans l'emploi du temps, entre les mois de février et juin. Pendant ces deux heures, les groupes travaillent « en autonomie », en présence des enseignantes et enseignants des principales disciplines (en filière MPSI, il s'agit des mathématiques, sciences physiques et sciences pour l'ingénieur), qui circulent entre les groupes pour répondre à leurs questions. À la fin de l'année, les groupes présentent leur travail sous la forme d'un exposé oral, qui n'est pas noté.

Selon les sujets choisis, le TIPE peut concerner différentes disciplines. Dans notre recherche, nous nous intéressons à des TIPE en mathématiques. Toutefois ces TIPE associent fortement mathématiques et programmation informatique. À titre d'exemple, nous nous intéressons dans cette étude à un TIPE sur les réseaux de neurones, qui comporte une part importante de mise en œuvre numérique. Cette intrication nous a conduites à choisir ici de considérer les savoirs relevant de la programmation informatique comme faisant partie des savoirs mathématiques.

[4] Voir les conventions interministérielles des 20/12/1984, 14/09/1989, 25/02/2000, 29/06/2006, 7/02/2013, 28/11/2019.

Parce que le TIPE revêt une forme originale au sein des enseignements de classe préparatoire au regard de plusieurs critères repérés dans la littérature en sociologie de l'éducation (voir section 1.2), il nous a semblé intéressant de nous questionner sur l'égalité entre femmes et hommes en mathématiques dans ce contexte.

1.2. L'égalité femmes-hommes en classe préparatoire

Des travaux en sociologie (Blanchard *et al.*, 2016) suggèrent que la classe préparatoire représente une étape clé dans la formation des inégalités entre femmes et hommes dans les études supérieures en mathématiques en France. Non seulement la proportion de femmes dans ces filières chute par rapport à celle des classes de lycée, mais leurs performances dans les concours prestigieux deviennent moins bonnes que celles des étudiants :

> à leur arrivée dans les classes préparatoires scientifiques, elles ont en moyenne obtenu de meilleurs résultats au lycée que leurs camarades masculins. Cependant, elles s'inscrivent moins souvent aux concours considérés comme les plus difficiles et y sont admises en plus faible proportion. (Blanchard *et al.*, 2016, p. 27)

Parmi les explications, Blanchard *et al.* (2016) suggèrent une « dissonance entre deux rapports au temps et au monde » (p. 65) : la temporalité de la classe préparatoire scientifique exige une très grande disponibilité pour les études, qui apparaît peu compatible avec la construction sociale d'une « double temporalité (professionnelle et domestique) que les filles ont intériorisée et avec laquelle elles doivent composer ».

Outre la disponibilité permanente, le rapport au temps en classe préparatoire se caractérise par un rythme très rapide, qui peut induire une « panique temporelle », c'est-à-dire « un type particulier d'inquiétude et de difficulté liées à l'écoulement et à la gestion du temps. » (Darmon, 2015, p. 148).

Enfin, un autre élément spécifique des classes préparatoires, également souligné par Blanchard *et al.* (2016), est l'omniprésence de jugements scolaires et de classements, créant un environnement de travail compétitif. À cet égard, suite à une enquête auprès d'élèves de seconde, Baudelot et Establet (2006) écrivaient ce qui suit.

> Plus que les filles, [les garçons] se disent stimulés par le classement, ils aiment à comparer leurs notes en mathématiques à la moyenne de la classe, et plus encore aux notes obtenues par certains camarades, et ils seraient particulièrement fiers d'être premiers en mathématiques. (p. 151)

Au contraire, le dispositif TIPE ne fait pas l'objet de notes ou de classements. Pour cette raison, et parce qu'il allie investigation, travail de groupe, et un temps de travail plus long au regard du temps accéléré de la classe préparatoire, le TIPE constitue un dispositif d'enseignement-apprentissage original en classe préparatoire. Aussi nous nous sommes demandé si ce dispositif pouvait contribuer à mettre en œuvre l'égalité des sexes en classe préparatoire scientifique.

2. Genre et didactique : une thématique en développement

Apparu à la fin des années 1960, le concept de genre a évolué au cours des décennies et « genre » est un terme polysémique. Il désigne parfois une catégorie de sexe entendu comme sexe social. Cependant, nous le définissions plutôt ici comme un rapport social hiérarchisé entre les femmes et les hommes, et entre les valeurs et représentations associées au féminin et au masculin (Bereni *et al.*, 2020). Dans cette acception, le genre est donc un concept théorique issu de différents champs des sciences humaines et sociales.

Notre travail s'inscrit dans un ensemble de recherches en didactique de différentes disciplines considérant des questions liées au genre. Adopter un regard didactique sur la question du genre à l'école, c'est prendre « en considération la spécificité des savoirs enseignés dans la construction des différentes trajectoires d'apprentissage des filles et des garçons » (Verscheure *et al.*, 2020, p. 82).

2.1. Premières approches dans des recherches en didactique disciplinaire

Dans une perspective didactique, la question des rapports que les élèves filles et garçons peuvent entretenir avec les savoirs apparaît centrale.

En 2002, Roustan-Jalin *et al.* comparent les rapports personnels et institutionnels aux savoirs (au sens de Chevallard, 1999) en technologie chez des élèves filles et garçons en classe de 3ème (Roustan-Jalin *et al.*, 2002). Leur étude suggère notamment que les différenciations liées au sexe seraient plus faibles lorsque les savoirs sont spécifiques à l'institution école (comme les lois d'Ohm et de Pouillet en électricité), et plus fortes lorsque les savoirs sont identifiés par les élèves comme vivant dans d'autres institutions, en particulier à la maison (comme le montage d'un élévateur, qui se rapproche d'activités de bricolage traditionnellement étiquetées comme masculines).

En 2004, Verscheure et Amade-Escot étudient les différences de positionnements des élèves par rapport aux savoirs en éducation physique et sportive, mais aussi les attentes du corps enseignant vis-à-vis des élèves filles ou garçons (Verscheure & Amade-Escot, 2004). S'inspirant de travaux de Schubauer-Leoni (1996) sur l'existence d'un contrat didactique différentiel selon les positions d'excellence, elles interrogent également l'impact des « positions de genre » sur le contrat didactique. Elles observent que, chez les élèves, « les positions de genre ne [sont] pas figées, et que les filles et les garçons [n'activent] pas toujours des modalités de pratique conformes aux normes sociales ou aux stéréotypes de sexe qui leur sont encore trop souvent attribuées. » (Verscheure *et al.*, 2020, p. 87). Les auteures introduisent alors le concept de *positionnement épistémique de genre*, qui vise à « souligner la fluidité des performations du genre au fil des interactions didactiques » (Verscheure *et al.*, 2020, p. 88).

2.2. Le genre et l'enseignement de l'informatique

Le contexte de l'enseignement de l'informatique est marqué par une particularité : cette discipline, jusqu'au début des années 1980, était très féminisée dans les universités et grandes écoles, mais la mixité s'est effondrée entre les années 1980 et 2000 (Collet, 2004). Les premiers travaux de Collet portent sur les raisons de cette baisse d'attractivité généralisée pour les jeunes femmes. Des actions d'envergure, décrites dans Fisher & Margolis (2002) et dans Morley & Collet (2017) ont été mises en place avec succès par des universités, aux États-Unis et en Norvège, pour comprendre et prévenir cette désaffection, en transformant la culture de l'établissement par des mesures variées (modification des critères de recrutement de la population étudiante, refonte des programmes et des objectifs d'enseignement, sensibilisation des équipes enseignantes).

En France toutefois, les filières informatiques restent très peu féminisées : en 2019-2020 la part de femmes parmi les effectifs de cycle ingénieur dans le domaine informatique représente 16,6 %[5]. Une étude sociologique récente du Centre Hubertine Auclert analyse les freins à l'orientation des filles vers ces filières, et note que l'expérience de l'enseignement de l'informatique au lycée accentue les inégalités filles-garçons plus qu'elle ne les réduit, mettant en cause « des modalités d'enseignement qui s'avèrent excluantes, [et] participent de la construction progressive, chez les filles, d'un sentiment d'incompétence » (Monfort *et al.*, 2022, p. 104).

Pour plus d'égalité, Collet (2021) formule des recommandations générales (utiliser une langue inclusive, installer de la coopération, inciter à la prise de parole, créer un climat favorable à l'apprentissage, varier les pratiques pédagogiques, etc.) ou plus spécifiques à l'informatique ou aux disciplines où les femmes sont très minoritaires

[5] https://cache.media.enseignementsup-recherche.gouv.fr/file/2020/18/3/NF_2020_10_Ingenieurs_1295183.pdf, consulté le 5 juin 2024.

(par exemple, rendre visibles les femmes informaticiennes). En lien avec ces propositions, il nous semble qu'une réflexion didactique ancrée dans les savoirs en informatique serait pertinente pour prendre en compte une forme de spécificité propre à ces savoirs et aux modalités de leur enseignement-apprentissage, au regard d'éventuels effets sur l'égalité femmes-hommes.

2.3. Genre et enseignement des mathématiques

S'agissant de l'enseignement des mathématiques, les questions de genre sont largement présentes dans les recherches anglo-saxonnes depuis les années 1970, comme en témoigne par exemple l'étude ICMI 7 (Hanna, 1996). Ces travaux pionniers portent notamment sur les différences entre femmes et hommes, s'agissant des performances, des effectifs dans les filières mathématiques, ou des attitudes et affects en mathématiques. Dans les années 1990, des travaux interrogent également l'objectivité des mathématiques (Burton, 1995) et les différences de rapports aux savoirs mathématiques entre femmes et hommes (Becker, 1995).

Plus récemment, Laursen *et al.* (2014) et Johnson *et al.* (2020) se sont questionnés sur l'impact des méthodes d'enseignement utilisant l'investigation (Inquiry-Based Learning et Inquiry-Oriented Instruction) concernant les écarts de performances et les affects des étudiantes et étudiants. Laursen *et al.* (2020) montrent en particulier que les méthodes Inquiry-Based Learning ont un impact positif sur les gains cognitifs (compréhension et réflexion) et affectifs (confiance en soi, motivation, attitude vis-à-vis de la discipline) des étudiantes, mais pas d'impacts significatifs sur les performances. À l'inverse, les résultats de Johnson *et al.* (2014) sur les méthodes Inquiry-Oriented Instruction suggèrent que ces méthodes seraient plus favorables aux étudiants qu'aux étudiantes en termes de performances. Ces résultats divergents interrogent sur les conditions qui permettent de rendre effective l'égalité femmes-hommes dans l'enseignement supérieur en mathématiques. Reprenant le travail de Laursen *et al.* (2014) et d'autres travaux récents, Adiredja et Andrews-Larson (2017) invitent à adopter, sur les questions d'équité et d'égalité dans l'enseignement supérieur en mathématiques, une perspective sociopolitique, en prenant en compte les relations entre connaissance, pouvoir, identité et discours social ambiant.

En France et s'agissant des mathématiques, des travaux de différents champs de recherche se sont penchés sur des objets d'étude liés au genre, mais en abordant peu les savoirs en jeu. Parmi les questions étudiées, on trouve notamment les différences de performances entre élèves filles et garçons (Jarlégan, 1999), et la façon dont la présentation de la tâche peut activer chez les filles un stéréotype négatif qui augmente cet écart de performance entre les sexes (Huguet & Régner, 2007). D'autres travaux portent sur les interactions entre enseignants et élèves en fonction du sexe des élèves (Jarlégan *et al.*, 2011), ou sur la représentation des femmes et des hommes dans les manuels scolaires (Elhadad & Berton-Schmitt, 2012).

A contrario, deux travaux se distinguent en utilisant des outils et concepts issus de la didactique des mathématiques.

Ainsi, Roditi et Salles (2015) analysent les différences entre des filles et des garçons de quinze ans dans les performances en mathématiques de l'évaluation PISA 2012, en utilisant le concept de *niveaux de mise en fonctionnement des connaissances* (Robert, 1998) : quatre niveaux de mise en fonctionnement sont distingués, selon que les exercices fassent appel aux mathématiques en tant que concept ou en tant qu'outil, et selon le degré d'initiative laissé à l'élève dans l'application de cet outil (application directe d'une méthode au programme, application avec adaptation, ou prise d'initiative importante de l'élève). Selon les auteurs, les filles seraient d'autant plus en difficulté par rapport aux garçons que le niveau requis de mise en fonctionnement des connaissances est exigeant (Roditi & Salles, 2015). Ainsi, l'écart est de 1,5 point de pourcentage à la faveur des garçons pour les items qui requièrent la mise en œuvre directe d'une procédure au programme et de 3,3 points de pourcentage pour ceux qui nécessitent l'introduction d'un intermédiaire.

Dans une autre étude menée sur des élèves de CM2 (dix ans), Sayac et Grapin (2016) abordent la question des stratégies de réponse à des questionnaires à choix multiples en mathématiques. Elles notent des différences de stratégies entre les filles et les garçons, qu'elles croisent avec le degré de certitude que les élèves attribuent à leurs réponses. Leur étude révèle que les filles sont nettement moins assurées de leurs réponses que les garçons, que celles-ci soient justes ou non.

Les derniers travaux cités mettent en évidence l'intérêt de recherches sur l'égalité femmes-hommes en didactique des mathématiques. Si ces travaux dressent des constats d'écarts entre filles et garçons, décrits à l'aide de concepts didactiques, ils en envisagent peu les causes. Or l'identification des causes nous semble nécessiter une approche qualitative de ce qui se joue dans les classes, fondée sur un cadre théorique spécifique. Même si notre recherche exploratoire se place dans un contexte et un niveau d'études différents, elle vise aussi à proposer un outillage théorique et méthodologique novateur pour prendre en charge les questions d'inégalités en prise avec les savoirs en jeu, et nous pensons que cet outillage pourrait être utilisé dans une multitude de contextes.

3. Concepts théoriques mobilisés et questions de recherche

3.1. Égalité, symétrie, et signes de reconnaissance

Nous dirons qu'il y a égalité dans une situation d'apprentissage si l'environnement pédagogique permet aux étudiantes et étudiants de prendre conscience de leur égale capacité relativement au savoir, ce qui nous semble un enjeu crucial s'agissant des mathématiques en classe préparatoire. Pour observer et penser cette égalité, nous adoptons ici le point de vue de Gerin (2020) qui consiste à interroger la *symétrie épistémique* entre filles et garçons, c'est-à-dire la symétrie des responsabilités par rapport au savoir, dans une situation de coopération en mixité. Nous définirons dans la section 3.2 le cadre théorique en didactique des mathématiques qui permet d'opérationnaliser cette analyse. La notion de symétrie épistémique permet ici d'envisager l'égalité « à côté » des identités, c'est-à-dire à côté de ce qui relèverait d'un supposé « féminin » ou « masculin ». Pour Gerin (2020),

> Il y a fait de symétrie épistémique fille-garçon lorsque les responsabilités de la fille dans le savoir/la pratique en jeu correspondent à celles du garçon, et réciproquement lorsque les responsabilités du garçon dans le savoir/la pratique en jeu correspondent à celles de la fille. (p. 318)

Nous nous intéressons enfin aux *signes de reconnaissance épistémique* qui permettent de manifester cette égale capacité des étudiantes et étudiants en mathématiques. Pour Gerin (2020),

> La reconnaissance épistémique fille-garçon s'actualise dans une action de mutualité des puissances d'agir de chacun·e au même titre que l'autre, pour la réalisation d'une œuvre commune. Ainsi, la reconnaissance épistémique fille-garçon est une reconnaissance mutuelle et réciproque. Les signes de reconnaissance épistémique fille-garçon émanent de faits d'équipotence fille-garçon matérialisés dans la réalisation d'une œuvre commune fille-garçon en symétrie. (p. 316)

3.2. Les concepts en théorie anthropologique du didactique

Afin de préciser ce que nous entendons par « responsabilités par rapport au savoir », notre analyse s'appuie principalement sur le cadre de la théorie anthropologique du didactique, introduite par Chevallard (1985, 1992).

Nous empruntons à la théorie anthropologique le concept d'*institution* (Chevallard, 1992). Dans cette théorie, les objets de savoir et les praxéologies vivent dans des institutions qui peuvent être une école, une classe, un niveau, mais aussi une famille, etc. Nous nous intéressons ici à l'institution « classe préparatoire MPSI », considérée de façon générique. Une institution étant fixée, nous pouvons définir un *rapport institutionnel* à un objet de savoir ou à une praxéologie qui vit dans cette institution, il s'agit d'un rapport qui s'impose à toute personne assujettie à cette institution.

Nous mobilisons également le concept de praxéologie. Selon Chevallard (1999), on peut décrire toute activité humaine à travers un aspect pratique (*praxis*) et un aspect théorique (*logos*), la donnée de ces deux aspects constituant une praxéologie. Chacun des deux aspects regroupe deux composantes : le type de tâches et la technique mise en œuvre constituent la praxis, tandis que le logos regroupe la technologie, qui est un discours rendant la technique intelligible, et la théorie, qui justifie la technologie et précise son domaine de validité. Le concept de praxéologie peut être articulé à celui d'institution, en considérant par exemple les praxéologies attendues par l'institution « classe préparatoire MPSI » pour les types de tâches du TIPE.

Nous nous intéressons en particulier aux *tâches coopératives* (Chevallard, 1999), définies comme des tâches qui mobilisent plusieurs personnes, les *acteurs et actrices* de la tâche. Chacune de ces personnes prend en charge des sous-tâches, et accomplit *des gestes* particuliers. Le terme de geste ici doit être compris en un sens large, il inclut toute action, parole, gestuelle, expression du regard, etc. Suivant Chevallard (1999), nous appelons *topos* (respectivement *rôle*) d'un ou une élève par rapport à une tâche coopérative l'ensemble des sous-tâches prises en charge par l'élève (respectivement, l'ensemble des *gestes* accomplis par l'élève). C'est à travers ces topoi et rôles que nous caractérisons les responsabilités de chaque membre du groupe par rapport aux savoirs.

Notons que le topos et le rôle de chaque élève ou professeur ne sont pas figés au cours d'une séance, ils évoluent au cours d'un processus qualifié de *topogenèse* (Chevallard, 1985), concept repris dans le cadre théorique de l'action conjointe en didactique (Sensevy, 2011). Dans ce cadre, les places occupées par chaque acteur ou actrice relativement au savoir sont alors qualifiées de *positions topogénétiques*. En particulier, la position topogénétique de chaque élève peut être qualifiée de haute ou basse, selon la *densité épistémique* de ses actes, c'est-à-dire leur potentiel en termes de modification du milieu au sens de la théorie de l'action conjointe en didactique. Nous introduisons également la catégorie « intermédiaire ». Ainsi, lorsqu'une personne corrige une erreur commise par un élève, elle enrichit le milieu pour favoriser un apprentissage, on peut donc considérer qu'elle est dans une position topogénétique haute. Si elle se contente d'écouter en hochant la tête, ses actes ne modifient pas le milieu, on parlera d'une position topogénétique intermédiaire. Enfin, si la personne exprime qu'elle est bloquée, en attente d'un enrichissement du milieu par une autre personne, on pourra parler de position topogénétique basse. En pratique, la position topogénétique s'apprécie en fonction du contexte : l'élève A qui pose une question pour comprendre l'explication de l'élève B pointe peut-être une vraie difficulté que B n'avait pas vue, auquel cas sa question peut amener dans le milieu des éléments qui vont faire avancer le savoir.

3.3. Question de recherche

La question centrale de cet article est la suivante : le dispositif de TIPE offre-t-il une opportunité pour concrétiser l'égalité femmes-hommes dans les enseignements de mathématiques en classe préparatoire scientifique ? En appui sur les éléments théoriques présentés ci-dessus, nous nous interrogeons sur la symétrie épistémique dans les groupes mixtes engagés dans un travail de TIPE, notamment en examinant les positions topogénétiques respectives des étudiantes et des étudiants.

Plus spécifiquement, nous nous intéressons à la question de recherche suivante : dans le fonctionnement des groupes mixtes de TIPE en mathématiques, quels *rôles* et *topoi* assument les étudiantes et étudiants, en particulier vis-à-vis des savoirs en jeu ? Y a-t-il symétrie entre les *rôles* et *topoi* des étudiantes et des étudiants ?

4. Méthodologie

Nous exposons ici la méthodologie de recueil de données, de traitement, et d'analyse, adoptée pour notre enquête sur le TIPE de mathématiques et informatique.

4.1. Données recueillies

Notre étude s'appuie sur des données recueillies au cours de l'année scolaire 2021-2022 dans un grand lycée en région Bretagne, disposant de trois classes de MPSI. Dans ces classes, les étudiantes représentent un quart de l'effectif.

Pour éviter d'influencer les interactions, l'objectif de la recherche tel qu'il a été présenté aux classes consistait à étudier le TIPE en mathématiques-informatique, pour voir dans quelle mesure le travail collectif et l'investigation pouvaient faciliter les apprentissages. L'aspect « genre » n'a donc pas été évoqué devant la classe. Nous avons suivi deux groupes mixtes de TIPE en mathématiques-informatique entre les mois de mars et juin 2022. Le groupe 1 est constitué de deux étudiantes et un étudiant. Le groupe 2 est constitué d'une étudiante et trois étudiants.

Pour analyser les interactions entre les membres du groupe, et les éventuelles asymétries, des phases d'observation nous ont paru nécessaires. D'autre part, nous avions besoin d'un outil permettant aux groupes de partager avec nous au fil de l'eau l'avancée du travail et la répartition des tâches entre leurs membres, y compris lorsque ces tâches se déroulaient hors la classe. Pour cela, nous avons choisi la méthodologie du carnet de bord, déjà utilisée en didactique des mathématiques (Rezat, 2013). Finalement, les recueils de données menés pour les deux groupes suivis sont les suivants.

- **Un carnet de bord** partagé en ligne a été créé pour chaque groupe. Afin de caractériser les rôles de chaque membre, il était demandé aux groupes d'y noter, dans les dernières minutes de chaque séance, ce que chacun et chacune avait fait pendant la séance, ce qui était prévu pour la séance à venir, et éventuellement les actions à réaliser dans l'intervalle, en précisant qui était en charge de chaque tâche. Pour mieux appréhender les savoirs en jeu et leur appropriation, il leur était également proposé de photographier leurs brouillons et les déposer sur le carnet de bord à chaque séance. Des extraits du carnet de bord du groupe 1 sont présentés en annexe.

- Pour chacun des deux groupes, **deux séances de travail ont fait l'objet d'une captation vidéo et audio,** destinée à appréhender les interactions et les positions topogénétiques de chaque membre. Les groupes ayant une grande liberté de mouvement et d'action lors de ces séances, la méthodologie de captation devait être très flexible pour pouvoir s'adapter à différentes configurations (travail sur écran, au tableau, sur papier autour d'une table, etc.). Selon les séances, une ou deux caméras sur pied et une caméra 360° ont été utilisées, permettant de filmer l'ensemble du groupe. L'environnement étant bruyant, un dictaphone a été utilisé en complément aux caméras pour enregistrer les discussions de travail du groupe.

  Nous avons également réalisé des **entretiens** avec les deux groupes et un questionnaire final, qui ne sont pas exploités ici car leur objet sort du cadre de cet article.

Un récapitulatif chronologique des types de données recueillies est présenté en figure **1**.

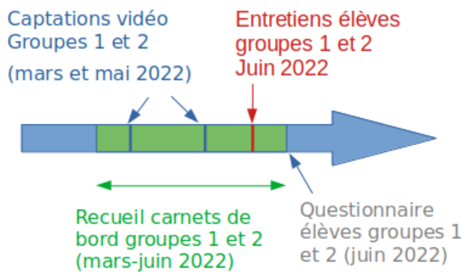


Figure 1. Frise chronologique – recueil de données

Les données concernant le groupe 2 se sont révélées plus lacunaires et moins exploitables (moindre taux de réponse au questionnaire, moins bonne qualité des enregistrements). Aussi, dans la suite de cet article, nous nous intéressons uniquement aux données concernant le groupe 1, ce qui en fait une étude exploratoire. Ce groupe a choisi de travailler sur les réseaux de neurones, des modèles fondés sur des méthodes mathématiques, implémentés sur ordinateur, et largement utilisés dans le champ de l'intelligence artificielle. Dans un souci d'anonymat, les prénoms ont été modifiés, les membres du groupe apparaissent tout au long de cet article sous les prénoms : Alice, Clara et Thomas.

4.2. Méthodologie de traitement et d'analyse des données

4.2.1. Traitement des données vidéos

Les séances enregistrées pour le groupe 1 ont eu lieu le 31 mars 2022 et le 5 mai 2022. Après captation audio et vidéo, chaque séance a fait l'objet d'un découpage en plusieurs phases, selon les modalités de travail (travail individuel, en binôme, ou en trinôme) et selon les objectifs visés ; certaines phases ont été elles-mêmes redécoupées en épisodes en fonction des objectifs poursuivis. Les phases de travail individuel ayant donné lieu à peu d'échanges verbaux, nous avons choisi de transcrire uniquement les phases de travail collectif.

4.2.2. Méthodologie d'analyse des transcriptions

L'analyse des transcriptions des deux séances s'est faite selon la méthodologie suivante, en lien avec notre cadrage théorique.

Tout d'abord, nous avons identifié sept types de tâches génériques qui peuvent être présents dans le TIPE. Pour cela, nous nous sommes basées sur le document officiel présentant les attendus pédagogiques (SCEI, 2023), ainsi que sur des entretiens avec deux étudiantes et deux étudiants et avec des enseignants, réalisés dans une précédente étude (non publiée).

Les types de tâches identifiés sont les suivants : définir une problématique, trouver des ressources pertinentes, s'organiser en équipe, articuler le TIPE avec d'autres activités, comprendre les savoirs en jeu, produire un travail original. Notons que nous entendons par « travail original » un travail produit au sein du groupe (par opposition à un travail purement bibliographique).

Nous avons ensuite cherché à reconnaître, à partir des transcriptions, les tâches mises en œuvre par le groupe au cours de la séance observée, en les rattachant à l'un de ces types de tâches, et en précisant qui y contribue, et qui assume la responsabilité de la tâche. Pour ce faire, nous avons tenu compte de deux critères : d'une part, la prise d'initiative sur la tâche, c'est-à-dire le fait qu'un étudiant ou une étudiante ait abordé cette tâche avant les autres dans la discussion ; d'autre part, son niveau d'implication et de décision par rapport à la tâche, que nous avons estimé à travers les verbatims. Nous avons estimé que la responsabilité de certaines tâches était partagée entre deux membres du groupe. À partir de cette étude, nous avons dressé pour chaque séance un tableau représentant le topos de chaque étudiant ou étudiante, c'est-à-dire l'ensemble des tâches dont elle ou il a pris la responsabilité, et nous avons comptabilisé combien de tâches étaient prises en charge par chaque membre du groupe, pour chaque type de tâches. Un exemple de résultat est présenté dans le tableau **3**, et nous présentons aux tableaux **5** et **6** des extraits de verbatims où nous explicitons les observables permettant d'obtenir ce tableau.

Nous nous sommes ensuite intéressées plus spécifiquement au type de tâches « comprendre les savoirs en jeu ». Pour tenter de comparer les responsabilités épistémiques de chaque membre du groupe, nous avons listé précisément les savoirs qui apparaissent dans la transcription, et nous les avons classés en cinq catégories : concepts mathématiques généraux (ici, le gradient et la distance euclidienne), concepts mathématiques spécifiques au sujet (ici, le principe de la classification non supervisée, l'algorithme k-means), concepts informatiques généraux (ici, choisir un mode de stockage des données, choisir un langage de programmation adapté, chercher en ligne de la documentation), concepts informatiques spécifiques au sujet (ici, programmer un algorithme de classification non supervisée en utilisant des fonctions prédéfinies), savoirs hors des mathématiques et de l'informatique (ici, le sépale d'une fleur). Nous avons listé ces savoirs en nous demandant quels membres du groupe avaient pris la responsabilité de chacun d'eux. Nous avons ensuite reporté les initiales de leurs prénoms dans un tableau en indiquant entre parenthèses derrière son initiale le nombre de savoirs pris en charge (voir tableau **4**).

Enfin, pour affiner cette analyse, nous avons étudié les *gestes* (Chevallard, 1999) posés par chaque membre du groupe vis-à-vis de ces savoirs. À leur tour, ces gestes ont été classés en huit catégories, que nous avons rattachées à une position topogénétique haute, intermédiaire, ou basse, comme le présente le tableau **1**. Comme nous l'avons évoqué précédemment, cette classification est parfois à affiner en fonction du contexte. Nous illustrons en section 5 ce travail sur des exemples de transcriptions (voir les tableaux **5** et **6**).

Tableau 1. Classification des gestes

Position topogénétique haute	expliquer, présenter, corriger une erreur, résoudre une difficulté, articuler les savoirs
Position topogénétique intermédiaire	acquiescer
Position topogénétique basse	poser une question de compréhension, exposer une difficulté

Ainsi, à partir des gestes de chaque membre du groupe, nous avons pu inférer d'éventuelles asymétries des positions topogénétiques, voire des hiérarchies entre étudiantes et étudiant dans les rapports au savoir au sein de la mise en œuvre de ce TIPE.

4.2.3. Méthodologie d'analyse du carnet de bord

Le carnet de bord a été rempli régulièrement par le groupe. Son étude a permis de suivre le travail tout au long du semestre, de repérer des moments charnières (par exemple, le moment où la problématique a été définie de façon précise), de mieux comprendre comment le groupe a travaillé (sources utilisées, répartition des tâches).

Au-delà de ces premiers constats, nous avons analysé le carnet de bord de la façon suivante : pour chaque séance, parmi les types de tâches précédemment déterminés, nous avons cherché à reconnaître à partir du carnet ceux qui étaient effectivement pris en charge par chaque membre du groupe. Nous nous sommes alors intéressées à identifier les aspects technologico-théoriques et pratico-techniques. Nous avons ensuite inféré s'il y avait symétrie entre les étudiantes et l'étudiant, s'agissant de l'équilibre entre ces aspects technologico-théoriques et pratico-techniques.

5. Analyses et résultats

5.1. Analyse de la séance du 31 mars

Nous détaillons ici l'analyse de la séance du 31 mars. Celle-ci a été découpée en six phases (voir tableau **2**), dont la plus longue (phase 5) consiste en un travail individuel de chaque membre du groupe, après répartition des tâches, et n'a donc pas été retranscrite.

Tableau 2. Les phases de la séance du 31 mars

Phase	Durée	Description succincte	Transcription
1	02:52	Démarrage	Transcription 1
2	08:06	Présentation du travail préalable	
3	09:08	Réflexion collective à partir du travail préalable	
4	03:49	Organisation du travail collectif de la séance	
5	1:14:45	Phase de travail individuel	Non transcrite
6	13:31	Mise en commun	Transcription 2

5.1.1. Analyse des topoi

Le tableau **3** illustre le topos de chaque membre du groupe pendant cette séance.

Tableau 3. Types de tâches et répartition des responsabilités, séance du 31 mars

Types de tâches	Responsables
Définir une problématique	C & T (1)
Trouver des ressources pertinentes	C (1), T (1)
S'organiser en équipe	C (2), C & T (1)
Articuler le TIPE avec les autres activités	T (1)
Comprendre les savoirs en jeu	A (4), C (1), T (1)
Produire un travail original	A (3), C & T (1)

Lecture : Pour le type de tâches « s'organiser en équipe », Clara prend la responsabilité de deux tâches et partage avec Thomas la responsabilité d'une troisième tâche.

Ce tableau donne à voir les éléments suivants :

– Les tâches relatives à l'organisation de l'équipe reposent en grande partie sur une étudiante, Clara. L'analyse du carnet de bord confirme que ce phénomène ne se limite pas à cette séance mais se retrouve tout au long du semestre.

– Les deux derniers types de tâches, à plus forte densité épistémique, sont pris en charge en grande partie par Alice. Cependant, l'analyse du carnet de bord montre qu'il s'agit d'une spécificité de cette séance, liée au fait qu'Alice a lors de la séance précédente travaillé sur une autre thématique, et qu'elle en fait ici un long exposé à ses camarades.

S'agissant de l'analyse fine des responsabilités par rapport aux savoirs en jeu au cours de la séance, nous reportons dans le tableau **4** le nombre de savoirs pris en charge par chaque membre du groupe.

Tableau 4. Responsabilités par rapport aux savoirs – séance du 31 mars

	Savoirs au programme de CPGE (1ère ou 2e année)	**Savoirs hors programme de CPGE**
Savoirs mathématiques généraux (gradient, distance euclidienne)	T(2)	
Savoirs mathématiques spécifiques au sujet (liés au principe de la classification non supervisée, aux méthodes d'évaluation d'un algorithme de classification, à l'interprétation des résultats d'une classification)		A(4), C(2)
Savoirs informatiques généraux (stocker des données dans des matrices, choisir un langage de programmation, rechercher la documentation sur une fonction Python)	A(1), T(1)	C & T (1)
Savoirs informatiques spécifiques au sujet (programmer un algorithme de classification non supervisée en utilisant des fonctions prédéfinies)		A(1)
Savoirs hors discipline (sépale d'une fleur)		T(1)

Lecture : Deux savoirs mathématiques généraux relevant du programme de CPGE sont abordés, sous la responsabilité de Thomas. Un savoir informatique général, hors programme de CPGE, est abordé, sous la responsabilité conjointe de Clara et Thomas.

On voit d'emblée que les savoirs abordés au cours de la séance dépassent largement le programme de CPGE. On remarque aussi qu'Alice prend en charge le plus grand nombre de savoirs, et qu'il s'agit essentiellement de savoirs spécifiques au sujet. Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, ce résultat s'explique en grande partie par le contexte de la séance observée.

5.1.2. Analyse des gestes et positions topogénétiques

Si nous étudions les gestes de chaque membre du groupe pour affiner l’analyse (voir l’exemple du tableau **5**), nous observons qu’Alice et Clara se placent assez souvent dans une position topogénétique basse, avec des gestes consistant à poser des questions de compréhension, ou à demander de l’aide face à leurs difficultés (voir figure **2**).

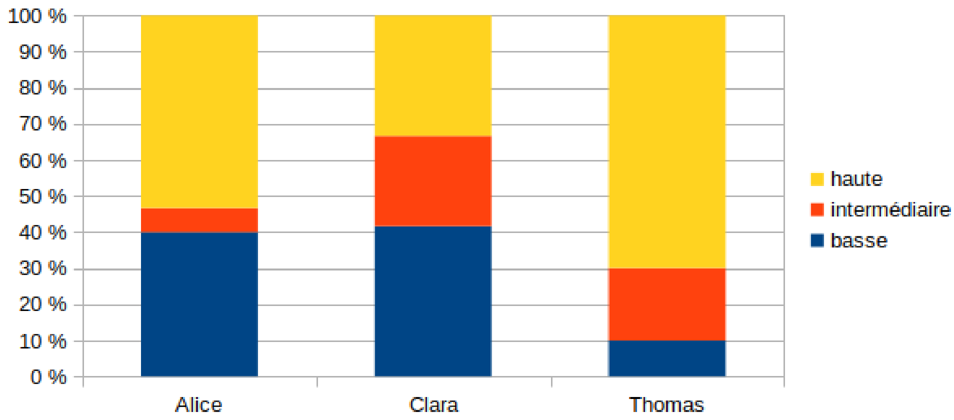


Figure 2. Positions topogénétiques des membres du groupe (31 mars). Lecture : 53 % des gestes d’Alice traduisent une position topogénétique haute, 7 % de ses gestes traduisent une position intermédiaire, 40 % une position basse.

À l’inverse, Thomas, bien qu’il ait pris la responsabilité de peu de savoirs dans cette séance, se place presque toujours en position topogénétique haute ou intermédiaire : il explique l’origine des difficultés de ses camarades, cherche à les résoudre, répond aux questions, articule les nouveaux savoirs aux savoirs anciens vus en classe, comme on peut le voir dans l’extrait du tableau **5**, où Alice présente les principes de la classification non supervisée.

Au tour de parole 75, Alice annonce sur un exemple les objectifs du code de classification qu’elle a mis en place. Ce faisant, elle enrichit le milieu et nous rattachons donc son geste « expliquer » à une position topogénétique haute.

La question posée par Thomas (Tdp 76) enrichit le milieu en y intégrant un élément de savoir abordé lors d’un devoir surveillé. Alice n’avait pas fait le lien entre ce qu’elle présentait au groupe et ce savoir ancien. Nous rattachons cette intervention de Thomas au geste « articuler les savoirs » et considérons que Thomas adopte ici une position topogénétique haute.

Tableau 5. Extrait de transcription du 31 mars : Thomas articule les savoirs nouveaux aux savoirs anciens

75	Alice	Et en gros, la première fois, du coup, je vais, j'vais créer euh, un groupe, euh, comment expliquer ? [ferme les yeux dans un effort de concentration], c'est que en gros, donc on a toutes nos espèces de fleurs, on a toutes leurs particularités, et on va essayer de créer les groupes, avec ces espèces de fleurs, de façon à les répartir de façons les plus homogènes pour réussir à voir les différences entre… entre chaque fleur.
76	Thomas	OK. Du coup, est-ce qu'on peut lier ça exactement à ce qu'on a fait en option info ? Genre où on prend les deux plus proches, on fait un groupe. Ça fait des graphes et tout.
77	Clara	[d'un ton songeur] On a fait ça en option info ?
78	Thomas	Oui, dans le DS.
79	Alice	Ah oui, c'est vrai !

Au cours de la même séance, Thomas lui-même rencontre des difficultés pour comprendre comment réaliser des calculs de gradients. La définition du gradient n'a pas encore été donnée par le professeur de mathématiques, ce qui rend cet exercice difficile pour le groupe. Le tableau **6** présente un extrait de cet épisode.

Tableau 6. Extrait de transcription du 31 mars : Thomas expose ses difficultés sur le gradient

38	Thomas	J'avais commencé les calculs de gradient, sauf que ben… ça mène… pas à grand-chose vu que ben… ça mène à des trucs qui sont pas homogènes, c'est-à-dire que j'multiplie des matrices mais pas de bonnes tailles et tout.
39	Clara	[air impressionné] : Ah, c'est des matrices ?
40	Thomas	Oui, oui parce que je fais des gradients de matrices par rapport à des matrices. [Clara hoche la tête.] Tu sais, vu qu'y a eu la vectorialisation des équations et tout au début. Tu sais, t'as mis t'sais les gradients, c'est de grand X, grand W et tout là.
41	Clara	Hmm.

Le brouillon déposé par Clara sur le carnet de bord de la séance précédente permet ici de mieux comprendre les savoirs en jeu. Thomas et Clara tentent de comprendre et mettre en œuvre un perceptron, qui est un algorithme d'apprentissage supervisé pour séparer automatiquement deux classes par un hyperplan. En dimension 2, si on considère donnés des points du plan (échantillon initial) auxquels sont attribuées des étiquettes prenant deux valeurs (classes), et s'il existe une droite séparant ces deux classes, l'algorithme permet de déterminer une droite de séparation optimale, de façon à pouvoir ensuite automatiquement attribuer une classe à un nouveau point qui ne figure pas dans l'échantillon initial. Pour déterminer cette droite optimale, Thomas doit calculer le gradient d'une fonction scalaire de deux variables, définie à partir des coordonnées des points de l'échantillon. Cependant, comme on le voit dans cet extrait, il se perd entre les variables de la fonction à minimiser (les deux paramètres permettant de définir la droite de séparation) et les coordonnées des points de l'échantillon, et ne parvient pas à écrire correctement le gradient. Au tour de parole 38, il expose sa difficulté à Clara et Alice ; on peut rattacher ce geste à une position topogénétique basse : le milieu est trop difficile à déchiffrer pour lui, il lui manque une intervention extérieure pour le rendre plus accessible. Au tour de parole 39, Clara montre de l'intérêt et de la surprise, sans toutefois apporter au milieu des éléments nouveaux : elle se situe en position intermédiaire. Au tour de parole 40, Thomas précise sa démarche et sa difficulté en rappelant à Clara le travail fait ensemble lors de la séance précédente. Ce faisant, il amène dans le milieu ces éléments d'un arrière-plan partagé avec Clara : on peut dire qu'il se place en position topogénétique haute. Dès lors, la position que prend Thomas par rapport au savoir semble décourager ses camarades de l'aider : on observe sur le film de la séance qu'Alice semble décrocher de l'échange et se concentrer sur son ordinateur. Clara tente de se concentrer pour comprendre les difficultés de Thomas, mais elle semble ne pas avoir d'idée pour l'aider. Elle reste dans une position basse ou intermédiaire, tandis que Thomas conserve sa position haute. L'épisode se conclut sans que le groupe ait réussi à avancer sur ce calcul.

D'autre part, si la promptitude de Thomas à articuler les savoirs et à s'attaquer aux difficultés est profitable à l'avancement du travail collectif, elle laisse parfois peu de place à l'expression de l'égale capacité des étudiantes, en particulier pour ce qui relève du bloc pratico-technique. En témoigne notamment un épisode où Alice tente d'exécuter un code qu'elle a écrit pour mettre en œuvre une méthode de classification non supervisée, et afficher l'inertie intra-classe en fonction du nombre de clusters (tableau 7).

Tableau 7. Extrait de transcription du 31 mars : difficultés d'exécution du code d'Alice

103	Alice	Normalement, normalement il m'affiche euh, c'est bizarre, pourquoi il veut pas ? Ah. Il veut pas. Parce que normalement il m'affiche le graphique avec l'évolution de l'inertie en fonction du nombre de groupes que tu fais. [Thomas regarde à nouveau l'écran d'Alice.] Ah ! OK !
104	Thomas	Ouais c'est bon, c'est juste que ça prend beaucoup de temps.
105	Alice	OK, c'est bon. Attends, parce que là. Ah oui. Attends… Il fait un mélange des deux. Euh… OK. Attends c'est bizarre parce que j'ai l'impression qu'il me met toujours l'autre.
106	Thomas	Supprime celui que tu viens d'avoir. Ferme-le.
107	Alice	Attends. Je vais mettre euh…
108	Thomas	Non l'autre dans Pyzo, y en a deux d'ouverts. Ah non en fait.
109	Alice	Ouais non.
110	Thomas	Ben ferme l'autre peut-être, ça prend un peu… Enfin nan j'sais pas, ça change rien.
111	Alice	Je vais mettre tout ça en hashtag. Comme ça… il y pense pas quoi. [Alice et Clara rient]. Il arrête ses bêtises. OK voilà c'est bon. Voilà. Et donc du coup ici tu vas avoir l'évolution de l'inertie intra-classe, en fonction du nombre de clusters que tu fais. Donc le nombre de clusters c'est le nombre de classes quoi.

Ici les savoirs génériques en jeu sont : comprendre pourquoi un programme ne s'exécute pas comme souhaité et résoudre ce problème. Le résultat du programme d'Alice tardant à s'afficher, Thomas se place en position topogénétique haute, en cherchant à expliquer l'origine du problème (Tdp 104), puis en donnant des injonctions qui s'avèrent inefficaces (Tdp 106, 110) ; finalement, Alice résout le problème par elle-même en commentant une partie du code (Tdp 111).

5.2. Analyse du carnet de bord

Une première observation du carnet de bord révèle que les sources utilisées par Clara ont été systématiquement renseignées, contrairement à celles des autres membres du trinôme. De plus, seule Clara a déposé ses brouillons sur le carnet de bord. On peut faire l'hypothèse que la tâche consistant à remplir le carnet de bord, relevant de l'organisation de l'équipe, a été principalement prise en charge par Clara.

Le carnet de bord permet également de repérer un moment charnière dans le travail du groupe : le 7 avril, après plusieurs semaines de recherches bibliographiques assez larges, la problématique du groupe s'est fixée de façon plus précise. L'objectif du groupe est de coder un jeu vidéo nommé Snake, dans lequel des serpents améliorent leurs performances à se déplacer dans un labyrinthe par des méthodes d'apprentissage (réseau de neurones).

L'analyse du carnet de bord par les types de tâches effectués, séance après séance, fait ressortir de nouveaux éléments. La recherche de ressources occupe une place importante dans le travail du groupe, et on n'observe pas d'asymétrie relativement à ce type de tâches. Cependant, à partir du 7 avril, les aspects pratico-techniques (et en particulier le codage du jeu et du réseau de neurones) prennent de plus en plus d'importance (voir annexe). On observe qu'à partir de cette date, les topoi des membres du groupe se distinguent : Thomas se spécialise dans la sous-tâche codage, tandis qu'Alice et Clara, tout en participant au codage, prennent la responsabilité de la justification mathématique des techniques algorithmiques.

5.3. Analyse de la séance du 5 mai : signes de reconnaissance épistémique

La séance du 5 mai confirme les analyses de la séance du 31 mars et du carnet de bord. Thomas y adopte une position topogénétique haute, se positionnant comme « expert » de la programmation. Il définit les paramètres importants, explique la façon de mettre en œuvre les différentes parties du code, donne des consignes, vérifie et corrige le travail de Clara, propose d'aider Alice. Dans une première lecture, Clara semble adopter un rôle « d'exécutante » : elle va voir Thomas pour lui demander comment procéder, retourne coder à sa place, et l'appelle quand elle a fini. Alice, chargée de la mise en place d'une base de données pour l'apprentissage, tente de réfléchir à la stratégie, et fait part de ses idées à Clara, puis à Thomas. Or ce dernier apporte des réponses décalées par rapport à l'attente d'Alice, insistant sur la complexité de l'algorithme à mettre en place et annonçant qu'il aidera Alice : « Enfin, si tu veux j'pourrai t'aider parce que ça prendra beaucoup de temps à coder » (Thomas, Tdp 28), sans confirmer ou infirmer la stratégie qu'elle propose.

En seconde lecture, on peut penser qu'en prenant en charge le codage, Clara se rend capable de coder. Plusieurs épisodes de cette séance font d'ailleurs émerger des signes de l'égale capacité des étudiantes en informatique, créant la surprise chez Thomas, comme par exemple dans l'extrait reproduit dans le tableau **8**.

Tableau 8. Extrait de transcription du 5 mai : Clara comprend le Javascript

93	Clara	Du coup Thomas, tu fais quoi toi ?
94	Thomas	Euh, ben là, j'pense, j'vais aller me renseigner comment on code exactement la génération, et comment on code les mutations. Parce que genre une fois que t'as, imaginons que tu fais, sur une génération, j'sais pas tu, tu mets j'sais pas, tu mets mille serpents tu vois. On va dire tu prends les dix meilleurs, et en gros après, soit tu prends les dix, et faut les... leur faire une mutation tu vois, et genre faut les reproduire, mais donc, comment exactement on mute leurs trucs, pour pas que ce soit totalement aléatoire et pour pas que ça refasse des trucs de premier niveau ?
95	Clara	Oui, oui oui. Et attends, et du coup, ben si tu veux tu peux regarder ce qu'a fait… le truc que tu nous as donné, montré. Et euh, ouais c'est ça, et si…
96	Thomas	Ouais mais il code en JavaScript et je comprends pas JavaScript !
97	Clara	Mais si, moi j'ai lu, j'comprends, parce que c'est un peu…
98	Thomas	[très étonné] : Le JavaScript ?
99	Clara	Ouais, ça va. C'est pas très compliqué.
100	Thomas	OK. Euh… J'ai déjà codé une ou deux fois en JavaScript c'est pas…
101	Clara	Ouais mais, enfin je trouve qu'on comprend, genre « for machin »

Les tours de parole 96 à 101 font émerger un signe de reconnaissance épistémique femme-homme. Alors que Thomas se positionne en « expert » du codage, un rôle qui dans une certaine mesure rejoint un cliché masculin, en quelques phrases, Clara lui montre un signe de son égale capacité à comprendre un code, même écrit dans un langage qu'elle n'a pas étudié, suscitant l'étonnement de l'étudiant. Malgré la présence de tels signes, les positions topogénétiques au cours de la suite de la séance restent fortement asymétriques et ne semblent pas remettre en cause fondamentalement les attitudes de chaque membre du groupe.

6. Discussion et perspectives

6.1. Éléments de réponse à la question de recherche

La question de recherche étudiée ici était : « Dans le fonctionnement des groupes mixtes de TIPE en mathématiques, quels *rôles* et *topoi* assument les étudiantes et étudiants, en particulier vis-à-vis des savoirs en jeu ? Y a-t-il symétrie entre les *rôles* et *topoi* des étudiantes et des étudiants ? »

L'analyse de la séance du 31 mars a montré des différences dans les topoi des étudiantes et étudiants. En combinant cette analyse à celle du carnet de bord, nous avons pu distinguer les différences qui sont spécifiques de la séance observée (en particulier, la responsabilité d'Alice par rapport au savoir) et celles qui ont un caractère plus global. Deux asymétries globales sont ressorties clairement : la responsabilité de Clara concernant l'organisation du travail collectif, et la responsabilité de Thomas concernant l'activité de codage. Cette distinction est significative car ces deux types de tâches ne revêtent pas la même densité épistémique en termes de savoirs mathématiques et informatiques.

L'analyse fine des gestes de chaque membre du groupe nous a permis d'accéder à leurs positions topogénétiques, relevant là aussi des asymétries. Bien qu'Alice ait pris le 31 mars la responsabilité du plus grand nombre de savoirs, ses gestes la placent dans une position topogénétique plus élevée que celle de Clara, mais plus basse que celle de Thomas. Comme pour l'analyse des topoi, on pourrait se demander si ces asymétries sont spécifiques à la séance observée, ou si elles sont globales. L'analyse du carnet de bord ne permet pas d'entrer suffisamment finement dans les gestes des étudiantes et étudiants pour répondre à cette question, toutefois l'observation de la séance du 5 mai confirme la position topogénétique plus haute prise par Thomas, celle de Clara étant pour cette séance un peu en dessous, et celle d'Alice étant la plus basse. Des signes de reconnaissance épistémique femme-homme émergent pendant la séance du 5 mai, mais ils ne suffisent pas à rééquilibrer les positions topogénétiques des étudiantes et étudiant.

Plusieurs facteurs pourraient expliquer ces asymétries, comme par exemple le niveau en mathématiques et informatique, ou leurs personnalités. Aussi, nous ne pouvons prétendre que les asymétries observées sont dues au sexe des personnes ; toutefois, elles montrent que, dans ce groupe, le dispositif de TIPE a favorisé l'émergence de quelques signes de reconnaissance épistémique, mais n'a pas permis aux étudiantes et étudiant de développer les mêmes interactions avec les savoirs. Ceci interroge le caractère égalitaire de la situation d'apprentissage. Enfin, une limite importante de la méthodologie présentée ici tient au fait qu'un seul groupe a été analysé. Cette étude doit donc être vue comme exploratoire.

6.2. Contributions théoriques et méthodologiques

Malgré ces limites, ce travail présente plusieurs originalités qui méritent d'être soulignées.

Sur le plan théorique, il propose de nouveaux outils issus de différents cadres conceptuels pour étudier de façon spécifique les questions d'égalité fille-garçon en didactique des mathématiques et répondre à une question peu traitée : celle de la symétrie épistémique de genre. Les concepts de topos et de position topogénétique sont apparus pertinents pour analyser cette symétrie dans les apprentissages. Ces outils théoriques sont amenés à évoluer ; en particulier, le concept de positionnement épistémique de genre (Verscheure *et al.*, 2020) pourrait venir les enrichir et permettrait sans doute de nuancer les analyses. Cependant ils ont le mérite d'apporter une première réponse dans un champ de recherche encore largement inexploré, et leur application au cas du TIPE a mis en évidence leur pertinence.

L'originalité de la question posée amène également à développer une approche méthodologique nouvelle. En effet, contrairement à d'autres travaux abordant le genre en didactique des mathématiques l'étude ne se base pas sur des réponses à des questionnaires ou des tests de mathématiques, mais comprend une phase d'observation de séances et des outils pour l'analyser finement, ainsi qu'un recueil de données à partir d'un carnet de bord.

6.3. Perspectives

L'analyse présentée dans cet article est exploratoire et pourra être prolongée dans différentes directions (complétant la direction théorique évoquée ci-dessus).

En particulier, de nombreux travaux ont établi des écarts importants selon le sexe concernant l'anxiété relative aux évaluations en mathématiques, et le sentiment d'efficacité personnelle (*self-efficacy*), voir notamment (Pintrich *et al.*, 1991). Pour aller au-delà de l'étude présentée ici, il serait intéressant d'observer dans quelle mesure, et à quelle condition, le dispositif du TIPE pourrait, à l'instar des enseignements *Inquiry-Based Learning* (Laursen *et al.*, 2014) favoriser chez les étudiantes des gains cognitifs, affectifs et transversaux susceptibles de réduire ces écarts. D'autres données recueillies dans notre étude, en particulier celles des questionnaires et entretiens finaux, apportent de premiers éléments de réponse à cette question.

Un prolongement de cette recherche pourrait s'inscrire dans la question suivante : à quelles conditions didactiques le TIPE permettrait-il une symétrie des responsabilités filles-garçons ? Cette question pourrait amener à réfléchir avec les enseignants des classes concernées, sur la base des premières analyses présentées ici, pour proposer des aménagements du dispositif de TIPE en MPSI, afin de favoriser une plus grande égalité entre les sexes dans les apprentissages. Elle pourrait également, à terme, donner lieu à des actions de formation à destination des enseignantes et enseignants de classe préparatoire.

Par ailleurs, même si ses modalités sont spécifiques, ce qui s'expérimente en TIPE ne peut être totalement décorrélé des enseignements ordinaires en classe préparatoire. Nous faisons l'hypothèse que le temps didactique est un élément important pour développer une conscience de l'égale capacité des étudiantes et étudiants en mathématiques. Comme nous l'avons mentionné dans la section 1.2, le temps didactique en classe préparatoire est très rapide, ce qui peut nuire au sentiment d'égale compétence. Nous souhaitons donc également réfléchir à des leviers pour ancrer des situations de mathématiques dans un temps didactique propice à la concrétisation de l'égalité.

Bibliographie

ADIREDJA, A. P., & ANDREWS-LARSON, C. (2017). Taking the sociopolitical turn in postsecondary mathematics education research. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 3*(3), 444–465. https://doi.org/10.1007/s40753-017-0054-5

BAUDELOT, C., & ESTABLET, R. (2006). *Allez les filles ! Une révolution silencieuse* (2e édition). Points actuels.

BECKER, J.-R. (1995). Women's ways of knowing in mathematics. Dans P. Rogers, G. Kaiser (Dir.), *Equity in mathematics education. Influences of feminism and culture* (p. 163–174). Falmer Press.

BERENI, L., CHAUVIN, S., JAUNAIT, A., & REVILLARD, A. (2020). *Introduction aux études sur le genre*. De Boeck Supérieur.

BLANCHARD, M., ORANGE, S., & PIERREL, A. (2016). *Filles + sciences = une équation insoluble ? Enquête sur les classes préparatoires scientifiques*. Éditions Rue d'Ulm.

BLANCHARD, M., ORANGE, S., & PIERREL, A. (2017). La noblesse scientifique : Jugements scolaires et naturalisation des aspirations en classes préparatoires aux grandes écoles. *Actes de la recherche en sciences sociales, 220*(5), 68–85. https://doi.org/10.3917/arss.220.0068

BURTON, L. (1995) Moving towards a feminist epistemology of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 28*(3), 275–291.

CASTELA, C. (2002). Les objets du travail personnel en mathématiques des étudiants dans l'enseignement supérieur : comparaison de deux institutions, Université et Classes préparatoires aux Grandes Écoles. *Cahier de Didirem, 40*.

CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. La pensée sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1992). *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique* (Vol. 12/1). La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221–266.

COLLET, I. (2004). La disparition des filles dans les études d'informatique : les conséquences d'un changement de représentation. *Carrefours de l'éducation*, *17*(1), 42–56. https://doi.org/10.3917/cdle.017.0042

COLLET, I. (2021, 29 septembre). Appliquer une pédagogie de l'égalité dans les enseignements d'informatique. *IntersticesInfo*. https://interstices.info/appliquer-une-pedagogie-de-legalite-dans-les-enseignements-dinformatique/

DARMON, M. (2015). *Classes préparatoires : la fabrique d'une jeunesse dominante*. La Découverte. https://doi.org/10.3917/dec.darmo.2015.01

DIRECTION DE L'EVALUATION, DE LA PROSPECTIVE ET DE LA PERFORMANCE (DEPP) (DIR.). (2021). *Repères et références statistiques : enseignements, formation, recherche* [RERS 2021]. Ministère de l'Éducation nationale. https://www.education.gouv.fr/media/92540/download

DURU-BELLAT, M. (2017). *La tyrannie du genre*. SciencesPo, Les presses.

ELHADAD, A., & BERTON-SCHMITT, A. (2012). *Égalité femmes-hommes dans les manuels de mathématiques, une équation irrésolue ?* Centre Hubertine Auclert.

FARAH, L. (2018). Les dispositifs institutionnels de mise à l'étude dans les classes préparatoires aux écoles de commerce. *Éducation et didactique*, *12*(3), 9–23. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.3429

FISHER, A., & MARGOLIS, J. (2002). *Women in computing: Unlocking the clubhouse.* MIT Press.

GAUCHARD, X. (2023). *Égalité filles-garçons en mathématiques, rapport 22-23-139A.* IGÉSR. République française. https://www.education.gouv.fr/media/133538/download

GERIN, M. (2020). *Co-écriture fille-garçon en symétrie : une ingénierie didactique coopérative pour concrétiser l'égalité des sexes au CP* [Thèse de doctorat, Université Rennes 2]

HANNA, G. (Ed.). (1996). *Towards Gender Equity in Mathematics Education: an ICMI study*. Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/0-306-47205-8

HUGUET, P., & RÉGNER, I. (2007). Stereotype threat among schoolgirls in quasi-ordinary classroom circumstances. *Journal of Educational Psychology*, *99*(3), 545–560. https://doi.org/10.1037/0022-0663.99.3.545

JARLEGAN, A. (1999). *La fabrication des différences : sexe et mathématiques à l'école élémentaire.* [Thèse de doctorat, Université de Bourgogne]

JARLEGAN, A., TAZOUTI, Y., & FLIELLER, A. (2011). L'hétérogénéité sexuée en classe : effets de genre sur les attentes des enseignant(e)s et les interactions verbales enseignant(e)-élève. *Les dossiers des sciences de l'éducation, 26*, 33–50. https://doi.org/10.4000/dse.1073

JOHNSON, E., ANDREWS-LARSON, C., KEENE, K., MELHUISH, K., KELLER, R., & FORTUNE, N. (2020). Inquiry and Gender Inequity in the Undergraduate Mathematics Classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, *51*(4), 504–516. https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2020-0043

LALAUDE-LABAYLE, M. (2016). *L'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau universitaire Analyse didactique et épistémologique*. [Thèse de doctorat, Université de Pau et Pays de l'Adour]

LAURSEN, S. L., HASSI, M.-L., KOGAN, M., & WESTON, T. J. (2014). Benefits for Women and Men of Inquiry-Based Learning in College Mathematics: A Multi-Institution Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(4), 406–418. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.45.4.0406

MONFORT, M., REGUER-PETIT, M., PERRIN, G., & BERTON-SCHMITT, A. (2022). *Les freins à l'accès des filles aux filières informatiques et numériques. Une étude longitudinale dans cinq lycées franciliens.* Centre Hubertine Auclert. https://www.centre-hubertine-auclert.fr/outil/synthese-les-freins-a-l-acces-des-filles-aux-filieres-informatiques-et-numeriques

MORLEY, C., & COLLET, I. (2017). Femmes et métiers de l'informatique : un monde pour elles aussi. *Cahiers du Genre, 62*(1), 183–202. https://doi.org/10.3917/cdge.062.0183

PINTRICH, P. R., SMITH, D. A., GARCIA, T., & MCKEACHIE, W. J. (1991). *A manual for the use of the motivated strategies for learning questionnaire (MSLQ).* Ann Arbor.

REZAT, S. (2013). The textbook-in-use: students' utilization schemes of mathematics textbooks related to self-regulated practicing. *ZDM Mathematics Education 45*, 659–670. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0529-z

ROBERT, A. (1998). Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*(2), 139–190.

RODITI, E., & SALLES, F. (2015). Nouvelles analyses de l'enquête PISA 2012 en mathématiques : un autre regard sur les résultats. *Éducation & formations*, *86-87*, 235–255.

ROUSTAN-JALIN, M., BEN MIM, H., & DUPIN, J.-J. (2002). Technologie, sciences, filles, garçons : des questions pour la didactique ? *Didaskalia*, *21*, 9–42.

SAYAC, N., & GRAPIN, N. (2016). Stratégies et degrés de certitude des filles et des garçons en mathématiques : quelles différences pour quels résultats ? *Repères-IREM*, *104*, 43–57.

SCEI (2023). *Attendus pédagogiques du TIPE.* https://www.scei-concours.fr/pdf/2024_Attendus_Pedagogiques_Final.pdf

SCHUBAUER-LEONI, M.-L. (1996). Étude du contrat didactique pour des élèves en difficulté en mathématiques. Problématique didactique et/ou psychosociale. Dans C. Raisky & M. Caillot (Dir.), *Au-delà des didactiques, les didactiques* (p. 159–189). De Boeck.

SENSEVY, G. (2011). *Le Sens du Savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique.* De Boeck.

VERSCHEURE, I., & AMADE-ESCOT, C. (2004). Dynamiques différentielles des interactions didactiques selon le genre en EPS. Le cas de l'attaque en volley-ball en seconde. *Staps*, *66*(4), 79–97. Cairn.info. https://doi.org/10.3917/sta.066.0079

VERSCHEURE, I., AMADE-ESCOT, C., & VINSON, M. (2020). De la pertinence du concept de « positionnement de genre épistémique » pour l'analyse de la fabrique des inégalités en classe. *Éducation & Didactique, 14*(1), 81–100. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.5408

ROZENN TEXIER-PICARD
Univ Rennes, INSA, CNRS, IRMAR UMR 6625
rozenn.texier-picard@insa-rennes.fr

GHISLAINE GUEUDET
Université Paris Saclay, EST
ghislaine.gueudet@universite-paris-saclay.fr

MURIELLE GERIN
Université Bretagne Occidentale, CREAD
murielle.gerin@univ-brest.fr

Annexe. Extraits du carnet de bord

Dans le premier extrait ci-contre (séance du 24 mars, voir figure 3), on voit les tâches prises en charge par chaque membre du groupe sur la séance, ainsi qu'un brouillon déposé par Clara et qui peut être téléchargé.

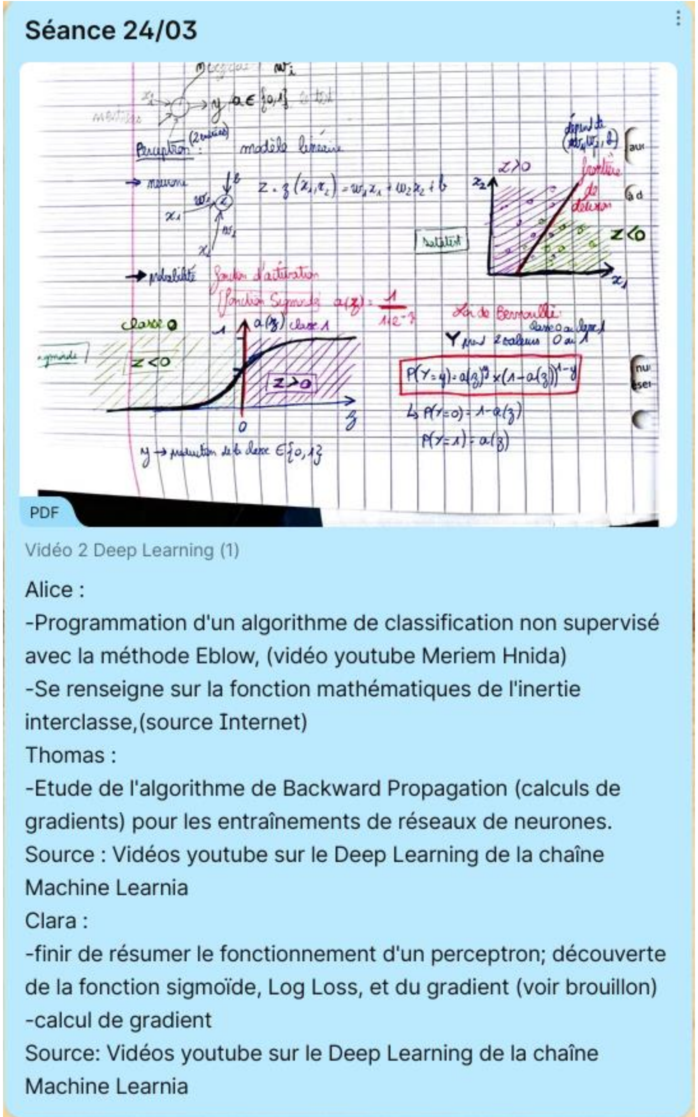


Figure 3. Extrait du carnet de bord – Séance du 24 mars

Dans le deuxième extrait (séance du 12 mai, voir figure 4), on voit la place grandissante des aspects pratico-techniques et la spécialisation partielle de Clara et Alice dans la justification des algorithmes.

12/05/2022

Thomas :
Création et début d'implémentation des neurones et de l'algorithme génétique.
Clara :
J'ai continué les recherches sur comment créer les générations. Les thèses et articles scientifiques manquent un peu de concret donc pour les prochaines séances je vais coder de réseaux de neurones avec Thomas.
Cependant ces recherches vont me permettre de justifier le résultat de l'algorithme mathématiquement.

Alice:
Recherche du nombre optimal de neurones pour le réseau, résultat : il n'existe pas une quelconque recette prédéfinit du nombre de neurones, nous testons donc avec 1 couche cachée + visionage d'une video de machine learnia sur la programmation d'un réseau de neurones à deux couches

Figure 4. Extrait du carnet de bord – séance du 12 mai.

LALINA COULANGE, GRÉGORY TRAIN

FRACTION À L'ÉCOLE PRIMAIRE EN FRANCE : UN « OBJET » À (RE)QUESTIONNER ?

Abstract. Fractions in primary school in France : an 'object' to (re)question? We aim to identify in this text what may pose difficulties in teaching and learning fractions at school in the French educational context. Different experiments conducted over several years within an LéA (Associated educational Place) are studied and discussed in relation to institutional requirements, as well as research work in the field of Mathematics Education. We test different tasks in the mathematics class that are not commonly used in the French curriculum and discuss their potential and limitations. This allows us to contribute to a broader perspective on the teaching and learning of fractions in France and elsewhere.

Keywords. fraction, french curriculum, share problems, benchmarking

Résumé. Nous cherchons à baliser dans ce texte ce qui est susceptible de faire difficulté dans l'enseignement et l'apprentissage des fractions à l'école dans le contexte scolaire français. Différentes expérimentions conduites depuis plusieurs années au sein d'un LéA (Lieu d'éducation Associé) sont étudiées et mises en discussion avec les prescriptions institutionnelles et plus largement avec des travaux de recherche relevant du champ de la *Mathematics Education*. Nous mettons à l'épreuve de la classe de mathématiques, différentes tâches peu fréquentées dans le curriculum français et discutons de leurs potentialités et de leurs limites. Ceci nous permet plus largement d'alimenter des perspectives sur l'enseignement et l'apprentissage des fractions en France comme ailleurs.

Mots-clés. fraction, curriculum français, problèmes de partage, benchmarking

---

Ce texte se veut une synthèse de travaux de recherche conduits depuis plusieurs années sur l'enseignement et l'apprentissage des fractions à l'école primaire en France. Ces travaux prennent appui sur une recherche collaborative initiée dans le cadre d'un Lieu d'éducation Associé (réseau LéA-IFÉ[1]) et menée sur une période de sept ans (2014-2021), bien que nous ne présentions ici que les résultats de deux années de collaboration avec une enseignante en particulier. Même si les matériaux retenus pour l'étude restent contextualisés au curriculum français, nous nous appuyons sur des travaux de recherche s'inscrivant dans le champ élargi de la *Mathematics Education.* Nous suivons ainsi la voie déjà investie dans deux thèses en didactique des mathématiques soutenues en France sur cette thématique de

[1] https://ife.ens-lyon.fr/lea

l'enseignement des fractions à l'école (Allard, 2015 ; Martinez-Ibanez, 2018). Notre objectif n'est pas de faire une synthèse de cette littérature, à l'instar de celles conduites dans les thèses mentionnées ci-avant qui contribuent d'ailleurs depuis plusieurs années à la diffusion des travaux de Behr *et al.* (1992) au sein de la communauté des didacticiens français. Nous souhaitons plutôt rendre compte du cheminement d'une enquête que nous avons menée, en problématisant au fil du texte un ensemble de faits observables sur l'enseignement et l'apprentissage des fractions dans le contexte singulier de l'école primaire en France et en prise d'appui sur une recherche collaborative conduite sur la durée (dont nous livrons une vue synthétique en annexe). Dans cette perspective, nous nous appuyons sur des travaux ciblés, en réponse à des questions parfois très spécifiques qui ont émergé au fil de l'avancée de notre propre recherche. L'étude de ressources institutionnelles visant à documenter des spécificités de la trajectoire d'étude des fractions, telle qu'envisagée dans le curriculum français, participe de cette problématisation. En outre, nous explorons des tâches « classiquement » peu proposées, voire absentes, de la classe de mathématiques « française » – mais largement représentées dans certaines recherches de la *Mathematics Education* telles que des problèmes de partage et de comparaison de fractions convoquant ce que ces recherches désignent par du *benchmarking* et/ou du *residual thinking.* Notre enquête s'articule ainsi autour de deux volets successivement documentés : l'un visant à interroger la place et le rôle des problèmes de partage dans l'enseignement et l'apprentissage des fractions à l'école, l'autre permettant de proposer quelques repères possibles dans l'enseignement de ce thème qui tendraient à renforcer la place donnée à la comparaison de fractions en primaire. Nous revenons dans un dernier paragraphe conclusif sur les principaux résultats de notre recherche et esquissons quelques perspectives concernant la question de l'apprentissage et l'enseignement des fractions à l'école primaire.

1. La fraction, un objet à (re)questionner dans le curriculum français ?

1.1. Des premiers constats d'étude étayés par des résultats d'enquêtes internationales

Depuis plusieurs années, les enquêtes internationales *Trends in Mathematics and Science Study* (TIMSS) et *Programme for International Student Assessment* (PISA) donnent à voir des résultats français en mathématiques en deçà de ceux d'autres pays de l'Union Européenne (UE) et de l'Organisation de Coopération et de Développement Economique (OCDE). Dans l'enquête TIMSS 2015 (Mullis *et al.*, 2016) et concernant le thème d'étude des fractions, Martinez et Roditi (2017) mettent en avant un différentiel important entre le pourcentage global de réussite des élèves en France (37 %) et le pourcentage moyen de réussite des élèves de 11 autres pays ou provinces[2] (64 %) en se basant sur la comparaison de 14 items sur ce thème.

Nous avons considéré un des rares items « libérés » de TIMSS 2015 sur les fractions reproduit dans la figure 1 ci-dessous (Mullis *et al.*, 2016).

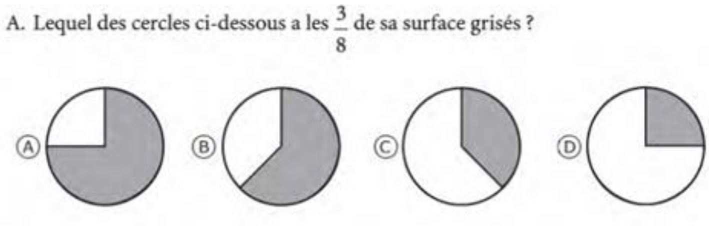


Figure 1. Item « libéré » sur les fractions de TIMSS 2015 (Mullis *et al.*, 2016b, p. 91)

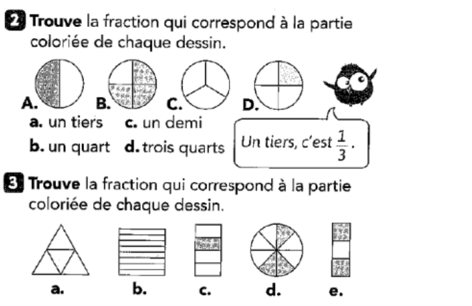
Cet item n'est réussi que par 35 % des élèves français, tandis que la moyenne de réussite, calculée sur 11 pays ou provinces s'élève à 59 % (Martinez & Roditi, 2017). De plus, l'ensemble des 64 pays ou provinces participant à l'enquête affiche une moyenne de 44 % de réussite.

Un tel item peut pourtant être considéré comme accessible à des élèves français de fin CM1 (première année d'enseignement des fractions) dans la mesure où sont convoquées des fractions de l'unité « dites simples[3] » (demis, tiers, quarts, huitièmes), toutes inférieures à l'unité. De plus, il fait intervenir des représentations circulaires que nous supposons familières aux élèves, bien que nous n'ayons pas trouvé d'études quantifiant leur usage dans les classes françaises. Quand ces représentations circulaires sont utilisées, elles sont souvent accompagnées de traits visibles marquant les subdivisions de l'unité, à l'instar de celles trouvées dans deux manuels de CM1 contemporains (tableau 1).

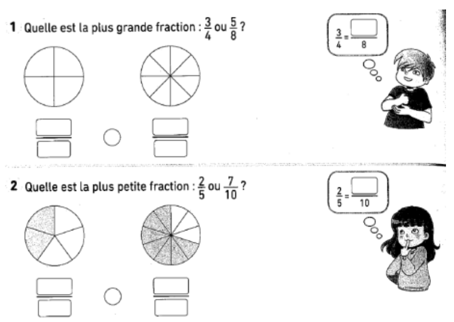
[2] La sélection des onze pays/provinces s'est fondée sur deux critères principaux : l'accessibilité des instructions officielles et des critères économiques comparables à ceux de la France. Les pays retenus sont : l'Angleterre, la Corée du Sud, la Floride, la France, Hong Kong SAR, l'Irlande du Nord, l'Ontario, le Québec, la République d'Irlande, Singapour, et Taipei chinois.

[3] L'actuel document ressource (MEN, 2016b) définit une fraction simple de la manière suivante : « Lorsque le partage de l'unité se fait en un petit nombre de parts (2, 3, 4 …) et que l'on prend un petit nombre de telles parts, on parle de **fraction simple :** $\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{3}{10}$, etc. » (p. 1)

Tableau 1. Extrait de manuels et représentations circulaires de fractions



Extrait de *Maths explicites CM1*



Extrait de *Maths Méthode de Singapour CM1*

Les manuels français que nous avons consultés[4], confirment la présence de ces représentations circulaires, mais leur fréquence d'utilisation varie sensiblement d'une ressource à l'autre : elles sont peu fréquentes dans certains manuels[5] et bien davantage utilisées dans d'autres (comme ceux cités dans le tableau 1).

Quoi qu'il en soit, l'absence de ces « traits » de partage (en demis, en huitièmes ou en quarts de l'unité) dans l'item de TIMSS peut participer d'une singularité inhabituelle pour des élèves français. Un tel constat soulève la question de l'initiative des élèves quant à l'ajout de ces traits[6] ou de leur capacité à raisonner en l'absence d'une telle indication. Nonobstant cette singularité, une variété de stratégies accessibles au niveau scolaire considéré peut *a priori* être mises en œuvre pour parvenir à la bonne réponse. Les élèves peuvent envisager (physiquement ou mentalement) le partage en huitièmes de l'unité et le dénombrement associé. Ils peuvent également raisonner « en termes de taille » des parts grisées ou non, représentées à partir de la même unité. Il est par exemple possible d'exclure les figures A et B de l'item TIMSS (figure 1) au motif qu'elles représentent toutes deux des fractions supérieures à un demi de l'unité (et $\frac{3}{8}$ étant inférieur à $\frac{4}{8}$ soit à $\frac{1}{2}$ …). En

[4] *Eurêka CM1* (Loarer *et al.*, 2019), *Au rythme des maths CM1*(Hélayel *et al.*, 2020), *Maths au CM1* (Duprey *et al.*, 2021), *Nouveau Cap Maths CM1* (Anselmo *et al.*, 2020), *Haut les maths !* (Kazandjian *et al.*, 2016), *Opération Maths CM1* (Peltier *et al.*, 2016), *Maths explicites* (Castioni *et al.*, 2020), *Méthode de Singapour CM1* (Kritter, 2018) et *Tandem Maths CM1 et CM2* (Grosjean *et al.*, 2021).

[5] Elles sont même absentes d'un des manuels de CM1 que nous avons consultés, celui de la collection *Cap Maths* (Anselmon *et al.*, 2020), et également très peu présentes dans le manuel de la série *Opération Maths* (Peltier *et al.*, 2016).

[6] En 2015, le test a été donné uniquement dans une version « papier crayon » aux élèves.

ce qui concerne la figure D, sa disqualification repose alors sur le fait qu'un quart de l'unité correspond à deux huitièmes de l'unité. Le fait que seulement 35 % des élèves français aient répondu correctement à cet item montre dès lors leur faible outillage au regard de cet éventail de stratégies possibles.

Ce constat soulève des interrogations sur les connaissances d'élèves au sujet des fractions dites « simples » et pourtant parfois considérées comme proches de concepts quotidiens[7] (Vygotski, 1934/1997), ainsi que sur les représentations circulaires qui leur sont parfois associées dans l'univers scolaire. Une première étude (Coulange & Train, 2020) nous a permis de montrer que des élèves de CM1[8] avaient des connaissances très hétérogènes sur ce que recouvre la désignation verbale « quotidienne » de telles fractions (la moitié, le quart) et même parfois de leur fractionnement (comme la moitié de la moitié ou la moitié du quart…) en amont de l'enseignement des fractions à l'école. Nous considérons aujourd'hui que certaines de ces connaissances quotidiennes ou « familières » peuvent se constituer en obstacles mais aussi en leviers pour l'acquisition scolaire de la notion de fraction. Ceci va de pair avec la question du rôle donné ou à donner à des représentations circulaires ou plus généralement liées à des surfaces (rectangulaires, voire de formes plus variées), susceptibles de favoriser des ancrages dans des contextes concrets et quotidiens comme le partage de « gâteaux », de « tartes » ou de « pizzas », qu'il s'agira toutefois de dépasser dans l'univers scolaire.

1.2. La question des représentations de fractions

Le curriculum français présente des spécificités qui nous paraissent à même de peser sur le rôle donné aux représentations des fractions enseignées à l'école primaire. En particulier, ce curriculum envisage un enseignement tardif des fractions (en CM1-CM2) par rapport à d'autres curricula (Martinez & Roditi, 2017 ; Martinez-Ibanez, 2018 ; Mounier & Priolet, 2015), celui-ci semblant essentiellement tourné vers l'enseignement et l'apprentissage des décimaux. Ainsi, la documentation institutionnelle (MENJ, 2002) indique depuis plusieurs années qu'au cycle 3 (élèves de 9 à 12 ans), « une toute première approche des fractions est entreprise dans le but d'aider à la compréhension des nombres décimaux. L'étude des fractions et des

---

[7] La « double germination » entre concepts quotidiens et concepts scientifiques (Rogalski, 2008) étant actuellement reprise et retravaillée par des travaux en didactique s'intéressant au rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (Chesnais, 2018 ; Chesnais & Coulange, 2022 ; Coulange & Train, 2020).

[8] Cette étude s'appuie sur un questionnaire adressé à des élèves de CM1 en amont de l'introduction des fractions dans la classe de mathématiques. Il a été posé une première fois à des élèves majoritairement issus de milieux socio-défavorisés (dans une école située dans un quartier prioritaire) puis à un public d'élèves hétérogène (dans une autre école située dans un autre quartier de la même ville), deux ans plus tard.

nombres décimaux sera poursuivie au collège » (MENJ, 2002, p. 21) et précise qu'« en dehors de la connaissance des fractions d'usage courant, le travail sur les fractions est essentiellement destiné à donner du sens aux nombres décimaux envisagés comme fractions décimales ou sommes de fractions décimales » (MENJ, 2002, p. 21).

Ces spécificités du curriculum français ont des conséquences sur les fractions mises à l'étude à l'école primaire et sur leurs représentations, mentionnées par Martinez-Ibanez (2018). Les élèves français rencontrent très vite des fractions supérieures à l'unité et la représentation des fractions sur la droite numérique est privilégiée en vue de mettre en lien des écritures fractionnaires et des écritures décimales.

Nous faisons l'hypothèse qu'en contrepartie, la place accordée aux représentations circulaires et même plus généralement liées aux surfaces et aux aires a pu être minorée au profit de représentations associées aux segments et aux longueurs. D'anciens travaux de recherche en didactique tendaient d'ailleurs à en pointer les potentiels écueils (Adjiage & Pluvinage, 2000), s'agissant notamment de la représentation de fractions supérieures à l'unité. Un tel discours émettant des réticences quant à l'usage de représentations circulaires et surfaciques semble avoir été repris à l'époque, notamment dans la formation initiale et continue d'enseignants du primaire[9].

Toutefois, les auteurs d'une note de synthèse récente (Sander *et al.*, 2022) redonnent une place aux représentations circulaires en mentionnant qu'elles permettent « la mise en valeur de ce qui reste pour faire le tout » (Van de Walle & Lovin, 2006 cité par Sander *et al.*, 2022). Dans le même temps, ces mêmes auteurs émettent également des réserves dans le rôle donné à ces mêmes représentations, en listant de possibles « écueils de la compréhension de l'unité » que constitue un « tout » qui peut rester implicite et réduit à un seul objet rendu visible. Sans par ailleurs disqualifier le recours à ces représentations circulaires, un tel constat conduit les auteurs de la note à privilégier la grandeur longueur mise en avant comme une transition vers la droite numérique et la représentation des fractions sur cette droite. Cette centration sur la droite numérique comme aide à la compréhension des rationnels, tend même à se renforcer actuellement, du fait de l'importance accordée à ce support dans les recherches en neurosciences (Hirsh & Roditi, 2022).

Nous ne pouvons pas nous prononcer sur l'impact du discours mentionné ci-dessus sur les pratiques ordinaires d'enseignement des fractions en France, en l'absence

[9] On en trouve trace dans plusieurs documents (dont certains étiquetés « nationaux ») à destination d'enseignants, difficiles à référencer, par exemple : https://media.eduscol.education.fr/file/education_prioritaire_et_accompagnement/17/7/jeux_fractions_decimaux-approches_115177.pdf

d'études sur le sujet. Rien n'indique qu'il influence réellement les pratiques des enseignants ni que les élèves rencontrent moins souvent les représentations circulaires dans l'apprentissage des fractions. Nous pouvons, en revanche, convenir que, quoi qu'il en soit, les élèves français apparaissent démunis, plus que d'autres, à un moment donné de leur scolarité, dans la production de réponses valides à l'item TIMSS 2015 mentionné précédemment (figure 1), cet item faisant justement appel à des représentations circulaires. En résumé, bien que le rôle des représentations circulaires et surfaciques puisse être sujet à controverse, la question d'explorer plus avant leur utilité ou leur impact dans l'enseignement des fractions, tout en tenant compte de spécificités du contexte français se pose. Une première piste d'investigation à ce sujet nous a paru résider dans la résolution de problèmes de partage pour lesquels les élèves peuvent spontanément convoquer de telles représentations.

2. Des problèmes de partage : potentialités et limites

Comme annoncé dans l'introduction, nous conduisons depuis plusieurs années une recherche collaborative sur l'enseignement et l'apprentissage des fractions et des décimaux au sein d'un LéA (Lieu d'éducation Associé) développé en partenariat avec l'IFÉ (Institut Français d'Éducation). Ce LéA concernait initialement une école primaire située dans un quartier prioritaire de la ville de Bordeaux. La participation active d'une enseignante à cette recherche a été en partie à l'origine de nos propres questions de recherche. Nous donnons en annexe une vue synthétique de cette collaboration conduite pendant cinq années consécutives qui détaille les matériaux plus particulièrement concernés par cet article.

Initialement, à l'instar d'autres collègues de l'école, cette enseignante s'appuyait sur des situations d'enseignement et d'apprentissage extraites de l'ouvrage *ERMEL CM1* (Charnay *et al.*, 2005) pour introduire les fractions en CM1. Ces situations étaient elles-mêmes transposées des travaux de l'ingénierie didactique de Douady et Perrin (1986). Nous avons analysé les difficultés rencontrées par les élèves, tant dans sa classe que dans celles de deux autres enseignantes de la même école, dans ces situations d'enseignement basées sur la grandeur longueur. Suite aux retours issus de notre collaboration, cette enseignante a décidé de concevoir et tester une nouvelle approche pour l'enseignement des fractions. C'est de sa propre initiative que l'enseignante a choisi de baser cette nouvelle démarche sur des problèmes de partage équitable de type partition (Vergnaud, 1990). Nous avons accompagné la conception et analysé la mise en œuvre de cette approche auprès d'un groupe d'élèves de CM1 la première année (2017-2018), puis dans une classe de CM2, partiellement composée des mêmes élèves, la deuxième année (2018-2019). Ce choix, centré sur des problèmes de partage, peut être considéré comme assez inhabituel dans le curriculum français, en lien avec les spécificités institutionnelles mentionnées plus haut, bien qu'il soit largement documenté dans le domaine de la *Mathematics Education*.

2.1. Des problèmes « bien connus » dans la *Mathematics Education*

Les problèmes de partage concernant des « objets » (des gâteaux, des pizzas, etc.) à partager entre un certain nombre de personnes sont en effet un point d'intérêt de la littérature de recherche en *Mathematics Education* depuis de nombreuses années (Lamon, 1996 ; Post *et al.*, 1986 ; Behr *et al.*, 1986) et l'alimentent encore aujourd'hui (Charles & Nason, 2000 ; Empson *et al.*, 2006).

Ces travaux s'accordent sur la variété des stratégies mises en œuvre par les élèves dans la résolution de tels problèmes. Par exemple, Lamon (1996) identifie trois grandes stratégies de partage qu'il illustre sur des représentations circulaires représentant les « objets » du partage : *Preserved Pieces Strategy*, *Mark-all Strategy* et *Distribution Strategy*. La première qualifiée de *Preserved Pieces Strategy* est rendue possible dès lors que le nombre « d' objets » à partager est plus grand que le nombre de personnes pour lesquelles opérer ce partage. Dans ce cas, les élèves distribuent d'abord des « objets » sans en envisager le partage puis opèrent un unique partage sur un objet restant. La stratégie qualifiée de *Mark-all Strategy* consiste à partager chaque objet en le nombre de personnes indiqué, mais les parts rendues visibles ne sont distribuées que lorsqu'elles ne permettent pas de recomposer un « objet entier ». La troisième stratégie qualifiée de *Distribution Strategy* consiste de la même manière à partager chaque objet en le nombre de personnes indiqué mais cette fois-ci, la distribution s'opère avec chacune des parts obtenues (sans recomposition « d'objets entiers »). La distinction opérée entre ces trois stratégies repose ainsi sur les traces de partage des « objets » rendues visibles sur les représentations circulaires et leurs usages dans la résolution du problème. Lamon (1996) montre par ailleurs que plusieurs de ces stratégies peuvent être convoquées par un même élève en fonction du contexte dans lequel le problème est posé : qu'il s'agisse des objets donnés à partager ou des nombres d'objets et de personnes. Une hypothèse formulée par ce même auteur est que ces stratégies demeurent étroitement liées à des pratiques sociales. Cette observation l'amène à questionner les connaissances mathématiques convoquées, y compris dans les stratégies appréhendées comme les plus élaborées de son point de vue (celles utilisant du « *re-unitizing* », soit des « objets entiers » recomposés).

Lorsque l'on se réfère à des travaux plus récents sur ces mêmes problèmes de partage, les auteurs ne semblent pas parvenir à un consensus précis concernant les connaissances mathématiques convoquées dans leur résolution. Dans leur étude portant sur 112 élèves (6-10 ans), Empson *et al.* (2006) recensent diverses procédures dans le but d'« évaluer la sophistication conceptuelle des stratégies des enfants » (p. 6). La description de ces procédures sert à formuler des descripteurs des actions et des verbalisations produites par les élèves dans la résolution de problèmes de partage. Pour ces chercheurs, elle permet d'identifier les caractéristiques mathématiques des stratégies adoptées. Ils font l'hypothèse que certaines d'entre elles renvoient à l'utilisation de connaissances conceptuellement avancées sur les fractions, telles que la commensuration[10] ou le rapport partie-partie. D'autres auteurs, tels que Charles et Nason (2000) laissent davantage ouverte cette question des connaissances mathématiques d'élèves (6-10 ans) spécifiquement liées aux fractions dans la résolution de problèmes de partage. Ces auteurs mettent notamment en avant plusieurs conditions associées aux stratégies de partage convoquées par les élèves qui viseraient à faciliter l'accès à la conceptualisation qualifiée de *partitive quotient fraction construct*[11]. Ils ajoutent d'ailleurs que, bien que ces conditions soient nécessaires, elles ne suffisent pas à elles seules pour garantir l'accès à ces connaissances au regard du caractère instable des types de stratégies d'élèves observées.

Dans la suite du texte, nous avons choisi d'entreprendre une étude de ces problèmes en mobilisant les outils « classiques » de la théorie des situations didactiques. Notre approche diffère sensiblement de celles proposées par Empson *et al.* (2006) et Charles et Nason (2000), car elle prend en compte les spécificités du curriculum français, où seule la conception de la fraction comme « partage de l'unité » est enseignée et apprise à l'école en France. Nous cherchons en particulier à examiner comment cette seule conception peut conduire à une diversité de stratégies utilisées par des élèves de fin de primaire pour résoudre des problèmes de partage. En suivant une démarche similaire à celle employée pour concevoir une situation fondamentale ou « mathématique à usage didactique » (Brousseau, 1997), nous avons élaboré un énoncé générique de problème de partage, que nous détaillons dans la section suivante. L'analyse des différentes instanciations possibles de cet énoncé nous permet d'identifier des variables didactiques susceptibles d'influencer les stratégies de résolution et leur économie. Ce découpage nous est apparu comme un premier

[10] Pour partager 8 gâteaux entre 12 personnes, des élèves partagent chacun des gâteaux en 3, ce qui leur permet d'obtenir 24 parts, distribuées par la suite. Empson *et al.* (2006) associent une telle stratégie à la commensuration. Brousseau et Brousseau (1987) définissent la commensuration de la manière suivante : « une quantité (si elle existe) sera les $\frac{a}{b}$ d'un entier si en la reportant b fois (en en prenant b identiques à elle-même), on obtient a entiers » (p. 524). Nous reviendrons plus loin sur le type de stratégies mis en avant par Empson *et al.* (2006) que nous qualifions plus volontiers, de « partage simultané » (voir la section suivante), celui-ci nous paraissant *a priori* très éloignée de la commensuration telle que définie par Brousseau et Brousseau (1987) et que nous étudions par ailleurs (Fregona *et al.*, 2023).

[11] Cette conceptualisation vise à mettre en relation un problème de partage et une fraction de la façon suivante : en rapprochant le dividende du numérateur et le diviseur du dénominateur de cette fraction.

pas nécessaire pour mieux cerner les connaissances mathématiques sollicitées dans la résolution de ces problèmes.

2.2. Des problèmes de partage dans une classe de CM2

Nous nous intéressons ici à deux problèmes de partage (voir tableau 2) proposés aux élèves de CM2. Le premier a été soumis individuellement aux élèves sous forme de questionnaire avant la reprise d'étude des fractions. Le second a été proposé en classe entière après avoir recueilli les réponses au questionnaire. L'enjeu de ce deuxième problème était de permettre aux élèves d'échanger sur les stratégies de résolution envisagées et d'officialiser la reprise d'étude des fractions avec eux.

Tableau 2. Problèmes[12] de partage proposés à des élèves de CM2

Problème de partage – questionnaire posé individuellement en amont de la reprise d'étude des fractions	Problème de partage – reprise d'étude des fractions dans la classe
Pour le dîner, trois enfants ont cinq pizzas à se partager. Aide-les à faire le partage. Quelle part a chaque enfant ?	La maman de Théo doit partager 6 *cakes* entre les 15 invités du goûter d'anniversaire. Quelle sera la part de chacun ?

2.2.1. Analyse d'un énoncé générique de problème de partage

Pour analyser les deux problèmes de partage abordés en classe de CM2, nous nous appuyons sur l'énoncé générique suivant : « partager m unités entre n personnes », où m et n désignent des entiers naturels non nuls. Dans un souci de simplification, nous nous limitons au cas où m n'est pas un multiple de n. Nous privilégions les relations arithmétiques entre m et n, en supposant que ces relations influencent fortement les stratégies de partage adoptées ainsi que les connaissances mathématiques mobilisées. Nous laissons délibérément[13] de côté la nature des objets à partager et la taille des nombres impliqués, afin de nous concentrer sur les aspects arithmétiques liés à ces nombres. Nous avons ainsi repéré plusieurs stratégies liées aux problèmes de partage, susceptibles d'être influencées par les relations arithmétiques entre n et m.

[12] Les énoncés sont repris tels que proposés aux élèves, et les variations relatives aux désignations verbales ou chiffrées des nombres dans les deux énoncés relèvent d'un choix non intentionnel, sans impact visible par ailleurs sur la diversité des stratégies de résolution repérées chez les élèves.
[13] Sans minimiser le fait par ailleurs que ces variables peuvent avoir une influence sur les stratégies mises en œuvre.

Dans les deux cas de figures ($m > n$; $m < n$), il est toujours possible de faire un partage simultané de chacune des m unités en n ce qui permet de distribuer des paquets de m n-ièmes de l'unité aux n personnes.

Dans le cas où $m > n$, les élèves peuvent commencer par distribuer des unités entières aux n personnes avant d'envisager le partage des ($m – n$) unités restantes. Ils peuvent éventuellement répéter cette distribution si cette différence reste supérieure à n. Le problème revient alors à partager $m – n = m'$ unités entre n personnes (avec $m' < n$)

Dans le cas où $m < n$, ou lorsque, après avoir distribué des unités entières, les élèves se retrouvent avec m' unités à partager entre n personnes ($m' < n$), une stratégie de partage prenant appui sur les relations entre le nombres d'unités m (ou m') et n est possible *:* si m et n ont un diviseur commun p tel que $m = p \times q$ et $n = p \times r$, les élèves peuvent faire un partage simultané de chacune des m unités en r, ce qui permet de distribuer des paquets de q r-ièmes de l'unité[14].

Notons par ailleurs que des premiers partages des m unités (autres que ceux envisagés ci-dessus[15]) peuvent conduire, après une (ou plusieurs) distribution(s), à une situation où le reste à distribuer devient inférieur à l'unité. Il s'agit alors de « repartager » en n une fraction de l'unité, ce qui peut poser la question du saut de complexité que recouvre l'évaluation de cette « fraction d'une fraction » de l'unité.

Nous avons qualifié de partage simultané d'unités le partage de chaque unité prise au sein d'une pluralité d'unités potentiellement anticipé par les élèves (« je partage chacune des unités en… »). Un tel geste semble constituer une étape incontournable dans la résolution, quelle que soit la stratégie adoptée. Cependant, il reste à comprendre ce que ce geste de partage simultané d'unités recouvre en termes de connaissances mathématiques mobilisées par les élèves. Nous reviendrons sur ce point, mais avant cela, il nous paraît nécessaire d'analyser les activités potentielles d'élèves de CM2 lors de la résolution de tels problèmes.

2.2.2 Le problème de partage proposé dans le cadre du questionnaire

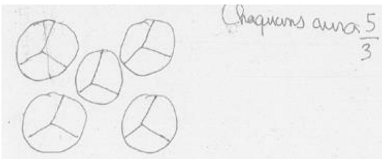
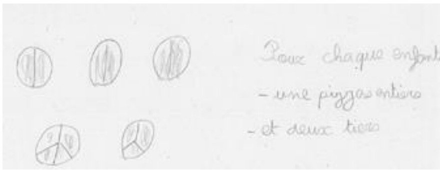
Le problème de partage (première colonne du tableau 1) proposé dans le questionnaire ancre les élèves dans un univers familier de partage de « pizzas », propice à la prise d'appui sur des connaissances quotidiennes. La formulation de la question vise à encourager d'une part, la représentation (schématique) d'actions de

[14] Dans le cas particulier où m divise n (*i.e.* $km = n$), les n personnes ont chacune un $k^{\text{ième}}$ de l'unité ($q = 1$).

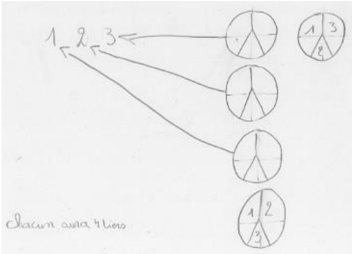
[15] Les autres partages envisagés ici correspondent à ceux qui ne permettent pas d'épuiser la collection des m unités dans une première distribution : par exemple, un partage en 2 dans le cas (m ; n) = (4 ; 7) et une demi-unité restante à partager. Cette situation se produit quand le partage en k des m unités est tel que $km > n$ *et* $n > (k-1)m$ (sous couvert d'existence).

partage (« aide-les à faire le partage ») et, d'autre part, à renseigner la part attribuée à chacun (« quelle part à chaque enfant ? »). Cette formulation laisse par ailleurs ouverte la manière de renseigner une telle part (par un schéma, par une désignation verbale, une écriture fractionnaire…).

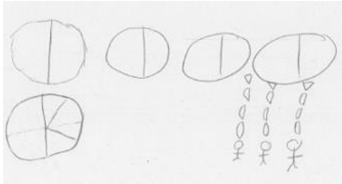
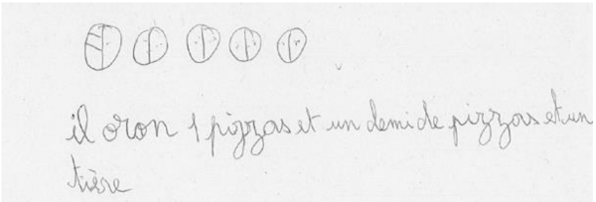
L'analyse des réponses révèle une diversité de stratégies effectivement investie par les élèves de CM2. Ils sont au final assez peu à s'être trouvés totalement démunis[16], et ce, qu'ils aient ou non rencontré des problèmes de partage l'année précédente. La variété que nous illustrons ci-dessous à partir de quelques-unes des productions recueillies était rendue prévisible par notre analyse. La figure 2 illustre une partie de la diversité des approches utilisées par les élèves de CM2 dans leurs réponses, qu'elles soient correctes ou incorrectes.

Production de CLEM (qui n'a pas fréquenté des problèmes de partage en CM1)	Production de MEN (qui a fréquenté des problèmes de partage en CM1)
 Reproduction de la trace écrite sur la copie : « chacun aura 5/3 » Correcte	 Reproduction de la trace écrite sur la copie : « Pour chaque enfant – une pizza entière – et deux tiers » Correcte

[16] Sur 21 productions d'élèves recueillies en réponse au questionnaire, on dénombre : 3 non réponses ; 10 réponses fausses dont 4 comportent des aspects valides quant à la représentation de la situation de partage ; 8 réponses correctes y compris dans l'appréciation de la valeur de la part obtenue.

<table>
<tr><td>Production de LUC (qui a fréquenté des problèmes de partage en CM1)</td><td>Production de DEB (qui a fréquenté des problèmes de partage en CM1)</td></tr>
<tr><td>

Reproduction de la trace écrite sur la copie : « chacun aura 4 tiers »

Incorrecte – erreur de dénombrement des tiers de l'unité distribués</td><td>
Correcte - même s'il manque l'appréciation de la valeur de la « part » donnée à chacun comme trois demis et un sixième de l'unité</td></tr>
<tr><td colspan="2">Production de STOM (qui n'a pas fréquenté des problèmes de partage en CM1)</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Reproduction de la trace écrite sur la copie (avec correction orthographique) : « ils auront 1 pizza et un demi de pizza et un tiers »

Incorrecte - shématisation et appréciation d'un sixième de l'unité</td></tr>
</table>

Figure 2. Productions d'élèves – problème de partage du questionnaire : « Pour le dîner, trois enfants ont cinq pizzas à se partager. Aide-les à faire le partage. Quelle part a chaque enfant ? »

La production de CLEM renvoie à une mise en œuvre réussie d'un partage simultané de chaque unité en 3, suivie d'une évaluation de la valeur obtenue pour la part de chaque enfant après distribution, celle-ci étant codée symboliquement « $\frac{5}{3}$ ». La réponse de MEN, quant à elle, révèle deux partages simultanés : le partage de 3 pizzas en 2 (partage superflu puisque dans un « après coup », il semble avoir recomposé chacune des 3 unités à distribuer aux 3 enfants) et le partage des 2 pizzas restantes en 3 (pour distribuer un tiers à chacun). Il désigne verbalement la valeur de la part obtenue par chacun (« *une pizza entière et deux tiers de pizza* »). La production de LUC se rapproche de celle de CLEM du point de vue de la stratégie adoptée (partage simultané en 3 de chaque unité) même si elle recouvre une erreur de dénombrement et donc d'appréciation de la valeur de la part obtenue, désignée verbalement comme *4 tiers* au lieu de 5 tiers. Les productions de DEB et de STOM relèvent d'une autre stratégie : celle d'un partage simultané en deux de chaque unité, puis d'un partage d'une demi-unité en trois qui reste après distribution. Ces deux productions attestent du saut de complexité que représente le partage en 3 d'une subdivision de l'unité : STOM la représente de manière erronée et la qualifie à tort de « *tiers* », perdant de vue l'unité de référence, tandis que DEB la représente correctement mais ne la désigne pas comme un sixième de l'unité (et ne répond pas à la question posée sur la valeur de la part).

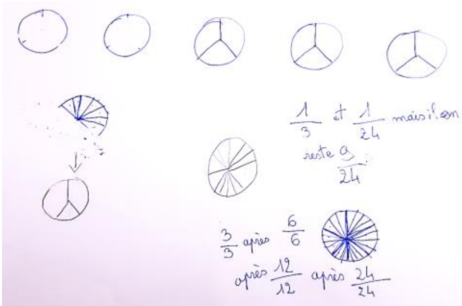
Ces productions montrent comment des élèves de CM2 ont investi des stratégies variées de résolution, avec des réussites plus ou moins partielles. Certains élèves n'avaient pourtant pas fréquenté ce type de problèmes l'année précédente et y ont été confrontés pour la première fois à cette occasion. Ces productions mettent en lumière, dans le même temps, le rôle essentiel que joue le partage simultané d'une pluralité d'unités, quelle que soit la stratégie adoptée, pour résoudre un tel problème.

2.2.3. Le problème de partage proposé dans le cadre de la séance

Le problème de partage (deuxième colonne du tableau 1) proposé lors de cette séance peut également ancrer les élèves dans un univers familier même si le contexte évoqué n'est pas tout à fait de même nature : l'évocation de *cakes* au lieu de pizzas peut ouvrir davantage à des représentations autres que circulaires. De plus, le partage de 6 *cakes* entre 15 élèves convoque potentiellement des fractions unitaires moins usuelles, telles que les quinzièmes.

Lors de la recherche de solutions, les binômes d'élèves ont rapidement investi des stratégies variées. Ces stratégies demeurent d'ailleurs globalement assez proches de celles recueillies par le biais du questionnaire, même si des valeurs de variables didactiques différentes ont conduit à quelques variations : 6 (le nombre de *cake*s) est inférieur à 15 (ce qui invite d'emblée au fractionnement) et 3 est un diviseur commun de 6 et de 15, ce qui peut conduire à une recherche d'économie dans un partage simultané en 5 . Nous en rendons compte dans les figures 3 et 4 ci-dessous, en présentant quelques extraits de transcription associés aux productions d'élèves.

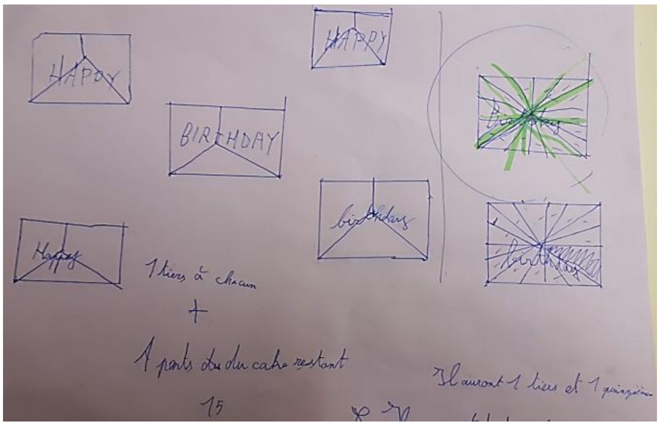
<table>
<tr><th colspan="2">Episodes observés pendant la phase de recherche en binômes</th></tr>
<tr>
<td>
Environ 9 min. après le début de la séance

Schéma légendé par MEN : « chaque enfant aura un tiers et un quinzième »
ENS[17] : ils auraient tous quelle part là ?
MEN : un tiers.
ENS : d'accord. Et tu vas partager le dernier en 15 et chacun aura ?
MEN : un quinzième.
ENS : et donc en tout ?
MEN : un tiers et un quinzième. (…)
Environ 12 min. après le début de la séance
MEN : on a terminé. (…)
</td>
<td>
Environ 11 min. après le début de la séance


LOU : un vingt-quatrième (…) ben en fait, tu as un cake, tu le partages en trois donc tu as trois parts mais tu dois partager en quinze donc c'est pas assez. Donc tu repartages les parts en deux, ça fait des sixièmes. c'est toujours pas assez, du coup tu le re-partages, chaque part en quatre, oui quatre. après ça fait des douzièmes. Après tu repartages mais je ne sais pas si tu dois partager en six pour faire des vingt-quatrièmes mais nous on veut le partager en cinq, du coup, je ne sais pas ce que c'est en fait.
</td>
</tr>
</table>

[17] L'acronyme ENS désigne l'enseignant.

Episode observé pendant la phase de mise en commun



Production projetée lors de la mise en commun

SOU : ça en faisait trop. Il en restait, on pouvait faire…

ENS. : tu me dis qu'avec six unités, tu avais dix-huit tiers. Comment tu as fait ?

SOU : du coup, euh… si on en enlève un, ça fait les quinze tiers, du coup, on peut leur donner un tiers chacun.

ENS : tu leur as donné quinze tiers c'est ça ?

SOU : oui. [en pointant l'écrit « 1 tiers à chacun »]

ENS : et il restait quoi ? il restait un gateau.

SOU : que l'on a partagé en quinzièmes.

ENS : donc ce gâteau là, vous l'avez partagé en quinze quinzièmes, c'est ça.

SOU : du coup, on leur a donné un quinzième chacun. [en pointant l'écrit « 1 part de cake restant »]

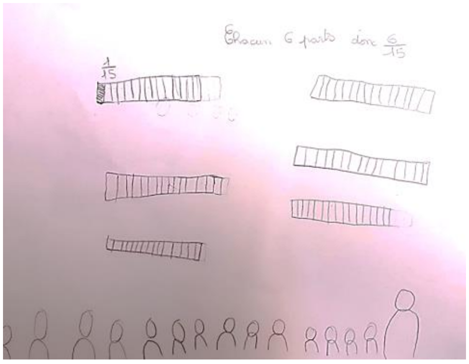
ENS : du coup, chacun a combien ? [inaudible] un tiers plus un quinzième.

Figure 3. Productions et extraits de transcription associés – « un tiers et un quinzième »

Plusieurs binômes d'élèves ont procédé à un partage simultané d'unités en trois. Notons qu'*a priori*, le saut de complexité apparu dans la résolution du problème précédent correspondant au partage d'une fraction de l'unité, n'avait pas lieu d'être ici car après distribution des tiers provenant de cinq des six unités données initialement, il reste exactement une unité et non une fraction d'unité à re-partager en quinze. Toutefois, un premier binôme d'élève, celui de LOU, a spontanément partagé simultanément l'ensemble des six unités en trois et s'est retrouvé dans une situation proche. Ces élèves ont alors cherché à re-partager simultanément les tiers de cette unité avec des partages en deux successifs et ont produit une réponse erronée : « *un tiers et un vingt-quatrième* ». À la fin de l'épisode, LOU semble revenir sur un partage simultané de chacun des tiers en cinq. Le binôme envoyé au tableau, lors de la mise en commun, a visiblement procédé de la même façon en partageant simultanément chacune des six unités en trois, ce qui leur permet d'obenir « *dix-huit tiers* » mais elles semblent avoir recomposé l'unité restante après avoir distribué les quinze tiers – ce qu'elles formulent de la manière suivante : « *si on enlève un, ça fait les quinze tiers* ». Le binôme de MEN a procédé un peu différemment : en considérant d'emblée le partage simultané en trois seulement pour cinq des six unités, puis en partageant en quinze l'unité restante. Nous faisons l'hypothèse que le binôme de MEN a anticipé que le résultat du partage de « seulement » cinq unités en trois permettrait de produire quinze parts à répartir entre quinze élèves et écarté l'unité restante. Au final, c'est davantage cette anticipation du résultat d'un geste de partage simultané d'une partie des unités données qui distingue sa stratégie de celle adoptée par le binôme de LOU.

<table>
<tr><td colspan="2">Episodes observés pendant la phase de recherche en binômes</td></tr>
<tr><td>


Environ 14 minutes après le début de la séance

AND a représenté six surfaces rectangulaires et tente de partager chacune d'entre elles en quinze (même si cela pose un souci du fait de son choix de « quadrillage »).
</td><td>


Environ 13 min. après le début de la séance

NOA : c'est bon maîtresse on a fini. (…)

ENS : il va falloir me donner la part de chacun.

NOA : chaque personne a six parts.

ENS : chacun à six parts mais comment vous exprimez ces parts
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>mathématiquement ? NOA ? une part c’est combien ?

NOA : c’est un quinzième.

ENS : un quinzième… tu as partagé en quinze d’accord. Donc si chacun a six parts.

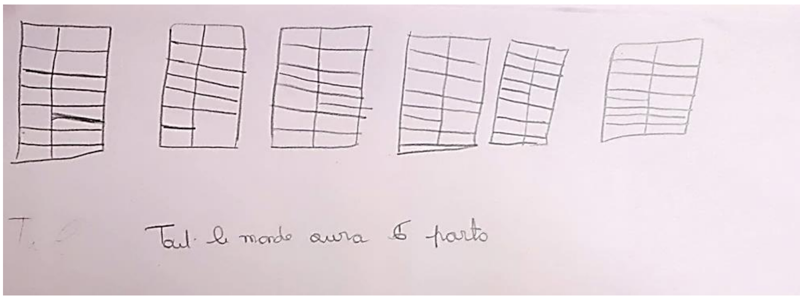
ZOL : chacun aura un quinzième

ENS : chacun a six parts, ça correspond …

ZOL : ah oui.

ENS : tu m’as dit chacun à six parts, ça correspond à quoi ?

ZOL : six quinzièmes.

ENS : donc pour vous, chacun aura six quinzièmes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Episode observé pendant la phase de mise en commun</td></tr>
<tr><td colspan="2">

ENS : donc cette solution là proposée par AN. AN, on t’écoute. Il y en a d’autres qui ont fait cette solution ? J’ai ZOL et NOA qui ont trouvé la même.

AND : oui.

ENS : AND, on vous écoute. Comment avez-vous partagé votre gâteau ?

AND : d’abord on a fait six gâteaux et après on les a partagés en… en… quinze.

ENS : donc vos six gâteaux, ils sont devenus…

AND : en quatorze et (inaudible)… on a rajouté un petit trait.

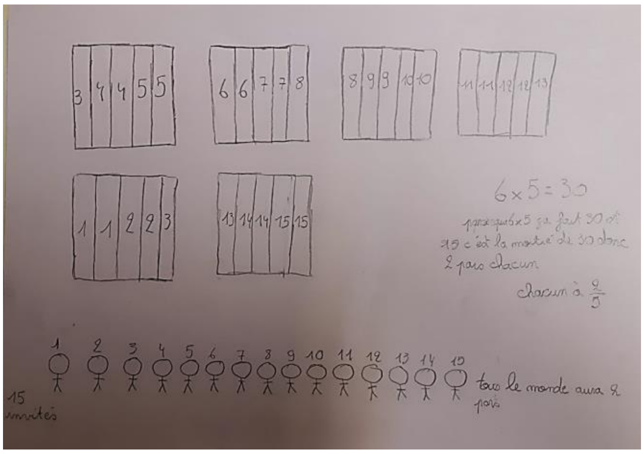
ENS : donc vous les avez partagés en quinze. Et qu’est-ce que vous avez fait une fois que vous les avez partagés en quinze ?</td></tr>
</table>

Figure 4. Productions et extraits de transcription associé – « six quinzièmes »

D'autres binômes d'élèves ont choisi de partager simultanément chacune des six unités initiales en quinze. Il est difficile, de déterminer si les élèves perçoivent pleinement la portée systématique de cette technique à partir des données dont nous disposons. En effet, ceux qui l'ont adoptée lors de cette séance ne sont pas forcément ceux qui l'avaient adoptée précédemment pour résoudre le problème du questionnaire, et vice-versa. Par exemple, CLEM, qui avait adopté cette stratégie pour répondre au problème posé dans le questionnaire, a cette fois-ci opté pour une autre stratégie (que nous décrirons plus bas dans le texte). Ni les élèves, ni l'enseignante n'ont évoqué explicitement la portée de cette stratégie (ou d'autres) lors de la mise en commun. Par ailleurs, il est intéressant de noter que les tracés réalisés par les élèves, comme celui du partage en quinze d'une surface rectangulaire ou celui, plus haut, du partage en trois d'une autre surface rectangulaire, ne représentent pas nécessairement des partages « vraiment » équitables. Cet aspect n'a pas été commenté ni par l'enseignante ni par les autres élèves. Ceci ne signifie pas pour autant que les élèves ne savent pas que le partage représenté (d'un « cake ») est censé être équitable. Nous serions même enclins à penser le contraire car c'est bien le caractère équitable du partage qui semble piloter les raisonnements d'élèves. Les schémas produits sont ici considérés avant tout comme des outils pour produire ce type de raisonnements. Si ce caractère « équitable » semble bien piloter les raisonnements d'élèves, en revanche, nous questionnons le fait que la grandeur aire et même l'égalité d'aires interviennent dans les connaissances convoquées par ces mêmes élèves. Nous y reviendrons par la suite.

Comme l'illustre la figure 5, d'autres binômes d'élèves ont opté pour un partage simultané de chaque unité en cinq, anticipant que le résultat d'un tel partage simultané permettrait d'obtenir un nombre de parts égal au double du nombre « d'invités » (« *ça faisait trente* »). Cette procédure paraît donc correspondre à une recherche d'optimisation, prenant en compte la présence d'un multiple commun (trois) entre six (le nombre de *cakes* qui correspond à deux fois trois) et quinze (le nombre « d'invités » qui correspond à cinq fois trois).

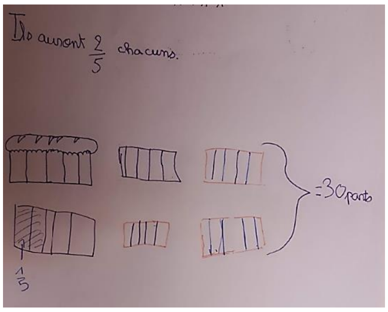
Episode observé pendant la phase de recherche en binômes



Environ 16 min. après le début de la séance

LUC a représenté six surfaces rectangulaires et a partagé chacune d'entre elles en cinq – il a rendu sa distribution apparente en numérotant les « invités » et les parts distribuées à chacun – la valeur de la part obtenue est renseignée « chacun a $\frac{2}{5}$ »

Episode observé pendant la phase de mise en commun



Production projetée lors de la mise en commun

ENS : je vais vous montrer une autre proposition qui est la proposition de CLEM, ANI et MAY qui est la même que celle de LUC.

ENS : on vous écoute CLEM.

CLEM : en fait, on a partagé chaque cake en cinq (…)

CLEM : on a partagé chaque cake en cinq parce que ça faisait (inaudible) trente. Et du coup on peut leur donner deux parts chacun parce que deux fois quinze ça fait trente.

ENS : donc toi tu as décidé de partager les six en cinquièmes, ça te faisait trente cinquièmes.

ENS : et donc quelle est la part de chacun ? (…)

CLEM : deux cinquièmes.

Figure 5. Productions et extraits de transcription associé – « deux cinquièmes »

Lors de la mise en commun, l'enseignante a rapproché ces différentes stratégies valides (épisodes transcrits dans les figures 3, 4 et 5) pour mettre en évidence des égalités de fractions codées symboliquement (voir figure 6). Tous les binômes d'élèves ont réussi à opérer un partage équitable des six *cakes* entre les quinze invités, ce qui a permis de produire l'égalité entre les fractions codant les parts obtenues (« *donc un tiers plus un quinzième, c'est la même chose que 6 quinzièmes…* »). La séance observée a ainsi révélé une variété de stratégies appliquées avec succès par les élèves, que l'enseignante a exploitée. Elle a veillé à expliciter les raisonnements sous-jacents et a montré aux élèves les implications en termes d'égalité de fractions.

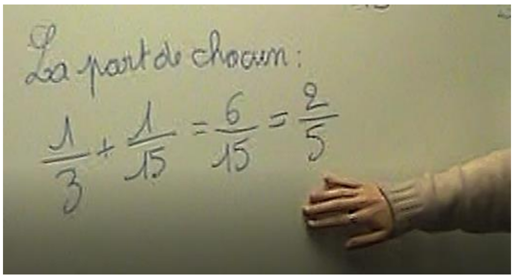


Figure 6. Une égalité de fractions obtenue à l'issue de ce problème de partage

Bien que certains élèves n'aient pas réussi à résoudre l'intégralité du problème (quatre des douze binômes), ils ont semblé néanmoins, tout autant que les autres, mettre en oeuvre un geste de partage simultané d'unités : ces élèves ont réalisé des partages simultanés correspondant à des « fractions simples » (quarts, demis…) de l'ensemble des unités qui ne leur ont pas permis d'aboutir – comme l'illustre la production de la figure 7.

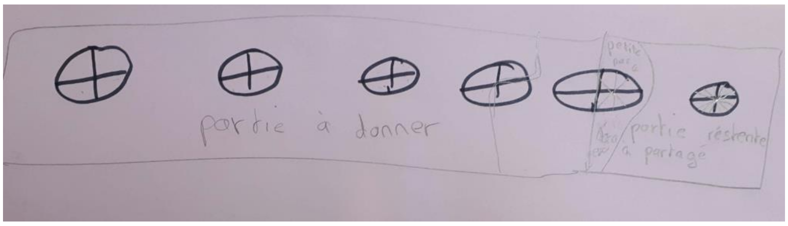


Figure 7. Une production correspondant à une stratégie n'ayant pas permis d'aboutir – « partage simultané en quarts »

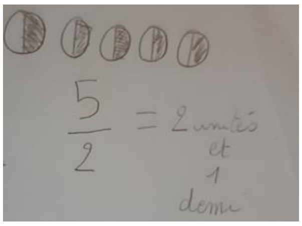
Finalement, presque tous les élèves ont investi des partages simultanés d'unités, et pour une majorité d'entre eux, ces partages ont permis de résoudre rapidement le problème posé. Le temps accordé à la recherche en binômes n'a guère dépassé un quart d'heure, ce qui renseigne sur la facilité avec laquelle les élèves ont envisagé des partages simultanés d'unités, que ceux-ci concernent l'ensemble des unités de la pluralité donnée initialement ou des parties de cette pluralité. C'est ce qui nous conduit à vouloir interroger plus avant ce que ce partage simultané recouvre potentiellement en termes de connaissances mathématiques.

Des faits observables lors de cette séance nous laissaient penser que ces connaissances n'étaient pas aussi conceptuellement avancées sur les fractions que nous aurions pu « naïvement » le penser de prime abord ou que certains travaux de *Mathematics Education* semblent le suggérer (voir section précédente). D'une part, certaines des connaissances formulées par les élèves dans la mise en œuvre de ces stratégies restaient parfois proches de connaissances très élémentaires sur les nombres entiers. Par exemple, nous avons observé des élèves comptant de deux en deux ou de quatre en quatre pour anticiper le résultat d'un partage simultané en deux ou en trois, en pointant chaque unité (« *quatre, huit, douze…* » en lien avec la production de la figure 7). D'autre part, la plupart des formulations présentent des proximités avec des raisonnements arithmétiques portant sur des nombres entiers (« *chaque cake en cinq parce que ça faisait (inaudible) trente. Et du coup on peut leur donner deux parts chacun parce que deux fois quinze ça fait trente* » (voir figure 5) et ce, même si ceux-ci leur permettent de produire un résultat fractionnaire (comme deux cinquièmes dans le cas présent).

Un autre fait a particulièrement attiré notre attention lors de cette séance. Il s'agit d'une remarque émise par un élève au moment où l'enseignante présentait l'égalité de fractions. Cet élève, qui avait produit un raisonnement lié aux « *six quinzièmes* », semblait accorder une importance particulière au nombre de parts obtenues après le partage d'une unité, plutôt qu'à la quantité que l'une de ces parts représentait. Il commente le « *deux cinquièmes* » produit par d'autres élèves en déclarant : « *du coup, ils mangent pas beaucoup* ». Pour autant, exception faite de cette intervention isolée, aucun élève ne semble remettre en question l'égalité produite par l'enseignante au tableau (figure 6). Nous faisons l'hypothèse que cette égalité n'est pas remise en cause car les autres élèves sont convaincus qu'elle reflète correctement les résultats obtenus en réponse au « même » problème de partage équitable. En d'autres termes, l'égalité est établie parce qu'un même nombre de *cakes* est partagé entre un même nombre d'invités et que quelle que soit la méthode de partage envisagée, la part attribuée à chacun sera *in fine* la même. Toutefois le contrôle de la taille d'une « part » (un cinquième par rapport à un quinzième) n'est peut-être pas garanti pour autant.

2.3. Des problèmes de partage à la fraction « partage d'une grandeur mesurée » ?

A ce stade de notre enquête, nous faisons le constat que ce que nous avons qualifié de partage simultané d'unités émerge comme un élément commun à toutes les stratégies de résolution utilisées pour résoudre des problèmes de partage équitable. Les élèves investissent cet élément commun, indépendamment du type de problème de partage qui leur est proposé, que ce soit en CM1 ou en CM2. Par ailleurs, nous avons observé que certains élèves dans ces deux classes avaient remobilisé ce partage simultané d'unités dans d'autres tâches scolaires, même si celles-ci semblaient a priori quelque peu éloignées du contexte de ces problèmes de partage. Par exemple, les élèves de la classe de CM1, invités à produire une représentation schématique de la fraction $\frac{5}{2}$, ont produit deux représentations différentes reprises dans la figure 8.



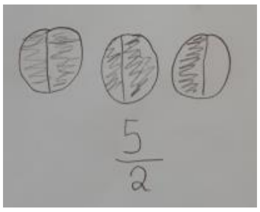


Figure 8. Deux représentations circulaires de $\frac{5}{2}$ proposées par les élèves de CM1

L'une de ces représentations circulaires (celle de gauche) a probablement été favorisée par la fréquentation avec des problèmes de partage étudiés en amont par ces mêmes élèves.

La perspective de mettre en lien le partage simultané d'unités, unanimement adopté par les élèves, avec la notion de fraction « partage d'une grandeur ou d'une mesure de grandeur »[18], et qui serait étendue à une grandeur autre que celle considérée comme l'unité ou à une mesure de grandeur autre que « 1 » a suscité notre intérêt.

En particulier, les représentations proposées par les élèves de CM1 (figure 8) nous ont amenés à penser qu'une telle mise en lien était possible. En d'autres termes, nous avons cherché à répondre à la question suivante : dans quelle mesure le partage simultané en *n* de chacune des unités d'un ensemble constitué de *m* unités peut-il avoir à voir (ou non) avec « déterminer 1 *n*-ième de *m* unités (avec $m > 1$) » ?

Un tel questionnement revêt une importance particulière, car ces problèmes de partage sont précisément envisagés comme un moyen d'établir un lien entre $m$fois $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$ de m dans le document récemment rédigé par le groupe de travail réuni par le CSEN, déjà cité (Sander *et al.*, 2022). En effet, les travaux de Neagoy (2017) largement cités dans ce document, illustrent, à partir de l'exemple d'un partage de trois pizzas entre quatre personnes, la possibilité de « conceptualiser l'équivalence entre « 3 fois $\frac{1}{4}$ » et « $\frac{1}{4}$ de trois » (p. 40). Dans le même temps, aborder un tel questionnement nécessite d'examiner les connaissances mathématiques nécessaires pour établir un tel lien. Les expérimentations menées précédemment dans les classes de CM1 et CM2 suggèrent que les élèves mobilisent principalement des connaissances élémentaires sur les nombres entiers ou en directe extension de telles connaissances lors de la résolution des problèmes de partage.

Dans ce qui suit, nous nous consacrons à l'exploration de ce questionnement. Nous montrerons notamment que nos conclusions diffèrent sensiblement de celles formulées dans la note du CSEN mentionnée précédemment.

2.4. Partage simultané d'une pluralité d'unités et fraction « partage d'une grandeur mesurée » ?

Plutôt que de parler dans la suite, de fraction « partage d'une grandeur ou d'une mesure de grandeur », nous désignerons l'objet qui nous intéresse, à savoir « 1 *n*-ième de *m* unités (avec $m > 1$) », par l'expression fraction « partage d'une grandeur mesurée ». D'une part, cela nous permet de penser l'extension du partage au-delà d'une grandeur considérée comme une unique unité. D'autre part, nous pouvons

[18] Les actuels programmes du cycle 3 (MENJ, 2023a) ouvrent cette possibilité en parlant de l'utilisation des fractions « pour rendre compte de partages de grandeurs ou de mesures de grandeurs » (p. 101) et en donnant des exemples qui ne se restreignent pas à un partage d'une grandeur-unité ou d'une mesure de grandeur « 1 », y compris dans les attendus de la fin du CM1. Nous repréciserons ci-après, ce que nous-mêmes nous entendons par « prendre une fraction d'une grandeur mesurée » qui nous semble potentiellement à l'œuvre dans une telle extension.

considérer qu'il s'agit de partager une nouvelle « entité », celle que constitue la « grandeur mesurée », avec une autre grandeur prise comme unité.

Nous nous intéressons au problème instancié suivant, ceci à des fins illustratives : est-il possible de mettre à profit le partage simultané d'unités pour établir l'équivalence entre « cinq demis de l'unité » et « un demi de cinq unités » ?

Une réorganisation des représentations circulaires (voir figure 9) laisse apparaître un unique trait partageant cette pluralité de cinq unités en deux. Cependant, les cinq unités ainsi réorganisées doivent alors être appréhendées comme formant une grandeur mesurée (cinq unités) qui est partagée en deux, afin d'espérer mettre en relation « cinq demis de l'unité » et « un demi de cinq unités ».

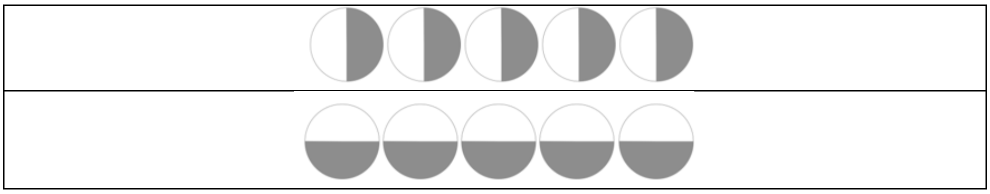


Figure 9. Réorganisation d'unités pour mettre en relation 5 fois $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ de 5

De la même manière, en partant de l'autre représentation produite par les élèves (celle de droite dans la figure 8), on pourrait envisager des ajouts d'unités et mettre en évidence une symétrie, comme celle représentée en figure 10. Cependant, l'ajout d'unités « n'irait pas de soi » et ne garantit pas que la « nouvelle » pluralité d'unités ainsi obtenue soit appréhendée comme une grandeur mesurée (cinq unités) qui serait partagée en deux.

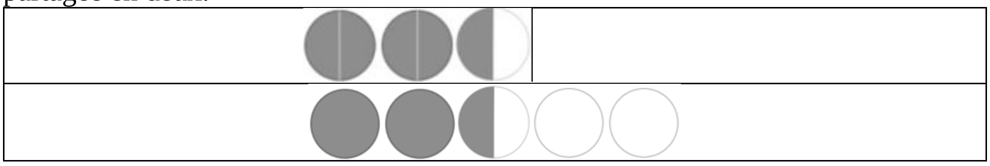


Figure 10. Réorganisation/ajout d'unités pour mettre en relation 5 fois $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ de 5

La complexité que recouvre la mise en lien entre le partage simultané de chacune des unités d'une pluralité d'unités et le partage d'une grandeur mesurée avec cette unité se révèle encore plus clairement à travers l'utilisation de représentations rectangulaires. Si nous reprenons le problème mentionné précédemment dans la classe de CM2, examinons ce que recouvrirait la mise en relation du partage de six unités en quinze, pour lequel certains élèves avaient produit la réponse « six quinzièmes » , avec le quinzième de six unités.

Nous considérons dans la figure 11, une représentation rectangulaire « classique » de $\frac{6}{15}u$ (soit une unité partagée en quinze et six fois « un quinzième de l'unité »).

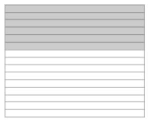


Figure 11. 6 fois $\frac{1}{15}$ obtenu par partage d'une unité

La représentation des six unités, ainsi que le partage simultané de chacune d'elles en quinze, correspond à la représentation donnée dans la figure 12. On pourrait d'ailleurs établir un lien assez facile avec la représentation précédente, tout comme l'enseignante l'a fait avec ses élèves pour les représentations circulaires de $\frac{5}{2}$.

Figure 12. 6 fois $\frac{1}{15}$ obtenu par « partage simultané » de six unités

Considérer cette collection comme représentant le quinzième de six unités nécessiterait d'appréhender ces six unités comme composant une nouvelle grandeur mesurée, elle-même partagée en quinze. On peut certes (aisément) accoler les représentations rectangulaires pour produire une nouvelle représentation rectangulaire comme celle illustrée en figure 13. Cependant, le changement de perspective nécessaire pour interpréter cette représentation (avec de « nouvelles » lignes qui partagent cette surface rectangulaire dans le sens de la longueur) comme un quinzième d'une « nouvelle » unité correspondant à la grandeur mesurée (six unités) ne va pas de soi. Ce résultat paraît même presque « surprenant »[19].

[19] Cet enchainement de représentations rectangulaires a souvent surpris quand nous l'avons présenté dans le cadre de formations de formateurs d'enseignants du primaire en France.

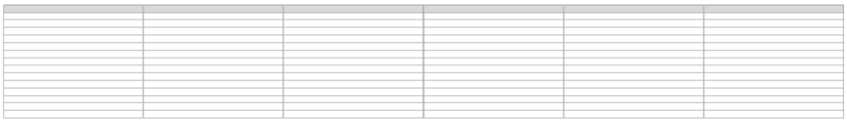


Figure 13. Réorganisation de 6 fois$\frac{1}{15}$ obtenu par « partage simultané » de six unités

Ainsi, nous ne partageons pas l'avis exprimé dans le document de synthèse du CSEN (Sander *et al.*, 2022). Partager simultanément chaque unité d'une pluralité d'unités données ne nous paraît pas pouvoir participer simplement de la conceptualisation d'une fraction partage d'une grandeur mesurée considérée comme « un tout » constitué ou recomposé à partir de cette même pluralité d'unités. Après avoir mené notre propre enquête sur le sujet, nous rejoignons plutôt les propos de Steffe (2010), qui remet en question le fait que les élèves perçoivent dans la résolution des problèmes de partage, la fraction d'un « tout » (« *all of the pizza* ») correspondant à la pluralité d'unités (« *each pizza of the original unit »)* données initialement.

> "If the restructuring is the result of productive thinking rather than an accidental restructuring, the child would also understand that partitioning each pizza of the original unit containing all four pizzas into three pieces and then combining the parts would produce three equal shares of all of the pizzas." (Steffe, 2010, p. 70)

Ces constats nous ont conduits, dans un second temps, à nous intéresser à ce que recouvre la fraction partage d'une grandeur mesurée dans le curriculum français. Nous exposons quelques remarques à ce sujet dans la section qui suit.

2.5. Fraction partage d'une grandeur mesurée – un impensé du curriculum français ?

Dans le programme actuel du cycle 3 en France (MENJ, 2023a), s'agissant des fractions, il est fait mention que les élèves doivent « *connaître et utiliser quelques fractions simples comme opérateur de partage en faisant le lien entre les formulations en langage courant et leur écriture mathématique (ex : faire le lien entre « la moitié de » et multiplier par ½)* » et utiliser « *les fractions pour rendre compte de partages de grandeurs ou de mesures de grandeurs* » (p.101). Ce type de commentaires ouvre potentiellement la voie à ce que nous avons appelé la fraction partage d'une grandeur mesurée, même si peu de précisions restent données à ce sujet dans le programme.

Si l'on s'intéresse aux attendus de fin d'année tels que définis par le Ministère de l'Éducation Nationale (2023b), on découvre un problème adressé aux élèves de CM1 qui relève de la notion de fraction partage d'une grandeur mesurée : « *Eric possède un paquet de 126 bonbons. Il donne deux tiers du paquet à 6 amis qui vont les partager. Combien de bonbons chaque ami d'Eric aura-t-il ?* » (MENJ, 2023b, p. 7) La complexité de cet exemple qui consiste à prendre deux tiers de 126 unités peut d'ailleurs surprendre ! De surcroit, aucun problème similaire n'est mentionné parmi les attendus de fin de CM2. Ce que l'on y retrouve présente une formulation plus proche de celle trouvée dans les programmes, « faire le lien entre les formulations en langage courant et leur écriture mathématique (par exemple, faire le lien entre « la moitié de » et multiplier par ½) » (MENJ, 2023c, p. 3). Une telle formulation suggère *a priori* une complexité moindre dans ce qui serait attendu. Dans les attendus de fin de sixième (MENJ, 2023d), on retrouve ce même commentaire avec des exemples de réussite qui mettent en lien la notion de pourcentage (« la moitié de » et « 50 % de » ou « un quart de » et « 25 % de ») (MENJ, 2023d, p. 3). On peut par ailleurs s'interroger sur la manière dont cette orientation mettant en lien fractions simples et pourcentages, peut faciliter le calcul de « 13 % de 225 € », calcul proposé en exemple dans ce même document institutionnel (MENJ, 2023d, p. 6).

Le parcours d'étude de la notion de fraction, en tant que partage d'une grandeur mesurée, tel qu'il est recommandé dans la documentation institutionnelle actuelle (programmes, repères de progressivité et attendus de fin d'année), semble comporter certaines zones d'ombre, voire des incohérences, qui rendent les prescriptions parfois difficiles à interpréter.

En examinant les programmes antérieurs (MEN, 2004, 2016a, 2020), il apparaît que les commentaires relatifs à ce sujet demeurent tout aussi sibyllins. S'il est bien question de la « *fraction d'une quantité* » dans le programme de sixième de 2004, le propos tenu oscille entre un rapprochement avec la notion de quotient (ou de produit par un quotient) et une référence aux fractions simples ainsi qu'aux expressions familières (moitié, tiers, quart). Dans les deux cas, l'accent semble davantage mis sur les nombres et le calcul que sur les grandeurs à proprement parler.

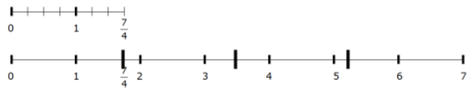
Il existe, en quelque sorte, une exception commune à cette documentation institutionnelle, qu'elle soit passée ou actuelle. Cette exception concerne le discours portant sur le passage de la « fraction partage de l'unité » à la « fraction quotient » dans la transition école-collège. Si les programmes antérieurs mettent davantage l'accent sur cette transition, le discours à ce sujet est néanmoins repris dans un « document ressource » contemporain (MEN, 2016b), tiré d'un ancien « document d'accompagnement »[20] (MEN, 2008).

Dans la transition entre la fraction dite « partage de l'unité », (a/b comme le b-ième de l'unité, itéré a fois) et la fraction dite « quotient » (a/b comme le nombre qui multiplié par b donne a), la fraction « partage d'une grandeur mesurée » (le b-ième

[20] Ce qui au passage, pose selon nous, la question de la mise en cohérence de la documentation institutionnelle (abondante) actuelle.

de *a* unités)[21] semble jouer un rôle clé. Les illustrations visant à éclairer cette transition reposent, dans l'ancien document d'accompagnement (MEN, 2008), sur l'utilisation de la droite numérique. Dans l'actuel document ressource (MEN, 2016b), elles prennent appui sur la grandeur longueur (mesurée avec une unité) et l'usage d'un instrument, le « guide-âne »[22]. Le tableau 3 présente les illustrations ainsi que des extraits de discours associés, tirés de ces deux documents institutionnels.

Tableau 3 : Extraits d'un ancien document d'accompagnement *Nombres au collège* (MEN, 2008) et d'un nouveau document ressource *Nombres et calculs* (MEN, 2016b)

Ancien document d'accompagnement *Nombres au collège* (MEN, 2008)
Une fraction comme 7/4 évoque ce qui est obtenu en partageant l'unité en 4 parts égales et en reportant 7 de ces parts, ce qui correspond d'ailleurs à la lecture sept quarts (7/4 c'est 7 fois le quart de l'unité). Au collège, dès la classe de sixième, l'écriture fractionnaire prend également une autre signification : 7/4 , c'est le quart de 7 (donc représentée en reportant l'unité 7 fois, puis en partageant ce qui est obtenu en 4 parts égales), c'est aussi le nombre qui multiplié par 4 donne pour résultat 7. Si on se réfère à une ligne graduée, ces deux conceptions de la fraction 7/4 peuvent être illustrées de la façon suivante :

L'équivalence entre ces deux significations (7/4 c'est 7 fois un quart et 7/4 c'est le quart de 7) ne va pas de soi et doit faire l'objet de questionnements et de tentatives de vérification et de justification en classe de sixième, de façon à permettre aux élèves de bien les assimiler. La vérification peut être faite dans le cadre des grandeurs ou dans le cadre du repérage sur une ligne graduée. La justification nécessite une approche plus

[21] Dans les deux textes (le document ressource contemporain et l'ancien document d'accompagnement), la fraction partage d'une grandeur mesurée (le tiers de 7 unités) paraît assimilée à la fraction dite quotient : le nombre qui multiplié par 3 donne 7 correspondrait au tiers de 7. Toutefois, nous questionnons depuis quelques années déjà, l'amalgame fait entre ces deux points de vue (Coulange & Train, 2017). Quand on recontextualise la fraction dite « quotient » dans le domaine des grandeurs et mesures, la définition qui en est donnée dans les programmes (le nombre qui multiplié par … donne …) se rapprocherait davantage de la « commensuration » (plutôt que d'une « fraction de ») (Brousseau & Brousseau, 1987). Nous avons d'ailleurs à cœur d'explorer plus avant cet autre point de vue (Fregona *et al.*, 2023), dans une perspective d'enseignement des fractions au niveau du collège (Coulange & Train, 2021 ; Coulange *et al.*, 2022).

[22] Réseau de droites parallèles qui permet de partager un segment en un nombre donné de segments de même longueur.

théorique. En voici deux exemples, utilisant soit le langage ordinaire, soit le langage symbolique :

- on part de ce qui est connu : 7/4 = 7 × 1/4 (7 fois un quart, défini au cycle 3)

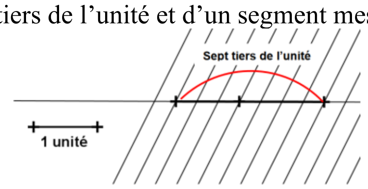
- on se demande si cela est compatible avec le fait que 7/4 est le nombre qui multiplié par 4 donne comme résultat 7 (c'est-à-dire aussi le quart de 7) : en langage ordinaire, le raisonnement suivant peut être exprimé : « 4 fois 7 quarts, c'est 28 quarts, c'est 7 fois quatre quarts, donc 7 fois 1, donc 7 »

- le même raisonnement peut être exprimé à l'aide du langage symbolique

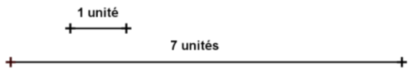
$$4\times\frac{7}{4}=4\times\left(7\times\frac{1}{4}\right)=28\times\frac{1}{4}=\frac{28}{4}.\ \text{Or}\ \frac{28}{4}=7\times\left(4\times\frac{1}{4}\right)=7\times\frac{4}{4}=7\times1=7.$$

Document ressource contemporain *Nombres et calculs* (MEN, 2016b)

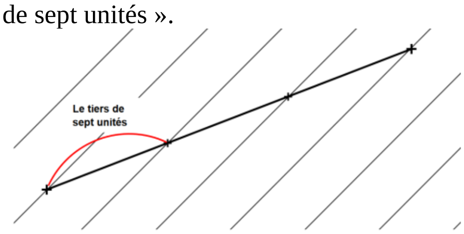
Le guide-âne (réseau de droites parallèles) permet de montrer l'égalité des longueurs d'un segment qui mesure sept tiers de l'unité et d'un segment mesurant le tiers de sept unités



À l'aide d'un réseau de droites parallèles, on partage un segment d'une unité de longueur en trois parties égales. Sur la droite portant ce segment, on trace un segment dont la longueur correspond à sept fois le tiers de l'unité.
On trace ensuite un segment de longueur 7 unités



À l'aide d'un réseau de droites parallèles, on partage ce segment en trois parts égales ; chaque part mesure donc le tiers de sept unités. On constate alors, en comparant par juxtaposition les longueurs des deux segments obtenus, que « sept tiers de l'unité » correspond au « tiers de sept unités ».



Les validations explicitées ci-dessus pour concilier les deux conceptions de la fraction (partage et quotient) ne peuvent être menées et comprises en autonomie par les élèves. Il est important que le professeur explicite ce passage, de façon à ce que les élèves comprennent que les deux conceptions de la fraction représentent en réalité le même nombre.

Les propositions décrites dans ces documents ne règlent pas totalement la complexité qui se joue dans le passage de la fraction partage d'une grandeur unité (apparentée au nombre « 1 » ou à « 1 unité »), soit le « quart de 1[23] » ou le « tiers de l'unité », à la fraction partage d'une grandeur mesurée, soit le « quart de 7 » ou le « tiers de sept unités ».

Certes, le partage en quatre d'un segment d'extrémité le point d'abscisse « 7 » sur la droite ou le partage en trois (avec le guide âne) d'un segment de longueur mesurée « 7 unités » permet d'obtenir des nouveaux segments de longueurs respectivement assimilables au « quart » ou au « tiers » des longueurs respectives des segments initiaux. Toutefois au moment où s'opère le partage, est-il vraiment associé au partage d'une nouvelle « grandeur mesurée », c'est-à-dire sans perdre de vue que cette grandeur est elle-même composée d'autres grandeurs unités (qui est dans un cas, la longueur du segment d'extrémités les points d'abscisses « 0 » et « 1 » et dans l'autre, celle de « l'unité » indiquée dans les deux illustrations qui précèdent) ? De plus, ainsi que le document d'accompagnement antérieur (MEN, 2008) l'indique, ne s'agit-il pas plus d'une « vérification » que d'une justification mathématique ? Notons d'ailleurs que les justifications proposées par la suite s'éloignent du domaine des grandeurs et soulèvent des questions quand on tente de les y réinscrire[24].

Il nous semble donc risqué d'éviter d'aborder la complexité inhérente à la conceptualisation de la fraction comme « partage d'une grandeur mesurée ». D'autres documents institutionnels semblent avoir pris une autre voie, en privilégiant un discours axé sur les nombres et les opérations, qui écarte explicitement toute tentative de justification mathématique : « 1/3 d'une chose se traduit par 1/3 × chose, le « de » signifiant mathématiquement toujours « × » (MENJ, 2018, p. 14).

En nous appuyant sur des travaux conduits en collaboration avec Chambris (Chambris *et al.*, 2021), nous estimons aujourd'hui qu'une autre voie est envisageable sous certaines conditions. L'une d'elles revient à considérer des relations de comparaison multiplicative (Greer, 1992 ; Van de Walle & Lovin, 2006) entre des « unités relatives » (Chambris, 2021), c'est-à-dire des unités n fois plus petites ou n fois plus grandes que d'autres. Cette voie nécessite par ailleurs un théorème que nous avons qualifié de « *théorème de compensation* » : « n fois plus/moins que p unités (chacune n fois plus petites/grandes que u) = p unités u » (Chambris *et al.*, 2021).

---

[23] En fait c'est plutôt « 1 u » avec l'unité retenue pour graduer la droite numérique donnée, mais précisément ce « u » est bel et bien un absent du texte cité.

[24] Et si on replonge la justification proposée en langage naturel (verbal) d'ailleurs… on tombe sur : multiplier « 7 quarts de l'unité » par 4 et on obtient 7 unités. Mais l'opération inverse de multiplier par 4, soit diviser par 4 : est-ce vraiment prendre « le quart de » ?

Dans ces conditions, prendre « le tiers de 7 unités », c'est prendre « le tiers d'une unité 7 fois plus grande que l'unité *u* » ce qui revient à prendre « 7 fois plus d'unités qui seraient chacune le tiers de l'unité *u* », soit « sept tiers de l'unité ». Si un tel raisonnement semble direct, voire évident, il convient de reconnaître que les conditions nécessaires pour y parvenir ne sont pas aisément réunies. Dès lors, quelles pourraient être de nouveaux repères qui prendraient en considération les résultats de notre enquête, pour envisager une progréssivité dans l'enseignement et l'apprentissage des fractions à l'école ?

Dans la suite de notre propos, à l'instar des travaux de Chambris (2022a, 2022b), nous préférons parler des connaissances mathématiques convoquées par les élèves en termes de *quantités.* Ce choix est d'abord motivé par la nécessité de prendre des précautions concernant la manière dont les élèves appréhendent effectivement l'objet fraction du point de vue des grandeurs et des mesures. Nous souhaitons en effet aborder ce questionnement en évitant de tirer des conclusions trop hâtives sur des concepts relatifs aux grandeurs géométriques potentiellement en jeu et à leur mesure, plus précisément relativement à la grandeur aire souvent associée aux représentations surfaciques (circulaires ou rectangulaires). En lien avec ce que nous avons qualifié précédemment d'unités relatives (Chambris *et al.*, 2021), il nous paraît plus pertinent de considérer des connaissances et des savoirs spécifiques des quantités et de leur mathématisation (Chambris, 2022a, 2022b). Il s'agit notamment d'envisager des unités du point de vue de leurs possibles mises en relation (multiplicatives, additives, etc.).

Parmi les différents éléments mis en avant par Chambris (2022a, 2022b) dans le cadre d'une théorie mathématique des quantités, l'ordre joue un rôle essentiel. La comparaison de quantités apparaît alors comme un élément incontournable à envisager pour pouvoir construire des relations additives et multiplicatives entre les unités.

3. Quelle (nouvelle) progressivité pour l'apprentissage des fractions à l'école : de l'importance de l'ordre ?

Dans la recherche de ce qui pourrait fonder une (nouvelle) progressivité pour l'apprentissage des fractions à l'école, il nous paraît important de réfléchir à la place et au rôle à donner aux problèmes de partage : « partager *m* unités entre *n* personnes » (avec *m* non multiple de *n*)[25]. Ces problèmes présentent l'avantage de faire fréquenter aux élèves une variété de stratégies associées à différents partages possibles d'une même pluralité d'unités. Cette variété peut constituer une occasion d'explorer des relations multiplicatives entre le nombre

[25] *m* et *n* sont des entiers naturels non nuls.

d'unités à partager et le nombre de personnes impliquées dans le partage : il s'agit notamment d'anticiper et de construire un (ou plusieurs) nombre(s) de « parts », qui soit (soient) égal (égaux) ou multiple(s) du nombre de personnes. Ainsi, notre propos n'est nullement de disqualifier l'étude de tels problèmes en classe ni de minimiser leur contribution dans l'apprentissage des fractions. Toutefois, il convient de mieux circonscrire la part de cette contribution.

De ce point de vue, si la désignation (verbale ou symbolique) des « parts », qui résultent de partages simultanés d'unités, implique des fractions de l'unité, il ne faut pas se méprendre sur ce que de telles désignations recouvrent. Elles correspondent à des résultats d'actions de partage. Même si ces partages ont été considérés comme équitables à un moment donné, il n'y a pas de garantie absolue quant à ce que ces fractions désignent en termes de quantités, sauf peut-être en rapprochant différentes stratégies de résolution, une fois le problème résolu, comme cela a été observé dans la séance expérimentée et présentée plus haut (voir section 2.2.3). Dans ce cadre, le fait qu'une même pluralité d'unités a été partagée équitablement entre un même nombre de personnes assure que les diverses désignations verbales ou symboliques des « parts » de chacun représentent bien une même quantité.

Nous rejoignons Steffe (2010) en considérant que la résolution de tels problèmes ne garantit pas une conceptualisation avancée des unités, notamment en ce qui concerne la construction d'unités relatives (Chambris, 2021). En effet, les élèves peuvent se limiter à la production de nouveaux objets résultant d'actions de partage équitable (des « tiers de » pizzas, des « quarts de » *cakes*, etc.), ainsi qu'à la prise en considération de paquets d'objets (« trois tiers dans une unité », « deux tiers dans la part de chacun », etc.) et ce, même s'ils désignent ces objets par des fractions unitaires ou ces paquets d'objets par des fractions non unitaires. Les opérations envisagées sur ces objets ou sur ces paquets d'objets resteraient dès lors *a minima* proches du dénombrement (on compte des tiers, éventuellement de trois en trois) ou *a maxima*, proches de calculs similaires à ceux effectués sur des entiers (deux paquets de trois tiers, cela fait six tiers). Si des relations multiplicatives sont convoquées, elles resteraient potentiellement similaires à celles convoquées pour les entiers, et ce, même si celles-ci peuvent parfois conduire à la recherche de multiples communs (comme six, multiple commun de deux et de trois ou trente, multiple commun de six et de quinze) afin d'optimiser la nature d'un partage simultané à opérer.

Nous avons par ailleurs montré qu'une autre tâche scolaire, proposée à des élèves de CM2[26], bien plus classiquement rencontrée dans les classes françaises, consistant à se prononcer sur l'équivalence de deux fractions données (avec un dénominateur multiple de l'autre), semblait résolue par une majorité d'élèves en convoquant des

[26] Il s'agit de la même classe de CM2 que celle évoquée dans la partie précédente.

raisonnements restés centrés sur des objets et des paquets d'objets (Chambris *et al.*, 2021).

Plus encore, lorsque pour cette même tâche de comparaison de fractions, une élève[27]de CM2 raisonne autrement, en convoquant des relations multiplicatives de comparaison entre des fractions unitaires et le « *théorème de compensation* », les autres élèves paraissent dans l'incapacité de s'approprier un tel raisonnement et ce, malgré les efforts d'étayage faits par l'enseignante.

Et pour cause, les conditions nécessaires à la construction de telles relations multiplicatives de comparaison entre des fractions permettant de les considérer comme des unités relatives – par exemple, « un septième comme trois fois plus grand qu'un vingt-et-unième » et même « un tiers comme trois fois plus petit que l'unité » – nous semblent aujourd'hui loin d'être réunies dans le curriculum français. Ne serait-ce que parce que de telles relations de comparaison multiplicative ne peuvent être envisagées qu'à la condition de disposer de la comparaison en amont, c'est-à-dire de l'ordre[28].

3.1. La comparaison de fractions : un savoir quasi-absent du curriculum français

Dans sa thèse, Martinez-Ibanez (2018) observe que le curriculum français met principalement l'accent sur la fraction comme outil pour introduire et justifier l'écriture décimale des nombres décimaux, notamment à travers le lien entre écritures fractionnaires et décimales, plutôt que sur un enseignement des fractions pour elles-mêmes. Cette orientation expliquerait en partie « le faible nombre de types de tâches relatifs aux fractions dans les programmes et le caractère tardif de leur enseignement par rapport aux autres curriculums étudiés » (Martinez-Ibanez, 2018, p. 82). En particulier, l'étude des comparaisons de fractions n'est véritablement abordée qu'à partir de la classe de sixième. De tels constats semblent pour partie encore largement d'actualité dans les programmes actuels. Si la comparaison de fractions apparaît aujourd'hui plus précocément mise à l'étude, notamment dans les attendus de CM1 et de CM2, elle reste limitée aux fractions ayant le même dénominateur[29]. En sixième, de nouvelles possibilités apparaissent, en lien avec le positionnement de fractions sur la droite numérique (entre deux entiers consécutifs)

[27] Qui n'est autre que l'élève surnommée CLEM, plus haut.

[28] En cela, encore, nous rejoignons de nouveau les travaux de Chambris (2022a) qui considère l'ordre comme un « incontournable » d'une perspective liée aux grandeurs et aux unités dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire.

[29] Un tel choix laisse encourir le risque de rabattre ces tâches de comparaison au seul dénombrement de paquets d'objets : 3/8 < 5/8 car « 3 parts versus 5 parts » sans nécessairement porter l'intérêt sur la taille de ces parts.

ou en lien avec les nombres décimaux et leur écriture à virgule. Toutefois rien n'est dit sur les techniques de comparaison des fractions elles-mêmes, ni même sur celles qui pourraient par exemple supporter leur positionnement sur la droite numérique[30]. Ces constats tendent à montrer que la comparaison de fractions est absente (ou quasi-absente) des programmes actuels français au niveau du cycle 3. Lorsqu'elle est finalement abordée au cycle 4 (comparaison et rangement de nombres rationnels, négatifs et positifs), la réduction au même dénominateur semble être la seule technique enseignée. Par ailleurs, Martinez-Ibanez (2018) fait le constat que l'aspect ordinal des fractions est davantage mis à l'étude dans d'autres curricula et ce, à plusieurs égards. D'une part, la comparaison et de rangement des fractions sont abordés parallèlement aux premiers apprentissages des fractions dans plusieurs curricula[31]. D'autre part, relativement aux pays concernés par l'étude, « la France est le pays dans lequel la diversité des types de tâches est la plus faible » (Martinez-Ibanez, 2018, p. 165), à l'inverse d'autres curricula qui explorent une plus grande variété de techniques pour comparer des fractions.

3.2. La voie inexplorée du « *benchmarking* » pour comparer des fractions

De nombreuses recherches antérieures (Sowder, 1998 ; Post *et al.*, 1986) soulignent qu'un travail sur l'ordre participe pleinement de la construction des savoirs liés aux fractions :

> The connection between the comparison of fractions and development of number sense is clear. Comparing fractions is necessary for obtaining an intuitive feel of the size of fractions. If a fractional number is recognised to be close to 1/3 or 1/2, for example, one has a better feel for its magnitude. This fractional number sense is particularly important when estimating with fractions. (Sowder, 1988, p. 189).

En ce qui concerne la comparaison de fractions, de nombreux travaux (par exemple, Behr *et al.*, 1984 ; Post & Cramer, 1987 ; Pearn & Stephens, 2004 ; Mitchell & Horne, 2010) ont largement documenté les difficultés inhérentes à cette tâche. Ces difficultés sont en partie liées aux connaissances antérieures des élèves sur les nombres entiers et à leur compréhension de l'écriture fractionnaire a/b comme mettant en relation les nombres *a* et *b*, ainsi qu'à la multiplicité de conceptions associées à la fraction et à leur mise en lien. Différentes stratégies de comparaison[32],

---

[30] En particulier, le recours systématique à la droite numérique classique (présence de l'abscisse « 0 ») dans les tâches de comparaison de fractions est susceptible de privilégier la seule technique de comparaison des distances à « 0 » des abscisses des points repérant les fractions, au détriment d'autres techniques.

[31] Généralement constitués par l'étude de l'association d'une fraction et d'un dessin.

[32] Désignées en anglais par : *GAP thinking, residual thinking, reference point, concrete representation stragy, omparing denominators*, etc.

renvoyant à diverses conceptions de la fraction, sont par ailleurs décrites dans cette littérature. Plusieurs de ces recherches en *Mathematics Education* mettent en avant le rôle du *benchmarking* dans la comparaison de fractions (Behr *et al.*, 1984 ; Clarke & Roche, 2009). Le *benchmarking* consiste en une technique de comparaison mobilisant l'usage de « repères » (*benchmarks*), ces repères étant généralement des fractions unitaires (1/2, 1/3, etc.) ou l'unité elle-même. L'usage de ces repères ouvre différentes voies pour comparer des fractions :

- identifier un repère permettant de situer deux fractions de part et d'autre de ce celui-ci (par exemple deux fractions : l'une plus petite que 1/2, l'autre plus grande que 1/2) ;
- mettre en œuvre ce qui relève du *residual thinking* par rapport à un repère choisi. Ici, le terme *residual* est à comprendre comme un « résidu » à envisager pour atteindre le repère choisi. La comparaison de deux fractions repose alors sur l'appréciation de ce « résidu ». Classiquement, pour des fractions inférieures à l'unité ou à une demi-unité (ces dernières étant souvent introduites plus tôt que les fractions impropres, c'est-à-dire supérieures à l'unité), on peut prendre appui sur l'unité ou la demi-unité (*benchmark*) pour comparer des « résidus » à ce repère, souvent en prenant appui sur des connaissances liées à l'ordre de fractions unitaires ou de même numérateur. Un cas très élémentaire de residual thinking correspondrait ainsi à l'exemple suivant : pour comparer $\frac{8}{9}$ et $\frac{6}{7}$, on va apprécier $\frac{1}{9}$ et $\frac{1}{7}$ comme ce qui « manque » respectivement à ces deux fractions par rapport à l'unité ; et comme $\frac{1}{9}$ est inférieur à $\frac{1}{7}$, $\frac{8}{9}$ est supérieure à $\frac{6}{7}$.

Notre intérêt à considérer ces techniques liées au *benchmarking*, comme le *residual thinking* (ou d'autres que nous ne détaillons pas ici) repose principalement sur deux raisons. D'une part, ces techniques ouvrent la voie à une variété de techniques de comparaison, rarement prises en compte dans le contexte éducatif français. D'autre part, ces mêmes techniques de *benchmarking* peuvent être envisagées dès l'école primaire en France, car elles peuvent prendre appui sur la conception de la fraction comme « partage de l'unité », seule conception enseignée et apprise à ce niveau scolaire. Il nous a donc semblé pertinent d'investir cette voie dès les premiers apprentissages des fractions au niveau CM1-CM2 (élèves de 9-11 ans).

3.3. Des tâches de comparaison (*benchmarking*, *residual thinking*, etc.) proposées à des élèves de CM1-CM2

En collaboration avec la même enseignante que précédemment, nous avons conçu et mis en œuvre un ensemble de tâches de comparaison de fractions destinées à des élèves de CM1 et de CM2. Bien que ces tâches soient inspirées du *benchmarking* et du *residual thinking*, elles s'en distinguent pour deux raisons : d'une part, par leur intégration en classe de CM1-CM2 dans le contexte scolaire français, et, d'autre part, parce qu'elles sont adressées à des élèves qui du fait de notre collaboration avec leur enseignante, ont eu un parcours spécifique dans l'apprentissage des fractions[33], en amont même de ces tâches.

Il est important de noter que les tâches proposées concernent à la fois des « ajouts » et des « retraits » (les « résidus » considérés dans le *residual thinking*) de fractions unitaires. Deux types de repères (*benchmarks)* sont en jeu : l'unité et la demi-unité. Par ailleurs, les dénominateurs des fractions à comparer ne sont ni identiques, ni multiples l'un de l'autre. Ceci implique qu'au niveau scolaire considéré[34], les tâches ne peuvent être résolues qu'en comparant les « ajouts » ou « retraits » aux repères considérés, à savoir des fractions unitaires. Le tableau 4 liste les tâches finalement conçues et expérimentées avec les élèves.

---

[33] Ces élèves ont notamment développé un rapport spécifique à la production de représentations schématiques des fractions, encouragée à plusieurs reprises dans les tâches proposées par l'enseignante.

[34] Le recours à d'autres techniques de comparaison est certes possible mais peu probable au regard du niveau scolaire considéré en France. Par exemple, si certaines des fractions données dans le tableau 4 pourraient se prêter à une mise au même numérateur, cette technique de comparaison n'est pas enseignée à ce niveau et n'a que peu de chances d'être envisagée en prise d'appui sur la seule conception de la fraction « partage de l'unité ».

Tableau 4. Tâches de comparaison de fractions – *benchmarking* proposées en CM1-CM2

Tâches proposées à des élèves de CM2 (2018-2019) et CM1 (2020-2021)
Laquelle de ces fractions est la plus grande ? $\frac{6}{5}$ *et* $\frac{9}{8}$ $\frac{3}{4}$ *et* $\frac{6}{7}$ $\frac{5}{8}$ *et* $\frac{7}{12}$ $\frac{4}{10}$ *et* $\frac{2}{6}$ *Sous chaque couple de fractions données, les élèves disposent d'un espace leur permettant de produire la réponse et d'y associer des représentations schématiques de leur choix ou d'autres traces de leur raisonnement.*

Ces tâches ont d'abord été expérimentées auprès de la même classe de CM2 (10-11 ans) mentionnée précédemment. Elles ont été proposées plusieurs semaines après la séance dédiée aux problèmes de partage, toujours durant l'année scolaire 2018-2019.

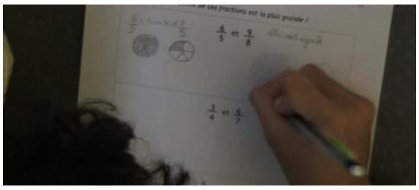
Par la suite, ces mêmes tâches ont été proposées deux ans plus tard (2020-2021) à des élèves de CM1 (9-10 ans) en collaboration avec la même enseignante mais dans une classe au profil plus hétérogène[35]. Nous rendons compte ci-après des observations filmées faites dans ces deux classes.

3.4. Des tâches de *benchmarking* en CM2

Dans la classe de CM2, lorsque l'enseignante a présenté la question posée, une élève a rapidement demandé s'il était possible que les fractions soient égales. L'enseignante a confirmé que c'était effectivement possible. Cette réponse a sans doute renforcé, par effet de contrat, la tendance observée chez de nombreux élèves dans la comparaison des deux premières fractions. En effet, à l'instar du groupe dont les brèves interventions orales sont retranscrites en figure 14, plusieurs binômes d'élèves ont représenté les fractions données (six cinquièmes et neuf huitièmes) à l'aide des représentations schématiques, qu'elles soient circulaires ou rectangulaires. Notons qu'à chaque fois, ils ont correctement fait apparaître une unité (l'une partagée en cinq, l'autre en huit), à laquelle est ajoutée un *n*-ième d'une seconde unité (un cinquième et un huitième). Toutefois, dans un premier temps, ils ont conclu à l'égalité des deux fractions sans comparer la taille respective de chacun des *n*-ièmes

[35] L'enseignante a été affectée dans une nouvelle école primaire en 2020. Cette école se caractérise par des élèves de profils contrastés : située dans un quartier à forte mixité sociale elle accueille des élèves qui suivent des enseignements à horaires aménagés (cursus musical) regroupés avec des élèves qui suivent un parcours classique.

ajoutés à l'unité : un cinquième et un huitième ont simplement été considérés comme « une part » supplémentaire ajoutée à l'unité, indépendamment de leurs tailles respectives.



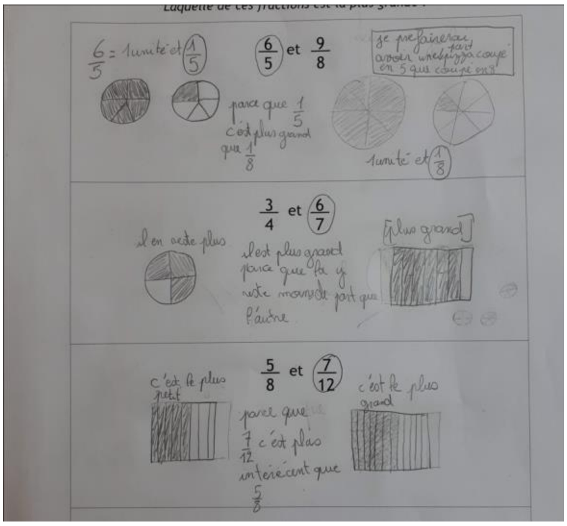
L'élève a représenté $\frac{6}{5}$ et $\frac{9}{8}$ avec des représentations schématiques circulaires

LUC : là on en prend une du coup elles sont égales.

LUC (en écrivant) : elles sont égales.

Figure 14. Episode observé pendant la recherche – Comparaison de $\frac{6}{5}$ *et* $\frac{9}{8}$

Ce raisonnement erroné semble être partagé par plusieurs binômes d'élèves de CM2. Rappelons que ces mêmes élèves, et LUC en particulier, avaient pourtant montré de bonnes performances dans la résolution de problèmes de partage. Les observations confirment que la réussite dans ce type de problèmes de partage ne garantit pas une appréhension de fractions (même unitaires) comme des unités relatives. Pour LUC et son binôme, la question de la taille des *n*-ièmes (cinquième et huitième) ne semble pas se poser. Pour autant, à la suite d'une aide apportée par l'enseignante (à laquelle nous n'avons pas pu assister), ces deux élèves ont finalement levé cette difficulté et réussi à comparer $\frac{6}{5}$ *et* $\frac{9}{8}$. Ils ont transféré l'argument concernant la taille de la part pour comparer les deux fractions suivantes ($\frac{3}{4}$ et $\frac{6}{7}$) en le réintégrant dans ce qui relève d'un « retrait » de *n*-ièmes ($\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{7}$) à l'unité. Pour la question qui suit, qui consiste à comparer $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$, LUC revient d'ailleurs sur la taille respective des *n*-ièmes concernés en mentionnant des « *gros huitièmes* » et des *« petits douzièmes* », comme illustré dans la figure 15. Toutefois sans que l'on puisse savoir pourquoi (l'épisode filmé du travail de ce binôme sur cette question s'arrête avant – l'observatrice ayant pensé que la conclusion serait dès lors valide), cet argument de taille ne semble pas résister au nouveau repère suivant (une demi-unité), puisque dans leur production écrite, les élèves concluent finalement que $\frac{7}{12}$ est « *le plus grand* ». Ceci tend à montrer que, pour ces deux élèves, la mise en relation entre un nombre de « *parts* » et la taille respective de celles-ci reste encore fragile à ce stade de la séance.



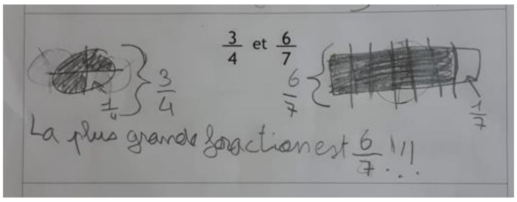
Production écrite finale de LUC et AEL

LUC : sept douzièmes est plus petit que cinq huitièmes, on est d'accord ? (…) moi je préfère avoir des grosses parts, des grosses parts, euh des gros huitièmes que des petits douzièmes.

Figure 15. Episode observé pendant la phase de recherche – Comparaison de $\frac{5}{8}$ et $\frac{7}{12}$

Lors de la mise en commun, les retours de l'enseignante sur les différentes tâches permettent d'expliciter les connaissances mobilisées, ainsi que les raisonnements valides élaborés par certains élèves. Cependant, des tensions récurrentes émergent au cours de cette discussion concernant la prise en compte des tailles respectives des *n*-ièmes et le nombre de *n*-ièmes. Les sauts de complexité inhérents à la succession de tâches proposée aux élèves – à savoir le passage d'un « ajout » à un « retrait » de *n*-ièmes à l'unité, puis le passage d'un repère correspondant à l'unité à un repère correspondant à une demi-unité – sont négociés lors de cette mise en commun. Ces tensions et ces sauts de complexité demeurent visiblement délicats pour certains élèves qui interviennent publiquement lors de cet épisode de mise en commun (voir figure 16) : comme NOA pour le « retrait » à l'unité ou LUC pour le passage à la demi-unité comme un nouveau repère à considérer. Toutefois les formulations produites tant par l'enseignante que par les élèves nous paraissent particulièrement significatives de connaissances qui commencent à être partagées par une majorité d'entre eux : par exemple : « *un septième c'est plus petit qu'un quart* », « *Donc on a un demi dans les deux, il nous reste un huitième et un douzième. Lequel est le plus grand ? Celui qui a un huitième de plus ou celui qui a un douzième de plus ?* ». Bien que certaines de ces formulations soient parfois (ré-)ancrées dans des contextes

« quotidiens » (comme le partage de gâteaux : « *il me reste un quart à manger et du coup, là il reste plus des parts que si je mange six septièmes et il reste qu'un septième, il en reste moins* »), cet ancrage vise précisément à construire et à expliciter ce qui se joue du point de vue des quantités. Nous reviendrons sur ces deux points en relation avec les observations faites plus bas dans le texte concernant la classe de CM1.



Production écrite finale de STO et CLEM vidéo-projetée au tableau[36]

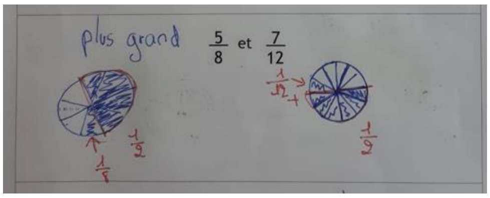
STO : un septième c'est plus petit que un quart. Et du coup, c'est six septièmes parce qu'il y en a plus…. parce qu'il y a moins de parts… il y a moins de parts.

ENS : la petite part qui reste c'est un septième, elle est plus petite que un quart. (…)

NOA : moi, je ne suis pas d'accord (…) moi je pense que c'est égal.

LUC : nous… entre trois quarts et six septièmes, on a dit comme STO que six septièmes, il est plus grand car il reste moins de parts. Par exemple là, ici [*l'élève se déplace vers le tableau*]. Ah oui, si là, par rapport à un quart, là, si il mange les trois parts, il m'en reste une part, il me reste un quart à manger et du coup, là il reste plus des parts que si je mange six septièmes et il reste qu'un septième, il en reste moins.

ENS : il en reste moins. Donc ça veut dire que la fraction est plus grande. Oui, NOA ?



Production écrite finale de MAR et VIR vidéo-projetée au tableau

MAR : euh, nous en fait, du coup, on s'est rendu compte que les deux, il y avait la moitié.

ENS : dans cinq huitièmes, qu'est-ce qu'il y a ?

MAR : il y a la moitié déjà.

[36] Notons que si le choix de STO et CLEM est d'utiliser deux représentations différentes (l'une circulaire, l'autre rectangulaire), le raisonnement de STO porte bien sur une même et seule quantité (indépendante du système de représentation retenu).

ENS : un demi plus quoi ?

MAR : plus un (inaudile) [*P écrit au tableau* $\frac{5}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$]. Pareil dans sept douzièmes, il y a un demi plus (inaudible). [*P écrit au tableau* $\frac{7}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$]. Et on s'est rendu compte que le plus grand c'était …

ENS : lequel est le plus grand ? Dans tous les deux, on a un demi. Est-ce que tout le monde est d'accord ? (…) un demi, c'est combien de huitièmes ? LUC, c'est combien de huitièmes un demi ? (…)

Lucas : quatre huitièmes.

ENS : est-ce que c'est pas quatre huitièmes plus un huitièmes, cinq huitièmes ?

E : ah oui [*La classe approuve globalement*]

ENS : tu as un demi plus un huitième, t'es d'accord ou pas ? (…) ici, est-ce que l'on peut vérifier, combien de douzièmes pour faire un demi ? (…) six douzièmes plus un douzième, est-ce ça fait bien sept douzièmes ? (…) Donc on a un demi dans les deux, il nous reste un huitième et un douzième. Lequel est le plus grand ? Celui qui a un huitième de plus ou celui qui a un douzième de plus ? CLEM ?

CLEM : celui qui a un huitième de plus. (…)

E : du coup, c'est cinq huitièmes qui est plus grand.

ENS : du coup, cinq huitièmes va être le plus grand, exact.

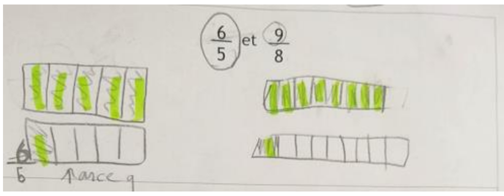
Figure 16. Episodes de mise en commun – comparaison de $\frac{3}{4}$ et $\frac{6}{7}$ puis de $\frac{7}{12}$ et $\frac{5}{8}$

3.5. Quelques compléments sur les tâches de *benchmarking* en CM1

Dans la classe de CM1, bien que les tâches aient été proposées de manière plus précoce, nous avons observé des phénomènes proches de ceux pointés précédemment. Par exemple, certains élèves de CM1, n'ayant pas considéré les tailles respectives de *n*-ièmes, ont temporairement conclu à l'égalité des deux premières fractions à comparer ($\frac{6}{5}$ et $\frac{9}{8}$). Toutefois, plusieurs binômes d'élèves semblent avoir rapidement investi la prise en compte de la question des tailles des *n*-ièmes, comme le montre l'épisode retranscrit en figure 17. Cet épisode donne également à voir que les arguments formulés par une des deux élèves[37] (RAN) en

[37] Nous ne nous attardons pas sur ce point, mais nous avons par ailleurs des données sur la trajectoire de cette élève pendant la période dédiée à l'enseignement des fractions, qui montrent des avancées spectaculaires en termes de conceptualisation (Chesnais & Coulange, à paraître).

vue de convaincre sa camarade que $\frac{1}{5}$ est plus grand que $\frac{1}{8}$ présentent des proximités avec ceux formulés par les élèves de CM2. Bien que ces arguments soient ancrés dans un contexte quotidien (le partage de « gâteaux »), ils se centrent sur des mêmes quantités (« *imagine, c'est les mêmes gâteaux* ») et établissent des relations d'ordre entre ces quantités.



Production écrite finale de RAN et JAD

RAN : six cinquièmes parce que ce sera la plus grosse part, ce sera la plus grosse / si tu découpes l'unité en petit, et bien ça te fera tout le grand gâteau, ce sera énorme.

JAD : non, RAN, c'est celui-là le plus grand c'est juste maitresse qui a montré parce que je disais c'est impossible de faire six cinquièmes.

RAN : voilà regarde par rapport à eux [*en montrant les cinquièmes*]. Regarde, ils sont de plus en plus petits [*en montrant les huitièmes*] alors que eux, ils ont tout le gâteau, énorme. (…) tu m'as pas compris JAD. Regarde, derrière je t'explique. (…)

ENS : alors qu'est-ce que vous me faites là les filles ?

RAN : j'essaie de lui faire comprendre. (…)

JAD : elle, elle dit c'est celle-là la plus grande [*en montrant* $\frac{6}{5}$]

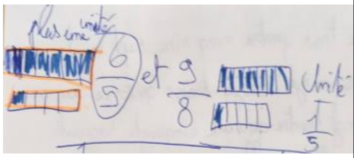
RAN : Parce que quand tu coupes le gâteau. Imagine c'est les mêmes gâteaux. Lui il sera plus petit [*en montrant* $\frac{9}{8}$] et lui ce sera plus gros.

ENS : la question, c'est cette part est-ce qu'elle est plus grande que cette part ? Là tu as coupé ton gâteau en cinq, tu es d'accord ? Et là on l'a coupé en huit. Est-ce que tu préfères une part d'un gâteau coupé en cinq ou une part d'un gâteau coupé en huit ? (…)

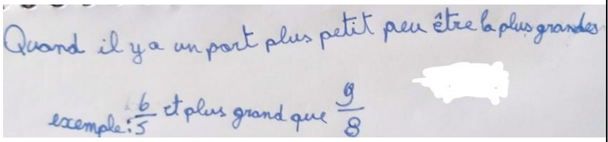
JAD : en cinq comme il y a moins de parts, elle est plus grosse.

Figure 17 : Episode observé pendant la phase de recherche – Comparaison de $\frac{6}{5}$ et $\frac{9}{8}$

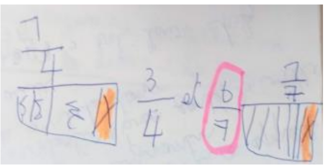
A la suite d'un épisode de mise en commun (présentant de fortes proximités avec celui observé en classe de CM2), les élèves de CM1 ont produit des écrits dans un « carnet de notes », où ils étaient invités à consigner librement ce qu'ils pensaient utile de retenir à l'issue de la séance sur la comparaison de fractions, dont certains sont repris dans la figure 18.



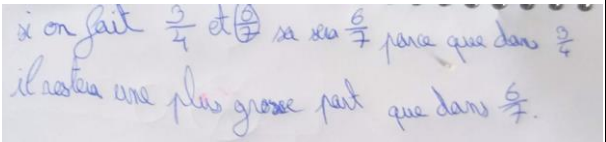
Ecrit de JAD



Ecrit de REN



Ecrit de JUL



Ecrit de ASS

Figure 18. Ecrits personnels d'élèves de CM1 à l'issue de la séance sur la comparaison

Ces écrits personnels témoignent des tentatives des élèves de formuler voire de décontextualiser les connaissances construites à l'issue de la suite de tâches proposées. Certains écrits restent proches des tâches données mais avec des indications supplémentaires que nous interprétons comme des indices de compréhension des connaissances en jeu : comme les annotations « *plus unité* » ou « *unité* » dans l'écrit de JAD et la coloration de « résidus » (correspondant à $\frac{1}{4}$ et à $\frac{1}{7}$) dans l'écrit de JUL. L'écrit d'ASS reste contextualisé à une tâche donnée tout en prenant une forme verbale plus argumentative. Si l'écrit de REN parait un peu contradictoire en apparence (« *quand il y a une [un nombre de parts] part plus petite [petit], [la fraction] peut être la plus grande* »), il semble néanmoins vouloir exprimer de manière plus décontextualisée que les écrits précédents que même si le nombre de parts est plus petit, la fraction peut être plus grande. Ces écrits constituent des indices solides de ce qui paraît avoir été conceptualisé par les élèves à l'issue de la séance observée.

Les observations menées en CM2 comme en CM1 confirment ainsi les potentialités de la séquence de tâches de comparaison, conçues en prise d'appui sur le *benchmarking*. Ces tâches amènent les élèves à questionner l'ordre de fractions unitaires pour comparer des fractions plus grandes ou plus petites que le repère. Bien que la comparaison de « *n*-ièmes » puisse sembler élémentaire, il apparaît que cette question est rarement posée aux élèves français. Comme on l'a vu, en l'absence de questionnement sur la comparaison, le risque est grand de voir ces *n*-ièmes que comme des « objets » privés de toute considération liée aux grandeurs ou aux mesures de grandeurs. A ce sujet d'ailleurs, la perspective ouverte ici rejoint pleinement celle des travaux de Chambris (2022a, 2022b) sur les quantités, évoquée en amont. Les raisonnements convoqués par les élèves relèvent bien de la comparaison de quantités mathématisées, même lorsqu'ils restent ancrés dans des contextes quotidiens (de gâteau, de pizza ...), modélisés par des représentations surfaciques (rectangulaires ou circulaires). En cela ces représentations et les raisonnements d'élèves asssociés ne convoquent vraisemblablement pas la grandeur aire, rapportée à des figures géométriques (qui seraient des rectangles ou des disques dans le cas présent). De notre point de vue, ces raisonnements d'élèves relèvent néanmoins de preuves intellectuelles (Balacheff, 1987) et participent de la conceptualisation de la notion de fraction, portée par des discours intermédiaires (Chesnais & Coulange, 2022).

4. Conclusions et perspectives

Si nous avons choisi de débuter cet article par l'examen des résultats quelque peu inquiétants d'un item sur les fractions issu de l'évaluation TIMMS 2015, ce n'est évidemment pas pour blâmer qui que ce soit, ni les enseignants, ni les élèves français. Notre propos était plus volontiers de souligner la nécessité de problématiser la progressivité envisagée pour la construction de connaissances et savoirs sur les fractions dans le contexte scolaire français. Dans cette perspective, nous nous sommes appuyés sur des observations conduites dans le cadre d'une recherche collaborative avec une enseignante et des élèves de CM1-CM2. Ces observations ont constitué autant d'occasions de prendre un peu de distance par rapport aux repères de progressivité classiquement envisagés dans l'enseignement des fractions en France, ou du moins, par rapport à ceux que la littérature institutionnelle ou professionnelle semblait mettre en avant, jusqu'à aujourd'hui. Notons que de nouvelles propositions de programmes (formulées dans le courant de l'année 2024) pourraient conduire à des évolutions importantes de ces repères, en rendant l'enseignement des fractions bien plus précoce (dès le CE1) qu'il ne l'est actuellement et en lui donnant beaucoup plus d'espace.

Nous avons voulu débuter notre interrogation sur le(s) rôle(s) donné(s) aux représentations liées à des surfaces circulaires dans l'enseignement actuel des fractions à l'école primaire en France. Nous pensions que ce type de représentations étaient remises en question par la documentation institutionnelle française au profit d'autres, privilégiant la grandeur longueur. Toutefois, d'une part, un rapport de synthèse récent, commandé par le Conseil Scientifique de l'Éducation Nationale (Sander *et al.*, 2022), en propose une vision plus nuancée et positive. D'autre part, même si nous n'avons pas de certitude sur l'écho de cette documentation institutionnelle dans les pratiques enseignantes, les manuels que nous avons consultés, nous ont semblé présenter des usages assez variés en la matière.

Un premier moment d'enquête a consisté à explorer les problèmes de partage, favorisant la production et l'utilisation de représentations de surfaces circulaires ou rectangulaires. Ces problèmes nous ont paru peu fréquentés par les élèves français de CM1-CM2 qui rappelons-le ici, passent très rapidement de l'étude des fractions à celle des décimaux. L'aisance observée chez les élèves de CM2 dans la résolution de ces problèmes nous a amenés à interroger plus en profondeur les connaissances mobilisées à travers leurs stratégies variées. Ces problèmes sont par ailleurs « bien connus » du champ de la *Mathematics Education* et la diversité des stratégies de résolution adoptées par les élèves est largement documentée. Cependant, ces stratégies, bien que variées, nous ont semblé s'inscrire davantage dans la continuité des connaissances sur les nombres entiers et sur leurs relations arithmétiques ou multiplicatives. Si nous ne nions pas que ces problèmes puissent participer de premiers apprentissages sur les fractions, nos propres résultats de recherche invitent à la vigilance sur certaines des potentialités parfois mises en avant dans la littérature internationale (Charles & Nason, 2000 ; Empson *et al.*, 2006). Notamment, nous avons montré que partager simultanément une pluralité d'unités en *n* pouvait être difficile, voire impossible à rapprocher de prendre le *n*-ième d'une grandeur mesurée qui serait constituée ou recomposée à partir de cette pluralité d'unités. Dans le même temps, nous avons montré que le *n*-ième d'une grandeur mesurée restait par ailleurs un impensé du curriculum français. Cela peut d'ailleurs participer à (re)poser la question de la signification finalement donnée à la fraction « partage de l'unité » au regard d'un sens limité donné aux « nouvelles » unités potentiellement en jeu, qui ne prendraient pas le statut d'unités relatives (Chambris, 2021). Le risque pris est grand que des raisonnements d'élèves supposés liés aux fractions, portent davantage sur des « objets » et des « paquets d'objets », et ce, indépendamment des unités, des grandeurs et mesures en jeu.

Un deuxième point d'éloignement par rapport à une progressivité classiquement envisagée dans les classes françaises concerne la comparaison de fractions. En accord avec les travaux de Chambris (2022a), l'ordre paraît un incontournable, y compris pour comprendre ce que recouvre le *n*-ième d'une unité, au-delà du seul résultat d'une action (pratique) de partage équitable de cette « unité » (ou objet ?). Cela résonne avec l'importance accordée à la comparaison de fractions par de nombreux travaux de la *Mathematics Education* (Behr *et al.*, 1984 ; Post & Cramer, 1987 ; Pearn & Stephens, 2004 ; Clarke & Roche, 2009 ; Mitchell & Horne, 2010). Ces travaux mettent en avant une variété de techniques possibles de comparaison de fractions, dont nous avons toutes les raisons de penser qu'elle ne trouve *a priori* pas de place dans le curriculum français actuel. Pourtant, des tâches faisant la part belle à ce que d'aucuns de ces travaux désignent par le *benchmarking* et/ou le *residual thinking* et qui prennent en compte des spécificités du curriculum français (comme l'étude de fractions supérieures à l'unité prévue assez rapidement à la suite de l'introduction même des fractions) paraissent recéler des potentialités fortes. En effet, ces tâches ont apparemment constitué des leviers pour amener des élèves de primaire à envisager les fractions dans une perspective liée à la notion de quantité (Chambris, 2022a, 2022b) qui semblait bel et bien échapper à une majorité d'entre eux jusqu'ici. Et ce même si ces quantités ne sont pas encore ou pas tout à fait ni des aires, ni des longueurs, d'ailleurs …

La réflexion amorcée dans ce texte mérite d'ailleurs d'être poursuivie au regard de ce fait en particulier, en repositionnant l'enseignement et l'apprentissage des fractions, dans une « théorie des quantités » (Chambris, 2022b), qui pourrait contribuer à renouveler plus globalement le regard didactique porté sur les savoirs à enseigner en arithmétique à l'école primaire. À l'heure même où de nouveaux projets de programme parus récemment rendraient potentiellement l'enseignement des fractions bien plus précoces dans le futur curriculum français, dès le cycle 2 (à partir du CE1-CE2, élèves de 7 à 9 ans), il nous semble particulièrement important de poursuivre nos travaux dans cette direction, d'ores et déjà impulsée par Chambris (2024).

Bibliographie

ADJIAGE, R., & PLUVINAGE, F. (2000). Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 20*(1), 147–176.

ALLARD, C. (2015). *Etude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions.* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot]. https://hal.science/tel-01249807

ANSELMO, B., COMBIER, G., DUSSUC, M.-P., MADIER, D., FRONT, M., RAVOUX, A., & CHARNAY, R. (2020). *Nouveau Cap maths, CM1*. Hatier.

BALACHEFF, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*(2), 147–176.

BEHR, M. J., HAREL, G., POST, T.R., & LESH, R. (1992). Rational number, rotio, and proportion. Dans D. A. Grouws (Dir.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A projet of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 296-333). Macmillan Publishing.

BEHR, M. J., POST, T. R., & WACHSMUTH, I. (1986). Estimation and children's concept of rational number size. Dans H. Schoen & M. Zweng (Dir.), *Estimation and mental computation* (p. 101–111). NCTM.

BEHR, M.J., WACHSMUTH, I., POST, T.R., & LESH, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(5), 323–341.

BROUSSEAU, G. (1997). *La théorie des situations didactiques*, Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. http://www.cfem.asso.fr/actualites/archives/Brousseau.pdf/view

BROUSSEAU, G., & BROUSSEAU, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. IREM de Bordeaux.

CASTIONI, L, AMIOT-DESFONTAINE, M., & BUDON-DUBARRY, H. (2020). *Maths explicites*. Hachette.

CHAMBRIS, C. (2021). Raisons d'être des grandeurs. Le cas de l'arithmétique à l'école élémentaire. Dans H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, L. Coulange, G. Cirade, P. Job, A.-C. Mathé, A. Pressiat, M. Schneider, & F. Vandebrouck (Dir.), *Actes de la 20ième école d'été de didactique des mathématiques* (p. 169–196). La Pensée Sauvage.

CHAMBRIS, C. (2022a). *Transparence des savoirs dans l'enseignement et l'apprentissage de l'arithmétique scolaire, raisonnements multiplicatifs. Apports d'une perspective mathématique sur les grandeurs et les unités* [Habilitation à Diriger des Recherches non publiée, CY Cergy Paris Université]

CHAMBRIS, C. (2022b). *La notion de quantité est-elle encore d'actualité ?* [Conférence]. Séminaire de l'Irem de Paris. https://irem.u-paris.fr/agenda/seminaire-du-9-novembre-2022-la-notion-de-quantite-est-elle-encore-dactualite-0

CHAMBRIS, C. (2024). *Commentaires sur les projets de programme de mathématiques du cycle 1 et du cycle 2*. Conseil Supérieur des Programmes. https://hal.science/hal-04604251v1

CHAMBRIS, C., COULANGE, L., RINALDI, A.M., & TRAIN, G. (2021). Unités et systèmes d'unités pour l'enseignement et l'apprentissage des nombres et du calcul à l'école. Contribution à un état des lieux-potentialités. Dans H. Chaachoua, A. Bessot, B. Barquero, L. Coulange, G. Cirade, P. Job, A.C. Mathé, A. Pressiat, M. Schneider, & F. Vandebrouck (Dir.), *Actes de la 20ième école d'été de didactique des mathématiques* (p. 373–396). La Pensée Sauvage.

CHARLES, K., & NASON, R. (2000). Young children's partitioning strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *43*, 191–221. https://doi.org/10.1023/A:1017513716026

CHARNAY, R., DOUAIRE, J., VALENTIN, D., & GUILLAUME, J.C. (2005). *Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CM1, Cycle3 (Ermel)*. Hatier.

CHESNAIS, A. (2018). *Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement*. [Habilitation à Diriger des Recherches, Education. Université de Montpellier]. https://hal.science/tel-02046178

CHESNAIS, A., & COULANGE L. (2022). Rôle du langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Synthèse et perspectives en didactique des mathématiques, *Revue française de pédagogie*, *214*, 85–121.

CHESNAIS, A., & COULANGE L. (à paraître). Vers une dimension sociologique du point de vue de l'élève en didactique des mathématiques. Dans C. Indarramendi, D. Frandjo & C. Joigneaux (Dir.), *Scolarisation, subjectivation, lutte contre les inégalités – ouvrage en hommage aux travaux de J-Y. Rochex*. Presses Universitaires de Vincennes.

CLARKE, D.M., & ROCHE, A. (2009). Students' fraction comparison strategies as a window into robust understanding and possible pointers for instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 127–138. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9198-9

COULANGE, L., & TRAIN, G. (2017). Continuités et ruptures de l'enseignement des fractions au cycle 3 - Quelles perspectives ? Dans B. Lebot & F. Vandebrouck (Dir.), *Mathématiques en cycle 3* (p. 143-156). IREM de Poitiers.

COULANGE, L., & TRAIN, G. (2020). The School Mathematical Discursive Community: Diversity and the role of language in meaning-making. *Proceedings of the Seventh ERME Topic Conference on Language in the Mathematics Classroom*, 81–87.

COULANGE, L., & TRAIN, G. (2021, mai). *Reasoning and comparing fractions Potentials of commensuration meaning*. [communication orale]. 9th ERME Topic Conference: Perspectives on conceptual understanding of flexibility and number sense in arithmetic, Leeds, United Kingdom. https://ccpp.leeds.ac.uk/wp-content/uploads/sites/21/2021/05/010-Train_Coulange_TWG2_ETC.pdf

COULANGE, L., OVIDE, A., & TRAIN, G. (2022). Multiplicative comparison of fractions: potentials and limits of commensuration meaning. Dans J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Dir.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 12)* (p. 354–361). ERME/ Free University of Bozen-Bolzano.

DOUADY, R., & PERRIN-GLORIAN, M. J. (1986). *Liaison école-collège*. *Nombres décimaux.* IREM de Paris Sud.

DUPREY, S., DUPREY, G., DROCOURT, V., MAUFREY, F., MAUFREY, I., GODE, V., & GRISWARD, G. (2021). *Maths au CM1*. Accès Éditions.

EMPSON, S. B., JUNK, D., DOMINGUEZ, H., & TURNER, E. (2006). Fractions as the coordination of multiplicatively related quantities: A cross-sectional study of children's thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *63*(1), 1–28. https://doi.org/10.1007/s10649-005-9000-6

FREGONA, D., ORUS, P., COULANGE, L., & TRAIN, G. (2023). Le CRDM Guy Brousseau, un « bon outil » pour ressourcer l'activité du chercheur en didactique. In A. Chesnais & H. Sabra (Dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (p. 65–92). IREM de Paris.

GREER, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. Dans D. A. Grouws (Dir.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (p. 276–295). Macmillan Publishing CO, Inc.

GROSJEAN, C., GILGER, C., & CORTAY, C. (2021). *Tandem Maths CM1 et CM2*. Retz Édition.

HELAYEL, J., FOURNIE, C., CASASNOVAS, J., & VRIGNAUD, C. (2020). *Au rythme des maths CM1*. Bordas.

HIRSH, M., & RODITI, E. (2022). Neurosciences cognitives et apprentissage des nombres rationnels : un point de vue didactique. *Petit x, 116*, 51–74.

KAZANDJIAN, E, MAZOLLIER, M.-S., PFAFF, N., & GUIMARD, S. (2016). *Haut les maths !*. Édition Retz

KRITTER, C. (2018). *Méthode de Singapour CM1*. Librairie Des Écoles.

LAMON, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(2), 170–193. https://doi.org/10.2307/749599

LOARER, C., SOBRERO, A., IMBAULT, C., & LÉVY, A. (2019). *Eurêka CM1 – Livre de l'élève 2019*. Edition Belin.

MARTINEZ-IBANEZ, S. (2018). *Transposition didactique externe et acquisition du concept de fraction : une comparaison internationale entre onze participants aux évaluations TIMSS*. [Thèse de doctorat, Université Sorbonne Paris Cité]. https://theses.hal.science/tel-02524942v2

MARTINEZ, S., & RODITI, E. (2017). Programmes scolaires et apprentissage de la notion de fraction à l'école élémentaire. Quelques enseignements tirés de TIMSS. *Education & Formations*, *94*, 23–40.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (MEN) (2004). Programmes des collèges – Mathématiques.
https://www.education.gouv.fr/bo/BoAnnexes/2004/hs4/maths_sixieme.pdf

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (MEN) (2008). *Les nombres au collège.* https://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/2/doc_acc_clg_nombres_109172.pdf

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (MEN) (2016a). *Programme du cycle 3.* https://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/75/8/Programme_cycle_3_pour_B.O._1424758.pdf

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (MEN) (2016b). *Fractions et nombres décimaux au cylcle 3*. https://eduscol.education.fr/document/36665/download

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (MEN) (2018). *Référents Mathématiques de Circonscription & Formation.* https://eduscol.education.fr/document/1481/download?attachment

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2002). *Documents d'application des programmes.* https://bibnum.publimath.fr/MEN/MEN02003.pdf

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2020). *Programme du cycle 3.* https://cache.media.education.gouv.fr/file/31/88/7/ensel714_annexe2_1312887.pdf

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2023a). *Programme du cycle 3*. https://eduscol.education.fr/document/50990/download

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2023b). Attendus de fin d'année – CM1. https://eduscol.education.fr/document/13990/download

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2023c). Attendus de fin d'année – CM2. https://eduscol.education.fr/document/14002/download

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2023d). Attendus de fin d'année – sixième. https://eduscol.education.fr/document/14014/download

MITCHELL, A., & HORNE, M. (2010). Gap thinking in fraction pair comparisons is not whole number thinking: Is this what early equivalence thinking sounds like? Dans L. Sparrow, B. Kissane, & C. Hurst (Dir.), *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (p. 414–421). Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA).

MOUNIER, E., & PRIOLET, M. (2015). Les manuels scolaires de mathématiques à l'école primaire – De l'analyse descriptive de l'offre éditoriale à son utilisation en classe élémentaire. [Rapport de recherche] Dans *Conférence de consensus. Nombres et opérations : premiers apprentissages à l'école primaire.*Cnesco et Ifé-ENS de Lyon.

MULLIS, I. V. S., MARTIN, M. O., FOY, P., HOOPER, M. (2016B). TIMSS 2015. *International Results in Mathematics, International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).* https://timssandpirls.bc.edu/timss2015/international-results/wp-content/uploads/filebase/full%20pdfs/T15-International-Results-in-Mathematics.pdf

MULLIS, I. V. S., MARTIN, M. O., GOH, S., & COTTER, K. (2016). *TIMSS 2015 Encyclopedia: Education Policy and Curriculum in Mathematics and Science*. http://timssandpirls.bc.edu/timss2015/encyclopedia/

NEAGOY, M. (2017). *Unpacking Fractions: Classroom-Tested Strategies to Build Students' Mathematical Understanding*. Association for Supervision & Curriculum Development.

PEARN, C., & STEPHENS, M. (2004). Why you have to probe to discover what year 8 students really think about fractions. Dans I. Putt, R. Faragher & M. McLean (Dir.), *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia 2004* (p. 430–437). MERGA.

PELTIER, M.-L., BRIAND, J., NGONO, B., & VERGNES, D. (2016). *Opération Maths CM1*. Hatier.

POST, T., & CRAMER, K. (1987). Children's strategies in ordering rational numbers. *Arithmetic Teacher, 35*, 33- 35.

POST, T., BEHR, M. J., & LESH, R. (1986). Research-based observations about children's learning of rational number concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 8*(1), 39–48.

ROGALSKI, J. (2008). Mise en regard des théories de Piaget et Vygotsky sur le développement et l'apprentissage. Dans F. Vandebrouck (Dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques enseignantes* (p. 33–44). Octarès.

SANDER, E., NEAGOY, M., RIVIER, C., SCHEIBLING-SEVE, C., & SENSEVY, G. (2022). *De la multiplication aux fractions : réconcilier intuition et sens mathématique.* https://www.reseau-canope.fr/fileadmin/user_upload/Projets/conseil_scientifique_education_nationale/CSEN_Synthese_structures-mutliplicatives_web.pdf

SOWDER, J. T. (1988). Mental computation and number comparisons: The role in development of number sense and computational estimation. Dans J. Hiebert & M. Behr (Dir.), *Number concepts and operations in the middle grades* (p. 182–197). Lawrence Erlbaum and National Council of Teachers of Mathematics.

STEFFE, L. P. (2010). Articulation of the reorganization hypothesis. Dans L. P. Steffe & J. Olive (Dir.), *Children's fractional knowledge* (p. 49–74). Springer.

VAN DE WALLE, J. A., & LOVIN, L. A. H. (2006). *Teaching student-centered mathematics: Grades 3–5*. Pearson.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2-3), 133–170.

VYGOTSKI (1934/1997). *Pensée et langage*. La Dispute.

LALINA COULANGE

Lab-E3D (EA 7441), Université de Bordeaux

lalina.coulange@u-bordeaux.fr

GREGORY TRAIN

Lab-E3D (EA 7441), Université de Bordeaux

gregory.train@u-bordeaux.fr

Annexe. Vue synthétique d'une recherche collaborative sur l'enseignement des fractions au sein d'un LéA

La recherche collaborative sur laquelle prend appui cet article, a été conduite avec une enseignante collaboratrice surnommée Anne, de 2016 à 2021 au sein d'un LéA (Lieu d'Education associé) en partenariat avec l'IFE (Institut Français d'Education). Exception faite de la dernière année d'expérimentation, les observations ont été conduites dans une école primaire située dans un quartier prioritaire de la ville de Bordeaux (dans des classes variées avec des élèves CM1 et de CM2, de 2016 à 2020). La dernière année, la collaboration et les expérimentations se sont poursuivies dans une classe de CM1, au sein d'une autre école, se caractérisant par un public très hétérogène d'élèves (2020-2021).

Première année d'expérimentation (2016-2017) : introduction et enseignement des fractions en prise d'appui sur la ressource ERMEL CM, inspirée de l'ingénierie de Perrin et de Douady et Perrin (1986) en classe de CM1. La séquence d'enseignement a été intégralement construite par l'enseignante et mise en œuvre dans une classe de CE2-CM1.	Quelques résultats tirés des observations et analyses de la séquence sont cités en introduction de la section « *2. Des problèmes de partage : potentialités et limites ?* »
Deuxième année d'expérimentation (2017-2018) : passation d'un questionnaire visant à interroger les élèves sur des premières significations données aux expressions « quart », « moitié », « la moitié d'un quart », etc. en amont de l'étude des fractions. Introduction et enseignement des fractions en prise d'appui sur une situation de partage, le « partage du trésor des pirates » (classiquement utilisé pour introduire la division euclidienne en prise d'appui sur la ressource ERMEL CM) en CM1. La séquence d'enseignement a été co-construite par Anne et les chercheurs et mise en œuvre dans une classe de CM1.	Quelques conclusions de l'étude des réponses au questionnaire sont signalées dans la transition entre la section « *1.1. Des premiers constats d'étude étayés par des résultats d'enquêtes internationales* » et la section « *1.2. La question des représentations de fractions* ». La figure 8 « *Deux représentations circulaires de $\frac{5}{2}$ proposées par les élèves de CM1* » dans la section « *2.4. La question des représentations de fractions* » provient d'une observation de classe faite sur un exercice de routine proposé cette année-là

Troisième année d'expérimentation (2018-2019) : Questionnaire posé aux élèves posé en amont de la reprise d'étude des fractions intégrant plusieurs problèmes de partage. Reprise d'étude des fractions en prise d'appui sur un problème de partage. Tâches de comparaison de fractions. La séquence d'enseignement a été co-construite par Anne et les chercheurs et mise en œuvre dans une classe de CM2.	L'ensemble de la section « *2.2. Des problèmes de partage dans une classe de CM2* » (tableau 1, figures 2 à 7) s'appuie sur un corpus élaboré à partir d'observations conduites sur des problèmes de partages durant cette année d'expérimentation. L'ensemble de la section « *3.4. Des tâches de benchmarking en CM2* » (figures 11 à 13) s'appuie sur un corpus élaboré à partir d'observations conduites sur des tâches de comparaison de fractions durant cette année d'expérimentation.
Quatrième année d'expérimentation (2019-2020) : Introduction et enseignement des fractions en prise d'appui sur des problèmes de partage – en continuité du « partage du trésor de pirates » en CM1. La séquence d'enseignement a été co-construite par Anne et les chercheurs et mise en œuvre dans une classe de CM1-CM2.	*Du fait de la crise sanitaire, les observations conduites de manière partielle ou ré-aménagées en partie à distance durant cette année d'expérimentation ne sont que peu évoquées dans cet article*
Cinquième année d'expérimentation (2020-2021) : Introduction et enseignement des fractions en prise d'appui sur des problèmes de « commensuration à l'unité ». Tâches de comparaison de fractions. La séquence d'enseignement a été co-construite par Anne et les chercheurs et mise en œuvre dans une classe de CM1.	L'ensemble de la section « *3.5. Quelques compléments sur les tâches de benchmarking en CM1* » (figures 14 et 15) s'appuie sur un corpus élaboré à partir d'observations conduites sur des tâches de comparaison de fractions durant cette année d'expérimentation.

Eric Mounier, David Beylot, Aline Blanchouin, Françoise Chenevotot-Quentin, Nadine Grapin, Laurence Ledan

Repérer les démarches en résolution de problèmes d'un élève de grade 2 par l'analyse de ses procédures : influence de la taille des nombres

Abstract. Identifying the problem-solving approaches of a grade 2 pupil by analyzing his/her procedures: influence of number size. The research reported in this article is to provide a detailed description of the activity of a grade 2 pupil when solving arithmetical problems with verbal statements concerning additive structures. This challenge has the particularity of being addressed using tools drawn primarily from didactics of mathematics. We have revisited the modelling of the activity in solving arithmetical problems with verbal statements proposed by Verschaffel and De Corte (1997, 2008) as well as the definition of approach, which constitute significant contributions at the theoretical level. We have developed an innovative methodology which, when put to the test, has enabled us to identify new results concerning a pupil's activity. They shed new light on the link between the "size" of the numbers present in verbal statements of arithmetical problems concerning additive structures and the approaches taken by a grade 2 pupil.

Keywords. problem solving, activity, modelling, procedures, approach, elementary schools

Résumé. La recherche relatée dans cet article a pour ambition d'accéder à une description fine de l'activité d'un élève de grade 2 lors de la résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux concernant les structures additives (RPAV+). Ce défi a la particularité d'être relevé en utilisant des outils prioritairement issus de la didactique des mathématiques. Nous avons revisité la modélisation de l'activité en RPAV proposée par Verschaffel et De Corte (1997, 2008) ainsi que la définition de démarche, ce qui constitue des apports significatifs au niveau théorique. Nous avons élaboré une méthodologie innovante qui, mise à l'épreuve, nous a permis de dégager de nouveaux résultats concernant l'activité d'un élève. Ils éclairent d'un jour nouveau le lien entre la « taille » des nombres présents dans des énoncés de RPAV+ et les démarches qu'un élève de grade 2 emprunte.

Mots-clés. résolution de problèmes, activité, modélisation, procédures, démarche, école élémentaire

Introduction

Nous nous intéressons dans cet article au contexte particulier de la résolution de problèmes arithmétiques à énoncé verbal (RPAV), des « problèmes numériques, résolubles avec une (ou plusieurs) des quatre opérations usuelles et dont l'énoncé est un texte, plutôt écrit » (Houdement, 2011, p. 68) et qui « racontent des histoires. Ils

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 29, p. 121 – 159.

sont donnés avec des mots et font intervenir peu de symbolisme mathématique » (Feyfant, 2015, p. 9).

En outre, nous limitons notre étude aux problèmes additifs (RPAV+) c'est-à-dire pouvant se résoudre à l'aide d'une addition ou d'une soustraction. Nous restreignons également notre recherche aux élèves en France de début de CE1[1] (grade 2) qui sont, selon les programmes scolaires, au début de leur apprentissage concernant la RPAV+ (MENJ, 2020). Les instructions officielles (MENJ, 2019) prescrivent un apprentissage de la résolution de problèmes relevant des structures additives (Vergnaud, 1990) : « Cela recouvre les problèmes à deux données […] où il s'agit de déterminer une troisième valeur à énoncé court […], syntaxe simple, sans information superflue : les « one-step problems », objets d'étude de Vergnaud » (Houdement, 2018, p. 118). En CP[2] (grade 1), il s'agit de problèmes de transformation (recherche de l'état initial, de l'état final ou de la transformation) et de problèmes de composition de deux mesures (recherche d'une partie ou du tout). Nous circonscrivons notre étude à des problèmes « basiques » (Houdement, 2018) du fait qu'ils « rendent compte des raisonnements élémentaires en relation avec les quatre opérations, donc qui définissent les sens des opérations » (Houdement, 2018, p. 118) et qu'ils sont une étape indispensable à la résolution de problèmes complexes définis comme « des agrégats de problèmes basiques » (Houdement, 2018, p. 119).

Notre article rend compte d'une étude exploratoire qui a pour but de décrire l'activité cognitive d'un seul élève en RPAV+ à partir de certaines traces de celle-ci. Cette étude s'inscrit dans le prolongement d'une recherche précédente (Grapin & Mounier, 2024) qui interroge le rôle que joue la « taille » des nombres dans cette activité. Ces travaux se situent dans un projet de recherche plus large visant à documenter l'activité en résolution de problèmes de l'élève de cycle 2 (élève âgé de 6-9 ans), en tenant compte des spécificités des élèves de cet âge et de ce niveau scolaire. Notre objectif *in fine* est d'accompagner l'enseignant dans les rétroactions qu'il propose pour qu'elles soient adaptées aux connaissances et aux besoins de ses élèves (Blanchouin *et al.*, 2022a).

Dans cet article, pour fonder notre problématique, nous explorons certaines recherches antérieures qui nous ont conduits à adapter le modèle de Verschaffel et De Corte (1997, 2008) afin d'analyser l'activité en RPAV+ des élèves. Nous décrivons ensuite l'enquête et sa méthodologie basée sur un croisement de données et exposons alors les résultats concernant l'activité en RPAV+ d'un élève. La conclusion est l'occasion d'indiquer des limites et perspectives à propos des résultats et de la méthodologie.

---

[1] CE1 – Cours Élémentaire 1re année – élèves âgés de 7-8 ans.
[2] CP – Cours Préparatoire – élèves âgés de 6-7 ans.

1. Cadre théorique

1.1. Distinction entre tâche et activité

Puisqu'il s'agit de comprendre comment « raisonne » l'élève en fonction de ce qu'on lui demande, nous convoquons tout d'abord la distinction entre tâche et activité explicitée dans le cadre de la double approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2002) :

> La tâche est ce qu'il y a à faire ; le « but qu'il s'agit d'atteindre sous certaines conditions » […] L'activité est ce que développe le sujet lors de la réalisation de la tâche : non seulement ses actes extériorisés, mais aussi des inférences, les hypothèses qu'il fait, les décisions qu'il prend, la manière dont il gère son temps, mais aussi son état personnel […]. (Rogalski, 2003, p. 349-350)

Un élève répond alors à la tâche qu'il s'est redéfinie à partir de la tâche qu'on lui a prescrite (Rogalski, 2003). Cette redéfinition est influencée par les connaissances dont il dispose, mais aussi possiblement par un contrat didactique, c'est-à-dire les attentes réciproques de l'enseignant et de l'élève (Brousseau, 1990 ; Bessot, 2003) qui ne sont pas nécessairement explicitées au moment de la prescription de la tâche.

Voici, à titre d'exemple (figure 1), une tâche de RPAV+ que nous avons soumise à des élèves de CE1 en début d'année scolaire accompagnée de la production de deux élèves, Maé et Iris :

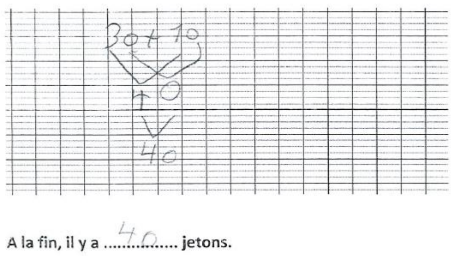
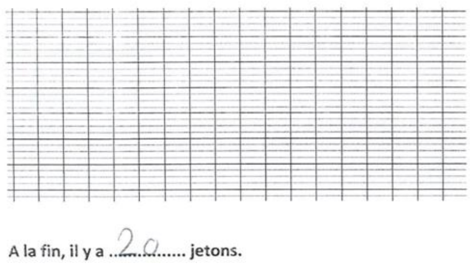
<table>
<tr><td colspan="2">On a une boîte et des jetons. Au début, il y a 30 jetons dans la boîte. Je prends 10 jetons dans la boîte. Quel est le nombre de jetons dans la boîte à la fin ? Prends le temps qu'il te faut. Tu peux utiliser ton crayon à papier et ta gomme pour rechercher (l'espace quadrillé Seyès est montré). Écris ta réponse sur les pointillés.</td></tr>
<tr><td>Maé
</td><td>Iris
</td></tr>
</table>

Figure 1. Tâche prescrite et production de deux élèves de CE1

Une tâche prescrite à l'identique a engendré une activité différente qui mène pour Maé à une réponse fausse et pour Iris à une réponse exacte. En outre, les traces écrites de l'activité concernent pour Maé une procédure et une réponse, alors que pour Iris, il n'y a que la réponse.

1.2. L'influence des connaissances sur les nombres et les opérations sur l'activité en RPAV

Les élèves de ce niveau scolaire peuvent entreprendre des comptages et des calculs pour résoudre les problèmes arithmétiques étudiés.

> Les comptages s'apparentent aux dénombrements parce qu'ils utilisent comme support des systèmes symboliques figurant des quantités […] les calculs traitent les opérations numériques reflétant les transformations et comparaisons des quantités. (Conne, 1987, p. 1)

Les élèves de CE1 peuvent recourir au comptage un à un, au surcomptage (comptage à partir de ...), au comptage à rebours (par exemple à partir de cinq jusqu'à deux). Ils peuvent mobiliser les doigts, des collections manipulables ou figurées, des stratégies informelles « qui conduisent de jeunes enfants non encore scolarisés à trouver par simulation mentale la solution à des problèmes qui seraient également résolubles par des opérations arithmétiques » (Sander, 2018, p. 134). Les calculs peuvent être mentaux en automatisant des faits numériques de répertoires additifs ou en mobilisant des décompositions additives (Butlen, 2004). Les connaissances potentiellement mobilisées sont différentes selon le type de calcul : les calculs posés « en colonnes » – la mise en signe d'algorithmes usuels enseignés à l'école (Mounier & Priolet, 2016) – font prioritairement appel aux propriétés de la numération écrite chiffrée (aspect décimal et aspect positionnel) ; les calculs mentaux font prioritairement appel aux propriétés de la numération orale (Mounier, 2012)[3].

Butlen (2007) souligne l'influence de certaines connaissances des élèves sur les nombres et les opérations sur l'activité en résolution de problèmes :

> Une plus grande familiarité avec les nombres et les propriétés des opérations s'accompagne d'une plus grande aisance calculatoire. Un plus grand nombre de procédures de calcul sont disponibles. Les élèves les mettent en œuvre plus sûrement et commettent donc moins d'erreurs de calcul. Cet effet concerne la résolution mentale comme la résolution écrite des problèmes. Nous pensons que cette aisance contribue aussi à alléger la charge en mémoire consacrée au traitement opératoire au profit du stockage des données et de la représentation du problème. (Butlen, 2007, p. 100)

Fayol (2008) nous semble aller dans le même sens :

> En résumé, l'impact de la connaissance fluide (exacte et rapide) des opérations simples sur les performances en résolution de problèmes, attestée par de nombreux résultats, pourrait reposer à la fois sur l'économie cognitive réalisée par la résolution de ces opérations ne nécessitant plus de recours à l'attention et sur la capacité de manipuler les termes des opérations de manière à faciliter les traitements. (Fayol, 2008, p. 54)

---

[3] Il est aussi possible de « poser » un calcul « dans sa tête ».

Dans nos recherches précédentes (Grapin & Mounier, 2024), nous avons constaté que la « taille » des nombres influence la réussite des élèves en résolution de problèmes. Notre but était de fournir des résultats quantitatifs sur les réussites et qualitatifs sur les réponses. Nous avons donné douze problèmes à résoudre à une cohorte de 83 élèves de fin de CP. Les contextes des problèmes étaient les mêmes (des collections de jetons dans des situations de réunion ou de transformation) et les conditions de passation identiques. Plus précisément, il s'agissait de six « one-step problems » relevant des structures additives. Ils étaient déclinés en deux versions qui ne différaient que par les nombres en jeu : l'une avec ce que nous avons qualifié de « petits » nombres (des nombres inférieurs à dix), l'autre avec des nombres que nous avons qualifiés de « grands » (de 10 à 52). Les élèves de CP sont plus familiers de ces « petits » nombres, dans le sens où ils les ont fréquentés plus souvent, mais aussi depuis plus longtemps que les « grands » nombres qu'ils découvrent durant cette année scolaire. Nous nous sommes intéressés en particulier aux élèves qui réussissent avec les « petits » nombres, mais échouent avec les « grands » nombres ou inversement. Selon la classe de problèmes, ils représentent entre un quart et presque la moitié des effectifs. Si les élèves qui échouent avec les « petits » nombres et réussissent avec les « grands » sont moins nombreux, ils ne sont cependant pas absents, et représentent même 17 % de l'effectif total pour une des classes de problèmes (la recherche d'un état final après transformation positive). Nous avons formulé des hypothèses concernant ces résultats surprenants, notamment du point de vue de la redéfinition de la tâche. Mais les inférences que nous avons pu faire concernant les procédures des élèves en étudiant leurs réponses écrites (dénombrements réalisés ou choix des nombres pour les calculs) ne nous ont pas permis de décrire l'activité des élèves de manière suffisamment précise pour véritablement éclairer ces résultats et discuter ces hypothèses. Les connaissances des élèves en calculs et dénombrements peuvent-elles expliquer ces différences de réussite ? En quoi l'activité en résolution de problèmes de l'élève est-elle si fortement impactée par la taille des nombres ?

Des résultats de recherches anciennes en psychologie et psychopédagogie concernant les « stratégies informelles de résolution (essentiellement basées sur le comptage) développées par les jeunes enfants » (Fagnant, 2008, p. 132) signalent que :

> Les élèves avaient des compétences importantes dans ce domaine, même avant tout enseignement formel en arithmétique et en résolution de problèmes. Ils développent une grande variété de stratégies qui, généralement, modélisent les actions ou les relations décrites dans les problèmes. (Fagnant, 2008, p. 132)

Cela pose la question de l'identification de « stratégies ». Les recherches précitées indiquent le rôle que peuvent jouer les connaissances sur les nombres et les opérations dans l'activité en RPAV. Pour préciser ce rôle, nous avons besoin de mieux comprendre ce que peut recouvrir cette activité.

1.3. L'activité en RPAV : notre adaptation du modèle de Verschaffel et De Corte (2008)

Nous avons retenu le modèle théorique de résolution de problèmes développé par Verschaffel et ses collègues qui fait la synthèse des modèles existants (Hanin & Van Nieuwenhoven, 2016). Le schéma (figure 2, ci-après) de Verschaffel et De Corte (2008) permet de considérer la potentielle complexité de l'activité en résolution de problèmes en général et celle en RPAV en particulier.

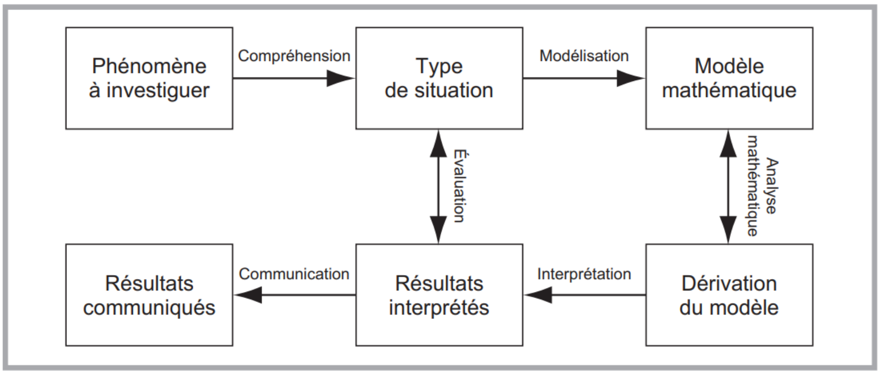


Figure 2. Schéma du processus de modélisation dans la résolution de problèmes selon Verschaffel et De Corte (2008, p. 155)

Cette approche adopte le point de vue de la modélisation mathématique. Bien qu'elle date de plus de vingt ans (cf. par exemple Verschaffel & De Corte, 1997), elle a été convoquée dans des recherches bien plus récentes (Houdement, 2011 ; Van Dooren *et al.*, 2015 ; Fagnant, 2018) concernant la RPAV à l'école élémentaire.

Nous allons indiquer comment nous adaptons ce modèle dans le cadre de notre recherche qui a la spécificité de s'intéresser à de jeunes élèves au début de l'apprentissage de la RPAV+.

1.3.1. Trois sous-processus

Signalons dès à présent que nous sommes dans un cas particulier de « phénomène à investiguer » : la tâche ne consiste pas à élaborer un problème mathématique à partir d'une situation réelle puis d'y répondre (voir par exemple la mathématisation horizontale d'Yvain (2018), mais de répondre à une question explicitement posée à partir de données numériques présentes dans un texte écrit ou oral. Pour cette raison, et à la suite de Fagnant (2018), nous utiliserons le terme « phénomène sous étude » plutôt que celui de « phénomène à investiguer ». Nous retenons ensuite l'idée de processus, allant de la prise en compte du « phénomène sous étude » jusqu'au « résultat communiqué », qui est dans notre cas la réponse donnée au problème, mais nous notons aussi la non-linéarité de ce processus. En effet, les composantes de la figure 2 ne sont pas à considérer comme des étapes qui doivent nécessairement être réalisées successivement et dans cet ordre. Cet aspect non linéaire du processus nous semble faire écho à ce que Julo (1995) dit de l'activité en RPAV :

> Il existe nécessairement des liens étroits et une dynamique commune entre la manière dont on cherche la solution et la manière dont on interprète le problème, entre les procédures ou les stratégies que l'on élabore et la représentation que l'on se construit peu à peu, entre les connaissances qui vont servir à agir et celles qui vont servir à comprendre le problème. (Julo, 1995, p. 25)

Afin d'élaborer une problématique prenant en compte la place de l'activité déployée dans des calculs ou dénombrements, nous allons définir trois sous-processus articulés et des contrôles intervenant potentiellement lors de la RPAV (figure 3).

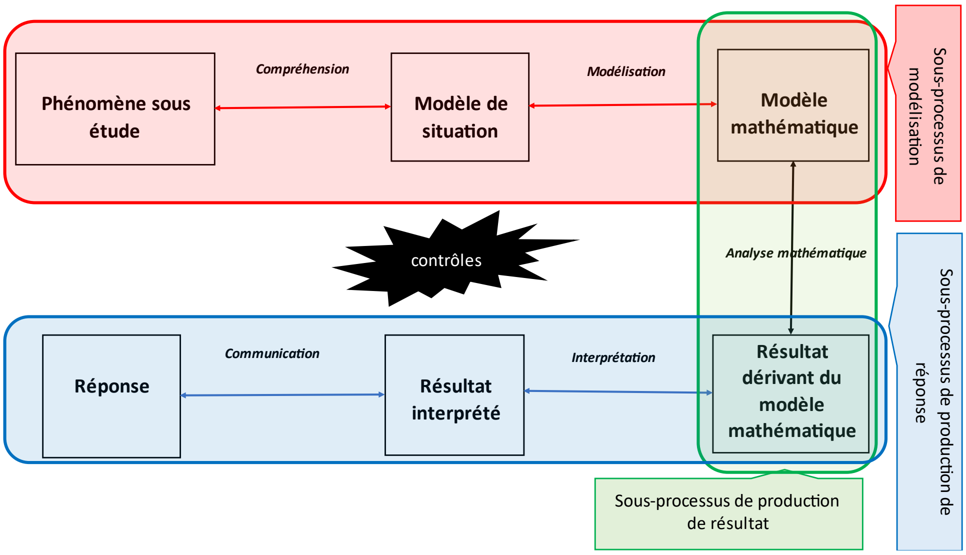


Figure 3. Trois sous-processus adaptés du schéma de Verschaffel et De Corte (2008)

1.3.2. Le sous-processus de modélisation

Le sous-processus de modélisation concerne les trois bulles horizontales en haut de la figure 3 (en rouge), du « phénomène sous étude » pour aboutir « au modèle mathématique » en passant par le « modèle de situation », ce dernier « portant sur les éléments, relations et conditions qui composent le problème à résoudre » (Van

Dooren *et al.*, 2015). Julo (2000 ; 2002)[4] n'envisage pas l'activité en RPAV comme un processus de modélisation mathématique comme le font Van Dooren *et al.* (2015). Il nous permet cependant de préciser ce qu'est « comprendre un problème » dans le cas de la RPAV :

> Ce sont ces relations complexes entre un but donné et les conditions de réalisation de ce but (les contraintes et les aides qu'introduit l'auteur de l'énoncé) qui caractérisent ce qu'est un problème par rapport à d'autres situations de compréhension de texte. On dira alors que se représenter un problème c'est non seulement se représenter un objet particulier […], mais aussi se représenter la tâche particulière qui est associée à cet objet (cette notion de « tâche » sert en psychologie à désigner l'ensemble formé par le but, les contraintes et les aides dans une situation où la production d'une action est attendue). (Julo, 1995, p. 13)

Nous rapprochons ainsi la « compréhension » présentée sur la première flèche des figures 2 et 3 de ce que Julo nomme la représentation du problème, qui va au-delà de la compréhension du texte puisque cela inclut aussi celle de la tâche « résoudre un problème ».

La présence d'une écriture avec un signe opératoire pourrait se comprendre comme dérivant de l'emploi d'un modèle mathématique. Pour autant, nous le verrons plus loin dans la description des démarches superficielles, cela ne signifie pas que le sous-processus de modélisation comprenne un modèle de situation : le modèle mathématique utilisé peut, par exemple, relever simplement de la prise d'indices de surface.

1.3.3. Le sous-processus de production de résultat

Le deuxième sous-processus est schématisé par les trois bulles disposées verticalement à droite dans la figure 3 (en vert). Typiquement, ce serait le passage d'une opération (modèle en écriture mathématique) à l'obtention d'un résultat numérique. L'écriture des étapes d'un calcul serait une trace de l'analyse mathématique amenant au résultat numérique qu'il resterait encore à traiter pour fournir une réponse. Nous avons vu précédemment des exemples de procédures numériques comme le comptage ou le calcul. Dans la suite de cet article, nous allons alors réserver l'usage du terme « procédure » à l'activité que l'élève déploie spécifiquement dans ce sous-processus. Nous relions ce sous-processus de production de résultats aux propos de Butlen (2007) et à ceux de Fayol (2008) sur

[4] Julo (2002) dresse en outre un panorama de l'état de la recherche sur la résolution de problèmes avant 2002 en identifiant des courants de pensée dont au moins une partie des recherches actuelles nous semble encore relever.

les connaissances des élèves sur les nombres et les calculs que nous avons mentionnés.

Mais, pour de jeunes élèves qui découvrent les opérations, les choses ne nous paraissent pas faciles à délimiter. Une opération est-elle clairement mobilisée ? Comment le résultat est-il obtenu ? L'élève opère-t-il sur des nombres par un calcul ou en utilisant uniquement des relations entre les nombres ? L'élève traite-t-il des quantités par un comptage, en s'aidant des doigts ou de matériel ? C'est la raison pour laquelle nous nommons ce sous-processus « sous-processus de production de résultat » et non par exemple « sous-processus de calcul ».

1.3.4. Le sous-processus de production de réponse

Une fois un résultat numérique obtenu, intervient possiblement un troisième sous-processus que nous qualifions de « sous-processus de production de réponse ». Il est schématisé par les trois bulles horizontales en bas de la figure 3 (en bleu). Le résultat est issu du deuxième sous-processus dans lequel l'activité concerne les nombres ou les quantités (par exemple des calculs, des dénombrements…). Communiquer ce résultat pour donner une réponse à la question posée dans le texte du problème (Houdement, 2011) peut exiger un formalisme (comme une phrase de réponse). Mais, pour en faire une réponse au problème, ce résultat nécessite une interprétation (Van Dooren *et al.*, 2015) en revenant au modèle de situation du phénomène à l'étude dans laquelle peuvent intervenir la qualification[5], l'ordre de grandeur, la nature du nombre pour la réponse (entier, décimal, rationnel), etc. Il s'agit alors d'une évaluation rétrospective, c'est-à-dire une vérification *a posteriori* (Burgermeister & Coray, 2008 ; Margolinas, 1993).

L'évaluation du résultat peut aussi être prospective, c'est-à-dire réalisée avant l'obtention d'un résultat, via par exemple une estimation (Burgermeister & Coray, 2008). De manière plus générale, il peut ainsi exister des contrôles de l'activité déployée dans la RPAV intervenant à différents moments et ne concernant pas uniquement le résultat.

1.3.5. Les contrôles

Certains didacticiens des mathématiques utilisent le terme de « contrôle » dans leurs recherches sur la résolution de problèmes. Pour Margolinas, les contrôles concernent

---

[5] Houdement (2011, p. 74) définit la notion de qualification comme « […] une sorte de syntaxe sur les grandeurs (que les physiciens nomment les équations aux dimensions), dont la version minimale est d'associer un nombre et une unité (12 euros) » qui permet de « […] prendre en compte les deux plans d'étude liés à un problème verbal arithmétique : plan de la réalité et plan des mathématiques ». Cela peut renvoyer selon nous à l'« interprétation » des figures 2 et 3.

l'ensemble de la résolution de problèmes : « Nous appelons processus de contrôle le processus d'anticipation de la validation » (Margolinas, 1993, p. 213). A sa suite, Burgermeister et Coray (2008) appellent processus de contrôle « […] l'ensemble des moyens, adéquats ou pas, efficaces ou non, mis en œuvre par l'élève en situation de résolution de problèmes pour répondre à ses doutes quant à sa résolution en voie d'élaboration. » (p. 68). Houdement, quant à elle, met l'accent sur des inférences et contrôles de nature pragmatique ou syntaxique potentiellement utilisés en RPAV par des élèves de grades 3, 4 et 5 (élèves âgés de 8 à 11 ans). Ceux de nature pragmatique se réfèrent à « […] la connaissance de la réalité évoquée par le texte du problème (notamment l'ordre de grandeur des résultats) qui régule le résultat et éventuellement convainc l'élève de commencer un autre calcul » (Houdement, 2011, p. 73). S'ils concernent le résultat obtenu, ils sont aussi à relier à l'interprétation envisagée par Van Dooren *et al.* (2015) (figure 2) dans ce que nous avons nommé le sous-processus de production de réponse (figure 3). Ceux de nature syntaxique se réfèrent au fait que :

> C'est l'analyse des relations entre les objets mathématiques (ici les nombres) qui permet d'avancer : seuls les nombres sont conservés (les mesures en jeu sans référence aux grandeurs qu'elles mesurent, par exemple 12, et non 12 euros ou 12 tables). Le contrôle s'exerce alors sur les écritures mathématiques, indépendamment de la signification que ces écritures ont par rapport au texte du problème ou des grandeurs en jeu. Cette décontextualisation est souvent très utile pour l'obtention d'un résultat ; par contre elle peut se révéler problématique pour l'obtention de la réponse. (Houdement, 2011, p. 73-74)

Ces derniers contrôles renvoient donc au sous-processus de production de résultat. Houdement a identifié des « connaissances cachées » qui ne sont pas explicitement enseignées ni même repérées par les programmes et la recherche et dont l'« absence poserait problème aux élèves qui en sont démunis » (Houdement, 2011, p. 68).

Les activités de contrôle incluent ainsi celles requises pour l'interprétation du résultat telle que définie par Verschaffel *et al.* (2000). Cependant, elles s'inscrivent de manière plus large encore dans des stratégies d'autorégulation cognitive (De Corte & Verschaffel, 2008 ; Hanin & Van Nieuwenhoven, 2016), c'est-à-dire « la capacité de l'individu de planifier et contrôler délibérément ses propres processus cognitifs en vue de la réalisation d'un but » (Focant & Grégoire, 2008, reprenant Gombert, 1990, p. 204).

Les contrôles concernent donc les trois sous-processus. Comme pour le modèle initial de Verschaffel & De Corte (2008), l'adaptation que nous proposons ne traduit pas une articulation linéaire des sous-processus puisque les contrôles peuvent conduire à des allers/retours entre eux. Par exemple, cela peut entrainer une modification du modèle de situation (voire une élaboration si dans un premier temps il n'existait pas comme dans les démarches superficielles décrites ci-après), un changement du modèle mathématique choisi initialement ou encore une vérification de la procédure dans le traitement mathématique (une erreur de calcul a pu se glisser).

2. Complément théorique et problématique

Les éléments théoriques et les recherches cités vont maintenant nous permettre de formuler notre problématique concernant l'activité en RPAV+ d'un élève et sa sensibilité aux variations des données numériques. Nous débutons par un complément théorique qui vise à caractériser cette activité en termes de démarche.

2.1. Trois démarches pour caractériser l'activité en RPAV

Il s'agit de définir des activités archétypales en RPAV susceptibles de rendre compte de l'activité d'un élève de début de CE1. Nous les dénommons démarches, en reprenant le terme déjà employé par Fagnant (2018) dans les expressions « démarche superficielle » et « démarche experte », dans la continuité des travaux de Verschaffel et de ses collaborateurs déjà cités. Elles vont correspondre à l'existence ou non d'une activité dans certains sous-processus, ce qui va nous amener à définir une nouvelle démarche, la « démarche intermédiaire ». Ces définitions vont nous permettre de formuler la problématique en termes de recherche de démarche à identifier.

Signalons auparavant que, pour les élèves de cet âge, il est toujours envisageable que le texte soit compris de manière incorrecte. Par exemple, « Je prends 10 jetons dans la boîte » pourrait être interprété comme « Je prends 10 jetons pour les mettre dans la boîte ». Cette mauvaise compréhension du texte pourrait correspondre, dans les termes de Riley *et al.* (1983) (repris par Fagnant, 2008) à une difficulté « conceptuelle ».

2.1.1. Démarche experte

Une démarche experte (figure 3) correspond à l'ensemble du processus de modélisation : le sous-processus de modélisation fait intervenir un modèle de situation (stratégie de modélisation experte) ; le résultat dérivant d'un sous-processus de production de résultat a été interprété avant d'être communiqué comme solution du problème. Signalons que la non-linéarité de l'ensemble du processus de RPAV ne permet ni de savoir *a priori* comment le processus de modélisation a été initié, ni même de connaitre *a priori* sa nature exacte. Il a pu s'agir de stratégies d'essais/erreurs mobilisant successivement plusieurs modèles, et donc le modèle finalement adopté n'a pas forcément été généré uniquement à partir d'un modèle de situation initial. Par ailleurs, comme nous avons pu le préciser précédemment, d'autres activités ont pu être déployées relativement aux contrôles, notamment celles concernant les deux autres sous-processus.

Notons que, pour nous, une démarche experte favorise l'obtention d'une réponse exacte, mais ne l'assure pas. Notre définition rejoint alors celle de Fagnant (2018) puisqu'en particulier il existe *a minima* des contrôles concernant le processus de production de réponse. Nous envisageons cependant plus explicitement la possibilité d'une grande variété de contrôles tout au long de la recherche.

2.1.2. Démarche superficielle

Dans le cas d'une démarche superficielle (figure 4), il n'y a pas eu de modélisation faisant intervenir un modèle de situation. Ce qui entraine que, avant d'être communiqué, le résultat n'a pu faire l'objet d'interprétation. Les contrôles, s'il y en a eu, sont restreints au sous-processus de production de résultat (par exemple des vérifications dans les calculs ou les comptages).

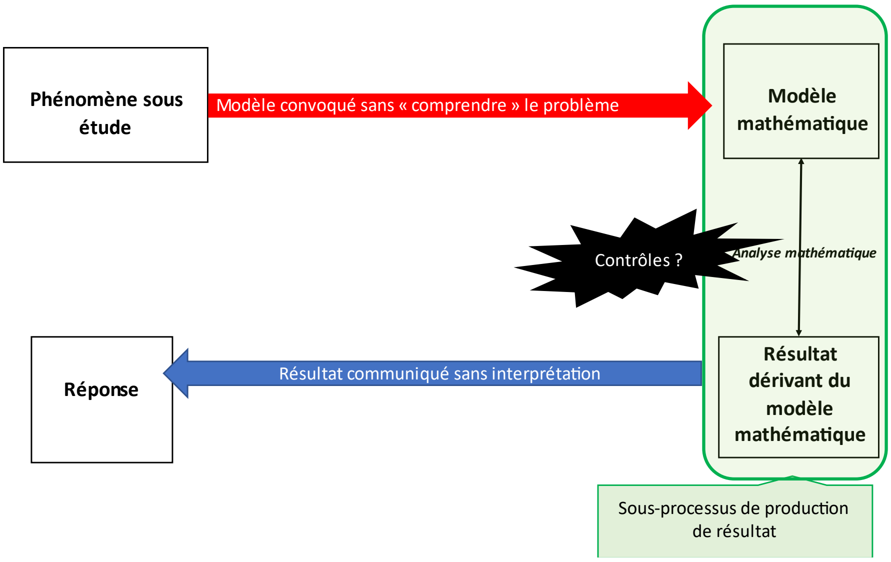


Figure 4. Démarche superficielle. Reprise de Van Dooren *et al.* (2015) et Fagnant (2018)

Les démarches que nous qualifions de superficielles nous semblent proches de la définition donnée par Van Dooren *et al.* (2015) :

> […] la mobilisation d'un modèle mathématique, correct par ailleurs, appliqué en vertu d'indices de surface – éventuellement en fonction de certains mots clés (comme « plus » et « fois »)[6] – et la communication du résultat des calculs sans retour sur l'énoncé ou la situation-problème afin de vérifier si la réponse proposée a du sens par rapport à la question posée ou si elle est réaliste. (p. 206)

Pour ces auteurs, une démarche superficielle s'oppose à une démarche experte qui prend en compte tous les éléments qui sont décrits par la figure 3. Ils listent alors des facteurs qui pourraient expliquer l'emploi de démarches superficielles : la représentation pour l'élève de ce qu'est l'activité en mathématiques qui renvoie à une « collection de stéréotypes » (certitude, règles enseignées par le professeur à appliquer, autorité du professeur sur la validité d'une réponse) et certains aspects de l'enseignement (la présence très importante d'exercices techniques stéréotypés dans les ressources utilisées en classe favorisant des routines ou encore la représentation des enseignants sur les mathématiques) menant ainsi dans un contexte de classe à des contrats didactiques propices aux démarches superficielles.

Nous adoptons cependant une définition plus restrictive que celle de Fagnant (2018), car, contrairement à Fagnant, dans nos démarches superficielles, le modèle mathématique n'est jamais issu d'un modèle de situation : il n'y a donc pas eu de modélisation à proprement parler.

2.1.3. Démarche « intermédiaire »

Dans le cas d'une démarche « intermédiaire » (figure 5), comme pour une démarche experte, un modèle de situation (stratégie de modélisation experte) est intervenu dans le sous-processus de modélisation. Cependant, ensuite, le résultat dérivant du sous-processus de production de résultat n'a pas fait l'objet d'interprétation avant d'être communiqué. Les contrôles, s'il y en a eu, n'ont concerné que les deux autres sous-processus.

---

[6] Ces auteurs utilisent ce terme de mots-clés, c'est aussi le cas de Sander. D'autres, comme Houdement, emploient l'expression « mots inducteurs » ou plus généralement la notion d'indices de surface. C'est ce que nous ferons aussi dans cet article pour indiquer le rôle de ces mots-clés.

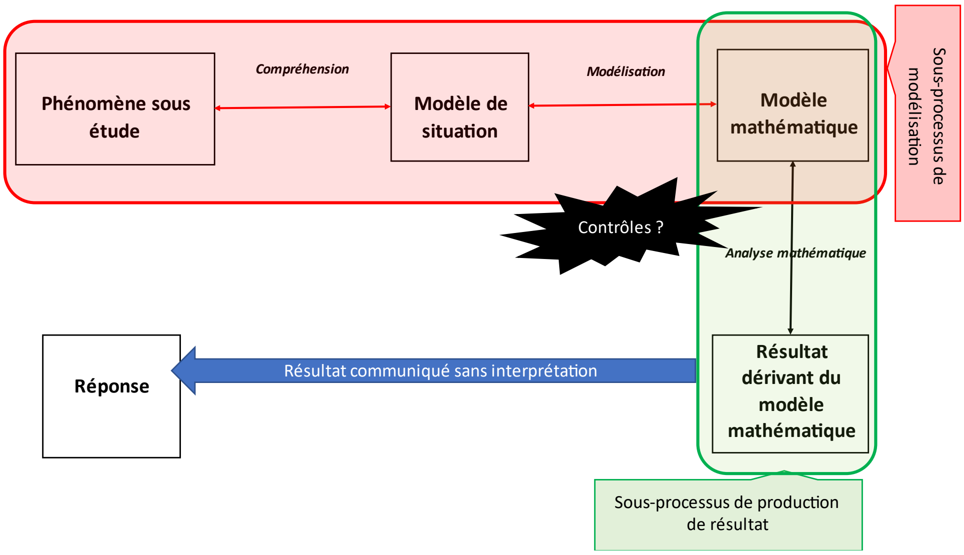


Figure 5. Démarche intermédiaire. Nouveau label, adapté de Van Dooren *et al.* (2015) et Fagnant (2018)

Il nous semble qu'à travers les exemples qu'elle donne, Fagnant (2018) qualifie aussi ce type de démarche comme étant superficielle. Afin de mieux cerner l'activité de l'élève, nous distinguons ces démarches qui omettent le sous-processus de production de réponse, mais dans laquelle un modèle de situation est intervenu : c'est pour cette raison que nous la qualifions de démarche intermédiaire.

2.2. Problématique

Dans le contexte de début d'enseignement de la RPAV+ du programme scolaire français, nous avons trouvé peu de descriptions « fines » de l'activité d'un élève de cet âge (non pas d'une cohorte de sujets) dans le champ des recherches en didactique des mathématiques. Toutefois, les travaux de Fayol et ceux de Butlen montrent que les connaissances sur les nombres et les calculs des élèves de l'école élémentaire influent sur la validité de leur réponse dans la résolution de problèmes (voir notamment Fayol, 2008 ; Butlen, 2007). Ils émettent des hypothèses sur les raisons de ce constat en termes d'« économie cognitive » ou de « charge en mémoire », mais sans détailler l'activité de l'élève. Ces recherches ont attiré notre attention pour investiguer la RPAV+ lorsque les données numériques changent. Dans nos propres travaux (Grapin & Mounier, 2024), nous avons constaté que la « taille » des nombres influence les performances des élèves de fin de grade 1 en RPAV+. En particulier, certains élèves obtiennent la bonne réponse à un problème que nous avons considéré comme comportant des « petits » nombres et échouent en présence de « grands » nombres et inversement. Nous avons opéré cette distinction entre « petits » et

« grands » nombres pour prendre en compte les connaissances des élèves. En effet, contrairement aux premiers, les seconds ont été introduits dans l'année et sont reliés à des situations qui engagent la mobilisation de connaissances nouvelles, par exemple dans des tâches de dénombrement ou de calcul[7]. Ces dissonances de réussite, entre RPAV+ identiques avec des « petits » et des « grands » nombres qui ne sont pas imputables à des erreurs de calcul, nous ont interpelées.

Tous ces travaux interrogent l'activité en RPAV+ lorsque les données numériques changent. Formulée à l'aide de notre cadre théorique, notre problématique consiste à regarder comment les changements de nombres dans l'énoncé d'un problème influenceraient l'activité au-delà de celle déployée dans le seul sous-processus de production de résultat (autrement dit, les procédures). Ainsi, selon les nombres en jeu, l'élève pourrait adopter des démarches superficielles ou intermédiaires le conduisant à choisir un modèle mathématique adapté dans certains cas et non adapté dans d'autres.

Pour donner des éléments de réponse à notre problématique, nous avons adopté une approche qualitative visant à décrire l'activité en RPAV+ pour des « one-step problems » « basiques » (Houdement, 2018) de Maé, un élève de début de CE1, en jouant sur la variable « taille des nombres »[8].

Nous voulons repérer, pour un élève, les démarches qu'il adopte (telles que définies dans le paragraphe précédent) en prenant en compte des informations sur les procédures qu'il utilise et les contrôles potentiellement entrepris.

Cette problématique, ancrée dans le champ de la didactique des mathématiques, est orientée par les outils qu'elle met à disposition, en tout premier lieu une analyse *a priori* des tâches proposées (cf. paragraphe dédié dans la partie méthodologie). Notre méthodologie, décrite ci-après, est basée sur l'analyse croisée de certaines traces de l'activité de l'élève concernant un panel de problèmes qui lui ont été posés. Nous prenons le parti de ne pas utiliser *a priori* des traces comme des schémas ou des dessins pour renseigner directement le processus de modélisation, ce type de traces n'étant pas forcément produit spontanément par les élèves de cet âge.

3. Méthodologie

La méthodologie d'enquête adoptée repose sur une analyse croisée des traces de l'activité d'un même élève, Maé, sur douze problèmes. Il s'agit de renseigner deux éléments de l'activité en RPAV+ qui permettent potentiellement d'identifier sa

[7] C'est au CP que la numération écrite chiffrée est introduite dans ses aspects positionnels et décimaux pour les nombres jusqu'à 99.

[8] Nous reviendrons sur cet aspect « taille des nombres » dans la description de l'enquête menée.

démarche : les procédures et certains contrôles. Après avoir décrit le dispositif général, nous exposons une analyse *a priori* de la tâche donnée à l'élève. Elle délimite ses activités potentielles et permet d'éclairer nos choix pour l'enquête. Nous indiquons finalement quelles sont les traces recueillies et la façon dont nous les avons traitées.

3.1. Le dispositif de l'enquête

Ce dispositif a concerné dix élèves de début de CE1, mais nous n'étudierons qu'un seul cas (Maé) pour cet article ce qui permet d'expliciter la méthodologie et de montrer le type de résultats obtenus. Maé est un élève de début de CE1 âgé de sept ans que son enseignante reconnait comme « ayant des difficultés en mathématiques et en maitrise de la langue », mais qui peut lire un texte court comme celui proposé dans la RPAV. Il a résolu individuellement une série de douze problèmes. La passation a eu lieu dans une salle de l'école en tête-à-tête avec un chercheur. Elle s'est déroulée en trois temps à raison de quatre problèmes par demi-journée (voir le détail de l'organisation de la passation en annexe 1). L'élève dispose d'un crayon et d'une gomme ; un chercheur lit deux fois l'énoncé à l'élève puis ce dernier répond sans limitation de temps. Des échanges entre l'élève et le chercheur ont pu avoir lieu après la résolution de chaque problème, en particulier pour préciser, si nécessaire, la procédure utilisée.

Nous avons filmé toutes les passations et avons conservé les productions des élèves. Cet ensemble relatif à Maé constitue les matériaux recueillis pour l'enquête.

3.2. Les douze problèmes

Quatre problèmes de transformation et deux problèmes de composition de mesure (Vergnaud, 1990) sont soumis sous deux versions aux élèves (cf. annexe 2). Comme on peut le voir dans l'exemple de la figure 6, un problème est proposé avec des nombres de deux tailles différentes : les « petits nombres » (PN) et les « grands nombres ronds » (GNR). Les PN sont des nombres inférieurs à cinq tandis que les GNR sont des nombres parmi 10, 20, 30, 40, 50 (1 à 5 dizaines). Nous reviendrons sur ces choix.

Problème (version avec PN)	Problème (version avec GNR)
On a une boîte et des jetons. Au début, il y a 5 jetons dans la boîte. Je prends 2 jetons dans la boîte. Quel est le nombre de jetons dans la boîte à la fin ?	On a une boîte et des jetons. Au début, il y a 30 jetons dans la boîte. Je prends 10 jetons dans la boîte. Quel est le nombre de jetons dans la boîte à la fin ?

Figure 6. Exemple d'un problème proposé avec des nombres de deux tailles différentes : PN et GNR

Les tâches prescrites dans les énoncés de problèmes et leur formulation partagent des caractéristiques communes : les événements sont décrits en respectant l'ordre chronologique ; les contextes, la syntaxe et le vocabulaire sont familiers des élèves ; il n'y a pas d'illustration ; les nombres sont dits à l'oral et écrits en chiffres ; pour donner la réponse, une phrase est à compléter uniquement par un nombre ; un encart de papier Seyès est à la disposition de l'élève (cf. figure 1).

3.3. Choix des nombres et analyse *a priori* des procédures (sous-processus de production de résultats)

Le choix de la taille des nombres est un levier pour donner des éléments de réponse à la problématique, car les élèves sont susceptibles de mobiliser des procédures différentes. Un calcul ou un dénombrement doit être mobilisable pour ces nombres en dehors de toute résolution de problèmes, permettant donc *a priori* une activité dans le sous-processus de production de résultat.

En nous rapportant aux connaissances supposées avoir été apprises par les élèves de CE1, indiquées dans les repères de progression accompagnant les programmes en CP, nous avons envisagé deux catégories de nombres : les « petits nombres » (PN) et les « grands nombres ronds » (GNR). Nous avons défini ces catégories en considérant les procédures envisageables par les élèves dans le sous-processus de production de résultat (calcul et comptage) dont nous avons entrepris l'analyse de manière très précise en nous appuyant sur Grapin *et al.* (2022).

Pour les PN qui sont des nombres inférieurs à cinq, les procédures peuvent reposer :

- (PerGlo) sur une perception globale des quantités (visualisation mentale par subitizing) ou la reconnaissance d'une configuration connue (par exemple, avec les doigts de la main : une main entière et un doigt levé, l'élève sait que c'est six) ;
- (Compt) sur des comptages (un, deux, trois, quatre, cinq), surcomptage (trois, quatre, cinq), comptage à rebours (cinq, quatre) avec ou sans l'aide des doigts, ou en appui sur une collection dessinée ;

– (CalMent) sur un calcul mental, mémorisé (cinq moins trois est égal à deux) ou réfléchi sur la base de décompositions additives de nombres.

Pour les GNR qui sont des nombres parmi 10, 20, 30, 40, 50 (1 à 5 dizaines), on retrouve les mêmes types de procédures que pour les PN, mais il y a en outre celles qui s'appuient sur les dizaines :

– (CalMent) on utilise, par exemple, que 30 c'est 3 dizaines et 10 c'est 1 dizaine et on procède avec les dizaines comme pour les PN ;

– (CalAlgo) on peut aussi « poser » l'opération et utiliser l'algorithme usuel sur les chiffres (somme des unités et somme des dizaines), avec une mise en signes (disposition en colonnes, en ligne, avec un « arbre », etc.) qui peut varier (Mounier & Priolet, 2016) ;

– (Compt) il est aussi possible de s'appuyer sur la comptine orale des dizaines (dix, vingt, trente, etc.) comme on s'appuie sur celle des unités avec les PN (un, deux, etc.).

Il est important de rappeler que, pour les élèves de début de CE1, les procédures sur les petits nombres sont des connaissances déjà travaillées à l'école maternelle (élèves âgés de 3 à 5 ans) et donc susceptibles d'être mobilisables dans la RPAV+, alors que celles sur les GNR n'ont été introduites qu'en CP et ne sont pas nécessairement maîtrisées, même dans une tâche isolée de calcul (sans avoir un problème verbal à résoudre).

3.4. Analyse *a priori* des problèmes

Les douze problèmes (cf. annexe 2) sont issus de six classes de problèmes (Vergnaud, 1990) :

– Quatre problèmes de transformation :
    - recherche de l'état final après une transformation positive (Ef+),
    - recherche de l'état final après une transformation négative (Ef–),
    - recherche de la transformation positive (T+),
    - recherche de la transformation négative (T–) ;

– Deux problèmes de composition de mesures (partie-partie-tout) :
    - recherche du tout (Tt),
    - recherche d'une partie (P).

Les travaux anciens de Riley *et al.* (1983), repris et confirmés depuis, attestent de réussites différentes selon la classe de problèmes. Potentiellement, l'activité diffère donc selon les six classes de problèmes. Mais elle peut aussi varier entre les deux problèmes d'une même classe de problèmes puisque les nombres en jeu permettent l'emploi de procédures différentes.

Par ailleurs, en reprenant la terminologie de Fagnant (2008, p. 137), selon les problèmes, le calcul relationnel (c'est-à-dire « écrit en conformité du problème ») et le calcul numérique (c'est-à-dire « écrit de telle sorte que la réponse soit derrière le signe égal ») coïncident ou non. Par exemple, dans chaque problème (Ef–) de la figure 6, ils coïncident pour le problème PN (5 – 2 = ?) et GNR (30 – 10 = ?). C'est aussi le cas pour les problèmes Ef+ et Tt (cf. tableau 1 et annexe 2). Par contre, ils ne coïncident pas pour les problèmes T+ (par exemple pour les PN, 3 + ? = 5 pour le calcul relationnel et 5 – 3 = ? pour le calcul numérique) et c'est aussi le cas pour les problèmes T– et P. Ces coïncidences ou non-coïncidences sont indépendantes des nombres en jeu[9]. Dans les cas de non-coïncidence, même si le calcul n'est pas écrit ou même si la procédure ne relève pas d'un calcul (mais d'un comptage par exemple), les procédures liées à des calculs numériques « standards » semblent plus difficiles à mobiliser pour les élèves (Fagnant, 2008). Nos propres travaux vont dans le même sens. Par exemple, nous avons observé que pour un problème dont le calcul relationnel se traduit par 3 + ? = 5, le surcomptage « de 3 pour aller à 5 » est plus souvent employé (stratégie informelle) que la soustraction 5 – 3 en ôtant 3 de 5.

Par ailleurs, Sander propose une analyse des textes de problèmes en termes d'analogie de substitution : « Les analogies de substitution portent sur les notions mathématiques elles-mêmes. Elles se repèrent par le fait qu'une notion est conçue par analogie avec une connaissance familière » (Sander, 2018, p. 126). L'analogie de substitution de l'addition très majoritairement observée est l'ajout que l'on rencontre dans les deux classes de problèmes Ef+ et Tt. Dans le cas de la soustraction, c'est le retrait rencontré dans la classe de problèmes Ef–. Les problèmes relevant de ces classes de problèmes sont considérés comme sources d'analogies facilitatrices. Nous notons alors que, pour les classes de problèmes dont relèvent les problèmes de notre enquête, la coïncidence calcul relationnel/calcul numérique correspond à des analogies facilitatrices et leur non-coïncidence à des analogies obstructives (tableau 1). La présence d'analogies facilitatrices influence positivement la réussite, mais rend plus difficile le repérage de démarches superficielles.

De nombreux auteurs, dont Julo, Fagnant, Houdement et Verschaffel, signalent que certains mots, formulations et expressions, peuvent être « inducteurs » de démarches superficielles en RPAV (voir notamment Julo, 1995, 2000 et 2002 ; Fagnant, 2008,

[9] Voir Fagnant (2008) pour plus de détails sur la classification des problèmes (en particulier p. 140 et 141). Soulignons que le terme « calcul » est utilisé ici avec le substantif « relationnel » ou « numérique ». Il renvoie à une analyse *a priori* de la structure d'un problème.

2018 ; Houdement, 2011, 2018 ; Verschaffel & De Corte, 1997, 2008). Dans les textes des problèmes de notre enquête interviennent les formulations « je verse », « je mets », « j'ajoute » et « je prends ». Les trois premières expressions peuvent renvoyer à une situation d'ajout (bien que « je verse » puisse aussi évoquer un retrait, un manque par rapport à la quantité de départ), la dernière à une situation de retrait (ce qui ne correspond pas forcément à l'opération dans le calcul numérique).

Nous avons regroupé dans un tableau les caractéristiques des problèmes selon les éléments précédents.

Classe de problèmes	Ef+ Recherche de l'état final. Transf. posit.	Ef– Recherche de l'état final. Transf. négat.	T+ Recherche de la transf. positive	T– Recherche de la transf. négative	Tt Recherche du tout	P Recherche d'une partie
Calcul relat. PN	2 + 3 = ?	5 – 2= ?	3 + ? = 5	5 – ? = 2	2 + 3 = ?	2 + ? = 5
Calcul relat. GNR	20 + 30 = ?	30 – 10= ?	10 + ? = 30	30 – ? = 10	20 + 30 = ?	20 + ? = 30
Calcul num. PN	2 + 3	5 – 2	5 – 3	5 – 2	2 + 3	5 –2
Calcul num. GNR	20 + 30	30 – 10	30 – 10	30 – 10	20 + 30	30 – 20
Coïncidence	Oui	Oui	Non	Non	Oui	Non
Analogie	Facilitatrice	Facilitatrice	Obstructive	Obstructive	Facilitatrice	Obstructive
Expression inductrice	Ajout « Je mets encore »	Retrait « Je prends »	Ajout « J'ajoute »	Retrait « Je prends »	Ajout « Je verse »	Ajout « Je verse »

Tableau 1. Des critères pris en compte pour l'activité potentielle dans les 12 problèmes

Signalons que le cas de T– est un peu particulier. En effet, pour T–, bien qu'ils ne coïncident pas, le calcul relationnel et le calcul numérique prennent tous les deux la forme d'une soustraction. Bien que T– ne corresponde pas à une analogie facilitatrice de la soustraction (*a contrario* de Ef–), les soustractions 5 – 2 et 30 – 10 donnent cependant la réponse exacte.

3.5. Traces recueillies et méthode d'analyse

Les matériaux recueillis sont les productions de Maé, mais aussi les vidéos des passations. Les traces écrites donnent déjà des indications pour inférer des procédures. Pour compléter, grâce aux vidéos, nous considérons des gestes corporels (les mains de l'élève en particulier), des attitudes (regards, mimiques) et aussi des éléments de discours spontanés. Nous nous référons alors à l'analyse *a priori* pour émettre des hypothèses sur les procédures. Concernant les traces de contrôles, nous tenons en outre compte du temps mis entre la fin de la lecture du problème et le début de la procédure observée, entre le début de la procédure et l'obtention d'un résultat, ainsi qu'entre la production du résultat et celle de la réponse. Nous notons d'éventuels nouveaux essais. Des échanges ont pu avoir lieu après la résolution du problème, à l'initiative du chercheur, pour préciser certains éléments de l'activité, en particulier la procédure. Nous en tenons aussi compte en étant attentifs au fait que les dires, faits et gestes de l'élève apparaissent ou non en contradiction avec sa première activité de résolution (qui s'est opérée sans intervention d'un tiers).

Nous identifions alors des procédures et des contrôles pour formuler des hypothèses (lorsque cela est possible) sur les démarches concernant tout d'abord chaque problème de manière isolée. Ensuite, nous reprenons les données en les croisant de trois manières différentes :

- pour chaque classe de problèmes, comparer les versions PN et GNR ;
- puis pour les six problèmes GNR, comparer selon les classes de problèmes ;
- enfin pour les six problèmes PN, comparer selon les classes de problèmes.

Ces croisements nous servent à enrichir l'analyse isolée de l'activité dans chaque problème.

4. Résultats de Maé concernant l'analyse problème par problème

4.1. Réponses et procédures

Concernant les procédures, de manière générale, l'activité que Maé déploie quand il résout seul chaque problème offre pour les PN peu d'observables (traces écrites et orales, gestes). Pour les GNR, c'est essentiellement la production écrite finale (par exemple, l'arbre de la figure 1) qui fournit des indications sur la procédure utilisée.

Le tableau 2 indique les réponses, les traces écrites relevées ainsi que les procédures que nous avons inférées en nous appuyant sur l'analyse *a priori* réalisée.

Pour les PN, Maé a exclusivement recours à des procédures de comptage que nous avons été amenés à préciser lorsque nous sommes parvenus à les identifier :

- (Compt) PN1 : surcomptage sur les doigts à partir d'un nombre donné (par exemple : trois doigts levés, « j'ai mis trois dans ma tête », puis un 4^{e} et un 5^{e} de la même main, en prononçant « quatre » et « cinq ») ;

– (Compt) PN2 : abaissement de doigts à partir d'une quantité levée, puis dénombrement des doigts restant par comptage ou reconnaissance de configuration (par exemple : deux doigts sont abaissés sur une main de cinq doigts levés ; il en reste trois) ;

– (Compt) PN3 : réunion de deux collections de doigts et dénombrement du tout (par comptage ou reconnaissance de configuration) ;

– PNX : procédure non identifiée, mais différente de celles observées dans les autres problèmes (Maé semble vouloir soustraire 1 à un nombre donné).

Pour les GNR, lorsque nous avons pu identifier sa procédure, Maé s'appuie majoritairement sur un calcul algorithmique et réalise des additions au moyen d'un arbre de calcul visible sur sa production :

– (CalAlgo) GNR1 : additions effectuées à l'aide d'un arbre de calcul (cf. figure 1) dans lequel les sommes des unités et des dizaines sont obtenues séparément, l'arbre prenant en charge l'aspect positionnel de la numération écrite chiffrée ;

– GNRX : pas de trace pour la procédure, pas de réponse donnée. Procédure non identifiée, mais différente de celles observées dans les autres problèmes.

Maé		Ef+	Ef–	T+	T–	Tt	P
PN	Réponse	5	3	**8** (2)	3	5	**4 ?** (3)
	Procédure	PN1 Pas de trace	PN2 Pas de trace	PN1 Trace : 3+5=8	PN2 Pas de trace	PN1 ou PN3 ? Pas de trace	PNX Pas de trace
GNR	Réponse	50	**40** (20)	**40** (20)	**Pas de réponse** (20)	50	**50** (10)
	Procédure	GNR1 Trace : arbre	GNR1 Trace : arbre	GNR1 Trace : arbre	GNRX Pas de trace	GNR1 Trace : arbre	GNR1 Trace : arbre

Tableau 2. Traces écrites, réponses (quand elle est fausse, la réponse est en gras – la réponse exacte est entre parenthèses) et procédures de Maé

Nous avons pu voir et interpréter facilement les gestes uniquement pour le problème de transformation avec recherche de la transformation positive avec petits nombres (T–(PN)). Nous avons donc dû tenir compte des échanges entre le chercheur et l'élève, après que l'élève a eu fini sa résolution de manière autonome. Dans un seul cas (T–(GNR)), Maé n'a pas donné de réponse, n'a pas laissé de trace de procédure et est resté muet lors des échanges. Deux cas, Tt(PN) et P(PN), restent sujets à discussion pour identifier avec certitude la procédure. Pour P(PN)[10], Maé semble raconter une « histoire » (malheureusement peu audible dans l'enregistrement) en se référant au texte du problème : il prononce le mot « enlève » et dit « quatre », mais est-ce sa réponse ? Ce n'est que lorsque des éclaircissements sont demandés par le chercheur qu'il écrit aussi « 5 [espace] 1 ». Il met ensuite le signe « – » quand le chercheur lui demande quel signe mettre entre les nombres. Cela illustre le fait que, très souvent, les demandes d'explicitations après-coup ne sont pas comprises par Maé comme des demandes d'éclaircissement de la procédure. En fait, dans beaucoup de cas, les propos de Maé se centrent sur la correction du résultat (sous-processus de production de résultat) et non sur les raisons qui l'ont amené à choisir son calcul ou dénombrement (sous-processus de modélisation), ni même sur le passage du résultat à la réponse (sous-processus de production de réponse), même quand le chercheur le lui demande de manière explicite (par exemple en confrontant son résultat obtenu au texte du problème qui est relu).

4.2. Les contrôles

Concernant l'identification de contrôles, nous relevons que Maé se lance systématiquement instantanément dans une procédure dès la fin de la lecture de l'énoncé, et le résultat obtenu est inscrit immédiatement dans la phrase de réponse. Il n'y a jamais d'essai de deuxième procédure ni de retour au texte de l'énoncé une fois un premier résultat obtenu. Ainsi, il n'y a pas d'interprétation visible du résultat, et aucun autre contrôle n'est observable (avec nos outils) durant le processus de résolution.

4.3. Les démarches

Les données précédentes conduisent au fait que Maé ne semble pas utiliser de démarche experte. En considérant chaque problème de manière isolée, lorsque la réponse est exacte, ces données ne nous ont pas permis de déterminer lequel des deux types de démarche intermédiaire/superficielle est adopté par Maé. Si la réponse est

[10] P(PN) : « J'ai deux sachets et une boite vide. Dans un sachet, il y a 2 jetons d'une couleur. Dans l'autre sachet il y a des jetons d'une autre couleur. Je ne sais pas combien il y en a. C'est le sachet mystère. Je verse les deux sachets dans la boîte vide. A la fin, j'ai 5 jetons dans la boîte. Quel est le nombre de jetons qu'il y avait dans le sachet mystère ? ».

fausse, on peut faire l'hypothèse de démarches superficielles, mais sans en être assuré. Il est donc difficile d'aller plus loin en prenant en compte chaque problème de manière isolée.

5. Résultats de Maé concernant les analyses croisées des problèmes

5.1. Analyse pour chaque classe de problèmes selon PN et GNR

Pour les classes de problèmes T+ et P, les procédures mènent à des réponses fausses à la fois pour les GNR et les PN. Ces deux classes de problèmes sont les seules comportant à la fois une analogie de substitution obstructive, une non-coïncidence calcul relationnel/calcul numérique et des mots inducteurs renvoyant à un ajout alors que la situation est celle d'une différence ou d'un écart (Maé fait une somme). Ces deux classes de problèmes cumulent donc de potentiels obstacles et il est difficile de savoir ce qui a pu jouer sur la démarche de Maé. Les réponses fournies auraient pu être évaluées rétrospectivement via une estimation qui nous semble à la portée de l'élève (les résultats trouvés n'auraient pas dû être supérieurs à ceux de l'énoncé) si celui-ci avait construit un modèle de situation approprié. Cela va dans le sens de l'emploi de démarches intermédiaires, voire superficielles, en particulier dans le cas des GNR où l'élève dessine un arbre à calcul d'une somme.

Pour les classes de problèmes Ef+ et Tt, les procédures mènent à des réponses exactes à la fois pour les GNR et les PN. Ce sont deux classes de problèmes catégorisées comme présentant une coïncidence calcul relationnel/calcul numérique avec analogie facilitatrice, comportant des mots inducteurs renvoyant à une procédure adaptée au problème. Dans ces cas, il est difficile de faire des hypothèses sur les démarches.

Cependant une troisième classe de problèmes est de la même catégorie que Ef+ et Tt : c'est Ef– (ici le calcul relationnel/calcul numérique est une soustraction). Or, pour celle-ci, la procédure utilisée par Maé mène à la réponse exacte pour les PN, mais pas pour les GNR. Il semblerait alors que la présence des PN ou des GNR influencerait le choix du modèle mathématique sous-jacent à la procédure. Un autre élément va dans ce sens. En effet, pour T–, on constate aussi des réponses exactes pour les PN, mais pas pour les GNR. Or, pour cette classe de problèmes, les réponses exactes (à la fois pour PN et GNR) sont favorisées si on se base sur le mot inducteur, mais elles ne le sont pas si on considère que les problèmes sont sans coïncidence calcul relationnel/calcul numérique et correspondent à une analogie de substitution obstructive.

En conclusion, si on ne considère que l'activité inférée dans chaque classe de problèmes selon PN et GNR, il est difficile d'aller plus loin et donc d'identifier des types de démarche. Mais croiser la taille des nombres avec les mots inducteurs semble une piste pour éclairer l'adoption des procédures par Maé.

5.2. Analyse pour tous les problèmes GNR selon les autres critères

Les procédures de Maé sont identiques pour cinq des six problèmes avec GNR (deux nombres sont ajoutés de manière correcte via un arbre de calcul), alors qu'elles ne mènent à un résultat fournissant une réponse exacte que dans trois de ces cinq cas. Ceci se rencontre quel que soit le type d'analogie ou de coïncidence calcul relationnel/calcul numérique ou de mots inducteurs. En outre, le choix de la procédure s'opère presque instantanément et la procédure de calcul se fait rapidement de manière exacte (semble-t-il, avec assurance). Le dernier problème avec les GNR, T–(GNR), est l'unique problème où aucune trace de procédure n'est observée. A ce stade de l'analyse, nous formulons l'hypothèse d'un possible « conflit » entre d'une part le fait d'utiliser la procédure additive « arbre » comme dans les autres problèmes avec GNR et, d'autre part, le mot inducteur « je prends » qui a conduit Maé à employer une procédure non additive dans le problème idoine avec les PN.

En conclusion, un faisceau d'indices converge vers le fait que la présence de GNR dans le texte des problèmes déclenche chez Maé la mobilisation d'une unique procédure (la procédure « arbre ») témoin de l'emploi d'un unique modèle mathématique (additif). Les autres éléments caractérisant les problèmes semblent avoir une influence seconde (comme les mots inducteurs) voire nulle (comme la classe de problèmes, le type d'analogie et la coïncidence calcul relationnel calcul numérique). Les démarches apparaissent alors comme superficielles, même dans le cas de l'obtention d'une réponse exacte (des cas de « faux positifs »). Qu'en est-il pour les PN ?

5.3. Analyse pour tous les problèmes PN selon les autres critères

Pour les problèmes avec PN, Maé mobilise quatre procédures différentes. Dans les cas de T– et Ef–, le calcul numérique correspond à une soustraction. La même procédure est alors utilisée, bien que le calcul relationnel/calcul numérique coïncide pour l'un mais pas pour l'autre. Dans le cas de Ef+ et Tt, le calcul numérique correspond à une addition et deux procédures différentes sont observées.

Plusieurs procédures sont donc disponibles selon les problèmes. Le choix effectué à chaque fois ne peut s'expliquer par la (seule) caractérisation du problème selon la coïncidence du calcul relationnel/calcul numérique, en fonction du type d'analogie ou de la classe de problèmes.

Nous pouvons cependant remarquer que le choix des procédures de Maé est cohérent avec les mots inducteurs dans cinq des six classes de problèmes. Le résultat correspond à une réponse exacte dans des cas où le calcul relationnel et le calcul numérique coïncident et l'analogie est facilitatrice (Ef+, Ef–, Tt). Quand ils ne coïncident pas et que l'analogie est obstructive, la réponse peut être exacte (T–) ou fausse (T+). Dans ce dernier cas, il ne s'agit vraisemblablement pas d'une erreur de calcul, mais de l'ajout des deux données (5 et 3) alors que la différence 5-3 ou le complément de 3 à 5 permettrait d'obtenir la réponse exacte. Ces arguments plaident en faveur d'une activité dans le processus de production de résultat orientée par les mots inducteurs. Mais qu'en est-il pour la classe de problèmes P dans laquelle Maé décrit la façon dont il raisonne avant de donner la réponse (c'est le seul cas) ? Pour ce problème, bien que les données soient trop fragmentaires pour en être sûr, il est possible que « je verse » n'oriente pas vers le choix d'une procédure dont le modèle sous-jacent est additif (contrairement à Tt) et engage un modèle sous-jacent soustractif amenant à une procédure mal maitrisée.

Nous formulons alors l'hypothèse que, pour les PN, Maé utilise des démarches superficielles, fondées en premier lieu sur les mots inducteurs, ou des démarches intermédiaires. Dans le cas de réponses correctes, même ses explications données *a posteriori* ne permettent pas de trancher entre les deux types de démarche. Dans le cas d'une réponse erronée, des erreurs de calcul ou de dénombrement ne semblent pas être en cause (*i.e.* l'activité déployée dans le sous-processus de production de résultat). L'hypothèse d'une stratégie superficielle semble plus étayée, au moins pour le problème T+.

5.4. Éléments de réponse à la problématique

Il nous semble que Maé adopte une « marche à suivre » bien à lui face à la résolution de problèmes, car ses démarches nous apparaissent sous-tendues par des logiques d'action influencées par les procédures disponibles. Tout se passe comme si la tâche principale qu'il s'est redéfinie (possiblement fruit d'un contrat didactique) est de trouver puis d'appliquer « la » procédure à utiliser (calcul ou comptage), selon des facteurs qui engagent alors à adopter des démarches superficielles ou intermédiaires.

Pour les GNR, Maé semble disposer d'une seule procédure sûre et efficace pour obtenir un résultat et atteindre son but. Son activité est réduite au sous-processus de production de résultat, après une prise d'information des deux nombres en jeu. Sa démarche apparait superficielle.

Pour les PN, information qu'il prend d'abord en compte, plusieurs procédures sûres et efficaces nous apparaissent s'offrir à lui. Il lui faut donc trouver un autre indicateur pour faire un choix. Dans l'analyse selon chaque classe de problèmes, la coïncidence calcul relationnel/calcul numérique et le type d'analogie ne nous ont pas permis de trouver une logique à ses choix de procédures et ses réponses (tableau 2). Par contre, cette décision pourrait être orientée par les mots inducteurs ; c'est d'ailleurs ce qu'il semble indiquer dans certains échanges avec le chercheur, les rares fois où il ne discute pas uniquement de la procédure. Toutefois, la présence de mots inducteurs identiques dans les problèmes Ef+ et Tt l'a pourtant conduit à des procédures différentes. Il se pourrait alors que Maé emprunte, au moins dans ce dernier cas, une démarche intermédiaire, mais toutefois jamais de démarche experte.

Soulignons finalement que le fait de réussir un problème avec les PN ne semble pas aider à réussir avec les GNR. La démarche de Maé ne nous parait pas experte, étant donné la pauvreté ou l'absence d'activité déployée dans le sous-processus de modélisation, de production de réponse, mais aussi de contrôle de manière générale. Lorsqu'elle est éventuellement menée, l'activité de contrôle apparait restreinte au sous-processus de production de résultat (vérification de la procédure, calcul ou comptage) ; c'est souvent à cela que répond Maé dans les échanges avec le chercheur, même lorsque ce dernier tente de lui faire interpréter la réponse donnée.

6. Conclusion

Notre objectif était d'étudier les conséquences de changements de nombres dans l'activité déployée en RPAV+ par un élève de grade 2. Nous avons pour cela convoqué des recherches antérieures qui nous ont conduits à spécifier un modèle d'activité en RPAV (figure 3), à problématiser en termes d'identification de types de démarches (superficielles, intermédiaires, expertes) et à préciser les nombres choisis. Nous avons ensuite décidé d'enquêter en basant notre méthodologie sur la possibilité d'identifier ces démarches à partir de l'activité dans le sous-processus de production de résultat (les procédures) et de l'activité de contrôle. Nous revenons ici sur les résultats obtenus, leur portée, ce qui interroge aussi les potentialités de notre méthodologie pour étudier d'autres cas.

6.1. Le rôle joué par la disponibilité des procédures dans l'activité en RPAV+

Avec le cas de Maé, nous avons pu mettre en évidence que les procédures dont dispose un élève[11] pourraient intervenir de manière déterminante dans sa démarche en RPAV+. La valeur des nombres peut être prise comme première voire unique information, en cohérence avec une redéfinition de la tâche en résolution de problèmes qui se réduit à trouver « ce qu'il faut faire avec les nombres » sans considérer tous les éléments requis pour y arriver tels que décrits dans une démarche experte. S'il ne dispose que d'une seule procédure pour les nombres qu'il a repérés dans l'énoncé (ce serait le cas de Maé pour les GNR), l'élève pourrait l'utiliser sans autres considérations et sa démarche serait donc superficielle. Si l'élève dispose de plusieurs procédures, il lui est nécessaire d'aller plus loin pour faire un choix. Il peut alors, par exemple, s'appuyer sur un mot inducteur et il s'agirait encore d'une démarche superficielle, mais pas obligatoirement. En effet, dans les cas des PN, Maé a pu changer de procédure pour la recherche de l'état final après transformation positive et pour la recherche du tout, ces deux problèmes contenant pourtant des mots

[11] Robert (1998) parlerait ici de procédures mobilisables voire disponibles.

inducteurs évoquant un ajout. Le fait de disposer de plusieurs procédures lui aurait permis de faire un choix entre elles (et donc aussi potentiellement un choix du modèle mathématique sous-jacent) non motivé uniquement par un mot inducteur. Cela a pu l'engager dans une activité concernant le sous-processus de modélisation qui ne relèverait donc pas d'une démarche superficielle, mais, dans son cas, d'une démarche intermédiaire.

Cela éclaire différemment les réflexions de Butlen (2007) et de Fayol (2008) concernant le rôle joué par la disponibilité de procédures de calcul sur l'activité de l'élève. Butlen indique qu'une plus grande maitrise des calculs permettrait d'« alléger la charge en mémoire consacrée au traitement opératoire au profit du stockage des données et de la représentation du problème » (Butlen, 2007, p. 100). Dans le cas de Maé, on peut considérer que l'éventail des procédures dont il dispose restreint ou ouvre les possibilités pour effectuer la tâche qu'il s'est redéfinie. Nous pouvons ainsi émettre l'hypothèse que ce qu'il sait faire avec ses doigts est à la fois un moyen pour opérer avec les nombres (ce qui réfère à son activité dans le sous-processus de production de résultat), mais aussi une représentation possible de la situation : par exemple la recherche du tout en réunissant deux collections de doigts comme dans PN3, la recherche de l'état final en relevant successivement des doigts comme dans PN1. Cela va dans le sens des propos de Fagnant (2008) qui signale que les élèves « développent une grande variété de stratégies qui, généralement, modélisent les actions ou les relations décrites dans les problèmes » (p. 132). Ceci met l'accent sur l'élaboration du modèle mathématique en jeu et son identification par le chercheur, au carrefour du sous-processus de modélisation et du sous-processus de production de résultat. Développer certaines connaissances sur des procédures mettant en jeu les doigts (comme représentation de la quantité, au moins pour les PN) pourrait alors aider les élèves dans ces deux sous-processus et favoriser l'accès à des démarches non superficielles. Cela ne semble cependant pas jouer *a priori* directement sur l'ensemble de l'activité de contrôle nécessaire pour adopter des démarches expertes.

Nos hypothèses sur le rôle joué par les connaissances sur les procédures avec PN et GNR sur l'activité en RPAV+ de Maé montrent en outre que d'autres caractéristiques des problèmes (calcul relationnel/calcul numérique, analogie de substitution, classe de problèmes) ne pourraient influencer que de manière seconde cette activité, surtout dans le cas où ces connaissances sont réduites.

6.2. Retour sur le cadre théorique et la méthodologie

Établir la problématique a mobilisé au niveau théorique l'identification d'un nouveau type de démarche, les démarches intermédiaires, non décrites explicitement dans les recherches antérieures. La méthodologie nous a permis de formuler des hypothèses argumentées concernant les démarches adoptées en RPAV+ par un élève, Maé, à partir du repérage de procédures et de contrôles, mais aussi de décrire plus finement des cas de démarches superficielles et intermédiaires. Revenons sur ces éléments.

Considérons tout d'abord les contrôles. Si on regarde tous les problèmes, des régularités ont permis de forger une image générale de l'activité de contrôle de Maé. Comme nous avons eu du mal à interpréter isolément les gestes et mimiques, nous nous sommes appuyés sur des indices variés. Nous avons pris en compte des indicateurs tels que le temps écoulé entre la fin de la lecture du problème et le début de l'engagement dans la procédure observée, la durée de la procédure, ainsi que le laps de temps entre la production du résultat et celle de la réponse. Ces éléments nous ont permis de supposer que les contrôles sont peu présents, voire absents. Ces premiers éléments permettent déjà de penser que Maé n'emprunte vraisemblablement pas de démarche experte. Cette hypothèse est renforcée en considérant les problèmes pour lesquels les résultats erronés obtenus auraient été invalidés si une interprétation en avait été faite en revenant au texte du problème. Dans le cas de réponses exactes, il subsiste un doute sur l'existence ou non de ce type de contrôle, surtout pour les PN et certaines classes de problèmes qui pourraient être familiers de l'élève.

Concernant les procédures, leur analyse *a priori* et la prise en compte d'observables (traces écrites ; gestes, en particulier avec les doigts) nous ont permis de les inférer chez Maé. Nous avons alors essayé de repérer des régularités en les éclairant selon la caractérisation des problèmes que nous avons faite. L'étude de l'activité par problème pris isolément ne nous a pas permis de conclure sur les démarches empruntées. C'est donc en croisant nos analyses sur des regroupements de problèmes, en faisant des parallèles, que nous avons pu avancer dans notre réflexion : nous avons pris en compte les procédures selon la classe de problèmes (en faisant varier la taille des nombres PN ou GNR), selon les GNR (en faisant varier les classes de problèmes) et finalement selon les PN (en faisant varier les classes de problèmes). Dans le cas de Maé, le premier regroupement, selon les classes de problèmes, n'a pas donné de résultat. Cet élément n'apparait pas déterminant pour lui, bien que beaucoup de recherches indiquent son influence sur la réussite des élèves[12]. Ce sont les régularités dans les deux autres regroupements qui ont permis de formuler des hypothèses argumentées non seulement sur la probabilité de l'utilisation de démarches superficielles ou intermédiaires, mais aussi sur leur description. Avions-nous besoin de regarder toutes ces classes de problèmes ? En particulier, on aurait pu penser que la classe de problèmes Ef–, avec analogie facilitatrice, coïncidence entre calcul relationnel et calcul numérique et comportant un mot inducteur évoquant

[12] Les recherches que nous avons consultées s'intéressent cependant le plus souvent à une cohorte d'élèves (% de réussite global) et ne portent pas sur un individu.

l'opération à faire (une soustraction), ne nous aurait été d'aucune utilité. Pourtant elle a donné lieu à une réponse exacte pour les PN et fausse pour les GN. Il nous apparait donc nécessaire d'analyser l'activité sur une diversité de classes de problèmes, y compris celles qui ne sembleraient pas *a priori* donner beaucoup d'informations sur la démarche.

D'un point de vue méthodologique, quels matériaux sont nécessaires à l'identification de procédures et de contrôles ? Le cas de Maé souligne en effet cette difficulté malgré les enregistrements vidéo effectués. Des entretiens ont été menés lorsque le chercheur en ressentait la nécessité pour l'aider dans la confirmation d'hypothèses faites *in vivo* sur les procédures et les contrôles rétrospectifs. Cette activité réflexive de l'élève après-coup ne correspond cependant pas forcément à celle déployée auparavant lors de la résolution du problème. Alors, quels apports, quelle complémentarité à notre méthodologie issue de la didactique des mathématiques, d'entretiens par exemple d'explicitation (Vermersch, 2019) ou de démarche de type ethnographique (Delalande, 2008) ?

6.3. Questions et perspectives de recherche

Le modèle que nous avons adapté de celui de Verschaffel et son équipe, le choix des problèmes et les croisements dans les analyses ont été appropriés pour produire des résultats originaux. Il ne s'agit cependant que d'un seul cas ! Pour aller plus loin et donc pour répondre de manière plus complète à nos questions, il est nécessaire de considérer d'autres élèves. Nous voudrions exploiter les mêmes données que celles concernant Maé, recueillies auprès d'une dizaine d'enfants de début CE1. Notre méthodologie donnerait-elle alors des résultats ? Lesquels ? Il serait aussi intéressant d'investiguer du côté d'élèves plus âgés pour voir si cette méthodologie reste pertinente. Leurs connaissances évoluant, il apparait cependant nécessaire d'adapter non seulement les classes de problèmes, mais aussi les nombres en jeu, voire la complexité des problèmes. D'ailleurs, ces questions sont aussi à considérer pour les élèves de début de CE1 comme Maé. Par exemple, que ce serait-il passé pour lui si nous avions proposé des quantités telles que 25 et 37 jetons qui requièrent des procédures différentes ? Une autre démarche serait-elle apparue ?

Ces questions peuvent être posées dans le cadre de la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990). Il s'agirait de repérer dans l'activité de l'élève les schèmes qui sont à l'œuvre et d'observer « pour une même classe de situations, des conduites largement automatisées, organisées par un schème unique » ou d'« amorçage successif de plusieurs schèmes, qui peuvent entrer en compétition et qui pour aboutir à la solution recherchée, doivent être accommodés, décombinés et recombinés » (Vergnaud, 1990, p. 136). Si on peut penser que « lorsque l'enfant utilise un schème inefficace pour une certaine situation, l'expérience le conduit soit à changer de schème, soit à modifier ce schème » (Vergnaud, 1990, p. 138), ce processus d'adaptation ne peut s'opérer que si l'élève se rend compte de cette inefficacité, ce qui questionne donc son activité de contrôle.

Nous allons continuer à enquêter sur l'activité de l'élève en résolution de problèmes dans le cadre de recherches collaboratives réunissant chercheurs, formateurs et enseignants (Blanchouin *et al.*, 2022a, 2022b ; Beylot *et al.*, 2024).

Bibliographie

BESSOT, A. (2003). Une introduction à la théorie des situations didactiques. *Les cahiers du laboratoire Leibniz, 91*.

BEYLOT, D., BLANCHOUIN, A., MOUNIER, É., LEDAN, L., CHENEVOTOT, F., & GRAPIN, N. (2024). Accompagner les professeurs des écoles à la prise en compte de la diversité de l'activité des élèves en résolution de problèmes : potentialités et limites d'usages du modèle de Verschaffel et De Corte (2008). *Actes du 49e Colloque COPIRELEM* (p. 847–874). ARPEME.

BLANCHOUIN A., GRAPIN, N., & MOUNIER, É. (2022a). Étude de gestes évaluatifs en situation de résolution de problèmes au cycle 2. Dans A. C. Adihou (Dir.), *Actes du huitième colloque de l'Espace Mathématique Francophone* (p. 943–959). Université de Sherbrooke.

BLANCHOUIN A., GRAPIN, N., & MOUNIER, É. (2022b). Planification et gestes évaluatifs en contexte d'ingénierie évaluative : un exemple d'étude en mathématiques à l'école élémentaire. Dans I. Issaieva (Dir.), *Actes du 33eme colloque de l'ADMEE-Europe* (p. 507–513). ADMEE-Europe.

BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(3), 309–336.

BURGERMEISTER, P-F., & CORAY, M. (2008). Processus de contrôle en résolution de problèmes dans le cadre de la proportionnalité des grandeurs : une analyse descriptive. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 28*(1), 63–106.

BUTLEN, D. (2004). *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des professeurs des écoles.* [Habilitation à diriger des recherches, Université Paris 8]

BUTLEN, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique.* Presses universitaires de Franche-Comté.

CONNE, F. (1987). Comptage et écriture en ligne d'égalités numériques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *9*(1), 71–116.

DE CORTE, E., & VERSCHAFFEL, L. (2008). Apprendre et enseigner les mathématiques : un cadre conceptuel pour concevoir des environnements d'enseignement-apprentissage stimulants. Dans M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* (p. 25–54). De Boeck Supérieur.

DELALANDE, J. (2008). Enquêter auprès d'enfants pour restituer leurs points de vue et leurs expériences. Dans B. Albero & J. Thievenaz (Dir.), *Traité de méthodologie de la recherche en sciences de l'éducation et de la formation* (Vol. 2, p. 46–61). Éditions Raison et Passions.

FAGNANT, A. (2008). Résoudre et symboliser des problèmes additifs et soustractifs en début d'enseignement primaire. Dans M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* (p. 131–150). De Boeck Supérieur.

FAGNANT, A. (2018). Des illustrations qui accompagnent les problèmes à la construction de représentations schématiques par les élèves : quels enjeux face aux problèmes standards et problématiques ? Dans J. Pilet & C. Vendeira (Dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM* (p. 94–113). IREM de Paris.

FAYOL, M. (2008). La résolution de problèmes : de la compréhension aux opérations. *Actes du séminaire national – L'enseignement des mathématiques à l'école primaire. 13-14 novembre 2007* (p. 49–60). MEN-DGESCO.

FEYFANT, A. (2015). La résolution de problèmes de mathématiques au primaire. *Dossier de veille de l'IFÉ*, *105*.

FOCANT, J., & GREGOIRE, J. (2008). Les stratégies d'autorégulation cognitive : une aide à la résolution de problèmes arithmétiques. Dans M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques* (p. 201–221). De Boeck Supérieur.

GOMBERT, J. E. (1990). *Le développement métalinguistique.* Presses Universitaires de France.

GRAPIN, N., & MOUNIER, É. (2024). Évaluer la résolution de problèmes additifs au CP : une étude exploratoire autour de la taille des nombres. *Grand N*, *113*, 29–48.

GRAPIN, N., CHENEVOTOT-QUENTIN, F., LEDAN, L., BEYLOT, D., MOUNIER, É., & BLANCHOUIN, A. (2022). Étude exploratoire de procédures d'élèves de 7-8 ans en calcul mental additif. *Revue Math-Ecole*, *238*, 29–40.

HANIN, V., & VAN NIEUWENHOVEN, C. (2016). Évaluation d'un dispositif pédagogique visant le développement de stratégies cognitives et métacognitives en résolution de problèmes en première secondaire. *Évaluer. Journal international de Recherche en Education et Formation*, *2*(1), 53–88.

HOUDEMENT, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactiques et de Sciences cognitives, 16*, 67–96.

HOUDEMENT, C. (2018). Problèmes arithmétiques basiques : le cœur du problème. Dans J. Pilet & C. Vendeira (Dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM* (p. 114–141). IREM de Paris.

JULO, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*. Presses Universitaires de Rennes.

JULO, J. (2000). Aide à la représentation ou aide à la modélisation ? Le cas des problèmes de partage inégal. *Actes du Séminaire du Laboratoire de Didactique des Mathématiques 1999-2000* (p. 1–14). Institut de recherche mathématique de Rennes.

JULO, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, *69*, 31–52.

MARGOLINAS, M. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques.* La pensée sauvage.

MENJ (2019). *Cycle 2. Mathématiques. Attendus de fin d'année de CP.* https://www.education.gouv.fr/bo/19/Hebdo22/MENE1913283N.htm

MENJS (2020). Programme d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2). *BOEN n°31 du 30 juillet 2020.* https://www.education.gouv.fr/media/70279/download

MOUNIER, E. (2012). Des modèles pour les numérations orales indo-européennes à usage didactique. Application à la numération parlée en France. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, 17,* 27–58.

MOUNIER, E., & PRIOLET, M. (2016). La programmation des techniques opératoires dans les manuels scolaires de l'école élémentaire Le cas de l'addition et de la soustraction. *Grand N*, *98*, 5–26.

RILEY, M. S., GREENO, J. G., & HELLER, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. Dans H. P. Ginsburg (Dir.), *The development of mathematical thinking* (p. 153–196). Academic Press.

ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18*(2), 139–190.

ROBERT, A., & ROGALSKI , J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *2*(4), 505–528.

ROGALSKI, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en didactique des mathématiques, 23*(3), 343–388.

SANDER, E. (2018). Une perspective interprétative sur la résolution de problèmes arithmétiques : le cadre A-S[3]. Dans J. Pilet & C. Vendeira (Dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM* (p. 94–113). IREM de Paris.

VAN DOOREN, W., VERSCHAFFEL, L., GREER, B., DE BOCK, D., & CRAHAY, M. (2015). La modélisation des problèmes mathématiques. Dans M. Crahay & M. Dutrévis (Dir.), *Psychologie des apprentissages scolaires* (2e éd., p. 199–219). De Boeck.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des Mathématiques, 10*(2/3), 133–170.

VERMERSCH, P. (2019) *L'entretien d'explicitation.* ESF Editions.

VERSCHAFFEL, L. & DE CORTE, E. (1997). Word problems: a vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school? Dans T. Nunes & P. Bryant (Dir.), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective* (p. 69–97). Psychology Press Ltd.

VERSCHAFFEL, L., & DE CORTE, E. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace. Dans M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte et J. Grégoire (Dir.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* (p. 153–176). De Boeck Supérieur.

YVAIN, S. (2018). Vers une possible dévolution de la mathématisation dans un processus de modélisation. Dans Y. Matheron et G. Gueudet (Dir.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques*, *Actes de la XVIIIe école d'été de didactique des mathématiques* (p. 734–743). La pensée sauvage.

ERIC MOUNIER

LDAR, Université Paris Est Créteil, Université Paris Cité, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, Univ. Rouen, F-94010 Créteil, France

eric.mounier@u-pec.fr

DAVID BEYLOT

INSPE de Poitiers, Université de Poitiers

david.beylot@univ-poitiers.fr

ALINE BLANCHOUIN

CREAD, Université de Bretagne Occidentale

aline.blanchouin@inspe-bretagne.fr

FRANCOISE CHENEVOTOT-QUENTIN

LDAR, Université de Lille, Université Paris Cité, Univ. Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Rouen, F-59000 Lille, France

francoise.chenevotot@univ-lille.fr

NADINE GRAPIN

LDAR, Université Paris Est Créteil, Université Paris Cité, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, Univ. Rouen, F-94010 Créteil, France

nadine.grapin@u-pec.fr

LAURENCE LEDAN

INSPE de Toulouse, Université de Toulouse Jean Jaurès

laurence.ledan@univ-tlse2.fr

Annexe 1. Organisation de la passation : succession des douze problèmes posés à Maé les 22 et 23 octobre 2020

	1er problème	2e problème	3e problème	4e problème
Jour 1 matin	Ef+(PN)	Ef–(GNR)	T–(PN)	Tt(GNR)
Jour 1 après-midi	Ef+(GNR)	T+(PN)	T–(GNR)	P(PN)
Jour 2 matin	Ef–(PN)	T+(GNR)	Tt(PN)	P(GNR)

Annexe 2. Textes des douze problèmes et production écrite finale de Maé

<table>
<tr>
<td>

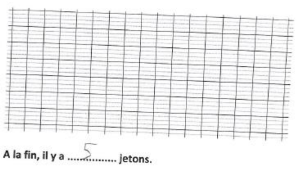
Ef+(PN)

Recherche de l'état final pour une transformation positive « petits nombres ».

On a une boîte et des jetons. Au début, il y a 2 jetons dans la boîte.

Je mets encore 3 jetons dans la boîte.

Quel est le nombre de jetons dans la boîte à la fin ?



</td>
<td>

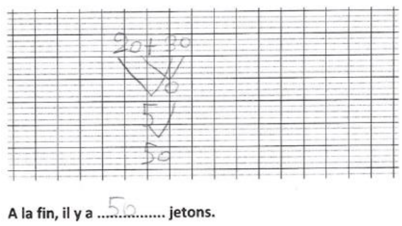
Ef+(GNR)

Recherche de l'état final pour une transformation positive « grands nombres ronds ».

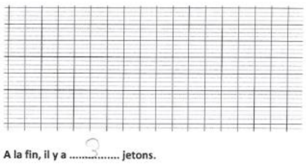
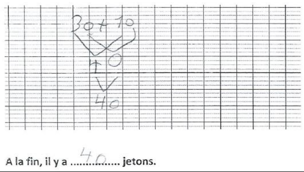
On a une boîte et des jetons.

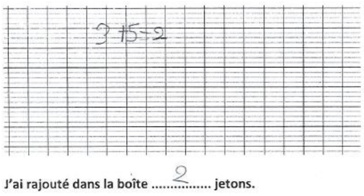
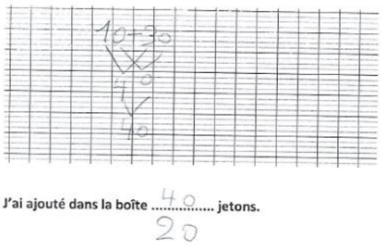
Au début, il y a 20 jetons dans la boîte. Je mets encore 30 jetons dans la boîte.

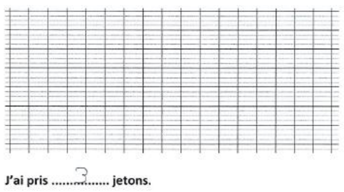
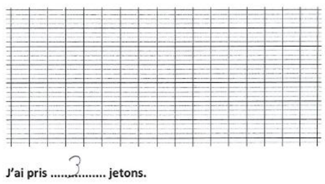
Quel est le nombre de jetons dans la boîte à la fin ?

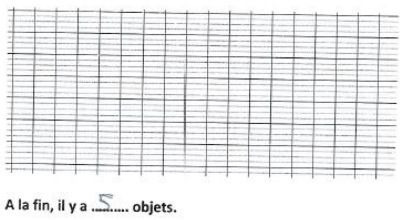
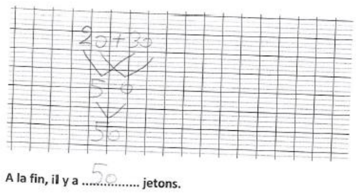


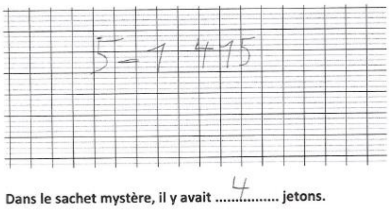
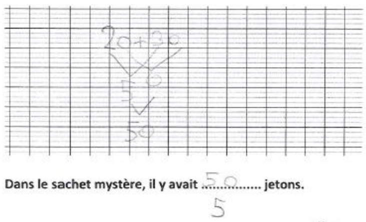
</td>
</tr>
</table>

Ef–(PN)	***Ef–(GNR)***
Recherche de l'état final pour une transformation négative « petits nombres ». On a une boîte et des jetons. Au début, il y a 5 jetons dans la boîte. Je prends 2 jetons dans la boîte. **Quel est le nombre de jetons dans la boîte à la fin ?** 	***Recherche de l'état final pour une transformation négative « grands nombres ronds ».*** On a une boîte et des jetons. Au début, il y a 30 jetons dans la boîte. Je prends 10 jetons dans la boîte. **Quel est le nombre de jetons dans la boîte à la fin ?** 

T+(PN)	***T+(GNR)***
Recherche de la transformation positive « petits nombres ». On a une boîte et des jetons. Au début, il y a 3 jetons dans la boîte. J'ajoute des jetons. À la fin, dans la boîte, il y a 5 jetons. **Quel est le nombre de jetons que j'ai ajouté dans la boîte ?** 	***Recherche de la transformation positive « grands nombres ronds ».*** On a une boîte et des jetons. Au début, il y a 10 jetons dans la boîte. Je verse des jetons dans la boîte. À la fin, dans la boîte, il y a 30 jetons. **Quel est le nombre de jetons que j'ai ajouté dans la boîte ?** 

T–(PN)	***T–(GNR)***
Recherche de la transformation négative « petits nombres ». On a une boîte et des jetons. Au début, il y a 5 jetons dans la boîte. Je prends des jetons de la boîte. À la fin, dans la boîte, il y a 2 jetons. **Combien ai-je pris de jetons ?** 	***Recherche de la transformation négative « grands nombres ronds ».*** On a une boîte et des jetons. Au début, il y a 30 jetons dans la boîte. Je prends des jetons de la boîte. À la fin, dans la boîte, il y a 10 jetons. **Combien ai-je pris de jetons ?** 

Tt(PN)	***Tt(GNR)***
Recherche du tout « petits nombres ». J'ai deux sachets et une boîte vide. Dans un sachet il y a 2 crayons. Dans l'autre sachet, il y a 3 feutres. Je verse les deux sachets dans la boîte vide. **Quel est le nombre d'objets dans la boîte à la fin ?** 	***Recherche du tout « grands nombres ronds ».*** On a deux sachets de jetons et une boîte vide. Dans un sachet il y a 20 jetons d'une couleur. Dans l'autre sachet, il y a 30 jetons d'une autre couleur. Je verse les deux sachets dans la boîte vide. **Quel est le nombre de jetons dans la boîte à la fin ?** 

P(PN)	***P(GNR)***
Recherche d'une partie « petits nombres ».	***Recherche d'une partie « grands nombres ronds ».***
J'ai deux sachets et une boîte vide. Dans un sachet, il y a 2 jetons d'une couleur. Dans l'autre sachet, il y a des jetons d'une autre couleur. Je ne sais pas combien il y en a. C'est le sachet mystère. Je verse les deux sachets dans la boîte vide. À la fin, j'ai 5 jetons dans la boîte. **Quel est le nombre de jetons qu'il y avait dans le sachet mystère ?**	J'ai deux sachets et une boîte vide. Dans un sachet, il y a 20 jetons d'une couleur. Dans l'autre sachet, il y a des jetons d'une autre couleur. Je ne sais pas combien il y en a. C'est le sachet mystère. Je verse les deux sachets dans la boîte vide. À la fin, j'ai 30 jetons dans la boîte. **Quel est le nombre de jetons qu'il y avait dans le sachet mystère ?**
	

JULIÁN SANTOS

BÚSQUEDA DEL EQUILIBRIO ENTRE EL COMPONENTE ADIDÁCTICO Y DIDÁCTICO DEL *SABER* EN LA INGENIERÍA DIDÁCTICA

Abstract. Search for balance between the adidactic and didactic components of *savoir* in didactic engineering. Didactic Engineering describes in detail the stages of *connaissances* construction within *adidactic situations*, yet it does not address the stages in which this *connaissances* becomes decontextualized and transformed into formal *savoir*. This imbalance between the adidactic and didactic components of *savoir* presents a challenge for teachers who aim to implement Didactic Engineering with regard to meaning as the connection between *connaissances* and *savoir*. In this theoretical essay, I will defend the hypothesis that institutionalization needs to be considered in the design and a priori analysis of Didactic Engineering.

Keywords. institutionalization, theory of didactic situations, didactic engineering, teaching methods, mathematics education

Resumen. En las Ingenierías Didácticas se describen con detalle los momentos de construcción del *conocimiento* en las *situaciones adidácticas*, pero no se describen los momentos en los que se produce esa descontextualización del *conocimiento* al *saber*. Este desequilibrio entre el componente adidáctico y didáctico del *saber* se traduce en un problema para los profesores que pretenden implementar una Ingeniería Didáctica en relación con el sentido como conexión entre el *saber* y el *conocimiento*. Defenderé en este ensayo teórico la hipótesis de que la *institucionalización* necesita ser considerada en el diseño y el análisis a priori de las Ingenierías Didácticas.

Palabras clave. institucionalización, teoría de situaciones didáctica, ingeniería didáctica, métodos de enseñanza, educación matemática

Résumé. Recherche de l'équilibre entre la composante adidactique et didactique du *savoir* en ingénierie didactique. L'ingénierie didactique décrit en détail les moments de construction des *connaissances* dans les *situations adidactiques*, mais ne décrit pas les moments où s'opère cette *décontextualisation* par rapport au *savoir*. Ce déséquilibre entre la composante adidactique et didactique des connaissances se traduit par un problème pour les enseignants qui entendent mettre en œuvre l'ingénierie didactique en relation avec le sens en tant que lien entre les connaissances et le savoir. Dans cet essai théorique, je défendrai l'hypothèse selon laquelle *l'institutionnalisation* doit être prise en compte dans la conception et l'analyse a priori de l'ingénierie didactique.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 29, p. 161 – 190.

Mots-clés. institutionnalisation, théorie des situations didactiques, ingénierie didactique, méthodes d'enseignement, enseignement des mathématiques

---

El principio teórico que propone la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) es considerar que no es posible transmitir el *saber*[1] de forma directa. Se propone en cambio definir un *saber* matemático mediante una *situación* que permita a los estudiantes aprender de forma indirecta, produciendo un mayor sentido, un mayor grado de conexión entre el *saber* y el *conocimiento* producido en la *situación*.

Para producir esas *situaciones,* Brousseau (1998) desarrolló la Ingeniería Didáctica (ID) como una herramienta para producir una génesis artificial del *saber*. El *saber* tiene un componente cognitivo que se prevé producir en una *situación adidáctica,* cuando el sujeto interactúa con un *milieu*[2] material, que durante la *situación* deberá transformarse en un *milieu* intelectual, para alcanzar la solución óptima en la *situación*, y un componente sociocultural que se prevé producir en una *situación didáctica*, cuando el sujeto interactúa con un *milieu* intelectual en el que se encuentra con métodos, herramientas y formas de lenguaje que pertenecen a la cultura fuera de clase, y los incorpora a sus maneras de actuar, reflexionar y comunicar.

El elemento determinante en el sentido que le da el estudiante al *saber*, en relación con su producción de conocimientos en la *situación*, es la posibilidad de *validación* (Margolinas, 1992). En los momentos de *validación* «le caractère public du travail de l'élève l'oblige à établir et à maintenir une relation avec la question, et donc avec le problème et le savoir» [el carácter público del trabajo del alumno le obliga a establecer y mantener una relación con la pregunta, y por tanto con el problema y el conocimiento] (Margolinas, 1992, p. 129). La fase de *validación* hace parte de una fase de conclusión durante la cual el estudiante accede a información sobre la validez de su respuesta, pero debe ser capaz de decidir por sí mismo sobre la validez de esta, según Margolinas (1992) «La phase de validation est donc la modalité adidactique de la phase de conclusion» [La fase de validación es, por tanto, la modalidad adidáctica de la fase de conclusión] (p. 129).

Para que una fase de conclusión se convierte en una fase de *validación* es necesario que se produzcan *criterios de validez*. Los *criterios de validez* son *conocimientos* producidos por los estudiantes, en la *situación adidáctica*, que se usan para validar cuando hay un retiro total o parcial de un *milieu* material (Margolinas, 1992), es decir, cuando el *milieu* material se retira de la *situación*, deben existir esos *criterios*

---

[1] Saber y conocimiento tienen distinciones diferentes en el marco de la TSD. Remito al lector a (Margolinas, 2014) para ampliar esta observación.
[2] Para ampliar la idea de *milieu* en el marco de la TSD remito al lector a (Margolinas, 1995).

de validez que posibilitarán las conexiones entre el *saber* y *conocimiento*, es entonces, en la transformación de un *milieu* material en *milieu* de otro carácter, de un carácter intelectual, que se deben producir las deducciones necesarias para la descontextualización del *conocimiento*.

En las ID se describen con detalle los momentos de construcción del *conocimiento* en las *situaciones adidácticas*, pero no suelen describirse los momentos en los que se produce esa descontextualización del *conocimiento* al *saber*. Es decir, se describe su componente adidáctico en el que se produce la génesis artificial del *conocimiento*, pero no se describe su componente didáctico, no se describe la *institucionalización*. Este desequilibrio entre el componente adidáctico y didáctico del *saber*, es fruto de una visión teórica que priorizó el desarrollo de *situaciones adidácticas* (Artigue, 2011).

Esto se traduce en un problema para los profesores que pretenden implementar una ID en relación con el sentido como conexión entre el *saber* y el *conocimiento*: el profesor que implementa la ingeniería puede (y de hecho sucede) terminar presentando un *saber* sin sentido para sus estudiantes. El problema termina siendo la ruptura entre el *conocimiento* y el *saber* cuando aquello que se institucionaliza no se conecta con la génesis artificial provocada en la *situación adidáctica.*

El concepto de *institucionalización* apareció de manera tardía en la TSD como un fenómeno observado en la implementación de las ingenierías diseñadas (Brousseau, 1988) y fue teorizado solo como un elemento de análisis a posteriori, no considerado en el diseño de las ingenierías. Aunque después de haber sido teorizado, el término *institucionalización* comenzó a ser utilizado en la descripción de las ingenierías, continuó considerándose como un «factor externo», no susceptible de ser analizado a priori y por lo tanto mantenido al margen de las ingenierías como algo por fuera del control epistemológico de las *situaciones*.

Propongo la hipótesis de que la *institucionalización* necesita ser, no solo reconocida como fenómeno observable o definida a nivel teórico, sino que debe ser considerada en el diseño y el análisis a priori de las ID lo que favorecerá la conexión entre el *conocimiento* producido por los estudiantes y el *saber* que se desea enseñar.

Para defender esta hipótesis, presentaré un estado del arte del concepto *institucionalización* en la TSD tomando como puntos de referencia los aportes de autores que han contribuido a su evolución. Describiré la *institucionalización* desde cuatro concepciones diferentes: La *institucionalización* desde la concepción de Brousseau (en el marco de la ID), la *institucionalización* desde la concepción de Perrin-Glorian, la *institucionalización* desde la concepción de Margolinas, y la *institucionalización* desde la concepción de Allard (en el marco de las clases «ordinarias»[3]); luego, tomando como referencia estas concepciones, describiré la complejidad del proceso de *institucionalización* para el profesor; posteriormente discutiré la necesidad de describir a priori lo que he llamado el componente *didáctico* de la ID; por último presentaré un ejemplo de cómo se podría considerar el proceso de *institucionalización* en el análisis a priori de una ID, basado, no solo en el estado del arte que se presentará en el apartado inicial de este artículo, sino además, en la reflexión de otras ideas teóricas.

1. La *institucionalización* desde la concepción de Brousseau

1.1. La *institucionalización* en la TSD

Para la TSD el aprendizaje no es un proceso de transferencia simple, ni un proceso lineal y continuo. Brousseau (1998) propone el aprendizaje como un proceso doble: de adaptación (asimilación y acomodación) a un *milieu* que es productor de contradicciones, de dificultades, desequilibrios y que permite la construcción de *conocimiento* y, de aculturación: adaptación a un *saber* cultural, por la entrada en las prácticas de una institución (Margolinas *et al.*, 2011; Mangiante-Orsola *et al.*, 2018; Houle, 2016).

Brousseau reconoce la importancia de aceptar el aprendizaje por aculturación en la TSD mucho tiempo después de haber presentado los postulados teóricos iniciales de la teoría. Reconoce esto al admitir que sólo la intervención didáctica del profesor permite discutir en un espacio común los *conocimientos* que el estudiante construye en las *situaciones adidácticas* con el fin de acercar estos al *saber* a través de la *institucionalización*. La *institucionalización* fue también reconocida tiempo después dentro de la TSD, considerada inicialmente como un tipo de *situación* (Brousseau, 1988; Laparra & Margolinas, 2008), y propuesta solo al reconocer que la enseñanza no podría reducirse solamente a la organización del aprendizaje (Brousseau, 1988).

1.2. La *institucionalización* como *situación*

Para Brousseau la *institucionalización* de los *conocimientos* es una *situación* en la que el profesor reconoce como válidos y aceptados por la sociedad los *conocimientos* que los alumnos han elaborado en el transcurso o como conclusión de una *situación* o serie de *situaciones adidácticas*; una *situación* en la que, al nivel de la clase, se produce el acto por el que un *conocimiento* se convierte en un *saber*. La *institucionalización* modifica las reglas de utilización del *conocimiento* y le da otro estatus, el estatus de *saber* que ya no pertenece exclusivamente a la clase, que puede

---

[3] Comparto la postura de Margolinas sobre el interés que se despertó entre los investigadores después de los años 90 sobre el estudio de las clases «ordinarias" (Margolinas, 2003, p. 2).

ser utilizado fuera de esta (Brousseau, 1984, 1988, 1998; Brousseau *et al.*, 2014). El *conocimiento* debe ser entonces capaz de adquirir una función de *saber* matemático en el curso de la *situación de institucionalización* (Brousseau, 1998).

La *institucionalización* no puede aparecer sin que previamente se hayan desarrollado otras *situaciones*, las cosas que las *situaciones de acción* hacen descubrir, *las situaciones de formulación* hacen expresar, *las situaciones de validación* hacen demostrar, y otras *situaciones* hacen tomar como referencia e *institucionalizar* (Brousseau *et al.*, 2014). La *situación de institucionalización* está entonces, al finalizar una cadena evolutiva de otras *situaciones* que permiten su aparición.

El objetivo de la *situación de institucionalización* es que los estudiantes sepan que disponen de un repertorio común de objetos y términos (*saber*), que pueden entenderse mejor en los intercambios con los demás si utilizan las definiciones convencionales (Brousseau *et al.*, 2014) que no están a su disposición en una *situación adidáctica* y que solo el profesor puede promover.

1.3. El rol del profesor

Para Brousseau (1988) el trabajo del profesor, en cuanto a su relación con el *saber*, es diferente al trabajo del matemático. Mientras que el matemático debe presentar el *saber* de forma comunicable, descontextualizada, despersonalizada y destemporalizada, el profesor debe hacer inicialmente un trabajo inverso, una recontextualización y repersonalización de los saberes: busca situaciones que den sentido a los conocimientos a enseñar (Brousseau, 1988), que culminará, una vez los estudiantes hayan producido el *conocimiento* esperado en las *situaciones*, con la transformación de ese *conocimiento* en *saber*.

El rol del profesor en la *situación de institucionalización* es entonces garantizar, una vez ha logrado producir una recontextualización y repersonalización del *saber* para diseñar *situaciones* en las que se produzcan *conocimientos* con sentido, que los estudiantes descontextualicen y despersonalicen el *conocimiento* y así dar a los estudiantes los *milieux* para encontrar en esta historia particular que les ha hecho vivir, lo que es el saber cultural y comunicable que queríamos enseñarles (Brousseau, 1986, p. 38).

Para describir comportamientos que se esperan del profesor en la *institucionalización*, Brousseau *et al.* (2014) identifican una serie de actuaciones que el profesor debe evitar en la gestión de las *situaciones de institucionalización:* institucionalizar prematuramente (p. 134), institucionalizar de forma excesivamente escrupulosa (p. 134), limitar el vocabulario o usar inadecuadamente analogías y metáforas (p. 16); además, identifica acciones que se esperan de él: ocuparse simultáneamente del conocimiento de cada estudiante y del conocimiento de la clase

(p. 134), planificar sus acciones (p. 204), conocer el *saber* (p. 142) o limitar sus explicaciones (p. 32).

Según Brousseau *et al.* (2014), el profesor debe institucionalizar métodos usados por los estudiantes, pero también el lenguaje que han usado en la clase para resolver los problemas en las *situaciones de acción y formulación*, dándole un estatus diferente a esos términos que les han permitido entenderse en el espacio de la clase, pero que seguramente les impediría comunicarse fuera de esta. La *institucionalización* se concibe como parte final de una serie de *situaciones* en la que el profesor aprueba el método eficaz de manera que esté disponible para resolver otros problemas y presenta el lenguaje canónico que permita a los estudiantes comunicarse con la comunidad matemática fuera de la clase.

1.4. Discusión

Para la TSD, una *situación* es «un modèle d'interaction d'un sujet avec un certain *milieu* qui détermine une connaissance donnée comme moyen, pour le sujet, d'atteindre ou de conserver dans ce *milieu* un état favorable» [un modelo de interacción de un sujeto con un determinado *milieu* que determina un determinado conocimiento como *milieu* para que el sujeto alcance o mantenga un estado favorable en ese *milieu*] (Brousseau, 2012, p. 106). Una *situación* es entonces el modelo de un *conocimiento* determinado cuando ese *conocimiento* se experimenta como la solución óptima a esa *situación* en la interacción de un sujeto con un *milieu*.

He podido reconocer en algunos documentos en los que Brousseau teoriza sobre la *situación de institucionalización* (Brousseau, 1984, 1988, 1998, 2014) que no se explicita una descripción de las *situaciones de institucionalización* como modelos de *conocimientos*; la *institucionalización* aparece más bien como un momento en el que, al nivel de la clase, se produce el acto por el que un *conocimiento* se convierte en un *saber*. Al contrario de las situaciones de *acción, y formulación*, en las que se describen las interacciones entre el sujeto y el *milieu*, en las *situaciones de institucionalización*, solo se describen pasajes en los que el profesor aprueba una forma y presenta un lenguaje.

Considero que la *institucionalización* encierra una serie de dificultades y retos para el profesor que van más allá de avalar un método eficaz o presentar un lenguaje canónico. Las *situaciones de institucionalización* parecen emerger como un momento que el profesor sabrá sobrellevar. Aunque Brousseau reconoce comportamientos que el profesor deberá evitar, parece dar por sentado que sabrá de antemano cómo gestionar adecuadamente las pretensiones propuestas.

2. La *institucionalización* desde la concepción de Perrin-Glorian

No pasaría mucho tiempo para que el concepto teórico se reinterpretara. Perrin-Glorian (1993) descubrió «un divorce net entre les situations d'action visant à donner du sens aux notions enseignées et l'institutionnalisation qui est faite ensuite par le maître» [un claro divorcio entre las situaciones de acción destinadas a dar sentido a los conceptos enseñados y la institucionalización que posteriormente lleva a cabo el profesor] (p. 65). Reconoció que, en el transcurso de la acción, no se ven muchas diferencias en los procedimientos que ponen en marcha los estudiantes, en cambio, la diferencia se acentúa cuando se trata de reutilizar los *conocimientos* producidos, se pierde la conexión entre el objeto matemático y la *situación de acción* que le daba sentido.

2.1. La *institucionalización* como fase

Para contrarrestar las diferencias entre los estudiantes cuando le dan sentido al *saber*, Perrin-Glorian (1993) propone que la *institucionalización* se da a lo largo del proceso de enseñanza: «Ceci nous amène à considérer aussi l'institutionnalisation comme un processus qui se déroule tout au long de l'enseignement, un moteur de l'avancement du contrat didactique et non comme une phase en fin de processus où le maître fait son cours» [Esto nos lleva a considerar la institucionalización como un proceso que tiene lugar a lo largo del proceso de enseñanza, un motor para el avance del contrato didáctico y no como una fase al final del proceso en la que el profesor imparte la lección] (Perrin-Glorian, 1993, p. 82).

Destaco en su consideración (Perrin-Glorian, 1993), al menos dos evoluciones en la concepción de la *institucionalización:* ya no se concibe solo como un momento final de exposición del profesor posterior a la acción de los estudiantes, en cambio se concibe como un proceso que puede tener diferentes momentos que den sentido a la acción; y el descubrimiento de la relación estrecha entre la *institucionalización* y la *devolución*, ambos procesos vinculados al profesor.

Otro aporte importante de Perrin-Glorian (1993) a la concepción de la *institucionalización* en la TSD es el reconocimiento de otro tipo de *situaciones*, las *situaciones de recuerdo*, que favorecen los procesos de despersonalización y descontextualización, específicamente porque permiten adaptar las institucionalizaciones locales a las concepciones de cada estudiante y vincular las nuevas nociones a los problemas que han permitido darles sentido, estas *situaciones* desempeñan una función determinante en lo que Brousseau reconoce como la memoria de la clase (Perrin-Glorian, 1993).

Perrin-Glorian (1993) distingue dos momentos y dos funciones para las *situaciones de recuerdo*: de tipo 1 «En essayant de dire collectivement ce qui s'est passé, quel problème a été traité, les élèves sont amenés à repenser le problème, les procédures de traitement envisagées dans la classe» [Al intentar decir colectivamente qué ha pasado, qué problema se ha tratado, se lleva a los alumnos a replantearse el problema, los procedimientos de tratamiento previstos en la clase] (p. 85); y de tipo 2 «Chacun des problèmes traités est alors intégré dans un processus, il est intériorisé avec un sens nouveau» [Cada uno de los problemas tratados se integra en un proceso, se interioriza con un nuevo significado] (p. 85).

En las *situaciones de recuerdo* de tipo 1 se favorece una despersonalización de las soluciones institucionalizadas que son retomadas y presentadas por estudiantes distintos a los que las encontraron. En las *situaciones de recuerdo* de tipo 2 se favorece la descontextualización al integrar los *conocimientos* construidos en las reformulaciones colectivas. Estos dos momentos de las *situaciones de recuerdo*, las sitúan evidentemente en el nivel de las *situaciones didácticas*. El rol del profesor parece problematizarse.

2.2. El rol del profesor

Al reconocer que el proceso de *institucionalización* comienza desde el principio de la *devolución*, Perrin-Glorian (1993) problematiza el rol del profesor. Para ella es evidente que el profesor se encuentra más que nunca en una paradoja propuesta por (Brousseau, 1988): el profesor no puede hablar de los nuevos *conocimientos*, pero sí puede decir que se va a aprender algo nuevo e ilustrar a los alumnos sobre los antiguos *conocimientos* (Perrin-Glorian, 1993, p. 83).

Aunque el profesor tiende a institucionalizar a lo largo de todo el proceso, no puede develar su proyecto por completo, pues de lo contrario fracasará. Si el profesor espera gestionar adecuadamente el proceso de *institucionalización*, garantizando que se realice en buenas condiciones y con sentido para los estudiantes, no puede ir directamente al grano, sino que debe tenerlo siempre presente para crear, desde el principio y a lo largo de todo el proceso de enseñanza, las condiciones que le permitan negociar el proceso (Perrin-Glorian, 1993), el margen de maniobra para el profesor es limitado (Perrin-Glorian, 1993, p. 83).

Ante un margen de maniobra limitado, Perrin-Glorian propone que para que el profesor pueda controlar su proyecto y así gestionar adecuadamente el proceso de *institucionalización*, este debe darse gradualmente con numerosos ciclos de contextualización-descontextualización, lo que la lleva a distinguir tres etapas no correspondidas cronológicamente: 1. Institucionalizaciones locales en uno o varios contextos, realizadas justo después de la resolución de un problema 2. Reutilización en otro contexto de lo producido en un contexto dado: *institucionalización* de un vínculo entre diferentes contextos, que permiten anclar lo viejo en lo nuevo 3. Un texto construido por el profesor para ser memorizado por los estudiantes, dando el estatus de objeto matemático a algunas de las nociones encontradas, que se refieren a la aparición del concepto (Perrin-Glorian, 1993).

Al referirse al papel del profesor en las *situaciones de recuerdo*, Perrin-Glorian (1993) reconoce que la función que él desempeña es muy importante y describe sus comportamientos esperados en la gestión de estas *situaciones* especialmente en relación con: dar la palabra a los alumnos que no hayan encontrado una solución o que no hayan conseguido comprobar que siguen y se apropian de los métodos utilizados (favoreciendo homogeneización y despersonalización) o dar la palabra a los «líderes» (favoreciendo la descontextualización y la formulación) (Perrin-Glorian, 1993, p. 87).

2.3. Discusión

Aunque la *institucionalización* se reinterpreta como un proceso, un análisis más profundo permite observar que se propone como una o varias fases locales que se producen en espacios decididos por el profesor que institucionaliza lo que es nuevo para los estudiantes: definiciones, teoremas y demostraciones considerando las formulaciones propuestas en etapas anteriores. Considero necesario interpretar esta concepción de la *institucionalización* más que como proceso, como una acumulación de fases propuestas por el profesor cuando los estudiantes solucionan un problema.

Perrin-Glorian (1993) reconoce, a diferencia de Brousseau (1998), un margen de maniobra muy escaso del profesor cuando se trata de reutilizar los *conocimientos* producidos en las fases de *acción* y no perder la conexión entre el objeto matemático y la *situación de acción* que le daba sentido. Para contrarrestar esto propone numerosos ciclos de contextualización-descontextualización que traduce en la consideración de etapas locales de *institucionalización*. Creo que este avance es un indicador de evolución en la concepción de la *institucionalización*.

Reconoce también que el margen de maniobra para gestionar las necesidades que provocan las *situaciones de recuerdo* dependerá de las habilidades que el profesor tiene para evaluar lo que los estudiantes han alcanzado en relación con el problema. Me cuestiono sobre: ¿qué elementos tiene el profesor, a priori, a su disposición para categorizar esa evaluación, que le permitan saber cuándo y cómo proceder en el sentido de la despersonalización o de la descontextualización en fases de trabajo colectivo? ¿cómo el profesor gestionará adecuadamente acciones que permitan evocar una memoria en la clase? ¿cómo tomará decisiones oportunas sobre lo que debe ser olvidado y debe ser recordado por la clase?

3. La *institucionalización* desde la concepción de Margolinas

En el curso de la investigación sobre este fenómeno he presentado una evolución de *situación* a fase, ahora presentaré una evolución de fase a proceso (Margolinas, 1992, 1993).

3.1. La *institucionalización* como proceso

Para Margolinas la *institucionalización* es un proceso: el profesor, además de las fases específicas de la *institucionalización*, tiene un proyecto que le permite llevar a cabo las fases de la *institucionalización* sin ruptura de sentido (Margolinas, 1992). El profesor tiene un proyecto más allá de las fases específicas, lo que en términos de Perrin-Glorian se ha descrito como institucionalizaciones locales, está a cargo de descontextualizar, despersonalizar y destemporalizar el *conocimiento* construido por los estudiantes, haciéndolo evolucionar gradualmente, sin romper el sentido que este tiene para ellos (Laparra & Margolinas, 2010, p. 146).

El proceso de *institucionalización* no puede reducirse a una fase del trabajo de clase en la que el profesor expone el *saber*. Margolinas (1992) reconoce además que el proceso requiere la participación de los estudiantes: «[le] processus d'institutionnalisation, symétrique du processus de dévolution, ne dépend pas uniquement de la volonté du maître, mais aussi de celle de l'élève» [[el] proceso de institucionalización, simétrico al proceso de devolución, no depende únicamente de la voluntad del profesor, sino también de la del alumno] (Margolinas, 1992, p. 139), y hace énfasis en que una participación de estos en el proyecto, permitirá al profesor institucionalizar los *conocimientos*: «Ils participent activement au processus qui permettra en fin au maître d'institutionnaliser la connaissance acquise» [participan activamente en el proceso que, en última instancia, permitirá al profesor institucionalizar los conocimientos adquiridos] (Margolinas, 1992, p. 139).

3.2. El rol del profesor

En el proceso de *institucionalización* el profesor tendrá que establecer relaciones entre: por una parte, el *conocimiento*, que logra el equilibrio entre el sujeto y el *milieu*, que vive en una *situación*, es personalizado, contextualizado y temporalizado y por otra parte el *saber* cultural, producto cultural de la actividad científica, que vive en una institución, es despersonalizado, descontextualizado, destemporalizado (Margolinas, 2014).

Margolinas (1992) reconoce que una de las disfunciones de la *institucionalización* es el *efecto Jourdain* que se produce cuando el profesor decide que el estudiante comprendió, pero en realidad no ha comprendido. Para Margolinas (1992) esta cuestión está ligada a las de la descontextualización y despersonalización del *conocimiento*, resultado del esfuerzo conjunto del profesor y del estudiante (Margolinas, 1992). Identifica como parte del proceso de *institucionalización* las fases de balance propuestas por (Douady, 1984) en las que los estudiantes acceden a la información sobre la validez de sus respuestas (Margolinas, 1992, p. 139).

Identifica además algunas actuaciones que el profesor debe promover para garantizar una gestión adecuada del proceso de *institucionalización*: el abandono gradual de la referencia al *milieu* material para validar, en favor de la utilización de *criterios de validez,* proponiendo una reestructuración de un método que relaciona el *milieu*, con las posiciones del estudiante, en el proceso evolutivo de una situación adidáctica (Margolinas, 1995); la formulación de *conocimientos* por parte de los estudiantes en una *situación de formulación* o en una fase de balance y el control de estas fases de balance por parte del profesor, como una posibilidad en la *institucionalización* (Margolinas, 1992).

3.3. Discusión

A diferencia de las dos concepciones precedentes, Margolinas (1992) reconoce que la *institucionalización* es un proceso que debe evolucionar gradualmente, reconociendo en las fases de balance una oportunidad para que el profesor pueda llevar a cabo un restablecimiento progresivo de la asimetría desde el punto de vista del *saber* a partir de una descontextualización progresiva de los *conocimientos* construidos usando las formulaciones de los estudiantes.

Estas fases de balance son una oportunidad para que el profesor pueda recuperar las formulaciones de los estudiantes en relación con sus producciones en su interacción con el *milieu*. Margolinas (1992) reconoce que el proceso de *institucionalización* requiere la participación de los estudiantes en la exposición de sus formulaciones que le permita al profesor controlar adecuadamente el proceso. El proceso no depende solo de la voluntad del profesor.

Aunque reconozco en estos dos aspectos: la consolidación de la *institucionalización* como proceso gradual y la necesidad de la exposición de la formulación de los estudiantes en el proceso, una evolución en la concepción de la *institucionalización;* identifico algunas cuestiones que no se han discutido en la relación a las formas de actuación del profesor en la gestión de este proceso gradual: ¿cómo el profesor gestionaría adecuadamente las *formulaciones* propuestas por los estudiantes: los *conocimientos* que cambiarán de estatus, los términos usados que deberán convertirse en términos canónicos y los métodos que deberán ser reconocidos fuera del aula? ¿de qué naturaleza deben ser las intervenciones del profesor para promover el cambio del estatus del *conocimiento* al *saber* en un proceso de transformación gradual?

4. La *institucionalización* desde la concepción de Allard

Otros autores han desarrollado la concepción de *institucionalización* como proceso (Allard, 2015), problematizando con mucha más fuerza el rol del profesor, sus limitaciones, sus oportunidades; contemplando otras aristas, por ejemplo, el papel del lenguaje.

4.1. La *institucionalización* como proceso

Al igual que Margolinas (1992), desde su concepción la *institucionalización* está asociada a un proceso de descontextualización y despersonalización del *conocimiento*. Se refiere a la descontextualización, presentándola como una faceta del proceso de *institucionalización* en la que el profesor extrae de las acciones de los alumnos las que pueden aportar al proceso, también señala la importancia del profesor en esta fase, pero recalca la necesidad de los intercambios colectivos. La importancia de la descontextualización en el proceso de *institucionalización* es entonces dar un cambio de estatus al *conocimiento* privado e incluso al público, que permanece contextualizado, para que no desaparezca. Se refiere también a la despersonalización como el proceso que permite alejar el *conocimiento* del sujeto. En este sentido la *institucionalización* sería una forma de ir más allá del caso específico del aprendizaje en contexto para ofrecer un *saber* de referencia más universal, un *saber* transferible de una clase a otra, no solo apegado a un contexto y a una persona (Allard, 2015; Allard & Masselot, 2016).

4.2. El rol del profesor

Para Allard (2015), el profesor debe controlar en el proceso de *institucionalización* algunos comportamientos: tendrá que ser lo suficientemente sutil para que el *saber* no se adjunte a su persona, *saber* del que no es creador. Se cuestiona así sobre el lugar de la personificación del *conocimiento* por parte del profesor. Algunas *institucionalizaciones* orales que muchas veces se producen en un diálogo entre profesor y estudiantes, podrían estar personificadas, apegadas a la persona del profesor. El estudiante puede creer que está aprendiendo una forma o un *saber* que pertenece al profesor (Allard, 2015).

A veces, los profesores tienen el llamado *conocimiento* naturalizado, luego pueden evocar un *saber* fuera del alcance del aprendizaje de los estudiantes o ir tan rápido en las exposiciones del *saber* que su discurso es inapropiado. El profesor debe evitar ir tan rápido en las exposiciones del *saber* de manera que su discurso no resulte inapropiado e incomprensible. Aunque Brousseau (1998) ya se había referido a esto, Allard (2015) centra su mirada en la dificultad del profesor para repensar en contexto, en términos del lenguaje, por ejemplo, en lo que puede llevar al profesor a utilizar palabras, definiciones o formalismos que no se corresponden con lo que los alumnos son capaces de escuchar con respecto a sus aprendizajes previos. Esta tarea no es nada fácil ya que el profesor debe articular el lenguaje de los estudiantes con el lenguaje formal y esperado, de forma que el *conocimiento* sea descontextualizado (Allard & Masselot, 2016).

También reconoce algunas estrategias que el profesor puede usar para evitar estos comportamientos. Al respecto de la personificación del *saber* que puede tener un profesor al momento de *institucionalizar*, para Allard (2015) la redacción de un texto permite la desvinculación de la acción de su autor (y conduce a la descontextualización y despersonalización) y el acceso diferido para los lectores.

Se deben registrar los *conocimientos* producidos por los estudiantes para que puedan ser recuperados en el proceso de *institucionalización*. Allard reconoce que el uso de esta *memoria didáctica* (Brousseau & Centeno, 1991) tiene efectos beneficiosos al removilizar las acciones y los caminos del pensamiento relacionados con un problema, pero recalca la necesidad de ser cuidadoso en la forma como se llevan a cabo las recontextualizaciones de forma que no se 'mate el problema'.

4.3. Discusión

A pesar de que para Allard la concepción de la *institucionalización* es considerada en el mismo sentido que el de Margolinas, propongo que su propuesta está enriquecida al problematizar con mayor fuerza otras condiciones, relacionadas con el profesor, que se movilizan en el proceso: la necesidad de promover intercambios colectivos entre el profesor y la clase, que favorezcan la descontextualización del *conocimiento*; el uso adecuado del lenguaje que debe aparecer en la articulación entre el lenguaje de los estudiantes y el lenguaje formal cuando se descontextualiza y despersonaliza el *conocimiento*; la producción de textos que permitan la despersonalización del *saber*. Esta es una evolución del concepto teórico en relación con el rol del profesor en el proceso.

5. El rol del profesor en el proceso de *institucionalización*

Concuerdo con Coulange (2012) en reconocer que «Il est intéressant de constater que ces élargissements de la notion d'institutionnalisation vont de pair avec une prise en compte croissante du rôle du professeur dans la mise en œuvre d'ingénieries didactiques, voire dans l'ordinaire de son enseignement des mathématiques» [Es interesante observar que estas ampliaciones de la noción de institucionalización van acompañadas de un creciente reconocimiento del papel del profesor en la aplicación de la ingeniería didáctica, e incluso en la enseñanza ordinaria de las matemáticas] (p. 97), esta ampliación de la concepción de la *institucionalización* ha permitido por ejemplo, describir las limitaciones que encuentra el profesor durante el proceso.

5.1. Los aportes del «grupo de Bordeaux»

Aunque Margolinas (1995) ya había descrito un modelo de estructuración del *milieu*, (Bloch & Gibel, 2011) proponen un modelo de estructuración, derivado originalmente del modelo de Margolinas, pero modificado para tener en cuenta el papel del profesor en *situaciones adidácticas*. En este estudio se describe un análisis a priori de la *situación* del copo de nieve de Von Koch, en el que además se describe un método para tener en cuenta las declaraciones de los estudiantes y utilizarlas en una fase final de *institucionalización*, esto a partir de la descripción a priori de los diferentes estados del *milieu* y cuyos resultados se analizan con la posterior confrontación de dichos estados, con los resultados obtenidos tras la implementación.

Otros trabajos han seguido esta misma idea de estructuración del *milieu*. Por ejemplo (Akrouti, 2022) al cuestionarse sobre cómo mejorar la comprensión de la integral por parte de los estudiantes en clases ordinarias (fuera de un contexto ingenieril), logra demostrar como las intervenciones del profesor deben enriquecer el trabajo de los estudiantes y su evolución en el *milieu* durante las fases de *acción*, *formulación y validación*, como se hace necesario el control epistemológico de la *situación* por parte del profesor, a partir de las descripciones de acciones generales que podría tener el profesor para posibilitar dicha evolución. En esta propuesta, la *institucionalización* aparece nuevamente como una fase final a cargo del profesor, en la que él ha reconocido que el *repertorio didáctico* de la clase, el conjunto de *milieux* que el profesor puede esperar de sus estudiantes, es identificable por la parte de su *repertorio matemático* útil para resolver la *situación* (Akrouti, 2022).

Bloch y Gibel (2022) en un artículo en el que presentan un dispositivo que tiene como objetivo ayudar a los estudiantes de primer año a superar sus dificultades y adaptarse a las matemáticas de este nivel, involucrándolos en la investigación de problemas matemáticos, utilizan el modelo de restructuración del *milieu* para analizar a priori, el funcionamiento de las *situaciones* y las formas generales de proceder del profesor para producir su *institucionalización.*

Estas propuestas teóricas demuestran un esfuerzo por describir a priori los momentos en los que se produce la descontextualización del *conocimiento* al *saber*, es decir, por describir el componente didáctico de la *situación*, partiendo del análisis de la evolución del *milieu*, a través de la idea de la estructuración del *milieu* y entendiendo la *institucionalización* como una fase puntual, posterior a una fase de *validación*.

5.2. Diferenciar acciones de *devolución* de acciones de *institucionalización* y la importancia del lenguaje

Aunque ya he presentado en los apartados anteriores comportamientos esperados por el profesor y comportamientos que el profesor debe evitar, me parece necesario presentar dos discusiones que podrían promover nuevas ideas en el desarrollo del concepto: la dificultad reconocida de y la importancia de problematizar el adecuado uso del lenguaje.

Una de las dificultades más detallada en la literatura en estudios sobre la *institucionalización*, es la necesidad de la diferenciación de los actos del profesor que corresponden a la *institucionalización* de los que corresponden a la *devolución* (Bloch, 2009; Butlen *et al.*, 2012; Coulange, 2012; Laparra & Margolinas, 2010;

Mangiante-Orsola *et al.*, 2018; Margolinas, 1993, 2014; Margolinas *et al.*, 2011; Sarrazy, 2007). Aunque se reconoce esta dificultad, no se reconoce en los artículos otra estrategia para superarla, que no sea advertir al profesor de esta situación, prevenirlo, solicitarle estar atento sobre la gestión simultánea de ambos procesos.

Al respecto del uso adecuado del lenguaje por parte del profesor (Allard & Masselot, 2016; Mangiante-Orsola *et al.*, 2018; Pilet *et al.*, 2019) señalan su interferencia en una adecuada gestión del proceso reconociendo que es una variable que se debe reconocer y describir en función de propiciar un adecuado cambio de estatus de los términos usados en la solución de un problema.

Mangiante-Orsola *et al.* (2018) proponen por ejemplo, que aparezca el vocabulario específico del *saber* enriquecido con el vocabulario usado cuando se manipulaba el *milieu*. Señalan también que, en las *situaciones* estudiadas, el uso del lenguaje aparece como una relación entre las expresiones orales y escritas, por lo tanto, proponen recuperar en el tablero las expresiones verbales como una práctica que le permita al profesor la estructuración del pensamiento colectivo de los estudiantes.

El creciente reconocimiento del rol del profesor en la *institucionalización,* producto de la evolución del concepto, me lleva a proponer algunas hipótesis basadas en las interpretaciones discutidas en este artículo.

6. Problematización

6.1. La *institucionalización* es una *situación*, fase o proceso problemático para el profesor

La *institucionalización* como *situación* (Brousseau, 1988), como fase (Perrin-Glorian, 1993) o como proceso (Margolinas, 1993; Allard, 2015) es problemática. Reconozco que en ninguna de las concepciones presentadas en este documento debe darse por sentado que el profesor sabe gestionar adecuadamente las dificultades reconocidas cuando se gestiona la *institucionalización* del *saber*.

Las estrategias propuestas por autores que han continuado el estudio de la *institucionalización*, siguen estando abiertas a la discusión: cómo lograr una disociación adecuada de los procesos de *devolución* e *institucionalización*, cómo planificar productivamente las fases de balance, cómo garantizar cuál es el momento justo para discutir sobre el *saber*, cómo aprovechar eficientemente los *conocimientos* de los estudiantes, cómo gestionar adecuadamente el uso del lenguaje cuando se discute en una fase de trabajo colectivo, cómo intervenir adecuadamente para promover un avance gradual en el cambio del estado del *conocimiento* al *saber*.

6.2. El momento de formulación pública que denomino «puesta en común» podría convertirse en un momento de construcción compartida del *saber*

Aunque Margolinas (1992) reconoce que el proceso de *institucionalización* requiere de la participación de los estudiantes en la exposición de sus formulaciones, propongo que los espacios de trabajo colaborativo con la clase, en lo que llamo espacios de «puesta en común», podrían convertirse en espacios de construcción colectiva entre los estudiantes y el profesor, en los que el profesor recupere los *conocimientos* producidos por los estudiantes en las interacciones con el *milieu*.

En los espacios de «puesta en común» el profesor debería:

- reformular lo que dicen los estudiantes sobre su proceso de solución para proponerlo como un acuerdo social sobre una estrategia válida,
- solicitar a los estudiantes que identifiquen un *conocimiento* como necesario para resolver un problema,
- propiciar un desarrollo de la conexión entre el *conocimiento* y el *saber* para dar mayor sentido a la construcción colectiva del *saber*,
- establecer acuerdos colectivos a partir de las construcciones del *conocimiento* producido por los estudiantes,
- recuperar y proponer métodos para solucionar problemas.

Si consideramos esto, el proceso de *institucionalización* debería ser un proceso de trabajo compartido entre los estudiantes y el profesor, cuyo objetivo debería ser lo que he reconocido como «la construcción compartida del *saber*». Aunque reconozco que el profesor es el único en la clase que puede avalar los *conocimientos* otorgándoles un nuevo estatus, el hecho de poner los *conocimientos* producidos en una discusión con la clase y someterlos a un consenso, podría producir un mayor sentido del *saber* en el estudiante.

6.3. Consideración del proceso de *institucionalización* en los análisis a priori de las ID

Propongo que la *institucionalización* necesita ser, no solo reconocida como fenómeno observable o definida a nivel teórico, sino considerada en el diseño y el análisis a priori de las ID. Concuerdo con (Bloch & Gibel, 2011) en que es posible anticipar teóricamente comportamientos esperados del profesor dentro de los análisis a priori, y sugiero que esto puede hacerse también en las ingenierías, previendo por ejemplo: la aparición de los momentos que he llamado «puestas en común» después de fases de interacción entre el estudiante y el *milieu*, las formulaciones propuestas por los estudiantes en estos momentos de trabajo compartido y las acciones que el profesor puede implementar para ir explicitando las relaciones entre el *conocimiento* de los estudiantes y el *saber*.

Propongo que si se esclarecen a priori este proceso, se podrá facilitar la gestión del profesor del proceso de *institucionalización* en una implementación porque le permitirá: estar preparado para articular el lenguaje que se prevé use la clase y el lenguaje canónico del *saber*, recuperar las intervenciones previstas de las que podría valerse para avanzar en una construcción compartida, diferenciar a priori los actos del profesor que corresponden a la *institucionalización* de los que corresponden a la *devolución*.

La planificación de «puestas en común» desde los análisis a priori de las ID, podría propiciar que el *saber* aparezca como resultado de acuerdos colectivos de la clase sobre los *conocimientos* personales de los estudiantes, sobre sus formas de enunciación o formulación y sobre la validez de esos *conocimientos* y formulaciones; y no solamente como la presentación del *saber* por el profesor que recupera acciones adecuadas del estudiante al final de una serie de *situaciones*. En conclusión, el control a priori de las acciones del profesor en las «puestas en común», podría aportar a la discusión sobre cómo ayudar al profesor a gestionar adecuadamente el proceso de *institucionalización,* y garantizar un mayor impacto de la ID en su conjunto sobre el aprendizaje a largo plazo de los estudiantes.

6.4. La importancia de problematizar el uso del lenguaje en el proceso de *institucionalización*

Concuerdo con Sensevy y Quilio (2002) en que una buena parte de las acciones del profesor en la relación didáctica están en concordancia con la actividad lingüística. Para dar cuenta de la problematización del uso del lenguaje usado por el profesor cuando gestiona el proceso de *institucionalización,* será necesario analizar las acciones del profesor en relación con su actividad lingüística.

Considero que el proceso de *institucionalización* consiste en la transformación de un *milieu* material en un *milieu* intelectual, que posibilita la producción de deducciones. En el proceso de comunicación entre el profesor y la clase en referencia a un *milieu* material, se construye de manera colectiva ese *milieu* intelectual en el que pueden surgir razonamientos matemáticos que constituirán el *saber*. En este sentido es necesario reflexionar sobre cómo el lenguaje que el profesor y los estudiantes usan cuando el *milieu* material se transforma en un *milieu* de carácter intelectual afecta el proceso de *institucionalización* del *saber* y una forma de estudiar ese uso del lenguaje podría ser el estudio de la actividad lingüística del profesor.

7. ¿Cómo entender la *institucionalización* en el análisis a priori de una ID?

7.1. Describiendo en el análisis los estados de evolución del *conocimiento* al *saber*

Asumiendo la *institucionalización* como un proceso gradual de construcción compartida entre el profesor y los estudiantes del *saber*, propongo que una forma de reconocer este proceso dentro de los análisis a priori de las ID, es describir en los análisis diferentes estados de evolución de los *conocimientos* producidos por los estudiantes cuando interactúan con el *milieu* material hasta la producción final del *saber* que debe ser aprendido.

Propongo que en la medida en que el cambio del estado del *conocimiento* al *saber* no sea inmediato y que se someta a un proceso de evolución, los *conocimientos* tendrán un mayor grado de conexiones con el *saber*, lo que se traduce en un mayor sentido por parte del sujeto del *saber* que se espera sea aprendido. Persiguiendo el objetivo de producir ese cambio de estado de una manera gradual y compartida, propongo que el profesor, para gestionar el cambio progresivo del *conocimiento* al *saber*, es decir el proceso de *institucionalización*, deberá garantizar que la clase transite por lo menos por cuatros estados en la evolución del *conocimiento* al *saber*: *conocimiento personal, conocimiento compartido, conocimiento compartido de referencia y saber.*

El *conocimiento* personal es contextualizado, personalizado porque el estudiante puede producir tantos tipos diferentes de *conocimiento* personal como formas de "actuar con" el *milieu* tenga, y temporalizado porque se produce en un momento preciso de la interacción del estudiante con el *milieu*. El *conocimiento* compartido contiene el *conocimiento* personal, pero incluye el *conocimiento* producido por la toma de conciencia de nuevas formas de "actuar con" y "ver" el *milieu* que la clase ha validado, la diferencia entre el *conocimiento* personal y el *conocimiento* compartido es que éste ha sido objeto de un momento de discusión con la clase en una «puesta en común», durante el cual se ha llegado a acuerdos sobre nuevas formas de ver el *milieu*. El *conocimiento* compartido de referencia es un *conocimiento* estructurado, con evidencia, tomado como objeto de referencia en relación con otros *saberes*, pero que podría no estar formulado con un lenguaje matemático que le permitierá ser reconocido como *saber*. El *saber* en cambio se formula en un lenguaje matemático convencional que sería reconocido y aceptado por la comunidad de matemáticos fuera de la institución de la clase.

7.2. Describiendo los elementos que faciliten la gestión adecuada del proceso de *institucionalización* por parte del profesor

Al sistematizar las ideas teóricas estudiadas para la construcción del estado del arte presentado en el apartado inicial de este artículo, pude reconocer que la evolución del *conocimiento* al *saber* se produce esencialmente por cinco elementos teóricos que intervienen en el proceso: las formas como los estudiantes «actúan con» y «ven» el *milieu*; las formas como los estudiantes enriquecen el lenguaje usado en sus formulaciones; la forma como el profesor y los estudiantes producen de una memoria compartida y codificada del *saber*; la forma como el profesor lleva a cabo acciones de introducción de formas de actuar con el *milieu* que el estudiante necesita y no puede aprender en una *situación adidáctica*; y las formas como el profesor «supervisa» ese proceso para garantizar la interacción adecuada del estudiante con el *milieu*. Describiré brevemente estos cinco elementos teóricos.

En el movimiento de re-despersonalización y re-descontextualización del *saber* (Brousseau, 1988), el profesor debe inicialmente proponer una *situación* en la que repersonaliza, recontextualiza y retemporaliza el *saber*, en la que el sujeto construye un *conocimiento* personal, contextualizado y temporalizado, para luego gestionar la re-despersonalización y re-descontextualización (que el matemático ha realizado inicialmente) del *saber*. Propongo que la eficacia de este movimiento requiere en gran medida, del diseño por parte del profesor, del *milieu* material que le permite al sujeto aprender el *saber*, sin embargo ese *milieu* también debe evolucionar (Margolinas, 1995). Propongo que en el análisis a priori del proceso de *institucionalización* se deben diseñar acciones que le permitan al profesor promover la evolución del *milieu* material a un *milieu* de carácter intelectual.

Los términos ordinarios que usa un sujeto para comunicar las acciones en la interacción con el *milieu material* deben también evolucionar a los términos canónicos del *saber* (Brousseau *et al.*, 2014). Para garantizar esta evolución el profesor podría: presentar directamente los términos del *saber*, sustituyendo los términos naturales usados por el sujeto o podría también llevar a cabo la gestión de un proceso de evolución de estos términos como un proceso de transformación de términos ordinarios a términos del *saber*. Propongo que al igual que los *conocimientos* necesitan un mayor grado de conexiones con el *saber* para producir un mayor sentido por parte del sujeto, los términos del *saber* necesitarán mayores grados de conexiones con los términos ordinarios usados por el sujeto en el proceso de evolución del *conocimiento* al *saber*. Propongo que en el análisis a priori del proceso de *institucionalización* se deben diseñar acciones que le permitan al profesor promover dicha evolución del lenguaje ordinario, usado por los estudiantes en la comunidad de la clase para comunicar sus acciones con el *milieu* material, a un lenguaje canónico y matemático que le permita a la institución de la clase comunicarse con las instituciones fuera de la clase.

Brousseau y Centeno (1991) identifican una relación estrecha entre el *saber* y la memoria del profesor: es la memoria del profesor la que le permite organizar los cambios de estado del *conocimiento*. El profesor tiene la necesidad de resumir ciertos *saberes* para que a partir de un momento dado el sujeto pueda utilizarlos de forma automática, el profesor debe entonces encontrar un equilibrio entre lo que se debe recordar y lo que ya no puede permitir al sujeto. Propongo que el objetivo del profesor en el proceso de construcción de una memoria compartida y codificada del *saber*, debe estar en función de la evolución de una *memoria de la acción personal* construida en la fase *adidáctica,* a una *memoria compartida y codificada del saber*, construida en las «puestas en común». Propongo que en el análisis a priori del proceso de *institucionalización* se deben diseñar acciones que le permitan al profesor gestionar un recuerdo y promover la producción de una memoria codificada del *saber*.

Perrin-Glorian y Hersant (2003) han mostrado cómo el profesor se apoya tanto en el *milieu* como en el *contrato* para hacer avanzar la investigación de los alumnos. El profesor siempre tendrá la autoridad para imponer formas hablar y actuar en la clase, por lo tanto, es quien está en posición de institucionalizar. Esa *institucionalización* puede basarse en su posición de autoridad y por lo tanto consistir en imponer un *contrato* didáctico pero el profesor también puede tratar de minimizar el rol del contrato en la constitución del *saber*. Propongo que es posible prever a priori dificultades de *devolución* o de *institucionalización* ligadas a la ausencia de lo que he llamado «*conocimientos* de infraestructura»[4] y diseñar acciones del profesor para superar esas dificultades, introduciendo de manera ostensiva progresiva, los «*conocimientos* de infraestructura» que posibilitarán el funcionamiento de las *situaciones adidácticas*, para hacer funcionar el *contrato* y posibilitar al sujeto la asimilación de las formas de hablar y actuar que les posibiliten la resolución de problemas, así como los posibles puntos en los que podrían presentarse diferentes *efectos didácticos*. Es decir, el profesor podría producir un trabajo de aculturación para poner en contacto las prácticas, las formas de hablar y actuar de la institución de clase con las prácticas de las instituciones fuera de la clase en la negociación del *contrato didáctico*.

Para que el proceso de evolución del *conocimiento* al *saber*, de garantías de una producción de los enriquecimientos esperados en el lenguaje, el *milieu* y la memoria, el profesor debe llevar a cabo otro tipo de acciones, que he llamado acciones de «supervisión» del proceso de *institucionalización.* Propongo que, a lo largo del proceso, el profesor deberá: posibilitar el tratamiento de los errores del sujeto en la interacción con el *milieu* (Brousseau *et al.*, 2014); evitar efectos y fenómenos

[4] Los *conocimientos* de infraestructura son las maneras de decodificar, de interpretar las *situaciones*, de movilizar conjuntos de acciones y formulaciones; que no pueden surgir de la interacción con un *milieu* material en una *situación adidáctica*; y requieren necesariamente pasar por la ostensión por parte del profesor. Estos *conocimientos* de infraestructura se asimilan no por acomodación, sino por aculturación, no por acomodación a un *milieu* material sino por acomodación a un *milieu* intelectual.

(Margolinas, 2005; Allard, 2015), coordinar adecuadamente los procesos de *devolución* e *institucionalización* (Butlen *et al.*, 2012; Laparra & Margolinas, 2008; Sarrazy, 2007; Sensevy & Quilio, 2002), ejercer una adecuada *vigilancia didáctica* en la producción de la conexión entre el *conocimiento* y el *saber* (Allard *et al.*, 2017; Charles-Pezard, 2010; Masselot *et al.*, 2012; Robert & Rogalski, 2002).

Formulo que la consideración y descripción de estos cinco elementos teóricos, que posibilitan la evolución de los *conocimientos* al *saber* en los análisis a priori de las ID, permitiría además responder a la necesidad de la diferenciación de los actos del profesor que corresponden a la *institucionalización* de los que corresponden a la *devolución*.

7.3. Un ejemplo de análisis en una ID sobre el teorema de Pitágoras

En el marco de un proyecto de producción de ID con el uso de tecnologías para el aprendizaje de la geometría, del grupo de investigación sobre Didáctica de las Matemáticas y Tecnologías, de la universidad Distrital Francisco José de Caldas, en Bogotá, Colombia, se ha construido una ID en la que se usa el software de geometría dinámica DGPad-Colombia con el objetivo de que los estudiantes reconozcan las relaciones geométricas entre las áreas de los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo (Teorema de Pitágoras) a partir de una construcción en la que se produce una relación entre los cuadrados que tienen como diagonales los lados de un triángulo rectángulo (Teorema auxiliar).

Esta ID se divide en tres fases: en la fase 1 los estudiantes deben aprender que dado un triángulo ABC y tres cuadrados cuyas diagonales son los lados AB, BC y AC de ese triángulo, para que dos de esos cuadrados puedan unirse por un lado moviendo los puntos, el triángulo debe ser rectángulo, en la fase 2 los estudiantes deben aprender un teorema auxiliar del teorema de Pitágoras para relacionar cuadrados que tienen como diagonales los lados de un triángulo rectángulo, en la fase 3 se pretende que los alumnos construyan el teorema de Pitágoras a partir de la relación con el teorema auxiliar construido en la fase 2. Para facilitar la presentación del ejemplo en el que se analizará a priori el proceso de *institucionalización*, presentaré en este artículo solamente el análisis de la fase 2 de esta ID.

En la fase 2 los estudiantes trabajan con el *milieu* que se puede observar en la figura 1: un triángulo rectángulo ABC (cuyos lados han sido ocultados usando las herramientas del software), los cuadrados que tienen como diagonales los lados del triángulo ABC. Esta figura ha sido construida en la fase 1, fase en la que se espera que los estudiantes hayan reconocido que para que los cuadrados que tienen como diagonales los catetos del triángulo ABC siempre estén pegados, el triángulo ABC debe ser rectángulo. Esta figura es una construcción dinámica, los estudiantes pueden arrastrar los puntos A, B o C y siempre el triángulo ABC será rectángulo y los cuadrados que tienen como diagonales los catetos estarán pegados por un segmento.

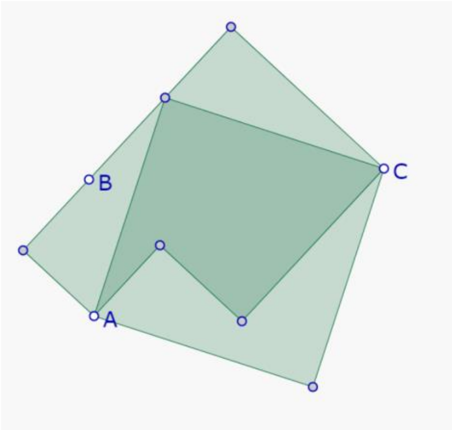


Figura 1. *Milieu* producido por los estudiantes en la fase 1 de la ID

Para construir el análisis de la evolución del *conocimiento* al *saber*, buscando la construcción del teorema auxiliar, se han definido los estados (tabla 1):

Tabla 1. Estados del *conocimiento* en la fase 2 de la ID

***Conocimientos* personales**	***Conocimientos* compartidos**	***Conocimientos* de referencia**	***Saber***
- La zona oscura resulta de la superposición de figuras - La zona oscura resulta de la superposición de 2 cuadrados - La zona clara del cuadrado grande es igual a la zona clara de la L	- Hay una zona oscura por la superposición del cuadrado cuya diagonal es la hipotenusa con L. - La zona clara de la L está formada por dos triángulos rectángulos iguales - La zona clara del cuadrado que tiene como diagonal la hipotenusa está formada por dos triángulos rectángulos iguales - Los triángulos de la zona clara de la L son iguales a los triángulos de la zona clara del cuadrado que tiene como diagonal la hipotenusa - La zona clara del cuadrado que tiene como diagonal la hipotenusa es igual a la zona clara de la L - La L está formada por la zona oscura y una parte de zona clara. - El cuadrado cuya diagonal es la hipotenusa está formado por la zona oscura y una parte de zona clara. - Las dos zonas claras son iguales. - La L es igual al cuadrado cuya diagonal es la hipotenusa del triángulo	-Si un triángulo es rectángulo entonces la L es igual al cuadrado cuya diagonal es la hipotenusa.	-Si un triángulo es rectángulo entonces los cuadrados cuyas diagonales son los catetos son iguales en área, al cuadrado cuya diagonal es la hipotenusa.

Para lograr que esta evolución se produzca y apoyar al profesor en la gestión adecuada del proceso de la *institucionalización* del *saber*, se han diseñado no solo acciones de *devolución*, sino además acciones de *institucionalización* que están en relación con los cinco elementos teóricos descritos en el apartado anterior. Presentaré a continuación algunas de las acciones que se han diseñado.

Para promover la discusión sobre las zonas que se forman en la figura 1, el profesor debe llevar a cabo una acción de *devolución*, proponiendo a los estudiantes resolver una pregunta sobre ¿por qué hay una zona oscura? la intención de esta acción es introducir una descomposición de la configuración y reconocer que en esa descomposición hay una parte común a dos figuras, una descomposición de figuras superpuestas. Si los estudiantes no reconocieran que la zona oscura se forma por una superposición de figuras, el profesor podría llevar a cabo otra acción de *devolución*, solicitando al estudiante ocultar y mostrar reiteradamente el cuadrado que tiene como diagonal la hipotenusa.

La formulación esperada por parte de los estudiantes es que hay una zona oscura porque hay figuras superpuestas, aunque es una formulación válida, es una formulación incompleta para la posterior producción del *saber*, así que se ha diseñado una acción de *institucionalización* para propiciar la evolución del *milieu:* el profesor debería preguntar, si esta fuera la formulación ¿qué se superpone? Los estudiantes podrían usar términos como «esos cuadrados» o «los cuadrados pequeños con el cuadrado grande», aunque estos términos podrían ser entendidos en la comunicación con la clase y en la interacción con el *milieu* material, no permitirían la comunicación con sujetos fuera de la clase cuando se interactúe con el *milieu* intelectual, el profesor debería llevar a cabo una acción de *institucionalización* de lenguaje en la búsqueda de la producción de formulaciones que tengan un lenguaje canónico, podría preguntar ¿qué cuadrados se superponen?

Se ha diseñado además una acción de *institucionalización* para facilitar el uso adecuado del lenguaje al responder esta pregunta: el profesor puede proponer a los estudiantes referirse a los cuadrados que tienen como diagonales los catetos como una sola figura, para efectos del análisis se ha denominado como la «L[5]», la intención de esta acción es facilitar la comunicación de la clase en los momentos de «puesta en común». De esta manera se espera que se produzca en la «puesta en común» el

---

[5] Tras las primeras implementaciones de la ID, reconocí que es un proceso más complejo para los estudiantes, en términos del lenguaje, producir una formulación de referencia para comparar el área de los tres cuadrados que tiene como diagonales los lados del triángulo rectángulo. Esta es la razón por la cual decidí considerar en el diseño un *signo pivotante*: la «L» es una figura compuesta por los cuadrados que tiene como diagonales los catetos del triángulo rectángulo.

conocimiento compartido: hay una zona oscura por la superposición del cuadrado que tiene como diagonal la hipotenusa y la «L», el profesor debe entonces llevar a cabo una acción de *institucionalización* en relación con la memoria, solicitando a los estudiantes escribir la formulación compartida sobre la zona oscura con el objetivo de producir un texto de un *conocimiento* compartido que deberá ser evocado posteriormente como un *criterio de validez*.

Una vez se ha producido el *conocimiento* compartido sobre la zona oscura, el profesor debe llevar a cabo una nueva acción de *devolución* para centrar la atención en la zona clara, preguntando a los estudiantes ¿cuál zona clara es más grande, la de la «L» o la del cuadrado que tiene como diagonal la hipotenusa? la intención de esta acción es introducir una descomposición y una comparación de la configuración de la zona clara. Si algunos estudiantes propusieran que la zona clara del cuadrado que tiene como diagonal la hipotenusa es más grande porque «se ve más grande» o «porque es un pentágono», el profesor debe pedir a los estudiantes arrastrar el punto C en dirección del punto B hasta sobrepasarlo, luego preguntar a los estudiantes ¿qué ha pasado con la figura de la zona clara que tenía como vértice el punto A? la intención de esta acción es facilitar el reconocimiento de una descomposición mereológica (Duval, 2017): la zona clara del cuadrado que tiene como diagonal la hipotenusa se puede descomponer en dos triángulos.

Si los estudiantes propusieran que la zona clara del cuadrado que tiene como diagonal la hipotenusa es igual a la zona clara de la «L» porque «se ven dos triángulos que son iguales a los otros dos triángulos», el profesor debe llevar a cabo una acción de *institucionalización* para producir una evolución en el *milieu*, que consiste en preguntar a los estudiantes ¿cómo poder justificar que los dos triángulos de la zona clara de la «L» son iguales a los dos triángulos de la zona clara del cuadrado que tiene como diagonal la hipotenusa? El profesor deberá introducir un «*conocimiento* de infraestructura»: las estrategias perceptivas son insuficientes para justificar. Hay dos intenciones en esta acción: posibilitar en los estudiantes una acción-formulación sobre la descomposición y búsqueda de una relación entre las figuras que conforman la zona clara, y posibilitar que los estudiantes interactúen con el *milieu* para formular un *conocimiento* que se usará como *criterio de validez*. Se espera que los estudiantes logren justificar que los triángulos de la zona clara son rectángulos e iguales (dos triángulos comparten un ángulo con un ángulo de un cuadrado, dos triángulos tienen un ángulo suplementario de un ángulo de un cuadrado, los 4 triángulos comparten la hipotenusa con cada uno de los lados de un cuadrado, un par de lados de cada zona clara son congruentes) al comparar los vértices de los triángulos y los cuadrados en la figura y usar algunos criterios de congruencia. La clase también podría discutir sobre otras propiedades de la figura relacionadas con la alineación de algunos puntos que son vértices de los cuadrados o del triángulo y que podrían garantizar la congruencia de los triángulos.

Se espera entonces que se produzca en la «puesta en común», un nuevo *conocimiento* compartido: la zona clara del cuadrado que tiene como diagonal la hipotenusa es igual a la zona clara de la «L» porque cada zona está formada por dos triángulos rectángulos iguales. El profesor debe entonces llevar a cabo una acción de *institucionalización* en relación con la memoria, solicitando a los estudiantes escribir la formulación compartida sobre la zona oscura con el objetivo de producir un texto de un *conocimiento* compartido que deberá ser evocado posteriormente como un *criterio de validez.*

Por último, el profesor debe llevar a cabo una acción de *devolución* que permitirá producir una deducción, les propone a los estudiantes la tarea: Pedro dice que la «L» es más grande en área que el cuadrado cuya diagonal es la hipotenusa ¿está de acuerdo? justifique su respuesta. La intención de esta acción es plantear la *situación de validación* en la que los estudiantes deberán validar las relaciones entre los cuadrados.

Si los estudiantes propusieran que el cuadrado que tiene diagonal la hipotenusa es más grande o más pequeño que la «L» porque «se ve más grande o más pequeño» el profesor debe llevar a cabo una acción de *devolución*, al proponer la construcción de la «L» usando tres piezas de un rompecabezas (la zona oscura y dos triángulos de la zona clara), luego usando las mismas tres piezas construir el cuadrado que tiene como diagonal la hipotenusa. Si los estudiantes propusieran que el cuadro que tiene como diagonal la hipotenusa es igual a la «L» , el profesor debe preguntar a los estudiantes cómo poder justificar esta formulación, la intención es promover el uso de *conocimientos* como *criterios de validez* para deducir.

El profesor debe llevar a cabo una acción de *institucionalización* para producir una evolución del *milieu*, al proponer una «puesta en común» para discutir con la clase sobre la justificación de la formulación la «L» es igual al cuadrado cuya diagonal es la hipotenusa y además discutir con la clase sobre ¿son iguales en qué? Esta «puesta en común» es de gran importancia para la ID, es en este momento en el que se producirá la deducción compartida usando los *conocimientos* construidos como *criterios de validez*. Es además una «puesta en común» en la que el profesor podría con facilidad caer en un efecto negativo del contrato didáctico así que se ha diseñado una acción de *institucionalización* de supervisión para evitar que esto pueda suceder, el profesor debería evocar la justificación de algunos estudiantes y debatir con los demás sobre estas formulaciones, el profesor debe evitar explicitar por su cuenta los *criterios de validez* que permitirán la deducción.

Se espera que se usen los siguientes *conocimientos* compartidos para producir una validación: la «L» está formada por la zona oscura y una zona clara; el cuadrado que tiene como diagonal la hipotenusa está formada de la zona oscura y una zona clara; la zona oscura es la superposición de la «L» y el cuadrado que tiene como diagonal la hipotenusa; la zona clara de la «L» es igual a la zona clara del cuadrado que tiene como diagonal la hipotenusa. La intención de esta acción es producir un acuerdo compartido sobre la formulación: la «L» es igual al cuadrado que tiene como diagonal la hipotenusa.

Posteriormente el profesor debe llevar a cabo una nueva acción de *institucionalización* de memoria, al cuestionar a la clase sobre si esta relación (la «L» es igual al cuadrado que tiene como diagonal la hipotenusa) se cumpliría si el triángulo fuera un triángulo cualquiera. La intención de esta acción, además de evocar un *conocimiento* construido en la fase anterior, es introducir la implicación: es porque el triángulo es rectángulo que se cumple la relación.

Para este momento el profesor debería llevar a cabo una acción de *institucionalización* para enriquecer el lenguaje solicitando a la clase completar la frase: «si un triángulo es rectángulo entonces …». La intención de esta acción es producir un texto de un *conocimiento* compartido de referencia: si un triángulo es rectángulo entonces la «L» es igual en área, al cuadrado que tiene como diagonal la hipotenusa. El profesor debería entonces llevar a cabo una acción de *institucionalización* para enriquecer el lenguaje y producir una formulación canónica del *saber*, preguntando a los estudiantes ¿qué era la «L»? Aunque algunos estudiantes podrían haber sustituido el término «L» en la formulación, el profesor debe solicitar la sustitución del término «L» para producir el *saber*: si un triángulo es rectángulo entonces los cuadrados que tienen como diagonales los catetos son iguales en área, al cuadrado que tiene como diagonal la hipotenusa.

7.4. Algunas conclusiones

En el ejemplo aquí presentado, he propuesto para una fase de una ID sobre el teorema de Pitágoras, la evolución de los *conocimientos* que se esperan se produzca por los estudiantes durante una implementación, he propuesto que esta evolución debe pasar por lo menos por cuatro estados: *conocimiento* personal, *conocimiento* compartido, *conocimiento* compartido de referencia y *saber*.

He propuesto además que es posible, en los análisis a priori de las ID, diseñar acciones de devolución e *institucionalización* que le permitan al profesor tener más herramientas para gestionar adecuadamente el proceso como una construcción gradual y compartida del *saber,* favoreciendo un mayor grado de conexión entre el *conocimiento* producido en la interacción con el *milieu* material y el *saber*.

He propuesto también que estas acciones de *institucionalización* deben estar en relación con por lo menos cinco elementos teóricos que intervienen en el proceso: las formas como los estudiantes «actúan con» y «ven» el *milieu*; las formas como los estudiantes enriquecen el lenguaje usado en sus formulaciones; la forma como el profesor y los estudiantes producen de una memoria compartida y codificada del *saber*; la forma como el profesor lleva a cabo acciones de introducción de formas de actuar con el *milieu* que el estudiante necesita y no puede aprender en una *situación adidáctica*; y las formas como el profesor «supervisa» ese proceso para garantizar la interacción adecuada del estudiante con el *milieu*.

He reconocido que hay momentos de discusión colectiva en la clase, que he llamado momentos de «puesta en común», en los que es necesario que el profesor lleve a cabo esas acciones de *institucionalización* que le permitirán a la clase producir: los *conocimientos* compartidos de referencia y el *saber* en un proceso gradual y compartido; los enriquecimientos necesarios para producir un *milieu* intelectual; los enriquecimientos del lenguaje necesarios para formular el *saber*; y la memoría codificada del *saber*.

Agradecimientos

Extiendo mi agradecimiento a mi tutor Dr. Martín Acosta por su importante aporte a la concreción de las ideas aquí presentadas.

Referencias

AKROUTI, I. (2022). La situation du barreau : une alternative possible pour l'enseignement de l'intégrale à l'entrée à l'université. *Revue québécoise de didactique des mathématiques, numéro thématique 1*(1), 72–110.

ALLARD, C. (2015). *Étude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions* [Thèse de doctorat, Université Paris 7]

ALLARD, C., & MASSELOT, P. (2016). De la ressource à la séance de classe. Institutionnaliser : tâche impossible ? Dans *Actes du 43è colloque de la COPIRELEM* (p. 219–242). ARPEME.

ALLARD, C., WINDER, C., & MANGIANTE-ORSOLA, C. (2017). De l'étude de pratiques enseignantes en géométrie aux possibilités d'enrichissement de ces pratiques : focale sur l'exercice de la vigilance didactique. Dans S. Coppé, E. Roditi, v. Celi, F. Chellougui, F. Tempier, C. Allard, C. Corrriveau, M. Haspekian, P. Masselot, S. Rousse, H. Sabra & M. Kiwan-Zacka (Dir.), *Actes de la 19ème école d'été de didactique des mathématiques. Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques* (Vol. 2, p. 301-328). La Pensée sauvage.

ARTIGUE, M. (2011). L'ingénierie didactique : un essai de synthèse résume. Dans C., Margolinas, M., Abboud-Blanchard, L., Bueno-Ravel, N., Douek, A., Fluckiger, P., Gibel, F., Vandebrouck & F., Wozniak (Dir.), *En amont et en aval des ingénieries* *didactiques. XVè école d'été de didactique des mathématiques* (Vol. 1, p. 225–237). La Pensée sauvage.

BLOCH, I. (2009). Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves. Comment travailler leur pertinence en formation ?. *Petit x, 81*, 25–53.

BLOCH, I., & GIBEL, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 31*(2), 191–227.

BLOCH, I., & GIBEL, P. (2022) Situations de recherche pour l'accès aux concepts mathématiques à l'entrée à l'université. *epiDEMES, 1*, 1 – 25.

BROUSSEAU, G. (1984). Le rôle du maître et l'institutionnalisation. Dans N. Balacheff (Ed.), *Actes de la troisième école d'été de didactique des mathématiques* (p. 40-44). IMAG.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 7*(2), 33–115.

BROUSSEAU, G. (1988). Les différents rôles du maître. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec, 23*, 14–24.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage.

BROUSSEAU, G. (2012). Des dispositifs piagétiens… aux situations didactiques. *Éducation et didactique, 6*(2), 103–129.

BROUSSEAU, G., & CENTENO, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques, 11*(2/3), 167–210.

BROUSSEAU, G., BROUSSEAU, N., & WARFIELD, V. (2014). *Teaching fractions through situations: a fundamental experiment*. Springer science & business media.

BUTLEN, D., CHARLES-PÉZARD, M., & MASSELOT, P. (2012). Apprendre et enseigner les mathématiques en ZEP, former à cet enseignement. Dans *Actes du 34è colloque de la COPIRELEM* (p. 113-147). ARPEME.

CHARLES-PEZARD, M. (2010). Installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 30(2), 197–260.

COULANGE, L. (2012). *L'ordinaire dans l'enseignement des mathématiques. Les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves* [Thèse de doctorat, Université Paris 7]

DOUADY, R. (1984). *Jeux de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire* [Thèse de doctorat, Université Paris 7]

DUVAL, R. (2017). Understanding the mathematical way of thinking - The registers of semiotic representations. *Springer International Publishing*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

HOULE, V. (2016). Étude de conditions didactiques favorables à la décontextualisation des connaissances mathématiques. *Canadian Journal of Education*, 39(4), 1–19.

LAPARRA, M., & MARGOLINAS, C. (2008). Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation. Des effets de la transparence des objets de savoir. [communication orale] *Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation.* https://hal.science/hal-00779656v1

LAPARRA, M., & MARGOLINAS, C. (2010). Milieu, connaissance, savoir. Des concepts pour l'analyse de situations d'enseignement. *Pratiques. Linguistique, littérature, didactique*, *1*(145), 141–160.

MANGIANTE-ORSOLA, C., PERRIN-GLORIAN, M., & STRØMSKAG, H. (2018). Theory of didactical situations as a tool to understand and develop mathematics teaching practices. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *Special issue*, 145–174.

MARGOLINAS, C. (1992). Éléments pour l'analyse du rôle du maître : les phases de conclusion. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*(1), 113–158.

MARGOLINAS, C. (1993). *Le vrai et le faux dans la classe de mathématiques*. La Pensée sauvage.

MARGOLINAS, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. Dans C. Margolinas (Ed.), *Les débats de didactique des mathématiques* (p. 89–102). La Pensée sauvage.

MARGOLINAS, C. (2003). Un point de vue didactique sur la place du langagier dans les pratiques d'enseignement des mathématiques. Dans M. Jaubert, M. Rebière & J. Bernié (Ed.), *Construction des connaissances et langage dans les disciplines d'enseignement. Actes du colloque pluridisciplinaire international* (p. 1–17). IUFM d'Aquitaine-Université Victor Segalen Bordeaux 2.

MARGOLINAS, C. (2014). Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques ? *Revue française de pédagogie. Recherches en éducation*, *188*, 13–22.

MARGOLINAS, C., ABBOUD-BLANCHARD, M., BUENO-RAVEL, L., DOUEK, N., FLUCKIGER, A., & GIBEL, P. (2011). *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. La Pensée sauvage.

MASSELOT, P., BUTLEN, D., & CHARLES-PEZARD, M. (2012). Deux dimensions de l'activité du professeur des écoles exerçant dans des classes de milieux défavorisés : installer la paix scolaire, exercer une vigilance didactique. Dans J. Dorier & S. Coutat (Ed.), *Actes du colloque EMF* (p. 362–370). Université de Genève.

PERRIN-GLORIAN, M. (1993). Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes « faibles ». *Recherches en didactique des mathématiques*, *13*(1-2), 5–118.

PERRIN-GLORIAN, M., & HERSANT, M. (2003). Milieu et contrat didactique, outils pour l'analyse de séquences ordinaires. *Recherches en didactique des mathématiques, 23*(2), 217–276.

PILET, J., ALLARD, C., & HOROKS, J. (2019). Une entrée par l'évaluation des apprentissages pour analyser les interactions entre l'enseignant ou l'enseignante et les élèves dans les moments de mise en commun. *Éducation et francophonie*, *47*(3), 121–139.

ROBERT A., & ROGALSKI J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignantes de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *2*(4), 505–528.

SARRAZY, B. (2007). Ostention et dévolution dans l'enseignement des mathématiques. *Éducation et didactique*, *1*(3), 31–46.

SENSEVY, G., & QUILIO, S. (2002). Les discours du professeur. Vers une pragmatique didactique. *Revue française de pédagogie*, *141*, 47–56.

JULIÁN SANTOS
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
julianhumbertosantos@gmail.com

JEAN-PIERRE BOURGADE, CLÉMENT DURRINGER

LE *LOGOS*, ENTRE PRODUCTION ET INSTITUTIONNALISATION, DANS LES MANUELS SCOLAIRES DE MATHÉMATIQUES

Abstract. The *logos*, between production and institutionalization, in school mathematics textbooks. In this work, we propose to carry out a study of some school textbooks with the intention of finding clues as to the organization of study as envisaged by the profession. In particular, we will seek to establish that the knowledge of the skills studied is not always satisfactorily produced or, when it is, properly institutionalized. The study is based on tools derived from the anthropological theory of didactics.

Keywords. textbooks, didactic moments, institutionalization, activity

Résumé. Dans ce travail, on se propose de mener une étude de quelques manuels scolaires dans l'intention d'y trouver des indices sur l'organisation de l'étude telle que l'envisage la profession. On s'attachera en particulier à établir que le *savoir* des *savoir-faire* étudiés n'est pas toujours produit de manière satisfaisante ni, lorsqu'il l'est, correctement institutionnalisé. L'étude se fonde sur des outils issus de la théorie anthropologique du didactique.

Mots-clés. manuels scolaires, moments didactiques, institutionnalisation, activité

En France, les manuels scolaires sont des outils fréquents et souvent centraux dans la pratique des professeurs de mathématiques. Ils fournissent ainsi une information indirecte sur les pratiques de la profession : écrits par des professeurs pour des professeurs, parfois sous le regard bienveillant de l'inspection académique, les manuels peuvent donner à voir comment des professeurs envisagent l'organisation de l'étude des mathématiques. Le schéma général « activité, cours, exercice » est celui qui structure également la plupart des manuels que nous avons consultés.

Nos observations de séances de mathématiques menées par des professeurs stagiaires, ainsi que la lecture de transcriptions de séances réalisées par des enseignants expérimentés, rédigées par des étudiants de master MEEF 2è année en mathématiques en formation à l'INSPE, nous ont permis de mettre en lumière certaines difficultés professionnelles liées à la gestion de la transition entre les « activités » et le « cours » (Bourgade et Durringer, à paraître). En particulier, les professeurs n'identifient pas toujours l'institutionnalisation comme une fonction de l'étude à part entière, ils la réduisent le plus souvent à l'écriture du cours ; l'articulation entre le cours et les activités qui le précèdent n'est alors pas pleinement travaillée, et le rôle des activités comme moyen de *produire* les nouveaux savoirs et savoir-faire n'est pas bien compris. Nous souhaitons explorer ces difficultés plus

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 29, p. 191 – 215

avant et déterminer dans quelle mesure les manuels scolaires permettraient aux professeurs qui les utilisent de les surmonter.

L'étude de manuels est intégrée, depuis les débuts de la TAD, dans les recherches et la formation. Nous proposons ici de mener une étude des manuels à travers les *fonctions didactiques* qu'ils pourraient aider à réaliser et dont on trouve les traces dans l'organisation du texte. Plus précisément, il s'agit de déterminer si les organisations de savoir qui sont étudiées dans ces manuels sont suffisantes, mais aussi de déterminer *comment* elles sont élaborées, dans quelle *temporalité didactique*, en faisant l'hypothèse que la structuration du manuel est le reflet d'une organisation possible de l'étude – bref, qu'une chronogenèse possible se laisse entrevoir à la lecture du manuel. Nous étudions plus particulièrement les moments de l'étude consacrés à la production du savoir (moment technologico-théorique) et à son institutionnalisation (moment d'institutionnalisation). Nous souhaitons déterminer si les « activités » (dont nous postulons que, dans les manuels, elles doivent permettre la production des organisations de savoir à étudier) et le « cours » (qui donne une idée de ce que pourrait être le texte du savoir institutionnalisé) sont reliés, et comment. Notre propos n'est pas d'indiquer des manques dans l'environnement technologico-théorique tel qu'il apparaît dans les manuels, mais de montrer que les conditions ne sont pas créées par les manuels pour faciliter la prise en charge des moments technologico-théorique et d'institutionnalisation par les professeurs qui souhaiteraient le faire en s'aidant de ces manuels.

Les moments de l'étude ont fait l'objet de nombreux travaux en théorie anthropologique du didactique (voir notamment : Chevallard, 2002a, 2002b ; Artaud, 2011), et l'institutionnalisation en particulier, qui est née dans le cadre de la théorie des situations didactiques (TSD, voir Brousseau, 2004 ; voir également, pour une caractérisation des savoirs et des connaissances dans le cadre de la TSD, Margolinas, 2014 ; pour le lien entre dévolution et institutionnalisation, qui rejoint une part de notre interrogation sur le lien entre activités et institutionnalisation, Laparra & Margolinas, 2008). Nous proposons de mener un travail d'étude des manuels de l'enseignement secondaire pour l'analyse de l'organisation de l'étude, en procédant d'abord à un rapide exposé des notions utiles de la théorie anthropologique du didactique (TAD ; Chevallard, 2020), puis à l'étude de deux exemples développés.

1. Cadre théorique et problématisation de la question de recherche

1.1. L'objet de l'étude

La TAD postule que toute action humaine peut être décrite comme la réalisation de *types de tâches* au moyen de *techniques* qu'un discours, la *technologie*, vient justifier, rendre intelligible, produire, discours qui, à son tour, est justifié, rendu intelligible et produit par une *théorie*. Un type de tâches et une technique permettant de le réaliser constituent une *praxis*, tandis que l'environnement technologico-théorique qui la justifie, la produit et la rend intelligible constitue un *logos*. On parle également de savoir-faire pour la *praxis* et de savoir pour le *logos*. Un point essentiel pour notre discussion est le lien étroit qui unit la *praxis* et le *logos* : le *logos* remplit une *fonction* à l'endroit de la *praxis*, une fonction triple : de justification, d'explication et de production.

Prenons un exemple mathématique simple (en classe de sixième) : soit le type de tâches *déterminer si un nombre est un multiple de 3*. Une technique bien connue consiste à calculer la somme des nombres représentés par les chiffres de l'écriture décimale du nombre étudié (par exemple, pour le nombre 327, on fait la somme des nombres 3, 2 et 7 ; on obtient 12). Si le nombre obtenu est un multiple de 3, alors le nombre de départ est aussi un multiple de 3 (12 est un multiple de 3, donc 327 également). Cette technique se justifie ainsi : un nombre en écriture décimale, tel que abc, peut s'écrire $100a + 10b + c$ (ainsi $327 = 3\times100 + 2\times10 + 7$), ou encore $99a + a + 9b + b + c$. Comme $99a + 9b$ est un multiple de 3, il faut et il suffit, pour que abc soit un multiple de 3, que $a + b + c$ en soit également un. Pour déterminer si un nombre est un multiple de 3, il suffit donc de déterminer si la somme des nombres que représentent les chiffres qui permettent de l'écrire est un multiple de 3 (cette somme est en effet $a + b + c$). La théorie de cette technologie comporte les éléments suivants : un critère de divisibilité doit être un moyen de ramener une question portant sur la *nature* d'un nombre (le fait qu'il soit ou non un multiple d'un nombre donné) à une question portant sur son *écriture*.

Cette présentation n'est pas nécessairement celle qui est donnée dans les cours de mathématiques, où le *logos* est généralement réduit. Ainsi, dans le manuel de la collection *Dimensions 6*e (Agnel *et al.*, 2016, p. 64) le *logos* est réduit à une propriété (par ailleurs fautive, la somme de chiffres n'étant pas un objet mathématique bien défini) : « un nombre est divisible par […] 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3. » En outre, cette propriété est regroupée avec deux autres propriétés qui ont des formes approchantes : un nombre est multiple de 9 si la somme de « ses chiffres » est divisible par 9, il est divisible par 4 si « le nombre formé par ses deux derniers chiffres » est divisible par 4. Le *logos* qui est ainsi produit est incomplet et peut laisser place à un discours endogène, produit par les élèves sous la pression de besoins *praxiques* : ayant à déterminer si un nombre est un multiple de 7, ils pourront être conduits à calculer la somme de ses « chiffres » et à déterminer si elle est divisible par 7, ou bien à déterminer si le nombre formé de ses deux derniers chiffres est un multiple de 7. Aucun de ces deux critères n'est valable. En revanche, la somme $2a + 3b + c$ est un multiple de 7 si et seulement si le nombre abc l'est. Ainsi, 343 est un multiple de 7, car $2\times3 + 3\times4 + 3 = 21$ qui est un multiple de 7. Vérifions : $343 = 350 - 7 = 7\times50 - 7 = 7 \times 49$, ce qu'il fallait montrer. D'où sort ce critère (calculer la somme du double du « chiffre » des centaines, du triple du « chiffre » des dizaines et du « chiffre » des unités) ? Le *logos* limité que propose le manuel *Dimensions 6^{è}* ne permet pas d'en avoir l'idée, alors qu'il suffit de reprendre l'idée envisagée plus haut : écrivons 100 comme la somme d'un multiple de 7 le plus grand possible et d'un autre nombre, et procédons de même pour 10. On a 100 = 77 + 23 = 77 + 21 + 2 = 98 + 2, et 10 = 7 + 3. On a donc : $abc = 100\times a + 10\times b + c = 98a + 7b + 2a + 3b + c$, qui est la somme d'un multiple de 7 ($98 + 7b = 7 \times (14a + b)$) et du nombre $2a + 3b + c$. On conclut comme pour le critère de divisibilité par 3. Il est bien clair que ces arguments ne sont pas adaptés à une classe de sixième (ils nécessitent des techniques algébriques qui ne sont maîtrisées qu'en cinquième) ; en revanche, le principe même du fonctionnement du critère de divisibilité par 3, ou par 7, peut être travaillé sur des exemples à valeur générique.

La richesse relative du *logos* permet donc une maîtrise plus ou moins grande de la technique et surtout une adaptabilité variable à de nouvelles situations.

L'exemple que nous avons étudié est particulier : le manuel ne fournit aucun élément de justification des propriétés qu'il énonce, pas même expérimentale. D'autres cas sont plus délicats à analyser : les manuels sont riches d'œuvres[1] qui pourraient fournir la matière de développements technologico-théoriques, ou même qui sont mis à profit pour cela. Néanmoins, ces œuvres sont souvent confinées dans un espace limité : celui des « activités » et des « exemples ». Il est rare que l'intégralité des éléments de *logos* produits dans une activité soit reprise dans l'espace dédié au « cours ».

Il peut également se produire que les éléments de *logos*, notamment les définitions, énoncés dans le « cours » soient insuffisants pour fonder correctement les *praxis* : dans ce cas, la *praxis* apparaît comme un élément arbitraire, injustifié, devant être appris pour lui-même sans raison sérieuse. Le *logos* a une fonction essentiellement métaphorique : il permet de se faire une idée de ce dont il s'agit, sans donner une réelle prise sur les objets définis, comme certaines définitions chez Euclide (« le point est ce dont la partie est nulle »). Nous dirons alors que le *logos* n'est pas *fonctionnellement* relié à la *praxis* (il ne permet pas d'en produire et d'en assurer le bon *fonctionnement*).

Nous souhaitons illustrer sur quelques exemples archétypiques les (més)usages qui peuvent être faits du *logos* dans les manuels. Nous avons retenu deux exemples : l'un porte sur le produit scalaire en classe de terminale, l'autre sur les volumes en classe de sixième.

[1] En TAD, une œuvre est un produit, quel qu'il soit, de l'activité humaine (Chevallard, 2022, p. 208). Une technique, un savoir, une table, un film ou une conversation sont des œuvres. Un manuel scolaire, un paragraphe tiré d'un manuel scolaire sont des œuvres.

1.2. Le temps de l'étude

En théorie anthropologique du didactique, l'étude d'un savoir et d'un savoir-faire est considérée comme l'étude des praxéologies qui y sont afférentes. L'étude d'une praxéologie se déploie dans une certaine temporalité didactique, une chronogenèse, marquée par la réalisation de différentes *fonctions de l'étude* (Chevallard, 2002a) à l'occasion de différents *moments de l'étude* :

– Le moment de première rencontre avec le type de tâches et d'identification du type de tâches, où le collectif d'étude prend conscience de l'existence d'un type de tâches dont la réalisation est problématique pour lui et à l'étude duquel il décide de s'employer (*moment de première rencontre*) ;

– Le moment de l'exploration du type de tâches et de l'émergence de la technique, au cours duquel le collectif d'étude envisage plusieurs spécimens du type de tâches pour essayer de les réaliser, favorisant ainsi l'émergence d'une technique (*moment exploratoire*) ;

– Le moment de la construction de l'environnement technologico-théorique durant lequel s'élaborent les éléments de justification de la *praxis* (*moment technologico-théorique*) ;

– Le moment de l'institutionnalisation de la praxéologie qui est marqué par la production d'un rapport officiel au savoir et au savoir-faire émergeant : le collectif d'étude devra désormais *connaître* ce qui a été produit, et le connaître d'une façon bien particulière (*moment de l'institutionnalisation*) ;

– Le moment de travail praxéologique qui consiste en la mise au travail de la praxéologie émergente afin de la faire évoluer, de la stabiliser, etc., mais aussi de construire la maîtrise de cette praxéologie par les membres du collectif d'étude (*moment de travail*) ;

– Le moment de l'évaluation de la praxéologie et de sa maîtrise, dans lequel il s'agit pour le collectif d'étude d'évaluer la robustesse, la stabilité, etc., de la praxéologie produite, mais aussi sa propre maîtrise de cette praxéologie (*moment d'évaluation*).

Les trois premiers moments que nous avons présentés contribuent à l'émergence praxéologique ; nous les appellerons *moments de genèse praxéologique*. La fonction d'institutionnalisation praxéologique (*moment d'institutionnalisation*), qui va nous occuper largement

> [a] pour objet de préciser ce qu'est « exactement » [la praxéologie] élaborée, en distinguant notamment, d'une part les éléments qui, ayant concouru à sa construction, n'y seront pas pour autant intégrés, et d'autre part les éléments qui entreront de manière définitive dans [la praxéologie] visée – distinction que cherchent à préciser les élèves lorsqu'ils demandent au professeur, à propos de tel résultat ou de tel procédé, s'il faut ou non « le savoir ». (Chevallard, 1999, p. 253)

Le point de vue de la Théorie anthropologique du didactique, ainsi exprimé, se démarque quelque peu de celui porté par la Théorie des situations didactiques (TSD) où la notion d'institutionnalisation a vu le jour :

> [une] situation d'institutionnalisation d'une connaissance […] est une situation qui se dénoue par le passage d'une connaissance de son rôle de moyen de résolution d'une situation d'action, de formulation ou de preuve, à un nouveau rôle, celui de référence pour des utilisations futures, personnelles ou collectives. (Brousseau, 2010, p. 4)

La différence se fait essentiellement sur l'exploitation du milieu dans le cours de l'institutionnalisation : Chevallard (1999) insiste sur le fait que les éléments de milieu ne vont pas tous être conservés pour entrer dans le « texte du savoir », certains passeront par pertes et profits de l'étude. Néanmoins, comme le précise Kuzniak (2005), l'institutionnalisation contribue à la décontextualisation des savoirs :

> les faits, observés et interprétés grâce à sa théorie [ont montré à Brousseau] la nécessité de donner par l'institutionnalisation le statut décontextualisé et « officiel » de savoir à certaines connaissances. […] Cette phase est indispensable pour assurer le passage d'une connaissance reliée à une situation vécue individuellement et très contextualisée à un savoir décontextualisé actif dans une institution donnée. (p. 32)

La genèse praxéologique peut par exemple passer par l'étude d'une situation problématique dont l'étude requiert la production d'un nouveau savoir-faire : tout ce qui relève de la situation elle-même, mais aussi le caractère situé dans un premier temps de certains éléments praxéologiques, va peu à peu s'effriter et la praxéologie « visée » se dégager pour ainsi dire de cette gangue. La décontextualisation du savoir et du savoir-faire conduit à la production d'une praxéologie qui sera institutionnalisée, et qui prendra un statut officiel par « ce sous-moment d'*officialisation*, une [praxéologie] mathématique désormais coupée de l'histoire singulière qui l'a portée à l'existence fait son entrée dans la culture de l'institution qui en a hébergé la genèse » (Chevallard, 1999, p. 254), en l'occurrence, la classe de mathématiques[2].

---

[2] On remarquera que l'institutionnalisation au sens de la TAD n'est pas nécessairement « le processus par lequel le professeur montre aux élèves que les connaissances qu'ils ont construites se trouvent déjà dans la culture (d'une discipline) » (Sensevy, 2001) : dans le cadre plus général posé par la TAD, il peut y avoir institutionnalisation de nouveaux savoirs,

L'effet de cette *officialisation* est de poser une nouvelle *norme* de savoir et de savoir-faire, un *rapport officiel*, ou encore un *rapport institutionnellement attendu*[3], auquel devront désormais se conformer les rapports personnels des membres de l'institution ; le moment de l'évaluation met bien en évidence l'existence de cette norme élaborée dans le cours de l'institutionnalisation puisque

> *l'évaluation* […] s'articule au moment de l'institutionnalisation : la supposition de rapports institutionnels transcendants aux personnes, en effet, fonde en raison le projet d'évaluer les rapports *personnels* en les référant à la *norme* que le moment de l'institutionnalisation aura ainsi hypostasiée. (Chevallard, 1999, p. 254)

En particulier, l'institutionnalisation ne se limite pas au « cours » : nous souhaitons insister au contraire sur le fait que l'institutionnalisation est un *processus* qui, à partir d'un milieu nourri d'éléments praxéologiques produits lors d'une activité, conduit à la production d'un rapport de référence (une *norme*), lequel est ensuite éventuellement décrit dans un « cours » (ce n'est pas toujours le cas : que l'on pense aux classes de maternelles ou à des contextes d'apprentissage informel).

La réalisation des fonctions de l'étude, en différents moments qui eux-mêmes peuvent être réalisés dans des ordres à peu près quelconques, simultanément parfois, en plusieurs épisodes souvent, etc., se matérialise en une certaine *organisation de l'étude*. Celle-ci peut être conçue *a priori*, mais elle diffère alors toujours plus ou moins sensiblement de l'organisation effective de l'étude observable dans la réalisation d'une séance ou d'une séquence : la contingence des relations entre les différents membres du collectif d'étude, d'autres facteurs liés à leurs rapports personnels aux savoirs et savoir-faire engagés dans l'étude contribuent à modifier l'organisation prévue pour l'adapter à l'imprévu.

Une conséquence simple, mais importante pour nous, concerne les manuels : ils ne représentent pas une organisation de l'étude réelle dans une classe, mais ils peuvent donner des informations sur la façon dont leurs auteurs envisagent une telle organisation. Si ces *ressources* font l'objet d'un travail mené par le professeur pour être converties en *documents* (suivant le processus de genèse documentaire décrit par Gueudet & Trouche (2008), et donc d'une appropriation personnalisée, on peut formuler l'hypothèse que les schèmes mis en œuvre pour cette conversion, ou, pour le formuler dans le cadre de la TAD, le *logos* des praxéologies de conception de cours à partir de manuels, sont gouvernés par un rapport à l'organisation de l'étude qui est lui-même largement informé par les injonctions institutionnelles, comme nous allons le préciser ici.

---

nouveaux même pour l'institution où se produit l'institutionnalisation. Toute institution n'est pas scolaire et ne renvoie pas à l'étude de savoirs déjà constitués.

[3] Rapport institutionnel qui est voué à évoluer au gré des changements institutionnels : ce qui est attendu en tel état de l'institution ne l'est plus en tel autre qui suscite d'autres attentes.

La plupart des manuels proposent des « activités » ou des « exemples » avant le « cours » qui lui-même est suivi d'exemples : on peut y lire le souhait d'inviter les professeurs qui les utilisent à programmer la réalisation de moments de genèse praxéologique avant l'institutionnalisation puis le travail praxéologique. Dans la mesure où nous avons observé, dans un autre travail de type clinique (Bourgade & Durringer, à paraître) que les professeurs faisaient souvent précéder l'institutionnalisation d'activités dites « de découverte », nous pensons que l'hypothèse que nous formulons à propos des manuels est fondée : l'organisation des chapitres reflète une certaine idée de l'organisation de l'étude en classe – même si n'y apparaissent pas des dispositifs tels que les rituels de début de séance, etc.

Le programme de cycle 4 de 2018 précise que[4] :

> **Une trace de cours** claire, explicite et structurée aide l'élève dans l'apprentissage des mathématiques. Faisant suite aux *étapes importantes de recherche, de découverte, d'appropriation individuelle ou collective*, de présentation commentée, de débats, de mise au point, la trace écrite récapitule de façon organisée les connaissances, les procédures et les stratégies étudiées. *Ne se limitant pas à un catalogue de recettes, mais explicitant les objectifs et les liens*, elle constitue pour l'élève une véritable référence vers laquelle il pourra se tourner autant que de besoin et tout au long du cycle. Sa consultation régulière (notamment au moment de la recherche d'exercices et de problèmes, sous la conduite du professeur ou en autonomie) favorise à la fois la mise en mémoire et le développement de compétences. (MENJ, 2020, p. 33)

Dès 2008, les programmes de mathématiques indiquaient la place privilégiée qui devait être celle de la résolution de problèmes dans l'étude des mathématiques[5] :

> La compréhension et l'appropriation des connaissances mathématiques reposent sur l'activité de chaque élève qui doit donc être privilégiée. Pour cela, et lorsque c'est possible, *sont choisies des situations créant un problème dont la solution fait intervenir des « outils », c'est-à-dire des techniques ou des notions déjà acquises, afin d'aboutir à la découverte ou à l'assimilation de notions nouvelles*. Lorsque celles-ci sont bien maîtrisées, elles fournissent à leur tour de nouveaux « outils », qui permettent un cheminement vers une connaissance meilleure ou différente. (MENJ, 2008, p. 10)

On voit se dessiner alors une organisation régulièrement observée dans les classes, présentant successivement une activité, du cours, puis des exercices. La profession se heurte notamment à deux grandes difficultés : la conception et la mise en œuvre d'activités qui répondent aux exigences mentionnées dans le programme de 2008 ; la réalisation de la fonction d'institutionnalisation à partir des éléments de savoir et de savoir-faire qui émergent lors des activités.

---

[4] Nous soulignons.

[5] Nous soulignons.

1.3. Modèle didactique de référence

Un modèle didactique de référence est un cas particulier de *modèle praxéologique de référence* (voir par exemple, Chevallard, 2020 ; Gascón, 2001 ; Fonseca, *et al.*, 2014 ; Ruiz-Munzón *et al.*, 2011), dans le cas où l'environnement praxéologique étudié relève de praxéologies *d'études*. C'est le cas ici, puisque l'on considère des praxéologies de réalisation des moments de l'étude.

Le modèle didactique de référence que l'on prendra comme point de repère pour l'étude des manuels est lié aux injonctions des programmes : il consiste en une organisation de l'étude suivant une structure quaternaire. Les activités d'étude et de recherche (AER) autorisent la réalisation des trois moments de genèse praxéologique ; ils sont suivis d'un temps de synthèse au cours duquel se réalise le moment d'institutionnalisation ; par la suite, des exercices permettent la réalisation du moment de travail praxéologique ; enfin, un contrôle contribue à la réalisation du moment d'évaluation. Cette structure quaternaire est habituelle dans les classes, même si les activités proposées ne sont pas toujours des AER (sur les AER, voir par exemple Chevallard, 2009). Nous défendons par ailleurs, en nous appuyant sur ce qu'écrit Chevallard (1999, voir supra), l'idée que l'institutionnalisation ne se réduit pas à *l'écriture* du cours, mais comprend également tout un travail d'élaboration du contenu du cours à partir des éléments praxéologiques produits lors de l'activité. Ainsi, des éléments épars, technologico-théoriques et praxiques, doivent être rassemblés, articulés, décontextualisés, pour aboutir à la production d'un *rapport* officiel aux mathématiques étudiées. Ce rapport servira dès lors de *norme* (Chevallard, 1999) à laquelle les rapports personnels des élèves devront se conformer.

Dans la suite, nous n'étudions pas pour eux-mêmes les éléments de *logos* qui sont apparents dans les « activités » ou dans le « cours » dans les manuels, mais la façon dont les activités et le cours sont reliés. Certains éléments technologico-théoriques apparaissent dans les activités, d'autres (éventuellement les mêmes) dans le cours, et il s'agit de s'interroger sur le lien entre les uns et les autres. Plus précisément, nous avons évoqué en introduction quelques difficultés que présentent aux enseignants la réalisation du moment de l'institutionnalisation et son articulation aux moments de genèse praxéologique. On s'interrogera donc sur les ressources que peuvent offrir les manuels pour permettre aux professeurs de mathématiques de concevoir une organisation de l'étude plus adéquate de ce point de vue. À travers deux exemples, nous prétendons illustrer certaines situations où les manuels, loin de fournir un point d'appui, contribuent à rendre confuse la gestion de la transition entre activité et cours.

1.4. Objectif et moyens de l'étude

Sans prétendre à l'exhaustivité, notre étude se veut résolument clinique, et souhaite donner à voir comment utiliser les outils de la TAD pour étudier des ressources comme les manuels du point de vue de l'organisation de l'étude qu'ils permettent d'envisager. Nous nous appuyons sur le modèle didactique de référence que nous venons de présenter (structure quaternaire de l'étude) pour mettre en évidence le fait que les manuels ne fournissent pas toujours des ressources suffisantes pour qu'un professeur de mathématiques puisse s'en emparer en vue de concevoir et mettre en œuvre les moments technologico-théorique et d'institutionnalisation. Selon le modèle que nous adoptons, l'institutionnalisation devrait constituer un processus conduisant d'éléments épars et contextualisés à un rapport officiel à une praxéologie complète.

Nous étudions deux exemples en détail, choisis parce qu'ils illustrent bien le type d'entrave que certains manuels peuvent poser et qui peuvent créer des contraintes défavorables à la production, par les professeurs qui s'en inspireraient, d'une organisation didactique propice à une réalisation satisfaisante des moments technologico-théorique et d'institutionnalisation.

Pour chaque exemple, nous décrivons les contenus abordés et la structure retenue pour les aborder (notamment l'ordre de succession activité/cours), puis nous faisons un bilan des difficultés observées. Nous indiquons également au passage ce que pourrait être une étude consistante des mathématiques rencontrées (complétant par là même le modèle didactique de référence à propos de deux praxéologies mathématiques enjeux de l'étude).

2. La production et l'institutionnalisation du *logos* dans les manuels scolaires : quelques exemples

Dans la suite, nous n'étudions pas pour eux-mêmes les éléments de *logos* qui sont apparents dans les « activités » ou dans le « cours » dans les manuels, mais la façon dont les activités et le cours sont reliés. Certains éléments technologico-théoriques apparaissent dans les activités, d'autres (éventuellement les mêmes) dans le cours, et il s'agit de s'interroger sur le lien entre les uns et les autres. Plus précisément, nous avons évoqué en introduction quelques difficultés que présentent aux enseignants la réalisation du moment de l'institutionnalisation et son articulation aux moments de genèse praxéologique. On s'interrogera donc sur les *ressources* que peuvent offrir les manuels pour permettre aux professeurs de mathématiques de concevoir une meilleure organisation de l'étude de ce point de vue. À travers deux exemples, nous prétendons illustrer certaines situations où les manuels, loin de fournir un point d'appui, contribuent à rendre confuse la gestion de la transition entre activité et cours.

2.1. Le produit scalaire en première

Nous étudions principalement dans le manuel *Métamaths* (Hérault & Sotura, 2019) la partie du chapitre sur le produit scalaire qui est consacrée aux activités, aux exemples, au cours (savoir et savoir-faire) et à un QCM intitulé « se tester ».

Après une première page consacrée à la « mobilis[ation des] acquis » (p. 219[6]), une série de 6 pages (p. 220-225) est consacrée à la transition « des exemples au cours ». Suivent des pages (p. 226-228) dédiées au « savoir-faire » et enfin une page pour « se tester » (p. 229). Les 6 pages où se déploient les exemples et le savoir sont organisées ainsi : la page de gauche présente des exemples (sous la forme d'exercices résolus) alors que la page de droite opère une synthèse des observations faites dans l'exploitation des exemples. On peut lire ces pages de la manière suivante : les pages de gauche peuvent servir de base à la conception des moments de genèse praxéologique, ainsi qu'à la formulation d'un premier bilan, tandis que les pages de droites peuvent servir à concevoir l'institutionnalisation.

2.1.1. À propos du « défaut d'orthogonalité »

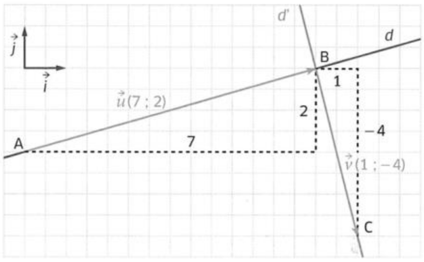
L'exemple 2 p. 220 fait le lien entre perpendicularité de droites, orthogonalité de leurs vecteurs directeurs, et une égalité de normes de vecteurs (voir figure 1).

La partie « cours » (p. 221) fait la synthèse de ces travaux sous la forme d'une énumération de critères d'orthogonalité de deux vecteurs. L'expression analytique du produit scalaire en base orthonormée y apparaît pour la première fois. Elle est établie d'abord dans une « démonstration » et sera « interprét[ée] » dans l'exemple 3, donné page 222. On lit dans cet exemple (figure 2) que « lorsque l'expression $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$ n'est pas nulle, elle s'interprète comme un *défaut d'orthogonalité* » (souligné dans le texte).

[6] Toutes les citations de cette section, sauf mention contraire, sont tirées de Hérault & Sotura (2019).

Exemple 2 **Comment exprimer la perpendicularité de deux droites ?**

On a représenté deux droites d et d' de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}(7\,;\,2)$ et $\vec{v}(1\,;\,-4)$. Elles semblent perpendiculaires : le sont-elles vraiment ?



- On introduit trois points A, B et C comme sur la figure :
  - B est l'intersection des deux droites ;
  - $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$.
- Pour savoir si (AB) et (BC) sont perpendiculaires, on va utiliser les équivalences suivantes : (AB) et (BC) sont perpendiculaires $\Leftrightarrow$ ABC est un triangle rectangle en B $\Leftrightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$.
- On exprime AB, BC et AC à l'aide de normes des vecteurs : $AB = \|\vec{u}\|$; $BC = \|\vec{v}\|$ et, puisque $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$, on a $AC = \|\vec{u} + \vec{v}\|$. Ainsi, les droites d et d', de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, sont perpendiculaires $\Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.
  On a $\|\vec{u}\|^2 = (\sqrt{7^2 + 2^2})^2 = \sqrt{53}^2 = 53$ et $\|\vec{v}\|^2 = 1^2 + (-4)^2 = 17$; d'où $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 = 53 + 17 = 70$.
  $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(7 + 1\,;\,2 - 4)$, soit $(8\,;\,-2)$. Alors $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 8^2 + (-2)^2 = 68$.
  On constate que $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \neq \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.
  D'après l'équivalence ci-dessus, les droites d et d' ne sont pas perpendiculaires.

2 POUR CONSOLIDER Montrer que les vecteurs $\vec{u}(1{,}2\,;\,3)$ et $\vec{v}(5\,;\,-2)$ vérifient l'égalité $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.
Que peut-on en déduire pour les droites d et d' de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

Figure 1. Du théorème de Pythagore au produit scalaire

On a vu l'équivalence : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$.
Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = 0$.
Et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **ne sont pas** orthogonaux $\Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \neq 0$.
Lorsque l'expression $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$ n'est pas nulle, elle s'interprète comme un **défaut d'orthogonalité**.

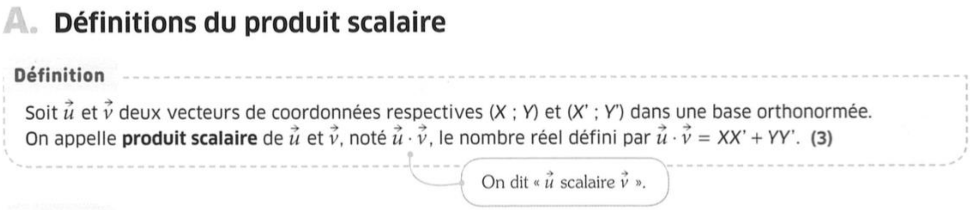
Figure 2. Le défaut d'orthogonalité

Cette remarque n'est pas approfondie, alors qu'elle pourrait donner lieu à des développements importants qui *rendraient intelligible* (une fonction du *logos*) le lien entre produit scalaire et cosinus de l'angle : en effet, deux vecteurs de normes fixées sont « d'autant moins » orthogonaux que leur produit scalaire est « moins nul ». On pourrait souligner que cette façon de quantifier le défaut d'orthogonalité présente l'inconvénient de dépendre de la longueur des vecteurs. On peut alors chercher à exprimer le défaut d'orthogonalité « proportionnellement » à leur longueur, ce qui conduit à étudier le rapport du produit scalaire par le produit des normes des vecteurs étudiés et à observer expérimentalement qu'il est compris entre –1 et 1, qu'il prend les mêmes valeurs que le cosinus pour des angles remarquables, etc. Rien de ce travail n'est fait et la production de la relation entre produit scalaire et cosinus, qui est faite dans l'exemple 6 (p. 224) est menée sur des vecteurs de norme unité, puis, dans le cadre du « cours » (p. 225) sur des vecteurs quelconques en faisant appel aux projections orthogonales déjà introduites à la même page.

L’expression « défaut d’orthogonalité » n’est reprise nulle part dans les pages de droite (de « cours ») et reste donc un élément de bilan d’exemple – sans que cet élément ait été dûment produit par un travail spécifique détaillé et varié dans l’exemple. Il restera d’ailleurs lettre morte puisque le manuel ne fait pas vivre le type de tâches « quantifier le défaut d’orthogonalité de deux vecteurs ».

2.1.2. À propos de la nécessité d’œuvrer en base orthonormée

Prenons un autre exemple tiré du même manuel. Dans la partie « cours » (p. 223, figure 3), il est indiqué que l’expression littérale du produit scalaire (qui est prise pour définition) n’est valable qu’en base orthonormée, mais la justification de ce fait n’est pas donnée dans la partie « cours ». On trouve, dans l’exemple 1, le commentaire suivant, à propos du calcul de l’expression analytique de la norme d’un vecteur en base orthonormée : « Ce calcul de norme n’est valable que dans une base orthonormée car il s’appuie sur le théorème de Pythagore ». Le lien entre les deux parties de cette assertion n’est nulle part explicité – on pourrait même craindre que certains élèves en viennent à penser que le théorème de Pythagore n’est valable qu’en base orthonormée. Il aurait fallu notamment préciser que le calcul des coordonnées fait appel à une projection parallèlement aux axes du repère, qui ne coïncide avec la projection perpendiculaire que dans le cas d’un repère orthonormé[7]. Notons également que l’introduction de la formule analytique du produit scalaire en base orthonormée n'est pas suffisamment motivée. Pourtant, l’étude d’un grand nombre de configurations planes pourrait inciter à développer une technique basée sur une telle formule analytique. Un tel travail pourrait s’appuyer sur le besoin de faciliter la technique en évitant d’employer le théorème de Pythagore systématiquement.


A. Définitions du produit scalaire

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(X ; Y)$ et $(X' ; Y')$ dans une base orthonormée.
On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel défini par $\vec{u} \cdot \vec{v} = XX' + YY'$. **(3)**

On dit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ».

Figure 3. Définition valable en base orthonormée

[7] Même si la pratique du calcul du produit scalaire ne se fait qu’en repère orthonormé, les élèves manipulent par ailleurs des repères plus quelconques et il paraît indispensable de justifier une telle restriction, pour le produit scalaire, au cas de repères orthonormés.

2.1.3. Bilan

De ces deux exemples tirés du même manuel, on peut tirer le bilan suivant : des éléments de *logos* peuvent être produits sans qu'une *praxis* leur soit associée. Par exemple, le « défaut d'orthogonalité » n'est associé à aucun type de tâche qui le mettrait au travail. Les moments de genèse praxéologique n'ont aucune raison d'être tous réalisés si l'on exploite les activités proposées telles quelles. De plus, ces éléments peuvent être introduits sans que l'exemple dans le bilan duquel ils apparaissent ne permette réellement leur émergence. Le « défaut d'orthogonalité » est présenté comme une simple « interprétation » du fait que le produit scalaire soit non nul. Cependant, aucun travail sur la quantification de ce défaut, qui est pourtant au cœur des raisons d'être du produit scalaire, n'est réalisé. Enfin, ils peuvent apparaître dans le bilan de l'exercice sans être repris dans la synthèse de « cours », et donc sans être « institutionnalisés ». Les élèves n'auront pas à connaître la notion de « défaut d'orthogonalité », comme le confirme l'examen des exercices proposés dans le manuel. Cela pourrait pourtant être travaillé au moyen de l'expression du produit scalaire faisant intervenir le cosinus.

D'autre part, certains éléments de *logos* (un élément de définition : « dans une base orthonormée ») peuvent être introduits dans le « cours » (et donc être institutionnalisés) sans avoir été produits en détail ni justifiés, ou alors incorrectement (par l'invocation du théorème de Pythagore qui n'est pas réellement pertinente), et sans que les justifications (même incomplètes ou incorrectes) ne soient reprises dans le « cours » (et donc institutionnalisées).

Dans les deux cas, il y a solution de continuité entre les « exemples » et le « cours » : certains éléments disparaissent entre le bilan des exemples et le cours, ce qui contribue à rendre arbitraire une grande partie du *logos* et de la *praxis* institutionnalisés ; le *logos* institutionnalisé est lacunaire.

2.2. Les notions de volume et de contenance en classe de sixième

Les ressources d'accompagnement des nouveaux programmes de cycle 2 (MENESR, 2016) donnent les indications suivantes sur le travail à mener autour des notions de volume et de contenance[8] (nous soulignons) :

> Au cycle 2, les mesures sont généralement déterminées à l'aide d'instruments et donc de “mesurages” (une règle pour des longueurs, une balance Roberval pour les masses, *un verre gradué cylindrique et de l'eau pour les contenances*, un chronomètre pour des durées permettent de mettre en évidence le principe de détermination de la mesure

[8] La citation suivante est tirée du document https://eduscol.education.fr/document/15406/download, disponible sur https://eduscol.education.fr/177/mathematiques-cycle-2.

> par report de l'unité), mais elles peuvent aussi être le résultat d'un calcul (durée entre deux horaires donnés, périmètre d'un polygone). Au cycle 3, les mesures peuvent encore être déterminées par un "mesurage", par exemple à l'aide du rapporteur pour les angles, mais plus souvent qu'au cycle 2 ce sont des calculs, s'appuyant sur des mesures et parfois aussi des formules, qui permettent de déterminer les mesures de grandeurs cherchées (longueur d'un cercle ; aire d'un triangle, d'un rectangle ou d'un disque ; *volume d'un pavé droit*). (p. 4)

La figure 4 donne à voir les attendus de fin d'année de sixième à propos de contenances et volumes : il s'agit pour les élèves de sixième d'apprendre à calculer le volume d'un pavé droit en utilisant une formule, et de savoir relier les unités de volume et de contenance.

MATHÉMATIQUES > Attendus de fin d'année de 6^{e}

Contenances et volumes

Ce que sait faire l'élève

- Il calcule le volume d'un cube ou d'un pavé droit en utilisant une formule.
- Il utilise les unités de volume : cm^3, dm^3 et m^3 et leurs relations.
- Il relie les unités de volume et de contenance (1 L = 1 dm^3 ; 1 000 L = 1 m^3).

Exemples de réussite

- Un pavé droit a pour longueur 30 cm, pour largeur 25 cm et pour hauteur 15 cm. Calcule son volume en cm^3 puis en dm^3. *(Réponse : il peut effectuer le calcul 30 cm × 25 cm × 15 cm qui donne 11 250 cm^3, soit 11,25 dm^3.)*
- Pierre plonge un premier cube fermé de 15 cm de côté dans une bassine remplie d'eau à ras bord.
  – Indique, en L, la quantité d'eau qui sera récupérée hors de la bassine.
  – Il remplit à nouveau la bassine à ras bord et plonge cette fois-ci un cube de 2,5 cm de côté. Indique, en mL, la quantité d'eau récupérée hors de la bassine.

Figure 4. Attendus de fin d'année de sixième (MENJ, 2019a)

En particulier, la classe de sixième est celle où il convient d'établir la formule du volume du pavé droit et de clarifier la relation entre contenance et volume. Le travail mené en cycle 2 et au début du cycle 3 porte pour l'essentiel sur la comparaison de volumes, sur la mesure de volumes de liquides, et sur la détermination du volume d'un solide par immersion dans un liquide (on détermine le volume en présence du solide et en son absence, le volume du solide est la différence des deux volumes déterminés). On observe que dans les attendus de sixième, les opérations d'immersion restent présentes.

La spécificité du travail mené en sixième peut être comprise comme consistant à passer d'une détermination par mesurage à une détermination au moyen de calculs, ce qui requiert que soit réalisée une mise en relation de propriétés *géométriques* et de propriétés *volumétriques*. Le cas du pavé droit est mis en avant comme particulièrement simple, mais il induit un fossé avec le cycle 2 où le volume du cylindre était privilégié dans les mesurages (éprouvettes, etc.). Surtout, il y a un écart entre la détermination du volume par un calcul et sa détermination par immersion dans l'eau.

On pourrait définir le volume en procédant en deux temps : on dirait que deux solides ont le même volume s'ils entraînent la même élévation du niveau d'eau dans un récipient lors de leur complète immersion dans le liquide. On dirait que le volume d'un solide est une grandeur dont la mesure est le nombre de cubes de même côté nécessaire pour obtenir, par juxtaposition, un solide de même volume, et l'unité est donnée par le cube de la longueur commune du côté de ces cubes. Ainsi, s'il faut 13 cubes de côté 2 cm pour obtenir une élévation du niveau d'eau égale à celle produite par immersion d'une boule, le volume de la boule est 13 fois le volume d'un cube d'arête de longueur 2 cm. Mais le volume d'un cube d'arête 2 cm est lui-même égale au volume de 8 cubes d'arête 1 cm. Finalement le volume de la boule est égal à 104 fois le volume d'un cube d'arête 1 cm. En choisissant « 1 cm^3 » comme notation du volume d'un cube d'arête 1 cm, on aboutit à un volume de la boule égal à 104 cm^3.

On pourrait ensuite montrer que l'élévation est la même si on immerge un pavé droit ou le solide formé par juxtaposition de cubes qui est exactement superposable au pavé droit étudié. Le volume du pavé droit est alors donné, suivant la définition précédente, par le nombre de cubes multiplié par le cube de la longueur commune de leurs arêtes. Le comptage des cubes permet de parvenir à la formule habituelle pour le volume du pavé droit, pour autant que l'on puisse « remplir » le pavé d'un nombre entier de cubes… Ce qui est possible notamment lorsque les longueurs de ses arêtes sont des multiples entiers de la longueur de l'arête du cube unité choisi. Lorsqu'il n'est pas possible de choisir une telle unité, on procède par approximations successives pour faire admettre que la formule est tout à fait générale.

La contenance d'un récipient serait le volume d'un pavé droit dont l'immersion dans l'eau d'un bac produirait la même élévation de niveau que si on versait le contenu du récipient rempli à ras bord d'eau dans le même bac. Le volume d'un liquide serait défini de même : ce serait le volume du pavé droit qui produirait, par immersion dans un bac d'eau, la même élévation que si on versait le liquide dans le même bac.

Cette approche permettrait de donner une cohérence entre les définitions de volume et de contenance, tout en permettant de calculer le volume d'autres types d'objets que des solides. Un autre intérêt est le recours à l'immersion dans un bac de liquide, qui permet de ménager une transition entre les praxéologies établies dans les premières années du cycle 3 et la praxéologie calculatoire en cours d'élaboration, tout en respectant les attendus de fin d'année de sixième. On lit notamment, dans les attendus de fin d'année de CM2 (deuxième année du cycle 3) qu'une réussite attendue est que l'élève « estime la mesure d'un volume ou d'une contenance par différentes procédures (*transvasements*[9], appréciation de l'ordre de grandeur) » (MENJ, 2019b, p. 11).

2.2.1 Définitions du volume et de la contenance

Dans deux des trois manuels étudiés, on peut lire des définitions du volume et de la contenance, le troisième (*Transmath*, Malaval, 2022, p. 178) se contentant de définir le mètre cube comme « volume d'un cube d'arête 1 m ». Dans le manuel *Mission indigo* (Barnet, 2022, p. 272), la définition donnée est la suivante : « le volume d'un solide est la mesure de son espace intérieur ». La contenance n'y est pas définie, mais il est précisé que « le litre […] est une unité de contenance équivalente au dm^3 […] ». Le manuel de la collection *TAM* (Joly, 2022, p. 260) propose quant à lui une définition de chacune des deux notions. Ainsi, « le volume d'un solide est la quantité d'espace occupée par ce solide » et « la contenance d'un récipient est son volume intérieur ». L'exemple donné immédiatement après la définition fait plutôt appel à la définition de la contenance comme capacité à contenir : « en versant le contenu de l'aquarium A dans l'aquarium B, une partie de l'aquarium B n'est pas remplie : la contenance de l'aquarium A est donc inférieure à celle de l'aquarium B ». Par ailleurs, la définition de la contenance par le « volume intérieur » évoque la définition du *volume* du manuel *Mission Indigo* pour lequel le « volume d'un solide est la mesure de son espace intérieur ». On y trouve cependant une précision : le volume serait une mesure – ce qui bien sûr est faux : le volume est une grandeur, qui est susceptible d'être mesurée, mais ne coïncide pas avec ses mesures. Par ailleurs, les deux définitions de *volume* sont prises pour des « solides », bien que très rapidement on soit amené à déterminer des volumes de « liquides ». Ainsi, au détour d'un exemple, le manuel *TAM* précise-t-il que « le litre est utilisé par exemple pour mesurer le volume des liquides[10] ». Le problème se pose d'ailleurs déjà à propos des aquariums : on y compare des contenances, qui sont, selon la définition posée dans le même manuel, des « volumes intérieurs » de récipients, et donc des « quantités d'espace occupées par un solide ». La contenance vue comme volume est problématique puisque, s'agissant d'un récipient, on veut désigner le volume occupé par… du vide. Le manuel *Transmath* (Malaval, 2022, p. 177), quant à lui, se contente de préciser incidemment que « la contenance est la quantité que peut contenir un récipient ».

---

[9] Nous soulignons.

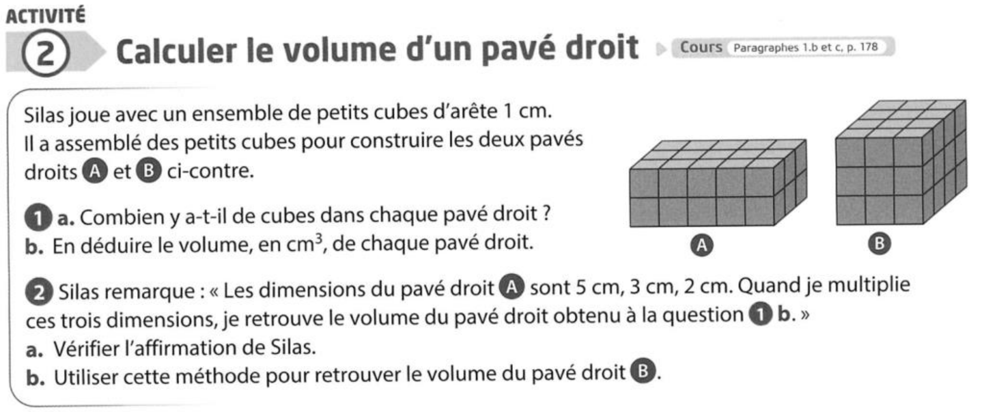
[10] On notera au passage que le litre est plutôt utilisé pour mesurer des contenances, et non des volumes de liquides…

2.2.2 Solutions de continuité

Au-delà de l'incorrection formelle des définitions examinées ci-devant, c'est leur caractère peu *fonctionnel* que nous souhaitons mettre en évidence : on ne peut produire à partir d'elles aucun des résultats qui sont pourtant mentionnés dans les mêmes manuels, et en particulier la formule donnant le volume du pavé droit.

Le programme de sixième comporte pourtant comme point essentiel la détermination du volume du pavé droit au moyen d'une formule. On observe deux phénomènes essentiels : tout d'abord, le fait que le volume soit lié à la géométrie du solide étudié n'est pas pointé, alors que c'est essentiel pour rendre intelligible la possibilité même de déterminer un volume à partir de propriétés géométriques (le fait de pouvoir décomposer certains pavés droits en réunion quasi disjointe de cubes de même taille) ; par ailleurs, la formule donnant le volume du pavé droit n'est pas établie, mais donnée sans réelle explication. Au lieu de quoi, les activités ou exemples travaillés dans les manuels consistent à « remplir » un pavé droit de cubes et à conclure à l'égalité du volume du pavé droit et de la somme des volumes des cubes.

Comme nous l'avons indiqué, les manuels proposent souvent des « activités » avant le « cours ». C'est le cas des trois manuels utilisés ici. Les trois proposent des « activités » ou des « exemples » mettant en jeu le « remplissage » d'un cube ou d'un pavé par des cubes ou des pavés plus petits. Cette « démonstration » repose sur une propriété d'additivité des volumes qui pourrait être posée axiomatiquement à partir de son observation lors des manipulations (immersion de solides dans un liquide). Faute d'un réel travail expérimental, la propriété d'additivité n'est pas justifiée – et elle n'est d'ailleurs pas mentionnée dans les manuels. Pourtant, elle est au cœur de la « démonstration » de la formule. On retiendra par exemple l'activité 2 p. 117 du manuel *Transmath* (voir figure 5). On y demande « combien y a-t-il de cubes dans chaque pavé droit ? », comme s'il allait de soi que déterminer ce nombre permettrait de répondre à la question du calcul du volume du pavé droit. Cela ne découle pourtant pas de la définition du volume donnée dans les deux manuels *Mission indigo* ou *TAM*, et surtout pas de celle, absente, du manuel *Transmath*. L'exemple b p. 178 reproduit la même difficulté (figure 6) puisqu'on doit y passer du constat que « le pavé droit contient 60 cubes d'arête 1 cm » à la conclusion que « le volume de ce pavé droit est *donc* 60 cm^3 » (nous soulignons). Le fait que le volume soit additif est pourtant le point essentiel pour assurer un lien entre la détermination du volume et un calcul portant sur la *géométrie* du système étudié (équidécomposabilité du pavé en 60 cubes de côté 1 cm).



ACTIVITÉ

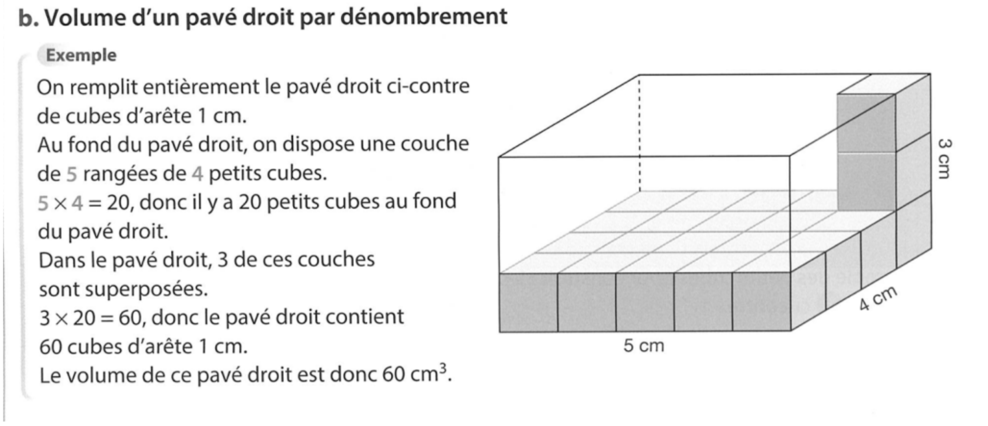
2 **Calculer le volume d'un pavé droit** Cours Paragraphes 1.b et c, p. 178

Silas joue avec un ensemble de petits cubes d'arête 1 cm.
Il a assemblé des petits cubes pour construire les deux pavés droits A et B ci-contre.

1 **a.** Combien y a-t-il de cubes dans chaque pavé droit ?
b. En déduire le volume, en cm^3, de chaque pavé droit.

2 Silas remarque : « Les dimensions du pavé droit A sont 5 cm, 3 cm, 2 cm. Quand je multiplie ces trois dimensions, je retrouve le volume du pavé droit obtenu à la question 1 **b.** »
a. Vérifier l'affirmation de Silas.
b. Utiliser cette méthode pour retrouver le volume du pavé droit B.

Figure 5. Vers le volume du pavé droit (*Transmath*, p. 177)



b. Volume d'un pavé droit par dénombrement

Exemple

On remplit entièrement le pavé droit ci-contre de cubes d'arête 1 cm.
Au fond du pavé droit, on dispose une couche de 5 rangées de 4 petits cubes.
$5 \times 4 = 20$, donc il y a 20 petits cubes au fond du pavé droit.
Dans le pavé droit, 3 de ces couches sont superposées.
$3 \times 20 = 60$, donc le pavé droit contient 60 cubes d'arête 1 cm.
Le volume de ce pavé droit est donc 60 cm^3.

Figure 6. Compter des cubes, calculer un volume (*Transmath*, p. 178)

Prenons maintenant la page 260 du manuel *TAM* : suivant la définition problématique du volume (« le volume d'un solide est la quantité d'espace occupée par ce solide »), on trouve une autre définition : « Une unité de volume étant choisie, la mesure du volume d'un solide […] est le nombre d'unités nécessaire pour remplir l'intérieur de ce solide ». Il s'ensuit un exemple de remplissage d'un pavé droit par des pavés droits unité. Le fait même de présenter comme une *définition* cette assertion dit bien qu'elle n'est pas déductible de la « définition » donnée du volume.

2.2.3 Bilan

On peut, pour résumer, faire un constat et identifier deux situations. Le constat porte sur la *non-fonctionnalité* de certaines définitions, qui sont purement métaphoriques et ne permettent de produire ni *logos* ni *praxis*. Deux situations, disions-nous : soit la formule du pavé n'est justifiée que par le remplissage du pavé par des cubes sans plus d'explication, soit elle découle d'une définition de la *mesure* du volume d'un solide qui n'est pas déductible de la définition choisie pour le volume. Dans les deux cas, il y a une solution de continuité entre le *logos* donné au départ (la définition du volume) et le *logos* final (la formule donnant le volume d'un pavé droit). Une deuxième solution de continuité est à trouver entre le *logos* présenté dans ces manuels et les praxéologies étudiées au cycle 2 et dans les deux premières années du cycle 3 : dans ce dernier contexte, en effet, le volume est pressenti comme classe d'équivalence d'objets entraînant par immersion le même déplacement de liquide. Nulle part cette approche du volume n'est reprise dans les manuels. Le lien avec l'additivité des volumes, qui pourrait être établie expérimentalement par immersion, n'est pas interrogé et on assiste à une géométrisation de la grandeur volume, avec le défaut de perdre l'intelligibilité du lien entre la formule du volume du pavé droit et son utilité pratique (savoir si un objet peut être contenu dans un autre, par exemple).

3. Discussion

Dans cet article, nous avons fait l'hypothèse que les manuels scolaires fournissent une infrastructure sur laquelle les professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire peuvent se fonder pour organiser l'étude des objets mathématiques au programme. Cette hypothèse nous semble étayée pour partie par le fait que les manuels sont organisés suivant une structure très commune : activités ou exemples, suivis du cours et d'exercices de niveaux de difficulté croissante. Par ailleurs, cette structure est proposée dans les programmes depuis au moins 2008 et fait également l'objet d'observations fréquentes dans les classes de collège et de lycée.

La problématique que nous soulevons se situe au nœud de l'institutionnalisation et de la production de l'environnement technologico-théorique des praxéologies mathématiques étudiées : comment *créer* un *logos* adéquat à une *praxis* donnée ? Comment institutionnaliser ce *logos* de façon à ce qu'il conserve ses fonctions relativement à la *praxis* qui lui est associée ? Ces questions se situent au niveau de l'*organisation de l'étude*. Quelles infrastructures les manuels fournissent-ils pour la réalisation des différents moments de l'étude et en particulier des moments technologico-théorique et d'institutionnalisation ?

Les manuels donnent à voir un scénario possible de production d'ingrédients technologico-théoriques, soit dans des activités, soit dans des exemples. D'autre part, le cours fournit des indications sur ce qui pourrait être institutionnalisé. La mise en regard des éléments de *logos* visibles dans les uns et les autres donne une idée de la déperdition gnosique[11] qui pourrait marquer un processus d'institutionnalisation

[11] C'est-à-dire relative au *logos*.

fondé sur les manuels. Nous avons observé deux configurations non exclusives dans les exemples que nous avons étudiés :

– Certains éléments de *logos* peuvent être *absents* de la partie « cours » tout en étant présents dans les « activités » ou les « exemples » (c'est le cas pour le produit scalaire) ;

– Il peut en outre y avoir une inadéquation du *logos*, tant dans les « activités » que dans le « cours », du fait d'une discontinuité entre le *logos* de l'année d'étude considérée et le *logos* portant sur le même thème dans les classes précédentes (cas du calcul du volume du pavé droit).

On retrouve dans l'organisation des manuels un phénomène déjà observé au détour d'une étude clinique du rapport de quelques professeurs à la fonction didactique d'institutionnalisation (Bourgade & Durringer, à paraître) : la production d'un rapport de référence à un objet (mathématique, par exemple) entre dans les tâches dévolues au professeur, et celui-ci peut se passer d'expliciter le lien entre « activité » et « cours » – ou plutôt ce lien est conçu comme allant de soi et ne nécessitant pas un travail sérieux, mais un simple échange oral avec les élèves à l'issue de l'« activité ». Dans le cas des manuels, on retrouve cette discontinuité : les « activités » peuvent être riches d'apports technologico-théoriques, mais le lien n'est pas explicité avec le « cours » qui les suit. Celui-ci n'est pas tant *produit* par celles-là qu'il n'est *illustré* par elles. Les activités sont confinées dans un rôle ancillaire, de faire-valoir du cours : ou plutôt, si leur importance est reconnue, un réel travail d'exploitation des œuvres produites au cours des activités n'est pas entrepris – et les manuels ne donnent pas de traces de ce que pourrait être un tel travail.

À ce stade, il convient de souligner en outre que les praxéologies institutionnalisées dépendent étroitement de l'organisation de l'étude qui a permis leur production. La fragilité des éléments de *logos* institutionnalisés dans les deux exemples que nous avons proposés découle pour une large part d'une organisation de l'étude inadéquate : pour faire émerger le produit scalaire comme outil permettant la mesure d'un défaut d'orthogonalité (ce qui constitue une de ses raisons d'être, et en particulier une raison d'être de sa formulation au moyen du cosinus), pour produire une définition satisfaisante du volume et de la contenance, il faut mener une étude plus approfondie que celles que suggèrent les manuels – et dont nous avons essayé de livrer une esquisse dans chaque cas. Reprenons par exemple le cas des volumes : au cycle 2, deux solides ont le même volume si, par immersion dans une cuvette d'eau, ils produisent la même élévation du niveau d'eau. L'étude des volumes au cycle 3 telle qu'elle est proposée dans les manuels étudiés ne prend pas appui sur ce *logos* préexistant et ne peut dès lors proposer de définition consistante du volume : le volume d'un solide est l'espace occupé par le solide ; comment comparer les espaces occupés ? Que signifie occuper un espace, et à quel type de manipulation des objets cela renvoie-t-il ? D'ailleurs, les manuels peinent à proposer des définitions de la contenance claires et distinguées de celles du volume : là encore, il manque dans l'organisation de l'étude tout un travail sur l'immersion et le remplissage par des liquides, qui aurait l'intérêt de distinguer entre volume et contenance en distinguant les *manipulations* opérées sur les objets dans chaque cas.

Le *volume* d'un *corps* (solide ou liquide) est le même que le volume d'un autre corps (solide ou liquide) si, après immersion dans deux bassines de même forme et contenant le même liquide, l'élévation du liquide est la même dans les deux bassines. La *contenance* d'un *solide* est la même que celle d'un autre solide si on peut remplir le premier, puis verser le contenu dans le second et le remplir exactement, sans manque ni débordement. L'articulation au problème de la mesure est alors facilitée : mesurer une grandeur, c'est la comparer multiplicativement à une autre grandeur prise pour unité. Il suffit alors de comparer l'élévation du liquide dans une bassine causée par l'immersion d'un corps à celle produite par l'immersion d'un certain nombre de cubes de côté 1 cm (par exemple) : le nombre de cubes produisant la même élévation est la mesure du volume du corps dans l'unité que constitue le cube de côté 1 cm. On peut aussi montrer expérimentalement que la contenance d'un solide est le volume de liquide qu'il peut contenir, ce qui justifie les « équivalences », souvent mystérieuses, qui sont avancées entre volume et contenance.

Le phénomène qu'on aura ainsi illustré est apparenté à ce qu'a indiqué Artaud (2019) à propos de la construction de l'algèbre à partir des programmes de calcul : plus que d'infrastructures mathématiques (ou tout autant), ce dont manque la profession c'est d'un *logos* relatif à l'organisation de l'étude. L'étude d'une œuvre mathématique pourrait passer par l'étude de son élaboration comme œuvre mathématique à partir d'autre chose, c'est-à-dire par l'étude d'un processus de théorisation mathématique (voir Artaud, 2019, en particulier à partir de la page 92). Le *logos* professionnel des professeurs de mathématiques ne comporte pas toujours l'idée que les mathématiques peuvent ou doivent être construites comme réponses à des questions de mathématisation : que serait une théorie mathématique de la perpendicularité ? du volume ?, etc. La conséquence en est une faible articulation entre des activités peu problématisées et un cours dont la rédaction n'est pas fondée sur l'exploitation d'un milieu constitué dans les activités. Une difficulté importante de la profession de professeur de mathématiques réside précisément dans la réalisation d'une articulation dialectique entre l'organisation de l'étude et l'organisation des mathématiques que cette étude permet de produire. En particulier, on notera l'importance de la mise en œuvre d'une expérimentation suffisamment riche pour l'élaboration de la notion de volume et de celle de contenance : c'est une difficulté importante pour la profession de concevoir et mettre en œuvre des protocoles expérimentaux en mathématiques même (Bourgade *et al.*, 2023). Il y a là un terrain à explorer.

Bibliographie

AGNEL, S., AMADEI GIUSEPPI, D., BLAZQUEZ, N., FLORIAN, F., GRECH, J.Y., & SIBARI, H. (2016). *Dimensions Maths 6e*. Hatier.

ARTAUD, M. (2011). Les moments de l'étude : un point d'arrêt de la diffusion ? Dans M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarria, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage, & M. Larguier (Éds.), *Un panorama de la TAD: Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (p. 141–162). Centre de Recerca per a l'Educació Científica i Matemàtica.

ARTAUD, M. (2019). Praxéologies de formation, praxéologies pour la formation et leur écologie. La justification des pratiques comme condition et comme contrainte. *Educação Matemática Pesquisa*, *21*(5). https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/45598

BARNET, C. (2022). *Mission indigo, Maths 6e*. Hachette Éducation.

BOURGADE, J.-P., & DURRINGER, C. (à paraitre). Les professeurs de mathématiques et l'institutionnalisation. *Recherches en didactique.*

BOURGADE, J.-P., CIRADE, G. & DURRINGER, C. (2023) Le « savoir » comme fonction. *Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)*, *13*(4), 18–38.

BROUSSEAU, G. (2004). *Théorie des situations didactiques.* La Pensée sauvage.

BROUSSEAU, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998).* http://pedagogie.lyon.iufm.fr/mathdelay/IMG/pdf/TSD_brousseau.pdf

CHEVALLARD Y. (2002a). Organiser l'étude. Structures et fonctions. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Dir.), *Actes de la 11*e *école d'été de didactique des mathématiques* (p. 3–22). La Pensée sauvage.

CHEVALLARD Y. (2002b). Organiser l'étude. Écologie et régulation. Dans J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Dir.), *Actes de la 11*e *école d'été de didactique des mathématiques* (p. 41–56). La Pensée sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221–266. https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/

CHEVALLARD, Y. (2009). *Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER* [communication orale]. Journées Ampère, Lyon.

CHEVALLARD, Y. (2020). Some sensitive issues in the use and development of the anthropological theory of the didactic Quelques questions sensibles dans l'utilisation et le développement de la théorie anthropologique du didactique. *Educação*

Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, *22*(4), 13–53.

CHEVALLARD, Y. (2022). On the Genesis and Progress of the ATD. In Y. Chevallard, B. Barquero, M. Bosch, I. Florensa, J. Gascón, P. Nicolás, & N. Ruiz-Munzón (Éds.), *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* (p. 5-11). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-76791-4_1

FONSECA, C., GASCÓN, J., & OLIVEIRA, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa RELIME*, *17*(3), 289–318. https://doi.org/10.12802/relime.13.1732

GASCÓN, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *4*(2), 129–160.

GUEUDET, G., & TROUCHE, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés, *Éducation et didactique*, *2*(3), 7–33. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.342

HERAULT, F., & SOTURA, B. (2019). *Maths 1re métamaths*. Belin Éducation.

JOLY, V. (2022). *Manuel TAM Maths 6ᵉ*. Hatier.

KUZNIAK, A. (2005). La théorie des situations didactiques de Brousseau. *Repères-IREM*, *61*, 19–35.

LAPARRA, M., & MARGOLINAS, C. (2008). Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation. Des effets de la transparence des objets de savoir. *Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation*. https://hal.science/hal-00779656/

MALAVAL, J. (2022). *Transmath 6ᵉ*. Nathan.

MARGOLINAS, C. (2014). Connaissances et savoirs. Concepts didactiques et perspectives sociologiques. *Revue Française de Pédagogie*, *188*, 13–22.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2008). *Programme du collège*. Éduscol. https://www.education.gouv.fr/node/276998

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2019a). *Attendus de fin d'année en 6ᵉ en mathématiques*. Éduscol. https://eduscol.education.fr/document/14014/download

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2019b). *Attendus de fin d'année en CM2 en mathématiques*. Éduscol. https://eduscol.education.fr/document/56037/download

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2020). Ministère de l'éducation nationale et de la jeunesse. *Programme du cycle 4 en vigueur à la rentrée 2020*. Éduscol.

MINISTÈRE DE L'EDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE (MENESR) (2016). *Mathématiques. Grandeurs et mesures au cycle 2.* https://eduscol.education.fr/document/15406/download

RUIZ-MUNZÓN, N., BOSCH, N., & GASCÓN, J. (2011), Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. Dans M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage et M. Larguier (Dir.), *Un panorama de la TAD. An overview of ATD* (p. 743–765). Centre de Recerca Matemàtica. https://portalrecerca.uab.cat/en/publications/un-modelo-epistemol%C3%B3gico-de-referencia-del-%C3%A1lgebra-como-instrumen

SENSEVY, G. (2001). Théories de l'action et action du professeur. In J.-M. Baudouin, J. Friedrich, (Dir.). *Théories de l'action et éducation.* De Boeck. 10.3917/dbu.baudo.2001.01

JEAN-PIERRE BOURGADE

INSPE Toulouse Occitanie-Pyrénées, EFTS, SFR-AEF

jean-pierre.bourgade@univ-tlse2.fr

CLEMENT DURRINGER

INSPE Toulouse Occitanie-Pyrénées, SFR-AEF

clement.durringer@univ-tlse2.fr

DERYA DIANA COSAN

PRAXEOLOGICAL DIFFERENCES IN INSTITUTIONAL TRANSITION: THE CASE OF SCHOOL ALGEBRA

Abstract. The transition from lower secondary to upper secondary school is a challenging time for many students with algebra as a focal topic. In this paper, we present a new approach to this problem, based on the anthropological theory of the didactic, particularly on what we call praxeological differences between two connected institutions. The methodology involves the construction of a praxeological reference model for school algebra based on documents such as textbooks and evaluation instruments, like national exams and screening tests, from these two institutions. To illustrate this approach, the Danish transition problem in algebra between the lower and upper secondary school is examined as a case study. The results obtained by the students from these evaluation instruments are also a part of the data, to focus on knowledge actually obtained. The results from this case indicate that praxeological difference is chiefly concentrated on rules for rewriting an algebraic model.

Key words. Anthropological Theory of the Didactic, praxeological differences, praxeological reference model, arithmetic and algebra, institutional transition and transition problem

Résumé. Différences praxéologiques dans la transition institutionnelle: le cas de l'algèbre scolaire. La transition du premier au second cycle du secondaire représente un défi pour beaucoup d'élèves, l'algèbre étant un facteur principal. Dans cet article, nous proposons une nouvelle approche à l'analyse de ce problème, fondée sur la théorie anthropologique du didactique, surtout ce que nous allons appeler différences praxéologiques entre deux institutions connexes. La méthodologie implique la construction d'un modèle praxéologique de référence pour l'algèbre scolaire, fondée sur des documents provenant des deux institutions, comme les manuels et les instruments d'évaluation, comme les épreuves nationales et les tests diagnostiques. Afin d'illustrer cette approche, nous examinons le cas de la transition entre le premier et le second cycle de l'école secondaire au Danemark. Les résultats obtenus par les élèves aux évaluations font également part des données utilisées, afin d'examiner les connaissances effectives. Les résultats pour ce cas indiquent que la différence praxéologique est principalement concentrée autour des règles de traitement d'un modèle algébrique.

Mots-clés. Théorie Anthropologique du Didactique, différences praxéologiques, modèle praxéologique de référence, arithmétique et algèbre, transition institutionnelle et problèmes de transition

---

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 29, p. 217 – 238.

1. Introduction

The transition from primary to secondary school (usually for students around the age of 12) is widely pointed out as a challenging time for students (Cantley *et al.*2021). During this time, organizational, developmental, social, and curricular difficulties or discontinuities will disrupt the students' transition and affect their subsequent learning (Cantley *et al.*, 2021).

There is not much research that maps out a specific mathematical domain or theme in the examination of the transition problem from the lower secondary to upper secondary school (Gueudet, 2016), apart from Carraher and Schliemann's (2014) research on early algebra. Gueudet (2016) emphasized that "algebra has long been the "transition topic" par excellence, marking the frontier between elementary and secondary education" (p. 18). In the Danish case, this transition appears mainly between the lower and upper secondary school, as we shall see.

Ruiz-Munzón *et al.* (2013) point out that "algebra appears as a practical and theoretical tool, enhancing our power to solve problems, but also as the possibility of questioning, explaining and rearranging already existing bodies of knowledge" (p. 4). This crucial role of algebra in the acquisition and understanding of other aspects of mathematics explains the rationale behind our decision to focus on this domain.

Danish students consider the transition from the lower secondary to upper secondary school as particularly difficult in mathematics, compared with subjects like English and Danish, where many students perceive more continuity in content and difficulty (Ebbensgaard *et al.*, 2014).

This study aims to model and map the difficulties of algebra in the transition from the lower secondary to upper secondary school, with the aim to identify the specific mathematical knowledge that contributes most to the perceived differences and difficulties.

We note that in the transition from the lower secondary to upper secondary school, one may find strongly related gaps in arithmetic and algebra since elementary algebra appears at first as a more abstract point of view – or model – of certain arithmetical problems. While this extension from arithmetic to algebra begins already in lower secondary school, algebra is crucial to almost all new subjects in upper secondary school, from basic functions to calculus, analytic geometry and stochastics.

After reviewing previous research on this gap as it occurs internationally, the theoretical framework for the present study, namely the Anthropological Theory of the Didactic and praxeological differences, will be presented. We can then present the research questions of the empirical case of the paper. Subsequently, the methodology for identifying praxeological differences will be presented. Finally, the paper will analyze and shed light on the Danish case.

1.1. The transition from arithmetic to algebra

Research shows that students worldwide experience difficulties in the transition from arithmetic to algebra. For example, Filloy and Rojano (1989) point out that there is a development from arithmetic to algebraic language which relates to the notions and the forms of representation of objects and their operations. In the particular context of solving equations, Herscovics and Linchevski (1994) mention that "the inability to operate spontaneously with or on the unknown indicates the existence of a cognitive gap that can be considered a demarcation between arithmetic and algebra" (p. 63).

Arithmetic and algebra to some extent use the same symbols, but their use of these symbols is different, which can leave students feeling uncertain about their meaning (Kieran, 1990). For instance, in the earlier grades (primary school), students have an operational understanding of the equal sign, meaning they consider the equal sign as a "do something signal" (Kieran, 1981, p. 319); and as emphasized by Welder (2012), a relational understanding of the equal sign, meaning that the equal sign is used to indicate the equivalence of two expressions, is central for learning algebra. For instance, a relational understanding is necessary to manipulate and solve equations, *i.e.*, to understand that the equal sign signifies an equivalence between two expressions is crucial. The students are thus transitioning from understanding the equal sign as a connection between a calculation task and its solution, to understanding the symbol as expressing a symmetric and transitive relation (Kieran, 1990).

By considering the concept of equations, an explanation for this transition problem can appear. Students in primary school have been introduced to and worked with equations in the form $A + B = C$, which means equations where "the left side of the equation corresponds to a sequence of operations performed on numbers (known or unknown); the right side represents the consequence of having performed such operations" (Filloy & Rojano, 1989, p. 19). These are referred to as the "arithmetical" notion of equality in Filloy and Rojano (1989), and methods like numerical substitutions and operating on the numerical terms only are sufficient for solving these equations.

Next, in the transition from primary to lower secondary school, students are introduced to equations like $Ax + B = Cx$, with an unknown on both sides of the equality sign. Students may no longer be able to solve equations using numerical substitutions, but solving this equation now requires operating on the entire equation (Filloy & Rojano, 1989).

In this context, Kieran (1990) points out that:

> The gap that exists between, on the one hand, problems that can be represented by equations with one unknown and that can be solved by arithmetic methods and, on the other hand, problems that are represented by equations with an unknown on each side of the equal sign and that usually must be solved by algebraic methods has been characterized by Filloy and Rojano as a didactic cut (p. 100).

It is, according to Filloy and Rojano (1989), essential to bridge this gap to enable students to transition from an arithmetical mode of functioning to an algebraic one.

Transitions have been studied from different perspectives and theories (De Vleeschouwer, 2010). This paper will examine the transition from lower secondary to upper secondary school (students of age around 16) from an institutional point of view. As De Vleeschouwer (2010, p. 155) pointed out, the transition from one institution to another is not necessarily about the existence of new mathematical content. Rather, this transition, and the problem the students experience in this context, can also be rooted in the fact that the same mathematical content is approached differently in lower secondary and upper secondary school (De Vleeschouwer, 2010). The paper will exemplify this institutional transition problem in algebra from Danish lower secondary school to Danish upper secondary school by using the Anthropological Theory of the Didactic.

2. Theoretical framework and background

The Anthropological Theory of the Didactic (hereafter ATD) introduced by Yves Chevallard (2019), aims to study human knowledge and activity, mathematical or otherwise, as phenomena that are crucially connected to the institutions that aim to develop, facilitate, and constrain them, based on the notion of praxeology (Chevallard, 2019).

According to ATD, praxeology refers to any human practice and activity and consists of two inseparable blocks, *praxis*, and a *logo* block. The praxis block (or know-how) contains one or *more types of task T*, or problems, and *techniques* τ utilized to solve these tasks (Chevallard, 2019). According to Chevallard (2019) the term 'techniques' refers to a "way of doing" tasks of type *T*. With the notation from Chevallard (2019), the praxis block is denoted as follows $\Pi = [T/\tau]$.

From an ATD point of view, no human activity can exist without any description, explanation, and justification. The required discourse on the praxis block is called logos. The logo block consists of two such discourses: a technology θ, namely the discourse utilized to describe, explain, and justify the used techniques, and a theory Θ, which refers to the formal justification of the technology (Chevallard, 2019). With the notation from Chevallard (2019), the logos block is denoted as follows: $\Lambda = [\theta/\Theta]$. The praxis block, $\Pi = [T/\tau]$, and the logo block, $\Lambda = [\theta/\Theta]$, together form a mathematical praxeological organization (also denoted mathematical organisations or mathematical praxeologies) (Barbé *et al.*, 2005) and is written in the form $\Pi \oplus \Lambda = [T/\tau] \oplus [\theta/\Theta] = [T/\tau/\theta/\Theta]$ (Chevallard, 2019).

Mathematical praxeology exhibit varying degrees of complexity: punctual, local, regional, and global ones (Bosch & Gascón, 2006). A mathematical organization (hereafter MO) is punctual if it consists of a single type of task, technique, technology, and theory. When a MO encompasses multiple punctual praxeology that shares the same technology, it is called a local MO. A regional MO comprises several local praxeology that shares the same theory. Finally, a global MO is composed of multiple regional praxeology (Barbé *et al.*, 2005).

We now consider the transition from an institution I_1 to a new institution I_2. I_1 and I_2 are two connected and neighbouring institutions, that is, students pass directly from I_1 to I_2, and depend on what they learned in I_1, at least at the entrance of I_2.

Upon entering the new institution, we assume that students are expected to arrive with a certain minimal mathematical organization MO^{I_2}. We, furthermore, let MO^{I_1} denote elements of MO^{I_2} that a certain share of the students have actually learned before leaving the institution I_1. Here, the "certain share" must be fixed and justified according to the context and aims of a given study; it could for instance be the majority of those entering I_2. We then define the praxeological difference (denoted suggestively $MO^{I_2}\setminus MO^{I_1}$ as all elements of MO^{I_2} which are not part of MO^{I_1}. Notice that these "missing prerequisites" can be entire local praxeology or just minor differences at the level of theoretical discourse, a single technique, etc. Of course, the praxeological difference could also be considered in relation to individual students and their praxeology from I_1 – a decision to include only what a majority failed to learn could reflect a pragmatic and somewhat arbitrary "average" of these individual differences. At any rate, we may often be more interested in identifying central examples than in exactness on items that are, to the expert, not expected to be central. Finally, we note that to find $MO^{I_2}\setminus MO^{I_1}$ we must determine MO^{I_2} first, and this may present greater methodological challenges (a point we return to the methodology).

We hypothesize that to describe transition problems, this concept of praxeological difference has the potential to provide a specific account of praxeological elements that contribute to causing them.

3. School algebra and ATD

Bolea *et al.* (2004) suggest that, in addition to viewing algebra as generalized arithmetic, school algebra should be interpreted as a process of algebraization of previously learned mathematical praxeology, which explains why school algebra is sometimes not treated as a distinct subject in the same way as arithmetic, geometry or statistics (Ruiz-Munzón *et al.*, 2013). Instead, it can be regarded as a general modelling tool of any school mathematical praxeology (Ruiz-Munzón *et al.*, 2013) and one may even choose to "not consider school algebra as a mathematical organization in itself, but as a way of modelling a given mathematical organization" (Bolea *et al.*, 1999, p. 137).

Ruiz-Munzón *et al.* (2013) point out that "algebra appears as a practical and theoretical tool, enhancing our power to solve problems, but also as the possibility of questioning, explaining and rearranging already existing bodies of knowledge" (p. 4), which highlights the essential role of algebra as a tool to address theoretical questions that arise in various domains of school mathematics, such as arithmetic and geometry.

According to Bolea *et al.* (2004), school algebra as a modelling tool has the property of giving "answers to questions related to the scope, reliability and justification of mathematical activity which is carried out in the initial system" (p. 127) and the algebraic model holds the potential to provide a description, generalization and justification of problem-solving processes, while also gather techniques and problems that initially appear unrelated (Bolea *et al.*, 2004, p. 127).

In this paper, we introduce a relatively rough reference model of secondary school algebra which recognizes, on the one hand, that algebraic expressions often arise there as an outcome of modelling processes, but that independent work with algebraic objects is also common, for instance, in solving equations or reducing algebraic expressions that appear without a previous modelling process.

Within ATD, a praxeological reference model (hereafter PRM), is developed by considering local and regional praxeology, as well as sequences of interconnected praxeology (Bosch, 2015). Bosch (2015) notes that the explicit formulation of a PRM for subjects such as elementary algebra can serve diverse purposes. Such a model could, in particular, serve as a crucial tool for the analysis, examination, and description of the algebraic content taught and learned across diverse institutions and can furthermore be used to examine what other elements are missing or can be integrated in any teaching process (Bosch, 2015). According to Barbé *et al.* (2005), among other things, official programs and textbooks may offer "a set of mathematical elements (types of problems, techniques, notions, properties, results, etc.) that constitutes the knowledge to be taught" (p. 240-241). We can view these as elements of an MO, but the level of detail of a PRM depends on the purpose of the model, in particular the questions it is used to investigate.

For our purposes we shall only need a relatively "rough" model, which posits that school algebra at the secondary level consists of three local algebraic organizations (Hereafter AO):

1. AO_1: Set up an algebraic model, based on numerical information (That is, the tasks lead to set up an algebraic expression or equation. A simple example: if a taxi trip costs 7€ per km and there is a start fee of 9€, how can we compute the cost of an arbitrary ride?)
2. AO_2: Substituting in an algebraic model. (Here, the tasks merely involve using given models. For instance, knowing the rule $A = \pi r^2$, what is the area of a circle with radius 7?)
3. AO_3: Rewrite (operate on) an algebraic model. (For instance, knowing that $A = \pi r^2$, how can we compute the radius of a circle with a given area?)

These three algebraic praxeology together form a praxeological reference model for school algebra at the secondary level, which can be further detailed (e.g., in terms of techniques or theoretical notion I'd needed. Notice that AO_1, AO_2 and AO_3 are not independent of each other, since they share the same algebraic theoretical discourse, but they do not necessarily build upon each other.

4. Objective of this paper

Gueudet (2008) pointed out that "transition issues can be studied by focusing on mathematical organizations on different levels" (p. 246). This paper examines the transition between lower secondary and upper secondary school by studying the algebraic (praxeological) organizations and praxeological differences between these two institutions, and deals with the following questions:

How can one investigate praxeological differences between two connected institutions through the construction of a common PRM based on documents from these two institutions? In particular, what local algebraic organizations could be relevant to such differences between secondary schools?

More specifically, it has two purposes:

1. To present a general methodology for identifying praxeological differences between two neighbouring institutions based on a praxeological reference model.
2. To demonstrate this methodology in action by examining the Danish transition problem in algebra between lower secondary and upper secondary school, while using the previously introduced distinction of three local organizations in school algebra.

5. Methodology

To determine the praxeological difference at the transition between two connected institutions, I_1 and I_2, while focusing on algebra at secondary level, we can use the model introduced above. Concretely the difference can be found as the union of $AO_1^{I_2} \backslash AO_1^{I_1}$, $AO_2^{I_2} \backslash AO_2^{I_1}$ and $AO_3^{I_2} \backslash AO_3^{I_1}$. In other words, we consider the praxeology of the three main parts of school algebra separately.

At the most basic level, analyzing the algebraic praxeological difference $AO_n^{I_2} \backslash AO_n^{I_1}$ for $n = 1, 2, 3$ concretely means to identify which algebraic praxis blocks related to AO_1, AO_2 and AO_3 are expected from students in I_2, but according to data from the national exam (see later), they are not learnt in I_1 by a majority of students entering I_2, for instance because they are not assessed at the end of I_1. The analysis of what is expected by the end of I_1 is based on the exam, since the official curriculum is very vague when it comes to concrete mathematical content, and, furthermore, only has the status of "suggested goals" *(vejledende mål,* in Danish).

To find $AO_n^{I_2} \backslash AO_n^{I_1}$ for $n = 1, 2, 3$ we begin by determining $AO_n^{I_2}$ for $n = 1, 2, 3$. The general idea is to do so by analyzing documents such as textbooks and evaluation instruments (like entrance exams and screening tests) used or expected at the entrance of I_2. As mentioned in "Theoretical framework and background", the determination of $AO_n^{I_2}$ for $n = 1, 2, 3$ may present greater methodological challenges. In the Danish case, this is due to the absence of official requirements as expressed in an entrance test. It is important to highlight that the types of task found at the beginning of textbooks used for the entrance of I_2 may not necessarily reflect expected praxis blocks for students upon entering I_2. These tasks may also indicate what students are supposed to learn after becoming subject of I_2. The determination of whether solving these tasks is a new learning goal at the beginning of I_2 can be made, in part, by analyzing the level of detail in the examples presented in the textbooks. A careful examination of the specificity and thoroughness with which an example is written or explained can explicitly reveal what students are expected to already know in order to comprehend the example, as well as what new concepts are introduced therein. On the other hand, widely used screening tests at the entrance of I_2 can offer a more extensive and concrete understanding of the expectations at the entrance of I_2.

Ideally and officially, the entry level for upper secondary school corresponds to the exit level of lower secondary school, but in reality, this is not the full truth, as items appearing in review sections or screening tests demonstrate. Thus, considering tasks given to students in the first period of upper secondary school will make it possible to get closer to the actual expectations.

In the Danish context, the first two months of upper secondary school currently involve praxis and theory blocks related to linear functions and models, including algebraic and graphical representations as well as linear regression. During the period from 2017 to 2019, the Danish government required upper secondary schools to assess their students after two months from the start. These tests (a total of 8 tests from STX (The Higher General Examination Programme) called Screening test), primarily focus on linear functions and regression. Algebraic knowledge is required to solve these tasks, right from the entrance of the upper secondary school, and therefore they will be used as a main source of indications of the upper secondary school's expectations of students' algebraic knowledge at the entrance of upper secondary school. These screening tests and materials, like textbooks, are password-protected and not accessible to the public. The only publicly accessible screening test is the Silkeborg Screening Test[1].

The identification of $AO_n^{I_1}$ for $n = 1, 2, 3$ is done by analyzing the textbooks and evaluation instruments, used in I_1, and by considering the results obtained by the students from these evaluation instruments. What we look for in $AO_n^{I_1}$ for $n = 1, 2, 3$ depends on what we identified in $AO_n^{I_2}$ for $n = 1, 2, 3$. This will lead to identifying those algebraic praxeology, related to AO_1, AO_2 or AO_3, which are expected at the entrance of I_2, but they are not a part of what students actually learned in I_1. Note here that even though a type of task is present in the evaluation instruments for I_1, it is important to consider how many students actually solve this task correctly. These results will enable a more accurate indication of how many students actually master that type of task. In the Danish context, we analyzed a total of 21 exam sets posed to all students at the end of lower secondary school (9th grade), for the period 2018-2023, and by considering data from the exam results. These exam sets and exam results are password-protected and not accessible to the public. Note that $AO_n^{I_1}$ for $n = 1, 2, 3$ denote the elements of $AO_n^{I_2}$ for $n = 1, 2, 3$ that a certain share of the students has actually learned, and this "certain share" must be fixed, as mentioned in "Theoretical framework and background". In the Danish context, 70% of the students move from lower secondary school to upper secondary school, why it is clear to set "a certain share" to 70%, but it is in reality more difficult to set this fixed, as the prevalence of a type of task should also be taken into consideration, which will be illustrated later in the Danish case.

Note that in the case study, the algebraic praxeological differences will mainly be described at a technical level, as it is easier to access and takes up the most

[1] https://www.gymnasiet.dk/media/1891/screening_juni15.pdf

prominence in the written exams, while the theoretical gaps are more difficult to identify (although further studies could usefully attempt to do so).

6. A transition problem in the Danish context: Praxeological differences

6.1. Outline of a more detailed PRM

As mentioned, the praxeological reference model (PRM) for school algebra at secondary level is based on three local algebraic organizations AO_1, AO_2 and AO_3. The concrete PRM in Table 1 – based on our analysis of data as described above – is a slightly more detailed PRM for the Danish case and consists of the three local algebraic organizations, where each of them contains several types of tasks. Here a distinction is made between three praxeologies of different size and complexity. In building the PRM for the Danish case, we identify a type of task T_i for every algebraic organization and the corresponding technique τ_i used to solve T_i.

AO_1: Set up an algebraic model	AO_2: Substituting in an algebraic model	AO_3: Rewrite (operate on) an algebraic model
$T_{1,1}$: Set up a first-degree equation based on a written description with numerical data. $T_{1,2}$: Set up an algebraic model based on a geometrical situation, usually involving a diagram with symbols attached.	$T_{2,1}$: Substitution of numbers into a linear equation. $T_{2,2}$: Substitution of numbers into a given algebraic expression.	$T_{3,1}$: Rewrite (operate on) a first-degree equation. $T_{3,2}$: Rewrite (operate on) an algebraic expression

Table 1. A praxeological reference model for school algebra at secondary level in Denmark.

AO_1 consists of tasks aimed at constructing an algebraic model and AO_1 is further divided into two different types of task. AO_2 consists of tasks that can be solved by substitution in an algebraic model, both numerically and with letters and variables.

AO_3 involves tasks aimed at rewriting or operating on algebraic models, and it includes a detailed discourse and description of the techniques involved. Based on the praxeological analysis, AO_3 is divided into classes of tasks, including rewriting a first-degree equation and rewriting an expression. Both types of tasks can, for example, make use of a relatively large number of techniques related, for instance, to the commutative and distributive laws, syntactic rules governing the use or non-use of parentheses, or exponent rules. For $T_{3,1}$, certain special techniques involving operations appear in addition to these – like adding some number or expression – carried out on both sides of the equality sign. Such techniques are often used in equation solving but are not used when rewriting an algebraic expression. For that reason, we differentiate between $T_{3,1}$ and $T_{3,2}$ in the PRM. This is a main reason for the distinction of $T_{3,1}$ and $T_{3,2}$ in the PRM (Table 1).

An example of a task related to $T_{3,1}$ is:

Solve the first-degree equation: $2(x + 1) = 5x - 8$

This task can be solved by the techniques:

– τ_1: use the distributive law $a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

– τ_2 : +, – , · or ÷ on both side of the equal sign.

– τ_3: Simplify by collecting and reducing similar terms.

An example of a task related to $T_{3,2}$ is:

Rewrite the algebraic expression: $r(5+s) + 2rs - 2r$

This task can be solved by the techniques:

– τ_1: use the distributive law $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

– τ_3: Simplify by collecting and reducing similar terms.

The following sections will outline the $AO_1^{USS} \backslash AO_1^{LSS}$, $AO_2^{USS} \backslash AO_2^{LSS}$ and $AO_3^{USS} \backslash AO_3^{LSS}$ where USS and LSS indicate Danish upper and lower secondary schools, respectively. The overall result will be that the transition problem from Danish lower secondary school to upper secondary school does not have its chief roots in $AO_1^{USS} \backslash AO_1^{LSS}$ and $AO_2^{USS} \backslash AO_2^{LSS}$ since $AO_1^{USS} \backslash AO_1^{LSS} \approx \emptyset$ and $AO_2^{USS} \backslash AO_2^{LSS} \approx \emptyset$**,** but that the transition problem is concentrated in $AO_3^{USS} \backslash AO_3^{LSS}$.

6.2. The praxeological difference: $\mathbf{AO_1^{USS} \backslash AO_1^{LSS}}$

Tasks in $T_{1,1}$ are characterized by the students being given some situation and data, and have to assign some variables (if not given by the task formulation) and set up a model based on the given information. In AO_1^{USS}, these models are linear models, meaning they are first-degree equations or expressions. The techniques used for solving tasks in $T_{1,1}$ enable students to determine which variables are involved, to identify an initial value and a rate of change, and then setting up a linear model in the form of $y = ax + b$ with a as the rate of chance and b as the initial value.

Exercise 2 from STX 2017 (1) Screening test is a task of type $T_{1,1}$ from upper secondary school, where the students must set up a first-degree equation based on a written description. Concretely the task involves setting up a first-degree equation to describe the relationship between the temperature of the water and the time from the start of the measurements, where the initial temperature of the water was 22°C and it increases by 7°C per minute. As mentioned, for solving this type of task, the students have to identify the initial value and rate of change and set up a linear model.

Task of $T_{1,1}$ – and also of $T_{1,2}$ – appear every year in the final exam in Danish lower secondary school for the period 2018-2023, and by considering students' performance in the final exam at lower secondary school, we have that $T_{1,1}$ and $T_{1,2}$ are also contained in AO_1^{LSS}.

Exercise 1 from the ninth-grade exam from May 2023 is an example of $T_{1,1}$ in AO_1^{LSS}. Here, students are required to use the same technique as exercise 2 from STX 2017 (1) Screening test, as they, based on a written description, must determine which variables are involved and then set up a first-degree equation. Concretely, the student is presented with several goods whose prices have increased by 9%. The task requires the student to set up a first-degree equation that can be used to calculate the new price of a product that originally cost x DKK. 30% of the Danish ninth grade students received 2 points, and 22% received 1 point (out of 2 points) for this exercise.

Tasks related to AO_1 occur with the same prevalence in both institutions, as we have observed that the type of task related to AO_1 occurs approximately every second year in screening tests for upper secondary school and in the exam for lower secondary school. So, the prevalence of tasks related to AO_1 is the same in both institutions.

Through an analysis of material from Danish lower secondary and upper secondary school, and by considering students' performance in the final exam at lower secondary school and by considering the prevalence of tasks related to AO_1 for both institutions, it can be concluded that AO_1 occur in both institutions with the essentially same types of task and related techniques. Based on this, we claim that the praxeological difference between lower secondary and upper secondary school is not related to AO_1. In other words, $AO_1^{USS} \backslash AO_1^{LSS} \approx \emptyset$.

6.3. The praxeological differences: $AO_2^{USS} \backslash AO_2^{LSS}$

As mentioned, the praxeological reference model (PRM) for school algebra at secondary level is AO_2^{USS} involves tasks related to $T_{2,1}$ and $T_{2,2}$. These can be identified in the material from the upper secondary school, and a characteristic task is exercise 16a in Figure 1. Concretely, exercise 16a belongs to $T_{2,1}$ where the technique is to set $x = 5$ and substitute it into the function $y = 2x + 3$.

For y and x, the following relation exists: $y = 2x + 3$
What is the value of y when $x = 5$?

Figure 1. Exercise 16 (Silkeborg Screening test)

It is observed from the final exam in ninth grade in lower secondary school that tasks related to $T_{2,1}$ occur every year for the period 2018-2023. Exercise 7 from the ninth-grade exam from May 2023, which involves solving the following three equations:

– 7.1: $6x + 5 = 41$

– 7.2: $4 \cdot (x + 1) = 5x$

– 7.3: $\frac{x}{2} + 12 = 2x - 3$

This is a characteristic type of task from AO_2^{LSS}. Superficially, it appears to be of type $T_{3,1}$, but in reality – given the techniques the students use – it is not, as we shall now explain.

What characterizes tasks related to $T_{2,1}$ in AO_2^{LSS} is that they have positive coefficients and positive integer solutions from the set $\{1\ldots10\}$. All the equations that are identified in AO_2^{LSS} have these properties: it is sufficient to use a trial-and-error technique with the solutions in $\{1\ldots10\}$ and thus get the solution with techniques for $T_{2,1}$, without algebraic operations. The tasks, 7.1, 7.2 and 7.3, are solved correctly by, respectively, 80%, 47% and 29% of the Danish students in the final exam at lower secondary school. Based on these observations, we claim that Danish lower secondary school students use a trial-and-error technique with the solutions in $\{1\ldots10\}$ for solving the tasks 7.1, 7.2 and 7.3. We claim that it is more difficult for the students to use substitution with the solutions in $\{1\ldots10\}$ in tasks 7.2 and 7.3, since parentheses and fractions are involved, which could be more difficult to calculate, which is why fewer students can solve tasks 7.2 and 7.3 correctly. Because if the students had used techniques such as the commutative and distributive laws, syntactic rules governing the use or non-use of parentheses, or exponent rules, the tasks, 7.1, 7.2 and 7.3, would be equally "easy" to solve, since they are all first-degree equations and thus have more or less the same correctness among the students.

Note also that substitution with solutions in $\{1\ldots10\}$ is a predominant technique in lower secondary school, even in tasks that on the surface looks like tasks related to $T_{3,1}$ (e.g. the tasks 7.1, 7.2 and 7.3). Tasks such as tasks 7.1, 7.2 and 7.3 occur every year in the final exam in lower secondary school with the same progression, *i.e.*, where the first task always has a higher correctness among the students and where questions 2 and 3 always involve fractions and parentheses.

Exercise 15.2 from the ninth-grade exam from May 2023 is an example of a task belonging to $T_{3,1}$ in AO_3^{LSS} and it was solved correctly by 35% of the Danish ninth grade students. The task involves determining the area of the base in a pyramid with a rectangular base, given its volume, 40 cm^3, and height, 12 cm. In the task, a sketch of the pyramid is given with a rectangular base, where the base dimensions are 2 cm and 4 cm, and the height from the base to the apex of the pyramid is 9 cm. To find the area of the base, the students have been given the formula

$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot G$ where V is the volume of a pyramid, h is the height of the pyramid and G is the area of the pyramid's base. On the surface, the task gives the impression that students need to rewrite the expression and isolating G, but what is characteristic of such tasks in ninth-grade exams is that they all have an integer solution, which is why rewriting does not become a prevailing technique among students, according to the guidance offered to the teachers and the exam results.

Through an analysis of material from Danish lower secondary and upper secondary school, and by considering students' performance in the final exam at lower secondary school, it can be concluded that the same types of task and techniques related to AO_2 occur at Danish lower secondary and upper secondary school. We can therefore conclude that the praxeological difference between lower secondary and upper secondary school is not related to AO_2. Therefore, we conclude that $AO_2^{USS} \backslash AO_2^{LSS} \approx \emptyset$.

6.4. The praxeological differences: $AO_3^{USS} \backslash AO_3^{LSS}$

AO_3^{USS} involves tasks related to $T_{3,1}$ and $T_{3,2}$. These can be found in the material from the upper secondary school, and a characteristic task is exercise 6 from STX 2017 (1) Screening test.

The exercise is about students being presented in an attempt to solve the equation $3x + 2(x + 1) + 7 = 5$ based on the following series of rewrites:

$$3x + 2(x + 1) + 7 = 5$$

$$3x + 2x + 1 + 7 = 5$$

$$5x + 8 = 5$$

$$5x = 3$$

$$x = \frac{5}{3}$$

and the students are tasked with identifying and describing the mistakes made in these rewrites. Concretely, this exercise belongs to $T_{3,1}$ and tasks related to $T_{3,1}$ in AO_3^{USS} have in common that solving them require the use of techniques where an operation on or with the entire equation is needed.

Notice that the classification of tasks related to either AO_2 or AO_3 is determined by observing what students actually do when they solve an equation. If an equation is solved by using a trial-and-error technique with the solutions in $\{1\ldots10\}$ and thus without algebraic operations, it can be characterized as a task in AO_2. However, if techniques involving operation in or with the entire equation are done, then the task can be classified as a task in AO_3. For example, the tasks 7.1, 7.2 and 7.3 from the ninth-grade exam from May 2023 can be classified as either AO_2 or AO_3, but we classify it as a part of AO_2 since it has solutions in $\{1\ldots10\}$. For exercise 6 from STX 2017 (1) Screening test, the situation is different.

This exercise illustrates a prevalent type of task, related to $T_{3,1}$, that upper secondary school students are expected to be able to solve at the entrance of upper secondary school.

This task can be solved by the techniques:

– τ_1: use the distributive law $a(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

– τ_2 : +, - , · or ÷ on both side of the equal sign.

– τ_3: Simplify by collecting and reducing similar terms.

From an analysis of textbooks used at the entrance of the upper secondary school, tasks related to $T_{3,1}$ in AO_3^{USS}, are identified as tasks that students should be able to solve at the beginning of upper secondary school.

For example, in an exercise from MAT STX textbook introductory phase, students are tasked with solving the following three equations by hand:

1. $3(14 + x) = 9$
2. $-3\cdot x = 5$
3. $7 - 2x = 3x - 3$

While these tasks might initially seem like previous ones *i.e.*, tasks 7.1, 7.2 and 7.3 from the ninth-grade exam from May 2023 from lower secondary school, there are notable differences. Students move from lower secondary school, where a trial-and-error technique suffices for solving equations with positive coefficients and positive integer solutions, to upper secondary school, where the techniques (τ_1 and τ_2) to manipulate and operate algebraically become necessary to solve first-degree equations; moreover they can have both negative coefficients, negative integer solutions, and non-integer solutions (as the equations of MAT STX textbook).

Figure 2 shows some tasks, used in the entrance of the upper secondary school, which are related to $T_{3,2}$ in AO_3^{USS}.

Simplify the following expressions as much as possible:

1. $\frac{a^4 \cdot b^3}{a^2 \cdot b}$
2. $(a - 2b)^2$
3. $(x - 1)(x + 2)$

Figure 2. Exercise 1, 2, and 3 (Silkeborg Screening test)

Exercise 1 in Figure 2 can be solved by the techniques related multiplication of fractions and exponent rules such as τ_4: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ and τ_5: use the quotient rule $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, while exercise 2 can be solved by the technique of squaring a binomial $\tau_6 : (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$. Finally, exercise 3 can be solved by the technique τ_1: use the distributive law $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

So AO_3^{USS} consists of types of tasks related to $T_{3,1}$ and $T_{3,2}$ with corresponding techniques τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, τ_5 and τ_6.

Very few types of tasks related to $T_{3,1}$ and $T_{3,2}$ exist in AO_3^{LSS}. We have observed that tasks related to $T_{3,2}$ in AO_3^{LSS} involve tasks where students are not required to perform a rewriting of an algebraic expression themselves, but instead, they need to explain a rewriting of an algebraic expression. Notice that out of 10 final exams with aids (where each exam consists of an average of 20 tasks) for the period 2018-2023, this type of task related to $T_{3,2}$ has occurred in 5 out of 10 final exams as one out of the 20 tasks. Therefore, this type of task occurs to a lesser extent in the final exam for lower secondary school. An example of this type of task is exercise 6.3 from ninth-grade exams from May 2021. The exercise is about students being presented in an attempt to rewrite the expression $n^2 - (n + 1) \cdot (n - 1)$ based on the following series of rewrite:

$$\begin{aligned} n^2 - (n + 1) \cdot (n - 1) &= n^2 - (n^2 - n + n + 1) \\ &= n^2 - n^2 - n + n + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

and the students are tasked with explaining the mistakes made in these rewrites.

By considering students' performance in the final exam at lower secondary school, we shall now examine the extent to which these tasks were solved correctly by students, which is essential to consider in the analysis of matter learnt.

To solve exercise 6.3 from ninth-grade exams from May 2021, where the students' aim is to explain the mistakes that are made in an algebraic rewriting, students need to have acquired the technique τ_1: use the distributive law $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. 5% of the students received 3 points, and 15% received 2 points (out of 3 points) for exercise 6.3, which could indicate that although a few tasks of type $T_{3,2}$ exists in AO_3^{LSS}, they can actually only be solved by very few students.

Exercise 6.3, which is a task related to $T_{3,2}$ in AO_3^{LSS}, is correctly solved by a maximum of 20% of the students. This type of low correctness, with a maximum of 35% in general, in the final exam among the Danish lower secondary students is a result that can also be observed in other tasks related to AO_3^{LSS}. It is therefore possible, based on the low student performance in the few and very unambitious exam tasks, to conclude that it is only a small minority that acquires parts of AO_3^{LSS} in lower secondary school.

As mentioned in the previous section, it is possible to observe tasks related to solving a first-degree equation in the final exam for Danish lower secondary school. However, since these equations have a solution in $\{1 \dots 10\}$, we chose to categorize these as tasks belonging to $T_{2,1}$ in AO_3^{LSS}. This gives that tasks which at first sight can be characterized as tasks related to $T_{3,1}$ in AO_3^{LSS}, do not belong to it, which is why $T_{3,1}$ is almost not to be found in AO_3^{LSS}.

In conclusion, AO_3^{USS} consists of tasks related to $T_{3,1}$ and $T_{3,2}$. $T_{3,1}$ contains types of tasks related to solving a first-degree equation (with negative coefficients, negative integer solutions, and real solutions) by operating on or with the entire equation, while $T_{3,2}$ contains types of tasks related to rewriting and operating on an algebraic expression, which is not limited to linear expressions. On the surface, by observing official tests such as the final exam for ninth grade, we see that in lower secondary school, there are tasks related to solving and operating on first-degree equations, and to rewrite expressions. However, the reality in lower secondary school is that all tasks related to solving first-degree equations can be solved by using a trial-and-error method with the solutions in $\{1 \dots 10\}$ and thus without algebraic operations. So, in lower secondary school, students can achieve full points by solving a first-degree equation without operating on the equation at all and the problem of lower secondary school is also that tasks related to AO_3 are solved by a few students. As we observed, AO_3^{USS} involves numerous rules and techniques, whereas AO_3^{LSS} is almost empty. When examining the very few types of tasks related to $T_{3,2}$ in AO_3^{LSS}, we noticed that they do not involve students working with expressions, as is the case with $T_{3,2}$ in AO_3^{USS}. Instead, students are only required to explain the simplification of expression rather than performing the simplification using techniques from $T_{3,2}$. So, based on these considerations, we can conclude that the transition problem from Danish lower secondary to upper secondary school is concentrated in to $AO_3^{USS} \setminus AO_3^{LSS}$.

Concretely, we can now say that the transition problem between Danish lower secondary school and upper secondary school lies in the fact that AO_3^{LSS} is almost empty while AO_3^{USS} contains many types of tasks and corresponding techniques. This means that $AO_3^{USS} \setminus AO_3^{LSS}$ is where the praxeological difference is greatest compared with $AO_1^{USS} \setminus AO_1^{LSS}$ and $AO_2^{USS} \setminus AO_2^{LSS}$. This is thus the reason for the significant algebraic gap and thus the transition problem between these two institutions.

7. Discussion

The present study has aimed to examine transition problems in algebra across institutions. To address the transition problem, our main point in this paper was to present a new theoretical notion *praxeological differences* within ATD, as a promising way to understand and describe a transition problem between two neighbouring institutions. Furthermore, we have presented a general methodology for identifying praxeological differences in algebra between neighbouring institutions, using a praxeological reference model for school algebra. Praxeological differences and the corresponding method can be useful in other institutional transitions as well, such as the transition from primary to lower secondary school, and for other mathematical domains with their respective praxeological reference model. A methodological challenge is that it can be very difficult to identify MO^{I_2}, as there is not always concrete material or tests used at the entrance to I_2. In the present study, this was observed in the Danish case. Another challenge is that it is difficult to assess the knowledge acquired by the lower secondary school students without access to their exam results. The term praxeological difference is a useful concept for use on an individual level, but when considering transition problems, it is the sum of all individuals' actually learned knowledge that is central, which is why access to data such as exam results can be important.

A methodical choice we have made in determining the praxeological difference between lower secondary school and upper secondary school, in a Danish context, is to focus on the praxis block. There are two reasons for this. Firstly, we observe that the praxis block, at the technical level, is what creates the biggest challenges for the students. Furthermore, the praxis block has a greater presence in the materials of both institutions, and it is difficult to identify the logos block.

For the Danish case, we have observed that the first-degree equation exists in the material from lower secondary school, but even though they are all characterized by having solutions in $\{1\ldots10\}$ and can be solved by a substitution, we observe that there is also a significant variation in how many students solve the tasks correctly. Exercise 7 from the ninth-grade exam from May 2023 is a task with three different first-degree equations of increasing complexity. The tasks, 7.1, 7.2 and 7.3, are solved correctly by, respectively, 80%, 47% and 29% of the Danish students in the final exam at lower secondary school. The decrease in the number of students who have solved the task correctly may, according to Filloy and Rojano (1989), be because students are used to working with equations in the form $Ax + B = C$, where numerical substitution is sufficient to solve this type of equation. However, Task 7.2 and 7.3 from the ninth-grade exam from May 2023 are of the form $Ax + B = Cx$, and according to Filloy and Rojano (1989), students can no longer use numerical substitution for this type of equation. But this is not what we observe in the Danish case. Even equations of the form $Ax + B = Cx$ in Danish lower secondary school have solutions in $\{1 \ldots 10\}$, so these equations are also solved with a trial-and-error technique. So Danish students solve complicated equations, as termed by Filloy and Rojano (1989), with a trial-and-error technique and substitution, and if they calculate incorrectly during this substitution, they can end up solving the equation incorrectly. Therefore, we claim that Danish lower secondary students do not solve first-degree equations incorrectly because the equations become more complicated, as Filloy and Rojano (1989) point out, since the technique remains the same; however, students may calculate incorrectly, for example, within parentheses or with fractions when using a trial-and-error technique with solutions in $\{1 \ldots 10\}$.

Based on the concept of praxeological differences and praxeological reference model, we can state that the transition problems in school algebra from Danish lower secondary school to upper secondary school is due to praxeological difference $\mathrm{AO}_3^{\mathrm{USS}} \backslash \mathrm{AO}_3^{\mathrm{LSS}}$. According to Kieran (1990), this may be because the transition from an operational understanding to a relational understanding of the equal sign has not succeeded, as mastery of AO_3 requires a relational understanding. As indicated by Filloy and Rojano (1989), we can assert that Danish students complete primary school with an arithmetical notion of equality, which could be the reason why the praxeological difference $\mathrm{AO}_3^{\mathrm{USS}} \backslash \mathrm{AO}_3^{\mathrm{LSS}}$ arises.

There are so many techniques in AO_3 that it is probably the most important, compared to AO_1 and AO_2, which contain fewer techniques. We have observed that there are few tasks related to AO_1 and AO_2 in both institutions, and these tasks were solved correctly by a limited number of students in lower secondary school. Consequently, AO_1 and AO_2 do not occupy much space in both institutions. We, therefore, found that the greatest praxeological difference, and where we believe the transition problem lies, is at $\mathrm{AO}_3^{\mathrm{USS}} \backslash \mathrm{AO}_3^{\mathrm{LSS}}$.

Transitional problems are therefore not directly caused by the tasks that the fewest students solve correctly in an institution. It is equally about the prevalence of a certain type of task. AO_3 is highly dominant and prominent in upper secondary schools but almost entirely absent in lower secondary school. Consequently, the praxeological difference $AO_3^{USS} \backslash AO_3^{LSS}$ is the largest and, thus, the most important compared to $AO_1^{USS} \backslash AO_1^{LSS}$ and $AO_2^{USS} \backslash AO_2^{LSS}$. Therefore, if the prevalence of a certain type of task is high in I_2 and almost absent in I_1, the praxeological difference $MO^{I_2} | MO^{I_1}$ will be large.

8. Conclusion

The present study contributes to the Anthropological Theory of the Didactic by introducing the concept of *praxeological differences* between two neighbouring institutions and presenting a general methodology for identifying these differences based on a praxeological reference model. We assert that praxeological differences, denoted as $MO^{I_2} \backslash MO^{I_1}$, and the corresponding methodology has the potential to address the transition problem between two connected institutions, denoted as I_1 and I_2. We have argued that the praxeological reference model for algebra consists of three local algebraic praxeology; AO_1: Set up an algebraic model, AO_2: Substituting in an algebraic model and AO_3: Rewrite (operate on) an algebraic model.

Applying this general methodology and the praxeological reference model for algebra, we examine the Danish transition problem in algebra from lower secondary school to upper secondary school by identifying praxeological differences: $AO_1^{USS} \backslash AO_1^{LSS}$, $AO_2^{USS} \backslash AO_2^{LSS}$ and $AO_3^{USS} \backslash AO_3^{LSS}$. Our findings indicate that the transition problem is primarily attributed to the praxeological difference $AO_3^{USS} \backslash AO_3^{LSS}$.

Acknowledgments

The author would like to thank her supervisor, Professor Carl Winsløw, University of Copenhagen, for his valuable suggestions and instructions in this study.

Bibliography

BARBÉ, J., BOSCH, M., ESPINOZA, L. & GASCON, J. (2005). Didactic restrictions on teachers practice - the case of limits of functions in Spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics*, *59*, 235–268. https://doi.org/10.1007/s10649-005-5889-z

BOLEA, P., BOSCH, M. & GASCÓN J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? In Mariotti, M. A. (Ed.) (2004). *European Research in Mathematics Education III: Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 125–133). University of Pisa and ERME.

BOLEA, P., BOSCH, M., & GASCÓN, J. (1999). The role of algebraization in the study of a mathematical organization. In I. Schwank (Ed.), *European Research in Mathematics Education I: Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (Vol. II, p. 135–145). Forschungsinstitut fuer Mathematik didaktik.

BOSCH, M. (2015). Doing Research Within the Anthropological Theory of the Didactic: The Case of School Algebra. In S. Cho (Eds), *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education* (p. 51–69). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-17187-6_4

BOSCH, M. & GASCÓN, J. (2006). Twenty-Five Years of the Didactic Transposition. *In Bulletin of the International Commission on Mathematical Instruction*, *58*, 51–65.

CANTLEY, I., O'MEARA, N., PRENDERGAST, M., HARBISON, L., & O'HARA, C. (2021). Framework for analysing continuity in students' learning experiences during primary to secondary transition in mathematics. *Irish Educational Studies*, *40*(1), 37–49. https://doi.org/10.1080/03323315.2020.1779108

CARRAHER, D., & SCHLIEMANN, A. D. (2014). Early algebra teaching and learning. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (p. 193–196). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_54

CHEVALLARD, Y. (2019). Introducing the Anthropological Theory of the Didactic: An attempt at a Principled Approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, *12*, 71–114. https://doi.org/10.24529/hjme.1205

DE VLEESCHOUWER, M. (2010). An institutional point of view of the secondary–university transition: The case of duality. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*, 155–171. https://doi.org/10.1080/00207390903372445

EBBENSGAARD, A. H. B., JACOBSEN, J. C., & ULRIKSEN, L. (2014). *Overgangsproblemer mellem grundskole og gymnasium i fagene dansk, matematik og engelsk [Transition problems between lower secondary school and upper secondary school in the subjects of Danish, Mathematics, and English]. IND's Skriftserie, Nr. 37*. University of Copenhagen. http://www.ind.ku.dk/publikationer/inds_skriftserie/2014-37

FILLOY, E., & ROJANO, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19–25.

GUEUDET, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, *67*, 237–254. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9100-6

GUEUDET, G. (2016). Survey on the State of the Art. In G. Gueudet, M. Bosch, A. A. diSessa, O. N. Kwon & L. Verschaffel (Eds.), *Transitions in Mathematics*

Education (p. 1-34). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-31622-2_1

HERSCOVICS, N., & LINCHEVSKI, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27,* 59–78.

KIERAN, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in Mathematics*, *12*(3), 317–326.

KIERAN, C. (1990). Cognitive Processes Involved in Learning School Algebra. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (p. 96–112). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139013499.007

RUIZ-MUNZÓN, N., BOSCH, M., & GASCÓN, J. (2013). Comparing approaches through a reference epistemological model: the case of school algebra. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (p. 2870–2879). Middle East Technical University and ERME.

WELDER, R.M. (2012). Improving Algebra Preparation: Implications From Research on Student Misconceptions and Difficulties. *School Science and Mathematics*, *112*, 255–264. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2012.00136.x

DERYA DIANA COSAN

University of Copenhagen

ddc@ind.ku.dk

RAYMOND DUVAL

FRANÇOIS PLUVINAGE ET L'IREM DE STRASBOURG : UNE AVENTURE ET UNE HISTOIRE COMMUNES

Abstract. François Pluvinage and the IREM of Strasbourg: a shared adventure and history. Since the first IREM, research on the teaching of Mathematics and on Teacher Training has had to face previously unknown challenges, and to cope with changes in educational systems: reorganization of curricula, development of IT tools and software for calculation, algebra, geometry, diversification of professional pre-orientations, etc. Member of IREM of Strasbourg since its creation, Francois Pluvinage was for fifty years a major player in the Research and Training activities that were developed there. We distinguish seven periods in his commitments and papers: writing textbooks, national assessments, the development of algorithms to model school exercises and determine their complexity, the D.E.A. and the theses in didactics, the *Annales de didactique et de sciences cognitives*, and the dialogue between the teacher and the students.

Keywords. understand mathematics, automation, three-modality questionnaire, semio-cognitive analysis,

Résumé. Depuis les premiers IREM les recherches sur l'enseignement des Mathématiques et sur la Formation des enseignants ont eu à relever des défis auparavant inconnus, et à faire face aux mutations des systèmes éducatifs : réorganisation des curriculums, développement de l'outil informatique et de logiciels pour le calcul, l'algèbre, la géométrie, diversification des pré-orientations professionnelles… Présent à l'IREM de Strasbourg dès sa création, François Pluvinage a été durant cinquante ans un acteur majeur des activités de Recherche et de Formation qui y ont été développées. Nous distinguons sept périodes dans ses engagements et ses travaux : l'élaboration de manuels, les évaluations nationales, l'élaboration d'algorithmes pour modéliser les exercices scolaires et en déterminer la complexité, le D.E.A. et les thèses de didactique, les *Annales de didactique et de sciences cognitives*, et le dialogue de l'enseignant et des élèves.

Mots-clés. comprendre en mathématiques, automatisme, questionnaire à trois modalités, analyse sémio-cognitive, dialogue enseignant-élève

---

De 1969, l'année de la création de l'IREM de Strasbourg sous la direction de Jean Frenkel, jusqu'aux derniers mois de sa vie, François Pluvinage a été un acteur majeur dans les activités de recherche et de formation qui y ont été développées. À la suite de la réforme des *New Math* aux États-Unis, la commission Lichnerowicz, dont Jean Frenkel était membre, avait été mise en place pour conduire la réforme des « maths

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 29, p. 239 – 278.

modernes ». Quatre missions avaient été assignées aux premiers IREM créés en mars 1969 :

> « 1. Contribution à la formation initiale des futurs enseignants du second et du premier degré.
>
> 2. Formation continue en mathématiques des professeurs en exercice.
>
> 3. Recherche et expérimentation pédagogique sur le contenu et les méthodes de l'enseignement des mathématiques.
>
> 4. Élaboration et diffusion de documents (ces quatre tâches étant intimement liées). » (IREM de Strasbourg, 1969)

Avant d'entrer dans la toute première équipe de l'IREM de Strasbourg, François avait publié un article *Espaces des Feuilles de certaines structures feuilletées planes*, en lien avec sa thèse de 3e Cycle en mathématiques (Pluvinage, 1967). Mais la véritable prise en compte des quatre missions assignées aux IREM a commencé en 1973, avec Georges Glaeser comme directeur de l'IREM de Strasbourg. Mathématicien reconnu, Georges Glaeser avait publié un ouvrage « pour l'élève professeur » dont les deux premiers chapitres portent sur « l'activité mathématique » et sur « le langage mathématique » (Glaeser, 1971). Il a alors donné une impulsion originale aux différentes équipes déjà existantes de l'IREM de Strasbourg. Analysant l'activité mathématique à partir de « problèmes », il l'associait à l'heuristique, et opposait la résolution de problèmes aux « exercices ». Il a d'ailleurs publié le premier fascicule du *Livre du problème*, sous le titre *Pédagogie de l'exercice et du problème* (Glaeser, 1973). Intégrant la visualisation mathématique dans le langage mathématique, il insistait sur son rôle heuristique et croyait que la *Gestalttheorie* permettrait de l'analyser (Glaeser, 1982). Et dans la foulée il opposait la maïeutique au cours magistral. Enfin, comme beaucoup d'autres, il reprenait de manière non critique la psychologie génétique de Piaget, dont Pierre Gréco avait tenté de défendre l'apport, dans la commission Lichnerowicz, pour l'apprentissage des mathématiques par de jeunes élèves. Georges Glaeser a été le Maître en didactique des mathématiques pour François, qui s'est alors engagé dans presque tous les champs qui s'ouvraient aux recherches sur l'enseignement des mathématiques.

Je vais en retenir sept qui se sont progressivement imposés au fil des réformes des programmes, des réorganisations des curriculums, et du développement de la didactique des mathématiques.

1. Les toutes premières enquêtes à l'échelle des collèges en Alsace

L'une des premières idées de recherche, qui n'était pas explicitement mentionnée dans les missions de l'IREM, a été de mener une enquête à l'échelle de l'Académie de Strasbourg. Une équipe de huit membres de l'IREM, dont Pierre Buisson, François et deux psychologues, s'est attelée à ce travail en 1972. Le but était de recueillir « des informations précises sur l'acquisition des connaissances en fin de cinquième, et non d'explorer les capacités intellectuelles des élèves » (IREM de Strasbourg, 1973d). La seconde enquête, faite en 1973 avec une équipe de quatre personnes, s'était restreinte « à la question [de savoir] jusqu'où va la compréhension des élèves relativement à certains aspects élémentaires des structures numériques enseignées en 4^e^ et en 3^e^ » (Scherpereel *et al.*, 1974). Les résultats de cette deuxième enquête gardent, aujourd'hui encore, un intérêt au regard des évaluations nationales récentes. Deux questions cruciales avaient alors animé nos débats dans la conduite de ces deux enquêtes**.**

La première question cruciale était celle de la compréhension en mathématiques et des critères d'acquisition de connaissances mathématiques par les élèves de 11 à 15 ans. Il s'agissait donc d'une question relevant d'au moins trois points de vue différents : le point de vue mathématique, mais aussi le point de vue cognitif et le point de vue épistémologique. Et chacun de ces points de vue soulevait une question sur le choix d'une axiomatique, sur le fonctionnement cognitif de la pensée impliqué par toute activité mathématique — spécifique aux mathématiques ou commun à toute démarche scientifique — sur l'importance ou non du langage dans la pensée. La première question se subdivisait donc en au moins trois questions, et prend un sens différent selon celle sur laquelle on se focalise :

Q.1 Comprendre en mathématiques relève-t-il :

- De raisonnements qui sont spécifiques aux mathématiques, et lesquels ?
- Ou de pratiques et de procédures communes à toute démarche scientifique ?
- Ou, simplement, de la capacité rationnelle d'expliquer ce qu'on fait ou pourquoi ?

D'un côté, on affirmait que si « on expliquait bien », les difficultés de compréhension disparaîtraient – et sur ce point, les témoignages personnels de mathématiciens ne manquaient pas. Ce qui laissait penser que les démarches mathématiques étaient communes aux autres démarches scientifiques et que le choix d'une axiomatique était finalement secondaire. De l'autre côté, il y avait l'autorité incontestée de Piaget, dont il suffisait de prononcer le nom pour faire croire que la compréhension des mathématiques devait tout simplement suivre les étapes du développement de l'intelligence. Ce qui conduisait à rejeter l'importance et même le rôle du langage dans l'activité mathématique, celui-ci n'intervenant qu'ensuite quand on avait commencé à comprendre.

La deuxième question était directement liée à l'élaboration des questions qui devaient permettre d'évaluer les connaissances acquises par les élèves en fin d'année ou en fin de cycle. Elle se subdivise en deux questions : l'une sur le contenu des questions devant permettre l'évaluation des connaissances et l'autre sur le type de questions ou d'items permettant d'obtenir des réponses objectivement interprétables :

Q.2 L'évaluation des connaissances acquises doit-elle :

– Prendre en compte l'hétérogénéité des connaissances institutionnellement fixées comme objectifs dans les programmes au niveau d'une année ou au niveau d'un cycle, ou au contraire ne pas les prendre en compte ?

– S'appuyer sur un grand nombre d'items et de questions, ou se limiter à très peu, pour que les réponses des élèves puissent être considérées comme stables et fiables ?

François s'est essentiellement intéressé à cette deuxième question sur l'évaluation des connaissances, et non à la première sur la compréhension en mathématiques. Pour lui, l'évaluation devant porter sur l'acquisition des connaissances institutionnellement fixées comme des objectifs d'enseignement, la question importante était celle du nombre de questions et d'items à poser. Il l'a divisée en deux sous-questions, l'une prenant en compte la réaction des élèves, et l'autre le codage en vue du traitement des données recueillies.

Q.2.1 Peut-on échapper au dilemme entre le nombre important de questions nécessaires, vu le nombre de connaissances fixées comme objectifs, et le fait que trop de questions entraînent la fatigue ou l'ennui des élèves ?

Face à ce dilemme inhérent à toute enquête qui veut être la plus exhaustive possible, François a lancé l'idée d'un questionnaire à plusieurs modalités, dans lequel les élèves n'auraient pas tous à répondre aux mêmes questions. Cette idée a été ensuite mise en œuvre dans une enquête à trois modalités auprès d'élèves de cinquième en 1975, dans le but « d'étudier expérimentalement le rôle de l'ordre des questions et du contenu de leurs énoncés » (Duval & Pluvinage, 1977, p. 52). Elle est ensuite devenue la méthode d'organisation des items dans toutes les enquêtes que François a dirigées.

De l'autre côté, le codage des réponses ne doit pas seulement prendre en compte la réussite du point de vue mathématique, mais aussi la compréhension des élèves (Sherpereel *et al.*, 1974). Cela est essentiel pour les apprentissages ultérieurs et pour les capacités d'utilisation des connaissances acquises dans des contextes mathématiques ou non mathématiques très différents.

Q.2.2 Comment coder les réponses de manière à pouvoir distinguer les réponses pour lesquelles la « réussite » du point de vue mathématique est un indicateur de compréhension et celles pour lesquelles elle ne l'est pas.

Là, François, qui restait focalisé sur le point de vue mathématique, a précisé « quelles que soient les variations de formulation ou de présentation ». Nous reviendrons plus loin sur ce critère qui exclut toutes les variations sémio-cognitives dans l'élaboration de tâches ou de questions pour les élèves.

2. L'élaboration et la diffusion de documents : des fiches (1973) aux manuels (1977)

Parallèlement, trois équipes se sont investies dans la formation continue en mathématiques des enseignants en exercice et dans l'élaboration et la diffusion de documents, qui étaient deux des quatre missions assignées aux IREM. L'une, sous l'impulsion de Gilbert Hector[1], élaborait des fiches pour la formation des enseignants au langage ensembliste prônée par la Commission Lichnerowicz – les fiches sont conservées dans les archives. Une autre équipe, sous l'impulsion de Georges Glaeser travaillait à l'élaboration de problèmes de recherche centrés sur un thème mathématique comme par exemple la parité (IREM de Strasbourg, 1975) ou la géométrie d'incidence (IREM de Strasbourg, 1976). Et la troisième, sous la direction de François, élaborait des fiches pour les élèves. Celles-ci étaient ensuite discutées par un groupe d'enseignants qui les essayaient dans leurs classes. Ces premières fiches pour les classes de 6^{e} et de 5^{e} (Pluvinage, 1973a, 1974a) ont été publiées avec comme sous-titre *Feuilles d'instruction pour l'élève. Cours et exercices*. Elles comprennent respectivement 25 et 24 « chapitres », suivis par un complément intitulé « exercices et problèmes » selon le titre du premier des six fascicules du *Livre du problème*, publié la même année (IREM de Strasbourg, 1973a). Ces deux séries sont presque de petites encyclopédies à l'intention des juniors, car François était soucieux que leur contenu mathématique soit riche. Ces fiches étaient accompagnées d'une petite brochure *Livre du Professeur* (Pluvinage, 1973b, 1974b) dans lequel les réponses aux exercices étaient données après des explications sur l'utilisation de chaque exercice et des compléments sur leur arrière-plan mathématique. Dans la préface aux fiches de cinquième, Georges Glaeser en décrit le but et le mode d'emploi :

> La méthode adoptée tourne le dos à la pédagogie de l'exposition […]. Selon la pédagogie dynamique, au contraire, l'élève est confronté d'emblée à des situations sur lesquelles il peut agir. […]. Pour susciter l'engouement, il ne suffit pas que le contenu intellectuel des notions présentées soit riche. Il faut, de plus, provoquer des étonnements – voir des surprises – qui contribuent à marquer les esprits […]. Le maître évitera de fournir prématurément les réponses à des questions que les élèves n'auront pas comprises. (Glaeser, 1974, p. 2).

---

[1] Gilbert Hector, de l'Université Claude Bernard-Lyon 1, faisait alors sa thèse avec Georges Reeb.

Tout l'enjeu didactique de ces fiches tenait évidemment dans ces deux conseils pédagogiques. Je faisais des visites régulières dans une classe de cinquième du C.E.S. de la Robertsau où l'enseignant, qui avait participé aux réunions préparatoires à la rédaction des fiches en reprenait certains exercices. François n'y venait que sporadiquement. La distance était considérable entre ce que faisaient et me disaient les cinq ou six élèves que je suivais tout au long d'une séance et les objectifs des exercices proposés. Et surtout, au fil des semaines et des mois, rien ne changeait pour ces élèves.

Ce travail s'est poursuivi jusqu'à la publication en 1976 des fiches pour la classe de troisième, un an après l'adoption en juillet 1975 de la Réforme Haby portant sur le « Collège unique ». Le nouveau programme d'enseignement des mathématiques pour le collège réorientait les contenus sur le calcul numérique, les objets géométriques et physiques à observer ou à construire, et des notions trigonométriques. Les fiches ont été reprises et réadaptées en manuels en 1977, puis en 1978, suivant les nouveaux programmes, avec la collaboration importante de Jean Martinet, alors directeur de l'IREM**.**

3. La thèse de Doctorat d'État ès Sciences en Didactique des mathématiques

François a soutenu sa thèse en 1977 (Pluvinage, 1977). Trois expressions sont essentielles dans le titre de sa thèse. La première, « difficultés des exercices scolaires », s'inscrit dans le cadre de la distinction de Glaeser entre les problèmes qui donnent lieu à un travail de recherche et les exercices qui visent à obtenir des réponses automatiques, c'est-à-dire quasi réflexes[2]. La deuxième expression, « comportements de réponse », s'inscrit dans les débats qui avaient animé l'élaboration des enquêtes faites à l'IREM durant les années 1970-1975. La troisième, « enquêtes à plusieurs modalités », est l'apport méthodologique original de François pour les enquêtes d'évaluation des acquisitions des élèves par rapport aux objectifs visés par les programmes. Toute la recherche de François est commandée par les deux sous-questions méthodologiques (Q.2.1) et (Q.2.2). C'est ce qu'il explique dans l'introduction de sa thèse en opposant les tests aux enquêtes, et en reprenant la distinction de Glaeser entre problème et exercice scolaire :

[2] Dans le fascicule *Pédagogie de l'exercice et du problème*, les exercices répondent au besoin de « l'apprentissage de l'automatisme [c'est-à-dire] de l'acquisition de mécanismes de base […]. [Ils] doivent être spécialement composés pour s'entraîner. » (Glaeser, 1973, p. 29). Ces automatismes correspondent à des quasi-réflexes dans la mesure où un réflexe est « réaction automatique involontaire et immédiate précédant tout réflexion » d'un individu (*Petit Robert de la langue française*, 2008). Pour Glaeser, au contraire, les automatismes sont nécessaires lorsque, dans la recherche d'un problème, il faut effectuer des tâches routinières comme, par exemple, des calculs numériques simples (1971). Et il aimait parler des automatismes comme de « l'âne qui trotte ».

> Dans les tests on observe les variations individuelles sur des exercices donnés. Dans nos enquêtes, on observe, sur une population donnée, *les variations entraînées par des variations d'exercices*. (Pluvinage, 1977, p. 4)

L'intérêt de la thèse de François est qu'elle soulève la question de savoir si l'on peut aborder la question méthodologique, indépendamment de la question de la compréhension de la démarche mathématique, ou de celle des différences individuelles dans l'apprentissage des mathématiques (Q.1).

3.1. L'avers de la problématique : les algorithmes de réponse pour évaluer la fiabilité des exercices scolaires

Toute la recherche de François est commandée par le problème méthodologique sur les conditions que les questions posées doivent remplir pour que les réponses obtenues soient stables et fiables (Q.2). En effet, le plus souvent « les comportements de réponse » adoptés par les élèves varient selon les questions posées et, pour l'essentiel, s'expliquent par les questions posées. Pour résoudre ce problème, François reprend le terme "automatisme" (les démarches de réponse devenues des quasi-réflexes) pour retourner l'opposition glaeserienne entre les automatismes et l'heuristique. Ce coup de force sémantico-théorique conduit à assimiler les automatismes dans les comportements de réponse des élèves à des algorithmes de réponse :

– « Il m'a semblé que si l'on voulait préciser la notion de difficulté d'une question, une piste féconde pouvait être d'étudier *la structure des algorithmes de réponse* » (p. 9). Et dans un problème une procédure de résolution est une « classe d'algorithmes de résolution » (p. 177).

– Les automatismes sont des « processus de recherche fixés d'avance » (p. 12), que l'enseignement [veut] programmer chez les individus [pour répondre] à des questions (p. 11), qu'on peut aussi programmer sur un ordinateur digital courant (p. 13), [et qui] permettent d'obtenir des réponses aux « questions qui sont à la fois à la portée de la machine et de l'homme » (p. 13, repris p. 157)[3].

Autrement dit, il faut partir de « l'algorithme de résolution d'un exercice et plus précisément du déroulement temporel de l'algorithme » (p. 33) pour déterminer les critères de réponses stables à un exercice, et pouvoir conclure de manière fiable à

[3] François s'est contenté d'allusions à l'opposition entre les automatismes et l'heuristique sans l'expliquer ni citer Georges Glaeser dans son texte. Nous les avons regroupées en un énoncé complet de sa thèse. François utilise toutes les enquêtes qu'il cite pour montrer que les variations de questions entrainent des variations de réponses.

l'acquisition des connaissances mathématiques mobilisées par l'exercice, ou à leur non-acquisition. Cela conduit François à établir une hiérarchisation des déroulements des algorithmes sur quatre niveaux. Cette approche informatique amène François à définir « trois critères pour décider de compter ou non une question comme un automatisme à un niveau d'enseignement donné » (p. 13) :

> (Critère A1) […] Tous les éléments nécessaires à *la programmation d'une solution* : précision des pas élémentaires et prédétermination des choix possibles […] (Critère A2) L'énoncé de la question [doit] comporter les indications *d'appel du programme* de résolution. (Critère A3) *L'exécution du programme* de résolution doit pouvoir être accomplie "d'un seul jet" dans les conditions normales de travail » (p. 14).

> [Et là] ce qui est d'emblée important est la contrainte d'un déroulement temporel qui permet *d'orienter* la variété associée à un algorithme. (p. 36)

Le premier critère est celui des niveaux de complexité des algorithmes conduisant à la résolution d'une question. Il permet de déterminer les différents niveaux de complexité des questions posées dans les évaluations portant sur l'acquisition des connaissances mathématiques.

Le deuxième critère est plus délicat à utiliser. Il exige de prendre en compte le curriculum d'enseignement (c'est-à-dire le programme scolaire fixant les objectifs d'acquisition pour chaque année). Le programme scolaire change selon les niveaux de classe de la sixième au DEUG[4]. Ainsi une question peut être un automatisme en troisième et ne pas l'être en sixième ou cinquième, en DEUG ou au lycée. Ce sont les indications d'appel dans l'énoncé de la question sont le « signal » qui enclenchent le programme pertinent de résolution, aussi bien pour l'homme que pour la machine, et cela indépendamment des variations de la « difficulté cognitive » de la question ou de l'exercice. Ce deuxième critère correspond à la variable institutionnelle qui est didactiquement essentielle.

Le troisième critère a conduit à proposer une classification des déroutements temporels d'algorithmes en quatre types hiérarchisés. L'opposition entre les automatismes et l'heuristique se fait au niveau des algorithmes comportant un seul branchement. Ce critère implique une limitation du temps de réponse aussi bien pour l'homme que pour la machine. Cela n'est pas évident à déterminer, car il implique que le temps laissé pour répondre soit court pour filtrer les réponses venant spontanément à l'esprit, mais pas trop pour ne pas stresser les élèves.

La formulation des consignes ne doit pas être confondue avec la formulation d'un énoncé de problème, puisqu'elle ne répond pas aux trois critères que les questions

[4] Diplôme d'Études Universitaires Générales, deux années d'études supérieures après le baccalauréat.

posées doivent remplir pour obtenir des informations fiables sur l'acquisition de connaissances mathématiques.

3.2. L'envers de la problématique : la réduction des processus sémio-cognitifs impliqués par les activités mathématiques à la classification taxinomique des connaissances de la NLSMA[5]

Les exercices et les problèmes comportent aussi des « difficultés cognitives » qui sont indépendantes de la simplicité ou de la complexité des connaissances mathématiques à utiliser pour les résoudre. François a donc été obligé de les prendre en compte, en raison d'un phénomène que nous avions observé dans la lecture d'un énoncé de problème de BEPC[6], que nous avions appelé « les arrêts de lecture » (Duval & Pluvinage, 1975). Il l'a fait en adoptant la classification taxinomique des connaissances mathématiques de la NLSMA qui avait été présentée par James Wilson (1971). Or cette classification utilise, pour évaluer l'apprentissage des connaissances mathématiques, les premières classifications « cognitives »[7] des objectifs pédagogiques, faites par Bloom (1969). Cet ouvrage avait déjà été présenté dans plusieurs séminaires sous l'impulsion de Glaeser.

La classification taxinomique de Wilson porte sur les compétences requises pour répondre à des questions d'évaluation ou pour résoudre des problèmes. Elle distingue quatre manières possibles d'utiliser des connaissances mathématiques pour faire un exercice ou résoudre un problème. Elle les hiérarchise en quatre niveaux présumés correspondre à des niveaux de complexité cognitive au sens de Bloom. François reprend les deux définitions préliminaires de la classification de Wilson qu'il présente en annexe (1977, p. 161). La première porte sur le découpage des connaissances mathématiques en faits spécifiques : « Les faits spécifiques sont les *connaissances atomiques* » (p. 161). Et François précise « autrement dit les connaissances atomiques nécessaires à l'obtention des résultats » (p. 9). La deuxième définition porte sur la complexité des connaissances : « Un *concept* est un ensemble de faits spécifiques » (p. 161).

François a adopté sans la moindre discussion les deux premiers niveaux de la classification de Wilson, les troisième et quatrième niveaux (l'aptitude à résoudre des exercices au sens de Glaeser, et celle à résoudre des problèmes inhabituels) lui ayant paru inutiles pour répondre à la sous-question Q.2.1 qui commandait sa recherche. Sa hiérarchisation des déroulements des algorithmes sur quatre niveaux pouvait être mise en correspondance avec les deux niveaux de « complexité

---

[5] National Longitudinal Study of Mathematics Abilities.
[6] Brevet d'Études du Premier Cycle, 15 ans.
[7] Voir dans l'annexe de (Duval, 1996) : « L'approche développemental du cognitif » et « L'approche « Intelligence Artificielle » du cognitif » (pp. 381-382).

cognitive », même si cela impliquait la réduction de l'heuristique à « des démarches “erratiques” » (p. 12). Le point crucial pour François était de définir les critères que doit remplir toute question concernant les automatismes de réponse pour obtenir des réponses stables et donc fiables. Et là, les deux premiers niveaux de la classification de la NSLMA apportaient une justification cognitive aux choix des critères définis en fonction des algorithmes de résolution.

Le corpus des réponses des élèves recueillies dans sept enquêtes d'évaluation qui portaient sur des objectifs institutionnels d'acquisition a été utilisé pour tester la pertinence et la validité des trois critères définis pour les questions dont la résolution est automatique. François instaure ici une analyse régressive des questions, qui ne porte pas sur leur contenu mathématique, mais uniquement sur leur caractère quasi-réflexe ou non, c'est-à-dire selon la rapidité de réponse, qui est le seul indicateur d'acquisition de connaissances mathématiques de base. En effet, si les réponses ne sont pas quasi-immédiates, les acquisitions ultérieures de nouvelles connaissances ou leur utilisation dans des contextes très différents seront impossibles et cela entraînera un blocage ou un rejet des mathématiques.

3.3. L'analyse régressive des questions

La modélisation par des algorithmes des processus de réponse des questions posées dans les enquêtes d'évaluation a inévitablement conduit à ne s'intéresser qu'aux activités numériques et algébriques élémentaires, et à exclure des activités géométriques qui, elles, font appel à l'heuristique. François a donc choisi les sept champs de questions possibles qui lui paraissaient basiques :

– Le rangement du plus petit ou plus grand de sept à neuf entiers relatifs.

– Le rangement de nombres décimaux comportant trois ou quatre chiffres après la virgule, dont évidemment 1,1010 et 1,0101, et également les trois écritures 0,004 et 0,0038 et 0,00369.

– Additionner ou multiplier deux nombres décimaux, dont $3{,}14 \times (0{,}3)$, item qui s'est avéré significatif.

– Combiner ces opérations, certains items allant jusqu'à sept opérations à effectuer.

– Effectuer des divisions euclidiennes ou mettre sous la forme d'une fraction irréductible des opérations sur des nombres rationnels.

– Calculer des expressions littérales comportant trois « variables », trois valeurs différentes pour chacune des variables étant chaque fois données.

– La détermination du Sup de deux ou trois nombres, dans le cadre de questionnaires multiniveaux : Sup {–2 ; 0}, Sup {1,04 ; 1,07 : 1, 009}.

Ce sont les mêmes questions, choisies parmi ces différents types de tâche, qui se retrouvent dans les sept enquêtes sur lesquelles François a mené sa recherche, quatre enquêtes ayant été menées avec des membres de l'IREM. Elles sont directement formulées dans les expressions symboliques qui permettent d'effectuer un calcul, et non pas dans une phrase de la langue. Le recours à la langue se limite à quelques mots pour formuler une instruction.

L'analyse régressive porte sur les réponses recueillies dans ces sept enquêtes qui, dans la problématique de la thèse, sont considérées comme un corpus homogène de données. Il s'agit « d'observer sur une population donnée, les variations (des réponses) entraînées par *des variations d'exercices* » (p. 4). Et bien que les facteurs individuels soient importants, ainsi que la manière dont les informations sont présentées dans les questions, le codage des réponses est restreint aux trois critères qui caractérisent l'automatisme d'une réponse :

> « La difficulté d'un exercice a un caractère personnel : elle fait intervenir le thème de l'exercice, les informations données par l'énoncé, le matériel fourni par sa résolution, l'apprentissage préalable de l'élève, l'âge de l'élève… Ce qui est directement accessible à l'observateur est le déroulement du processus de résolution. C'est donc à cette procédure que nous pouvons espérer attribuer un profil de difficulté. »[8] (p. 10)

Autrement dit la modélisation du processus de résolution par un algorithme de résolution permet d'analyser le degré de difficulté d'une question, quels que soient la population et le cycle d'enseignement. Cela ne vaut bien évidemment que pour les questions d'évaluation de l'acquisition des connaissances mathématiques de base à l'échelle d'une population d'élèves, et non pour les élèves pris individuellement.

3.4. Le codage des réponses, l'interprétation et les résultats obtenus

Le codage des productions des élèves prédétermine l'interprétation qui pourra être faite de l'acquisition de connaissances mathématiques par les élèves. Si l'on veut évaluer la compréhension et « la durabilité des acquisitions » et non pas seulement la fiabilité des réponses, il faut prendre en compte des séquences de questions ou d'items et non pas chaque question ou chaque item. La règle d'or, si je puis dire, est de ne jamais attribuer une signification à une réponse sans s'être d'abord demandé : « Quelles sont les variations d'énoncés de la question n'affectant pas cette réponse ? » (p. 58). C'est la cohérence des réponses pour chaque séquence qui va servir de repère pour mettre en évidence dans chaque séquence :

---

[8] Et donc le profil de difficulté n'est pas attribué à la question.

(1) les difficultés dans le déroulement d'une réponse automatique, et donc la structure de l'algorithme (sous-jacent) à mettre en œuvre qui constitue le paramètre permettant de situer la difficulté d'une question.

(2) « des perturbations, susceptibles de jouer sur la difficulté [d'une question] dans les deux sens [réussite ou échec] » (p. 44).

L'interprétation des productions codées a été faite en utilisant l'analyse factorielle des correspondances.

Les résultats auxquels François est parvenu tiennent en trois comportements de réponses stables pour « les questions dont les processus de résolution sont fixés d'avance » (p. 13). Les deux premiers (équilibrage et plongement, voir page 44 et 45) sont deux types de perturbations et le troisième est l'arrêt de lecture dans la compréhension des énoncés formulés dans une phrase de la langue :

– L'équilibrage résulte de la perception de la symétrie dans la succession linéaire de signes de nombres et de symboles d'opération formant une égalité numérique ou algébrique, ou dans la succession de chiffres formant un syntagme opératoire pour désigner des décimaux illimités. Mais il exclut les activités géométriques qui sont plus ou moins heuristiques ;

– « Le plongement se rapporte à l'insertion d'un nouvel apprentissage dans l'acquis antérieur » (p. 45), c'est-à-dire au traitement d'une nouvelle notion par analogie avec les notions déjà utilisées. Par exemple, avec l'item vedette $(0,3)^2$, « l'erreur prépondérante […] [de] l'obtention de 0,9 au lieu de 0,09 [est une] attraction due au plongement » (p. 138) ;

– L'arrêt de lecture est l'arrêt sur « la partie [d'un texte] qui précède le premier endroit où la compréhension est possible » (p. 173). Nous avions déjà repéré ce phénomène dans la compréhension d'énoncés de problèmes de géométrie élémentaire. Mais ici, étrangement, François l'extrapole pour les expressions purement symboliques qui ne comportent aucun mot.

3. 5. L'apport de la thèse : des exigences, des questions et des… contresens

Pour comprendre l'apport de cette thèse à la didactique des mathématiques, il faut regarder l'avers et l'envers de la problématique qui a commandé tout le travail de recherche.

3.5.1. L'avers de la problématique : la nécessité de questionnaires à trois modalités

La nécessité de questionnaires à trois modalités répond à la question du type de questions posées et surtout du nombre de questions que l'on peut poser pour que les réponses obtenues puissent être considérées comme stables et fiables (Q. 2). En effet, pour évaluer les acquisitions sur les différentes connaissances élémentaires à la fin d'une année scolaire ou au terme d'un cycle d'enseignement, il faut beaucoup de questions. Le dépouillement et l'interprétation des données recueillies dans ce type de questionnaire soulevaient une difficulté de taille, celle du croisement des réponses préalablement codées. Car il s'agissait de savoir combien d'élèves dans une sous-population ayant réussi à un item *a* avaient aussi réussi à un autre item *b*.

Dans les premières enquêtes, nous utilisions des cartes perforées pour effectuer ces croisements. Avec une aiguille à tricoter, on sortait les cartes correspondant aux réussites à l'item *a,* puis celles à l'item *b,* et on comptait. Fastidieux et étrange travail que je faisais avec François aux manettes, si je puis dire, dans l'unique salle alors réservée à l'informatique ! Cela restreignait le traitement des données à finalement très peu de croisements. C'est là que l'analyse des correspondances créée par Benzecri (1973) – qu'il appelait aussi « taxinomie », c'est-à-dire de classifications hiérarchisées – a été décisive aux yeux de François. Car elle était celle « qui correspondait le mieux à nos besoins » (p. 4) et qui « permettait d'effectuer tous les croisements sur une machine » (p. 60). Mais cela ne résolvait pas le problème de la question Q.2.1 concernant les réactions des élèves face à des questionnaires trop longs et trop répétitifs pour les élèves. L'invention de questionnaires à trois modalités a permis de contourner cet obstacle concernant la fiabilité des données et des informations recueillies. Dans ce type de questionnaire, les élèves n'ont à répondre qu'aux questions de deux modalités. Et dans une classe, toutes les questions d'une même modalité peuvent n'être pas présentées aux mêmes élèves. Ce qui réjouissait François dans ce type de construction de questionnaires était de pouvoir dire ce qu'un élève aurait répondu à une question qu'on ne lui avait pas posée, compte tenu de ses réponses aux questions dans les deux autres modalités !

Malheureusement, c'est l'utilisation de l'analyse factorielle des correspondances et des questionnaires à trois modalités qui a retenu l'attention, et qui a été reprise ultérieurement dans beaucoup de travaux. Elle a d'ailleurs donné lieu à de vives discussions, notamment avec Régis Gras – qui, lui, proposait l'alternative de l'analyse statistique implicative des réponses, et non pas des questions posées. Je dis « malheureusement » parce que le rôle de l'analyse factorielle des correspondances est marginal dans la thèse.

3.5.2. L'envers de la problématique : la question de la compréhension des connaissances enseignées

La question de la compréhension est la boîte noire de toute évaluation des connaissances enseignées. Car si les critères de compréhension sont d'abord la justesse ou la pertinence mathématique des productions des élèves, ils ne sont pas suffisants. Il faut aussi prendre deux critères « cognitifs » pour évaluer la production des élèves, ou de chaque élève dans une classe :

– La rapidité de réponse, c'est-à-dire la spontanéité de réaction à la question posée, comme François l'avait souligné pour caractériser les « automatismes » ;

– Le fait de « voir », ou non, quand et comment utiliser une connaissance mathématique, que le problème à résoudre soit mathématique, non mathématique, ou « concret ». Et cela sans que personne n'ait à venir vous le dire !

La classification hiérarchique des manières d'utiliser des connaissances mathématiques ne permettait pas d'expliquer les observations faites en classe, sur les difficultés de compréhension des énoncés, les « arrêts de lecture » n'étant qu'un indicateur. Aussi François l'a réinterprétée pour en faire un outil d'évaluation du niveau de « complexité cognitive » des questions et des problèmes, qui au moins colle avec ces observations. Sa réinterprétation se limite à une simple reprise des deux définitions préliminaires de la classification de la NLSMA (*supra*, 3.2) :

– D.1 : « Les faits spécifiques sont caractérisés par le fait d'être isolément mémorisés et formulés ».

– D.2 : « Un fait spécifique est exprimé par une phrase, française ou symbolique, simple (c'est-à-dire sans subordonnée) ».

Autrement dit, cette réinterprétation revient à considérer la classification NLSMA comme une réponse à la question des processus cognitifs prérequis pour comprendre les mathématiques enseignées (Q.1). Mais ces deux définitions sont alors prises pour deux réponses à au moins deux des trois questions que la comporte cette question générale sur la compréhension en mathématiques.

– C.1 : Dans la compréhension et l'apprentissage des mathématiques, tout commence par la mémorisation de connaissances mathématiques atomiques.

– C.2 **:** Il n'y a pas de différence cognitive profonde entre : une phrase française simple (tout nombre entier a un successeur), l'écriture d'une formule littérale ($v = d/t$), ou celle d'une équation simple ($x + 2 = 8$),

> puisque ce sont des énoncés complets. Le passage de l'une à l'autre devrait relever d'une réaction quasi-réflexe, pour les élèves de collège et de lycée.

Cela est évidemment aux antipodes de toutes les observations que l'on peut faire en classe, de l'école primaire au lycée. Cela exclut tout activité et toute question géométrique, comme François théoriquement l'exclut. Et cela exclut aussi la complexité opératoire des calculs à effectuer avec des équations, ou seulement des formules. Car cette complexité exige que l'on prenne en compte le statut des symboles et les propriétés justifiant les substitutions à effectuer.

Et en regardant l'intérêt des enquêtes d'évaluation du point de vue d'un système éducatif et non plus de la fiabilité des exercices posés, ces deux réponses cognitives occultent la question plus importante dont dépend toute évaluation. Comment choisit-on les connaissances mathématiques qui vont être fixées comme les objectifs d'acquisition pour l'École primaire et pour le Collège ? Il suffit de comparer les réformes successives des Programmes depuis 1970 pour l'école primaire et depuis 1973 pour les classes de quatrième et de troisième du collège jusqu'aux plus récentes pour voir que cette question reste toujours l'autre côté du miroir des programmes de l'enseignement des mathématiques jusqu'à 16 ans.

Finalement la seule conclusion à laquelle conduit l'étude des comportements de réponses des élèves est qu'ils dépendent « des acquisitions antérieures qui sont individuelles et qui peuvent varier considérablement d'un individu à un autre » (p. 47). On est donc renvoyé à la question cruciale Q.1 : quel est le fonctionnement cognitif propre à toute activité mathématique, qu'elle soit « concrète », pratique ou théorique ? Question qui est toujours écartée dès qu'il s'agit de fixer les objectifs d'enseignement pour l'école primaire et pour le collège, et qui pourtant avait été pourtant soulevée avec la réforme de 1902/1905 (Bkouche, 1991) par les questions épistémologiques concernant les mathématiques abordées par Borel (1904) et par Poincaré en 1902 et 1905 (1968 et 1970).

3.6. Qu'est-ce que François a retenu et utilisé des recherches faites pour sa thèse ?

Pour répondre à cette question, il faut regarder sa participation à l'élaboration des enquêtes d'évaluation nationales et à leur exploitation, vingt ans plus tard.

3.6.1. L'exploitation des enquêtes nationales : les niveaux de compétences

En 1989, à la suite, à la suite de la loi d'orientation sur l'éducation de 1989, François reprend du service pour élaborer et interpréter des questionnaires d'enquête, non plus à l'IREM, mais à la DEP au ministère de l'Éducation nationale (Troseille & Rocher 2015). Son apport au dépouillement et à l'interprétation des réponses des élèves s'inscrit dans la logique des choix qu'il avait faits pour répondre à la question cruciale de sa thèse « comment interpréter les réponses à chaque item pour déterminer l'acquisition des notions que l'on veut évaluer ? » (*Supra,* Q.2.1). François reprend la notion de « compétence » devenue familière en pédagogie depuis les premières taxinomies d'objectifs pédagogiques élaborées par Bloom (1969), qui était absente de sa thèse. Mais il garde la hiérarchisation de la NLSMA des différentes manières d'utiliser les connaissances mathématiques élémentaires. En les appliquant aux acquisitions numériques, il apporte deux modifications majeures dans l'exploitation des enquêtes faites à grande échelle.

Deux niveaux d'acquisition de compétences sont distingués, concernant les quatre opérations et l'utilisation de la numération de position pour effectuer ces opérations : un niveau de « compétences de base » et un niveau de « compétences de maitrise ». Et entre ces deux niveaux, François a introduit un niveau intermédiaire qu'il a appelé « acquisition en cours » ! Et pour pouvoir hiérarchiser ces trois niveaux, toutes les réponses sont d'abord codées en mathématiquement « juste », « faux », ou « non réponse » et les items sont ordonnés selon leur du taux de réussite. Et c'est là que François a fait un coup de force statistique. Il établit une tripartition des items et des exercices en fixant des seuils pour parler d'acquisition et non-acquisition des connaissances (DEP, 1992, 1997) :

– Les compétences de base sont acquises quand il y a 75 % de réussites sur une séquence de 16 items portant sur une seule connaissance atomique. Ainsi pour les enquêtes de 1992 et de 1996, entre 20 et 25 % des élèves n'avaient acquis les compétences de base (sur un échantillon national de 2 100 élèves prélevé sur les réponses fournies par 800 000 élèves).

– Les compétences approfondies sont acquises quand il y a 75 % de réussites sur une séquence de 28 items portant sur deux connaissances atomiques. Ainsi entre 20 et 25 % des élèves avaient acquis ces connaissances approfondies.

– Et entre les deux, on parle d'« acquisition en cours », sans aucune explication ou justification. Or cela concernait plus de la moitié des élèves.

3.6.2. Les équivoques et impasses de la hiérarchisation des acquisitions en niveaux de compétences

En 1993, François avait présenté au séminaire de didactique de l'IREM de Strasbourg sa classification de niveaux de compétences qu'il venait d'élaborer et qui était reprise institutionnellement. Un point crucial, à la fois méthodologique et théorique, avait donné lieu à de vives discussions. Comment regrouper les items en une séquence qui corresponde à une compétence identifiable et mathématiquement pertinente ? L'enquête de 1992 présentait 16 items portant sur l'identification verbale de la position des chiffres dans les nombres décimaux, dans les opérations additives concernant les entiers jusqu'à 20, et dans les opérations multiplicatives par un facteur 10. Tous ces items ne présupposaient que la compréhension du système sémiotique d'écriture en base 10. Ils relèvent donc de la même compétence. Car parler d'« acquisition en cours » pour une séquence dans laquelle les réponses 2 + 3 = 5 *oui*, 4 + 3 = 7 *non*, 14 – 12 = 2 *oui*, 20 – 2 = 18 *non*, etc., alterneraient n'a pas de sens d'un point de vue mathématique, comme du point de vue d'un apprentissage des mathématiques. Or, pour masquer la faiblesse des résultats sur la compréhension du système d'écriture des nombres en base 10, les 16 items ont été fragmentés en sous-groupes pour être ensuite associés à d'autres items relevant d'un autre type de tâche. Cette démarche allait contre ce que François avait lui-même pris comme principe dans sa thèse, et contre ce que nous avions essayé de mettre systématiquement en œuvre dans la dernière enquête faite à l'IREM (Duval & Pluvinage, 1977). Mais ce fut un débat pour rien. François s'était déjà investi dans l'élaboration et l'exploitation des enquêtes commandées par le ministère de l'Éducation nationale et conduites par la DEP dont il était devenu une éminence grise.

Depuis, cette tripartition est devenue la référence institutionnelle des connaissances, compétences et savoir-faire devant être acquis au terme d'un cycle d'enseignement commun (le primaire ou le collège). Et elle a plus ou moins servi d'étalon d'évaluation des enseignements à l'échelle d'une sous-population (classes ou établissements), et des apprentissages pour les élèves pris individuellement.

Mais le résultat le plus intéressant de cette contribution de François aux évaluations standardisées des enquêtes est d'avoir révélé que peu d'élèves avaient alors le niveau de maîtrise attendu institutionnellement et que la grande majorité en restait au « niveau d'acquisition en cours ». La situation a-t-elle changé trente ans plus tard ?

4. Le D.E.A. et les thèses de didactique des mathématiques (1977-1999)

Le D.E.A. et le Doctorat de didactique des mathématiques ont été créés en 1977, dans le cadre du D.E.A. et du Doctorat du Département de Mathématiques de Strasbourg. La question des processus de compréhension et d'apprentissage en mathématiques s'est alors imposée d'emblée avec le choix des thèmes de recherche, la prise en compte des intérêts des étudiants chercheurs et, avec l'accompagnement des étudiants dans leur travail. Là, il a fallu vraiment s'interroger sur les processus cognitifs mobilisés dans toutes les activités mathématiques. Nous ne pouvions plus considérer la question comme en partie résolue par la classification NLSMA des niveaux de complexité cognitive, ou par l'épistémologie génétique ou la psychologie génétique de Piaget. C'était une question totalement nouvelle dont il fallait explorer et confronter les différents aspects. À partir de quoi et comment pouvions-nous l'aborder ?

Trois approches ont alors été progressivement développées :

- L'approche didactique classique. On part des programmes d'enseignement pour un cycle ou pour seulement une année scolaire. L'objectif est d'élaborer et de tester des séquences d'activités pour faire acquérir spécifiquement une notion, un concept ou un algorithme de calcul dans le cadre du travail en classe en interaction avec les autres élèves et avec l'enseignant.
- La confrontation d'une épistémologie des mathématiques, fondée sur le développement historique des concepts mathématiques et de l'épistémologie générale de la connaissance scientifique qui s'est développée à la suite de Kant. Elle porte sur ce qui est commun à toutes les démarches scientifiques, tandis que l'épistémologie des mathématiques porte sur ce que « l'activité de la mathématique » a d'irréductible aux autres démarches scientifiques (Glaeser, 1971). Car la pensée mathématique et les activités mathématiques relèvent d'un mode de fonctionnement cognitif qui rompt totalement avec la manière spontanée de penser, de réfléchir et de travailler dans toutes les autres sciences. En mathématique, personne ne peut comprendre ni faire à votre place.
- Les observations suivies tout au long d'une année, dans des classes de collège, de la manière dont les élèves entrent, ou non, dans les activités proposées, et, parallèlement, les observations interactives avec deux ou trois élèves, suivis individuellement.

L'opposition des deux premières approches est apparue dans le rôle donné à la résolution de problème pour comprendre et apprendre. Du point de vue didactique, la résolution de problème s'est imposée comme la situation dans laquelle toutes les activités mathématiques devaient être organisées pour introduire de nouvelles notions. Car elle sollicite l'activité d'au moins certains élèves et stimule une recherche, c'est-à-dire des questions qui naissent des résultats d'essais (Glaeser, 1971, p. 17 ; 1973, p. 19). Mais du point de vue sémio-cognitif, la résolution de problème présuppose des activités spécifiques pour faire prendre conscience de la manière de travailler et de penser en mathématique. Et sans ces activités spécifiques préalables, aucune compréhension et, donc, aucun apprentissage, n'est possible pour les trois quarts des élèves. En revanche la troisième approche est purement méthodologique. Elle peut porter sur un ou plusieurs élèves, sur une classe, ou sur une population entière d'élèves à l'échelle d'un pays. Elle peut être génétique ou longitudinale.

On peut distinguer deux périodes dans l'aventure de recherche, à la fois didactique et cognitive, qui a alors commencé.

4.1. Oscillations entre psychologie, pédagogie et enseignement des mathématiques

De 1978 à 1985, huit thèses ont été soutenues. Elles reprenaient plus ou moins la méthode de questionnaire à trois modalités et d'analyse multifactorielle de correspondances que François avait utilisée dans sa thèse. Pour le reste, elles développaient l'analyse des manuels que nous avions amorcée (Duval & Pluvinage, 1975), ou reprenaient l'observation en classe de collège que nous faisions déjà de deux points de vue totalement différents :

- L'un, essentiellement didactique, centré sur les interactions des élèves entre eux et avec l'enseignant ;
- L'autre, essentiellement cognitif tel celui de l'épistémologie génétique ou de la psychologie génétique de Piaget, centré sur quelques élèves pour saisir leurs réactions orales devant les tâches proposées et recueillir des données précises sur les points récurrents d'incompréhension ou de blocage auxquels les élèves se heurtent dans les tâches proposées, quel qu'en soit le contenu mathématique.

La toute première thèse a repris l'analyse algorithmique des comportements de réponse que François avait développée dans sa thèse, et la méthode qu'il avait utilisée pour élaborer les questionnaires et interpréter les réponses (Hitt, 1978). Les thèses suivantes, recentrées sur la question de la compréhension dans l'apprentissage des mathématiques, ont été plus exploratoires.

Trois thèses se sont appuyées sur la psychologie génétique de Piaget pour comparer les différents types de raisonnements requis dans des problèmes mathématiques et les stades piagétiens du développement de l'intelligence chez l'enfant et l'adolescent. Elles ont porté sur les raisonnements du stade des « structures opératoires « formelles » (11-16 ans), les seuls qui soient pertinents et valides du point de vue mathématique. L'une a analysé la compréhension des situations probabilistes portant sur le résultat de plusieurs tirages avec remise des boules après chaque tirage, et non pas sur le cas d'un tirage (Alarcon, 1982). La seconde a analysé la compréhension des énoncés implicatifs et de leur réciproque, lorsqu'ils sont formulés en langue naturelle (Radford, 1985). La troisième, s'inspirant de l'ouvrage séminal de Piaget *Le langage et la pensée chez l'enfant* (1923), a porté sur la manière dont les élèves regardent une figure géométrique, en leur demandant de formuler des instructions pour faire construire cette figure par d'autres élèves (Kubler-Weber, 1982). Ces trois thèses ont mis en évidence l'inadéquation totale de l'épistémologie et de la psychologie génétiques pour éclairer les processus cognitifs d'apprentissage et d'acquisition de connaissances mathématiques.

La compréhension des énoncés mathématiques par les élèves a été abordée plus globalement à partir de la lecture de manuels ou de fiches, que les explications ou les consignes des enseignants reflètent. L'outil utilisé n'était plus un questionnaire, mais le test de closure[9] qui porte sur la lisibilité des textes et dont la tâche demandée consiste à restaurer des phrases qui étaient tronquées à intervalles réguliers (Gagatsis, 1982).

Une autre a été faite par une approche pédagogique sous la direction de Georges Glaeser et la codirection de François sur l'auto-évaluation (Régnier, 1983). Elle reprend la distinction sur les finalités opposées des tests qui avait été faite dans le *Livre du problème* : « Il convient donc d'exercer l'élève à contrôler lui-même ses connaissances et à prendre conscience du degré de leur assimilation » (Glaeser, 1973, p. 82). Pour cela chaque élève doit fabriquer des exemples numériques pour « vérifier un savoir-faire » et pour « apprendre à vérifier la justesse d'un résultat ».

Deux autres ont été faites en dehors de toute problématique et de toute théorie. L'une portait sur le lien entre l'oralité constitutive de la parole et la reconnaissance d'une phrase comme une expression complète de sens, dans une suite de mots écrits qui est plus courte qu'une ligne ou déborde sur la ligne suivante. Les phrases proposées étaient des phrases simples portant sur les nombres entiers (Abdelli, 1985). L'autre était une étude longitudinale du travail d'un élève en classe. Il s'agissait de recueillir les réactions d'un élève et ses productions écrites, pour ne les interpréter qu'au terme d'un ou plusieurs mois, puis d'une année (De Goes Cambas, 1985).

4.2. Un renversement d'approche de la question de la compréhension en mathématiques : l'analyse sémio-cognitive de l'activité mathématique

Des tests effectués dès 1970 sur le passage des énoncés en français à des expressions littérales sémantiquement équivalentes avaient montré la distance cognitive entre le langage naturel et l'écriture symbolique pour dire les opérations de calcul sur les entiers. Ils avaient également montré que les obstacles n'étaient pas les mêmes pour le passage direct et le passage inverse. Le suivi régulier d'élèves dans plusieurs collèges avait permis d'élargir ces premières observations au fil des années et des réformes. On se heurtait toujours au fait que les obstacles subsistaient récurrents,

---

[9] Inventé en 1953, le test de closure consiste à supprimer un mot sur cinq dans un texte. On peut aussi prendre d'autres règles de suppression des mots (Gagatsis, 1980). Cette thèse a donné lieu l'année suivante à une publication dans une revue internationale (Duval *et al.*, 1987).

indépendamment des connaissances enseignées, que ce soit pour calculer avec les entiers, les relatifs, les décimaux et les rationnels, ou pour calculer en utilisant des lettres à la place de chiffres, et plus encore pour écrire et résoudre des équations. Et c'était la même chose pour utiliser des figures de géométrie plane et dans l'espace, les fonctions et les représentations graphiques, les probabilités, etc.

Cinq des huit thèses précédentes ont mis en évidence le fait que les activités mathématiques relèvent d'un mode de fonctionnement cognitif qui rompt totalement avec la manière spontanée de penser, de réfléchir et de travailler dans toutes les autres sciences. De plus, elles convergeaient sur la nécessité d'une description systématique du fonctionnement cognitif qui est sous-jacent à toutes les formes d'activités mathématiques, que ces activités soient abusivement dites « concrètes » ou « abstraites ».

Ainsi l'idée de faire des tests analogues à ceux de 1970, pour la conversion des écritures symboliques d'équations du premier degré en des représentations cartésiennes de droites et de quarts de plans et sur la conversion inverse, s'est naturellement imposée. Les expériences que j'avais pu faire dans des classes avec la collaboration d'enseignantes et d'enseignants montraient la pertinence et la fécondité de cette approche pour les élèves. De 1986 à 1999, quinze thèses ont, pour la plupart, été faites dans cette approche. Elles ont permis d'explorer tous les couples de registres utilisés dans les activités mathématiques. Quant aux registres, il n'y avait pas à les inventer. François en avait déjà mentionné certains dans sa thèse (le langage usuel, les symboles), il avait aussi utilisé largement les schémas, mais avait exclu les figures dont l'utilisation relevait de l'heuristique. Mais cela n'avait été que pour marginaliser les difficultés cognitives liées aux conversions et aux traitements, qui pour lui restait sans rapport avec l'activité mathématique elle-même ni avec la compréhension des concepts (*supra*, 3.5.2).

Pour étudier les sauts d'un système sémiotique de représentation à un autre, qui sont spécifiques à la manière mathématique de travailler, il fallait une tout autre méthode que celles des enquêtes et de l'approche didactique classique. Les premiers tests sur ces sauts ont été des mini-questionnaires. Ils ont été repris et progressivement affinés. Ils présentent un double avantage. D'une part, l'interprétation des données recueillies y est dissociée de toute correction ou évaluation mathématique des réponses. Et, d'autre part, il devient possible de réaliser des comparaisons dans le temps, soit pour un même élève, soit pour une cohorte d'élèves, de manière objective. En effet, en mathématiques, la compréhension d'un élève et sa progression ne peuvent pas être évaluées par rapport aux performances d'autres élèves ni à la moyenne des performances d'une population. Les mini-questionnaires appropriés pour étudier le fonctionnement sémio-cognitif sous-jacent à toute activité mathématique doivent satisfaire aux trois conditions suivantes :

- Pour les questions, on recourt à un type de tâche qui n'est ni un exercice ni un problème, mais une question à choix multiple. L'objectif est d'obtenir des réponses très rapides car il s'agit de savoir si la distance cognitive entre les représentations sémiotiques de deux registres est, ou non, un obstacle pour les élèves.
- La construction des mini-questionnaires doit se faire en respectant le principe fondamental de la méthode expérimentale, qui est de ne faire varier qu'un seul facteur à la fois en maintenant les autres constants. Pour cela, on prend comme variable cognitive dans l'un des deux registres toutes les variations de symboles pouvant correspondre à un tracé de ligne, ou à une zone, qui apparaît visuellement opposée à un autre. Selon le registre choisi comme registre de départ, on peut alors construire le mini-questionnaire et le mini-questionnaire inverse. Cette méthode est la condition nécessaire pour que les réponses obtenues soient objectivement interprétables.
- L'interprétation des données recueillies se fait sur une séquence de réponses à plusieurs items qui correspondent à l'une des variables cognitives respectivement propres à chacun des deux registres.

Cette méthode n'a bien évidemment pas exclu le recours à l'AFC, mais elle a accentué les divergences entre les deux approches.

Trois thèses marquent ce renversement d'approche de la question de la compréhension en mathématiques. La première juxtapose un mini-questionnaire, qui comporte encore trop d'items, avec une AFC pour interpréter les réponses obtenues (Radford, 1985). La seconde avait mis en évidence l'importance et les ramifications des décalages sémiotiques entre au moins trois registres (Koleza-Adam, 1987). La troisième analyse l'introduction de la notion de fonction dans les manuels et l'a corroborée par des observations sur l'obstacle des conversions implicitement admises comme évidentes (Guzman Retamal, 1990).

Parallèlement d'autres thèses ont mis en œuvre des mini-questionnaires construits selon le principe de la méthode expérimentale pour tester la spontanéité ou non de la conversion d'un registre à un autre (Hajri, 1986). Dans la même ligne que la thèse sur le plan repéré, deux autres thèses ont permis d'identifier les facteurs sémio-cognitifs dans les conversions entre visualisation cartésienne des tracés de forme 1D ou 2D et les écritures algébriques correspondant ou non à des fonctions (Pavlopoulou, 1994). L'enjeu était la reconnaissance ou la prise en compte des unités figurales 1D ou 2D, propres au quadrillage du plan par deux axes gradués orientés, le couple de registres (tracé d'unités figurales 1D ou 2D, écritures symboliques d'une relation). Ce sont ces unités figurales qui permettent de numériser les figures géométriques, de la même manière qu'elles permettent de visualiser les équations et les inéquations.

Cependant, dans les recherches sur les processus de compréhension et d'apprentissage qui sont spécifiques aux mathématiques (*supra*, 3.5.2), l'identification des variables sémio-cognitives n'est qu'une première étape. Leur objectif est de permettre d'organiser des tâches spécifiques pour faire reconnaître les unités de sens et les unités figurales mathématiques pertinentes dans chaque couple de registres. Cette reconnaissance, qui doit être très rapide, est la condition nécessaire pour pouvoir voir l'équivalence sémantique entre une expression soit verbale soit symbolique, et une visualisation soit cartésienne soit « euclidienne » de droites, de courbes, de surfaces ou de volumes dans l'espace. L'acquisition de cette reconnaissance rapide est la preuve du caractère primordial de cette approche pour que la majorité des élèves puissent comprendre et donc acquérir des connaissances mathématiques élémentaires. Trois thèses ont été faites dans ce but (Mesquita, 1989 ; Lémonidis, 1990 ; Damm Fleming, 1992).

Ces premiers travaux sur l'organisation de tâches spécifiques portant sur les conversions de représentations sémiotiques dans un couple de registres ont conduit à étudier le fonctionnement cognitif des substitutions que l'on peut faire en restant dans le même registre. Car chaque registre offre des possibilités de substitution qui non seulement se font indépendamment des autres registres, mais surtout qui ne peuvent pas être faites dans les autres registres. Ces substitutions, qui sont des « traitements », sont les seules qui soient pertinentes d'un point de vue mathématique, car elles permettent de démontrer ou de calculer. Deux thèses ont amorcé l'étude du fonctionnement cognitif sous-jacent aux traitements. Elles ont ainsi ouvert la troisième étape des recherches sur l'analyse sémio-cognitive dans le but de favoriser, chez les élèves, une prise de conscience de la manière de penser et de travailler en mathématiques (Padilla Sanchez, 1992 ; Rommevaux, 1997).

Une thèse a été faite sur la mise en équations des données concernant deux situations réelles de production pour résoudre des problèmes (Kourkoulos, 1991) et trois thèses ont essentiellement porté sur l'application de l'analyse factorielle avec des questions à deux ou trois modalités (Zaki, 1989 ; Faquih, 1991 ; Thadeu Moretti, 1992).

Une autre s'inscrit dans le cadre de la « pédagogie différenciée », en collaboration avec Louis Legrand (Rauscher, 1993). Elle a conduit à des travaux sur l'importance des productions écrites des élèves dans le développement des processus de compréhension en mathématiques.

La dernière thèse a été faite dans une période où François était devenu le directeur de la MAFPEN (Missions académiques pour la formation des personnels de l'Éducation nationale), et voulait cependant garder certains engagements à l'IREM. Dans sa nouvelle situation, François projetait d'organiser le travail en classe en utilisant l'outil informatique. Chaque élève aurait un moniteur comme bureau et l'enseignant pourrait suivre individuellement leur travail et intervenir. La thèse porte sur la compréhension des nombres rationnels en développant l'articulation du registre de l'écriture des nombres rationnels et de celui de la visualisation (Adjiage, 1999). Son apport a été la création de logiciels et l'expérimentation de logiciels pour faciliter la compréhension des nombres rationnels.

5. La création des *Annales de didactique et de sciences cognitives* en 1988

La revue *Annales de didactique et de sciences cognitives* a été créée en 1988 dans un double but. Il s'agissait tout d'abord de diffuser l'analyse sémio-cognitive de l'activité mathématique. La mention « sciences cognitives » dans le titre a été choisie en référence aux trois théories cognitives alors dominantes :

- Les recherches sur l'Intelligence Artificielle qui étaient déjà en plein développement depuis plus de deux décennies (Newell & Simon, 1972) ;
- Celles sur la mémoire sémantique et sur la compréhension de la langue naturelle (Schank, 1972) ;
- Celles sur la logique naturelle (Grize, 1983), et non plus sur la psychologie et l'épistémologie génétiques que Piaget (1924) a développées à la suite des deux ouvrages de Brunschvicg (1912, 1922).

En effet, l'analyse sémio-cognitive que l'on commençait à développer en divergeait radicalement. C'est pourquoi la première phrase du premier article du premier numéro, en 1988, présente l'idée directrice qui commande toute l'approche sémio-cognitive sous-jacente à l'activité mathématique, quels que soient les objets mathématiques étudiés, les propriétés qui les caractérisent, et les opérations qu'elles permettent d'effectuer :

> La distinction entre sens et référence « *Sinn* » et « *Bedeutung* » s'est révélée être une des plus fécondes pour tous les domaines dans lesquels le rapport à des concepts et à des idées s'effectue par la manipulation de signes, de symboles ou d'expressions. (Duval, 1988, p. 7)

Le logo est aussi essentiel que le titre inscrit dans deux hexagones, chacun contenant un hexagone plus petit dont les côtés sont parallèles à ceux des autres hexagones. Il montre comment le regard voit et reconnaît, dans une figure géométrique, des unités figurales 2D ou 3D, de préférence à des unités figurales 1D, indépendamment de toute connaissance géométrique. Quand l'un des deux petits hexagones apparaît comme un cube en relief, l'autre apparaît comme un cube en creux. Il y a ainsi deux manières possibles de voir le logo qui sont mutuellement exclusives, l'une des deux s'impose d'emblée comme évidente au premier coup d'œil. On touche ici à un phénomène cognitivement et didactiquement crucial : la quasi-impossibilité de faire basculer son regard dans l'autre manière de voir. Les hypothèses données dans les énoncés, ou les explications orales pour guider le regard sur ce qu'il faut voir n'aident en rien à voir ce qu'elles disent voir pour trouver la propriété à utiliser. Pour la très grande majorité des élèves, les hypothèses données restent des lunettes noires.

L'analyse sémio-cognitive est d'abord un outil d'analyse théorique et méthodologique. Les premiers points saillants qu'elle a permis de mettre en évidence sont les phénomènes de congruence et de non-congruence entre le langage usuel pour les énoncés ou les consignes, les symboles, les schémas, les figures, et les images. Et plus globalement, elle montre les impacts immédiats que les phénomènes de non-congruence ont sur les incompréhensions ou les blocages, systématiques et récurrents, et sur l'apprentissage des mathématiques.

Le deuxième but de la création des Annales était que les étudiants et les enseignants qui avaient fait leur thèse à Strasbourg, ou même seulement un D.E.A., puissent publier un article pour faire connaître leur recherche.

Lors des consultations faites préalablement à la création de la revue, l'installation d'un comité de rédaction avait été fortement suggérée. Mais cela a été délibérément écarté, vu le premier but qui motivait sa création. Tous les articles ont bien évidemment été attentivement relus, et parfois discutés, par deux personnes. Pour comprendre le mode de travail éditorial adopté, il faut rappeler l'ambiance d'échanges informels qui a régné à l'IREM de Strasbourg, de 1970 jusque vers les années 1990-1992. Les échanges informels y étaient aussi importants que les réunions d'équipe et les rencontres programmées en début d'année. L'IREM occupait tout le premier étage du bâtiment de l'IRMA. Tous les bureaux étaient presque toujours ouverts. Celui de François était la porte du fond, à gauche. Au centre du couloir, face à l'escalier qui montait aux autres étages de l'IRMA où travaillaient les mathématiciens, il y avait la machine à café, à côté de la porte du directeur de l'IREM. Cet espace élargissait donc les échanges informels aux mathématiciens qui s'arrêtaient, et nos discussions avec eux se poursuivaient parfois dans l'un des bureaux ouverts. Il en était de même pour les enseignants de l'enseignement secondaire qui venaient voir l'un des membres de l'IREM, ou qui venaient suivre le séminaire dans le cadre du D.E.A. et du Doctorat de didactique des mathématiques.

François est devenu le directeur de la publication en 1998, pour la sortie du numéro 6 des Annales. Dans la préface, il évoque le travail et la personnalité de Papini (surnom de J. Arlacon 1982), l'un des premiers doctorants dont la disparition a touché tous ceux qui l'avaient connu à l'IREM (Pluvinage, 1998). Il annonce la mise en place d'un comité de lecture pour la publication du numéro suivant en 2001. À partir du volume 10, en 2005, François a commencé à passer le relais à Alain Kuzniak.

6. L'abandon des questionnaires centrés sur l'acquisition des « automatismes », pour la maïeutique : rupture ou continuité ?

Toute la démarche des recherches de François sur l'enseignement des mathématiques s'inscrit dans l'opposition que Glaeser faisait entre les « automatismes » (les opérations effectuées de manière quasi-réflexe dans un calcul) et l'« heuristique ». Dans le chapitre 0 intitulé *L'activité mathématique*, de son ouvrage *Mathématiques pour l'élève professeur,* Glaeser mentionnait les trois approches de l'heuristique qui étaient, pour lui, indispensables de connaître. Les deux premières sont mathématiques (Glaeser, 1971) : celle de Descartes (2016) dans *les Règles pour la direction de l'esprit*, et celle de Polya (1965) centrée sur la résolution mathématique de problèmes spécifiquement mathématiques. La troisième est la maïeutique de Socrate qui, dans le *Ménon*, fait découvrir à un jeune esclave l'incommensurabilité du côté et de la diagonale du carré. Glaeser avait analysé le dialogue à partir de la traduction de Robin (Platon, 1963). Pour lui la maïeutique socratique était le prototype du « dialogue maître-élève, préférable au monologue magistral » (Glaeser, 1971, p. 31).

François ayant assimilé les « automatismes » à des algorithmes qui seraient à la fois « à la portée de la machine et de l'homme », l'heuristique ne pouvait être qu'une notion vide puisque définie par l'absence des critères définissant les automatismes (*supra*, 3.5.1). Cette approche menait à une impasse, puisque, la géométrie s'appuie sur la construction de figures, et que la manière de regarder une figure pour trouver la solution d'un problème ou s'en convaincre échappe à tout automatisme. En effet pour regarder une figure, il faut décomposer la figure donnée en unités figurales 2D plus petites, les reconfigurer autrement, mais aussi déconstruire les unités figurales 2D en unités figurales 1D. François est donc revenu à la maïeutique socratique, telle que Glaeser (1971) l'avait expliquée, lorsqu'il a officiellement travaillé, en 2002, à la *Sección de Matemática Educativa del* CINESTAV-IPN à Mexico, créée sous la direction d'Eugenio Filloy.

6.1. Le dialogue d'une enseignante et d'une élève, Marina : de quoi parlent-elles ?

Pour cette dernière étape dans les travaux de François, je vais retenir l'article sur l'introduction de la notion de vitesse publié dans les *Annales*, dans une classe en sixième année de scolarité à Mexico (Pluvinage & Rigo Lemini, 2008). François avait assisté à l'une des séances de la classe avec une enseignant en formation, et cette séance avait été enregistrée et transcrite. Nous sommes donc là aux antipodes, si j'ose dire, de la problématique et de la méthodologie des enquêtes faites à l'IREM de 1971 à 1978, puis reprises dans plusieurs thèses.

Tout le travail porte sur la notion centrale de proportionnalité, et non pas sur la notion de vitesse. On y accède par trois entrées différentes :

– Celle des nombres considérés indépendamment des grandeurs ;

– Celle des grandeurs mathématiques de distances entre deux points ;

– Celle des grandeurs physiques mesurables. Elle implique les rapports entre trois grandeurs physiques hétérogènes, chacune étant déterminée par des unités de grandeurs différentes : la vitesse et le temps pour une distance parcourue. Là, les nombres se confondent avec des unités de grandeurs différentes sont divisibles en unités plus petites pour prendre en compte les mesures faites.

Or, pour chacune de ces trois entrées, il y a un type de visualisation congruente, les deux autres ne l'étant pas, et créant donc une distance cognitive entre la visualisation et l'explication verbale ou écrite :

– Un tableau de deux colonnes juxtaposant deux suite de nombres fonctionnellement associées ;

– Un graphe cartésien pour représenter les variations par une droite ou par une courbe ;

– La visualisation géométrique pour des objets géométriques de dimensions différentes (droites, polygones ou cercles, cubes ou sphères).

L'objectif de la séance observée étant d'introduire la notion de vitesse, l'enseignante utilise « une table de valeurs supposée indiquer des temps de natation réalisés par des jeunes gens » (Pluvinage & Rigo Lemini, 2008 p. 43) et une séquence de questions posées pour décomposer la tâche et guider les élèves. Elle suit la séquence des questions préalablement fixée pour dialoguer avec la classe. Cependant la table de valeurs présentée est un tableau à double entrée qui est d'une complexité surprenante, puisque la marge verticale de gauche présente les différents nageurs avec des distances différentes en m et la marge horizontale supérieure, pour le temps, qui comporte trois colonnes pour séparer les h, min et s.

L'interaction de l'enseignante avec les élèves est didactiquement révélatrice. L'enseignante commence avec la question « Comment pouvons-nous savoir qui a nagé le plus vite ? ». La présentation d'extraits du dialogue de l'enseignante avec la classe est faite de manière à pouvoir être mise en parallèle avec le dialogue du *Menon*. L'enseignante n'obtient bien entendu aucune réponse utilisable. Pourtant, après plusieurs échanges, Marina intervient pour répondre « par proportionnalité » et justifie sa réponse en allant au tableau pour réaliser un tableau de proportionnalité sans aucune marge, et donc sans unités de mesure.

C'est sur cette intervention de Marina, que l'enseignante ne comprend pas, que commence tout le travail d'analyse portant sur la réponse et les explications verbales correctes de Marina présenté par François dans cet article. Cependant, François omet la réalisation du tableau de proportionnalité réduit aux seuls nombres, fait au tableau par Marina. Projetant son analyse sur le texte de Platon, François distingue deux phases dans le dialogue de l'enseignante et de Marina comme le déroulement des questions de Socrate et des acquiescements de Socrate. L'une porte sur la nature des opérations cognitives permettant de comprendre la démarche à faire, et l'autre sur les choix des unités figurales pertinentes pour répondre mathématiquement.

La première phase consiste à lire les échanges de l'enseignante avec Marina, comme si c'était un échange entre Socrate et… Marina. Pour cette mise en correspondance, quelques échanges sont extraits du dialogue entre Socrate et l'esclave de Menon. Autrement dit, « si nous mettons, à la place de l'esclave, une élève, Marina », il faut réécrire ce passage du *Menon* en faisant l'hypothèse que Marina « a pensé à l'assemblage de triangles rectangles isocèles » (Pluvinage & Rigo Lemini, 2008 p. 53). Mais que signifie ici le vocable « penser » ? Et Marina était-elle capable de le penser ? Car il ne suffit pas ici de voir des triangles rectangles isocèles, il faut aussi voir qu'il faut en assembler 8 et non pas 4.

Marina y a-t-elle vraiment pensé ? Car la véritable question est de savoir combien de triangles rectangles isocèles il faut assembler, 2, 4 ou 8 ? Et Marina pouvait-elle aussi penser qu'il en fallait 8 ? Le rapprochement fait entre le dialogue socratique et celui de l'enseignante avec Marina a conduit François à superposer et fusionner trois notions — proportionnalité, diagonale du carré et vitesse — pour pouvoir dire ce que Marina aurait vu sur la figure, mais qu'elle n'a pas dit.

6.2. De quel type de visualisation les explications de l'enseignante et de Marina sont-elles la description ?

La deuxième phase est l'explication de la démarche mathématique. Quelles connaissances mathématiques requiert-elle ? Aucune, car là aussi ce sont les opérations cognitives sous-jacentes à la manière mathématique de voir les figures qui sont importantes. Quatre opérations, purement « figurales » sont nécessaires pour voir les huit triangles isocèles à assembler comme le montre le dessin à main levée de la figure 1, et pour visualiser l'explication de Socrate :

(1) Décomposer le carré **2D** en traçant une diagonale **1D** pour obtenir deux triangles isocèles **2D** et 4+1=5 unités figurales **1D** (figure 1, en haut à gauche).

(2) Mais si on le décompose en traçant les médiatrices **1D** (figure 1, en bas), on obtient 4 unités figurales **2D** et 4+2=6 unités figurales **1D**.

(3) On peut reconfigurer un carré quatre fois plus grand que le carré de départ, celui en pointillés (figure 1, en haut à droite).

(4) Dans ce grand carré, on peut reconnaître un autre carré seulement deux fois plus grand que le carré de départ. La figure d'arrivée comporte notamment 4 unités figurales **1D** pour le carré en traits plein. On s'appuie ici sur un pavage du plan par des triangles rectangles isocèles.

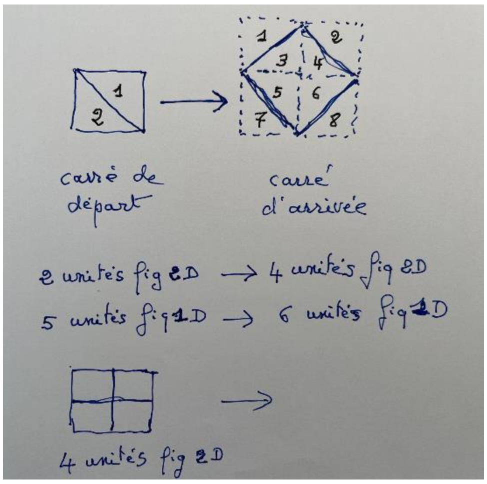


Figure 1. Traitement purement figural par reconfiguration d'unités figurales.

Socrate a dû recourir au mot « ligne » (*grammé*) pour dire ce qu'il faut tracer, mais c'est seulement à la fin du dialogue qu'il précise que cette ligne est la « diagonale », et non pas une médiatrice. On pourrait aussi tracer deux diagonales et décomposer le carré de départ en quatre triangles isocèles. On obtient ainsi la figure classique reproduite par Glaeser (1971) et aussi par François. Cette variante présente l'inconvénient de masquer l'irrationalité de la grandeur de la diagonale du carré par rapport à celle de l'un de ses côtés. Dans le pavage du plan par des rectangles isocèles, tous les segments 1D du pavage peuvent être vus comme côté d'un carré et comme diagonale d'un autre carré.

Il est impossible que Marina ait fait ces trois opérations car les opérations figurales (1) et (2) se heurtent à deux obstacles perceptifs bien connus. D'une part le contour d'un polygone convexe exclut l'idée d'en prolonger les côtés. Et, d'autre part, il faut reconnaître chacun de ses côtés comme une unité figurales 1D, alors qu'ils se fondent visuellement dans l'unité figurale 2D du polygone dessiné. Nous en avions parlé au téléphone lorsque François était au Mexique, et lorsque nous nous rencontrions à Aillon-le-Jeune lorsqu'il été en France. Mais François écarte, dans le cas de Marina, cette manière de voir purement figurale qui ne requiert aucun concept ni mathématique ni physique et aucun calcul. Alors pourquoi François réintroduit-il un tableau que des élèves de sixième doivent lire en croisant des marges pour relever des rapports et les convertir ensuite en des comparaisons de fractions (2008, p. 51), tâches analogues aux questions qui avaient été utilisées pour les enquêtes (*supra*, 3.3) ? Se référant alors à un article publié (Adjiage & Pluvinage, 2007), il ne prend pas en compte ce que Marina avait dit et expliqué.

Le recours à la maïeutique socratique pour analyser le déroulement de la classe impose d'inverser les rôles dans le dialogue du *Méno*n. C'est le jeune esclave qui expliquait à Socrate. C'est Marina qui explique à l'enseignante sa réponse et les opérations qu'elle a effectuées pour répondre « par proportionnalité » à la question que l'enseignante ne cesse de rappeler « Comment pouvons savoir qui a nagé le plus vite ? ». Et pour expliquer elle va au tableau et construit un tableau plus simple qui :

– juxtapose trois colonnes de nombres,
– exclut toute référence à des unités pour une même grandeur ou pour des grandeurs différentes, comme celles utilisées en physique.

Marina est parfaitement consciente de ce qu'elle fait, puisqu'elle doit répéter ensuite « C'est ce que j'avais déjà fait dans la table, mais vous ne m'avez pas comprise » (Pluvinage & Rigo Lemini, 2008, p. 49). Autrement dit, par rapport au débat didactique sur l'introduction et le sens des opérations arithmétiques, Marina s'en tient d'elle-même et spontanément à l'indépendance des nombres par rapport à toute considération de grandeur. Entre trois types de visualisation possibles – une juxtaposition de colonnes de nombres, un graphe cartésien et une visualisation purement géométrique – elle privilégie le plus simple et le plus immédiatement vérifiable. Cela lui a permis de voir l'invariance d'une relation entre deux suites de nombres.

Autrement dit, dans son analyse du dialogue de l'enseignante et de Marina, François superpose et fusionne les trois notions qui sont impliquées dans le travail sur un exemple l'application de la formule $v = d/t$: proportionnalité, diagonale du carré et vitesse.

Qu'aurait dit Glaeser de cette analyse du dialogue entre l'enseignante et Marina, ou plutôt qu'a-t-il dit de la maïeutique socratique qu'il prônait ? Pour lui, les questions devaient venir de l'élève et non de l'enseignant, et il était absurde de définir avant une suite de questions pour conduire à la découverte ou l'acquisition d'un concept : « [La maïeutique] est un art difficile : on en trahit l'esprit si l'on fournit tour à tour les questions et les réponses. L'essentiel est d'encourager l'interlocuteur à exploiter chaque bribe d'idée qui lui vient » (Glaeser, 1971, p. 29), parce que dans les problèmes que l'on donne « l'important est de susciter la curiosité et de *déclencher un comportement de recherche* » (Glaeser, 1973, p. 19). Et « la résolution d'un problème est une aventure d'une telle intensité qu'elle fait date dans la mémoire de tous ceux qui l'ont vécue » (*ibidem*, p. 20). Et, en ce sens, « le contenu mathématique importe peu dans un problème » (*ibidem*, p. 19).

7. Le retour au point de vue mathématique : le récif de l'algèbre élémentaire et des écritures symboliques

Les écritures symboliques sont la ligne de fracture qui révèle la contradiction entre les deux principes d'analyse des exercices scolaires que François a adoptés dans sa thèse pour analyser les comportements de réponse des élèves. Le premier principe relève d'un point de vue informatique. Les difficultés des questions et des tâches sont analysées en fonction de l'algorithme de résolution programmable sur une machine. Le deuxième principe relève du point de vue dit « cognitif » de la NLSMA, qui hiérarchise des compétences indépendamment des notions mathématiques et de la question de leur compréhension par les élèves (*supra*, 3.5.2).

Pour François, il n'y avait pas de contradiction entre l'analyse des questions du point de vue informatique et l'analyse des comportements de réponse des élèves du point de vue « cognitif » de la NLSMA. Ce court-circuitage de la complexité sémio-cognitive de l'activité mathématique a conduit à réduire toute question concernant les connaissances acquises à la seule manipulation des écritures symboliques, numériques, décimales ou algébriques (*supra*, 3.3). Son retour à l'approche didactique classique s'est fait avec l'élaboration de problèmes à résoudre pour comprendre et pour apprendre (Glaeser, 1973). Mais une barrière sémio-cognitive insoupçonnée est apparue, celle des écritures symboliques dans l'introduction de l'algèbre élémentaire. François s'était heurté dans sa thèse à des erreurs pour le calcul avec les nombres décimaux, en particulier $0{,}3 \times 0{,}3$. Il l'avait alors réduite à une erreur non significative : « le placement, correct ou non, de la virgule décimale résulte […] d'influences fragiles et momentanées » (Pluvinage, 1977, p. 138). Mais là, la barrière des écritures symboliques était celle de la coordination synergique entre la langue naturelle, les écritures symboliques, et les deux registres de visualisation, géométrique et cartésien. On retrouvait donc l'opposition d'approche méthodologique et théorique qui s'était développée depuis 1978 avec l'encadrement des thèses. Les problèmes de compréhension et d'appropriation des écritures symboliques par les élèves au collège apparaissaient primordiaux.

7.1. Une double (con)fusion : proportionnalité et fonction linéaire, formule et équation

Le partage que François faisait de son temps, entre le CINVESTAVE-IPN à Mexico et l'IREM de Strasbourg, n'a pas interrompu la confrontation de ces deux approches sur ces problèmes de compréhension cruciaux pour l'enseignement des mathématiques. Nous nous retrouvions presque chaque année à Annecy et dans les Bauges à Aillon-le-Jeune pour discuter des observations que nous faisions chacun dans des classes, et des démarches des élèves en fonction des tâches proposées. Au cœur de nos échanges, il y avait la question des différences entre les écritures symboliques et les langues naturelles. Sont-elles plus importantes, ou non, que leurs similitudes ? Car dans ces deux registres discursifs, on retrouve la même opposition sémantique fondamentale entre expression incomplète, c'est-à-dire des mots ou des syntagmes, et expression complète c'est-à-dire des égalités et des équations. Les avancées de chacun sur cette question ont été publiées en 2016 (Duval & Pluvinage, 2016). Elles se sont faites sur deux fronts.

Le premier front, essentiel pour François, a été celui des questions portant sur l'acquisition de compétences en mathématiques dans le cadre des enquêtes PISA. Les questions portaient essentiellement sur l'utilisation de formules littérales dans des situations différentes. François y émet de sérieuses réserves sur la fiabilité des résultats et sur la pertinence mathématique des questions. L'une, typique, avait retenu son attention. Sur une image montrant des empreintes de pas, un segment est tracé entre les talons de deux empreintes successives pour déterminer la longueur d'un pas. On demande de calculer cette longueur à partir de la formule $n/L = 140$; dans laquelle *n e*st le nombre de pas, *L* la longueur d'un pas, et 140 la valeur numérique de ce rapport pour l'homme (Duval & Pluvinage, 2016). Ce qui est surprenant dans les remarques de François est que ses réserves sur la fiabilité des résultats sont celles qu'il avait écartées dans les discussions que nous avions eues dans un séminaire à l'IREM (*supra,* 3.6.1), étant donné que l'application d'une formule littérale pour calculer la valeur numérique d'une grandeur physique donnée, ou celle d'une grandeur mathématique, n'a rien à voir avec l'algèbre élémentaire. Et surtout l'utilisation de formules littérales ne peut d'aucune manière aider les élèves à comprendre comment mettre en équation les données d'un problème ni comment résoudre des équations.

7.2. Phrases et équations : deux fonctionnements discursifs différents. Comment en faire prendre conscience ?

Le second front a été l'assimilation de l'algèbre élémentaire au « langage mathématique » par excellence. À la différence des langues naturelles et de l'utilisation heuristique de la visualisation euclidienne de surfaces délimitées par un contour fermé, le traitement des écritures symboliques se fait par des algorithmes (Duval & Pluvinage, 2016). François s'est intéressé au moment où l'invention du plan cartésien a permis de visualiser par des unités figurales 1D et 2D toutes les opérations de calcul. Ce qui a ensuite permis de tracer des unités figurales 1D ou 2D non constructibles avec la règle et le compas. Or, il avait exclu une exploration heuristique purement visuelle des figures en géométrie, parce qu'elle relève de « démarches "erratiques". Parallèlement il a fait un herbier de formules où les lettres sont des variables ou une condensation sémiotique de listes ouvertes de nombres, selon les emplois possibles du symbole « = », mais non des inconnues. Par rapport au corpus des écritures symboliques utilisées dans les questionnaires (Pluvinage, 1977), cet herbier permet de mesurer l'écart entre l'approche informatique de sa thèse et son approche mathématique des écritures symboliques. Mais cet herbier n'était pour François qu'une toile de fond montrant le rôle didactique de l'introduction d'une formule portant sur les grandeurs physiques. Et l'observation de l'introduction de la formule : $v = d/t$, qu'il avait faite dans une classe à Mexico l'avait conforté dans cette conviction. Il indique que la formule $v = d/t$ est « équivalente » à deux autres écritures : $d = vt$ et $t = d/v$. Mais l'opération de transfert d'une lettre d'un membre à l'autre du symbole « = », dans le sens de *salva veritate*, est la première barrière infranchissable pour beaucoup d'élèves. Cependant nous n'avions pas assez d'observations et pas suffisamment précises pour aller plus loin. De même nous n'avons pas réussi à élaborer des types d'activités spécifiques pour permettre aux élèves de prendre conscience des opérations discursives qui permettent :

– D'un côté, d'énoncer des syntagmes, désignatifs ou descriptifs et des phrases simples ;

– Et de l'autre, d'écrire des syntagmes opératoires et des égalités ou des équations.

Pourquoi notre échec sur cette question cruciale ? C'était pourtant le but de la première partie du travail présenté dans l'article de 2016. Cette prise de conscience est la condition nécessaire primordiale pour que les élèves puissent passer spontanément d'un registre à l'autre, et utiliser des formules pour résoudre des problèmes ; sinon, les écritures symboliques sont et restent opaques pour la grande majorité des élèves. L'ambivalence didactique d'un enseignement mathématique de base pour tous les élèves d'une même classe d'âge vient de la méconnaissance de cette opacité.

Il suffit de feuilleter, si j'ose dire, l'article que François avait publié sur « certaines structures feuilletées planes » (Pluvinage, 1967), pour comprendre l'analyse qu'il a faite des explications de Marina, et plus encore pourquoi la confrontation de nos deux approches ne pouvait pas aboutir. Dans cet article, on remarque tout de suite une variété de figures géométriques, de schémas, et d'expressions symboliques, qui sont intégrés au texte avec des notations permettant d'articuler les unités figurales avec les syntagmes désignatifs ou descriptifs des phrases, qui rendent ainsi transparents les passages d'un registre à un autre. François ne s'est jamais départi de cette synergie cognitive entre différents registres qui caractérise la manière de penser et de travailler en mathématiques. Elle lui était tellement naturelle qu'il n'a jamais envisagé qu'il puisse en être autrement, même dans la rédaction des manuels de l'IREM, ou dans l'élaboration de problèmes didactiques de recherche.

> Or, il ne suffit pas de juxtaposer des représentations sémiotiques issues de deux ou trois registres différents, comme c'est le cas dans tous les manuels, pour créer leur coordination dans l'esprit des élèves. Il faut des activités spécifiques dont l'objectif est de leur faire reconnaître les unités de sens dans le registre de la langue naturelle et dans celui des écritures symboliques, et leur faire discriminer toutes les unités

figurales possibles dans une figure géométrique ou dans un graphe cartésien. Cela implique un certain recul par rapport aux programmes, et à par rapport la manière dont les élèves dans une classe réagissent l'activité reprise d'un manuel (Pluvinage & Rigo Lemini, 2008).

Mais, pour François, les recherches didactiques devaient pouvoir être immédiatement mises en œuvre par les enseignants eux-mêmes dans leur classe, même s'ils n'avaient pas participé au travail d'élaboration des activités !

Cependant, jusqu'aux tout derniers mois de son existence, François n'a cessé de soutenir Jean-Claude Rauscher qui avait personnellement repris, là où nous l'avions abandonnée, la question de la compréhension des écritures symboliques dans l'introduction de l'algèbre élémentaire au collège (Rauscher, 2020). Le travail de recherche des activités spécifiques nécessaires pour que chaque élève puisse voir de lui-même le fonctionnement des écritures symboliques, et l'utiliser spontanément pour résoudre des problèmes, se poursuit maintenant avec une petite équipe d'enseignants dans le cadre de l'IREM.

8. Pour finir, le souvenir qui demeure

Lorsque François est parti travailler à la MAFPEN, nous nous retrouvions chez lui, un ou deux soirs chaque semaine. Et nous parlions des thèses encore en cours qu'il continuait de suivre, Geneviève Didierjean étant alors directrice de l'IREM. Nous parlions aussi un peu de ce qu'il faisait et voulait faire à la MAFPEN. Ce qui me frappait dans nos échanges, c'étaient les silences soudains de François, qui les ponctuaient. Ce sont tous ces silences que je continue d'entendre quand je regarde la photo prise dans les années 1980 à *Torre delle Stelle*, que Lucia Grunetti m'a envoyée à l'annonce du décès de François. Lorsque je l'ai eu, à peine une minute au téléphone, trois jours avant sa mort, sa voix n'avait pas changé. Elle avait la même tonalité optimiste et la même insistance patiente qui étaient familières à tous ceux qui l'ont connu. Aussi, pour finir, vais-je laisser à François le dernier mot sur cette aventure et histoire communes de l'IREM : « Mais non ! Raymond… »

Figure 2. François Pluvinage dans les années 1980 à *Torre delle Stelle*, Italie

Bibliographie

ADJIAGE, R., & PLUVINAGE, F. (2007). An experiment in teaching ratio and proportion, *Educational Studies in Mathematics*, *65*, 149–175.

BENZECRI, J. P. (1973). *L'analyse des données. vol. 1 : La taxinomie.* Dunod.

BKOUCHE, R. (1991). Variations autour de la Réforme de 1902/1905. *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences, 34*, 181–213.

BLOOM, B. S. (1969). *Taxonomie des objectifs pédagogiques*. 1. D*omaine cognitif* (traduit par M. Lavallée). Éditions modernes. (Ouvrage original publié en 1959)

BOREL, E. (1904). Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire. *Revue générale des sciences pures et appliquées*, *9*, 11–20. https://fr.wikisource.org/wiki/Les_exercices_pratiques_de_math %C3 %A9matiques_dans_l %27enseignement_secondaire

BRUNSCHVICG, L. (1912). *Les étapes de la pensée mathématique*. Félix Alcan.

BRUNSCHVICG, L. (1922). *L'expérience humaine et la causalité physique.* Félix Alcan.

DESCARTES, R. (2016). *Œuvres complètes. 1. Règles pour la direction de l'esprit*. Gallimard.

DIRECTION DE L'EVALUATION ET DE LA PROSPECTIVE (DEP) (1992). *Evaluation CE2 – 6ème ; résultats nationaux ; septembre 1992*. Ministère de l'Éducation nationale.

DIRECTION DE L'EVALUATION ET DE LA PROSPECTIVE (DEP) (1997). *Profil et compétences en français et mathématiques des élèves à l'entrée en sixième ; évaluations de septembre 1996*. Ministère de l'Éducation nationale.

DUVAL, R. (1988). Écarts sémantiques et cohérence mathématique. Introduction aux problèmes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *1,* 7–25.

DUVAL, R. (1996). Quel "cognitif" retenir en Didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16* (3), 349-382.

DUVAL, R., & PLUVINAGE F. (1975). Pas d'interprétation hâtive. *Bulletin A.P.M.E.P., 301*, 709–720.

DUVAL, R., & PLUVINAGE, F. (1977). Démarches individuelles de réponse en mathématique. *Educationnal Studies in Mathematics, 8*(1), 51–116.

DUVAL, R., & PLUVINAGE, F. (2016). Apprentissages algébriques. Première partie : points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, *21*, 117–152.

DUVAL, R., GAGATSIS, A., & PLUVINAGE, F. (1987). Évaluation multidimensionnelle de l'activité de lecture. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 24*(1), 34–67.

GAGATSIS, A. (1980). *Le test de closure et mesure de la compréhension de textes mathématiques.* [Mémoire de D.E.A., Université Louis Pasteur].

GLAESER, G. (1971). *Mathématiques pour l'élève professeur.* Paris : Hermann.

GLAESER, G. (1973). *Le Livre du Problème. Fascicule 1, Pédagogie de l'exercice et du problème*. CEDIC.

GLAESER, G. (1974). Préface. Dans F. Pluvinage (Resp.), *Mathématique*, *Classe de 5e, Feuilles d'Instructions pour l'Élève, Cours et Exercices.* (p. 3). Istra.

GLAESER, G. (1982). Aspects Gestaltistes de la résolution de problèmes. Dans *Colloque international de l'enseignement de la géométrie*, Mons, Belgique.

GRIZE, J. B. (1983). Schématisation et logique naturelle. Dans M-J. Borel, J-B.Grize, D. Miéville (Dir.), *Essai de Logique naturelle* (99-145). Peter Lang.

IREM DE STRASBOURG (1969). [Note du ministère adressée aux premiers IREM]. Archives de l'IREM. Strasbourg : Université de Strasbourg. France.

IREM DE STRASBOURG (1973a). *Le Livre du problème. Fascicule 1. Pédagogie de l'exercice et du problème.* CEDIC.

IREM DE STRASBOURG (1973b). *Le Livre du problème. Fascicule 2. Exercices élémentaires de géométrie affine.* CEDIC.

IREM DE STRASBOURG (1973c). *Le Livre du problème. Fascicule 3. A propos d'un thème mathématique : la parité*. CEDIC.

IREM DE STRASBOURG (1973d). Sur l'assimilation des Programme de 6ème-5ème, *Educational Studies in Mathematics, 5*(2), 207–242.

IREM DE STRASBOURG (1974a). *Le Livre du problème. Fascicule 4. La convexité.* CEDIC.

IREM DE STRASBOURG (1975). *Le Livre du problème. Fascicule 5. Calcul barycentrique*. CEDIC.

IREM DE STRASBOURG (1976). *Le Livre du problème. Fascicule 6. Géométrie d'incidence.* CEDIC.

NEWELL, A., & SIMON, H. A. (1972). *Human Problem Solving*. Prentice Hall.

PIAGET, J. (1924). Étude critique. « L'expérience humaine et la causalité physique » de L. Brunschvicg. *Journal de Psychologie normale et pathologique, 21,* 586–607.

PLATON (1963). *Ménon* (Traduit par A. Croiset). Les Belles Lettres.

PLUVINAGE, F. (1967). Espaces des Feuilles de certaines structures feuilletées planes. *Colloquium Mathematicum, 18,* 89–102.

PLUVINAGE, F. (1973a). *Mathématique, classe de 6*e. Istra.

PLUVINAGE, F. (1973b). *Mathématique, classe de 6*e*. Livre du professeur*. Istra.

PLUVINAGE, F. (1974a). *Mathématique, Classe de 5e*. Istra.

PLUVINAGE, F. (1974b). *Mathématique, Classe de 5e. Livre du professeur*. Istra.

PLUVINAGE, F. (1977). *Difficultés des exercices scolaires en mathématiques : étude des comportements de réponse par enquêtes à plusieurs modalités*. [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

PLUVINAGE, F. (1998). Éditorial. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *6,* 4–5.

PLUVINAGE, F., & RIGO LEMINI, M. (2008). Mais non, Marina ! *Annales de didactique et de sciences cognitives, 24*, 41–61.

POINCARE, H. (1968). *La Science et l'Hypothèse.* Champs/ Flammarion.

POINCARE, H. (1970). *La valeur de la Science.* Champs/Flammarion.

POLYA, G. (1965). *Comment poser et résoudre un problème* (traduit par C. Mesnage). Dunod. (Ouvrage original publié en 1957).

RAUSCHER, J.-C. (2020). Le cas Jonathan. Le complexe de l'algèbre. Dans M. T. Moretti et C. Finck Brandt (Dir.), *Florilégio de pesquisas que envolvem a teoriasemio-cognitiva de aprendizagemmatemática de Raymond Duval* (p. 456–485). GPEEM/UFSC.

SCHANK, R. C. (1972). Conceptual Dependency: a Theory of natural language understanding. *Cognitive Psychology, 3,* 552–631.

SCHERPEREEL, A., PLUVINAGE, F., BOCH, C., & DUVAL, R. (1974). Sur l'acquisition des structures numériques en fin de 3e. *Educationnal Studies in Mathematics, 4*(5), 441–459.

TROSEILLE, B., & ROCHER, T. (2015). Les évaluations standardisées des élèves. Perspectives historiques. É*ducation et Formation, 86-87,* 15–35.

WILSON JAMES, W. (1971). National Longitudinal Study of Mathematical Abilities. Dans B. S. Bloom, G. F. Madaus & J.T. Hasting (Dir.), *Handbook of formative and summative evaluation of Student learning.* Mc Graw Hill.

Thèses encadrées par François Pluvinage et soutenues dans le cadre du D.E.A. et le Doctorat de didactique des mathématiques de l'Université Louis Pasteur

ABDELLI, M. (1985). *Oralisation et apprentissage arithmétique par des élèves déficients auditifs.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

ADJIAGE, R. (1999). *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

ALARCON, J. (1982). *L'appréhension des situations probabilistes, chez les élèves de 12-14 ans : résultats d'une enquête proposée à des élèves de 4e et 5e*. [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

DAMM FLEMING, R. (1992). *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

DE GOES CAMBAS, M.-C. (1985). *Une année d'apprentissage mathématique d'un élève de Collège (3e). Observation et analyse de son travail.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

FAQIH, EL M. (1991). *Place de la logique dans l'activité mathématique des étudiants du 1er cycle scientifique*. [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

GAGATSIS, A. (1982). *Discrimination des scores au test de closure et évaluation de la compréhension des textes mathématiques.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

GUZMAN RETAMAL, I. C. (1990). *Le rôle des représentations dans l'appropriation de la notion de fonction.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

HAJRI, H. (1986). *Perception de relations dans un plan repéré*. [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

HITT, F. (1978). *Comportement de « retour en arrière » après la découverte d'une contradiction (étude d'un questionnaire proposé à des élèves de 3e).* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

KOLEZA-ADAM, E. (1987). *Décalages cognitifs dans les problèmes de proportionnalité (Préalable à toute séquence didactique pour des élèves de 10-12 ans).* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

KOURKOULOS, M. (1991) *Modélisation mathématique des instructions aboutissant à des équations du 1er degré auprès des élèves de 15 à 16 ans.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

KUBLER-WEBER, J. (1982) *Traitement d'informations mathématiques dans une transmission orale chez des élèves de 12-14 ans.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

LEMONIDIS, C. (1990). *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

MESQUITA, A. (1989). *L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des élèves en géométrie figuraux. Éléments pour une typologie.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

PADILLA SANCHEZ, V. (1992). *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*. [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

PAVLOPOULOU, K. (1994). *Propédeutique de l'algèbre linéaire : la coordination des registres de représentation sémiotique.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

RADFORD, L. (1985). *Interprétation d'énoncés implicatifs et traitements logiques.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

RAUSCHER, J.-C. 1993) *L'hétérogénéité des professeurs face à des élèves hétérogènes : le cas de l'enseignant de la géométrie au début du Collège.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

REGNIER, J-C. (1983). *Étude didactique d'un test auto-correctif en trigonométrie.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

ROMMEVAUX, M.P. (1997). *Le discernement des plans : un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle*. [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

THADEU MORETTI, M. (1992). *L'exploitation des analyses factorielles en didactique des mathématiques.*

ZAKI, M. (1989) *Traitements de problèmes de probabilités en situation de simulation.* [Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur]

RAYMOND DUVAL

Professeur Honoraire de l'Université du Littoral Côte d'Opale

duval.ray@wanadoofr

INFORMATIONS POUR LES AUTEURS

Présentation de la revue

Les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives est une revue annuelle fondée en 1988 par Raymond Duval et François Pluvinage, actuellement sous la responsabilité de Philippe R. Richard et Laurent Vivier.

Cette revue internationale est dédiée à la diffusion de la recherche en didactique des mathématiques et des domaines connexes. Il s'agit d'une revue francophone de référence sur les recherches portant sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Les articles sont principalement écrits en français, mais peuvent également être publiés en espagnol ou en anglais.

La revue fait l'objet d'un classement scientifique par l'organisme européen ERIH et par l'HCERES en France. Elle est également répertoriée dans des bases de données de référence comme MathEducDataBase ou Googlescholar. Ces différents référencements ajoutent une valorisation des publications dans les Annales pour les auteurs. Les articles sont en accès libre sur le site des Annales de didactique et de sciences cognitives ainsi que sur le site d'OpenEdition Journals[1] dès leur parution, sans embargo.

La revue est ouverte à tout type de recherche. Les articles peuvent être de nature théorique, en relation étroite avec une expérimentation dans le cadre d'un enseignement, ou constituer des comptes rendus d'expériences d'enseignement appuyées sur un cadre théorique explicite. Il est également possible de présenter une synthèse de recherches menées dans un domaine particulier de la didactique des mathématiques, ou de proposer des notes de lectures d'ouvrages scientifiques du domaine. Les articles peuvent concerner tous les cadres d'enseignement dans des contextes socioculturels variés et aussi s'intéresser à la formation, initiale et continue, des enseignants.

Outre la publication du numéro annuel, la revue offre la possibilité d'éditer un numéro spécial sur la base d'un projet clairement formulé.

Cette revue s'adresse principalement aux chercheurs en didactique. Elle intéressera également les formateurs d'enseignants soucieux d'appuyer leurs formations sur la recherche en didactique des mathématiques.

Site internet de la revue : https://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/annales-de-didactique-et-de-sciences-cognitives.

[1] https://journals.openedition.org/adsc/

Instructions aux auteurs

La revue est ouverte à tout type de recherche, que ce soit un essai didactique ou un rapport d'étude impliquant de la recherche empirique. Il est également possible de présenter une synthèse des recherches menées dans un domaine particulier de l'enseignement des mathématiques ou d'un domaine connexe (physique, algorithmique, etc.), ou de proposer des notes de lectures d'ouvrages scientifiques. Les domaines théoriques de références sont issus de la didactique des mathématiques.

Il est demandé aux auteurs de proposer des articles de taille raisonnable, entre vingt et trente pages, même s'ils peuvent être plus longs pour permettre à l'auteur de développer un point de vue original qui émerge dans le champ de la recherche.

Les articles peuvent être écrits en français, en espagnol ou en anglais. Lorsque l'article est écrit en espagnol ou en anglais, il est attendu que les auteurs proposent également un résumé en français. Si l'une des trois langues de la revue n'est pas comprise par les auteurs, merci de le préciser lors de la soumission.

Les articles sont à soumettre par courrier électronique à mai-adsc@unistra.fr.

Avant tout envoi, nous vous prions de vérifier que votre article respecte bien les consignes éditoriales suivantes :

- Le format de la revue est respecté : voir le fichier de styles[2] pour les auteurs ;
- Le niveau de langue utilisé est soigné et bien travaillé.
- L'article proposé est original. Il n'a ni déjà été publié ailleurs ni envoyé à une autre revue pour publication. Il ne s'agit pas non plus d'une simple traduction d'un article déjà publié.
- L'article ne contient aucun plagiat et il est dûment référencé.
- En décidant d'envoyer un article à la revue des Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vous autorisez la mise en ligne de votre article sur le site de la revue ainsi que sur le site OpenEdition Journal.
- Vous vous engagez en outre à communiquer les liens vers ces deux sites pour la diffusion de votre article.

[2] Disponible à l'adresse : https://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/annales-de-didactique-et-de-sciences-cognitives#c48447

Pour composer un article sans utiliser le modèle, par exemple en recourant à LaTeX, voici des précisions sur le format des pages et les caractères utilisés.

Feuille A4 portrait, avec les marges suivantes :

- Haut : 3 cm Bas : 8 cm
- Gauche : 4 cm Droite : 4 cm
- En tête : 2 cm Pied de page : 7 cm
- Reliure : 0 cm

Caractères :

- Auteur(s) en première page : Arial 12 points, gras, petite capitale, Centré ;
- Titre en première page : Arial 14 points, petite capitale, Centré ;
- Abstract – Résumé – Mots clés : Times New Roman 10 points ;
- En-tête : Arial 9 points ;
- Corps de texte : Times New Roman 11 points.

Pour la pagination d'un article proposé, commencer par le numéro 1.

Procédures de sélection des textes

Les articles proposés sont soumis à un arbitrage, en double aveugle, par trois évaluateurs avant publication. Une synthèse sera envoyée aux auteurs par les rédacteurs en chef. Le cas échéant, des demandes de modifications, aménagements ou compléments des textes présentés seront adressées aux auteurs.

Les articles sont reçus par les rédacteurs en chef de la revue. Ils sont emmagasinés sur une plateforme de partage privée uniquement accessible aux rédacteurs en chef, aux conseillers scientifiques et à la conseillère éditoriale.

Une première appréciation de l'adéquation de l'article avec les objectifs de la revue est faite par les rédacteurs en chef. Cette première évaluation peut aboutir à un refus de l'article s'il ne correspond pas à la ligne éditoriale de la revue ou s'il pose un problème éthique. Il peut également être renvoyé aux auteurs pour effectuer des modifications avant l'envoi aux évaluateurs, par exemple, pour une remise en forme ou une correction linguistique. En cas de nécessité, les conseillers scientifiques peuvent être consultés.

Les rédacteurs en chef se consultent pour le choix et la sollicitation des évaluateurs qui ont, au plus, deux mois pour renvoyer leur évaluation. Ils suivent le bon déroulement du processus d'évaluation et ils sont attentifs aux dates de retour afin de prévoir la publication. Un fichier privé aux fonctions de partage et de synthèse est tenu à jour.

Une fiche d'évaluation est proposée aux trois évaluateurs. Selon le retour de ces derniers, une synthèse est envoyée aux auteurs incluant leurs évaluations. Quatre cas de figure sont envisagés : (A) publication acceptée en l'état ; (B) publication acceptée avec des modifications mineures à effectuer, sans nécessité d'une nouvelle évaluation ; (C) Publication possible sous réserve de modifications majeures à effectuer et nécessitant une nouvelle évaluation ; (D) refus de l'article. Selon l'éventualité, le traitement est le suivant :

- Cas A, l'article est transféré à la conseillère éditoriale et au secrétaire d'édition pour préparer la publication.
- Cas B, les rédacteurs en chef demandent le retour des modifications par les auteurs dans un délai maximum d'un mois.
- Cas C, les auteurs ont deux mois pour renvoyer leur nouvelle version. Par la suite, les trois relecteurs initiaux sont sollicités avec un délai de 2 mois pour faire la relecture (délai pouvant être ramené à 1 mois si cela permet de publier l'article dans le numéro de l'année).
- Cas D, un retour circonstancié est envoyé aux auteurs par les rédacteurs en chef. Si nécessaire, les conseillers scientifiques peuvent être sollicités.

Généralement, les articles envoyés l'année *n* et acceptés sont publiés dans le numéro de l'année *n* + 1.

Imprimerie et reprographie
Directions des affaires logistiques intérieures
Université de Strasbourg

Dépôt légal 4ème trimestre 2024