

# ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

**Revue internationale de didactique des mathématiques**

Rédacteurs en chef :

PHILIPPE R. RICHARD, LAURENT VIVIER

**Volume 28 - 2023**

IREM de Strasbourg

Université de Strasbourg



ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES  
ISSN 0987-7576 (imprimé) – ISSN : 2804-2514 (en ligne)

**Rédacteurs en chef**

Philippe R. RICHARD, Université de Montréal, Montréal, Canada

Laurent VIVIER, Université Paris Diderot, Paris, France

**Conseillers scientifiques**

Raymond DUVAL  
Lille, France

Athanasios GAGATSIS  
Université de Chypre, Nicosie, Chypre

Alain KUZNIAK  
Université Paris Diderot, Paris, France

Eric RODITI  
Université Paris Descartes, Paris, France

**Comité de rédaction**

Ferdinando AZARELLO  
Università degli studi di Torino, Italie

Alain BRONNER  
Université de Montpellier, France

Lalina COULANGE  
Université de Bordeaux, France

Iliada ELIA  
Université de Chypre, Nicosie, Chypre

Viktor FREIMAN  
Université de Moncton, Canada

Patrick GIBEL  
Université de Bordeaux, France

Inés M<sup>a</sup> GOMEZ-CHACON  
Université Complutense, Madrid, Espagne

Fernando HITT  
Université du Québec à Montréal, Canada

Cécile De HOSSON  
Université Paris Diderot, Paris, France

Catherine HOUEMENT  
Université de Rouen, France

Asuman OKTAÇ  
CINVESTAV, Mexico, Mexique

Luis RADFORD  
Université Laurentienne, Sudbury, Canada

Jean-Claude REGNIER  
Université Lumière, Lyon, France

Denis TANGUAY  
Université du Québec à Montréal, Canada

Laurent THEIS  
Université de Sherbrooke, Canada

Fabienne VENANT  
Université du Québec à Montréal, Canada

Carl WINSLØW  
Université de Copenhague, Danemark

**Responsable de publication**

Nathalie WACH  
Directrice de l'IREM de Strasbourg

**Conseil éditorial**

Charlotte DEROUET  
Université de Strasbourg, France

**Secrétariat d'édition**

Bruno METZ  
IREM de Strasbourg

**Éditeur**

IREM de Strasbourg – Université de Strasbourg  
7, rue René Descartes 67084 Strasbourg CEDEX  
Tél. : +33 (0)3 68 85 01 30  
Fax. : +33 (0)3 68 85 01 65  
[irem@math.unistra.fr](mailto:irem@math.unistra.fr)

**Bibliothèque et édition électronique**

Christine CARABIN  
Tél : +33 (0)3 68 85 01 61  
<http://irem.unistra.fr>



ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES  
VOLUME 28 – 2023  
SOMMAIRE

<b>ÉDITORIAL</b> .....	7
<b>GISELA CAMACHO, ASUMAN OKTAÇ (Mexique)</b> <i>Invariant Subspaces: An Alternative for Introducing Eigenvectors and Eigenvalues</i> .....	9
<b>CATHERINE HOUEMENT, EDITH PETITFOUR (France)</b> <i>L'influence du compas dans une tâche de construction géométrique d'un cercle</i> .....	37
<b>ILIADA ELIA, ANNA BACCAGLINI-FRANK, ESTHER LEVENSON, NANA MATSUO, NOSISI FEZA, GIULIA LISARELLI (Chypre, Italie, Israël, Japon, Afrique du Sud)</b> <i>Early Childhood Mathematics Education Research: An Overview of Latest Developments And Looking Ahead</i> .....	75
<b>FABIEN EMPRIN, PHILIPPE R. RICHARD (France, Québec)</b> <i>Intelligence artificielle et didactique des mathématiques : état des lieux et questionnements</i> .....	131
<b>GHISLAINE GUEUDET</b> <i>Note de lecture : Inquiry in University Mathematics teaching and learning. The Platinum project</i> .....	183
<b>INFORMATIONS POUR LES AUTEURS</b> .....	191



## ÉDITORIAL DU NUMERO 28

Vous êtes-vous déjà demandé à quoi ressemblerait la carte routière d'un écureuil ? Dans notre univers relativement plat, avec quelques incursions dans la troisième dimension, il est difficile d'imaginer quels itinéraires emprunte une créature dont l'univers commence par le monde des arbres, s'étend vers les toits, et se prolonge même dans le nôtre, en plus de ceux des transitions intermondes accessibles par des sauts, des grimpettes, et parfois même des vols. Cette métaphore permet d'interroger notre prétendue familiarité avec l'espace dans lequel nous sommes plongés, bien qu'au fond, il soit insaisissable dans toute sa complexité. Transposée à l'univers numérique, elle nous lance le défi de concevoir un avenir toujours en mouvement et constamment influencé par l'intelligence artificielle. Nous sommes entrés dans une ère de changement radical et apparemment irréversible, où la déferlante du numérique modifie profondément notre manière de penser et de travailler. C'est le monde dans lequel nous vivons aujourd'hui et qui vient à peine de commencer.

À une époque où chaque réalité évolue sans cesse à un rythme effréné, la façon dont nous abordons notre relation avec l'espace, la technologie et l'avenir nous invite à adopter une perspective différente. Plus que jamais, il est essentiel de prendre du recul, de revoir nos repères et de concrétiser la maxime selon laquelle « le passé est garant de l'avenir ». Le numéro actuel offre une pause bienvenue dans le tumulte du monde contemporain, où foisonne le « nouveau » et abondent les sources, établissant des regards structurés qui proviennent de notre domaine. Il se dessine dans une perspective descriptive, explicative et argumentative, mettant en valeur la recherche expérimentale et l'essai didactique. En plus de deux articles conventionnels basés sur des expérimentations avec des sujets réels, nous présentons une note de lecture issue d'un projet de recherche portant sur une enquête sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques à l'université. Nous introduisons également un aperçu des derniers progrès et perspectives de la recherche sur l'enseignement des mathématiques à la petite enfance, et un autre qui offre un état des lieux et un questionnement sur l'intelligence artificielle et la didactique des mathématiques.

Avant d'entamer la présentation des articles, partageons quelques informations sur nos réalisations et projets. Notre dernier numéro, paru fin 2022, a marqué le début de notre série de numéros thématiques. Il a été devancé en 2018 par le volume spécial English-French, sorte de point de départ fortuit alors qu'une collection n'était pas encore envisagée. Le premier ouvrage thématique à part entière est né à la transition 2022-2023. Ce volume est centré sur les pratiques de formation à l'enseignement des mathématiques sous l'angle de la recherche en didactique, thème d'actualité en France où l'on attend le cadrage d'une réforme importante de la formation initiale des enseignants. La collection, baptisée « Annales thématiques », se distingue des numéros ordinaires comme le n° 28. Le « Thématique 2 » est en phase finale de préparation et sera disponible début 2024. Axé sur les recherches et les dialogues en didactique des mathématiques et des sciences, il découle d'un travail continu initié lors de conférences thématiques « à deux voix », organisées par le Laboratoire de didactique André Revuz, favorisant des rapprochements fructueux entre spécialistes.

Le numéro suivant, portant sur l'enseignement et l'apprentissage de l'analyse lors du passage du secondaire au supérieur, est en cours d'élaboration.

Nous exprimons une gratitude sincère envers l'IREM de Strasbourg et son personnel pour leur soutien continu à la publication et à la diffusion de cet ouvrage. Soulignons également l'importance du travail bénévole de nos collègues, en particulier de notre comité éditorial, qui joue un rôle essentiel dans la préparation, l'amélioration et la promotion de notre domaine. Nous sommes profondément reconnaissants envers nos relecteurs dévoués, des collègues qui travaillent dans l'ombre avec un engagement exceptionnel. Leur expertise, rigueur et générosité sont des piliers fondamentaux qui contribuent grandement à l'excellence de notre revue.

Dans ce 28<sup>e</sup> numéro, nous sommes heureux de vous présenter cinq contributions remarquables. Gisela Camacho et Asuman Oktaç inaugurent cette édition avec une approche conceptuelle novatrice sur les valeurs et vecteurs propres, enrichissant notre compréhension de l'algèbre linéaire. Leur étude, basée sur des entretiens avec des enseignants, met en évidence que l'utilisation de représentations dynamiques facilite la compréhension des relations entre les vecteurs propres, les valeurs propres et les sous-espaces invariants, offrant ainsi un potentiel significatif pour approcher de manière plus détaillée ces concepts. Catherine Houdement et Édith Petitfour explorent l'influence du compas dans la réalisation d'une tâche géométrique par des élèves de Cours moyen (9-11 ans). À travers une analyse sémiotique et didactique, leur article jette un nouvel éclairage sur le rôle du compas, mettant en lumière des connaissances essentielles pour guider les élèves du primaire dans leurs apprentissages géométriques. Les résultats détaillés, présentés en cinq parties, enrichissent notre compréhension des défis liés à l'utilisation du compas et proposent des pistes pour l'enseignement de la géométrie. L'équipe d'Iliada Elia, Anna Baccaglini-Frank, Esther Levenson, Nanae Matsuo, Nosisi Feza et Giulia Lisarelli dresse une vue d'ensemble de la recherche dans l'enseignement des mathématiques pour la petite enfance (2012-2022), explorant les recherches récentes et émettant des perspectives pour l'avenir. Leur étude s'attarde sur cinq thèmes majeurs, dont le développement du sens du nombre, l'enseignement de la géométrie, les compétences dans d'autres domaines, l'utilisation de la technologie et les connaissances des enseignants. Fabien Emprin et Philippe R. Richard examinent, dans un article approfondi, les interactions entre l'intelligence artificielle (IA) et la didactique des mathématiques. Ils abordent la notion d'intelligence, explorent les liens potentiels entre l'IA et l'enseignement des mathématiques, et analysent des projets en cours dans le monde francophone. L'article souligne l'importance de combler le fossé entre les réalisations industrielles de l'IA et les initiatives éducatives, tout en mettant en évidence les défis et les opportunités pour l'avenir. Enfin, Ghislaine Guedet présente un ouvrage collectif issu d'un projet européen, réalisé dans le cadre d'Erasmus +. On y scrute les pratiques d'enseignement des mathématiques orientées vers la recherche à l'université, constituant ainsi une ressource précieuse pour les chercheurs et enseignants en didactique des mathématiques à ce niveau.

Nous vous souhaitons une lecture aussi enrichissante que plaisante.

L'équipe de direction scientifique des ADSC : Philippe R. Richard et Laurent Vivier

**GISELA CAMACHO, ASUMAN OKTAÇ**

## **INVARIANT SUBSPACES: AN ALTERNATIVE FOR INTRODUCING EIGENVECTORS AND EIGENVALUES**

**Abstract.** The concepts of eigenvalue and eigenvector are typically approached algorithmically in introductory linear algebra courses. However, a more conceptual orientation involves connecting these notions to the concept of one-dimensional invariant subspace, which allows for the introduction of eigenvectors prior to eigenvalues. In this study, we present data collected from interviews with two linear algebra instructors as they worked with a specific linear transformation in both paper-and-pencil and dynamic geometry environments. The data were analyzed using the perspectives of APOS theory and the theory of Mathematical Working Spaces in a complementary manner. The results indicate that dynamic representations facilitate the establishment of relationships between eigenvectors, eigenvalues, and invariant subspaces. This approach proves to have potential for developing a deeper understanding of the related concepts.

**Keywords.** Invariant subspace, eigenvector, eigenvalue, dynamic geometry, linear algebra.

**Résumé.** Les concepts de valeur propre et de vecteur propre sont généralement abordés de manière algorithmique dans les cours d'algèbre linéaire de niveau introductif. Cependant, une orientation plus conceptuelle consiste à relier ces notions au concept de sous-espace invariant unidimensionnel, ce qui permet d'introduire les vecteurs propres avant les valeurs propres. Dans cette étude, nous présentons des données collectées lors d'entretiens avec deux enseignants d'algèbre linéaire qui ont travaillé avec une transformation linéaire spécifique dans des environnements tant papier-crayon que de géométrie dynamique. Les données ont été analysées en utilisant les perspectives de la théorie APOS et de la théorie des espaces de travail mathématique de manière complémentaire. Les résultats indiquent que les représentations dynamiques facilitent l'établissement de relations entre les vecteurs propres, les valeurs propres et les sous-espaces invariants. Cette approche a le potentiel de développer une compréhension plus approfondie des concepts liés.

**Mots-clés.** Sous-espace invariant, vecteur propre, valeur propre, géométrie dynamique, algèbre linéaire.

---

Eigenvalues and eigenvectors are usually the last topic covered in an introductory linear algebra course. The understanding of these notions is enriched if explicit connections are made with concepts such as linear transformation, vector space, subspace, basis and linear independence. Dorier (2000) reports that towards the end of a linear algebra course, instructors rush through the topic of eigenvalues in an algorithmic manner. Perhaps partially for this reason Lapp et al. (2010) found that in

the context of concept maps, for most students the only other expression involved in the eigenvalue-eigenvector clump (cluster) was the expression ‘matrix diagonalization’ and the whole clump was only loosely related to others. All the other clusters included many more concepts and were connected more closely with other clusters, including linear independence and linear transformation. This shows that in general students do not associate eigenvectors with other important concepts of linear algebra and that there is need for instructional strategies to help students make connections within linear algebra theory.

Inspired by Sierpinska’s following quote, in this paper we explore a theoretical oriented approach that can help students make sense of eigenvectors/eigenvalues and also establish connections within linear algebra:

[I]n the structural mode, the notion of eigenvalue cannot be reduced anymore to that of a root of a polynomial. It must be thought of as a scalar related to invariant one-dimensional subspaces of a linear operator. It is an object of reflection and a concept; not an outcome of a calculation. (Sierpinska, 2000, p. 236)

The aim of this research study is to inquire about mental constructions that some university instructors, as individuals with advanced knowledge of linear algebra, make use of, when relating the concepts of invariant subspace, eigenvector and eigenvalue. We point out that it is not our intention to delve into the construction of the concepts but to explore how individuals understand their relationships. In the remaining of this paper, we first explain the mathematical notions in question and the relationships between them. After that we offer a non-exhaustive literature review with the aspects that relate to this study. We then present aims of our research and the theoretical approach that guided it. The way in which the use of dynamic geometry was conceived within the context of our investigation, and the method employed follow. In the results section, we analyze the empirical data; following that, we offer a discussion on our findings.

### **1. Mathematical aspects, invariant subspaces, eigenvectors and eigenvalues**

The study of relationships between invariant subspaces, eigenvectors and eigenvalues can be useful in constructing an image for the existence of infinitely many eigenvectors associated with a single eigenvalue, which poses a difficulty for students (Caglayan, 2015; Wawro et al., 2019). It can also aid in the understanding of 0 as an eigenvalue, which is problematic according to Soto and García (2002). Furthermore, with this approach the notion of eigenvalue is not favored over the notion of eigenvector as is the case in the algorithmic approach where calculation of the roots of the characteristic polynomial is required before obtaining eigenvectors. Rasmussen and Keynes (2003) suggest that introducing eigenvectors first as an instructional strategy is more in line with students’ reasoning as opposed to the traditional way of presenting eigenvalues first and then calculating eigenvectors. We

now present the definitions of some of the mathematical notions involved in our study as well as some related results.

Let's suppose that  $\mathcal{L}(V)$  is the set of all linear transformations of the vector space  $V$  on itself. An invariant subspace is defined as follows:

Definition: "Suppose  $T \in \mathcal{L}(V)$ . A subspace  $U$  of  $V$  is called *invariant* under  $T$  if  $u \in U$  implies  $T(u) \in U$ " (Axler, 2015, p. 132); that is,  $T(U) \subseteq U$ . It follows that  $V$  and  $\{0\}$  are always invariant subspaces.

The importance of this definition lies in the fact that invariance of a subspace  $U$  implies that, the restriction of the linear transformation to  $U$  is also a linear transformation on that smaller domain. This becomes a useful tool when considering the decomposition of the vector space  $V$  to its direct sum of subspaces, each of which is invariant, so that studying the effect of the linear transformation on each subspace – which is a lot easier – gives us information about the effect of that linear transformation on the whole space (Axler, 2015).

Now, let's consider the following one-dimensional subspace  $U$  of  $V$ , for a vector  $v$  in  $V$  with  $v \neq 0$ :  $U = \{\lambda v \mid \lambda \in F\} = \langle v \rangle$ , which denotes all the multiples of  $v$ , where  $\lambda$  is a scalar that belongs to a field  $F$ . If  $U$  is a  $T$ -invariant subspace, it has to satisfy the condition  $T(w) \in U$  for all  $w \in U$ . In particular, for  $v$  in  $U$ ,  $T(v) = \lambda v$  for some  $\lambda \in F$ . Conversely, if  $v$  is a vector in  $V$  such that  $T(v) = \lambda v$  for some  $\lambda \in F$ , then  $\langle v \rangle$  is a  $T$ -invariant subspace of dimension 1. This reasoning reveals an intimate connection between the equation  $T(v) = \lambda v$  and the invariant subspaces of dimension 1. Hence, we can see that the concepts of eigenvector and eigenvalue can be motivated by studying invariant subspaces.

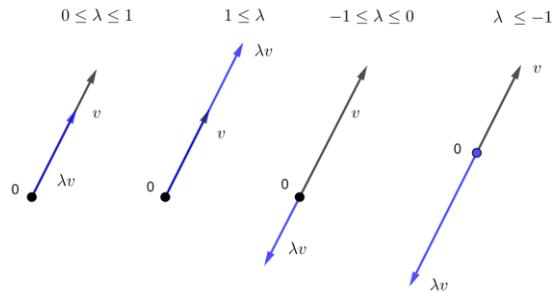
Next, let's remember the definitions of eigenvector and eigenvalue as they are commonly presented in linear algebra courses.

Definition (eigenvalue). "Suppose that  $T \in \mathcal{L}(V)$ . A number  $\lambda \in F$  is called an *eigenvalue* of  $T$  if there exists  $v \in V$  such that  $v \neq 0$  and  $T(v) = \lambda v$ " (Axler 2015, p. 134).

Definition (eigenvector). "Suppose that  $T \in \mathcal{L}(V)$  and  $\lambda \in F$  is an eigenvalue of  $T$ . A vector  $v \in V$  is called an *eigenvector* of  $T$  corresponding to  $\lambda$  if  $v \neq 0$  and  $T(v) = \lambda v$ " (Axler 2015, p. 134).

The above definitions imply that  $V$  has a one-dimensional invariant subspace under  $T$  if and only if  $T$  has an eigenvalue (Axler, 2015, p. 134). In particular, if  $v$  in  $V$  is an eigenvector of  $T$  then  $\langle v \rangle$  is a one-dimensional invariant subspace of  $V$  under  $T$  with the property that every element of  $\langle v \rangle$  is an eigenvector of  $T$ . On the other hand, if  $\langle v \rangle$  is a  $T$ -invariant subspace then there exists a  $\lambda \in F$  such that  $T(w) = \lambda w$  for all  $w \in \langle v \rangle$ .

In the two-dimensional vector space  $\mathbf{R}^2$  these relationships and properties can be visualized through the representations of Analytic Vector Geometry. The eigenvectors of  $T$  in  $\mathbf{R}^2$  either preserve direction under the transformation,  $T(v) = \lambda v$  dilates or compresses  $v$  by a factor of  $\lambda$  its associated eigenvalue; or they can reverse direction if  $\lambda$  is negative, again dilating or compressing by a factor of  $\lambda$  (Figure 1).



**Figure 1.** Geometric representation of an eigenvector in  $\mathbf{R}^2$  (adapted from Anton and Rorres, 2014, p. 292).

In the two-dimensional vector space  $\mathbf{R}^2$  these relationships and properties can be visualized through the representations of Analytic Vector Geometry. One-dimensional invariant subspaces can be represented as lines passing through the origin and corresponding to sets of eigenvectors associated with an eigenvalue  $\lambda$ . We consider that this kind of visualization not only allows to “see” what algebraic symbols denote, but also they favor reflections that are less accessible in an algebraic context. In that sense, work with algebraic and geometric representations complement each other.

## 2. Literature review

Approaches to teaching eigenvectors and eigenvalues differ. Some researchers find motivation in application tasks such as cryptography (Siap, 2008), while others use dynamic geometry for enhancing visualization and focusing on properties as well as working with different representations (Gol Tabaghi & Sinclair, 2013; Caglayan, 2015). Plaxco et al. (2018) utilize the notions of ‘stretch factors’ and ‘stretch directions’ of a linear transformation in a geometric context, building on students’ mathematical activity.

Targeting a conceptual understanding of students through an inquiry-oriented approach, Bouhjar et al. (2018) argue for the need to establish connections between procedures such as finding the roots of the characteristic polynomial, solving the equation  $Ax = \lambda x$  and the reasons why these procedures work, as well as their relationship with the definitions involved. Understanding of the properties of linear combinations of eigenvectors and eigenspace was studied by Wawro et al. (2019);

the authors suggest that the study of eigenspaces as subspaces can enhance the connections that students make among the related concepts.

Sinclair and Gol Tabaghi (2010) report how mathematicians think about eigenvectors in informal ways. Some of them visualize a linear transformation modifying the space in a certain manner, and the eigenvectors are those that do not change direction or lie in the opposite direction under the transformation.

From an APOS (Action – Process – Object – Schema) perspective, Salgado and Trigueros (2015) propose a genetic decomposition for eigenvalue, eigenvector and eigenspace in a modelling context, which they report was useful in helping students construct an Object conception of these concepts. Betancur et al. (2022) propose another genetic decomposition for eigenvalue and eigenvector that considers geometric aspects.

We did not find any study that examines the understanding of eigenvectors and eigenvalues in relation to invariant subspaces. Hence we set out to investigate this connection; we decided to work with instructors instead of students, because of their background and knowledge about linear algebra topics, since it is not likely that undergraduates have had the experience of being introduced to invariant subspaces.

### **3. Aims of the study**

The aim of this study is to explore linear algebra instructors' conceptions about the notions of eigenvector and eigenvalue in relation to invariant subspaces. As mentioned before, connections between these concepts are not normally presented in an introductory linear algebra course. We wanted to observe how instructors reason about and make sense of these notions, as well as the difficulties that they might experience. The purpose of this investigation was two-fold. On the one hand, in the absence of previous research on this theme, we wanted to establish certain theoretical elements for the construction of these concepts. On the other hand, we were interested in coming up with pedagogical suggestions for the improvement of the learning process in linear algebra.

### **4. Theoretical framework**

Our study makes use of two theoretical approaches in a complementary manner. The first one, APOS theory, provides the necessary tools to model individuals' construction of concepts (Arnon et al., 2014). Through the second one, Mathematical Working Spaces (MWS), connections between an epistemological plane associated to mathematical content, and a cognitive plane associated to an individual involved in mathematical activity, can be analyzed (Kuzniak et al., 2016).

According to APOS Theory, the construction of knowledge passes through stages known as *mental structures*; transition between these stages occurs by means of

*mental mechanisms*. By custom, the first letter of each mental structure is written in a capital letter, to differentiate these conceptions from their other meanings. *Actions* are the first building blocks of knowledge construction which are driven externally through mathematical formulas or step-by-step procedures over which the individual does not have internal control. As the person repeats and reflects on them, they are *interiorized* into Processes where the individual can perform the same Actions in her/his mind without the need for external stimuli.

Another way to build new processes from existing ones is through the *reversion* mechanism. If the individual has constructed a Process conception, internalized Actions can be executed on an object that we can consider as an input object, that is transformed into an output object. Reversion consists of recovering the input object from the output object of the original process. Another mechanism, namely *coordination*, allows bringing together two processes in a way to produce a new process with its own characteristics.

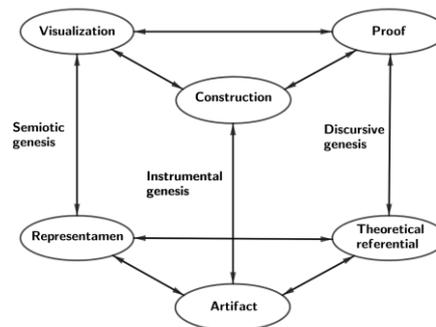
The construction of an *Object* conception is characterized by the ability to apply Actions on the Processes which are then *encapsulated*. The collection of different Actions, Processes and Objects related to a concept and their connections gives rise to a *Schema*. The coherence of a Schema is determined by the individual's ability to evoke it in different situations where it can be useful. Knowledge construction continues in a spiral manner, each newly constructed Object being subject to the application of new actions on them, and so forth.

The MWS theory conceives mathematical work as a gradual process that evolves with the interactions between the epistemological elements of mathematical contents and the cognitive processes of individuals solving tasks (Kuzniak, 2022). At the epistemological plane, in one of the three components we recognize a set of tangible signs called representamens such as geometric images, algebraic symbols or graphs; a second component includes a set of material artifacts such as drawing instruments or dynamic mathematics software, as well as symbolic artifacts such as algorithms for solving systems of equations. The third component refers to a theoretical referential integrated by a set of axioms, definitions, properties and theorems organized to support arguments and demonstrations. The cognitive plane, on the other hand, is composed of three thought processes. The process of visualization associated to the identification and interpretation of signs, the construction process related to artifacts and their techniques of use, and a discursive process of proof that operationalizes the elements of the theoretical referential (Kuzniak et al., 2016).

Interactions between the epistemological and cognitive planes are explained through the semiotic genesis, the instrumental genesis, and the discursive genesis of proof. Semiotic genesis refers to the relationship between the representamen component and the visualization process. It explains the link between the syntactic aspect or that concerning the combination of signs and the semantic aspect (Kuzniak et al. 2016).

Instrumental genesis relates artifacts to the construction process by explaining the actions a user takes to appropriate techniques to manipulate an artifact as well as the choice of an artifact to perform intentional actions to solve a task (Kuzniak, 2022). The discursive genesis links the theoretical referential to the proof; this genesis is manifested by the elaboration of deductive discourses supported by the content of the referential or by identifying and including new properties in the referential as a product of instrumental treatments or visualizations (Kuzniak, 2022).

A possible circulation of knowledge is conceived through the activation of vertical planes that connect the epistemological and cognitive planes. Figure 2 shows a diagram used to visualize the development of mathematical work by means of a circulation between vertical planes. The plane defined by semiotic genesis and discursive genesis is the Semiotic-Discursive plane; the plane determined by instrumental genesis and discursive genesis is the Instrumental-Discursive plane. And the plane determined by the semiotic genesis and the instrumental genesis is the Semiotic-Instrumental plane. In APOS theory the role that the geneses play is not explicit; in this study we are interested in particular in the semiotic and instrumental geneses.



**Figure 2.** Diagram of the abstract structure of the MWS (adapted from Kuzniak and Richard, 2014)

Mathematical work often involves interaction between two or more branches or fields of mathematics. Within the theory of Mathematical Working Spaces, Montoya and Vivier (2014) propose the notion of *mathematical domain* defined through its own objects together with their representations, as well as by its own theoretical referential in which the elements of the epistemological plane are identified. To be considered a domain, it is crucial that the mathematical community recognize it as such (Montoya and Vivier, 2014). Because of their breadth, subdomains can be considered, for example, Linear Algebra as a subdomain of Algebra.

We consider that the MWS perspective offers a potential explanation for how interactions with signs and technological artifacts can assist individuals in organizing

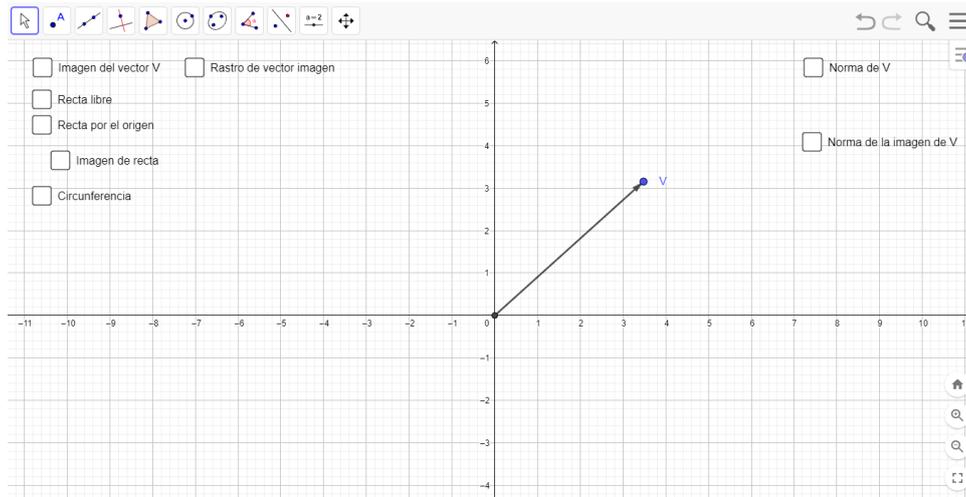
and developing mental structures that aid in solving problems. Additionally, APOS theory includes elements not considered in the cognitive plane of MWS, such as the analysis of mental constructions involved in the genesis activation or domain changes. The heuristic strategy called *combination* is used to identify the dialogue between proposed theories, according to the spectrum of connecting theories of Prediger et al. (2008).

### 5. Use of dynamic geometry

The concepts of eigenvector and eigenvalue lend themselves easily to an exploration by means of the tools of dynamic geometry in 2-dimensions. Dragging of vectors, lines and other geometrical shapes can help visualize the relationships these objects hold, as well as aid in making connections between different representations. For example, the relationship between eigenvectors of a linear transformation associated with one eigenvalue can be visualized (Gol Tabaghi, 2014). Presenting linear algebra concepts using dynamic geometry also makes it possible to introduce eigenvectors before eigenvalues.

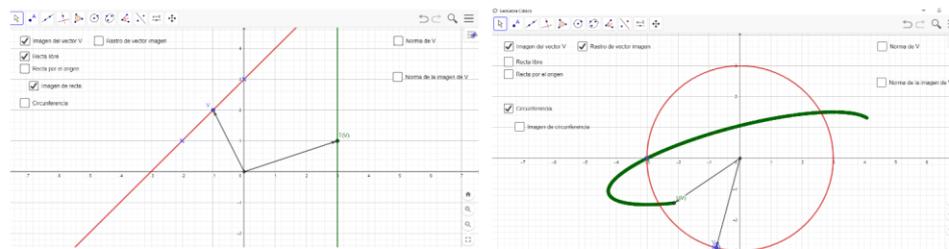
Sierpinska et al. (1999) designed a dynamical geometry environment in which the two-dimensional vector space was represented by a geometric model without coordinates with the intention to enhance students' thinking about vectors, linear transformations, eigenvectors and other linear algebra concepts with the intention to avoid the obstacle of formalism (Dorier et al., 2000). Gol Tabaghi and Sinclair (2013) presented some students with the task of finding eigenvalues and eigenvectors of matrices in a dynamic geometry environment. They report that participating students developed a synthetic-geometric mode of thinking (Sierpinska, 2000) which showed dynamic characteristics.

For this study we designed a dynamic geometry environment, with the purpose of investigating its effect on the mental constructions that individuals make while observing their mathematical work. Figure 3 shows the initial screen in GeoGebra software. The little boxes are labeled: image of vector  $v$ ; trace of image vector; free line; line through origin; image of the line; circumference; norm of  $v$  and norm of the image of  $v$ .



**Figure 3.** Initial GeoGebra screen

The user has four options for the dragging of the movable vector: all over the screen; along a movable red line that passes through the origin once the corresponding box is activated; along a movable red line not necessarily passing through the origin once the corresponding box is activated; and along a circumference with center at the origin and variable radius once the corresponding box is activated. Figure 4 shows two examples of possible situations.



**Figure 4.** GeoGebra screen with: a) movable vector along a movable line that does not pass through the origin and the image of the movable line; b) image of vector  $v$ , trace of the image vector and circumference boxes activated

We note that in this environment it is possible to observe that the image of any vector of an invariant subspace lies in the same direction or the opposite direction with respect to the original vector, or it can be the zero vector. We also observe that all vectors within the image of an invariant subspace share a common scaling factor when compared to their corresponding preimages. This observation serves as a compelling rationale for exploring the concept of eigenvalues. Moreover, this

approach accommodates non-invertible linear transformations and enhances our comprehension of zero as an eigenvalue.

## 6. Method

For the purposes of this paper and because of the absence of previous research with focus on the learning of eigenvalues and eigenvectors motivated by their relationships with one-dimensional invariant subspaces, we adapted the first component of the APOS theory research cycle: theoretical analysis. Commonly, theoretical analysis is informed by previous research, analysis of textbooks, and practical experience of the researchers. Because of the lack of these elements, we decided to elaborate an exploratory questionnaire, as a data collection instrument, to gather information for the future design of a viable cognitive model.

We present semi-structured interviews performed with two experienced linear algebra instructors who work at a large public university in Mexico. One of them holds a Ph.D. and the other a master's degree in mathematics; both of them have over ten years of experience in teaching mathematics courses in mathematics and physics undergraduate programs.

Both instructors mentioned that they know the functioning of dynamic geometry and GeoGebra, but they never use it. During the interview they were explained about the GeoGebra environment designed for exploring a linear transformation.

The interview with the first instructor consisted of three sections, the first one of which focused on the concept of invariant subspaces and contained the following questions:

- Can you explain what an invariant subspace is?
- How would you determine the invariant subspaces of a linear transformation  $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ?
- Can you explain graphically what it means to find the invariant subspaces of a linear transformation  $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ? and
- Consider the linear transformation  $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  such that  $T(x,y) = (-x + y, \frac{1}{2}y)$ . How would you determine the invariant subspaces of  $T$ ?

The second part was guided by the following questions and focused on the concepts of eigenvector and eigenvalue as well as their relationship with invariant subspaces.

- How do you determine the eigenvectors and eigenvalues of a linear transformation  $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ?
- Can you give a graphical interpretation of the eigenvectors and eigenvalues of a linear transformation  $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ?

- Consider the linear transformation  $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  such that  $T(x,y) = (-x + y, \frac{1}{2}y)$ . Can you find the eigenvectors and eigenvalues of  $T$ ? Can you interpret graphically the eigenvectors and eigenvalues of this transformation?
- Do you observe any relationship between invariant subspaces, eigenvectors and eigenvalues of the linear transformation  $T(x,y) = (-x + y, \frac{1}{2}y)$ ?

The last part of the interview involved work with dynamical geometry where the instructor was presented with the task of exploring the linear transformation  $T(x, y) = (-x + y, \frac{1}{2}y)$  in the previously designed GeoGebra environment. The following two questions were used as a guide:

- Can you find the invariant subspaces of  $\mathbf{R}^2$  under this transformation?
- Can you find the eigenvectors and eigenvalues of this transformation?

After analyzing the first instructors' interview and realizing that he was relying heavily on his work in the paper-and-pencil section to answer the questions in the dynamic geometry context, we decided to change the order of the sections. After asking the second instructor an explanation of the invariant subspace concept, the interview continued with work in the GeoGebra environment, using the same linear transformation as in the first interview, but this time the second instructor was not provided with the algebraic expression. He was asked to explore the invariant subspaces as well as the eigenvectors and eigenvalues associated with the transformation. After he completed this part, he was asked to find an algebraic expression for the transformation that he had just explored in the dynamic geometry environment, as well as to determine the eigenvalues and eigenvectors of the linear transformation, using the algebraic expression that he had come up with.

Both interviews were videotaped and subsequently transcribed. In line with the methodology associated with APOS theory (Arnon et al., 2014) the transcriptions were analyzed by both researchers independently; observations were compared until an agreement was reached about the interpretations from our theoretical lens. The use of MWS fitted perfectly into this methodological approach.

## 7. Results

### 7.1. The first instructor

The first instructor (we will call him by the pseudonym Daniel (D)), as we mentioned before, first worked on the problem using paper and pencil, and then explored it in the dynamic geometry environment. Although he initially used some features of the concepts of vector subspace and invariant subspace by resorting to geometric

representations, his reflections mainly focused on using algorithms and algebraic procedures.

### 7.1.1. The subspaces of $\mathbf{R}^2$

When thinking about linear algebra from its most abstract aspects, the use of geometric representations may seem unnecessary—and even an obstacle—to generalization, which is one of its main objectives. However, using geometric representations—visual or mental—can favor reasoning that may prove to be useful in solving problems posed in an abstract context; as we mentioned earlier, some mathematicians resort to this approach (Sinclair & Gol Tabaghi, 2010).

Daniel's initial strategy to determine the invariant subspaces of the linear transformation  $T(x, y) = (-x + y, \frac{1}{2}y)$  focused on using the definition by evaluating  $T$  in a generic element of a generic subspace of  $\mathbf{R}^2$ . He explained that if  $(x, y)$  is an element of a subspace  $H$  and its image belongs to  $H$ , then the subspace is invariant. However, when Daniel was asked to list the invariant subspaces of  $\mathbf{R}^2$  under this transformation, he initially had difficulty finding them.

D: I think in this case it would be easier to decide if you give me an arbitrary subspace, the one you want, to decide if it is  $T$ -invariant. It's easier in this case than the problem here. Because describing all subspaces is a problem: how far do I go? How far do you want to describe?

It is true that there is no established general algorithm to obtain the invariant subspaces of a vector space under a given transformation. To find them, the instructor had to mobilize various elements of his theoretical referential and use the existing relationships in his thinking between his conceptions of subspace, linear transformation and invariant subspace. His reflection about the geometric aspects of a subspace of the two-dimensional vector space led him to a reasoning that moved between different representations and helped link algebraic and geometric aspects. After thinking for a few minutes, Daniel explained:

D: Who are the subspaces of  $\mathbf{R}^2$ ?  $H$  is a subspace if it is a line through the origin, right? They are  $(x, kx)$  with  $k$  a real number. But what description would  $H$  have? It is the set of  $(x, y)$ ..., where  $y = kx$ . They are the  $(x, kx)$  with  $k$  real number.

The instructor referred to a non-trivial subspace as  $H = \{(x, y) \mid y = kx\}$  and performed treatments on the expression to conclude that this subspace can also be represented as  $\langle\langle(1, k)\rangle\rangle$ , as shown in Figure 5. Daniel indicated that the subspaces "are the straight lines of slope  $k$  through the origin", emphasizing the importance of the position vector  $(1, k)$  as the generating vector.

$\hookrightarrow$  Cuáles son los subespacios vectoriales de  $\mathbb{R}^2$ ?  
 $H \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $H$  es subespacio  
 $H = \{ (x, y) \mid y = kx \}$   
 $= \{ (x, kx) \mid x \in \mathbb{R} \}$   
 $= \langle (1, k) \rangle$

**Figure 5.** Algebraic description of subspaces elaborated by Daniel

It can be observed from the perspective of APOS theory that Daniel used his Process conception of subspace to validate his conjecture that the straight lines passing through the origin are subspaces. The instructor also resorted to his Process conception of span to recognize a straight line passing through the origin as a subspace with a generator. Using his Process and Object conceptions of a line, he represented a generic line passing through the origin, with the equation  $y = kx$ . He manipulated this expression and, returning to the underlying process, he explained that the line could also be represented by the set notation  $\{(x, kx) \mid k \in \mathbf{R}\}$ .

To recognize this set as a subspace, Daniel applied his Process conception of span to the set  $\{(x, kx) \mid k \in \mathbf{R}\}$  and expressed it as  $\langle (1, k) \rangle$ . The notation selected by the instructor helped identify the line through the origin as the subspace generated by  $(1, k)$ . The dynamism of the Processes was evident in every representation; the instructor could imagine each of the elements of any given line and represented them as the set  $\{(x, kx) \mid x \in \mathbf{R}\}$ ; he also thought of them as multiples of  $(1, k)$ .

Daniel's mathematical work was developed as an interchange between the domain of Analytic Geometry and the domain of Linear Algebra. He resorted to the Cartesian plane as a representation of  $\mathbf{R}^2$ . He did this not only for changing the register that would make it easier for him to express the vector space, but he deliberately used the slope of a straight line passing through the origin to refer to the subspaces of  $\mathbf{R}^2$ . The slope  $k$  of the line  $y = kx$ , which is an element of Analytic Geometry, served to move further with the description of subspaces as sets of the form  $\langle (1, k) \rangle$ .

On the other hand, his mathematical work was situated on the Semiotic-Discursive plane. The discursive genesis was activated when, with the theoretical tools of his referential of Analytic Geometry and Linear Algebra, Daniel established connections between the straight lines passing through the origin and the vector subspaces of  $\mathbf{R}^2$ . Simultaneously Daniel activated the semiotic genesis by encoding, employing the algebraic register, and the graphic characteristics of a subspace.

Through treatments in the algebraic register, and only after pointing out that a generic vector of the subspace is of the form  $(x, kx)$ , Daniel visualized features that he had not considered before. As a result of his work in the semiotic genesis, he recognized the importance of the parameter  $k$  to identify a subspace when representing it as a straight line in the plane, where the slope is a crucial element in determining its position.

### 7.1.2. Determination of subspaces using the dynamic environment

After formulating an expression for a generic subspace of  $\mathbf{R}^2$  from the equation of a line passing through the origin, Daniel failed to determine the invariant subspaces using algebraic techniques. The instructor equated the image of any vector  $T(x, kx) = ((k-1)x, \frac{1}{2}kx)$  with a vector of the form  $(y, ky)$  to solve the resulting system of equations. However, he did not achieve appropriate results because he focused on obtaining values for  $x$  and  $y$  instead of for the parameter  $k$ . Obtaining the values of  $k$  from the system would have allowed him to determine a generator vector and, consequently, a subspace with the desired characteristics.

Daniel continued analyzing the linear transformation by obtaining an associated matrix and calculating its eigenvalues, eigenvectors and eigenspaces using conventional algorithms. He explained that the eigenvalues of  $T$  are  $\lambda_1 = -1$  and  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ , and the respective eigenspaces are the X-axis or  $\langle\{(1, 0)\}\rangle$  and the line with equation  $y = \frac{3}{2}x$ , as shown in Figure 6.

Handwritten mathematical work showing the calculation of eigenvalues and eigenspaces for a linear transformation  $T$ .

The matrix is given as  $[T]_B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ .

The characteristic equation is derived as  $\det \left[ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = 0$ , which simplifies to  $\det \begin{pmatrix} -1-t & 1 \\ 0 & 1/2-t \end{pmatrix} = 0$ .

The eigenvalues are found to be  $t = -1$  and  $t = 1/2$ , labeled as "valores propios".

For  $\lambda_1 = -1$ , the eigenspace is calculated by solving  $\left[ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , leading to  $y = 0$  and the eigenspace  $E_{\lambda_1} = \langle (1, 0) \rangle$ .

For  $\lambda_2 = 1/2$ , the eigenspace is calculated by solving  $\left[ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , leading to  $y = \frac{3}{2}x$  and the eigenspace  $E_{\lambda_2} = \langle (1, \frac{3}{2}) \rangle$ .

**Figure 6.** Calculation of eigenvalues and eigenspace performed by Daniel

To inquire into his conceptions from a graphical perspective, we proposed him the use of the dynamical environment to determine the invariant subspaces. Before

starting work with GeoGebra, Daniel had a few minutes of reflection and afterwards explained the following:

D: A subspace is invariant if the transformation sends the line to itself. It should be all those straight lines, I think, so that  $T$  of the straight line is on the straight line.

Daniel started manipulating the environment by checking the boxes 'line through origin' and 'image of the line'. Still, he did not activate 'image of vector  $v$ '. He rotated the mobile straight line around the plane's origin until it coincided with its image and said that "you would just go around and see where they coincide". Using his knowledge of Analytic Geometry, the instructor obtained the equation  $y = \frac{3}{2}x$  as the equation of the first invariant subspace that he detected. He also identified the line  $y = 0$  as an invariant subspace following the same circular dragging technique.

During the exploration of the dynamic environment, Daniel's mathematical work was situated on the Semiotic-Discursive plane. He activated the discursive genesis when he reasoned about vector subspaces of  $\mathbf{R}^2$  and about what must happen for a subspace to be invariant. Daniel thought of a graphical representation for the subspaces of  $\mathbf{R}^2$  and mentally applied the linear transformation to that subspace. He reasoned about its image in terms of the selected representation. Although the representamen straight line is "shared" by the Analytic Geometry and Linear Algebra domains, the instructor's discourse exhibited its use associated with a Linear Algebra concept.

Afterwards, the mathematical work was placed on the Semiotic-Instrumental plane. Daniel generated usage schemes in the digital environment by rotating the mobile straight line to track the subspaces that met the proposed condition. We recognize in these actions a process of instrumentalization since by rotating the mobile line until it coincided with its image, the instructor brought the construction that he had elaborated mentally beforehand to the digital medium.

From the viewpoint of APOS theory, we interpret that Daniel performed an Action on the Object vector subspace in the dynamic environment when he rotated the moving line as a graphical representation of that space. By turning the line, he applied the Action linear transformation to the Object subspace and detected the lines whose images are the lines themselves.

## 7.2. The second instructor

The second instructor (we will call him with the pseudonym Fernán (F)) worked from the start, with the dynamic environment designed with GeoGebra exploring the graphical aspects of the linear transformation in the plane, understanding it as a representation of the vector space  $\mathbf{R}^2$ . He didn't know what the rule of the

transformation that he was exploring was, nor its associated matrix. He just had access to its graphical aspects through the manipulation of the dynamic environment prepared in GeoGebra.

### 7.2.1. The graphical determination of invariant subspaces

To address the concept of invariant subspace of a vector space under a linear transformation, Fernán started with the recognition of the possible subspaces of  $\mathbf{R}^2$ , referring to them as “the zero or straight lines passing through the origin”. He explained that an invariant subspace “is a subspace that does not change when a linear transformation is applied to it. It does not stay in the same way, but as a set, it remains the same”. He wrote the definition and gave an example as it is shown in Figure 7 and explained further how he thinks about an invariant subspace. We note that his conception of an invariant subspace staying the same as a set under a linear transformation is not coherent with the definition that he wrote, since this last one implies that the image of an invariant subspace is contained in the subspace itself, but these two sets do not have to be the same.

1.- ¿Puedes explicar qué es un subespacio invariante de una transformación lineal?

$A \subseteq V$        $V \xrightarrow{f} V$        $f$  lineal  
 $A$  es invariante bajo  $f$ . si  $f(a) \in A$   
 para todo  $a \in A$ .

**Figure 7.** Definition of invariant subspace by the instructor Fernán

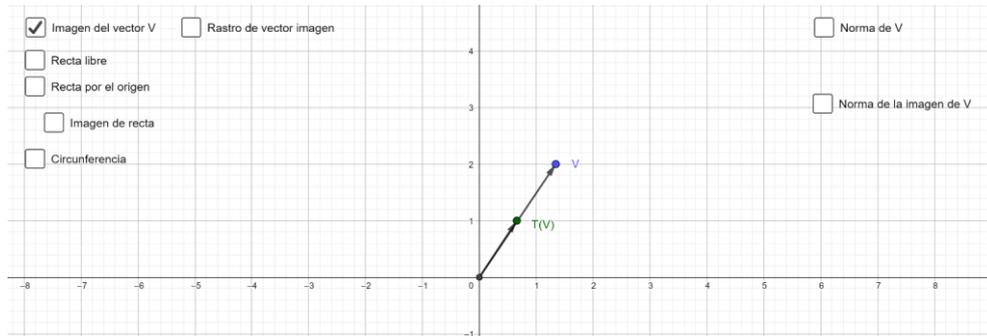
F: It is possible that [the transformation] rotate the straight line, but as a set it remains being the straight line. The order of the elements maybe not the same, but they remain in the same space.

Because of this conception that an invariant subspace stays the same under a linear transformation, Fernán did not consider the existence of one-dimensional invariant subspaces whose image is the zero vector; nor he referred to  $\mathbf{R}^2$ , but he did consider  $\{0\}$  as an invariant subspace. The instructor started the dynamic exploration of the linear transformation by activating the ‘image of vector  $v$ ’ box in the GeoGebra environment. He dragged the mobile vector from the position  $(1, 0)$  through the first quadrant and asserted that invariant subspaces different from  $\{0\}$  did not exist.

Fernán explained that to identify invariant subspaces, it is necessary to find a basis of  $\mathbf{R}^2$  such that “some of its elements remain, I mean, it’s going to go to itself”; meaning that the image of an element is itself. For this reason, in his initial exploration, he examined the images of the standard basis vectors and asserted the nonexistence of invariant subspaces. In a second exploration, he slowly rotated the

mobile vector in counterclockwise direction until it became collinear with its image in the first quadrant of the plane, as shown in Figure 8, and declared the following:

F: Yes, here the vectors are parallel,  $v$  and  $T(v)$  are parallel; this means that the space generated by  $v$  when applying  $T$ , which is this line, will remain invariant when  $T$  is applied to it. (He draws with his finger on the screen the line that passes through  $v$ ).



**Figure 8.** Collinear movable vector and its image in the first quadrant of the plane

Continuing the same way, the instructor concluded that the  $X$ -axis is also an invariant subspace. Finally, he calculated the equations of the straight lines representing the subspaces:  $y = \frac{3}{2}x$  and  $y = 0$  by observing the slopes.

From the perspective of MWS theory, Fernán's mathematical work started with the activation of the Semiotic-Instrumental plane. The instructor recognized the arrows anchored to the origin in the dynamic environment as elements of the vector space  $\mathbf{R}^2$ , initially represented in an algebraic register; this shows the activation of the semiotic genesis. He identified the arrow  $v$  as an element of the transformation's domain and the arrow  $T(v)$  as an element of its image. The cognitive process of visualization allowed the instructor to understand the manipulation of the mobile vector not just as the dragging of an arrow, but as a way to explore the graphical behavior of the linear transformation through the observation of the images of different vectors of the domain.

The semiotic genesis of Fernán's mathematical work coexists with and is related to the instrumental genesis. The instrumental genesis was manifested when Fernán generated use schemes in the instrumentation process by rotating the mobile vector as a dragging technique. When he detected the collinearity of  $v$  and  $T(v)$ , he pondered his strategy to determine invariant subspaces, overcoming the discrepancy between his initial strategy of looking for a basis vector whose image is itself and the possibility of  $v$  and  $T(v)$  being collinear but different vectors. During the exploration, another cognitive process of construction was identified when Fernán referred to the subspaces generated by  $v$  y  $T(v)$ , and he realized that they were the same.

The instructor also activated the Semiotic-Discursive plane in this part of his mathematical work. The semiotic genesis and the discursive genesis are related and underlie the “without seeing” visualization of the invariant subspace detected by Fernán. We call it “without seeing” because the subspace didn’t appear on the screen of the environment. The instructor organized the information obtained from the dynamic environment to interpret and enrich his ideas. Reflection about the appropriate representations – collinear vectors – favored the elaboration of a discourse to explain the invariant subspaces in the given circumstances using the artifact GeoGebra without the need to visualize the subspaces in the dynamic environment. The conscious translation of the definition provided by Fernán from an algebraic representation into a geometric-dynamic representation was not instantaneous; nevertheless, the instructor could interpret and extend his ideas thanks to the three active geneses and the intervention of his previous theoretical referential.

From the perspective of APOS theory, expressing ideas about a concept using more than one representation, and transition between these representations requires a process conception. The instructor went from an algebraic representation of a variable vector of an abstract subspace to a graphic representation with a mobile arrow in the dynamic environment, showing evidence of a process conception of vector.

The dragging of the mobile vector implies an Action in the dynamic environment; however, we also note that the instructor was aware that he was manipulating a generic vector as an Object, not a particular given vector. Dragging the mobile arrow meant to him traversing one part of the domain vectors and applying the transformation (whose rule, he did not know) in order to obtain their images. This Action over the Object generic vector implies a Process conception of linear transformation. Fernán used it to explore the images of the vectors of a region in the domain, understanding that this exploration could be extended to the whole plane.

The instructor displayed an Object conception of subspace and Process conception of invariant subspace when he decided to apply the linear transformation to any subspace and from its image determine if it was invariant or not. To evaluate the linear transformation in any subspace, the instructor proposed to evaluate the transformation on some basis vectors. This strategy required the de-encapsulation of the generic one-dimensional subspace Object in its Process as being generated by a vector. Fernán initially proposed finding a vector whose image was itself; however, the use of the software induced the necessary adaptations in the invariant subspace Process, and the instructor came up with a new favorable strategy.

In Fernán’s case, the Process conception of invariant subspace arises from the coordination of the Processes of linear transformation and span (generated vector space) through set inclusion. Coordination was manifested when the instructor imagined any vector of the subspace as a linear combination of a vector  $v$  selected

as a basis vector and then applied the transformation to each of the elements of the generated subspace, noting the relationship that the image set holds with respect to the original set. Since  $T(v)$  y  $v$  are collinear, his Process conception of linear transformation with a focus on the  $T(\lambda v) = \lambda T(v)$  property allowed Fernán to conclude that the subspace generated by  $v$  was invariant. As a particular characteristic, the instructor de-encapsulated mentally the Object span without manipulations in the dynamical geometry environment.

### 7.2.2. Relating eigenvectors and invariant subspaces

In traditional teaching of linear transformations and related concepts, the use of associated matrices is very common. In this context, Fernán explained that the eigenvalues of a linear transformation are the zeros of the characteristic polynomial and presented the algorithm to obtain it from an associated matrix  $M_f$ . He referred to the eigenvectors as those  $x$  that satisfy the equality  $M_f \times x = \lambda x$  where  $\lambda$  is a scalar. The instructor called the eigenvectors as "invariant vectors under the transformation", even though this is not appropriate mathematical terminology.

When we asked Fernán how he could identify the eigenvectors of the linear transformation in question using the dynamic environment, he said: "I have no clue, I had never thought about it in geometrical terms, give me two seconds. I have not thought about it geometrically". Recalling his idea about "invariant vectors", he explained that the span of an eigenvector is an invariant subspace.

F: If you have an eigenvector and take the span of that eigenvector, when you apply the transformation to it, it remains invariant. Why? Because the  $T(v)$  of that vector is  $\lambda$  times that vector. So [the vector and its image] remain in the same direction... Not in the same direction, in the same subspace (he draws a line in the space), right? So, if each one of the elements of the basis fulfill that their image is  $\lambda$  times that vector, any vector of the span is going to fulfill the same.

To start thinking graphically, Fernán considered an eigenvector as the basis of a one-dimensional subspace. He argued the collinearity of the basis vector  $v$  and its image  $T(v)$  by the definition of eigenvector and said that he could think about  $\lambda v$  in geometrical terms as either a dilation or shrinkage in the same direction as  $v$  or in the opposite direction.

From the theoretical perspective of MWS, we observe that the mathematical work of Fernán belongs to the Semiotic-Discursive plane. To think about eigenvectors and eigenvalues in a graphical way, the instructor searched for relations between eigenvectors expressed through algebraic representations  $T(v) = \lambda v$ , and the concept of invariant subspace recently interpreted in the dynamical environment. The semiotic genesis was manifested when he thought about the span of an eigenvector and the span of its image, intertwining algebraic and graphic representations.

Fernán considered the definition of eigenvector in algebraic terms as the vector that satisfies  $T(v) = \lambda v$ . After incorporating mental representations of graphical nature, he interpreted  $v$  and  $T(v)$  as collinear directed segments. This change of representation displayed in the semiotic genesis allowed the instructor to link the concepts of eigenvector, span, and invariant subspace.

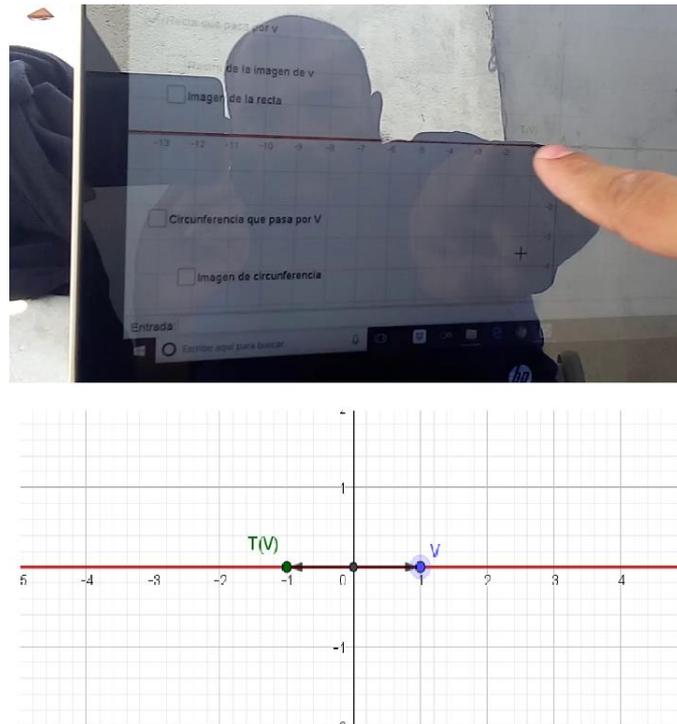
From an APOS perspective, we note that Fernán used his Process conception of invariant subspace to determine that the span of an eigenvector  $v$  is a subspace of the same kind. This Process conception involved the Processes of span and linear transformation. He followed his idea of generating a subspace with an eigenvector and examining its image after applying the linear transformation. Fernán's explanation shows that he used his Process conception of span as he worked with a generic eigenvector  $v$  to obtain  $\langle v \rangle$ , then applied his Process conception of linear transformation to the subspace  $\langle v \rangle$  which he had constructed as an Object, and analyzed its image. The instructor used the property of preservation of a scalar multiple when applying his Process conception of linear transformation to the vectors of  $\langle v \rangle$ .

### 7.2.3. Eigenvalue detection in a dynamic environment

After his work with the dynamic environment and the spans of eigenvectors, Fernán claimed that eigenvectors constituted the invariant subspaces without providing any argumentation; we note that this claim does not necessarily hold for subspaces of dimension greater than or equal to 2. The instructor said that all the vectors that integrate the straight lines  $y = \frac{3}{2}x$  and  $y = 0$  are eigenvectors of the linear transformation presented in the dynamic environment; however, the mathematical convention does not admit zero vectors as an eigenvectors.

We asked Fernán how eigenvalues could be identified using the dynamic environment.

- F:           Aaah, no. Yes, yes. For example, like in the example (signals the vector  $(1, 0)$ , see Figure 9), I have for  $\lambda = -1$ , which should be one of the roots of the characteristic polynomial, I have this eigenvector. Because it sends  $v$  to its negative... For  $\lambda = 1$  you have this, look. (Drags the vector  $v$  to the position  $(-1, 0)$  and observes its image). Ah no, it is also  $-1$ . If you have  $\lambda = 2$  (drags the mobile vector to  $(2, 0)$  and observes its image  $(-2, 0)$ ). Aaah, no. All of these are  $\lambda = -1$ . It doesn't matter where I move, it will always stay at its negative.



**Figure 9.** The instructor points to the vector  $(1,0)$  to show an eigenvector associated with  $\lambda = -1$

For his answer Fernán directed his mathematical work to the Semiotic-Discursive plane; he recognized the scalar  $-1$  as a possible eigenvalue by comparing the arrows representing  $v = (1,0)$  and  $T(v) = (-1, 0)$  in the dynamic environment. It might appear that the instructor considered the lengths of the arrows and their direction as graphical aspects of  $v$  and  $T(v)$  associated to the eigenvalue concept; however, we also observe that Fernán considered different eigenvalues for different eigenvectors of the line  $y = 0$ . The relationships that he established between the concepts of linear transformation, vector, eigenvector, and eigenvalue of his theoretical referential were not yet solid.

Fernán carried and translated the definition of eigenvector – if  $v$  is an eigenvector, then  $T(v) = \lambda v$  – from an algebraic register to a graphical register. He was thinking about  $v$  and  $T(v)$  as collinear vectors but without reflecting carefully on the role of  $\lambda$  in the new register. He reasoned neither algebraically nor graphically about the constraint that all vectors of the invariant subspace, accepted as a set of eigenvectors, have as images multiples of themselves by the same scalar  $\lambda$ . The graphical aspects recently added to his theoretical referential – but not yet integrated – were not in line with the algebraic aspects of his established ideas about eigenvectors and

eigenvalues. There was no semiotic genesis but instead attempts by the instructor to reinterpret the algebraic ideas of his theoretical referential in terms of the representations visible in the dynamic environment.

From the point of view of APOS theory, when the instructor identified the eigenvalue  $-1$  by observing the vector  $v = (1, 0)$  and its image  $T(v) = (-1, 0)$ , he displayed an Action conception of this concept stimulated by the perception of the graphic representations of the vector and its image. Fernán compared  $v$  and  $T(v)$ , assigning the eigenvalue  $-1$  because the image of  $v$  is a collinear vector with the same length but opposite direction. However, the instructor revealed that he did not have a Process conception when trying to find in the same subspace a vector whose associated eigenvalue was  $1$  and then a vector with eigenvalue  $2$ . Actually, Fernán showed that his initial decision to associate the eigenvalue  $-1$  to  $(1, 0)$  does not come from a Process conception, by suggesting the scalar  $2$  as the eigenvalue related to  $(2, 0)$ . He considered the length of  $v$  without considering its relation to the length of  $T(v)$ .

## 8. Discussion

The study of one-dimensional invariant subspaces of a vector space under a linear transformation provides an alternative way for introducing the concepts of eigenvector and eigenvalue, as opposed to defining an eigenvalue as a root of a characteristic polynomial and only afterwards defining an eigenvector in terms of an eigenvalue. This approach helps establish connections between different notions of linear algebra such as basis, span, linear transformation, vector space, subspace, eigenvector and eigenvalue; it also becomes much more significant in terms of the theoretical structure, to study the effect of a linear transformation on the whole plane through the invariant subspaces. However, as observed in the interviews that we conducted, these connections are not always evident, even for instructors of linear algebra. In fact, the great majority of undergraduate students are not familiarized with the notion of invariant subspace through an introductory linear algebra course.

Dealing with various representations of the same concept helps integrating different aspects of a notion and hence with the understanding of it. Dynamic representations of linear algebra objects can aid in facilitating mental construction of concepts and coordination of several Processes. Both instructors that we interviewed showed a certain resistance to the use of dynamical geometry software; this might be partially due to their being accustomed to working within the algebraic register and relying on traditional methods of teaching. However the influence of this environment on their thinking was obvious, even though less evident in the case of Daniel because of the order of the proposed activities.

The mathematical work of the first instructor Daniel in the Semiotic-Discursive plane became primordial for validating the line as a subspace. The semiotic genesis,

nourished with the instructor's mental structures associated with some existing concepts in his theoretical referential, allowed Daniel to verify that the straight lines passing through the origin are subspaces. The connections between mental structures were achieved thanks to the semiotic genesis; through the manipulation of signs, the instructor validated the straight line as representing a subspace of  $R^3$ . The treatments provided coherence to the instructor's subspace Schema. In other circumstances, possibly the mental structures associated to the Processes of line through the origin, span, and subspace, expressed algebraically, would have remained isolated without the sign treatments that allowed the visualization of the line as a subspace.

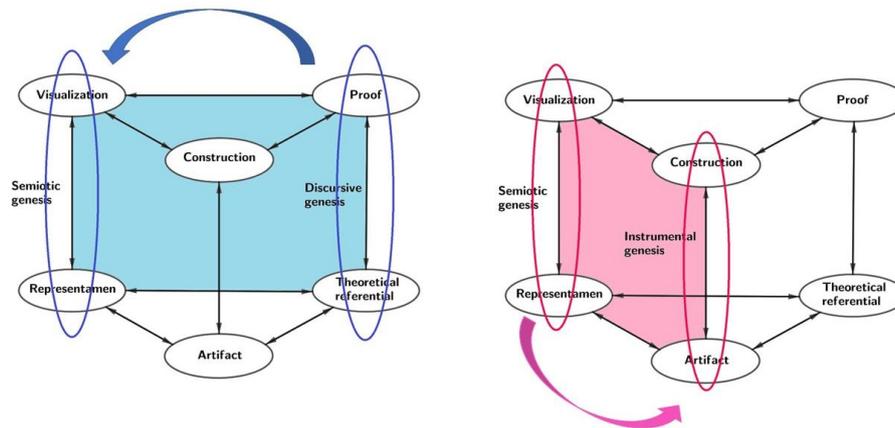
Now, the subspace represented by the equation  $y = 0$  is not invariant in the same way that the subspace defined by  $y = \frac{3}{2}x$  is invariant. In both cases, the image of the line is the same line. However, the effect of the transformation on the elements of the first subspace is not the same as in the second. The characteristics of two one-dimensional  $T$ -invariant subspaces might be perceived as identical globally if each subspace is an image of itself. However, within the subspace, the function's behavior might be different. Realizing this requires the de-encapsulation of an Object to the Process from which it came from.

Considering the effects of the transformation interior to the invariant subspace might involve some difficulties. For example someone might think that the image of a 2-dimensional  $T$ -invariant subspace in  $R^3$  must be the same as itself. However, this individual would not be considering the following subspaces as possible images: a line contained in the same plane and passing through the origin, the origin, or the same plane but with all its vectors in a different position. This might be an obstacle for the individual in distinguishing whether an invariant subspace is an eigenspace. We think of these considerations as a valuable opportunity to expand the schema of linear transformation by designing a mathematical working space that favors the interiorization of graphical Actions related to the invariant subspace concept.

For the most part, Daniel's mathematical work sidestepped the analysis of the graphical properties of invariant subspaces to resort to the computational aspects associated with the eigenvector and eigenvalue concepts in the algebraic register. The fragility of his graphical constructions related to the concepts eigenvector, eigenvalue and invariant subspace led the instructor to resort to a conjecture to explain the eigenvectors in the dynamic environment: to determine the eigenvectors, it is enough to find the invariant subspaces. It seems that when reasoning about graphical aspects, Daniel separated the notions of eigenvector and eigenvalue, since, although he perceived the infinity of eigenvectors, he was not interested in the characteristics of  $T(v)$  for any  $v$ .

Daniel did not reflect about the image vector of an eigenvector being linked to its associated eigenvalue. If the instructor had explored the images of invariant

subspaces in the software, by means of the execution of graphic Actions he could have thought about the relationships between an invariant one-dimensional subspace and eigenspace, but this did not happen. We think that the design of a mathematical working space that promotes the activation of the semiotic and instrumental geneses can facilitate the interiorization of graphic Actions related to the eigenvector and eigenvalue concepts, where the use of the scalar multiplication property of linear transformation Process is indispensable. Figure 10 shows some of the circulations in Daniel's mathematical work.



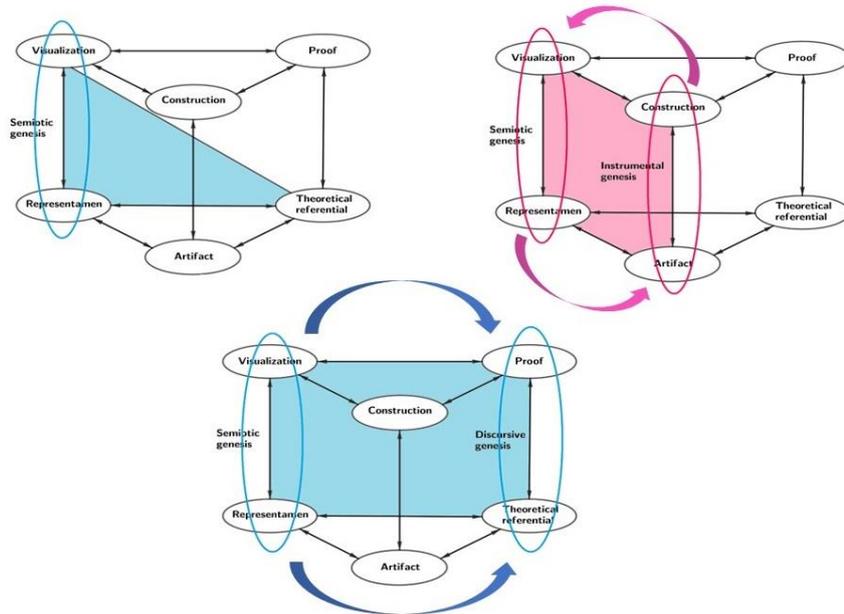
**Figure 10.** Circulations in the mathematical work of Daniel when determining invariant subspaces of  $T$  employing the dynamic environment

In Fernán's case, the instrumental and semiotic geneses in his mathematical work with the software favored the interiorization of his invariant subspace Actions, which consist of evaluating a linear transformation on a given subspace and deciding whether its image is contained or not in that subspace. Posing this problem in an algebraic register would require knowing the rule of the linear transformation. This might imply reducing the concept to specific or prototypical cases due to operational difficulties with complex expressions. We observed that the instrumental and semiotic geneses favored the interiorization of the Action structure related to invariant subspace, promoting reflection on its execution, which could hardly be carried out repeatedly in a paper and pencil environment. We also hypothesize that the construction of schemes related to the use of dynamical geometry software can motivate reflection on the existence of invariant subspaces whose image is the zero vector, absent from the instructor's thoughts during the interview.

Another example of the use of mental mechanisms through the activation of geneses occurred when Fernán explained a relationship between eigenvectors and invariant subspaces. To demonstrate that the former constitute bases for the latter, Fernán

activated a semiotic genesis to transit between representations. This semiotic genesis favored for him the coordination of the mental processes related to different concepts of Linear Algebra. We hypothesize that designing a mathematical workspace that allows the activation of the three geneses having semiotic and instrumental geneses as core, would contribute to constructing the eigenvector Process.

Additionally, we think that the activity in the Semiotic-Instrumental plane related to the direct manipulation of the dynamic environment can also promote the mechanism of interiorization of the graphical Actions of eigenvector by exploring the vectors of an invariant subspace. The Process resulting from this interiorization would allow the construction of the eigenvalue Process by means of the reversal mechanism. This mechanism can also germinate within the mathematical work developed in the Semiotic-Discursive plane since it implies reflection on the Actions that must be performed on the scalar to obtain a vector that grants it the character of eigenvalue. Figure 11 shows some of the circulations in Fernán's mathematical work.



**Figure 11.** Circulations in the mathematical work of Fernán when detecting invariant subspaces

It should be clarified that circulation through the three planes involved in the personal mathematical working space of an individual, as well as the activation of the three geneses, do not guarantee the construction of mental structures associated with the concepts of eigenvector and eigenvalue. During the interview, Fernán evidenced circulations in the three different planes and activation of the three

geneses and did not demonstrate a Process conception of either eigenvector or eigenvalue, at least graphically. It should also be noted that moving between representations, in the case of semiotic genesis, does not ensure a structural and conceptual understanding either. Conversion of registers implicates Processes; otherwise, there would only be translations of fixed data without access to the structural richness of the concepts.

Our exploration through interviews with linear algebra instructors showed a promising approach for introducing and developing eigenvector and eigenvalue concepts by means of their interaction with the notion of invariant subspace. We recommend incorporating this approach in undergraduate courses through the use of dynamic geometry and careful design of mathematical situations.

### Bibliography

ANTON, H. & RORRES, C. (2014). *Elementary Linear Algebra. Applications version. 11<sup>th</sup> Edition*. Wiley.

ARNON, I., COTTRILL, J., DUBINSKY, E., OKTAÇ, A., ROA, S., TRIGUEROS, M. & WELLER, K. (2014). *APOS Theory – A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.

AXLER, S. (2015). *Linear Algebra Done Right. Third Edition*. San Francisco: Springer.

BETANCUR, A., ROA FUENTES, S. & PARRAGEZ GONZÁLEZ, M. (2022). Construcciones mentales asociadas a los eigenvalores y eigenvectores: refinación de un modelo cognitivo. *AIEM – Avances de investigación en educación matemática*, 22, 23-46.

BOUHJAR, K., ANDREWS-LARSON, C., HAIDER, M. & ZANDIEH, M. (2018). Examining students' procedural and conceptual understanding of eigenvectors and eigenvalues in the context of inquiry-oriented instruction. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman & M. Zandieh (Eds.), *Challenges and strategies in teaching linear algebra* (pp. 193-216). Springer, Cham.

CAGLAYAN, G. (2015). Making sense of eigenvalue – eigenvector relationships: math majors' linear algebra – geometry connections in a dynamic environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, 40, 131–153.

DORIER, J.-L. (2000). *Recherches en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'algèbre linéaire. Perspective théorique sur leurs interactions. Les cahiers du laboratoire Leibniz n° 12*, Laboratoire Leibniz-IMAG.

- DORIER, J. L., ROBERT, A., ROBINET, J. & ROGALSKI, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra: A variety of studies from 1987 until 1995. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 85-124). Kluwer Academic Publishers.
- GOL TABAGHI, S. (2014). How dragging changes students' awareness: Developing meanings for eigenvector and eigenvalue. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 14(3), 223-237.
- GOL TABAGHI, S. & SINCLAIR, N. (2013). Using dynamic geometry software to explore eigenvectors: The emergence of dynamic-synthetic-geometric thinking. *Technology, Knowledge and Learning*, 18, 149-164.
- KUZNIAK, A., (2022). The Theory of Mathematical Working Spaces – Theoretical Characteristics. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P. R. Richard (Eds.) *Mathematical Work in Educational Context. The perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. Springer.
- KUZNIAK, A., TANGUAY, D. & ELIA, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM Mathematics Education*, 48(6), 721-737.
- LAPP, D. A., NYMAN, M. A. & BERRY, J. S. (2010). Student connections of linear algebra concepts: an analysis of concept maps. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(1), 1-18.
- MONTOYA, E. & VIVIER, L. (2014). Les changements de domaine de travail dans le cadre des Espaces de Travail mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 19, 73-101.
- PLAXCO, D., ZANDIEH, M. & WAWRO, M. (2018). Stretch directions and stretch factors: A sequence intended to support guided reinvention of eigenvector and eigenvalue. In S. Stewart, C. Andrews-Larson, A. Berman & M. Zandieh (Eds.) *Challenges and strategies in teaching linear algebra*, (pp. 175-192). Springer, Cham.
- PREDIGER, S., BIKNER AHSBAHS, A. & ARZARELO, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education*, 40, 165-178.
- RASMUSSEN, C. & KEYNES, M. (2003). Lines of eigenvectors and solutions to systems of linear differential equations. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 13(4), 308-320.
- SALGADO, H. & TRIGUEROS, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS Theory. *Journal of Mathematical Behavior*, 39, 100-120.

SIAP, I. (2008). Motivating the concept of eigenvectors via cryptography. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 27(2), 53-58.

SINCLAIR, N. & GOL TABAGHI, S. (2010). Drawing space: Mathematicians' kinetic conceptions of eigenvectors. *Educational Studies in Mathematics*, 74, 223-240.

SIERPINSKA, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.) *On the teaching of linear algebra* (pp. 209-246). Kluwer Academic Publishers.

SIERPINSKA, A., TRGALOVA, J., HILLEL, J. & DREYFUS, T. (1999). Teaching and learning linear algebra with Cabri. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the of the 23<sup>rd</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 119-134). Technion – Israel Institute of Technology.

SOTO, J. L. & GARCÍA, M. (2002). *A graphical exploration of the concepts of eigenvalue and eigenvectors in  $\mathbf{R}^2$  and  $\mathbf{R}^3$* . [Paper presentation]. 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the undergraduate level, Crete, Greece. <http://users.math.uoc.gr/~ictm2/Proceedings/pap370.pdf>

WAWRO, M., WATSON, K. & ZANDIEH, M. (2019). Student understanding of linear combinations of eigenvectors. *ZDM Mathematics Education*, 51(7), 1111-1123.

**GISELA CAMACHO**

Facultad de Ciencias-UNAM

gisela@ciencias.unam.mx

**ASUMAN OKTAÇ**

Cinvestav-IPN

oktac@cinvestav.mx

CATHERINE HOUEMENT, EDITH PETITFOUR

## L'INFLUENCE DU COMPAS DANS UNE TÂCHE DE CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE D'UN CERCLE

**Abstract.** **The influence of the compass in the geometric construction of a circle.** This study follows on a semiotic and didactic analysis of a situation in which students (9-11 years old) had to draw a freehand diagram corresponding to a geometric figure. The figure is defined by a geometric text which specifies the relative positions of the circle and the square. The article looks at how the use of a compass could help students to succeed in drawing the figure. The didactic and semiotic analysis carried out sheds new light on the role of the compass in the geometric construction of a circle and on the knowledge that needs to be developed in order to lead primary school students to geometric learning through instrumented construction.

**Keywords.** school geometry, compass, circle, semiotic analysis, freehand drawing

**Résumé.** Cette étude fait suite à une analyse sémiotique et didactique d'une situation où des élèves de Cours moyen (9-11 ans) devaient tracer un dessin à main levée correspondant à une figure géométrique donnée par un court texte citant un carré et un cercle. Elle questionne l'aide à la réussite du tracé que pourrait apporter l'utilisation du compas. L'analyse didactique et sémiotique menée apporte un nouvel éclairage quant au rôle de l'utilisation du compas dans une tâche de construction géométrique d'un cercle et sur des connaissances à développer en vue de conduire les élèves de l'école primaire à des apprentissages géométriques par la construction instrumentée.

**Mots-clés.** Géométrie, compas, cercle, analyse sémiotique, dessin à main levée

---

Nos recherches sont pilotées par un questionnement sur ce qui, en situation de classe, peut aider ou bloquer les élèves dans l'accomplissement de tâches mathématiques proposées par l'enseignant : connaissances des élèves, complexité de la tâche, interventions de l'enseignant. Ce questionnement nous a permis d'avancer sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie plane en fin d'école primaire (Houdement & Petitfour 2022, 2023), en appui notamment sur des problèmes de construction d'un dessin à partir d'un texte donné par l'enseignant à des élèves de Cours moyen en France (9-11 ans). Dans cet article, nous poursuivons l'étude de ce type de tâche, commun à l'école, mais assez peu étudié en didactique de la géométrie, qui donne la part belle aux tâches de reproduction et restauration de figures.

L'article se compose de cinq grandes parties. La première décrit la genèse de notre recherche sur la géométrie plane, une situation de classe que nous avons analysée

dans un article précédent (notamment l'utilisation du dessin à main levée par certains élèves), et pourquoi cette étude se poursuit par l'analyse d'une séance de dessin instrumenté. C'est aussi l'occasion de décrire notre outillage théorique et méthodologique, notamment nos analyses sémiotiques. La deuxième partie rend compte de recherches liées au dessin instrumenté, en relation ou non avec des interactions langagières. Elle souligne la spécificité de notre recherche par rapport aux travaux proches, explicite nos questions de recherche, et, sur cercle et compas, informe sur les programmes scolaires et cite des recherches emblématiques. Les troisième et quatrième parties sont centrées sur la séance de construction instrumentée. La troisième partie précise le contexte, donne des éléments de méthodologie. La quatrième partie analyse finement les processus de tracé de trois élèves pour repérer les difficultés à utiliser le compas, comprendre le cercle, mettre les deux en relation, et plus généralement questionner le regard porté sur les instruments en didactique. La cinquième partie conclut l'article et propose des pistes pour l'enseignement.

### **1. Genèse et fondements de l'étude**

Dans le cadre du projet Ambition scolaire et ruralités en Normandie<sup>1</sup> de l'Université de Rouen Normandie, nous avons démarré en octobre 2019 une recherche-formation avec quatre enseignantes de Cours moyen exerçant dans des écoles voisines de milieu rural. La finalité explicite de ce projet pour les enseignantes était notamment de partager et de questionner leur pratique (au sens large) entre collègues, les chercheuses accompagnant ce processus. Il s'agissait aussi pour nous d'observer des actions ou interactions au sein de la classe au cours d'une situation d'enseignement-apprentissage en mathématiques.

Pour concilier ces objectifs, l'intérêt d'un projet de séance commune aux quatre classes s'est assez vite dégagé. Nous ne sommes intervenues ni dans le choix du thème mathématique de la séance ni dans son élaboration. Nous avons laissé les enseignantes responsables du contenu et du déroulement de la séance, que nous avons découverts lors de la mise en œuvre.

Les enseignantes ont ainsi construit ensemble un projet de séance (environ 1 heure), qu'elles ont menée chacune dans leur classe à la même période (novembre 2019), en appui sur un même type de tâche, la construction d'un dessin à partir d'un texte. Elles ont choisi plusieurs textes (six) et le type de dessin à produire (sans instruments).

---

<sup>1</sup> Université de Rouen Normandie, ESPE, Académie de Rouen (2018). *Ambition Scolaire Et Ruralités En Normandie*. [http://circvaldereuil.spip.ac-rouen.fr/IMG/pdf/1\\_ambition\\_scolaire\\_en\\_milieu\\_rural\\_normand\\_v7.pdf](http://circvaldereuil.spip.ac-rouen.fr/IMG/pdf/1_ambition_scolaire_en_milieu_rural_normand_v7.pdf).

Dans ce cadre, nous avons en particulier observé des séances où des élèves de Cours moyen devaient produire un dessin à main levée de la figure composée d'un carré et d'un cercle, donnée par ce court texte : *Tracer un carré. Tracer un cercle qui a pour centre un sommet du carré et qui passe par deux autres sommets.* C'est sur ce texte que se base la présente étude.

Dans les sections qui suivent, nous développons :

- notre vision de la géométrie plane et de son enseignement,
- les fondements méthodologiques de nos recherches,
- des éléments d'analyse (développés plus finement dans Houdement et Petitfour, 2022<sup>2</sup>), utiles pour la compréhension de l'étude présentée dans cet article.

### **1.1. Notre vision de la géométrie plane**

Nous considérons que l'objet géométrique est un objet théorique de Géométrie 2 (Houdement, 2007 ; Houdement & Kuzniak, 1998-1999). À l'instar de Peirce (1978), nous considérons que cet objet théorique se donne à voir par des signes relevant de différents systèmes sémiotiques, comme des textes et des dessins. Le même objet géométrique peut être représenté par des textes différents. Il existe plusieurs types de dessins, sollicitant des systèmes sémiotiques différents, qui représentent cet objet : des dessins faits aux instruments, qui sont alors semblables ; des composites, dessin avec texte ou codage (qui satisfait à des conventions partagées), alors nommés « figures géométriques » (Laborde & Capponi, 1994). Le rapport aux figures demandé aux élèves dépend du paradigme géométrique institutionnel : il évolue au cycle 3 (9-12 ans), entre les deux années de fin d'école primaire (9-11 ans) et la sixième, première année de collège (Houdement, 2007 ; Houdement & Kuzniak, 2006).

### **1.2. Fondements méthodologiques de nos recherches**

Dans nos recherches (Houdement & Petitfour, 2018, 2020, 2022, 2023 ; Petitfour & Houdement, 2022), nous accueillons toute opportunité d'observer et de filmer une séance de mathématiques répondant à des demandes d'enseignants (questionnement sur leur pratique, sur les apprentissages de leurs élèves). Nous laissons aux enseignants l'entière liberté du choix du contenu de la séance et de sa mise en œuvre. Ils sont responsables du déroulement, maîtres de leurs interventions. Cette part de

---

<sup>2</sup> Nous renvoyons à cet article pour plus de détails sur les processus de résolution des élèves de la tâche étudiée, très riches et révélateurs de connaissances géométriques, ou de leur absence.

hasard sur nos objets d'étude contribue à approcher au mieux l'authenticité des pratiques.

Notre recueil de données et nos analyses visent à accéder aux processus de résolution des élèves, aux effets immédiats et différés des actes de l'enseignant. Dans un autre temps, nos recherches visent à enrichir l'outillage praxéologique des enseignants pour aider les élèves à conceptualiser les objets mathématiques (en amont du collège). Elles permettent aussi d'outiller des ingénieries futures.

Notre méthodologie passe par une analyse didactique *a priori* de la tâche prescrite aux élèves (au sens de Chevallard, 1999) et par une analyse *a posteriori* des productions des élèves, des actions des élèves (ce qu'ils font) et des interactions au sein de la classe.

Notre spécificité est l'analyse sémiotique. Nous rentrons dans la compréhension et l'interprétation des actions des élèves et de l'enseignant, et des interactions entre élèves, ou élève(s) et enseignant, grâce au recueil et à l'analyse de tous les signes (au sens de Peirce, 1978), autant que faire se peut, qui circulent dans l'activité, à un grain plus ou moins fin.

Nous organisons ces divers signes en appui sur le concept de « faisceau sémiotique » (Arzarello, 2006), selon deux directions : synchronique (simultanéité) et diachronique (chronologie). Nous en rendons compte avec la construction de « tableaux sémiotiques » qui organisent les faisceaux selon les deux dimensions citées (Houdement & Petitfour, 2019, 2020, 2022). Enfin nous inférons des interprétations sur l'état des connaissances d'un élève, d'un enseignant, relativement aux tâches qu'ils traitent (faire un tracé, utiliser un instrument, etc.). Ces interprétations sont nourries par notre culture didactique. Elles acquièrent un statut de plausibilité par triangulation des différentes données (Denzin, 1978) que nous avons recueillies et organisées : données sur l'élève seul, l'élève en interaction avec un pair, avec l'enseignante ; enseignante en collectif, en accompagnement individuel ou d'un groupe, en entretien avec nous.

Pour collecter les différents signes en circulation lors de la séance observée, nous utilisons une méthodologie de recueil de données sophistiquée : plusieurs caméras (fixe, mobiles), des enregistreurs répartis dans la classe ; un enregistreur propre à l'enseignant (micro-cravate) ; récupération des productions des élèves, voire des extraits de leur cahier, des affichages au mur, etc. Le recueil de données se fait sur une seule séance, mais il est très abondant.

### 1.3. Éléments d'analyse

#### 1.3.1. Éléments d'analyse a priori

Rappelons la tâche proposée aux élèves lors d'une première étude (Houdement & Petitfour, 2022). Il s'agit de produire un dessin à main levée de la figure donnée par ce texte : *Tracer un carré. Tracer un cercle qui a pour centre un sommet du carré et qui passe par deux autres sommets.*

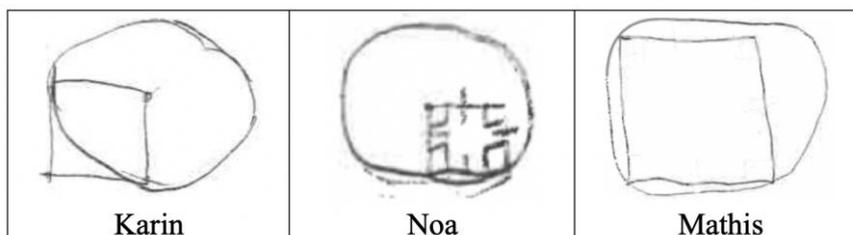
Cette tâche est une conversion au sens de Duval (2005) : l'objet géométrique (objet théorique) est défini par un texte (signe langagier) ; il est demandé de produire un dessin (signe graphique) de cet objet, que la classe pourra accepter comme dessin adéquat.

Le texte qui définit la figure géométrique est court, mais il n'est pas simple. Comme nous l'avons anticipé dans l'analyse *a priori*, la seconde phrase du texte a été source de difficulté pour les élèves. En effet cette phrase est doublement complexe. Un point du plan est qualifié de deux façons différentes, selon l'unité figurale 1D à laquelle il se rattache : centre (resp. sommet) de cercle (resp. de carré). Duval (2014) nomme cette tournure langagière la « double désignation » et la considère incontournable dans le langage géométrique. La compréhension de cette double désignation est cruciale pour la réussite du tracé, mais elle est source de difficultés pour des élèves de 10-11 ans (Duval, 2014).

Le dessin demandé est à faire à main levée. Ce type de dessin n'est pas explicitement défini dans l'enseignement (cf. Houdement & Petitfour, 2022), contrairement au dessin instrumenté, dont chacun se représente ce qu'il peut être. La question cruciale est la position du cercle par rapport au carré, son corollaire est comment le dessin à main levée en rend ou pourrait en rendre compte. L'expert pense immédiatement au rôle du codage, signes graphiques ajoutés sur le dessin affirmant la prise en compte et/ou la présence d'une propriété géométrique. Le dessin aux instruments peut, lui, être validé par superposition à un dessin-solution préparé par l'enseignant si l'échelle est fixée (validation en Géométrie 1). Se pose en creux la question de la validation du dessin à main levée : suffit-il qu'il réponde aux conditions du texte pour qu'il soit valide ? Ce n'est pas si simple !

#### 1.3.2. Éléments d'analyse a posteriori

Les élèves génèrent une gamme variée de dessins en explorant des combinaisons de cercles et de carrés, qu'ils soient codés ou non. Trois exemples concrets sont présentés ci-dessous (figure 1).



**Figure 1.** Dessins à main levée produits par trois élèves

Le dessin à main levée de Karin sera considéré comme correct : le cercle est globalement centré sur un sommet du carré, le cercle passe (approximativement) par deux sommets opposés du carré, deux côtés du carré sont des rayons du cercle. Il n'y a pas d'incompatibilité avec la figure géométrique demandée.

Dans le dessin à main levée de Noa, le centre du cercle est (grossièrement) un sommet du carré ; deux sommets du carré sont sur le cercle, les codages confirment que Noa a aussi intégré l'information « carré ». Noa a respecté « à la lettre » les informations du texte, mais il y a « dissonance » du dessin avec la figure géométrique imposée. Le dessin de Noa est en effet celui d'une « figure impossible » (Houement & Petitfour, 2022, p. 332) : deux sommets consécutifs de ce carré ne peuvent pas être des points du cercle, leurs distances au centre étant différentes.

Le dessin à main levée de Mathis ne respecte pas la position du centre du cercle imposée par le texte. Son dessin est donc incorrect par « dissonance » avec le texte. Remarquons que c'est aussi le dessin d'une « figure impossible » : en effet si trois sommets d'un carré sont sur un cercle, le quatrième l'est aussi, et la figure est le cercle circonscrit au carré.

Lors de la comparaison des dessins à main levée produits par les élèves, parfois très « différents », s'est posée la question du comment valider ou invalider un dessin à main levée. Lors de la mise en commun au tableau, nous avons vu un élève (justement Noa, figure 1) mimer la rotation d'un compas (ses deux branches étant représentées avec pouce et index) et prendre ainsi conscience de l'invalidité de son dessin. C'est aussi une construction instrumentée au tableau qui a permis de trancher les discussions entre des dessins très différents (par exemple, figure 1). L'utilisation du compas (ou sa simulation) pour le dessin s'est avérée cruciale pour évaluer la pertinence des dessins à main levée (et convaincre les élèves).

Les trois dessins de la figure 1 rendent compte de choix différents concernant les incidences entre cercle et carré : deux ou trois sommets ? Si deux, sommets consécutifs ou sommets opposés ? La position du centre est acceptable dans deux dessins et inexacte pour le troisième (Mathis). Ce constat et l'étude des processus de tracé à main levée nous ont conduites à faire l'hypothèse didactique que l'utilisation

d'un compas contraindrait l'élève à réfléchir à la position du centre du cercle (où poser la pointe du compas ?). Il aiderait, par la conservation de la longueur entre centre et sommet que permet le compas, à ne retenir que deux points d'incidence entre cercle et carré, des sommets opposés du carré.

### ***1.3.3. Pour conclure***

Cette première étude nous a amenées à faire l'hypothèse que l'utilisation d'un compas permettrait aux élèves d'obtenir un dessin correct, notamment par ce que permet son usage canonique : conserver une courbure constante, par la détermination d'un centre et d'un rayon ; repérer les points à la même distance d'un point fixe. Dans cet article, nous examinons cette hypothèse tout en suggérant une complémentarité substantielle entre le dessin à main levée et le dessin instrumenté pour une conversion d'un texte en une figure. Nous avons donc proposé la même figure définie par le même texte, mais en demandant la production d'un dessin instrumenté plutôt qu'à main levée. L'idée est autant que faire se peut, d'analyser l'influence du compas sur les procédures des élèves confrontés à la même tâche de conversion d'un texte en un dessin, aussi en appui sur l'hypothèse cognitive que « l'utilisation d'un instrument accroît les capacités assimilatrices du sujet et contribue à l'ouverture de ses actions possibles. » (Rabardel, 1995, p. 62). Notre objectif est également de déterminer les connaissances à mobiliser dans la réalisation de cette tâche, et la potentialité de cette construction instrumentée à enrichir les apprentissages géométriques des élèves.

## **2. Dessin instrumenté**

### **2.1. Travaux connectés et spécificité de notre recherche sur le dessin instrumenté**

Depuis quelques années, s'est intensifiée l'attention des chercheurs au dessin instrumenté comme aide, pour des élèves de 9-11 ans, à la conceptualisation des objets géométriques du plan (p.ex. Duval & Godin, 2005 ; Perrin-Glorian & Godin, 2014 ; Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2017 ; Mathé et al., 2020). Cette conceptualisation passe en effet par la connaissance et la reconnaissance, par les élèves, de propriétés géométriques (alignement, incidences, perpendicularité, égalité de longueurs) prises en compte dans les actions instrumentées, mais aussi par l'aptitude à changer de regard sur la figure (Duval & Godin, 2005). C'est ainsi que les activités de reproduction de figures ont été revisitées, enrichies (p.ex. Bulf & Celi, 2015) et implémentées dans des classes dans le cadre de travaux collaboratifs entre enseignants et chercheurs (p.ex. Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2017). La reproduction d'une figure-modèle à une autre échelle bloque l'utilisation de la mesure (en empêchant le mesurage), amène à déconstruire la figure pour la reproduire (Ducel & Peltier, 1986 ; Keskessa et al., 2007), rend nécessaire la prise

en compte (d'abord implicite) par les élèves de propriétés géométriques pour la construire. Dans la restauration de figures, c'est la donnée d'un dessin amorce à compléter, une « partie » de la figure modèle, qui fixe le changement d'échelle, et engage déjà une déconstruction figurale ou dimensionnelle (Duval, 2005) pour repérer l'amorce dans la figure modèle.

Dans ces activités de reproduction ou de restauration de figures, la validation se fait par superposition du dessin produit au modèle (ou dessin-solution préparé par l'enseignant). Les figures modèles peuvent être élémentaires ou pas. Les instruments jouent le rôle de variable didactique, dans le sens où le choix d'un instrument (par le chercheur ou l'enseignant) pilote les connaissances que les élèves auront à mettre en œuvre pour réussir. L'enseignant pourra ensuite institutionnaliser ces connaissances, après éventuelles verbalisations et reformulations. Par exemple, dans le micro-espace (dessin sur feuille), il est possible de proposer des instruments de géométrie classiques tels que le compas ou la règle, mais aussi des gabarits présentant une variété de formes (susceptibles d'être utilisées pour leur contour), comme l'ont mentionné Mangiante-Orsola et Perrin-Glorian (2017). De plus, dans le méso-espace, d'autres outils se révèlent utiles, tels que la corde et le piquet (Blanquart-Henry, 2020 ; Blanquart, 2023).

Depuis une dizaine d'années, des recherches s'intéressent aussi aux interactions langagières accompagnant les actions instrumentées, en étudiant les liens entre les usages des instruments, les façons de parler et le rapport à la figure (p. ex. Barrier & al., 2014 ; Bulf & Celi, 2020 ; Bulf et al., 2021). D'autres ont analysé et mis en évidence les enjeux spécifiques du travail visant à aménager des passages entre actions instrumentées et construction d'un langage géométrique susceptible de désigner et de caractériser les objets et relations géométriques en jeu (p. ex. Mathé et al., 2021 ; Blanquart, 2023). Ces dernières recherches, tout comme d'autres, plus anciennes (p. ex. Grenier & Laborde, 1988 ; Berthelot & Salin, 1992 ; Fregona, 1995), s'intéressent aussi à la reproduction de figures, mais dans des situations de communication (Brousseau, 1983) : un émetteur possède une figure, il doit obtenir une copie superposable en envoyant des renseignements à un récepteur, sous forme d'un texte écrit.

Ces situations embarquent aussi la conversion d'un texte en un dessin instrumenté, mais celui de notre étude présente deux différences majeures. D'une part l'élève est confronté à un texte donné par l'enseignant, donc *a priori* pertinent (juste) pour rendre compte de la figure visée (par exemple, il contient au moins<sup>3</sup> toutes les informations nécessaires à la construction) : l'élève ne peut donc pas remettre en cause le texte reçu, comme ce serait le cas pour le récepteur d'un message émis par un autre élève avec l'intention de décrire la figure. D'autre part ce texte respecte la

---

<sup>3</sup> Et parfois seulement, ce qui rend la tâche plus difficile.

langue géométrique usuelle – nous parlons alors de « texte géométrique » – ; la réussite de l'élève passe donc par la compréhension de cette langue, notamment des façons géométriquement usuelles de décrire des relations entre des unités figurales, auxquelles il est nécessaire d'acculturer les élèves, notamment en vue du collègue. Bien sûr cette réussite passe aussi par la « conversion de cette compréhension » en un dessin.

## 2.2. Questions et méthodologie pour cette étude

Notre question de recherche pour cet article est la suivante : qu'apporte le compas dans cette tâche de construction géométrique d'un cercle insérée dans une tâche de conversion d'un texte en un dessin instrumenté ? Elle se décline en trois questions :

- Comment les élèves investissent-ils cet instrument ?
- Comment le compas les aide-t-il (ou pas) à réussir la tâche ?
- Quelles connaissances le compas les aide-t-il (ou pas) à mobiliser ?

Pour répondre à ces questions, nous mettons en œuvre des analyses sémiotiques telles que définies partie 1.2.

Afin de tester notre hypothèse sur l'aide que pourrait apporter le compas, et pour minimiser les effets de contexte (enseignante, école, etc.), nous avons proposé à l'une des quatre enseignantes impliquées dans notre projet de recherche deux ans auparavant de donner le même texte à ses élèves actuels (Cours moyen première année, 9-10 ans) afin qu'ils produisent un dessin aux instruments. Nous avons fourni les supports de travail (annexe 1) : une feuille avec le texte écrit, une feuille pour faire le dessin comportant un carré déjà tracé (4 cm de côté).

La tâche est donc de *tracer un cercle qui a pour centre un sommet du carré (déjà tracé) et qui passe par deux autres sommets*, en ayant à disposition les instruments géométriques classiques (règle graduée, équerre, compas). Pourquoi cette amorce d'un carré ? Pour permettre aux élèves de ne pas perdre de temps dans la construction d'un carré, en multipliant les essais et les gommages ; pour centrer l'attention des élèves sur la seconde phrase ; pour rendre possible entre élèves la comparaison des dessins par superposition.

Le problème géométrique étudié consiste à construire un cercle déterminé par la position de son centre et deux de ses points. Comme notre étude concerne plus précisément le cercle et sa construction au compas, nous affinons notre étude du cercle comme objet géométrique et objet d'enseignement : après un aperçu des programmes sur le cercle à l'école élémentaire, nous revenons sur des recherches sur le cercle en cycle 3, particulièrement en Géométrie 1. Suit une première analyse *a*

*priori* de la tâche de conversion, complétée dans un second temps grâce à une brève étude des dessins instrumentés produits par les élèves de la classe étudiée.

### **2.3. Cercle et compas**

#### ***2.3.1. Dans les programmes de l'école élémentaire***

Les élèves de cycle 2 (6-8 ans) doivent savoir « reconnaître, nommer » cercle et disque, « construire un cercle connaissant son centre et un point, ou son centre et son rayon », utiliser un « vocabulaire approprié (cercle, disque, rayon, centre) pour décrire » ces figures, faire un « lien entre propriétés géométriques (cercle) et instruments de tracé (compas). » (MENJ, 2020a, p. 64)

Les élèves de cycle 3 (9-11 ans) doivent savoir « reconnaître, nommer, décrire des figures simples ou complexes (assemblages de figures simples) » dont « cercle (comme ensemble de points situés à une distance donnée d'un point donné), disque. » (MENJ, 2020b, p. 98)

Les repères annuels de progression du cycle 2 et du cycle 3 (MENJ, 2019) indiquent qu'en Cours élémentaire première année (CE1, 7-8 ans) « les élèves construisent des cercles sans contraintes, avec un instrument tel qu'une ficelle ou un compas. », qu'en Cours élémentaire deuxième année (CE2, 8-9 ans) « les élèves construisent des cercles à partir du centre et du rayon, à partir du centre et du diamètre. », et qu'en Cours moyen première année (CM1, 9-10 ans) « ils tracent un cercle de centre et de rayon donnés » et « ils utilisent le compas pour tracer un cercle, connaissant son centre et un point du cercle ou son centre et la longueur d'un rayon, ou bien pour reporter une longueur. »

La construction *stricto sensu* incluse dans la tâche que nous proposons est donc adaptée au Cours moyen. Les programmes (MENJ, 2020b) mentionnent la construction de « figures simples ou complexes (assemblages de figures simples) ». En revanche rien n'est spécifié sur la complexité des textes qui décrivent les figures, les programmes semblent se limiter à un seul type de texte, le « programme de construction ».

#### ***2.3.2. Brève étude épistémologique***

Artigue et Robinet (1982) avaient choisi le cercle pour développer une recherche géométrique chez des élèves de 7-10 ans. Relativement à d'autres figures, le cercle est discerné perceptivement très tôt chez l'enfant, mais il est aussi « une figure pour laquelle l'illusion de transparence de l'objet était des plus fortes » (Artigue & Robinet, 1982, p. 8). Par exemple, en situation – celles qui sont décrites dans leur article –, le cercle fait appel à différentes conceptions perceptivement irréductibles l'une à l'autre : courbe fermée de courbure constante, courbe admettant une infinité

d'axes de symétrie, ensemble des points équidistants d'un même point. Nous ajoutons le cercle comme courbe qui peut être remplacée d'une infinité de façons dans son empreinte.

Pourquoi ne pas faire expliciter aux élèves les propriétés associées aux conceptions manifestées ? Certes, ce n'est pas indiqué dans les programmes, mais cela pourrait contribuer à une meilleure conceptualisation du cercle par les élèves. Les élèves proposeraient peut-être des formulations du type « le cercle tourne toujours pareil », « on peut plier le cercle en deux parties superposables de plein de façons », etc. Ce serait des propriétés associées à la perception visuelle ou à des manipulations matérielles de Géométrie 1. Remarquons que la définition explicitée dans les programmes du cycle 3 est celle, ponctuelle, du cercle comme ensemble des points tous à la même distance d'un point fixé appelé centre, définition de Géométrie 2.

Le lecteur de Duval (2005) aura pointé que cette dernière définition s'appuie sur des unités figurales 0D, les points, alors que les conceptions précédentes valorisaient plutôt des unités figurales 2D que 1D. C'est aussi la seule définition mentionnant un point, le centre, qui ne fait pas partie de la courbe, et peut rester invisible dans certaines conceptions du cercle<sup>4</sup>. Artigue et Robinet (1982) mentionnaient déjà que cette définition ponctuelle du cercle n'est pas d'accès facile au cycle 3, dans la mesure où les élèves ont plutôt des conceptions globales du cercle.

Par contre, même si cette définition lui ressemble, ce n'est pas celle du Livre I des *Éléments* d'Euclide qui définit comme cercle l'unité figurale 2D dont l'unité figurale 1D est le contour. Euclide (début du Livre I) considère que le centre fait partie du cercle et que le diamètre est une longueur invariante du cercle et un axe de symétrie.

Définition 15 : Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence et telle que toutes les droites issues d'un point intérieur (unique) vers la circonférence sont égales entre elles.

Définition 16 : Et ce point se nomme le centre du cercle.

Définition 17 : Le diamètre du cercle est une droite menée par le centre, et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle : le diamètre partage le cercle en deux parties égales. (Perrin, 2005, p. 2)

Nous remarquons que deux expressions sont utilisées dans le traité très construit des *Éléments* d'Euclide : cercle pour l'unité figurale 2D (que nous nommerons désormais cercle-2D), circonférence pour l'unité figurale 1D (cercle-1D). Cette distinction pourrait être à l'origine des deux termes scolaires associés de nos jours

---

<sup>4</sup> Remarquons que rayon et diamètre restent souvent implicites ou définis comme des longueurs.

au cercle : disque pour le cercle-2D, et cercle pour le cercle-1D. Mais pourquoi conserver deux termes à l'opposé de toute autre figure élémentaire comme le carré, le rectangle, tout polygone ? Cette interrogation est d'ailleurs étudiée dans le Nouveau Dictionnaire de Pédagogie et d'Instruction Primaire, par Bourlet (1911) dans l'article Mathématiques, section *Géométrie et dessin géométrique, Cours moyen* :

On a, par exemple, conservé dans l'enseignement primaire la fâcheuse habitude, depuis longtemps abandonnée des mathématiciens, d'employer les termes cercle et circonférence, en disant : le cercle est une surface, la circonférence est une ligne. [...] Pourquoi deux termes<sup>5</sup> pour le cercle et un seul pour le carré, le rectangle, l'ellipse, la sphère, etc. ? Si l'on était logique, il faudrait deux mots, l'un pour désigner la portion de plan limitée par un carré et l'autre pour désigner la ligne qui la borde ; il faudrait aussi deux termes, l'un pour désigner le volume de la sphère et l'autre pour sa surface. (Bourlet, 1911, p. 16)

Risquons même une hypothèse : l'existence de deux termes différents empêcherait les élèves d'avoir un double regard sur le cercle (comme surface et comme ligne) : l'expression « cercle » orienterait sur un regard 1D, empêcherait de considérer des points intérieurs au cercle (notamment le centre) ; l'expression « disque » entraînerait un regard 2D.

Dans leur article, Artigue et Robinet considèrent le compas comme un outil de maniement aisé (Artigue & Robinet, 1982) qui permet un tracé immédiat, sans qu'il soit nécessaire de se rappeler des propriétés géométriques du cercle. Il nous semble que cela peut faire obstacle à la compréhension du cercle comme un objet géométrique avec des propriétés définitoires. Par contre, pour tracer un carré, il est utile de savoir par exemple qu'il a quatre côtés de même longueur et quatre angles droits. Le cercle apparaît donc bien comme un objet géométrique d'intérêt au cycle 3.

### 2.3.3. Recherches sur le cercle

Des recherches plus récentes (p. ex. Bulf & Celi, 2020 ; Mathé et al., 2021 ; Guille-Biel Winder & Mangiante-Orsola, 2023) prennent le cercle comme objet géométrique d'étude. Par exemple, Bulf et Celi (2020) étudient dans trois classes (CE2, CM1, 6<sup>e</sup>)<sup>6</sup> l'implémentation d'une situation de reproduction de figure qu'elles ont conçue (que l'une mène en CE2) : construire au compas un cercle superposable à un cercle donné graphiquement, avec l'aide d'un gabarit « demi-disque » de même rayon que le cercle modèle ; ce gabarit non pliable ne peut être utilisé que pour

---

<sup>5</sup> Les termes cercle et circonférence ont été en usage dans l'enseignement jusqu'à la réforme des mathématiques modernes (années 1970), puis ils ont été remplacés respectivement par disque et cercle.

<sup>6</sup> 8-9 ans, 9-10 ans, 10-11 ans.

prendre des informations sur le modèle, notamment enrichir les tracés sur la figure modèle. La finalité déclarée par les chercheuses est d'« arriver à formuler une définition du cercle par son centre et son rayon. » (Bulf & Celi, 2020, p. 134)

Les autrices remarquent que les élèves des trois classes mettent en œuvre des procédures liées aux symétries axiales du cercle : avec le gabarit, partager le cercle modèle en deux par un axe vertical, complété parfois par un axe horizontal, trouver son centre ainsi ou comme milieu approximatif du diamètre. Cette inférence de la symétrie ne nous étonne pas : elle nous semble liée à la forme du gabarit, un demi-cercle-2D, qui amorce l'axe de symétrie, un diamètre. Tout se passe comme si les élèves étaient influencés par ce qu'ils perçoivent du gabarit. Par contre la situation choisie ne nous semble pas adaptée pour « ouvrir la voie vers une conception ponctuelle du cercle » (Bulf & Celi, 2020, p. 131), dans la mesure où elle n'engage pas la vision ponctuelle contenue dans cette définition.

Dans Bulf et al. (2021), cette même situation est comparée à deux autres situations observées aussi en sixième et visant le même objectif. La première, de facture plus classique, relève d'une pratique ostensive qui consiste à faire marquer collectivement au tableau le maximum de points à la même distance d'un point A, puis à solliciter le logiciel GeoGebra pour faire rapidement augmenter le nombre de points équidistants du point A. Cette ostension convainc les élèves qu'il existe un grand nombre de points équidistants du point A, mais ils ne sont pas prêts à croire que cet ensemble de points est un cercle. Le passage d'un ensemble de points équidistants d'un point à une ligne de courbure constante semble plus complexe que pensé dans ce contexte. La seconde observation en sixième concerne aussi une situation de reproduction d'un cercle avec un gabarit « demi-disque », mais l'enseignant a ajouté d'autres instruments (règle, règle graduée, etc.) différenciés selon leur coût d'utilisation par l'élève. Ces ajouts, de notre point de vue, la rendent très complexe à mener et à analyser (ne serait-ce qu'*a priori*). Ces trois observations de classe permettent aux autrices de mettre au jour des conceptions différentes entre celles visées et/ou utilisées par l'enseignant et celles des élèves, et de pointer la difficulté à construire la définition ponctuelle du cercle visée par les enseignants de collège.

Terminons ce panorama de recherches sur le cercle en évoquant celle de Chassapis (1998) qui porte une attention spécifique au compas pour le cercle. En appui sur une analyse de données empiriques, ce chercheur indique que l'utilisation du compas dans le dessin de cercles structure l'opération de dessin d'une manière radicalement différente qu'avec l'usage de gabarits de cercles. Il souligne alors l'intérêt de l'utilisation du compas pour transformer les concepts spontanés initiaux du cercle, fondés sur des attributs saillants isolés (par exemple la rondeur ou la symétrie) en des concepts qui se réfèrent plus explicitement aux éléments de définition de base du cercle (le centre et le rayon, le rayon étant une longueur ou un segment de droite). Il va dans le sens de la potentialité du compas pour approcher la définition du cercle

visée par les programmes français. Cependant, même si ces données n'ont pas été récoltées, il souligne l'influence potentielle des interactions verbales entre élèves et chercheur, sur l'avancée de la pensée, des visualisations de la figure et de l'affinement des tracés. Cette analyse conforte notre hypothèse sur l'aide que peut apporter le compas et le choix d'analyses sémiotiques.

Ce parcours de recherches sur le cercle souligne la richesse des visualisations spontanées de cette figure, comme surface ou comme ligne. L'existence d'un instrument culturel, le compas, permet la construction de cette ligne et *a priori* la compréhension du rôle que joue le centre du cercle et de la conservation de la distance du centre à un point quelconque du cercle. Par contre, rendre accessible aux élèves une définition ponctuelle du cercle (prônée par les programmes) semble plus complexe. Dans l'étude présentée ci-après, la conception du cercle en jeu, implicitement portée par le compas, est celle d'une ligne de points à la même distance d'un autre point, le centre.

### **3. Contexte de l'étude et premières analyses**

#### **3.1. Contexte**

La séance s'est déroulée en décembre 2021 dans une classe de 19 élèves de Cours moyen, installés en quatre îlots de quatre élèves et un îlot de trois élèves. L'enseignante nous a précisé que les élèves avaient déjà travaillé avec un compas, ce que demandent effectivement les programmes. Dans la classe est installée une affiche contenant un dessin de cercle (non nommé) et « différentes parties » nommées : centre, rayon, diamètre, corde.

Le travail complet sur le texte a duré une demi-heure, découpé de la façon suivante : lecture silencieuse du texte (pas d'espace de question), travail individuel, comparaison des dessins par îlot, puis mise en commun en classe entière. La consigne donnée par l'enseignante fut de « bien lire le texte et d'essayer de reproduire ce qui est demandé », avec la remarque que le carré de la première phrase était déjà tracé.

L'organisation de la classe en îlots fut un atout pour les modes de travail (travail individuel, puis discussion dans l'îlot sur la pertinence des dessins relativement au texte), mais aussi pour la variété des données susceptibles d'être recueillies (des échanges entre élèves permettent d'avoir accès à des processus de tracé ou aux raisons de ces processus) et pour l'organisation matérielle de recueil de données. Étaient installés, pour le recueil du son, un enregistreur par groupe et un pour l'enseignante (micro-cravate), pour la partie filmée, une caméra fixe face à la classe, et trois caméras mobiles : l'une axée sur un groupe, les deux autres sur deux groupes chacune.

Nous en venons maintenant à l'analyse *a priori* de la tâche de conversion étudiée dans cet article.

### 3.2. Analyse de la tâche *a priori*

Les élèves doivent construire la figure correspondant au texte « *Tracer un carré. Tracer un cercle qui a pour centre un sommet du carré et qui passe par deux autres sommets* ». Ils disposent de leurs instruments de géométrie et d'une feuille sur laquelle le carré (4 cm de côté) est tracé (annexe 1).

Il s'agit donc de tracer aux instruments un cercle répondant à deux conditions : l'une contraint la position du centre (sur un sommet du carré), l'autre contraint deux points de la courbe (deux sommets du carré).

Nous identifions deux difficultés *a priori*, en quelque sorte emboîtées. Point de vue du cercle : le rayon du cercle n'est pas donné (comme abordé dans les classes d'avant, au cycle 2) ; le cercle est défini par son centre et deux de ses points, qui sont des points spécifiques d'une autre unité figurale, un carré. Point de vue du carré : trois sommets du carré sont en jeu, chacun affecté d'une seconde désignation : pour l'un, centre, pour les deux autres, points du (sur le) cercle. La compréhension de la double désignation est cruciale. *A priori* le dilemme principal est de choisir si les sommets du carré qui sont sur le cercle sont consécutifs ou opposés.

Le problème posé aux élèves est graphique. Pour le résoudre (en Géométrie 1), il faut faire des hypothèses et les tester par un tracé au compas, fictif (geste de mime avec l'instrument) ou réel. La première hypothèse porte sur le choix du sommet du carré à prendre comme centre : ce choix est indifférent, mais il n'est pas sûr que l'élève le sache *a priori*. La seconde hypothèse porte sur le choix du couple de sommets du carré qui seront points du cercle, sommets consécutifs ou opposés. Cette seconde hypothèse peut se dédoubler : faire l'hypothèse qu'un des points du cercle est le sommet opposé à celui du centre, rejeter cette hypothèse par le tracé au compas (le cercle ne peut pas passer par un autre sommet du carré), faire l'hypothèse qu'un des points du cercle est un sommet consécutif au sommet pris pour centre du carré, valider par le tracé.

Résoudre le problème géométriquement (en Géométrie 2) évite ces hypothèses : le centre du cercle étant un sommet du carré, chercher d'autres sommets du carré équidistants de ce sommet-centre permet de trouver les incidences cercle-carré et de déterminer que le cercle doit passer par les deux sommets du carré consécutifs au sommet-centre.

### 3.3. Productions des élèves et compléments d'analyse *a priori*

Le tableau 1 rend compte, pour chacun des dix-neuf élèves, de son dessin initial ou d'un dessin intermédiaire, gommé ou réalisé sans laisser de trace : aucun dessin final

n'a été obtenu du premier coup. Nous avons attribué à chaque élève un prénom devant lequel nous avons noté le numéro de son îlot, ce qui nous permet d'observer les dessins finaux qui ont pu bénéficier d'un « effet îlot », à savoir l'accord du groupe d'élèves (tacite ou discuté) pour la production d'un même type de dessin. Les prénoms en gras sont ceux des élèves qui ont conservé comme dessin final le même type de dessin que l'initial (six élèves concernés).

**Tableau 1.** Types de dessins au compas produits par les élèves

TYPES DE DESSINS	A	B	C	D	E	F	G	H
	4 sommets	2 sommets				1 sommet	0 sommet	
		consécutifs		opposés				
Dessin initial ou intermédiaire	1Clodia, 1Jamie, 4Zoé, 5Lili, 5Tamis, 5Mary	5Luis	2Gaby, 2Kléa, 3Luc, 3Paul, 4Maël	2Florine	1Claire	1Adrien, 1Jamie	3Daïa	
Dessin final	4Zoé, 5Lili, 5Tamis	5Luis	4Maël	4Loïc, 4Norick	1Claire, 1Adrien, 1Clodia, 1Jamie, 2Elena, 2Florine, 3Daïa, 3Luc, 3Paul, 5Mary		2Gaby	2Kléa

Nous observons une variété de propositions d'assemblages du cercle et du carré, que nous avons classés en fonction du nombre de sommets du carré appartenant au cercle : 4 (colonne A), 2 (colonnes B, C, D, E), 1 (colonne F) et 0 (colonnes G et H). Le dessin correspondant au texte, un cercle de centre un sommet du carré et qui passe par deux autres sommets du carré (colonne E), a été réalisé par dix élèves comme dessin final (soit la moitié de la classe). Une seule élève (Claire) avait envisagé ce dessin dès la lecture du texte. Trois élèves seulement (Claire, Adrien, Jamie) ont pris comme centre du cercle un sommet du carré dans leur dessin initial ou intermédiaire.

Un premier constat est à faire : le compas n'a pas apporté l'aide supposée pour la réussite de la tâche à tous les élèves. Ce qui nous conduit plus loin à analyser les connaissances en jeu pour d'une part le maniement du compas, d'autre part la conception « points du cercle équidistants de son centre », conception inhérente à ce problème.

L'analyse des dessins produits (tableau 1) confirme l'émergence des difficultés envisagées dans notre analyse *a priori* (en lien avec la double désignation : un centre est aussi un sommet) ; elle nous en révèle aussi d'autres. Les productions erronées des élèves nous amènent en effet à regarder la tâche proposée comme un problème géométrique « plus ouvert » que nous le pensions au départ (car nous considérons naturel que les élèves de Cours moyen<sup>7</sup> aient certaines connaissances sur le cercle et l'usage du compas, mais certains de ces élèves-là ne les avaient pas, comme nous le verrons par la suite). Nous pouvons donc maintenant compléter l'analyse *a priori*

<sup>7</sup> En appui sur notre interprétation des programmes

relative aux difficultés liées à la compréhension du texte en nous centrant cette fois sur les sommets du carré utilisés pour la construction du cercle (en tant que centre ou point du cercle).

Les élèves ont dû inférer, à partir du texte, le nombre de sommets du carré en jeu dans le dessin et leur « rôle » dans le dessin final. Les choix *a priori* sont les suivants.

Trois sommets sont en jeu (colonnes A, E) :

- les trois sommets sont sur le cercle : l'élève visionne alors le cercle circonscrit qui satisfait au moins à cette contrainte (colonne A) ;
- l'un des sommets est le centre, les deux autres vérifient les incidences cercle-carré du texte (colonne E) : ce sont des sommets nécessairement opposés.

Deux sommets sont considérés (colonnes B, C, D) :

- ils sont des incidences cercle-carré. C'est la seule contrainte retenue : avec le centre du cercle proche du centre du carré (colonne B, tracé du cercle circonscrit « aménagé » pour que deux sommets du carré seulement soient sur le cercle) ; avec le centre du cercle comme milieu d'un côté du carré (colonne C, le côté du carré est un diamètre du cercle) ; avec le centre du cercle sur la médiatrice d'un côté du carré (colonne D, le côté du carré est une corde du cercle) ; avec le centre du cercle sur une diagonale du carré (la diagonale du carré est une corde du cercle) ;
- l'un est le centre, l'autre un point du cercle (colonne F).

Un seul sommet est pris en compte : point du cercle ou centre du cercle.

Aucun sommet n'est pris en compte (colonnes G, H).

Dans la partie suivante, nous nous intéressons aux processus de tracé de quelques élèves, afin d'avoir un éclairage sur les connaissances qu'ils ont mis en jeu lors de la résolution de la tâche et sur leurs difficultés éventuelles.

#### **4. L'analyse de processus de tracé**

Nous avons choisi de rendre compte du processus de tracé de trois élèves (Claire, Jamie, Mary) dont les hésitations et les décisions nous semblent assez représentatives de difficultés rencontrées par les élèves de la classe.

Dans notre description des processus de tracé, nous utilisons des termes spatiaux pour désigner les sommets du carré en appui sur la position du carré par rapport à l'élève. De plus, nous associons des repères de temps à ces photos pour les situer les

unes par rapport aux autres dans le déroulement de la séance. L'origine du temps est prise au début de la séance. Les élèves démarrent la tâche étudiée à environ vingt-cinq minutes du début de la séance<sup>8</sup>.

Mary est dans l'îlot 5 avec Lili, Luis et Tamis ; Claire et Jamie sont dans l'îlot d'à côté (îlot 1) avec Adrien et Clodia. Précisons que nous analysons les processus de tracé de la figure que se représentent les élèves, même si elle n'est pas la figure du texte.

Pour faire ces analyses, nous nous appuyons sur le cadre d'analyse de la construction instrumentée de Petitfour (2015, 2017a) qui « tricote » les relations entre utilisations de l'instrument et concept géométrique naturellement associé (ici cercle et compas).

#### 4.1. Connaissances en jeu dans l'action instrumentée

Petitfour (2015, 2017a) a défini l'expertise en dessin instrumenté en géométrie par l'articulation de différents types de connaissances activées lors d'une séquence d'actions instrumentées. Précisons qu'une telle action est celle d'un sujet qui, dans son environnement de travail, utilise un objet technique (l'instrument de géométrie) pour produire ou analyser un objet graphique (dessin) représentant un objet géométrique. Ce développement permet de pointer quelles connaissances possède l'élève et lesquelles lui manquent pour utiliser de façon adaptée un instrument de géométrie.

Nous retenons pour la présente étude quatre types de connaissances, que nous précisons en les exemplifiant avec l'utilisation du compas pour tracer un cercle à partir de son centre et d'un de ses points dans l'environnement papier-crayon.

Les *connaissances technico-géométriques*<sup>9</sup> sont celles qui relient l'instrument (ou certains de ses composants) avec des éléments géométriques (représentés par des objets graphiques) : elles opérationnalisent l'intention de tracer (« l'intention d'agir » (Mazeau et al., 2021) en vue d'obtenir l'objet géométrique envisagé, indépendamment des conditions matérielles de tracé. Pour un tracé de cercle caractérisé par son centre et un de ses points, il s'agit de choisir comme instrument un compas, de mettre la pointe sur le centre du cercle et la mine sur un de ses points, puis de faire tourner la mine d'un tour complet sur le papier.

Les *connaissances manipulatoires* sont celles qui pilotent, à la suite d'une intention de tracer, les actions corporelles à coordonner pour déclencher l'organisation motrice

---

<sup>8</sup> Une autre tâche de conversion le texte et le dessin est réalisée lors de la première partie de la séance.

<sup>9</sup> Nous optons pour ce qualificatif de « technico-géométrique » plutôt que « technique » pour laisser apparente dans le terme la relation entre objet technique et objets géométriques sur laquelle porte les connaissances en question.

et spatiale de l'utilisation de l'instrument : l'élève sait les mettre en œuvre si le tracé obtenu correspond à son intention. Pour le cercle à tracer, il s'agit de positionner d'abord le compas : la main dominante maintient la branche du compas avec la pointe plantée sur le centre du cercle, tandis que l'autre main tire sur l'autre branche jusqu'à placer la mine sur un point du cercle. On peut ensuite tenir le tourillon du compas par la pince pouce-index de la main dominante tandis que l'autre main est posée à plat sur le papier pour le maintenir. Une flexion progressive de l'index de la main dominante permet de mouvoir le tourillon sur le pouce et ainsi tracer le cercle voulu. Une pression plus forte sur la pointe que sur la mine doit être réalisée pendant ce mouvement. Une alternative consiste, une fois pointe et mine positionnées, à garder le compas fixe de la main dominante et faire tourner la feuille de l'autre main en pivotant autour de la pointe du compas.

Les *connaissances organisationnelles* concernent la planification des séquences de gestes précédemment décrites (au niveau technico-géométrique et manipulateur), mais également l'organisation d'actions périphériques à la réalisation du tracé envisagé pour permettre sa réussite : aménagement de l'espace de travail (pour permettre de bonnes conditions de tracé) et apprêt du matériel.

Dans notre exemple, la feuille de tracé doit être posée sur une surface plane, non dure (comme une pochette cartonnée) pour éviter que le compas glisse quand on le pique, la mine du compas doit être taillée, la vis qui lie les deux branches doit être serrée, les deux branches doivent être réglées à la même hauteur, etc.

Les *connaissances géométriques* sont relatives aux objets, propriétés et relations géométriques. Pour le cercle à tracer, elles sont par exemple « Deux points du cercle-ligne<sup>10</sup> sont à la même distance du point centre », mais aussi la reformulation « Le centre du cercle est un point équidistant de tous les points du cercle-ligne ».

Les trois sections qui suivent relatent les processus de tracé de trois élèves. Rappelons que nous n'avons pas eu d'informations *stricto sensu* sur les habiletés des élèves pour les tracés de cercle. L'enseignante a accepté ce projet de séance. Une leçon sur le cercle a été faite. Chaque élève était muni d'un compas, éventuellement sorti de l'armoire, et l'avait déjà utilisé.

Nous demandons au lecteur d'exercer sa vigilance sur les émergences des connaissances en jeu (ou leur absence) et d'inférer des interprétations par les élèves des expressions « centre » et « sommet ». Nous ferons une synthèse dans ce sens.

---

<sup>10</sup> L'expression cercle-ligne serait plus adaptée au cycle 3 que cercle-1D

#### 4.2. Processus de tracé de Claire

Claire lit le texte à voix haute, puis signale à Jamie que le carré est déjà tracé : elle parcourt le contour du carré avec son doigt en précisant « Là, c'est le carré là, il est déjà fait ». Elle montre ensuite les paires de sommets par lesquelles le cercle peut passer, en réponse à l'inquiétude suivante d'Adrien : « Y'a un truc que j'comprends pas, faut qu'ça passe par deux, deux autres sommets, mais pas celui-là, pas un, c'est bizarre » (25 min 33 s). Elle place alors la pointe du compas sur le sommet « haut droite » du carré, amène la mine sur le sommet « haut gauche », saisit le compas d'une main, maintient la feuille de l'autre main et trace le cercle par à-coups. Elle soupire, dit qu'elle ne sait pas se servir d'un compas, repositionne pointe et mine sur les mêmes sommets et recommence le tracé cette fois en maintenant le compas fixe et tournant la feuille. Elle gomme le cercle, disant qu'elle va « le refaire mieux ». Elle retrace, gomme une partie parce qu'« il y a des vagues » et trace de nouveau.

Ainsi, Claire tente différentes tenues du compas lors de ses tracés (figure 2a). Elle maintient le compas par les branches, pas par le tourillon. Durant sept minutes, elle réalise six essais de cercle, qu'elle achève en épaississant le trait au crayon (figure 2b). Elle obtient un dessin (figure 3) qui ne la satisfait pas entièrement. Elle dira préférer le dessin d'Adrien « parce qu'il est bien symétrique » contrairement au sien.

Claire a eu une idée précise du cercle à tracer dès sa lecture du texte. La présentation aux membres de son îlot d'une planification cohérente d'étapes conduisant à la résolution du problème géométrique posé (figure 4) confirme sa bonne compréhension du texte : il faut tracer un cercle (37 min 40 s), quatre centres sont possibles (37 min 49 s) et une fois le centre choisi sur un sommet du carré (37 min 51 s), le cercle passe par un sommet qui lui est consécutif (37 min 58 s). L'explicitation de sa procédure à ses pairs rend compte de bonnes *connaissances technico-géométriques* et également *géométriques* (caractérisation d'un cercle par son centre et un point de sa courbe, propriétés du carré relatives à ses sommets).



Figure 2. Tracé du cercle par Claire

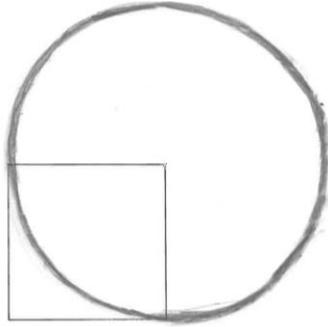


Figure 3. Production finale de Claire

	37 min 40 s	37 min 45 s	37 min 49 s	37 min 51 s	37 min 58 s	38 min 00 s
MOTS	J'ai fait euh un cercle	alors je me suis basée sur le centre, le centre, d'un sommet	tu pouvais déjà prendre celui-là, celui-là, celui-là	J'ai pris celui-là, comme ça, j'ai pris ma pointe j'ai fait ça	j'ai relié à celui-là	puis après j'ai tracé mon cercle
ACTIONS	Elle trace un cercle dans l'air avec l'index	Elle pointe un sommet du carré avec l'index	puis successivement les trois autres sommets du carré avec son crayon.	Elle met la pointe sur le sommet du carré désigné avant comme centre du cercle	Elle amène la mine sur un sommet consécutif au sommet pris pour centre	Elle mime le tracé avec son compas
DESSINS						

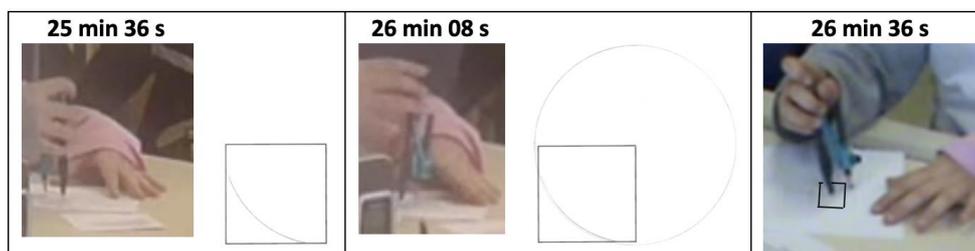
Figure 4. Méthode de tracé présentée par Claire

Les difficultés de Claire se situent uniquement au niveau *manipulatoire* : la préhension du compas par les branches, et probablement un mauvais dosage dans les appuis, l'empêchent d'obtenir le tracé qu'elle envisage et la conduit à recommencer plusieurs fois. Son dessin manque de précision. Elle en est consciente. Elle cherche à améliorer le rendu de la circularité de la courbe, géométriquement correcte, en épaississant la ligne.

#### 4.3. Processus de tracé de Jamie

Après des lectures à voix haute du texte, en interaction avec Claire qui lui précise que le carré est déjà tracé, Jamie explore différents types de dessins. Elle jette des coups d'œil réguliers sur ce que fait Claire, sa voisine, dont le dessin correspond bien au texte dès le premier tracé, mais avec un manque de précision comme nous venons de le voir. Nous relatons le déroulement de la recherche de Jamie.

Jamie place d'abord la pointe de son compas sur le sommet « haut droite » du carré et trace un arc intérieur au carré (figure 5, 25 min 36 s). Elle le gomme, puis reprend ce même tracé en réalisant le cercle complet (figure 5, 26 min 8 s), qu'elle gomme aussi, peut-être parce qu'il ne passe pas précisément par des sommets du carré ? Ce dessin est proche du dessin correspondant au texte (tableau 1, colonne E), mais Jamie ne semble pas le percevoir ainsi. En effet, elle n'ajuste pas l'écartement des branches du compas pour améliorer la précision du dessin, elle envisage un autre type de dessin (cercle circonscrit au carré) : elle place la mine du compas sur le sommet « bas gauche » du carré et la pointe dans une zone centrale, puis elle fait pivoter le compas en appui sur la pointe sans tracer (figure 5, 26 min 36 s). Notons que ce type de dessin est celui que vient juste de tracer Clodia, assise en face d'elle dans l'îlot 1. Peut-être Jamie a-t-elle voulu tenter un tracé analogue, voyant aussi Claire non satisfaite de sa proposition de dessin ?



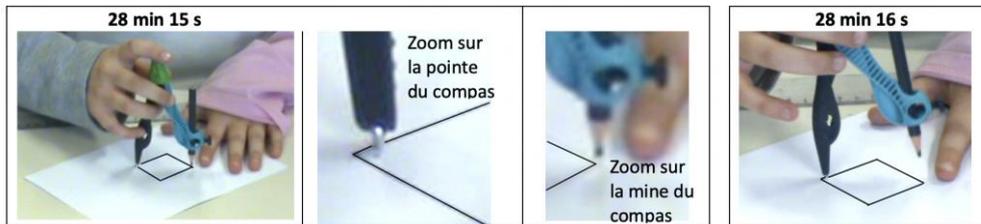
**Figure 5.** Premiers essais de Jamie

Jamie écarte ensuite les branches du compas, place la mine sur le sommet « bas droite », la pointe sur le sommet opposé (« haut gauche ») et étonnamment pivote dans l'air en appui sur la mine : les deux branches du compas semblent jouer pour Jamie un rôle symétrique, ce qui ne pose pas de problème si elle cherche seulement à visualiser la ligne sans tracer. Elle semble ainsi tester une autre hypothèse pour les sommets sur le cercle.

L'enseignante arrive et demande à Jamie, qui n'a pas encore de dessin sur sa feuille, ce qu'il faut faire. Jamie répond qu'il faut faire un cercle, puis elle lit le texte (27 min 53 s) « Trace un carré. Trace un cercle qui a pour centre un sommet du carré et qui passe par deux autres » et s'exclame « Ah, il faut faire un cercle qui passe dans deux sommets ? ». Sa lecture semble lui avoir fait comprendre cette contrainte de deux sommets sur le cercle à tracer. Notons qu'elle n'exprime pas l'information sur le centre du cercle, tout comme elle ne l'a pas prise en compte dans son essai précédent.

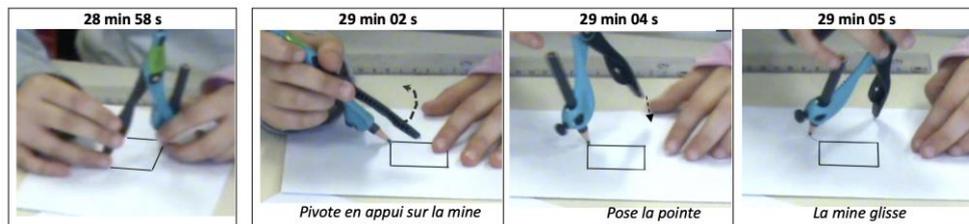
Jamie va tester ensuite longuement une troisième hypothèse : tracer un cercle qui passe par un sommet (du carré) opposé à celui qui est centre du cercle, en mettant du temps à comprendre que cette courbe ne passe pas par un troisième sommet (du

carré). Elle oriente d'abord sa feuille en format paysage. Elle positionne son compas avec la pointe près du sommet « bas droite » et la mine un peu au-dessus du sommet opposé (figure 6, 28 min 15 s). Elle pivote le compas en appui sur sa pointe, avec la mine en hauteur (figure 6, 28 min 16 s), en allant dans un sens, puis dans l'autre.



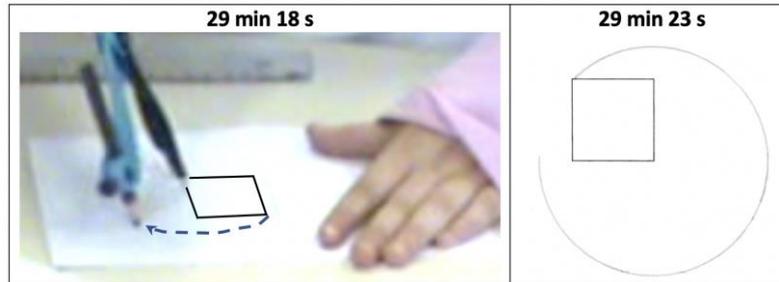
**Figure 6.** Positionnement du compas avant et pendant la rotation

Elle semble hésiter constatant peut-être que la ligne envisagée ne passe pas par un autre sommet (ou encore que la ligne « sort » de la feuille). Elle tourne sa feuille d'un quart de tour (format paysage), place la mine sur le sommet « bas gauche » et la pointe sur le sommet opposé (figure 7, 28 min 58 s). Elle réoriente alors sa feuille et pivote le compas en appui sur la mine placée sur le sommet « bas droite » avec la pointe très en hauteur au-dessus du sommet haut gauche (figure 7, 29 min 2 s). De nouveau, son usage du compas n'est pas approprié pour réaliser un tracé. Elle semble viser le sommet « bas gauche » (figure 7, 29 min 4 s), le compas glisse quand elle pose la pointe sur la feuille (figure 7, 29 min 5 s). Elle s'exclame « Ah non, mais j'ai bougé ! » et elle gomme.



**Figure 7.** Jamie (28 min 58 s à 29 min 5 s)

Elle trace cette fois le cercle envisagé, démarrant du sommet « haut gauche » (figure 8, 29 min 18 s). Elle s'arrête quand elle se rend compte qu'elle n'atteint pas le sommet du carré « bas gauche » (figure 8, 29 min 23 s). D'un ton agacé en tapant ses deux mains à plat sur la table, elle dit pour elle-même : « Oh, mais là c'est pas du tout bon hein ! ». Le tracé au compas lui permet ainsi d'invalider le choix fait de deux sommets opposés du carré comme centre et point du cercle.



**Figure 8.** Jamie (29 min 18 s et 29 min 23 s)

Jamie change alors de rayon en plaçant la pointe du compas sur un sommet et la mine sur un sommet consécutif, elle trace un cercle correspondant au texte en recommençant deux fois, en vue d'améliorer la précision. Elle fait preuve de relatives facilités de manipulation du compas tout au long de sa recherche. Ses actions révèlent à la fois la présence de *connaissances technico-géométriques et manipulatoires*. Elle formule d'ailleurs ainsi à Adrien, qui s'énerve de ne pas « arriver à planter son compas », une *connaissance organisationnelle* : « Moi quand j'le plante, je fais un petit trou, comme ça je sais où j'l'ai mis si je dérape. » (32 min 24 s).

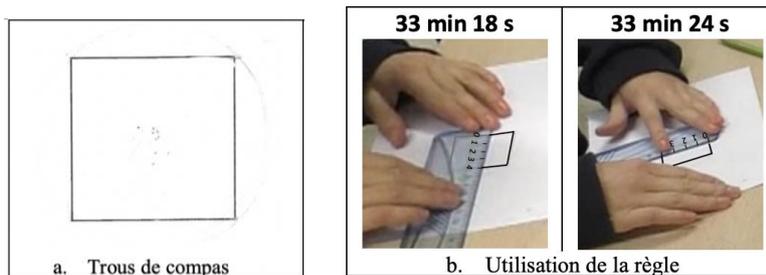
#### 4.4. Processus de tracé de Mary

Mary lit le texte pendant une minute. Elle prend son compas, place d'abord la mine sur le sommet « haut gauche » du carré, met la pointe approximativement au centre du carré, puis mesure l'écartement pointe-mine obtenu sur sa règle graduée. Elle recommence deux fois ce placement mine-pointe sur le carré puis sur sa règle. Elle pose son compas et marque au crayon un point au jugé dans la zone centrale du carré. L'écartement des branches du compas ainsi pris est mesuré, peut-être par automatisme, Mary associant la manipulation du compas au tracé d'un cercle de rayon une mesure donnée ?

Mary remet son compas dans la position précédente, prêt à tracer, mais s'interrompt pour relire le texte. Elle échange alors avec Lili sur la nécessité de retracer un carré (ce qu'a fait Luis) jusqu'à entendre l'enseignante redire que le carré tracé doit être utilisé. Mary gomme la marque mise à l'intérieur du carré. Trois minutes se sont écoulées depuis sa première lecture du texte, Lili et Tamis ont chacun tracé un cercle « à peu près circonscrit » au carré en décidant d'un centre au jugé en quelques essais.

Mary reprend son compas et réalise sept tracés d'arc de cercle qu'elle gomme au fur et à mesure : à chaque fois, elle place la mine sur le sommet « haut gauche » du carré et la pointe approximativement au centre du carré, elle maintient le compas fixe et trace en faisant tourner sa feuille. Elle interrompt le tracé et le gomme lorsque l'arc

ne passe pas sur le sommet « haut droite » du carré. Pour ces différentes tentatives, Mary conserve l'écartement du compas et fait varier, sans contrôle apparent, la position de la pointe. On peut voir sur sa production les marques laissées par la pointe du compas dans la zone centrale du carré (figure 9a). Au huitième essai, Mary utilise sa règle graduée : elle la place à peu près comme médiane horizontale du carré, puis comme médiane verticale du carré en alignant les graduations 0 et 4 sur les côtés du carré (figure 9b). Elle place cette fois-ci la pointe du compas au niveau de la graduation 2, enlève la règle et ajuste la mine du compas sur le sommet « haut gauche » du carré. Elle trace alors un cercle « à peu près circonscrit » au carré en maintenant le compas fixe et tournant sa feuille, puis elle pose son compas. Cinq minutes ont été nécessaires pour aboutir à ce tracé.



**Figure 9.** Recherche du centre du cercle circonscrit au carré par Mary

Ces premières observations nous dévoilent l'intention de Mary : tracer « un » cercle circonscrit au carré donné. Ce cercle passe bien par deux sommets du carré comme l'impose le texte, mais il n'a pas comme centre un sommet du carré comme il le devrait. Le dessin de Mary, analogue à celui des élèves de son îlot (Lili, Tamis, Luis), reflète la difficulté de compréhension du texte liée à la double désignation (Duval, 2014) : un sommet du carré doit aussi être le centre du cercle. Rappelons que seuls trois élèves sur dix-neuf (issus de l'îlot 1) tiennent compte de cette information sur le centre du cercle dans leur premier tracé. Dans ses premiers tracés d'arc de cercle, nous observons Mary commencer par placer la mine du compas sur un sommet du carré (haut gauche), puis maintenir la pointe sans chercher à la localiser précisément. De plus, quand la pointe bouge, elle ne cherche pas à la positionner là où elle était pour poursuivre le tracé. Elle semble ne pas envisager un centre pour le cercle, se focalisant seulement sur la ligne de courbure constante produite par le compas. Cela reflète un déficit initial de *connaissances technico-géométriques* sur le cercle (absence de mise en lien entre pointe du compas et point-centre du cercle) et de *connaissances géométriques* (cercle caractérisé par un de ses points et son centre ; cercle caractérisé par un rayon et son centre). Le dernier tracé (répondant enfin au dessin envisagé par Mary), par l'usage des graduations de la règle pour placer la pointe du compas au centre du carré, révèle l'émergence de ces connaissances, mais

Mary ne va pas les réinvestir dans la suite de sa recherche, comme nous allons le voir maintenant.

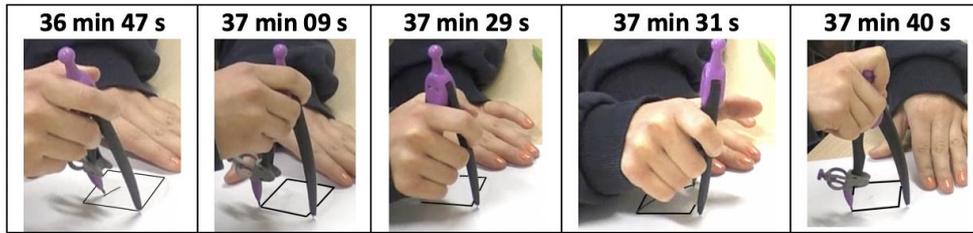
L'enseignante passe dans le groupe alors que Mary achève son tracé de cercle « circonscrit au carré », constate que les élèves sont tous les quatre d'accord sur le même dessin et leur suggère de relire le texte. Mary relit le texte, puis jette un coup d'œil sur le dessin produit par Claire dans l'îlot 1 derrière elle. Au bout de quelques secondes, elle place sa main droite sur son dessin comme sur la figure 10 : les quatre doigts pliés sont fixés au niveau du sommet « haut droite » du carré, le pouce se déplace du sommet « haut gauche » du carré au sommet « bas droite » parcourant l'arc que pourrait faire un compas. Mary semble ainsi envisager une position correcte pour la pointe/le centre (un sommet) et la possibilité pour le cercle de passer par deux sommets opposés du carré. Elle gomme alors son dessin de cercle circonscrit au carré. Dix minutes se sont écoulées depuis sa première lecture du texte.

**35 min 53 s**



**Figure 10.** Mime du tracé d'un arc de cercle avec la main par Mary

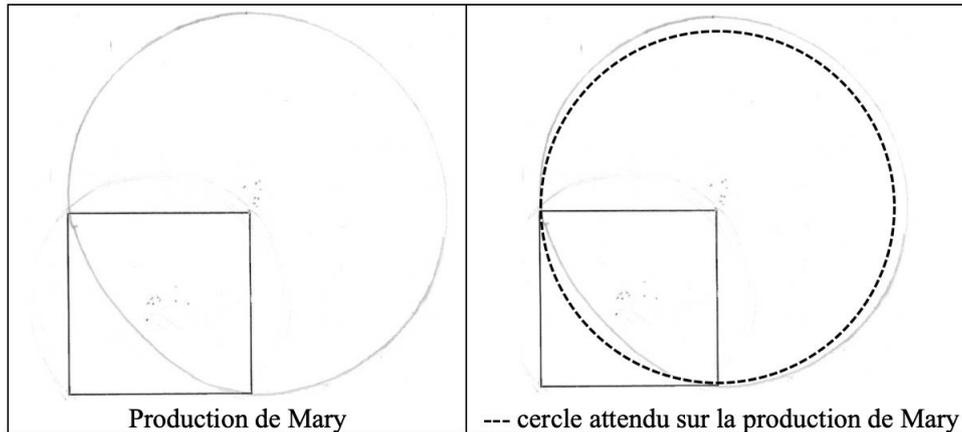
Mary démarre un nouveau tracé. Elle place la pointe du compas proche du sommet « haut droite » et la mine dans la zone centrale du carré, elle trace un premier arc (figure 11, 36 min 47 s) qu'elle interrompt voyant qu'il n'atteint pas le sommet « bas droite » du carré. Elle positionne alors la mine sur le sommet « bas droite », la pointe s'éloigne de trois millimètres du sommet près duquel elle se trouvait (figure 11, 37 min 9 s). Mary pivote le compas sans tracer pour atteindre le sommet « haut gauche », la mine arrive à côté, elle la met dessus en déplaçant un peu la pointe et pivote le compas vers le sommet « bas droite », mais la mine ne l'atteint pas. Mary repositionne la mine sans se préoccuper de la pointe du compas (figure 11, 37 min 29 s) : elle tient le compas par la branche de la mine et trace un arc en poussant cette branche (figure 11, 37 min 31 s). L'arc ne passe pas par le sommet « haut gauche ». Elle repositionne le compas comme précédemment (figure 11, 37 min 40 s), trace cette fois en tenant le compas par sa partie supérieure, puis efface tout.



**Figure 11.** Tracé d'un arc de cercle d'arc de cercle à l'intérieur du carré par Mary

Mary poursuit alors ses tentatives de tracé pendant deux minutes en procédant toujours de la même manière : elle cherche à faire passer un cercle par deux sommets opposés du carré, sans se préoccuper de la pointe du compas qu'elle installe à différentes positions proches d'un sommet du carré, mais jamais précisément sur un sommet du carré. On peut voir sur sa production les marques laissées par la pointe du compas dans une zone près du sommet « haut droite » du carré (figure 12).

Mary a mis quatre minutes pour produire ce dessin, constitué d'une ligne courbe continue, formée d'arcs de cercle de centres différents : aucun n'est précisément centré sur un sommet du carré (voir cercle en pointillé sur la figure 12).



**Figure 12.** Production finale de Mary

Pourquoi Mary n'installe-t-elle pas la pointe du compas sur un sommet du carré ? Nous faisons plusieurs hypothèses, qui peuvent être concomitantes.

L'une relève d'une difficulté de compréhension du texte : il se peut qu'en amont de l'utilisation du compas, Mary ne réussisse pas, à partir du texte, à déterminer une position possible pour le centre. Par contre, elle a compris que le cercle passe par un sommet du carré, elle prend ce point pour entreprendre son tracé et y place la mine du compas. Sa compréhension partielle du texte, renforcée par des difficultés de

manipulation (voir troisième hypothèse), la conduirait ainsi à ne guider qu'une des deux branches du compas (celle de la mine).

Une deuxième hypothèse est la mise en relation difficile entre parties de l'instrument et objets géométriques (*connaissances technico-géométriques*) : il faut placer la pointe du compas sur le centre du cercle que l'on souhaite tracer, en plus de placer la mine sur un de ses points ; ce centre est un point bien défini (objet 0D) et non un élément d'une zone (objet 2D) (*connaissances géométriques*). Mary aurait ainsi une interprétation spatiale de « centre » comme dans « au centre de la pièce ». Sur son dessin (figure 12), les traces de piquage de la pointe rendent compte de positions pour le centre du cercle visé qui sont situées dans une zone proche du sommet « haut droite » (zone centrale du cercle à tracer), sans choix privilégié de ce sommet. De même pour son premier type de dessin produit, Mary a utilisé une zone centrale du carré pour placer la pointe du compas (figure 9a) dans sa recherche de cercle au compas. Il se peut aussi qu'elle essaye de tracer à l'œil une ligne de courbure constante en utilisant le compas parce qu'elle sait que c'est l'instrument *ad hoc* pour le cercle.

Cette absence d'attention au positionnement de la pointe du compas – et donc à la détermination graphique du centre du cercle – est renforcée par des difficultés de manipulation (troisième hypothèse) qui montrent un manque de *connaissances manipulatoires* liées à l'usage du compas pour tracer un cercle : la pointe doit être nécessairement fixe pour produire un tracé circulaire et le compas se tient d'une certaine façon pour réussir le tracé, ce que ne respecte pas Mary. En témoignent aussi les photos sur la figure 11 : Mary tient le compas par les branches, le fait tourner en le penchant (36 min 47 s) ou en le poussant (37 min 31 s) ou encore fait tourner la feuille en gardant fixe le compas (37 min 40 s), mais avec des appuis mal dosés.

#### 4.5. Que tirer de ces trois études ?

Claire a une vision claire et juste de la figure géométrique décrite par le texte dès sa première lecture, elle sait en rendre compte oralement, accompagnant son discours de gestes de pointage sur le dessin et de mime avec le compas. Elle centre son attention sur les relations entre points (centre – sommet, sommets – points du cercle) dont la position est précisée dans le texte. Le compas ne l'aide pas à préciser la figure géométrique si besoin était, à cause de certaines difficultés manipulatoires. Elle passe son temps à essayer de bien manier le compas, gommant et refaisant plusieurs fois son dessin, dans l'espoir d'obtenir une belle ligne courbe « sans vague », « bien symétrique » et passant par des sommets opposés du carré. On pourrait même dire que l'usage du compas se pose en obstacle à l'utilisation de ses *connaissances géométriques*, qu'il l'enferme dans une recherche de précision dans le tracé.

Plus généralement cela interroge l'exigence à l'école de produire un dessin « précis » pour témoigner de sa compréhension d'un texte décrivant une figure géométrique.

Claire nous prouve qu'elle a tout compris (figure 4) tout en désespérant du dessin produit, sur lequel l'enseignante aurait peut-être eu à redire. C'est un phénomène que Petitfour (2015) a relevé chez les élèves dyspraxiques et au sujet duquel elle a déjà mis en garde. Ces élèves sont mis en échec lorsqu'ils doivent exécuter des actions instrumentées : leurs productions graphiques, imprécises, coûteuses en temps de réalisation et en énergie, pourraient conduire à se méprendre sur la qualité de leur raisonnement géométrique, alors qu'elles ne reflètent en rien le projet de tracé qu'ils ont élaboré. Il ne s'agit pas de supprimer l'usage des instruments à l'école, mais d'accepter, au cas par cas, une alternative à la construction d'un dessin précis, par exemple une verbalisation du processus de construction (telle Claire s'adressant à sa camarade dans la figure 4), notamment pour un élève qui manie difficilement les instruments. Une autre possibilité est la dyade instructeur-constructeur mise au point par Petitfour (2017b). À notre avis, cette précaution est valable, quelle que soit l'activité instrumentée. L'enseignant doit rester vigilant à ce type de difficulté manipulative : les élèves ne doivent pas se trouver empêchés d'avancer parce qu'ils ne réussissent pas à utiliser précisément (ou « selon l'usage prévu » par l'enseignant) un instrument quelconque, usuel en géométrie ou un peu atypique.

Contrairement à Claire, Jamie ne visualise pas la figure géométrique à dessiner dès le départ : elle va explorer plusieurs pistes d'interprétation du texte, témoignant ici d'une difficulté liée au traitement du texte dans le registre langagier. Elle a bien vite considéré un sommet comme centre du cercle à venir. Elle est certes encline à jeter un œil sur le dessin de ses voisines d'îlot, elle a sans doute besoin de se persuader que c'est la bonne figure : nous interprétons ainsi le renoncement à son premier dessin qui était proche du dessin correct de Claire, l'esquisse de son deuxième dessin inspiré de celui de Clodia, son exclamation lors des essais de tracé d'un cercle passant par deux sommets opposés du carré. Le compas lui permet, comme nous en faisons l'hypothèse, de rejeter finalement l'hypothèse qu'un des points du cercle est un sommet opposé à celui pris comme centre. Sa dextérité dans le maniement du compas lui permet de multiplier des tracés fictifs ou des tracés tangibles ; ce sont ces essais répétés qui la poussent à changer d'hypothèse pour le second sommet sur le cercle.

Quant à Mary, elle ne voit pas, ne décode pas, ne tient pas compte de l'information donnée sur le centre du cercle, dans un premier temps sans doute à cause de la double désignation. Mais le compas ne l'aide pas à mieux aborder le texte, à se poser la question de la localisation du centre du cercle à tracer. Elle manque de *connaissances technico-géométriques* telles que la primauté du placement du centre du cercle pour y placer la pointe du compas. Elle amorce une courbe en utilisant la mine. C'est l'élève dont l'utilisation du compas nous a le plus surprises, par son gros manque de *connaissances manipulatoires*. De plus, il se peut que Mary interprète spatialement les termes géométriques centre, sommet, les considérant comme des zones : on la

voit planter son compas sur différents points proches du sommet considéré. Cette vision de points (0D) comme unités figurales 2D, dénotant un manque de *connaissances géométriques*, est un phénomène que nous avons déjà pointé pour des élèves de Cours moyen avec le terme géométrique de milieu (Houdement & Petitfour, 2023).

## 5. Conclusion

La finalité de nos recherches est de relever, à partir des situations de classe ordinaires en fin d'école primaire, ce qui pourrait aider les élèves à développer des connaissances géométriques, ou ce qui pourrait empêcher ce développement. Cet article enrichit et poursuit l'étude de la conversion du même texte géométrique en un dessin à main levée (Houdement & Petitfour, 2022). Cette étude, impliquant le tracé d'un cercle « sur » un carré, et l'analyse sémiotique du processus de tracé au compas des trois élèves choisis, nous conduit à plusieurs résultats. Les uns sont relatifs au rôle de l'utilisation du compas dans une tâche de construction géométrique d'un cercle. Les autres apportent un éclairage nouveau sur des connaissances à développer en vue de conduire les élèves de cycle 3 à des apprentissages géométriques *via* la construction instrumentée.

### 5.1. Compas et tracé de cercle

Suite à notre étude (Houdement & Petitfour, 2022) sur la production d'un dessin à main levée correspondant au texte étudié dans cet article, nous avons fait l'hypothèse que le compas permettrait d'obtenir plus facilement un dessin correspondant à la figure géométrique décrite. Cette hypothèse se décline en deux volets. Le premier volet est géométrique, avec deux facettes : l'utilisation du compas contraindrait l'élève à s'intéresser au centre du cercle, et ainsi avancer vers une meilleure compréhension de la double désignation (le centre est un sommet) ; elle permettrait de trancher sur les incidences entre cercle et carré, deux sommets consécutifs ou opposés. Le second volet est cognitif en appui sur les travaux de Rabardel (1995) : l'utilisation du compas accroîtrait les « capacités assimilatrices » de l'élève et contribuerait « à l'ouverture de ses actions possibles ».

L'étude des processus de tracé des trois élèves nous donne des éléments de réponse. Dans cette séance, l'utilisation du compas ne semble rien apporter à Claire, elle a une vision claire de la figure qu'elle exprime oralement, du fait de ses *connaissances géométriques*. Le déficit en *connaissances technico-géométriques* et *manipulatoires* empêche Mary d'utiliser le compas comme une aide pour comprendre le texte et/ou invalider les dessins qu'elle produit. Par contre Jamie, assez habile dans le maniement du compas, réussit après plusieurs essais à produire une figure qu'elle valide comme figure attendue. Il se peut aussi que sa connaissance du compas (placer

d'abord la pointe pour tracer) lui ait permis de repérer dans le texte l'information sur le centre du cercle.

En conclusion nos deux hypothèses seraient plutôt validées sous la condition que l'élève sache utiliser correctement un compas pour tracer un cercle dont le centre et un de ses points sont fixés. On peut aussi remarquer avec Claire que des *connaissances géométriques* peuvent rendre superflues le tracé précis de la figure ; encore faut-il qu'elles soient verbalisées (figure 4).

Malgré les recommandations des programmes concernant cercle et compas, notre étude a pointé qu'il existe des élèves de Cours moyen qui ne savent pas utiliser leur compas et d'autres qui conçoivent un cercle sans « penser » un centre. À notre avis ces deux manques sont liés : l'usage du compas dans des tâches simples de tracé de cercle devrait permettre de lier les *connaissances manipulatoires* (poser la pointe, ne plus la bouger, tirer sur la branche de la mine jusqu'à poser la mine et faire tourner le compas) et les *connaissances technico-géométriques* (le trou de la pointe comme centre du cercle, la trace continue de la mine comme la courbe du cercle), et de les mettre en relation avec des *connaissances géométriques* (un cercle est caractérisé par son centre (OD) et un de ses points (1D), le cercle est une ligne courbe plane fermée dont tous les points sont à égale distance du centre). Mais une formulation<sup>11</sup> des actions des élèves par l'enseignant – voire une trace écrite mettant en relation des parties du compas (pointe sèche, pointe mine, « écartement » des branches<sup>12</sup> – et des objets géométriques (point centre, point du cercle, rayon) serait nécessaire pour que ces liens se construisent. Nous retrouvons la problématique de la médiation sémiotique développée par Mariotti et Maracci (2010) avec un compas pour les savoirs liés au cercle. Le compas « évoque » des savoirs, mais l'élève ne peut se les approprier sans un accompagnement de l'enseignant.

Il est donc primordial de considérer, dans le cadre de l'enseignement, la nécessité d'entraîner les élèves à manipuler efficacement un instrument spécifique, en l'occurrence le compas, en relation avec les connaissances géométriques inhérentes à cet outil, c'est-à-dire le cercle en tant qu'entité géométrique et l'égalité de longueurs en tant que propriété géométrique. L'utilisation d'un « langage technique géométrique » (Petitfour, 2017b) accompagnant l'action peut contribuer à ancrer ces apprentissages.

On pressent aussi l'intérêt pour cette mise en relation à construire une variété de tâches à partir du type de tâches mentionné dans les programmes « construire un cercle connaissant son centre et un point, ou son centre et son rayon » (MENJ, 2020a,

<sup>11</sup> Cela n'empêche pas des premières verbalisations par les élèves.

<sup>12</sup> Plus exactement distance (ou segment) entre le point trace de la pointe du compas et le point trace de la mine sur la feuille quand le compas est bien posé.

p. 64). Par exemple, le centre est un point isolé ou un point particulier d'une autre figure (carré, cercle, rectangle) ; idem pour un point du cercle ; le rayon est un segment particulier, lié ou pas à une autre figure. Ces éléments définitoires du cercle peuvent être donnés graphiquement (points nommés par une lettre) ou insérés dans un texte et qualifiés par leur relation à une unité figurale 1D ou 2D. La tâche que nous avons étudiée relève de la dernière variante. Il nous apparaît fondamental d'aborder la conversion d'un texte géométrique vers un dessin (qu'il soit instrumenté ou, ultérieurement, réalisé à main levée et codifié) dans le cadre de l'enseignement de la géométrie.

## 5.2. Vers une dialectique dessin à main levée – dessin instrumenté

Nos analyses des processus de tracé d'élèves dans la résolution de la tâche de conversion d'un texte géométrique en un dessin, avec le compas dans la présente étude et à main levée dans une étude antérieure (Houdement & Petitfour, 2022), mettent au jour certains éléments relatifs au rapport des élèves à la géométrie.

Le dessin demandé, à main levée ou instrumenté, pourrait induire des regards différents sur la figure à représenter. L'absence d'instruments peut en effet engager dans une vision 2D où il s'agit de placer un cercle par rapport à un carré, d'abord globalement : il faut alors s'intéresser aux contours (1D) de ces deux objets pour respecter les contraintes données sur des points (0D). La position du centre du cercle peut rester approximative, voire ne pas du tout être interrogée, ce qui peut passer inaperçu dans la pratique du dessin à main levée. Par ailleurs, le fait que le centre du cercle ne soit pas un point dudit cercle (au sens cercle-1D tel que défini actuellement dans les programmes, cf. section 2.3.2) peut contribuer à cette omission du centre.

Nous pensons que la présence du compas engagerait tous les élèves dans la recherche du centre (0D) du cercle, mais la complexité du texte et/ou l'ignorance de la primauté du placement de la pointe du compas ont pu amener certains élèves à omettre le centre. Par contre, ils semblent tous être entrés dans leurs tracés par la ligne contour (1D) du cercle pour chercher les points d'incidence entre cercle et carré, comme ils le feraient pour un dessin à main levée : la leçon sur le cercle ne semble pas avoir enrichi leurs conceptions sur le cercle, la conception du cercle comme ligne de courbure constante reste première. Ce constat renforce l'intérêt de proposer aux élèves des tâches variées comme mentionné en fin de section 5.1.

Que le dessin soit à main levée ou non, nous avons observé à chaque fois une élève ayant très rapidement trouvé l'agencement entre le cercle et le carré, passer beaucoup de temps à gommer et refaire plusieurs fois son tracé, à la recherche d'une précision. Des élèves performants peuvent ainsi se focaliser sur un aspect de la tâche qui n'apporte rien au développement de leurs *connaissances géométriques*. Notre étude montre en particulier qu'il existe des élèves de Cours moyen qui peuvent faire de la géométrie sans savoir bien utiliser les instruments, ce qui ne veut pas dire ne pas

comprendre à quoi ils servent, ni comment s'en servir. Ce résultat renforce et permet d'étendre à tout élève le point de vue développé par Petitfour (2015) pour les élèves dyspraxiques sur la vigilance à avoir quant à l'excès d'exigence d'une précision dans les tracés.

Nos recherches laissent entrevoir, pour des tâches de conversion texte vers figure, la pertinence d'une dialectique entre dessins à main levée et dessin instrumenté, sous la condition de bonnes *connaissances technico-géométriques* et *manipulatoires* du compas. Faire un dessin à main levée pourrait aider à se construire l'image d'une figure à réaliser en dessin instrumenté, à questionner des propriétés géométriques que l'instrument aurait prises en charge (peut-être à l'insu de son utilisateur). La construction instrumentée (avec des instruments géométriques classiques), travail mené en Géométrie 1, pourrait permettre d'invalidiser les dessins à main levée de *figures impossibles* en amont de la production d'un raisonnement déductif langagier interne à la Géométrie 2.

Les connaissances *manipulatoires* et *technico-géométriques* ne sont pas anodines pour que fonctionne cette dialectique. Nous avons pointé que leur absence fait obstacle à un travail en Géométrie 1 : sans les premières, la réalisation d'un dessin correct est compromise, sans les secondes, la validation/invalidation d'éventuelles hypothèses de tracé est empêchée (ou rendue difficile). Or, selon nous, ce travail en Géométrie 1 constitue un support pour la formulation de connaissances géométriques : c'est du moins l'hypothèse que partagent les chercheurs qui proposent des situations de restauration de figures.

Le compas est un instrument complexe : un entraînement à son usage coordonné à des connaissances géométriques sur le cercle ne doit pas être sous-estimé dans l'enseignement. L'intégration de *connaissances technico-géométriques* et *manipulatoires* par les élèves est donc un véritable enjeu d'enseignement, en particulier pour compas et cercle. Il est opportun de poursuivre des recherches dans ce sens.

### **Bibliographie**

ARTIGUE, M., & ROBINET, J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 3 (1), 5-64.

ARZARELLO, F. (2006). Semiosis as multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Número especial Sémiotique, culture et pensée mathématique*, 267-299.

BARRIER, T., HACHE, C., & MATHE, A.-C. (2014). Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figures et activité des élèves. *Grand N*, 93, 13-37.

BERTHELOT, R., & SALIN, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* [Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1].

BLANQUART, S. (2023). Activité mathématique des élèves et construction des apprentissages en géométrie plane. *Revue québécoise de didactique des mathématiques, Numéro thématique vol 2*, 5-37.

BLANQUART-HENRY, S. (2020). Raisonnements géométriques d'élèves de cycle 3, duos de situations, rôle de l'enseignant [Thèse de doctorat, Université de Paris].

BOURLET, C. (1911). Article « Mathématiques ». Dans F. Buisson (Dir.). *Nouveau Dictionnaire de Pédagogie et d'Instruction Primaire*. Librairie Hachette et Cie.

BROUSSEAU, G. (1983). Étude de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, IMAG LSD, 45*, 183-227.

BULF, C., & CELI, V. (2015). Une étude diachronique de problèmes de reproduction de figures géométriques au cycle 3. *Grand N, 96*, 5-33.

BULF, C., & CELI, V. (2020). Reproduire un cercle et en parler en classe de mathématique : est-ce si simple ? Quelques éléments d'analyse d'une étude didactique comparant trois mises en œuvre d'une même situation. *Recherches en éducation, 40*, 125-147.

BULF, C., CELI, V., MILLON-FAURE, K., BEAUGRAND, C., & MENDOÇA-DIAS, C. (2021). Tracé du cercle et circulation des discours (première partie). Approche didactique des (inter) actions langagières et matérielles. *Petit x, 114*, 3-37.

CHASSAPIS, D. (1998). The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: the compass and the circle as an example. *Educational Studies in Mathematics, 37*, 275–293. <https://doi.org/10.1023/A:1003696507155>

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*, 221-226.

DENZIN, N. K. (1978). *The research act: a theoretical introduction to sociological methods*. McGraw-Hill.

DUCEL, Y., & PELTIER, M.-L. (1986). *Géométrie. Une approche par le dessin géométrique au CM2*. IREM de Rouen.

DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 10*, 5–53.

DUVAL, R. (2014). Ruptures et oublis entre manipuler, voir, dire et écrire. Histoire d'une séquence d'activités. Dans C. F. Brandt & M. T. Moretti (Dir.) *As Contribuições da Teoria das Representações Semióticas Para o Ensino e Pesquisa na Educação Matemática* (pp. 227-251). Editions Unijui.

DUVAL, R., & GODIN, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7-27.

FREGONA, D. (1995). Les figures planes comme « milieu » dans l'enseignement de la géométrie ; interactions, contrats y transpositions didactiques. [Thèse de doctorat, Université Bordeaux 1].

GRENIER, D., & LABORDE, C. (1988). Transformations géométriques : le cas de la symétrie orthogonale. Dans G. Brousseau, M. Hulin & G. Vergnaud (Eds), *Didactique et Acquisition des Connaissances Scientifiques. Actes du Colloque de Sèvres* (pp. 65-86). La Pensée Sauvage éditions.

GUILLE-BIEL WINDER, C., & MANGIANTE-ORSOLA, C. (2023). Contribution à l'étude de l'exercice de la vigilance didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 43(2), 199-240.

HOUEMENT, C. (2007). À la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères-IREM*, 67, 69-84.

HOUEMENT, C., & KUZNIAK, A. (1998-1999). Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres. *Petit x*, 51, 5-21.

HOUEMENT, C., & KUZNIAK, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193.

HOUEMENT, C., & PETITFOUR, E. (2018). L'analyse sémiotique de l'activité mathématique, une nécessité didactique dans le contexte de l'adaptation scolaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 23, 9-40.

HOUEMENT, C., & PETITFOUR, E. (2019). Jeu de pouvoir dans l'enseignement spécialisé. In M. Abboud (Ed.), *Actes du colloque EMF 2018* (pp. 1205-1213). IREM de Paris

HOUEMENT, C., & PETITFOUR, E. (2020). La manipulation dans l'enseignement spécialisé : aide ou obstacle ? Une étude de cas autour de la numération décimale. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 40 (2), 181-223.

HOUEMENT, C., & PETITFOUR, E. (2022). Le dessin à main levée, un révélateur du rapport des élèves à la figure géométrique. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22, 315-340. <https://doi.org/10.1007/s42330-022-00211-8>

HOUEMENT, C., & PETITFOUR, E. (2023). Que révèle la production de dessins à main levée par les élèves sur leur rapport à la géométrie ? Dans F. Vandebrouck & M.-L. Gardes (coord.) *Nouvelles perspectives en didactique : preuve, modélisation et technologies numériques* (Vol Séminaires et Posters, pp. 155-164). ARDM.

KESKESSA, B., PERRIN-GLORIAN, M.-J., & DELPLACE, J. R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie, *Grand N*, 79, 33-60.

LABORDE, C., & CAPPONI, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (1.2), 165-210.

MANGIANTE-ORSOLA, C., & PERRIN-GLORIAN, M. J. (2017). Ingénierie didactique de développement en géométrie au cycle 3 dans le cadre du LéA Valenciennes-Denain. Dans T. Barrier & C. Chambris. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2016*. IREM de Paris – Université Paris Diderot.

MARIOTTI, M.A., & MARACCI, M. (2010). Un artefact comme instrument de médiation sémiotique : une ressource pour le professeur. Dans G. Guedet & L. Trouche (Eds.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 91-107). Presses Universitaires de Rennes.

MATHÉ, A.-C., BARRIER, T., & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2020). *Enseigner la géométrie élémentaire. Enjeux, ruptures et continuités*. Academia L'Harmattan.

MATHE, A.-C., MAILLOT, V., & RIBENNES, J. (2021). Enjeux langagiers, situations de formulation et de validation en géométrie. Un exemple de travail autour du cercle en CE2. *Grand N*, 108, 27-57.

MAZEAU, M., POUHET, A., & PLOIX-MAES, E. (2021). *Neuropsychologie et troubles des apprentissages chez l'enfant* (3è édition). Elsevier Masson Paris.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2019). Attendus de fin d'année et repères annuels de progression pour le cycle 2 et le cycle 3. BOEN n° 22 du 29-05-2019. Note de service n° 2019-072 du 28-5-2019.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2020a). Programme du cycle 2. BOEN n° 31 du 20-7-2020.

MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2020b). Programme du cycle 3. BOEN n° 31 du 20-07-2020.

PEIRCE, C.S. (1978). *Écrits sur le signe* (1931 à 1953, rassemblés, traduits et commentés par G. Deledalle). Éditions du Seuil.

PERRIN, D. (2005). Axiomatique d'Euclide, convexité, géométries non euclidiennes. <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/Projet-geometrie/Cours1.pdf>

PERRIN-GLORIAN, M.-J., & GODIN, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école*, 222, 26-36.

PETITFOUR, E. (2015). Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6<sup>e</sup> [Thèse de doctorat, Université Paris 7 – Denis Diderot].

PETITFOUR, E. (2017a). Outils théoriques d'analyse de l'action instrumentée, au service de l'étude de difficultés d'élèves dyspraxiques en géométrie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 37(2-3), 247-288.

PETITFOUR, E. (2017b). Enseignement de la géométrie en fin de cycle 3. Proposition d'un dispositif de travail en dyade. *Petit x*, 103, 5-31.

PETITFOUR, E., & HOUEMENT, C. (2022). Des effets didactiques de microphénomènes sémiotiques en mathématiques. Dans C. Houdement, C. de Hosson & C. Hache (Dir.), *Approches sémiotiques en didactique des sciences* (pp. 209-244). ISTE Éditions.

RABARDEL, P. (1995) Qu'est-ce qu'un instrument ? *CNDP-DIE, Outils pour le calcul et le traçage de courbes Mars 1995*, 61-65.

#### CATHERINE HOUEMENT

Univ Rouen Normandie, Université Paris Cité, Univ Paris Est Créteil, CY Cergy  
Paris Université, Univ. Lille, LDAR, F-76000 Rouen, France

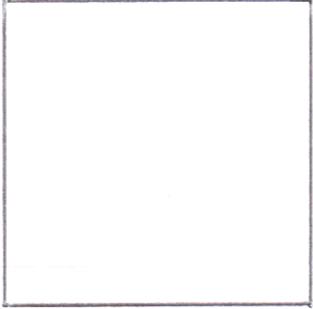
`catherine.houdement@univ-rouen.fr`

#### EDITH PETITFOUR

Univ Rouen Normandie, Université Paris Cité, Univ Paris Est Créteil, CY Cergy  
Paris Université, Univ. Lille, LDAR, F-76000 Rouen, France

`edith.petitfour@univ-rouen.fr`

**Annexe 1.** Supports fournis aux élèves

Dessin de carré (4 cm côté) sur feuille unie et texte sur petite feuille	
	<p><b>Tracer un carré. Tracer un cercle qui a pour centre un sommet du carré et qui passe par deux autres sommets.</b></p>

**ILIADA ELIA, ANNA BACCAGLINI-FRANK, ESTHER LEVENSON, NANAE MATSUO, NOSISI FEZA, GIULIA LISARELLI**

## **EARLY CHILDHOOD MATHEMATICS EDUCATION RESEARCH: OVERVIEW OF LATEST DEVELOPMENTS AND LOOKING AHEAD**

**Abstract.** In the present study, we provide an overview of the research in the field of early childhood mathematics education and identify the latest advances, new perspectives and gaps in the literature between 2012 and 2022. On the basis of our review of the international research literature published during this time span, in this paper we focus on five major themes of contribution: young children's number sense abilities and development, geometry education in early childhood, children's competencies in other content domains, teaching and learning mathematics in early grades with technology-integrated activities and early childhood teachers' knowledge, education and affective issues in mathematics. For each theme relevant research is discussed and directions for future research are provided.

**Key words.** Literature review, surveys, early years, number sense, geometry, technology, early childhood teachers, young children

**Résumé. Recherche sur l'enseignement des mathématiques à la petite enfance : aperçu des derniers développements et perspectives.** Dans cette étude, nous proposons une vue d'ensemble de la recherche dans l'enseignement des mathématiques de la petite enfance et nous identifions les dernières avancées, les nouvelles perspectives et les lacunes dans la littérature de 2012 à 2022. À partir de notre revue de la littérature internationale publiée pendant cette période, nous nous penchons sur cinq grands thèmes de contribution : les capacités et le développement du sens du nombre chez les jeunes enfants, l'enseignement de la géométrie dans la petite enfance, les compétences des enfants sur d'autres contenus mathématiques, l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans les premières années grâce à des activités intégrant la technologie, ainsi que les connaissances des enseignants de la petite enfance et les enjeux éducatifs et affectifs en mathématiques. Pour chaque thème, nous discutons des recherches pertinentes et proposons des orientations pour la recherche future.

**Mots-clés.** Revue de la littérature, enquêtes, premières années, sens du nombre, géométrie, technologie, enseignants de la petite enfance, jeunes enfants

---

### **1. Introduction**

Young children's early mathematical knowledge and skills affect their later learning and success in mathematics (Duncan et al., 2007; Watts et al., 2014). This well-documented finding, as well as the strong emphasis given on early childhood education in many countries (Kagan & Roth, 2017; Taguma et al., 2012; UNESCO,

2015), have stimulated an internationally growing interest in early childhood mathematics education (ECME) research in the past few years and have highlighted the need for high-quality mathematics education in early childhood (Elia et al., 2021).

ECME is a broad and rich field of research and practice in the discipline of mathematics education which focuses on offering young children opportunities and experiences to learn mathematics and develop mathematical abilities and concepts through the provision of motivating activities and learning environments (Van den Heuvel-Panhuizen & Elia, 2014), which are organized by caretakers, teachers and other professionals (Björklund et al., 2020). The focus of recent research on early childhood mathematics education is on children from birth until their entrance to formal education in the first grade (Björklund et al., 2020). Taking a comprehensive perspective, in the present study<sup>1</sup> we aim to provide an overview of the research in the field of early childhood mathematics education and potentially identify the latest developments, new perspectives and gaps in the literature between 2012 and 2022 and also discuss opportunities for future research. For the purpose of this study, we focus on research which involves children from birth to the first schooling year, that is, 7 years of age. Children up to this age have not yet started formal education or are at the beginning of formal schooling in many countries. This age range of children is in accordance with the focus of the great majority of studies discussed in the ICME Topic Study Group and publications on ECME in the past few years, which involve mainly research on children's mathematical development in the years until formal education (Elia et al., 2018; Elia et al., 2021; Van den Heuvel-Panhuizen & Kullberg, 2021).

In the past few years, there has been a small number of review papers related to ECME research, focusing on specific aspects of the field, including for example early years teachers (Linder & Simpson, 2018), children up to four years of age (MacDonald & Murphy, 2021) and the Australasian context (MacDonald et al., 2016). To the best of our knowledge, there has not yet been an overall survey of the international literature on ECME. This study is an outline of the state-of-the-art of the major advances in the field and could serve as the basis for initiating further systematic reviews in more specific noteworthy topics in the learning and teaching of early years mathematics and also for discussing future directions for research. It should be noted that the present study focuses primarily on research undertaken in the context of the English-speaking scientific community, which covers a large part

---

<sup>1</sup> This paper is based on a survey addressing the latest developments in ECME that was initiated in the context of the 14th International Congress on Mathematics Education (ICME-14) and a part of the findings of the survey were presented at the conference on July 18, 2021.

of the work in the field and has a high level of accessibility. Nevertheless, we acknowledge that there is important and relevant research work beyond this geographical and cultural context, including, for example, literature in the French language. This limitation of the study could be addressed in future reviews of studies carried out by non-English-speaking researchers which may complement, broaden and enrich the findings of the present study.

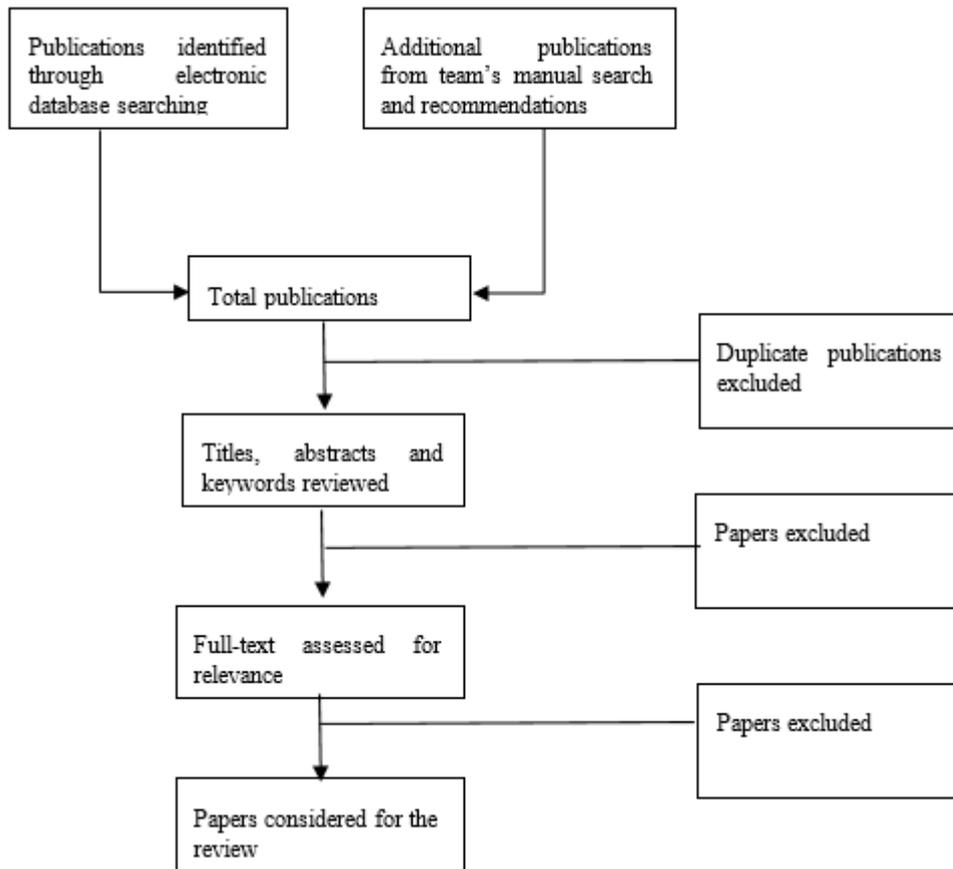
## **2. Method**

Our overview was completed in four steps: identification of relevant themes in ECME research, search of literature per theme, selection of publications per themes and analysis of the selected publications per theme (see Figure 1).

A first step of this study was to identify, as a team, the possible themes of contributions to the field of ECME recent research based on our shared expertise. As a result, six major themes were articulated, as follows: three content-oriented themes, namely, young children's number sense abilities and development, geometry education in early childhood, children's competencies in other content domains; a theme on teaching and learning mathematics in early grades with technology-integrated activities; a theme on early childhood teachers' knowledge, education and affective issues in mathematics; and a cognition-oriented theme on cognitive skills associated with mathematics learning and special education. In the present paper, we will focus on the former five themes.

The next step was to search for relevant research literature on each theme published from 2012 through 2022. As noted previously, we searched only for publications written in English. For each theme, we conducted a database search of Scopus, Web of Science, Google Scholar, ERIC with a focus on journal papers in three fields of study: Mathematics Education, Early Childhood Education and Psychology/Cognitive Science, using relevant keywords. Across all the themes, the keyword "mathematics" was used, which was combined with one of the following terms "early childhood", "preschool", "kindergarten", "young children", "early years". For each theme, these keywords were combined with theme-specific terms, e.g., "technology" or "digital tools" etc. for the technology theme. Additionally, we searched for and recommended relevant chapters in prominent research books and monographs in Mathematics Education and child development, including the PME Handbook, POEM and the ICME-13 monographs.

As a third step, for each theme we eliminated double records, and after reviewing the title, abstract and keywords of the remaining papers we eliminated further papers based on specific exclusion criteria, that is, studies which did not focus on mathematics and studies with children above seven years of age. The review per theme included empirical research studies, reviews and theoretical papers.



**Figure 1.** Search process of publications per theme

We then read every study, eliminated further papers based on the same criteria as noted earlier, and analysed the remaining studies which were identified as relevant for each theme to produce annotated bibliography with summaries, focusing on the purpose and the key findings of each study. Next, we used an inductive coding approach (Thomas, 2006) to analyse the summaries in order to identify categories for the review of each theme. Following this, an in-depth reading of each paper per theme was undertaken in order to identify major findings for each category. This led to a qualitative synthesis of the pertinent findings of the research for each theme category. The categories that emerged for each theme and the synthesis of the key findings of the relevant literature are included in the results and discussion section. Because of the number of themes in the ECME research addressed in this study ( $n=5$ ), the wide scope of each theme and the vast amount of relevant research within each theme, it is not feasible to include all the studies that were found and analysed

in this paper. For every theme, the paper includes a selected sample of the studies that have been reviewed, which, to our knowledge, point to new developments and perspectives compared to existing research.

### **3. Results and discussion**

The results reported here are based on a selection of the studies that were analyzed for each theme category, as mentioned above. Tables 1-3 detail the emerging categories, the quantity and the sample of publications that are included in the present paper for each category within the content-oriented themes (see Table 1), the technology theme (see Table 2) and the teachers' theme (see Table 3), respectively. The total quantity of papers that were included in the annotated bibliography and thus in the analysis per theme are also provided.

**Table 1.** Categories per content-oriented theme from reviewed papers and selected publications

Category	Number of selected publications included in the paper	Sample of publications
Theme: Young children's number sense abilities and development (n=128) <sup>a</sup>		
Young children's numeracy abilities	10	Benz (2014); Dehaene-Lambertz & Spelke (2015); de Hevia et al. (2014); Hannagan et al. (2017); Reikerås et al. (2012); Robertson et al. (2012); Schöner & Benz (2018); Sella et al. (2016); Sella et al. (2017); ; Spaul et al. (2022)
Enhancing diverse numeracy abilities of young children	24	Asakawa et al. (2019); Bay-Williams & Kling (2014); Bicknell et al. (2016); Casey et al. (2018); Clements et al. (2020); Cui et al. (2017); Fuchs et al. (2013); Gaidoschik (2012); Harvey & Miller (2017); Hermawan (2021); Holmes & Dowker (2013); Ivrendi (2016); Jordan et al. (2012); Lüken & Kampmann (2018); Magnusson & Pramling (2018); Polotskaia & Savard (2018); Ramani & Siegler (2011) ; Sayers et al. (2016); Segers et al. (2015); Spaul et al. (2022); van Marle et al. (2014) ; White & Szucs (2012); Widodo & Yusuf (2022); Xu et al. (2013)
Contribution of Spontaneous Focussing on Numerosity (SFON) to Numerical Abilities	3	Batchelor et al. (2015); Rathé et al. (2018); Torbeyns et al. (2018)
Insight on the role of Approximate Number System in numerical knowledge	11	Bonny & Lourenco (2013); Chu et al. (2015); Peng et al. (2017); Sasanguie et al. (2014); Sullivan & Barner (2014); Van Herwegen et al. (2017); van Marle et al. (2018); Wong et al. (2016)
n <sup>b</sup>	44	

Theme: Geometry education (n=70)		
Spatial reasoning and early geometry	5	Dindyal (2015); Hallowell et al. (2015); Kaur (2015); Soury-Lavergne & Maschietto (2015); Woolcott et al. (2022)
Shape knowledge and understandings	6	Dağlı & Halat (2016); Halat & Dağlı (2016); Hallowell et al. (2015); Kalénine et al. (2013); Resnick et al. (2016); Swoboda & Vighi (2016)
Dynamic, embodied and semiotic approaches in geometrical thinking and learning	13	Breive (2022); Bussi & Baccaglioni-Frank (2015); Calero et al. (2019); Dindyal (2015); Elia et al. (2014); Gejard & Melander (2018); Kaur (2015); Kaur (2020); Moss et al. (2015); Ng & Sinclair (2015); Thom (2018); Thom & McGarvey (2015)
Enhancing and assessing geometry learning	13	Bäckman (2016); Casey et al. (2014); Cheng & Mix (2014); Fisher et al. (2013); Hawes et al. (2015); McGuire et al. (2021); Nakawa (2020); Nurnberger-Haag (2017); Thom (2018); Thom & McGarvey (2015); Van den Heuvel Panhuizen et al. (2015); Verdine et al. (2014); Verdine et al. (2017)
Individual differences associated with learning in geometry	5	Jirout & Newcombe (2015); Milburna et al. (2019); Mushin et al. (2013); Rittle-Johnson et al. (2017); Verdine et al. (2014)
n <sup>b</sup>	39	
Theme: Other content domains (n=56)		
Patterns	14	Bäckman (2016); Björklund & Pramling (2014); Collins & Laski (2015); Hunter & Miller (2022); Kidd et al. (2014); Lüken & Kampmann (2018); Miller (2019); Mulligan & Mitchelmore (2013); Mulligan et al. (2020); Rittle-Johnson et al. (2015); Swoboda & Vighi (2016); Tsamir et al. (2017); Venkat et al. (2018); Wijns et al. (2019)
Measurement	4	Clements et al. (2018); Kotsopoulos et al. (2013); Sarama et al. (2021); Szilágyi et al. (2013)
Spatial reasoning	11	Casey et al. (2014); Cheng & Mix (2014); Gold et al. (2021); Kotsopoulos et al. (2021); Laski et al. (2013); Möhring et al. (2015); Resnick (2020); Van den Heuvel-Panhuizen et al. (2015); Verdine et al. (2017); Woolcott et al. (2022); Zhang & Lin (2017)

Thinking, reasoning and data modeling	7	Bakker et al. (2014); Blanton et al. (2015); English & Crevensten (2013); Kieran et al. (2016); Lenz (2022); Obersteiner et al. (2015); Supply et al. (2021)
n <sup>b</sup>	35	

<sup>a</sup> Total number of papers analyzed

<sup>b</sup> Number of papers included in the paper (due to dual coding this number may be smaller than the sum of papers from all categories per theme)

### 3.1. Young children's number sense abilities and development

Number sense development is globally recognized as the fundamental foundational knowledge for children's mathematical growth. To this end, literature argues for children's stimulation of numerosity at an early toddler stage for the children's future benefit. The complexities brought forward by diverse backgrounds of children as well as diverse provisions of stimulation enrich strategies and seek more conceptualisation. Children's diverse numerical abilities reflect children's varied experiences from home and their immediate environment (Ramani & Siegler, 2011). These abilities are foundational blocks for children's development of numerical fluency, and anecdotal evidence show a correlation between low performance as causative to limited experiences prior kindergarten and inability to catch up with peers (Aunio et al., 2015).

#### 3.1.1 Young children's numeracy abilities

The importance of innate abilities and non-symbolic abilities are highlighted as important concepts to be included in defining number sense of young children (Dehaene-Lambertz & Spelke, 2015). Literature indicates that these innate abilities of young children are observable from their infancy (Dehaene-Lambertz & Spelke, 2015; Hannagan et al., 2017). Newborns of 7 to 94 hours demonstrated that they could connect increases in number of objects with increases in length and in time (de Hevia et al., 2014). Robertson et al. (2012) discovered that 24 months babies were able to match objects with the defining number. Norwegian toddlers demonstrated competencies using number words, however, reciting was found to be at lower competencies than suggested previous literature (Reikerås et al., 2012).

Sella et al. (2016, 2017) explored numerosity and spatial mapping to three groups, preschool children, 4-year-olds, 1<sup>st</sup> Grade and 3<sup>rd</sup> Grade, to discover that spatial mapping favoured high numerical abilities in all groups studied. A comparison of numerical abilities between Finnish and Iranian children from 5 to 6 years old revealed that relational and counting tasks scores favour Finnish children compared to Iran. Schöner and Benz (2018) determined that children build structures in the collection of objects but cannot explain their approaches and resort to counting as a

strategy, whereas Benz (2014) revealed that 4- to 6-year-olds were able to explain structures in quantities and why they used to compose or decompose. On the other hand, low socio-economic variable seems to bring a different tone to numerical abilities of young children. A South African study of numerical abilities of first grade students from no fee schools of Limpopo and Eastern Cape Province indicated that the majority operated at a low level of counting while only 30% understood that numbers can be decomposed into smaller units (Spaull et al., 2022).

### ***3.1.2 Enhancing diverse numeracy abilities of young children***

The context and background of students contribute significantly to their numerical abilities as reported by Spaull et al. (2022). Hence, it is crucial to explore strategies to enhance and develop students' numerical abilities in these different contexts. Diverse strategies that are revealed to enhance numerical abilities with positive gains on numeracy development of children are linear board games (Ramani & Siegler, 2011), numerical acuity (van Marle et al., 2014) and inhibitory control (Harvey & Miller, 2017), conceptual subitising (Sayers et al., 2016), fine motor skills (Asakawa et al., 2019), number knowledge tutoring (Fuchs et al., 2013), story problems (Jordan et al., 2012), catch up numeracy (Holmes & Dowker, 2013), differentiated approach in using games (Bay-Williams & Kling, 2014), and music-based learning (Hermawan, 2021). A recent research study by Clements et al. (2020) showed that the learning trajectory approach contributed to kindergartners' learning of addition and subtraction to a greater extent compared to a teach-to-target approach. Moreover, significant benefits are observed in play-based approach for numeracy development at home, allowing children to learn through play and give opportunity to adults to pose challenging questions and listen to children illustrating their action and adding meaning to them (Magnusson & Pramling, 2018; Widodo & Yusuf, 2022).

Some concept development also plays a significant role in the development of numerosity. Mediation of patterns and structure was found to influence children's numerical fluency positively especially those who were low performers (Lüken & Kampmann, 2018). Problem solving boosted four basic operations with an effect size of 0.60 (Bicknell et al., 2016). Polotskaia and Savard (2018) used Relational Paradigm in facilitating problem solving and this led to improved problem-solving skills and enabling students to solve problems demanding rational thinking. A longitudinal study favoured students who began to use derived fact strategies during the mid-year than those using counting strategies (Gaidoschik, 2012). White and Szucs (2012) promoted modelling methods to increase understanding and developing mental representation through estimation tactics. Then Xu et al. (2013) brought forth age as a variable that allows complex estimation skills. Their findings affirmed the accuracy and linearity of number estimates. Rapid automatized naming (RAN) has been proven to predict reading skills and later literature indicates that it

also predicts mathematical skills. Cui et al. (2017) investigated the link between RAN and arithmetic fluency of selected Chinese children. The association proven was between addition and subtraction fluency and RAN supporting that RAN predicted mathematics.

Mothers of 36 months' babies were claimed to have an influence on attainment of higher mathematics knowledge in the early years of schooling through stimulus to label magnitudes of different groups of objects (Casey et al., 2018). A study supported the latter study as the home numeracy environment (including home activities, such as counting objects) was found to predict kindergartners' early numeracy competence (Segers et al., 2015). Young children's self-regulation and number sense attested to be strong predictors of mathematics performance at grades 5 and 6 (Ívrendi, 2016).

### ***3.1.3 Contribution of Spontaneous Focussing on Numerosity (SFON) to Numerical Abilities***

Spontaneous focussing on numerosity (SFON) by children comes naturally and carries possibilities for numeracy development in children. Rathé et al. (2018) and Batchelor et al. (2015) explored the association between 4- to 5-year-old children SFON and their number-related verbal words during their natural activities. The analysis showed varied differences within and between children and these indicated that SFON had no association with the frequency of number-related utterances, whereas Batchelor discovered that the symbolic numerical ability was associated with SFON. The latter findings were regular to previous work while Rathé et al. (2018) was contradictory. Hence, they used two experimental tasks to assess the association between SFON of 4- to 6-year-olds and their number utterances. The findings supported the relation between children's verbal SFON and number. A similar study was conducted in Ecuador by Torbeyns et al. (2018) and the numerical abilities of children were directly associated with their SFON, providing evidence for the universal character of the link between SFON and early quantitative competence.

### ***3.1.4 Insight on the role of Approximate Number System in numerical knowledge***

Approximate number system (ANS) is an internalised process that logically allows one to be able to make sophisticated judgments in numbers, measurement etc. This system is associated with early arithmetic through numerical knowledge (Peng et al., 2017; van Marle et al., 2018). Sasanguie et al. (2014) affirmed previous findings that there is no relation between accuracy of children and non-symbolic number. Efficiency in number mapping is associated with higher ANS insight, which then enhances understanding of number symbols and arithmetic skills (Wong et al.,

2016). Sullivan and Barner (2014) argued that there is no relation between counting and estimation ability in young children. Van Marle et al. (2018) assessed if measures of the ANS, object tracking system (OTS) or both are associated with the development of cardinal knowledge and discovered that children construct their understanding and rely on the ANS which goes with verbal counting structure. Accurate number illustrations of preschool children showed more advanced numerical ability (Bonny & Lourenco, 2013). According to Chu et al. (2015), ANS is introductory to mathematical development though cardinality is a strong predictor of mathematical achievement at the end of the first year of schooling. Van Herwegen et al. (2017) examined how to enhance young children's ANS abilities. Children who attended an intervention named PLUS were found to improve in ANS after training.

### ***3.1.5 Concluding remarks***

This review extends our understanding of numerosity/number sense of young children's innate abilities to strategies that assist in developing these abilities for successful numerosity experiences. This review also brings forth diverse interventions that are contextual and contribute in diversifying stimulation environments. There is a need for literature that demonstrates the link between the intuitive innate abilities and development of conceptual numerical abilities. This could contribute to improving early mathematics education in order to support and enhance young children's learning and development based on their possibilities even from infancy. Although a lot of correlation studies have been conducted to test some of the young students' abilities and formal mathematics, there are gaps in literature on how to develop such abilities when found limited. For example, Spontaneous Focussing on Numerosity (SFON) of 4- to 6-year-old correlation studies indicate its association with number-related verbal words, symbolic numerical ability across all studies. However, literature does not indicate how to develop this ability prior to 4 years of age. Literature needs to make a distinction, if any, or indicate if subitizing is within SFON or vice versa, or SFON is a stand-alone ability. Another example is the approximate number system (ANS) ability that gives promise to estimation and literature proves it to be a strong predictor of mathematics achievement through cardinality (e.g., Chu et al., 2015). A concept that needs nurturing, so far one study from this literature shares a successful intervention PLUS that increases ANS (Van Herwegen et al., 2017).

Observations indicate a need to understand or unpack children's language as some studies asserted that children were able to articulate their strategies and reasons behind their selection (Benz, 2014), while others reported that children were limited to counting in describing their strategies (Schöner & Benz, 2018). These contradictory findings are a clear indication for more studies looking at the same phenomena, such as students' ability to explain structures they build. Furthermore, there is too little literature on transitioning from informal numerosity (e.g., SFON)

to formal numerosity and how mediation should be structured to achieve the transitioning.

Number sense development through technology is an important additional issue which has been studied in recent research and has been reviewed in the present study. The review of the literature on this issue will be discussed within the theme of the role of technology in ECME in section 3.4.

### **3.2. Geometry education in early childhood**

Based on our review of research literature on geometry education in the early years, we identified five different categories/threads on which recent research is focused. Relevant research findings on these threads are categorized into the corresponding sections that follow.

#### ***3.2.1 Spatial reasoning and early geometry***

Geometry is a mathematical content domain in which learning encompasses spatial reasoning to a great extent. In this paper, spatial reasoning, which has been found to be a major predictor of later academic achievement at school, is considered as the ability to identify and use the spatial attributes of objects and the spatial relations between objects (Bruce et al., 2017; Woolcott et al., 2022).

Although there is extensive research which provides evidence for the positive relationship between spatial reasoning and early mathematical competences and learning in general (see Section 3.3.3 within the theme of other content domains in ECME), the complex relationship (Dindyal, 2015) between spatial reasoning and geometrical knowledge and understanding of young children in particular has been scarcely researched. In a recent special issue of ZDM in geometry at the primary school, the findings of a number of studies have revealed different aspects of this relationship. Particularly, in their study with 7-year-old students, Soury-Lavergne and Maschietto (2015) found that spatial knowledge is the basis for building geometrical knowledge and understandings in problem solving situations. Kaur (2015) has stressed the need to introduce more systematically the drawing of straight lines to young children (7-8 years of age), as this could enhance their reasoning about 2D or 3D shapes and specifically dimensional deconstruction of shapes (see also Duval, 2005). In another study, Hallowell et al. (2015) investigated the mereological, optics, and spatial operations of 6-7-year-old children by plane and solid shapes. They concluded that practicing these operations would support the development of children's visualization abilities when working with geometrical figures.

### ***3.2.2 Shape knowledge and understandings***

Shape knowledge and understanding is an important aspect of geometry education. Swoboda and Vighi (2016) argued that the research on the understanding of geometrical concepts has focused on two main issues: the understanding of geometric figures and the functioning of these figures in space. They, also, claim that the problem of understanding geometric figures was indicated by Van Hiele's theory which is still worth considering. Particularly, research on secondary school pupils' conceptions of geometrical objects and relationships has shown that this knowledge is not well established. One of the reasons is very poor recognition of the way geometric knowledge develops in the early educational stages.

Recent studies which focused on investigating the understanding of specific shapes by preschool children, including triangles (Dağlı & Halat, 2016; Kalénine et al., 2013), rectangles (Kalénine et al., 2013) or squares (Halat & Dağlı, 2016), reaffirmed the findings of earlier research which suggested that children identified, classified and drew shapes based on the comparison with visual prototypes (e.g., with specific orientation and ratio characteristics) and showed a higher rate of failure when dealing with non-prototypical shapes. In line with these findings, Resnick et al. (2016) provided evidence to children's exposure to a limited number of shape categories and very few non-typical variants within those categories. Less attention is devoted to studying children's competences with 3D shapes. In their study on first graders' reasoning about solid and plane shapes, Hallowell et al. (2015) showed that children encountered difficulties in reconstructing a 3D geometrical object and using its regularities when needed.

### ***3.2.3 Dynamic, embodied and semiotic approaches in geometrical thinking and learning***

The introduction of geometry as a dynamic, spatial and imaginative subject rather than as a subject emphasizing shape recognition and classification in the early years is suggested by a number of researchers (e.g., Moss et al., 2015). In line with this perspective, in a review of literature in Geometry Education, Sinclair, Bartolini Bussi et al. (2016) identified the use and role of diagrams and gestures and the advances in the understanding of the role of digital technologies (including dynamic environments) as major threads of contributions.

Focusing on literature in early geometry, there is growing research which investigates the representation of geometrical ideas (Dindyal, 2015), the different communicative modes that children use to describe shapes (i.e., talk, gesture, diagrams and material environment) (Gejard & Melander, 2018) and semiotic mediation (Bussi & Baccaglini-Frank, 2015) in the teaching and learning of geometry.

A common rationale of this research is that embodiment and multimodality are key aspects of early geometry learning, as speech alone might not be sufficient for expressing and organizing geometric concepts and therefore children pursue multiple paths to overcome its limitations (Calero et al., 2019). Particularly, a number of studies provide evidence for the crucial role of the bodily actions and gestures in various aspects of geometry learning, including children's spatial-geometric reasoning and conceptions (Thom, 2018), mathematical generalisation and abstraction of symmetry (Breive, 2022), making sense of shape and space concepts and communicating geometrical and spatial relationships (Elia et al., 2014). Furthermore, Calero et al. (2019) suggested that children's gestures and behavioral choices may reflect implicit knowledge and serve as a foundation for the development of geometric reasoning.

A number of studies have investigated the complex interplay between embodiment and other modalities in the process of geometrical meaning making. Most of these studies (Elia, 2018; Gejard & Melander, 2018) provided evidence for the synergy between talk, gesture, and material environment, where talk and gesture mutually elaborate upon each other as part of collaborative meaning-making practices.

A smaller number of studies investigated young children's geometrical thinking through their drawings. Particularly, Thom and McGarvey (2015) examined the ways that children come to draw in geometric contexts and they concluded that children's drawings in geometric contexts should not be seen simply as an outcome (after-the-event artifact), but as visual and kinetic geometric tools to present, conceptualize, and solve problems which contribute to their geometrical understandings.

The role of dynamic learning environments has been the focus of a number of studies in early geometry. Specifically, evidence has been provided for the potential of dynamic geometry environments to support children's developing discourse, understanding, and reasoning about, the properties and behaviours of shapes, particularly triangles (Kaur, 2015). Furthermore, the interplay between the use of dynamic learning environments and embodied ways of thinking was found to contribute to children's developing conceptions of geometrical concepts and their properties, including angle (as a turn or as shape) and reflective symmetry (Kaur, 2020; Ng & Sinclair, 2015).

#### ***3.2.4 Enhancing and assessing geometry learning***

A significant body of literature focuses on approaches and didactic tools to support children's geometrical thinking and learning. A learning approach that has been studied by a few studies is play (e.g., Nakawa, 2020). Findings suggest that using children's play as starting points teaching mathematical content supports children's

explorations of shapes (Bäckman, 2016), while guided play enhances children's shape knowledge (Fisher et al., 2013).

In addition, using picture book reading with (McGuire et al., 2021) or without the inclusion of additional mathematical activities (Van den Heuvel Panhuizen et al., 2015) has been found to be a promising avenue to contribute to the development of children's understanding of shapes and spatial relationships. However, in Nurnberger-Haag's (2017) study which examined the geometrical content of children's books, it was found that picture books often misteach shapes by using for example incorrect 2D names for 3D images and also by giving inaccurate properties or definitions.

Considering that spatial abilities are malleable (e.g., Bruce et al., 2017), a number of studies have focused on how spatial reasoning development in the early years can be supported. Various factors, including semiotic tools (Thom, 2018), classroom activities provided by the teacher (Bruce & Hawes, 2015) and contexts beyond school (Casey et al., 2014; Verdine et al., 2017) were found to play a significant role. Furthermore, spatial intervention studies within school demonstrate gains in children's spatial abilities, including spatial language, visual-spatial reasoning and 2D mental rotation (Bruce & Hawes, 2015; Cheng & Mix, 2014).

Research on the assessment of children's geometrical thinking and learning is rather scarce. The findings of Thom and McGarvey's (2015) study showed that drawing serves as a means to access, assess, and attend to children's understanding. Of interest is that children's spatial skills can be assessed very early. For example, a spatial skill test including spatial assembly, namely, Test of Spatial Assembly (TOSA) (Verdine et al., 2014) can be used already at the age of three, while a measure assessing mental rotation with tangible objects can identify developmental differences from the age of four up to the age of eight (Hawes et al., 2015).

### ***3.2.5 Individual differences associated with learning in geometry***

Research findings on the relationship between children's gender or socioeconomic status (SES) and geometrical learning are ambiguous. More specifically, Verdine et al. (2014) reveal that three-year-old children's performance in spatial assembly tasks did not differ by gender, while Jirout and Newcombe (2015) argue that boys have an advantage on the spatial skills compared to girls, because the boys spend more time with spatial play. The results of Milburna et al.'s (2019) study also showed no differences for geometrical abilities between males and females at the preschool age. Regarding socioeconomic background, lower SES children were found to lag behind higher SES children in spatial assembly skills (Verdine et al., 2014), while other studies (e.g., Jirout & Newcombe, 2015; Rittle-Johnson et al., 2017) reveal that children from low-income backgrounds follow a similar trajectory in geometry development as their peers from more advantaged backgrounds.

Another child-related factor that has been studied in relation to geometry learning is language abilities. Particularly, a number of studies suggest that first grade children's abilities in language comprehension and production as well as knowledge of geometrical words (e.g., of shapes) play a role in geometrical understanding (Mushin et al., 2013).

### ***3.2.6 Concluding remarks***

The growing body of research and the relevant evidence already provided for the importance of the embodied, spatial and dynamic aspects of early geometry learning indicate the need for generating and providing evidence for new frameworks in early geometry thinking, learning and development that would consider these characteristics and improve and deepen our knowledge about how children think, build and develop geometrical understandings and thus increase our awareness of the children's mathematical strengths and needs in this content area. For example, how spatial reasoning is associated with and could contribute to early geometry learning and to the development of geometrical thinking and understanding is a noteworthy issue (e.g., Dindyal, 2015) to be investigated systematically in future research.

The use of multimodal approaches (e.g., Calero et al., 2019) would play a crucial role in accessing and assessing children's understandings and thinking (e.g., drawings, oral speech, body movements, gestures, concrete objects) in the classroom (e.g., Thom, 2018). Besides, finding ways to assess effectively young children's geometrical understandings for learning is an important issue for further research, that was indicated by our findings.

Regarding shape knowledge and understandings, the findings of this survey show that more research needs to be undertaken for investigating children's competences and learning of 3D shapes. Furthermore, with respect to 2D shapes, children in recent studies still encounter challenges and difficulties (e.g., regular use of visual prototypes) (e.g., Kalénine et al., 2013) similar to those that have been revealed in earlier research (e.g., Levenson et al., 2011). The possible causes for this phenomenon need to be investigated more systematically. For example, it could be that there is a gap between research-based evidence/knowledge and educational policy, practice (e.g., teacher education and professional development, teaching) and curriculum development which needs to be addressed. Also, it is suggested that more research is needed on teaching strategies in geometry to support children move into more abstract ways of thinking (e.g., operational definitions of shapes, properties, shape relations). Particularly, based on our findings, the use of technologies, spatial programs, embodiment, play and picture books (e.g., Bäckman, 2016; Hallowell et al., 2015; Kaur, 2020; Van den Heuvel Panhuizen et al., 2015) offer a promising avenue towards this kind of learning.

Focusing on the individual differences associated with geometry learning, our findings revealed ambiguous results (e.g., Jirout & Newcombe, 2015; Verdine et al., 2014). The variability in the research conditions and procedure or educational system and culture from one study to another could provide an interpretation for this finding. A more systematic review or meta-analysis on this specific issue and perhaps more comparative and cross-cultural studies for the domain of early geometry could give further insights into this thread.

### **3.3. Children's competencies in other content domains in early childhood**

In this study, by other content domains in ECME we mean the mathematical content areas except for number sense and whole number development, and geometrical knowledge and skills, namely, patterns, measurement, spatial reasoning and thinking, reasoning and data modeling. A common focus of the literature reviewed across the different content domains is twofold: Firstly, providing insights into young children's competences and development and secondly, proposing interventions and investigating their effectiveness on children's learning.

#### **3.3.1 Patterns**

Patterns has been the focus of a large proportion of the reviewed literature on this theme (other content domains). Various studies are about pattern structure, visual patterns, repeating patterning competencies, etc. Seminal research on patterns in early childhood education was realized in the work of Mulligan and Mitchelmore (2013) who proposed Early Awareness of Mathematical Pattern and Structure (AMPS), and have shown that it generalizes across early mathematical concepts. This study provided a rationale for the construct of AMPS based on students' levels of structural development through five levels reliably categorized. A recent study explored how children can develop connected mathematical knowledge leading to generalization by developing patterns and structural relationships and showed the approach's effectiveness in modeling and expression, visualization and abstraction, and learning maintenance (Mulligan et al., 2020).

Furthermore, Björklund and Pramling (2014) clarified the importance of early childhood education activity in mathematics on the concept of 'pattern.' Also, Rittle-Johnson et al. (2015) illustrated the experiences preschool children receive with patterns and how their pattern knowledge changes over time. Regarding strategies for visual repeating patterns, Collins and Laski (2015) found that preschoolers completed a range of patterning tasks that varied in the extent to which they required mental representation and manipulation of the repeating unit. Preschoolers tended to use an appearance matching strategy on duplicate and extended tasks and a relational similarity strategy on transfer tasks. Tsamir et al. (2017) examined children's recognition of the unit of repeat and the structure of the repeating patterns and found

that children can choose appropriate continuations which extend a repeating pattern beyond just one element.

A growing body of research has focused on children's recognition of the unit of repeating and the structure of the repeating patterns and the relations with other mathematical contents, such as numbers and arithmetic, algebra, calculation, or geometrical thinking (e.g., Hunter & Miller, 2022; Swoboda & Vighi, 2016; Venkat et al., 2018, etc.). It is shown that the patterning instruction was effective for recognizing symmetrical patterns, patterns with increasing numbers of elements, and patterns involving the rotation of an object (Kidd et al., 2014; Lüken & Kampmann, 2018, etc.). Furthermore, Bäckman (2016) proposed teaching and learning mathematical content through play to teach and learn shapes and patterns in four Swedish preschools.

Wijns et al. (2019) found that the ability to recognize the structure of patterns and understand mathematical language were strong predictors of their mathematics success, with the latter making a more significant contribution. Miller (2019) suggested that cross-curriculum opportunities in STEM education are the introduction of computer science as a fundamental skill/literacy for all students by using coding to identify mathematical structures and patterns.

### ***3.3.2 Measurement***

The following most significant number of publications was found on measurement. In measurement, length, area, mass, and time have received more attention, while only a few research papers are about bulk, volume, or weight. In a large part of these studies, the focus has been on length measurement. Kotsopoulos et al. (2013) showed the effects of different pedagogical approaches on kindergarten children's learning of length measurement. They evaluated and elaborated on the developmental progression or levels of thinking. Moreover, Szilágyi et al. (2013) validated that the sequence of thinking levels in a hypothesized learning trajectory is consistent with observed behaviors of students from pre-kindergarten through second grade. Sarana et al. (2021) evaluated a part of their proposed learning trajectory, focusing on the instructional component, and found that instruction successfully promoted the children's progression. There are fewer pieces of literature about area measurement. Clements et al. (2018) verified the effects of instructional interventions through each level of a learning trajectory designed to support young children's understanding of area measurement as a structuring process.

### ***3.3.3 Spatial reasoning***

Research on spatial reasoning has rapidly increased in recent years, possibly because it has been elucidated that spatial reasoning is deeply related to later children's mathematical skills and may also lead to the development of proficiency in other

subjects and fields besides mathematics. Reviewing spatial reasoning research brings together international literature across mathematics education, development, and cognition.

Extensive research has provided evidence for the positive relationship between spatial reasoning and mathematics competences and learning in the early years with emphasis on number-related abilities (e.g., Möhring et al., 2015; Van den Heuvel-Panhuizen et al., 2015). For example, Verdine et al. (2017) suggested that there are links between spatial reasoning and number-line estimation and counting in children already from age 3. These links between spatial and number-related skills could be explained by the mental number line and the linearity of mental representations of magnitude.

Kotsopoulos et al. (2021) investigated the overall verbal and nonverbal visual-spatial ability of 61 (34 boys) three- to five-year-olds and the following factors known to be related to visual-spatial ability: grade, sex, socio-economic status, math, and spatial activity engagement at home, parental mental rotation, quantitative reasoning, intelligence, and working memory. Results revealed that quantitative reasoning and general intelligence were significant predictors of overall and nonverbal visual-spatial ability. Mathematics activities in the home also predicted children's verbal visual-spatial ability.

The reverse relationship between spatial reasoning and mathematical abilities has been also studied in recent research primarily for the early primary school years and less for the preschool or kindergarten years. Evidence has been provided for the potential of early spatial reasoning programs in the classroom or in other contexts to significantly support mathematics learning (e.g., Cheng & Mix, 2014; Resnick, 2020; Woolcott et al., 2022; Zhang & Lin, 2017). In a synthesis of studies which investigated how spatial reasoning interventions contribute to mathematics learning in school, Woolcott et al. (2022) highlighted the importance of designing and evaluating spatial reasoning programs for primary school children to improve students' mathematics classroom learning, including evidence from standardized tests as they progress through the school system. Of interest is the focus of some studies on girls' (6–7-year-olds) early spatial and arithmetic skills. Particularly, Casey et al. (2014) and Laski et al. (2013) provided evidence for the importance of the development of early spatial skills on girls' effective mathematics learning.

Using another perspective, Gold et al. (2021) examined associations between engineering play with wooden unit blocks and mathematics and the spatial skills of children with and without disabilities. Findings provide initial evidence that engineering play is related to mathematics and spatial development and maybe a fundamental educational approach for supporting cognitive skills and school readiness in typically developing children and children with disabilities.

### ***3.3.4 Thinking, reasoning and data modeling***

Research in ECME has dealt with various kinds of thinking and reasoning. Functional thinking is one of the topics which several researchers investigated. Blanton et al. (2015) empirically developed a learning trajectory in first-grade children's (6-year-olds') thinking about the generalization of functional relationships by proposing the levels of sophistication in 6-year-olds' thinking about generalizing algebraic relationships in function data. Lenz (2022) explains that relational thinking and dealing with variables are two essential aspects of algebraic thinking. Examining the relational thinking of kindergarten and primary school children showed that specific conceptualizations of variables were related to children's ability to show relational thinking. In addition, Bakker et al. (2014) clarified children's informal knowledge of multiplicative reasoning. Even when assessed in a relatively formal setting, first-graders display a substantial knowledge of multiplicative reasoning before being taught.

English and Crevensten (2013) explored data modeling with a specific focus on structuring and representing data, including the use of conceptual and meta-representation competence, informal inference, and the role of context through the longitudinal study of data modeling in grades one to three. Supply et al. (2021) examined children's numerical abilities in the second grade of preschool and their probabilistic reasoning abilities one and two years later. They provided evidence for the predictive role of early numerical abilities on later probabilistic reasoning.

Kieran et al. (2016) investigated the nature of the research carried out in early algebra and how it has shaped the field's growth for the younger student aged from about six years to twelve years. This study found that mathematical relations, patterns, and arithmetical structures lie at the heart of early algebraic activity, with noticing, conjecturing, generalizing, representing, justifying, and communicating central to students' engagement. Obersteiner et al. (2015) investigated primary school children's use of strategies in contingency table problems and found that ignoring relevant information and referring to additive rather than multiplicative relationships between cell frequencies were among the children's primary strategies.

### ***3.3.5 Concluding remarks***

According to this review results, we showed the strengths in this current research body which focused on other content domains in mathematics in early childhood contexts. Children engaged in early childhood education should attain the essential knowledge and skills for learning and for the development of their understanding and skills in various mathematical content domains, such as patterns, measurement, algebraic thinking, spatial skills and data analysis. As children's early knowledge affects them for several years thereafter (Sarama & Clements, 2009), young children may need knowledge and skills drawn in various mathematical areas for their later

learning of higher mathematical and other disciplinary contents, and basic knowledge and fundamental skills essential for human life in the future.

More extensive future research is worth pursuing in these content areas in ECME because the research questions addressed until now are quite limited. For example, systematically investigating the connections of early learning in these content domains with later mathematical performance at school is worth considering. Additionally, we recommend that further research could be carried out in the following topics: the nature of classroom culture and the role of the teacher, the forms of curricular activity, teaching strategies and new technologies on the learning of the above mathematical content areas, the links between children's competences in content areas beyond numeracy and their spatial and other cognitive skills and affective characteristics, as well as the contribution of spatial reasoning interventions on children's mathematical abilities in preschool.

#### **3.4. Teaching and learning mathematics in early grades with technology-integrated activities**

Although most of the research on the use of technology in mathematics education focused on older students, recent literature (2012-2022) also included reports on various uses of technology-integrated activities in early grades. These reports focused on different categories/threads, that we group and present in this paper (see Table 2) divided into the following sections.

##### ***3.4.1 Design features***

A large body of literature focused on design features of different technological tools (e.g., spreadsheets, IWBs, dynamic geometry software, programmable toy robots, interactive applets for tablets, virtual manipulatives) used in early childhood mathematics education. Overall, such literature suggests that the use of modern technology supports students' learning, although the type and extent of such positive influence seem to depend on the age of the students (e.g., Moyer-Packenham et al., 2015). For example, an analysis of the movements and attitude of 3-4 year-old students during clinical interviews shed light onto differences in their relationships with touch devices and in the exploitation of such devices' affordances. Some studies showed that sometimes children can become even frustrated, in which case scaffolding could improve their learning (e.g., Bullock et al., 2017). However, most of the studies highlighted how students are attracted by the devices employed and this had positive repercussions on their attitude towards mathematics. Moreover, children seemed to be supported in incrementally refining their understanding and shaping their concept images of mathematical ideas (Watts et al., 2016).

Within the theme of design, two main lines of research can be outlined. The first one points out the need for designing new apps and virtual manipulatives for learning

mathematics to create constructive opportunities to represent mathematical objects so that they can be manipulated (Moyer-Packenham, 2016). The second one highlights the importance of well-founded guidelines on the basis of this design, since there are many educational apps, and most are not designed following such guidelines. Moreover, researchers highlighted the need for more research on educational games and applications designed for preschoolers to establish whether, how, and for whom screen media can be educationally valuable. On the other hand, an under-informed approach not only disempowers teachers, but it also demotivates children. Guss et al. (2022) have taken a cross-sectional position advocating for a lens of equity, inclusion, and accessibility in the development of technology-based resources for early math using learning and teaching with learning trajectories.

Some studies focused on multi-touch devices, which seem to have the potential of supporting the development of number sense, particularly in low-performance students. Many of such studies were focused on the iPad app TouchCounts, which takes advantage of the multi-touch and gestures functionalities of the device and provides multimodal visual and auditory feedback for every touch or gesture. These kinds of simultaneous feedback can assist in the child's development of ordinality, cardinality, counting, adding and subtracting. Studies have focused on task design in TouchCounts, and the analyses of children's interactions have shown how collaborative practices can foster children's engagement and help develop their number sense (Baccaglini-Frank et al., 2020). In such a context children's shared gestures can become a material resource for making sense of numbers. There are examples of multiplayer learning environments involving embodied interactions, studied as new opportunities for training on the number line: improvements were found not only in accuracy on number line tasks but also in other numerical and arithmetic tasks (e.g., Baccaglini-Frank & Maracci, 2015; Sinclair, Chorney et al., 2016; Sedaghatjou, & Campbell, 2017).

A different but quite significant trend concerns the literature about robotics education; it includes studies that used robotics kits for young children or a single robot for a class of children in preschool or at the beginning of primary school (e.g., Bartolini Bussi & Baccaglini-Frank, 2015; Del Zozzo & Santi, 2023). Part of these studies focused on the impact of such activities with toy robots on visuospatial reasoning. For example, Di Lieto et al. (2017) provided support towards the hypothesis that educational robotics can progressively improve students' abilities in planning and controlling complex tasks even in early childhood. Francis et al. (2017) indicated the feasibility of designing robotic-enhanced activities for fostering STEM education in kindergarten. In particular, spatial reasoning seemed to play a vital role in choosing and being successful in STEM careers.

**Table 2.** Categories of the technology theme from reviewed papers and selected publications<sup>a</sup>

Category	Number of selected publications included in the paper	Sample of publications
Design features	13	Baccaglini-Frank & Maracci (2015); Baccaglini-Frank et al. (2020); Bartolini Bussi & Baccaglini-Frank (2015); Bullock et al. (2017); Del Zozzo & Santi (2023); Di Lieto et al. (2017); Francis et al. (2017); Guss et al. (2022); Moyer-Packenham et al. (2015); Moyer-Packenham (2016); Sedaghatjou & Campbell (2017); Sinclair, Chorney et al. (2016); Watts et al. (2016)
Technological tools to enhance and assess mathematics learning	4	Aunio & Mononen (2018); Axelsson & Andersson (2016); Baroody et al. (2014); Pazouki et al. (2018)
Pedagogical issues involved in teaching using technological tools	3	Bourbour & Masoumi (2017); Trgalová & Rousson (2017); Walshaw (2012)
Mathematics in focus: (mostly) number sense	10	Baccaglini-Frank & Maracci (2015); Baccaglini-Frank et al. (2020); Ferrara, & Savioli (2018); Holgersson et al. (2016); Rodney (2019); Rothschild & Williams (2015); Sedaghatjou & Campbell (2017); Sedaghatjou & Rodney (2018); Sinclair, Chorney et al. (2016); Wulandari et al. (2022)
Other issues	4	Bakos & Pimm (2020); Calvert et al. (2020); Hundeland et al. (2014); Sinclair & Heyd-Metzuyanin (2014)
n <sup>b</sup>	31	

<sup>a</sup> n=113 : Total number of papers analyzed

<sup>b</sup> Number of papers included in the paper (due to dual coding this number may be smaller than the sum of papers from all categories)

### ***3.4.2 Technological tools to enhance and assess mathematics learning***

Within this area of research, results are usually obtained by showing whether an experimental group of children improves its math skills significantly in comparison

to a control group. A common research problem addressed by these studies is to understand the ways and means by which digital environments create a different and more effective (if so) learning experience of mathematical phenomena compared to environments characterized by more traditional media, such as paper and pencil.

A set of activities offered through educational software in the form of games designed to strengthen or remediate weaker abilities is frequently labelled “computer-assisted intervention”. This kind of intervention has become increasingly common for young children, and the area of research is receiving growing interest and support (Axelsson & Andersson, 2016). Results suggested that game contexts act as motivators that can scaffold more mature cognitive capabilities in young children than they exhibit during a non-contextual standardized test (e.g., Aunio & Mononen, 2018).

In a study by Baroody et al. (2014), first graders participated in an experimental design using two computer-based programs developed to improve fluency in basic subtraction via guided learning strategies. The intervention succeeded in transferring skills and knowledge for subtraction.

Pazouki et al. (2018) discussed "MaGrid", a tablet-based application that provides a wide range of training tasks targeting fundamental mathematical concepts for the preschool level. The language-neutral property of MaGrid distinguishes it from other mathematical applications and it reduces the barrier of language for second language learners.

### ***3.4.3 Pedagogical issues involved in teaching using technological tools***

The primary goal in this strand of research seems to be understanding ways and means by which digital environments create a different learning experience of mathematical phenomena with respect to environments characterized by traditional media. Many of these studies explored the roles that preschool teachers give to technologies in mathematics education, and the ways in which they structure their activities when using technological artifacts (e.g., Walshaw, 2012).

The interactive white board (IWB) is relatively widely spread (e.g., Bourbour & Masoumi, 2017). In preschool it can be viewed as a multisensory resource to engage young children in reasoning and in problem-solving activities. As far as the teachers are concerned, having a negative attitude towards IWBs leads to a decrease in the likelihood of pedagogical change. Among the more positive aspects of the use of an IWB in first grade, studies listed: a dynamic display of the content, an increase in students’ attention and motivation, having immediate feedback. Among the negative aspects they listed: technical difficulties, a frontal way of teaching, technical problems, a decrease in the teacher’s control over students’ work. It is noteworthy that studies investigating early childhood practicing or pre-service teachers

employing tablets as part of their teaching practices in mathematics are scarce (e.g., Trgalová & Rousson, 2017).

#### ***3.4.4 Mathematics in focus: (mostly) number sense***

Number sense has been the main mathematical focus within most of the technological environments studied in recent research. Also, set of studies on the use of robots focused on computing education. A minority of the studies reviewed focused on geometry, patterns or other mathematical content. Hence, we mainly describe the research on technology promoting number sense. Overall, the findings suggest that multi-touch technology has the potential to foster important aspects of children's development of number sense (e.g., Baccaglini-Frank et al., 2020; Ferrara, & Savioli, 2018; Rodney, 2019; Sedaghatjou & Rodney, 2018; Wulandari et al., 2022). In particular, there is evidence of learning while children are interacting with mathematics apps on touch-screen devices. Main findings also included the fact that different children attend to different affordances, suggesting that it is the key to offer appropriate scaffolding. As we discussed in the section 3.4.2, interacting within digital media contexts is quite complex for young children, so some studies have led to recommendations for interactive educational design as well as design trajectories to support the development of counting abilities and arithmetic competence in general (e.g., Rothschild & Williams, 2015).

An example of multi-touch app is Fingu, with the potential of enhancing children's speed and accuracy in subitizing and their ability to identify part-whole relationships (Baccaglini-Frank & Maracci, 2015; Holgersson et al., 2016).

More recent studies focused on preschoolers and primary school children engaged in learning numbers by interacting with TouchCounts (e.g., Sinclair, Chorney et al., 2016; Rodney, 2019). Some described the application, others investigated the mathematical, social and affective nature of children's engagement with the application, others focused on gestures both in their personal and social dimension, others yet analyzed the rhythm emerging from the interactions and some looked at students' learning of a specific mathematical issue related to numbers. For example, Baccaglini-Frank et al. (2020) and Sedaghatjou and Campbell (2017) explored how young students build an understanding of cardinality and ordinality principles through communicative, touchscreen-based activities involving talk, gesture and body engagement. These studies revealed that the implementation of open environments, like TouchCounts, supported child development of different strategies in response to tasks designed to address different number sense abilities. A substantial contribution is given by studies that deal with the nature and the role of gestures (e.g., Sinclair, Chorney et al., 2016). Finally, since gestures become multimodal resources to communicate temporal relationships about spatial

transformations, a still emerging line of research concerns how to develop well-educated fingers in relation to engaging with mathematics.

### ***3.4.5 Other issues***

The literature review shows how technology-integrated activities in kindergarten and early grades may help improve not only competences such as mathematics or language but also transversal competences, such as communication, social interaction, equal education, co-responsibility with others, affectivity. Moreover, children make sense of the digital tools and are able to apply the tools purposefully as long as they also interact with an adult (e.g., Hundeland et al., 2014). For example, Sinclair and Heyd-Metzuyanim (2014) and Bakos and Pimm (2020) investigated the mathematical, social and affective nature of children's engagement with TouchCounts. When technology integration was accomplished successfully in early childhood education settings, children tended to interact more with one another, and exchange information related to computer tasks as well as to the overall classroom ongoing curriculum themes. In particular, Calvert et al. (2020) discussed that children's para-social relationships and para-social interactions with intelligent characters may provide new frontiers for 21<sup>st</sup>-century learning.

### ***3.4.6 Concluding remarks***

From the literature review, we can conclude that well-planned integration of technology in the classroom, with clear learning objectives and appropriate feedback, can motivate children, enhance concentration, and support independent learning and communication. Mathematics apps could be fruitful tools also outside school. Indeed, one of the problems that is usually pointed out is that students rarely practice math outside of school requirements - called "math-practice gap" (Stacy et al., 2017) – and it may contribute to students' struggle with mathematics. Mathematics apps offer a viable solution to this problem, providing access to many problems, tied to immediate feedback, and delivered in an engaging way.

A common goal of the studies discussed was to explore effective use of apps in mathematics teaching and how such use enables the learning process, making learning meaningful and student-centered. By exploring the connections between mobile devices, media literacy and visual literacy, some studies emphasized the collaborative affordances of many apps and the importance of multimodal forms of representation fostered through gesture, voice, text, video and audio.

A still open problem is that teachers are frequently not confident about their ability to teach mathematics using technology (Dong, 2018). There is a difference in the use of various technological artifacts which can be attributed to their being either fixed or mobile. For example, the IWB does not seem to pose pedagogical challenges to teachers, as its stable location offers the opportunity of using it in traditional teaching

ways. On the other hand, tablets seem to be a challenge for some teachers because of the need they pose to reconfigure the organization and the roles of teachers and students (e.g., Brown & Englehardt, 2017; Fekonja-Peklaj & Marjanovič-Umek, 2015). Further research is necessary to address these issues and explore prompting actions to support teachers in realizing the potential of technology and, at the same time, to design appropriate training and guidelines in ECME. Some university departments for early childhood preservice teachers include courses in effective ways of using ICT and integrating it into daily education, but these actions are not yet sufficient.

### **3.5. Early childhood teachers' knowledge, education and affective issues in mathematics**

Teachers' knowledge and beliefs for teaching mathematics are complex and multifaceted. This is true also for early childhood teachers. This section begins by describing some theoretical conceptualizations of early childhood educators' knowledge and beliefs and then review studies which examined specific components of knowledge and beliefs. Finally, professional development (PD) studies are reviewed. The categories from the reviewed studies on this theme and the relevant publications are presented in Table 3. The terms preschool and kindergarten are used in accordance with the study being reviewed.

#### ***3.5.1 Theoretical models and frameworks: knowledge and competence***

Nearly all frameworks and models of preschool teachers' knowledge relate to what is termed subject-matter knowledge (SMK) and pedagogical-content knowledge (PCK). For preschool teachers, mathematical content refers to the concepts and skills mentioned by curricula, such as numbers and operation, measurement, geometry, data representation, and patterns (Ren & Smith, 2018). Gasteiger and Benz (2018) added that preschool teachers should also know the structure of mathematical concepts so that early mathematics education may be implemented coherently. The Cognitive Affective Mathematics Teacher Education (CAMTE) framework (e.g., Tsamir et al., 2014) differentiated between two components of SMK – being able to solve mathematical problems and being able to evaluate solutions of mathematical tasks. PCK may also be broken down into sub-components, such as knowledge of young children's mathematical conceptions, and knowledge of appropriate mathematical tasks (e.g., Tsamir et al., 2014).

Combining SMK and PCK into one model, Gasteiger and Benz (2018) used the term explicit knowledge to include knowledge of mathematical concepts and knowledge of developmental processes. They also added situational observing, pedagogical actions, and evaluation. They theorized that knowledge of development processes

would inform teachers' ability to assess the learning level of students, which in turn would affect teachers' actions.

**Table 3.** Categories of the teachers' theme from reviewed papers and selected publications<sup>a</sup>

Category	Number of selected publications included in the paper	Sample of publications
Theoretical models and frameworks: knowledge and competence	3	Gasteiger & Benz (2018); Ren & Smith (2018); Tsamir et al. (2014)
Teachers' knowledge for teaching preschool mathematics	19	Benz (2016); Björklund (2012); Canturk-Gunhan & Cetingoz (2013); Dunekacke et al. (2016); Gasteiger & Benz (2018); Lee (2017); Lembrér et al. (2018); McGarvey (2012); Moss et al. (2015); Opperman et al. (2016); Paolucci & Wessels (2017); Paparistodemou et al. (2014); Schack et al. (2013); Tanase & Wang (2013); Tirosh et al. (2019); Torbeyns et al. (2020); Tsamir et al. (2014); Tsamir et al. (2015); Ulusoy (2021)
Affective issues related to teaching mathematics during the early years	17	Benz (2012); Can & Durmaz (2023); Cross Francis (2015); Dunekacke et al. (2016); Franzén (2014); Gasteiger & Benz (2018); Jenßen et al. (2022); Li et al. (2019); Opperman et al. (2016); Polly et al. (2018); Ren & Smith (2018); Russo et al. (2020); Sancar-Tokmak (2015); Sumpter (2020); Theil & Jenssen (2018); Tsamir et al. (2013); Tsamir et al. (2014)
Professional development	10	Cross Francis (2015); Ertle et al. (2016); Gasteiger & Benz (2018); Heng & Sudarshan (2013); Moss et al. (2015); Olfos et al. (2022); Polly et al. (2018); Tsamir et al. (2014); Wilson et al. (2013); Wullschleger et al. (2023)
n <sup>b</sup>	40	

<sup>a</sup> n=54 : Total number of papers analyzed

<sup>b</sup> Number of papers included in the paper (due to dual coding this number may be smaller than the sum of papers from all categories)

### 3.5.2 Teachers' knowledge for teaching preschool mathematics

While numerous studies have explored the interrelationships between various dimensions of knowledge, as well as their connections to pedagogical competencies

and beliefs (e.g., Opperman et al., 2016), others have directed their attention towards specific facets of content knowledge. Within the domain of patterns, McGarvey (2012) examined how teachers classify images as patterns or not patterns. A frequent criterion for an image to be considered a pattern was if an element of repetition could be recognized, and if the person could tell what would go next. In the domain of geometry, Tsamir et al. (2015) reported that teachers could identify examples and non-examples of triangles and define triangles; identify examples and nonexamples of circles but had difficulty defining circles; and had some difficulties in both identifying examples and non-examples of cylinders and defining cylinders. Similar results were found among prospective preschool teachers in Turkey (Canturk-Gunhan & Cetingoz, 2013). Ulusoy's (2021) research suggested that prospective teachers were not aware of the potential influence of using triangle-looking non-examples when teaching about triangles. Moss et al.'s (2015) research suggested a need to promote teachers' knowledge of dynamic aspects of geometry. It should be noted that studies investigating teachers' content knowledge of measurement, data and combinatorics were scarce.

Studies that concerned teachers' PCK were more frequent than studies of teachers' content knowledge. The methodology of these studies varied and included quantitative methods, such as handing out questionnaires (e.g., Dunekacke et al., 2016), qualitative observations of teachers' lessons (Björklund, 2012), and qualitative analysis of teachers' noticing and attending to written scenarios (Oppermann, et al., 2016), videos (Schack et al., 2013), and pictures (e.g., Lembré et al., 2018). Of note is the "Preschool Mathematics PCK interview", a tool developed by McCray and Chen (2012), which comes in the form of a vignette describing a free play situation serving as the basis for an interview, guided by questions which ask teachers to identify the mathematics embedded in the situation and to propose ways to support children's awareness of the particular mathematical topic and experimentation with it in their play.

Several studies focused on teachers' abilities to recognize mathematical situations that occur during children's natural play (Benz, 2016; Björklund, 2012) or during play-based scenarios (Lee, 2017; Oppermann et al., 2016; Torbeyns et al., 2020). Noticing children's early numeracy was also investigated among prospective elementary school teachers (Schack et al., 2013). In that study, three noticing skills were analyzed: attending, interpreting, and deciding. Gasteiger & Benz (2018) pointed out that a teacher who purposely observes situations and specifically looks for mathematical relevance is more likely to make appropriate pedagogical decisions than a teacher who does not notice or look for the mathematics involved in situations.

Related to PCK is knowing what types of examples and manipulatives to employ in mathematical activities. Within a geometrical context, Papanastasiou et al. (2014) found that most prospective teachers considered only prototypical shapes in their

tasks. Within the domain of patterns, Tirosh et al. (2019) investigated preschool teachers' examples of repeating patterns. Paolucci and Wessels (2017) investigated prospective teachers' capacity to create mathematical modeling problems for grades one to three.

Finally, when planning and implementing mathematical activities, it is important to consider students' conceptions, strategies, developmental trajectories, skills, and common errors (Tanase & Wang, 2013). Although the mathematical content of early childhood includes several domains, this line of study was pursued mostly regarding knowledge of students' number conceptions and strategies. For example, preschool teachers were found to overestimate children's ability to verbally count to 30 and underestimate children's ability to say what number comes right after six (Tsamir et al., 2014).

### *3.5.3 Affective issues related to teaching mathematics during the early years*

Teachers' beliefs and attitudes towards teaching mathematics in early childhood were also investigated. Regarding the relevance of mathematics to preschool, studies found that prospective and practicing preschool teachers may hold negative attitudes, and believe that engaging in mathematics is less important than engaging in language and arts. However, with further education, these beliefs become more positive (Sumpter, 2020). On the other hand, other studies found that practicing kindergarten teachers do recognize the importance of learning mathematics in kindergarten (Benz, 2012) and engage children with mathematics during everyday situations. Thus, we see a connection between beliefs and practice. Regarding appropriate mathematical content, kindergarten teachers mostly consider counting as very relevant (Cross Francis, 2015), and more important than geometry, measurement (Benz, 2012). Additional studies investigated teachers' beliefs related to the nature of mathematics (Dunekacke et al., 2016; Jenßen et al., 2022) finding that such beliefs may be divided into three sub-constructs: a static orientation of mathematics in which mathematics is seen as a clear system of rules, a processes orientation, and an application orientation. The last two orientations view mathematics as dynamic in nature.

Concerning pedagogical mathematical beliefs, teachers stress children's need to use their bodies as tools for learning mathematics, for example by climbing up and down to feel differences in height (Franzén, 2014). Teachers also believe that it is essential for children to be active learners (e.g., Benz, 2012) and that the teacher's roles are to ask questions (Cross Francis, 2015), instill curiosity, and encourage children to think by themselves (Li et al., 2019). Preschool teachers, more than lower elementary school teachers, believe that one way to encourage thinking and increase interest in mathematics learning is by integrating children's literature into mathematics education (Can & Durmaz, 2023). Lower elementary school teachers believe that students need to learn perseverance in the face of problems they cannot immediately

solve (Russo et al., 2020). As with knowledge, PD can affect teachers' beliefs (Polly et al., 2018).

Self-related beliefs, such as confidence, motivation, anxiety, self-concept, and self-efficacy were also investigated. Ren and Smith (2018) found links between teachers' contextual factors, such as professional backgrounds, and teachers' confidence in learning mathematics, mathematics anxiety, and motivation to learn mathematics. For example, higher mathematics knowledge for teaching was associated with lower mathematics anxiety. Mathematics anxiety may also cause teachers to avoid mathematics-related courses, even when those courses are geared for early childhood teachers (Theil & Jenssen, 2018).

Theil and Jenssen (2018) and Opperman et al. (2016) investigated preschool teachers' mathematical self-efficacy, that is, their confidence to solve mathematical problems. In general, teachers' mathematical self-efficacy was above the theoretical mean, while the self-concept was below the theoretical mean. Investigating prospective preschool teachers' mathematics teaching self-efficacy (i.e., their belief in their ability to teach mathematics), Sancar-Tokmak (2015) found a significant increase in participants' mathematics teaching efficacy at the end of a PD program. Several studies investigated preschool teachers' self-efficacy related to specific mathematical content, such as geometry or patterning, as well as to specific pedagogical tasks (e.g., Tsamir et al., 2013).

Many educators agree that preschool teachers' knowledge and beliefs are related. Specifically, Gasteiger and Benz (2018) pointed out that how teachers use their knowledge and skills can be influenced by their beliefs, attitudes, and motivation. Mathematical PCK and the application-related orientation of mathematics (i.e., mathematics is applied in real life situations) can predict noticing skills (Dunekacke et al., 2016). In another study, it was found that higher knowledge was associated with more positive attitudes and higher levels of student-centered beliefs (Ren & Smith, 2018). It could also be that mathematical beliefs impact on teachers' acquisition of mathematical knowledge for teaching. Finally, a longitudinal study covering the transition period between training and becoming a teacher, revealed that while knowledge increases over time, most beliefs do not change (Jenßen et al., 2022).

The relation between self-beliefs and knowledge was also theorized and investigated. Opperman et al. (2016) hypothesized that preschool teachers' mathematical content knowledge and their mathematical self-efficacy and self-concept are interrelated and that together they would affect preschool teachers' sensitivity to mathematics in play-based situations. Their study confirmed that mathematical content knowledge predicted sensitivity to mathematics in children's play. However, mathematical ability beliefs were found to serve as a filter. Other studies investigated if preschool

teachers' self-efficacy beliefs were in line with their actual knowledge (Tsamir et al., 2014).

### ***3.5.4 Professional development***

When surveying studies related to the mathematics education of early childhood teachers, few studies related specifically to the preparation of prospective teachers to teach mathematics in preschool. One exception is Olfos et al. (2022) who pondered the difficulty of bridging theory with practice for future preschool teachers. They proposed a teacher training device called the Scaffolding System, which included two components: conceptual content for teaching mathematics to young children (e.g., counting, number composition and decomposition), and teacher training strategies such as video analysis and Lesson Study. Their study of 170 third-year early childhood education students in Chile found that the connection between theory and practice was felt most in the process of lesson preparation.

Most studies investigated PD for practicing teachers, which at times included in the same program, or in a parallel program, prospective teachers (e.g., Wilson et al., 2013). In general, papers surveyed for this study focused on promoting teachers' knowledge of their young students' mathematical thinking. Some programs centered on specific mathematical content, such as promoting teachers' knowledge of students' number conceptions and counting skills (Polly et al., 2018; Tsamir et al., 2014) or increasing teachers' appreciation for children's capacities to learn geometry (Moss et al., 2015). In general, however, the main message of these papers was the importance of increasing teachers' awareness of students' thinking, along with helping teachers develop and use tools to better understand children's engagement with mathematics.

Of course, the aim of understanding children's thinking is to offer children appropriate opportunities for engaging with mathematics. Towards this aim, a recent study (Wullschleger et al., 2023) compared the effectiveness of two programs for preschool teachers, one focused on teacher-child interactions (micro-adaptive learning) and the other focused on planning, preparation, and reflection (macro-adaptive learning). Both programs had a small positive effect on the issues it was designed to improve. The authors concluded that the two types of adaptive support are different and thus require different professional development courses for each.

Different programs used different methods to increase teachers' knowledge of their students and how to interact with young children and mathematics, but nearly all had some practical element. Many programs encouraged teachers to engage children in their preschool classes with activities, usually, but not always, developed during the program, video these encounters, and then reflect on them (Gasteiger & Benz, 2018; Tsamir, et al., 2014; Wilson et al., 2013). Other studies employed video examples (Cross Francis, 2015; Ertle et al., 2016), role play (Wullschleger et al., 2023), or

made use of learning trajectories to support teachers' making sense of students' thinking (Wilson et al., 2013). Several researchers suggested employing the clinical interview method to foster a deeper understanding of children's thinking, to carry out formative assessment, and to plan further instruction (Heng & Sudarshan, 2013; Ertle et al., 2016; Polly et al., 2018).

### ***3.5.5 Concluding remarks***

A common thread running throughout this part of the survey is the emphasis on children. More studies of teachers' knowledge focused on teachers' PCK than on their SMK, and within PCK, research focused on coming to know young students as mathematics learners. Studies of teachers' beliefs investigated beliefs regarding the relevance of mathematics for young children, and what is appropriate mathematics for children. Finally, many PD programs focused on enhancing teachers' knowledge of children's mathematical abilities and reasoning.

This review also highlighted some gaps. Few studies (e.g., McGarvey, 2012; Moss et al. 2015; Tsamir et al., 2015) focused on preschool teachers' SMK. Those that did, showed teachers to be more knowledgeable in some areas than in others. Further research could help teacher educators plan for professional development in additional content domains, such as data representation and measurement. One challenge of professional development is scaling up. Another area in need of research is teachers' knowledge and beliefs related to the use of technology in preschool mathematics. Finally, few studies specifically investigated interventions for prospective preschool teachers (Olfos et al., 2022). This is an important area of research that could help us improve mathematics education for prospective preschool teachers, increasing their knowledge, along with their self-efficacy and motivation, to engage their young students with mathematics.

## **4. Conclusion**

In the past few years, we gained considerable knowledge about the learning and teaching of mathematics in early childhood across the five themes that we identified in our survey.

Regarding the mathematics observed in children, based on the content-related themes of the review, our findings demonstrated that the strongest emphasis on research is in number sense and development. Papers examined children's competences in various aspects of number development, including counting, approximate number system, SFON, and proposed and evaluated strategies to enhance children's numerical knowledge and skills. A smaller amount of research focused on geometry education in the early years. Within this domain, much research attention is given to the embodied, spatial and multimodal approaches in early

geometry, which were found to play a crucial role in children's geometrical learning and thinking.

Papers on other content domains investigated competences in relation to patterns, measurement, spatial thinking, reasoning and data modeling. A greater amount of this research focused on spatial thinking and patterns which provided evidence for the links between children's competences in each of these domains with their abilities in other mathematical contents.

The reviewed literature of the technology theme indicated that technology in early mathematics takes different forms and has various design features, which can create different learning experiences of mathematics for young children compared to the use of more traditional methods, and can support children's learning and enhance their dispositions towards mathematics. Of note is that the main mathematical focus of the studies on technological environments that were analyzed has been number sense.

A considerable number of publications in ECME focused on issues related to EC teachers. Greater emphasis was given on their PCK and specifically with respect to children's mathematical thinking and learning rather than their SMK. Many studies focused on teachers' beliefs regarding the relevance of mathematics for children, and on teaching approaches of mathematics in the early years. Professional development programs in various studies mainly aimed to increase teachers' knowledge of children's mathematical thinking. A number of papers pointed to the links between teachers' knowledge, beliefs and professional development.

Overall, we know much more than a decade ago about what mathematics children know and (can) learn before or at the beginning of formal education, how beginning learners of mathematics learn mathematics and develop their mathematics skills, how to improve and enhance early mathematics learning and stimulate the development of children's mathematical competences and also on teachers' knowledge, acts and beliefs related to early years mathematics. However, there is much more to learn.

We expect greater research attention on assessing and developing children's competences in content domains beyond early numeracy, including geometry, spatial reasoning, pattern and structure, measurement, statistical reasoning, functional thinking. For example, the contribution of cognitive skills to children's learning in these mathematical domains is an underinvestigated issue which needs further consideration by ECME research. Substantial growth of research on the aforementioned mathematical content domains would generate new knowledge and improve existing knowledge which in turn would contribute to the promotion of these mathematical content strands in the curricula and teachers' education. Furthermore, young children have an informal knowledge of mathematics that is

broad, rich and complex, as they engage in mathematical thinking and reasoning in various contexts, in which they explore patterns, spatial relations, compare magnitudes and so on (Seo & Ginsburg, 2004). Thus, from a practical point of view, considering that the possible knowledge gaps in children are to a large extent due to the absence of links between informal knowledge and school mathematics (Sarama & Clements, 2009), it is likely that ECME which promotes concepts and skills from various mathematical domains would address these gaps.

Our work indicates that, with respect to children's age, the focus of ECME research has been on kindergarten, prekindergarten and early primary school years. Considering that children begin to possess and develop mathematical abilities from their infancy, it is likely that various mathematical competences emerge and embed earlier than has been suggested by existing research. Thus, we hope to see further and deeper investigations of a broader range of mathematical skills (beyond numeracy) and development of children under four years of age, using appropriate research designs and procedures. More research is also needed on the learning opportunities in mathematics offered to toddlers and infants and on developing early childhood educators' knowledge about this age group of children as mathematics learners.

Furthermore, we expect to see continued growth in research on digital tools and particularly on how technology can be designed and used in early childhood settings to enhance or support children's learning in different content domains and on how to empower teachers in effectively using technology in early childhood mathematics.

Given the importance of embodied cognition in mathematics and based on the findings of our review on embodied learning in certain themes (e.g., geometry education, technology), it is pertinent to see more research on this topic focusing on how to offer children more opportunities to engage in embodied ways of mathematical thinking and learning (with or without the use of technology) in the classroom and the role of the teachers and teaching practices in this in different mathematical content domains. Play (either adult-initiated or child-initiated) has been the focus of papers across all the themes of this review. Many of these studies provided evidence for the benefits of play in children's mathematical development. This finding as well as the imperative role to play in children's lives highlights the need to be studied more systematically and in more depth in future early childhood mathematics research. What matters in supporting children's learning in mathematics seems to be the quality rather than the quantity of play. Future research is expected to focus on the mathematics that play stimulates in children, the qualities of play that foster children's mathematics learning, how these qualities vary in different contexts and the teachers' role in using play to support children's mathematical learning and development.

Finally, because of the broad scope of ECME research, the present survey, despite its comprehensive character, could not address all the aspects of this rich and dynamic field of study. Drawing on our research efforts, several key themes have emerged that warrant more systematic exploration in future research reviews within the field of early childhood mathematics education (ECME). These include the impact of contexts beyond the school environment, such as the home setting; the role of young children's emotional characteristics, like self-efficacy beliefs and spatial anxiety; and the integration of mathematics with other subjects like music and art, influencing children's mathematical learning and developmental pathways.

## **Bibliography**

ASAKAWA, A., MURAKAMI, T., & SUGIMURA, S. (2019). Effect of fine motor skills training on arithmetical ability in children. *European Journal of Developmental Psychology, 16*(3), 290-301.

AUNIO, P., & MONONEN, R. (2018). The effects of educational computer game on low-performing children's early numeracy skills—an intervention study in a preschool setting. *European Journal of Special Needs Education, 33*(5), 677-691.

AUNIO, P., HEISKARI, P., VAN LUIT, J. E., & VUORIO, J. M. (2015). The development of early numeracy skills in kindergarten in low-, average-and high-performance groups. *Journal of Early Childhood Research, 13*(1), 3-16.

AXELSSON, A., & ANDERSSON, R. (2016). Scaffolding executive function capabilities via play-&-learn software for preschoolers. *Journal of Educational Psychology, 108*(7), 969-981.

BACCAGLINI-FRANK, A., & MARACCI, M. (2015). Multi-Touch Technology and Preschoolers' Development of Number-Sense. *Digital Experiences in Mathematics Education, 1*, 7-27.

BACCAGLINI-FRANK, A., CAROTENUTO, G., & SINCLAIR, N. (2020). Eliciting preschoolers' number abilities using open, multi-touch environments. *ZDM Mathematics Education, 52*, 779-791.

BÄCKMAN K. (2016). Children's play as a starting point for teaching shapes and patterns in the preschool. In T. Meaney, O. Helenius, M. Johansson, T. Lange & Wernberg A. (Eds.), *Mathematics Education in the Early Years* (pp. 223-234). Springer.

BAKKER, M., VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M., & ROBITZSCH, A. (2014). First-graders' knowledge of multiplicative reasoning before formal instruction in this domain. *Contemporary Educational Psychology, 39*(1), 59-73.

- BAKOS, S., & PIMM, D. (2020). Beginning to Multiply (with) Dynamic Digits: Fingers as Physical–Digital Hybrids. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 6, 145-165.
- BAROODY, A. J., PURPURA, D. J., EILAND, M. D., & REID, E. E. (2014). Fostering first- graders' fluency with basic subtraction and larger addition combinations via computer-assisted instruction. *Cognition and Instruction*, 32, 159-197.
- BARTOLINI BUSSI, M.G., & BACCAGLINI-FRANK, A. (2015). Geometry in early years: sowing seeds for a mathematical definition of squares and rectangles. *ZDM Mathematics Education*, 47, 391-405.
- BATCHELOR, S., INGLIS, M., & GILMORE, C. (2015). Spontaneous focussing on numerosity and the arithmetic advantage. *Learning and Instruction*, 40, 79-88.
- BAY-WILLIAMS, J. M., & KLING, G. (2014). Enriching Addition and Subtraction Fact Mastery Through Gam. *Teaching Children Mathematics*, 21(4), 238-247.
- BENZ, C. (2012). Attitudes of kindergarten educators about math. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 33(2), 203-232.
- BENZ, C. (2014). Identifying quantities—Children's Constructions to Compose Collections from Parts or Decompose Collections into Parts. In U. Kortenkamp., B. Brandt, C. Benz, G. Krummheuer, S. Ladel & Vogel R. (Eds.), *Early Mathematics Learning* (pp. 189-203). Springer.
- BENZ, C. (2016). Reflection: An opportunity to address different aspects of professional competencies in mathematics education. In T. Meaney, O. Helenius, M. L. Johansson, T. Lange & A. Wernberg (Eds.), *Mathematics Education in the Early Years: Results from the POEM2 Conference, 2014* (pp. 419-435). Springer.
- BICKNELL, B., YOUNG-LOVERIDGE, J., & NGUYEN, N. (2016). A design study to develop young children's understanding of multiplication and division. *Mathematics Education Research Journal*, 28, 567-583.
- BJÖRKLUND, C. (2012). What counts when working with mathematics in a toddler-group? *Early Years*, 32(2), 215-228.
- BJÖRKLUND, C., & PRAMLING, N. (2014). Pattern discernment and pseudo-conceptual development in early childhood mathematics education. *International Journal of Early Years Education*, 22(1), 89-104.
- BJÖRKLUND, C., VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M., & KULLBERG, A. (2020). Research on early childhood mathematics teaching and learning. *ZDM Mathematics Education*, 52, 607-619.
- BLANTON, M., BRIZUELA, B. M., GARDINER, A. M., SAWREY, K., & NEWMAN-OWENS, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing

functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(5), 511-558.

BONNY, J. W., & LOURENCO, S. F. (2013). The approximate number system and its relation to early math achievement: Evidence from the preschool years. *Journal of Experimental Child Psychology*, 114, 375-388.

BOURBOUR, M., & MASOUMI, D. (2017). Practise what you preach: the Interactive Whiteboard in preschool mathematics education. *Early Child Development and Care*, 187(11), 1819-1832.

BREIVE, S. (2022). Abstraction and embodiment: exploring the process of grasping a general. *Educational Studies in Mathematics*, 110(2), 313-329.

BROWN, C.P., & ENGLEHARDT, J. (2017). Preservice teachers reconfiguring teaching young children in a high-stakes early education context through the use of ipads: a case study. *Early Education and Development*, 28(8), 976-995.

BRUCE, C. D., & HAWES, Z. (2015). The role of 2D and 3D mental rotation in mathematics for young children: what is it? Why does it matter? And what can we do about it?. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 331-343.

BRUCE, C. D., DAVIS, B., SINCLAIR, N., MCGARVEY, L., HALLOWELL, D., DREFS, M., FRANCIS, K., HAWES, Z., MOSS, J., MULLIGAN, J., OKAMOTO, Y., WHITELEY, W., & WOOLCOTT, G. (2017). Understanding gaps in research networks: using “spatial reasoning” as a window into the importance of networked educational research. *Educational Studies in Mathematics*, 95, 143-161.

BULLOCK, E.P., SHUMWAY, J.F., WATTS, C.M., & MOYER-PACKENHAM, P.S. (2017). Affordance Access Matters: Preschool Children’s Learning Progressions While Interacting with Touch-Screen Mathematics Apps. *Technology Knowledge and Learning*, 22, 485–511.

BUSSI, M. G. B., & BACCAGLINI-FRANK, A. (2015). Geometry in early years: sowing seeds for a mathematical definition of squares and rectangles. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 391-405.

CALERO, C. I., SHALOM, D. E., SPELKE, E. S., & SIGMAN, M. (2019). Language, gesture, and judgment: Children’s paths to abstract geometry. *Journal of Experimental Child Psychology* 177, 70–85.

CALVERT, S. L., PUTNAM, M. M., AGUIAR, N. R., RYAN, R. M., WRIGHT, C. A., LIU, Y. H. A., & BARBA, E. (2020). Young children’s mathematical learning from intelligent characters. *Child Development*, 91(5), 1491-1508.

- CAN, D., & DURMAZ, B. (2023). An analysis of teachers' beliefs about the integration of children's literature into the mathematics education. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 21(2), 489-512.
- CANTURK-GUNHAN, B., & CETINGOZ, D. (2013). An examination of preschool prospective teachers' subject matter knowledge and pedagogical content knowledge on basic geometric shapes in Turkey. *Educational Research and Reviews*, 8(3), 93-103.
- CASEY, B. M., DEARING, E., DULANEY, A., HEYMAN, M., & SPRINGER, R. (2014). Young girls' spatial and arithmetic performance: The mediating role of maternal supportive interactions during joint spatial problem solving. *Early Childhood Research Quarterly*, 29(4), 636-648.
- CASEY, B. M., LOMBARDI, C. M., THOMSON, D., NGUYEN, H. N., PAZ, M., THERIAULT, C. A., & DEARING, E. (2018). Maternal Support of Children's Early Numerical Concept Learning Predicts Preschool and First-Grade Math Achievement. *Child Development*, 89(1), 156-173.
- CHENG, Y. L., & MIX, K. S. (2014). Spatial training improves children's mathematics ability. *Journal of Cognition and Development*, 15(1), 2-11.
- CHU, F. W., VANMARIE, K., & GEARY, D. C. (2015). Early numerical foundation of young children's mathematical development. *Journal of Experimental Child Psychology*, 132, 205-212.
- CLEMENTS, D.H., SARAMA, J., VAN DINE, D.W., BARRETT, J. E., CULLEN, C. J., HUDYMA, A., DOLGIN, R., CULLEN, A.L., & EAMES, C.L. (2018). Evaluation of three interventions teaching area measurement as spatial structuring to young children. *Journal of Mathematical Behavior*, 50, 23-41.
- CLEMENTS, D. H., SARAMA, J., BAROODY, A. J., & JOSWICK, C. (2020). Efficacy of a learning trajectory approach compared to a teach-to-target approach for addition and subtraction. *ZDM Mathematics Education*, 52, 637-648.
- COLLINS, M. A. & LASKI, E.V. (2015). Preschoolers' strategies for solving visual pattern tasks. *Early Childhood Research Quarterly*, 32, 204-214.
- CROSS FRANCIS, D. I. (2015). Dispelling the notion of inconsistencies in teachers' mathematics beliefs and practices: A 3-year case study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18(2), 173-201.
- CUI, J., GEORGIU, G. K., ZHANG, Y., LI, Y., SHU, H., & ZHOU, X. (2017). Examining relationship between rapid automatized naming and arithmetic fluency in Chinese kindergarten children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 154, 146-163.

- DAĞLI, Ü. Y., & HALAT, E. (2016). Young Children's Conceptual Understanding of Triangle. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(2), 189-202.
- DE HEVIA, M. D., IZARD, V., COUBART, A., SPELKE, E. S. & STRERI, A. (2014). Representations of space time and number in neonates. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 111(13), 4809-4813.
- DEHAENE-LAMBERTZ, G., & SPELKE, E. S. (2015). The infancy of the human brain. *Neuron*, 88(1), 93-109.
- DEL ZOZZO, A., & SANTI, G. (2023). Transitions Between Domains of Activity as "Domestications of the Eye" for the Learning of Mathematics with GGBot. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 1-28.
- DI LIETO, M. C., INGUAGGIATO, E., CASTRO, E., CECCHI, F., CIONI, G., DELL'OMO, M., LASCHI, C., PECINI, C., SANTERINI, G., SGANDURRA, G., & DARIO, P. (2017). Educational Robotics intervention on Executive Functions in preschool children: A pilot study. *Computers in Human Behavior*, 71, 16-23.
- DINDYAL, J. (2015). Geometry in the early years: a commentary. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 519-529.
- DONG, C. (2018). Preschool teachers' perceptions and pedagogical practices: young children's use of ICT. *Early Child Development and Care*, 188(6), 635-650.
- DUNCAN, G. J., DOWSETT, C. J., CLAESSENS, A., MAGNUSON, K., HUSTON, A. C., KLEBANOV, P., PAGANI, L., FEINSTEIN, L., ENGEL, M., BROOKS-GUNN, J., SEXTON, H., DUCKWORTH, K., & JAPEL, C. (2007). School readiness and later achievement. *Developmental Psychology*, 43(6), 1428-1446.
- DUNEKACKE, S., JENBEN, L., EILERTS, K., BLÖMKEKE, S. (2016). Epistemological beliefs of prospective preschool teachers and their relation to knowledge, perception, and planning abilities in the field of mathematics: a process model. *ZDM Mathematics Education*, 48, 125-137.
- DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements [Cognitive conditions of learning geometry: Development of visualization, differentiation of reasoning and coordination of their functioning]. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.
- ELIA, I. (2018). Observing the Use of Gestures in Young Children's Geometric Thinking. In I. Elia, J. Mulligan, A. Anderson, A. Baccaglioni-Frank & C. Benz (Eds.), *Contemporary Research and Perspectives on Early Childhood Mathematics Education* (pp. 159-182). Springer.

ELIA, I., MULLIGAN, J., ANDERSON, A., BACCAGLINI-FRANK, A., & BENZ, C. (Eds.). (2018). *Contemporary research and perspectives on early childhood mathematics education*. Springer.

ELIA, I., BACCAGLINI-FRANK, A., LEVENSON, E., MATSUO, N., & FEZA, N. (2021). Survey on Early Childhood Mathematics Education at ICME-14. *European Mathematical Society Magazine*, 120, 59-61.

ELIA, I., GAGATSI, A., & VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (2014). The role of gestures in making connections between space and shape aspects and their verbal representations in the early years: findings from a case study. *Mathematics Education Research Journal*, 26(4), 735-761.

ENGLISH, L.D. & CREVENSTEN, N. (2013), Reconceptualizing Statistical Learning in the Early Years. In L. D. English & J.T. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning* (pp. 67-82). Springer.

ERTLE, B., ROSENFELD, D., PRESSER, A. L., & GOLDSTEIN, M. (2016). Preparing preschool teachers to use and benefit from formative assessment: the Birthday Party Assessment professional development system. *ZDM Mathematics Education*, 48, 977-989.

FEKONJA-PEKLAJ, U., & MARJANOVIĆ-UMEK, L. (2015). Positive and negative aspects of the IWB and tablet computers in the first grade of primary school: a multiple-perspective approach. *Early Child Development and Care*, 185(6), 996-1015.

FERRARA, F., & SAVIOLI, K. (2018). Touching Numbers and Feeling Quantities: Methodological Dimensions of Working with TouchCounts. In N. Calder, K. Larkin, & N. Sinclair (Eds.), *Using Mobile Technologies in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 231-244). Springer.

FISHER, K. R., HIRSH-PASEK, K., NEWCOMBE, N., & GOLINKOFF, R. M. (2013). Taking shape: Supporting preschoolers' acquisition of geometric knowledge through guided play. *Child Development*, 84(6), 1872-1878.

FRANCIS, K., BRUCE, C., DAVIS, B., DREFS, M., HALLOWELL, D., HAWES, Z., MCGARVEY, L., MOSS, J., MULLIGAN, J., OKAMOTO, Y., SINCLAIR, N., WHITELEY, W., & WOOLCOTT, G. (2017). Multidisciplinary perspectives on a video case of children designing and coding for robotics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 17(3), 165-178.

FRANZÉN, K. (2014). Under-threes' mathematical learning – teachers' perspectives. *Early Years*, 34(3), 241-254.

FUCHS, L. S., GEARY, D. C., COMPTON, D. L., FUCHS, D., SCHATTSCHNEIDER, C., HAMLET, CL., DESELMS, J., SEETHALER, P. M., WILSON, J., CRADDOCK, C. F.,

- BRYANT, J. D., LUTHER, K., & CHANGAS, P. (2013). Effects of First-Grade Number Knowledge Tutoring with Contrasting Forms of Practice. *Journal of Educational Psychology, 10*(5), 58-77.
- GAIDOSCHIK, M. (2012). First-graders' development of calculation strategies: How deriving facts helps automatize facts. *Journal für Mathematik-Didaktik, 2*(33), 287-315.
- GASTEIGER, H. & BENZ, C. (2018). Mathematics education competence of professionals in early childhood education: A theory-based competence model. In C. Benz, A. S. Steinweg, H. Gasteiger, P. Schoner, H. Vollmuth & J. Zollner (Eds.), *Mathematics Education in the Early Years: Results from the POEM3 Conference, 2016* (pp. 69-91). Springer.
- GEJARD, G., & MELANDER, H. (2018). Mathematizing in preschool: children's participation in geometrical discourse. *European Early Childhood Education Research Journal, 26*(4), 495-511.
- GOLD, Z. S., ELICKER, J., KELLERMAN, A. M., CHRIST, S., MISHRA, A. A., & HOWE, N. (2021). Engineering play, mathematics, and spatial skills in children with and without disabilities. *Early Education and Development, 32*, 49-65.
- GUSS, S. S., CLEMENTS, D. H., & SARAMA, J. H. (2022). High-quality Early Math: Learning and Teaching with Trajectories and Technologies. In A. Lynn Betts & K-P. Thai (Eds.), *Handbook of Research on Innovative Approaches to Early Childhood Development and School Readiness* (pp. 349-373). IGI Global.
- HALAT, E., & DAĞLI, Ü. Y. (2016). Preschool students' understanding of a geometric shape, the square. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 30*(55), 830-848.
- HALLOWELL, D. A., OKAMOTO, Y., ROMO, L. F., & LA JOY, J. R. (2015). First-graders' spatial-mathematical reasoning about plane and solid shapes and their representations. *ZDM Mathematics Education, 47*(3), 363-375.
- HANNAGAN, T., NIEDER, A., VISWANATHAN, P., & DEHAENE, S. (2017). A random-matrix theory of the number sense. *Philosophical Transactions B, 373*, 20170253.
- HARVEY, H.A., & MILLER, G.E. (2017). Executive Function Skills, Early Mathematics, and Vocabulary in Head Start Preschool Children. *Early Education and Development, 28*(3), 290-307.
- HAWES, Z., LEFEVRE, J. A., XU, C., & BRUCE, C. D. (2015). Mental rotation with tangible three-dimensional objects: A new measure sensitive to developmental differences in 4-to 8-year-old children. *Mind, Brain, and Education, 9*(1), 10-18.

HENG, M. A. & SUDARSHAN, A. (2013). “Bigger number means you plus!” – Teachers learning to use clinical interview to understand students’ mathematical thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 471-485.

HERMAWAN, R. (2021). Development of Music-Based Learning Models to Introduce Letters and Numbers of Early Childhood, *Cakrawala Dini: Jurnal Pendidikan Anak Usia Din*, 12(2), 168-175.

HOLGERSSON, I., BARENDREGT, W., EMANUELSSON, J., OTTOSSON, T., RIETZ LEPPÄNEN, E., & LINDSTRÖM, B. (2016). Fingu – A Game to Support Children’s Development of Arithmetic Competence: Theory, Design and Empirical Research. In P. S. Moyer-Packenham (Ed.), *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives Mathematics Education in the Digital Era* (pp. 123-146). Springer.

HOLMES, W., & DOWKER, A. (2013). Catch Up Numeracy: a targeted intervention for children who are low-attaining in mathematics. *Research in Mathematics Education*, 15(3), 249-265.

HUNDELAND, PS., CARLSEN, M., & ERFJORD, I. (2014). Children’s engagement with mathematics in kindergarten mediated by the use of digital tools. In U. Kortenkamp, B. Brandt, C. Benz, G. Krummheuer, S. Ladel, & R. Vogel (Eds.), *Early mathematics learning Selected Papers of the POEM 2012 Conference* (pp. 207-221). Springer.

HUNTER, J., & MILLER, J. (2022). The use of cultural contexts for patterning tasks: supporting young diverse students to identify structures and generalize. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1349–1362.

İVRENDİ, A. (2016). Investigating kindergartners’ number sense and self-regulation scores in relation to their mathematics and Turkish scores in middle school. *Mathematics Education Research Journal*, 28, 405-420.

JENBEN, L., DUNEKACKE, S., EID, M., SZCZESNY, M., POHLE, L., KOINZER, T., EILERTS, K., & BLÖMEKE, S. (2022). From teacher education to practice: Development of early childhood teachers’ knowledge and beliefs in mathematics. *Teaching and Teacher Education*, 114. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2022.103699>

JIROUT, J. J., & NEWCOMBE, N. S. (2015). Building blocks for developing spatial skills: Evidence from a large, representative US sample. *Psychological Science*, 26(3), 302-310.

JORDAN, N., GLUTTING, J., DYSON, N., HASSINGER-DAS, B. & IRWIN, C. (2012) Building Kindergarteners’ number sense: A randomized controlled study. *Journal of Educational Psychology*, 104(3), 647-660.

- KAGAN, S. L., & ROTH, J. L. (2017). Transforming early childhood systems for future generations: Obligations and opportunities. *International Journal of Early Childhood*, 49, 137-154.
- KALÉNINE, S., CHEAM, C., IZARD, V., & GENTAZ, E. (2013). Adults and 5-year-old children draw rectangles and triangles around a prototype but not in the golden ratio. *British Journal of Psychology*, 104(3), 400-412.
- KAUR, H. (2015). Two aspects of young children's thinking about different types of dynamic triangles: prototypicality and inclusion. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 407-420.
- KAUR, H. (2020). Introducing the concept of angle to young children in a dynamic geometry environment. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(2), 161-182.
- KIDD, J. K., PASNAK, R., GADZICHOWSKI, K. M., GALLINGTON, D. A., MCKNIGHT, P., BOYER, C. E., & CARLSON, A. (2014). Instructing first-grade children on patterning improves reading and mathematics. *Early Education and Development*, 25, 134- 151.
- KIERAN, C., PANG, J.S., SCHIFTER, D., & NG, S.F. (2016). *Early Algebra: Research into its Nature, its Learning and its Teaching*. Springer.
- KOTSOPOULOS, D., MAKOSZ, S., ZAMBRZYCKA, J., & DICKSON, B. A. (2021). Individual differences in young children's visual-spatial abilities. *Early Child Development and Care*, 191(14), 2246-2259.
- KOTSOPOULOS, D., MAKOSZ, S., ZAMBRZYCKA, J., & MCCARTHY, K. (2013). The effects of different pedagogical approaches on the learning of length measurement in kindergarten. *Early Childhood Educational Journal*, 43, 531-539.
- LASKI, E. V., CASEY, B. M., YU, Q., DULANEY, A., HEYMAN, M., & DEARING, E. (2013). Spatial skills as a predictor of first grade girls' use of higher level arithmetic strategies. *Learning and Individual Differences*, 23, 123-130.
- LEE, J. E. (2017). Preschool teachers' pedagogical content knowledge in mathematics. *International Journal of Early Childhood*, 49(2), 229-243.
- LEMBRÉR, D., KACERJA, S., & MEANEY, T. (2018). Preservice teachers recognizing and responding to young children's engagement with mathematics. In C. Benz, A. S. Steinweg, H. Gasteiger, P. Schoner, H. Vollmuth & J. Zollner (Eds.), *Mathematics Education in the Early Years: Results from the POEM3 Conference, 2016* (pp. 27-46). Springer.

- LENZ, D. (2022). The role of variables in relational thinking: an interview study with kindergarten and primary school children. *ZDM Mathematics Education*, 54, 1181-1197.
- LEVENSON, E., TIROSH, D., & TSAMIR, P. (2011). *Preschool geometry: Theory, research and practical perspectives*. Sense Publishers.
- LI, X., MCFADDEN, K., & DEBEY, M. (2019). Is it DAP? American preschool teachers' views on the developmental appropriateness of a preschool math lesson from China. *Early Education and Development*, 30(6), 765-787.
- LINDER, S. M., & SIMPSON, A. (2018). Towards an understanding of early childhood mathematics education: A systematic review of the literature focusing on practicing and prospective teachers. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 19(3), 274-296.
- LÜKEN, M.M.& KAMPMANN, R. (2018). The Influence of Fostering Children's Patterning Abilities on Their Arithmetic Skills in Grade 1. In I. Elia, J. Mulligan, A. Anderson, A. Baccaglioni Frank & C. Benz (Eds.), *Contemporary Research and Perspectives on Early Childhood Mathematics Education* (pp.55-66). Springer.
- MACDONALD, A., & MURPHY, S. (2021). Mathematics education for children under four years of age: A systematic review of the literature. *Early years*, 41(5), 522-539.
- MACDONALD, A., GOFF, W., DOCKETT, S., & PERRY, B. (2016). Mathematics Education in the Early Years. In K. Makar, S. Dole, J. Visnovska, M. Goos, A. Bennison & K. Fry (Eds.), *Research in Mathematics Education in Australasia 2012–2015*. Springer.
- MAGNUSSON, M., & PRAMLING, N. (2018). In 'Numberland': play based pedagogy in response to imaginative numeracy. *International Journal of Early Years Education*, 26(1), 24-41.
- MCCRAY, J. & CHEN, J. (2012). Pedagogical content knowledge for preschool mathematics: Construct validity of a new teacher interview. *Journal of Research in Childhood Education*, 26(3), 291-307.
- MCGARVEY, L. M. (2012). What is a pattern? Criteria used by teachers and young children. *Mathematical Thinking and Learning*, 14, 310-337.
- MCGUIRE, P., HIMOT, B., CLAYTON, G., YOO, M., & LOGUE, M. E. (2021). Booked on math: Developing math concepts in Pre-K classrooms using interactive read-alouds. *Early Childhood Education Journal*, 49, 313-323.
- MILBURNA, T. F., LONIGAN, C. J., DEFLORIO, L., & KLEIND, A. (2019). Dimensionality of preschoolers' informal mathematical abilities. *Early Childhood Research Quarterly*, 47, 487–495.

- MILLER, J. (2019). STEM education in the primary years to support mathematical thinking: using coding to identify mathematical structures and patterns. *ZDM Mathematics Education*, 51, 915–927.
- MÖHRING, W., NEWCOMBE, N., & FRICK, A. (2015). The relation between spatial thinking and proportional reasoning in preschoolers. *Journal of Experimental Child Psychology*, 132, 213–220.
- MOSS, J., HAWES, Z., NAQVI, S., & CASWELL, B. (2015). Adapting Japanese Lesson Study to enhance the teaching and learning of geometry and spatial reasoning in early years classrooms: a case study. *ZDM Mathematics Education*, 47, 377–390.
- MOYER-PACKENHAM, P. S., SHUMWAY, J. F., BULLOCK, E., TUCKER, S. I., ANDERSON-PENCE, K. L., WESTENSKOW, A., BOYER-THURGOOD, J., MAAHS-FLADUNG, C., SYMANZIK, J., MAHAMANE, S., MACDONALD, B., & JORDAN, K. (2015). Young children's learning performance and efficiency when using virtual manipulative mathematics iPad apps. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 34(1), 41–69.
- MOYER-PACKENHAM, P.S. (2016). *International perspectives on teaching and learning mathematics with virtual manipulatives*. Springer.
- MULLIGAN, J., OSLINGTON, G., & ENGLISH, L. (2020). Supporting early mathematical development through a 'pattern and structure' intervention program. *ZDM Mathematics Education*, 52, 663–676.
- MULLIGAN, J.T. & MITCHELMORE, M.C. (2013). Early Awareness of Mathematical Pattern and Structure. In L. D. English & J.T. Mulligan (Eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning* (pp. 29–47). Springer.
- MUSHIN, I., GARDNER, R., & MUNRO, J. (2013). Language matters in demonstrations of understanding in early years mathematics assessment. *Mathematics Education Research Journal*, 25, 415–433.
- NAKAWA, N. (2020). Proposing and modifying guided play on shapes in mathematics teaching and learning for Zambian preschool children. *South African Journal of Childhood Education*, 10(1), 1–11.
- NG, O. & SINCLAIR, N. (2015). Young children reasoning about symmetry in a dynamic geometry environment. *ZDM Mathematics Education*, 47, 421–434.
- NURNBERGER-HAAG, J. (2017). A cautionary tale: How children's books (mis)teach shapes. *Early Education and Development*, 28(4), 415–440.
- OBERSTEINER, A., BERNHARD, M., & REISS, K. (2015). Primary school children's strategies in solving contingency table problems: The role of intuition and inhibition. *ZDM Mathematics Education*, 47, 825–836.

- OLFOS, R., VERGARA-GÓMEZ, A., ESTRELLA, S., & GOLDRINE, T. (2022). Impact of a theory-practice connecting scaffolding system on the ability of preschool teachers-in-training to teach mathematics. *Teaching and Teacher Education, 120*. 10.1016/j.tate.2022.103887
- OPPERMANN, E., ANDERS, Y., & HACHFELD, A. (2016). The influence of preschool teachers' content knowledge and mathematical ability beliefs on their sensitivity to mathematics in children's play. *Teaching and Teacher Education, 58*, 174-184.
- PAOLUCCI, C. & WESSELS, H. (2017). An examination of preservice teachers' capacity to create mathematical modeling problems for children. *Journal of Teacher Education, 68*(3), 330-344.
- PAPARISTODEMOU, E., POTARI, D., & PITTA-PANTAZI, D. (2014). Prospective teachers' attention on geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics, 86*, 1-18.
- PAZOUKI, T., CORNU V., SONNLEITNER, P., SCHILTZ, C., FISCHBACH, A., & MARTIN, R. (2018). MaGrid: A Language-Neutral Early Mathematical Training and Learning Application. *International Journal of Emerging Technologies in Learning (Online), 13*(8), 4-18.
- PENG, P., YANG, X., & MENG, X. (2017). The relation between approximate number system and early arithmetic: The mediation role of numerical knowledge. *Journal of Experimental Child Psychology, 157*, 111-124.
- POLLY, D., WANG, C., MARTIN, C., LAMBERT, R., PUGALEE, D., & MIDDLETON, C. (2018). The influence of mathematics professional development, school-level, and teacher-level variables on primary students' mathematics achievement. *Early Childhood Education Journal, 46*, 31-45.
- POLOTSKAIA, E., & SAVARD, A. (2018). Using the Relational Paradigm: effects on pupils' reasoning in solving additive word problems. *Research in Mathematics Education, 20*(1), 70-90.
- RAMANI, G. B., & SIEGLER, R. S. (2011). Reducing the gap in numerical knowledge between low-and middle-income preschoolers. *Journal of Applied Developmental Psychology, 32*(3), 146-159.
- RATHÉ, S., TORBEYNS, J., DE SMEDT, B., HANNULA-SORMUNEN, M. M., & VERSCHAFFEL, L. (2018). Verbal and action-based measures of kindergartners' SFON and their associations with number-related utterances during picture book reading. *British Journal of Educational Psychology, 88*(4), 550-565.
- REIKERÅS, E., LØGE, I. K., & KNIVSBERG, A. M. (2012). The mathematical competencies of toddlers expressed in their play and daily life activities in Norwegian kindergartens. *International Journal of Early Childhood, 44*(1), 91-114.

- REN, L. & SMITH, W. M. (2018). Teacher characteristics and contextual factors: links to early primary teachers' mathematical beliefs. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21, 321-350.
- RESNICK, I. (2020). Visual-spatial ability has been linked to both mathematical ability and future. *Mathematics Education Research Journal*, 32, 171–174.
- RESNICK, I., VERDINE, B. N., GOLINKOFF, R., & HIRSH-PASEK, K. (2016). Geometric toys in the attic? A corpus analysis of early exposure to geometric shapes. *Early Childhood Research Quarterly*, 36, 358-365.
- RITTLE-JOHNSON, B., FYFE, E. R., HOFER, K. G., & FARRAN, D. C. (2017). Early Math Trajectories: Low-Income Children's Mathematics Knowledge From Ages 4 to 11. *Child Development*, 88(5), 1727-1742.
- RITTLE-JOHNSON, B., FYFE, E. R., LOEHR, A. M., & MILLER, M. R. (2015). Beyond numeracy in preschool: Adding patterns to the equation. *Early Childhood Research Quarterly*, 31, 101-112.
- ROBERTSON, E. K., SHI, R., & MELANÇON, A. (2012). Toddlers use the number feature in determiners during online noun comprehension. *Child development*, 83(6), 2007-2018.
- RODNEY, S. (2019). "The Other Ten": Order Irrelevance and Auden's Sense of Number. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 5, 166-177.
- ROTHSCHILD, M., & WILLIAMS, C.C. (2015). Apples and coconuts: Young children 'kinecting' with mathematics and Sesame Street. In T. Lowrie & R. Jorgensen (Eds.), *Digital games and mathematical learning Potential, promises and pitfalls* (pp. 123-141). Springer.
- RUSSO, J., BOBIS, J., DOWNTON, A., HUGHES, S., LIVY, S., MCCORMICK, M., & SULLIVAN, P. (2020). Elementary teachers' beliefs on the role of struggle in the mathematics classroom. *The Journal of Mathematical Behavior*, 58. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100774>
- SANCAR-TOKMAK, H. (2015). The effect of curriculum-generated play instruction on the mathematics teaching efficacies of early childhood education pre-service teachers. *European Early Childhood Education Research Journal*, 23(1), 5-20.
- SARAMA, J., & CLEMENTS, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge.
- SARAMA, J., CLEMENTS, D. H., BARRETT, J.E., CULLEN, C. J., HUDYMA, A., & VANEGAS, Y. (2021). Length measurement in the early years: teaching and learning with learning trajectories. *Mathematical Thinking and Learning*, 24(4), 1-24.

- SASANGUIE, D., DEFEVER, E., MAERTENS, B., & REYNVOET, B. (2014). The approximate number system is not predictive for symbolic number processing in kindergarteners. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 67(2), 271-280.
- SAYERS J., ANDREWS P., & BJÖRKLUND BOISTRUP L. (2016). The role of conceptual subitising in the development of foundational number sense. In T. Meaney, O. Helenius, M. Johansson, T. Lange & A. Wernberg (Eds.), *Mathematics Education in the Early Years* (pp. 371-394). Springer.
- SCHACK, E. FISHER, M., THOMAS, J., EISENHARDT, S., TASSELL, J., & YODER, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16, 379-397.
- SCHÖNER P., & BENZ C. (2018). Visual Structuring Processes of Children When Determining the Cardinality of Sets: The Contribution of Eye-Tracking. In C. Benz, A. Steinweg, H. Gasteiger, P. Schöner, H. Vollmuth & Zöllner J. (Eds.), *Mathematics Education in the Early Years* (pp. 123-143). Springer.
- SEDAGHATJOU, M., & CAMPBELL, S.R. (2017). Exploring cardinality in the era of touchscreen-based technology. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 48(8), 1225-1239.
- SEDAGHATJOU, M., & RODNEY, S. (2018). Collaborative Engagement Through Mobile Technology in Mathematics Learning. In N. Calder, K. Larkin, & N. Sinclair (Eds.), *Using Mobile Technologies in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 117-128). Springer.
- SEGBERS, E., KLEEMANS, T., & VERHOEVEN, L. (2015). Role of parent literacy and numeracy expectations and activities in predicting early numeracy skills. *Mathematical Thinking and Learning*, 17(2-3), 219-236.
- SELLA, F., BERTELETTI, I., LUCANGELI, D., & ZORZI, M. (2017). Preschool children use space, rather than counting, to infer the numerical magnitude of digits: Evidence for a spatial mapping principle. *Cognition*, 158, 56-67.
- SELLA, F., TRESSOLDI, P., LUCANGELI, D., & ZORZI, M. (2016). Training numerical skills with the adaptive videogame "The Number Race": A randomized controlled trial on preschoolers. *Trends in Neuroscience and Education*, 5(1), 20-29.
- SEO, K. H., & GINSBURG, H. P. (2004). What is developmentally appropriate in early childhood mathematics education? Lessons from new research. In D.H. Clements, J. Sarama & A.-M. DiBiase (Eds.), *Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education* (pp. 91-104). Laurence Erlbaum Associates.

SINCLAIR, N., & HEYD-METZUYANIM, E. (2014). Learning Number with TouchCounts: The Role of Emotions and the Body in Mathematical Communication. *Technology, Knowledge and Learning*, 19, 81–99.

SINCLAIR, N., BARTOLINI BUSSI, M. G. B., DE VILLIERS, M., JONES, K., KORTENKAMP, U., LEUNG, A., & OWENS, K. (2016). Recent research on geometry education: An ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education*, 48(5), 691-719.

SINCLAIR, N., CHORNEY, S., & RODNEY, S. (2016). Rhythm in number: exploring the affective, social and mathematical dimensions of using TouchCounts. *Mathematics Education Research Journal*, 28(1), 31-51.

SOURY-LAVERGNE, S., & MASCHIETTO, M. (2015). Articulation of spatial and geometrical knowledge in problem solving with technology at primary school. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 435-449.

SPAULL, N., PAMPALLIS, I., ADINGTON, C., SAPIRE, I., & ISAAC, P. (2022). Not adding it up: Grade 1 mathematics outcomes in the Eastern Cape and Limpopo. In H. Venkat & N. Roberts (Eds.), *Early Grade Mathematics in South Africa*. Oxford University Press.

STACY, S.T., CARTWRIGHT, M., ARWOOD, Z., CANFIELD, J.P., & KLOOS, H. (2017). Addressing the math-practice gap in elementary school: are tablets a feasible tool for informal math practice? *Frontiers in Psychology*, 8, 179.

SULLIVAN, J., & BARNER, D. (2014). Inference and association in children's early numerical estimation. *Child Development*, 85(4), 1740-1755.

SUMPTER, L. (2020). Preschool educators' emotional directions towards mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20, 1169-1198.

SUPPLY, A., VAN DOOREN, W., & ONGHENA, P. (2021). Can we count on early numerical abilities for early probabilistic reasoning abilities? *Mathematical Thinking and Learning*, 24(1), 19-37.

SWOBODA, E., & VIGHI, P. (2016). *Early Geometrical Thinking in the Environment of Patterns, Mosaics and Isometries*. Springer.

SZILÁGYI, J., CLEMENT, D. H., & SARAMA, J. (2013). Young children's understandings of length measurement: evaluating a learning trajectory. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(3), 581-620.

TAGUMA, M., LITJENS, I., & MAKOWIECKI, K. (2012). *Quality matters in early childhood education and care: Finland*. OECD Publishing.

TANASE, M., & WANG, J. (2013). Knowing students as mathematics learners and teaching numbers 10-100: A case study of four 1st grade teachers from Romania. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32, 564-576.

THEIL, O., & JENSSEN, L. (2018). Affective-motivational aspects of early childhood teacher students' knowledge about mathematics. *European Early Childhood Education Research Journal*, 26(4), 512-534.

THOM, J.S. (2018). (Re)(con)figuring Space: Three Children's Geometric Reasonings. In I. Elia, J. Mulligan, A. Anderson, A. Baccaglioni-Frank, & C. Benz (Eds.), *Contemporary Research and Perspectives on Early Childhood Mathematics Education* (pp. 131-158). Springer.

THOM, J. S., & MCGARVEY, L. M. (2015). The act and artifact of drawing(s): observing geometric thinking with, in, and through children's drawings. *ZDM Mathematics Education*, 47(3), 465-481.

THOMAS, D. R. (2006). A General Inductive Approach for Analyzing Qualitative Evaluation Data. *American Journal of Evaluation*, 27(2), 237-246.

TIROSH, D., TSAMIR, P., LEVENSON, E., BARKAI, R. & TABACH, M. (2019). Preschool teachers' knowledge of repeating patterns: Focusing on structure and the unit of repeat. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22(3), 305-325.

TORBEYNS, J., BOJORQUE, G., VAN HOOFF, J., VAN NIJLEN, D., & VERSCHAFFEL, L. (2018). Unique contribution of Ecuadorian kindergartners' spontaneous focusing on numerosity to their early numerical abilities. *British Journal of Developmental Psychology*, 36(2), 299-312.

TORBEYNS, J., VERBRUGGEN, S., & DEPAEPE, F. (2020). Pedagogical content knowledge in preservice preschool teachers and its association with opportunities to learn during teacher training. *ZDM Mathematics Education*, 52, 269-280.

TRGALOVÁ, J., & ROUSSON, L. (2017). Model of appropriation of a curricular resource: a case of a digital game for the teaching of enumeration skills in kindergarten. *ZDM Mathematics Education*, 49, 769-784.

TSAMIR, P., TIROSH, D., LEVENSON, E. S., BARKAI, R., & TABACH, M. (2017). Repeating patterns in kindergarten: findings from children's enactments of two activities. *Educational Studies in Mathematics*, 96, 83-99.

TSAMIR, P., TIROSH, D., LEVENSON, E., BARKAI, R., & TABACH, M. (2015). Early-years teachers' concept images and concept definitions: triangles, circles, and cylinders. *ZDM Mathematics Education*, 47, 497-509.

- TSAMIR, P., TIROSH, D., LEVENSON, E., TABACH, M., & BARKAI, R. (2013). Developing preschool teachers' knowledge of students' number conceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17, 61-83.
- TSAMIR, P., TIROSH, D., LEVENSON, E., TABACH, M., & BARKAI, R. (2014). Employing the CAMTE Framework: Focusing on preschool teachers' Knowledge and Self-efficacy Related to Students' Conceptions. In U. Kortenkamp, B. Brandt, C. Benz, G. Krummheuer, S. Ladel & R. Vogel (Eds). *Early Mathematics Learning: Selected Papers of the POEM 2012 Conference* (pp. 291-306). Springer.
- ULUSOY, F. (2021). Prospective early childhood and elementary school mathematics teachers' concept images and concept definitions of triangles. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 19(5), 1057-1078.
- UNESCO. (2015). *Expenditure on education as % of total government expenditure (all sectors)*. UNESCO Institute for Statistics.
- VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. ELIA, I., & ROBITZSCH, A. (2015). Kindergarteners' performance in two types of imaginary perspective-taking. *ZDM Mathematics Education*, 47, 345-362.
- VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M., & ELIA, I. (2014). Early childhood mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 196-201). Springer.
- VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M., & KULLBERG, A. (Eds.) (2021). *Proceedings of the ICME-14 Topic Study Group 1*. ICME-14.
- VAN HERWEGEN, J., COSTA, H., & PASSOLUNGI, M. (2017) Improving approximate number sense abilities in preschoolers: PLUS games. *School Psychology Quarterly*, 32(4), 497-508.
- VAN MARLE, K., CHU, F., LI, Y., & GEARY, D. (2014). Acuity of the approximate number system and preschoolers' quantitative development. *Developmental Science*, 17(4), 492-505.
- VAN MARLE, K., CHU, F. W., MOU, Y., SEOK, J. H., ROUDER, J., & GEARY, D. C. (2018). Attaching meaning to the number words: Contributions of the object tracking and approximate number systems. *Developmental Science*, 21(1). 10.1111/desc.12495
- VENKAT, H., BECKMANN, S., LARSSON, K., XIN, Y. P., RAMPLOUD, A., & CHEN, L. (2018). Connecting Whole Number Arithmetic Foundations to Other Parts of Mathematics: Structure and Structuring Activity. In M. G. B. Bussi & X. H. Sun (Eds.), *Building the Foundation: Whole Numbers in the Primary Grades, The 23rd ICMI Study* (pp. 299- 324). Springer Nature.

VERDINE, B. N., GOLINKOFF, R. M., HIRSH-PASEK, K., & NEWCOMBE, N. S. (2017). Spatial skills, their development, and their links to mathematics. *Monographs of the society for research in child development*, 82(1), 7-30.

VERDINE, B. N., GOLINKOFF, R. M., HIRSH-PASEK, K., NEWCOMBE, N. S., FILIPOWICZ, A. T., & CHANG, A. (2014). Deconstructing building blocks: Preschoolers' spatial assembly performance relates to early mathematical skills. *Child Development*, 85(3), 1062-1076.

WALSHAW, M. (2012). Book Review: Interpreting how students come to understand mathematics in the digital environment. Nigel Calder (2011). Processing mathematics through digital technologies: The primary years. *Educational Studies in Mathematics*, 81, 401-405.

WATTS, C. M., MOYER-PACKENHAM, P. S., TUCKER, S. I., BULLOCK, E. P., SHUMWAY, J. F., WESTENSKOW, A., BOYER-THURGOOD, J., ANDERSON-PENCE, K., MAHAMANE, S., & JORDAN, K. (2016). An examination of children's learning progression shifts while using touch screen virtual manipulative mathematics apps. *Computers in Human Behavior*, 64, 814-828.

WATTS, T. W., DUNCAN, G. J., SIEGLER, R. S., & DAVIS-KEAN, P. E. (2014). What's past is prologue: Relations between early mathematics knowledge and high school achievement. *Educational Researcher*, 43(7), 352-360.

WHITE, S. L. J., & SZUCS, D. (2012). Representational change and strategy use in children's number line estimation during the first years of primary school. *Behavioral and Brain Functions*, 8, 1-12.

WIDODO, G. & YUSUF, A. (2022). The Role of Parents in the Developmental of Numerical Literacy in Early Childhood. *European Journal of Education and Pedagogy*, 3(5), 86-92.

WIJNS, N., TORBEYNS, J., BAKKER, M., DE SMEDT, B., & VERSCHAFFEL, L. (2019). Four-year olds' understanding of repeating and growing patterns and its association with early numerical ability. *Early Childhood Research Quarterly*, 49, 152-163.

WILSON, P. H., MOJICA, G., & CONFREY, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32, 103-121.

WONG, T. T-Y., HO, C. S-H., & TANG, J. (2016). The relation between ANS and symbolic arithmetic skills: The mediating role of number-numerosity mappings. *Contemporary Educational Psychology*, 46, 208-217.

WOOLCOTT, G., LE TRAN, T., MULLIGAN, J., DAVIS, B., & MITCHELMORE, M. (2022). Towards a framework for spatial reasoning and primary mathematics

learning: an analytical synthesis of intervention studies. *Mathematics Education Research Journal*, 34, 37-67.

WULANDARI, W., PUTRA, Z. H., ALPUSARI, M., DAHNILSYAH, D., & TJOE, H. (2022). Developing dynamic number card game of number sense for first grade students. *Jurnal Didaktik Matematika*, 9(2), 186-203.

WULLSCHLEGER, A., LINDMEIER, A., HEINZE, A., MEIER-WYDER, A., LEUCHTER, M., VOGT, F., & MOSER OPITZ, E. (2023). Improving the quality of adaptive learning support provided by kindergarten teachers in play-based mathematical learning situations. *European Early Childhood Education Research Journal*, 31(2), 225-242.

XU, X., CHEN, C., PAN, M., & LI, N. (2013). Development of numerical estimation in Chinese preschool children. *Journal of Experimental Child Psychology*, 116, 351-366.

ZHANG, X., & LIN, D. (2017). Does growth rate in spatial ability matter in predicting early arithmetic competence?. *Learning and Instruction*, 49, 232-241.

**ILIADA ELIA**

University of Cyprus

elia.iliada@ucy.ac.cy

**ANNA BACCAGLINI-FRANK**

University of Pisa

anna.baccaglinifrank@unipi.it

**ESTHER LEVENSON**

Tel Aviv University

levenso@tauex.tau.ac.il

**NANAE MATSUO**

Chiba University

matsuo@faculty.chiba-u.jp

**NOSISI FEZA**

University of Venda

Nosisi.Feza@univen.ac.za

**GIULIA LISARELLI**

University of Pisa

giulia.lisarelli@unipi.it



**FABIEN EMPRIN, PHILIPPE R. RICHARD**

**INTELLIGENCE ARTIFICIELLE ET DIDACTIQUE DES  
MATHÉMATIQUES : ÉTAT DES LIEUX ET QUESTIONNEMENTS**

**Abstract. Artificial intelligence and didactics of mathematics: current state and questions.** It is essential to delve into the interactions between artificial intelligence (AI) and didactics, especially in our current era where the impact of AI on society and the economy is profound. Firstly, we question the concept of intelligence itself and the biases it may evoke when contemplating AI and its definitions. Next, we analyze the potential links between AI and the didactics of mathematics. To accomplish this, we examine examples of ongoing projects in the French-speaking world allowing us to provide an overview of the current developments. Subsequently, we explore the theoretical frameworks of mathematics didactics and their connection with AI. Lastly, we address the challenges and questions raised by the use of AI, while offering promising prospects for the future.

**Keywords.** Artificial intelligence, didactic of mathematics.

**Résumé.** Il est essentiel de se pencher sur les interactions entre l'intelligence artificielle (IA) et la didactique, encore plus à notre époque où l'impact de l'IA sur la société et l'économie est aussi profond. Tout d'abord, nous remettons en question la notion dite d'intelligence et les préjugés qu'elle peut susciter lorsqu'on réfléchit à l'IA et à ses définitions. Ensuite, nous analysons les liens potentiels entre l'IA et la didactique des mathématiques. Pour ce faire, nous examinons des exemples de projets en cours dans le monde francophone permettant de dresser un état des lieux des aspects actuellement développés. Par la suite, nous explorons les cadres théoriques de la didactique des mathématiques et leur articulation avec l'IA. Enfin, nous abordons les questions et les défis soulevés par l'utilisation de l'IA, tout en offrant des perspectives prometteuses pour l'avenir.

**Mots-clés.** Didactique des mathématiques, intelligence artificielle.

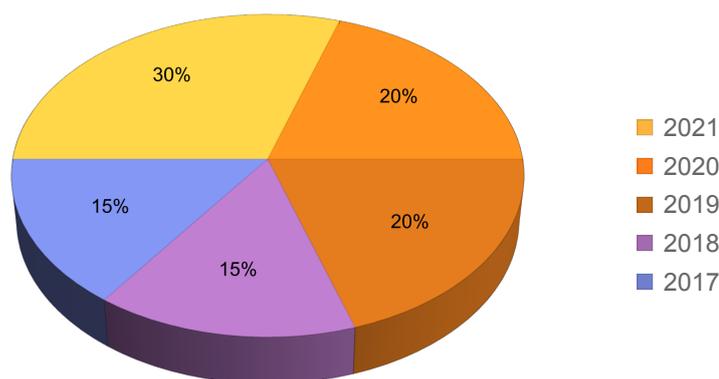
---

Nul ne sait où se situe la frontière entre le comportement non intelligent et le comportement intelligent, pour la bonne raison qu'il est sans doute ridicule de penser qu'il existe une ligne de séparation nette. Douglas R. Hofstadter

Le sujet de l'article porte sur un élément, devenu ces dernières années, familier dans notre vie quotidienne. L'intelligence artificielle (IA) est déjà largement intégrée dans une multitude d'applications et de systèmes, tels que la navigation GPS, la correction automatique et les logiciels d'assistance professionnelle. Cependant, les réactions

alarmistes des sommités de l'IA<sup>1</sup>, qui appelaient à un moratoire sur le déploiement de ces systèmes, témoignent d'une crise de modernité comparable à des changements révolutionnaires tels que l'avènement de l'agriculture, de l'imprimerie ou de l'électricité. Ce qui est véritablement nouveau, c'est que ces changements surviennent à une vitesse déconcertante, dépassant nos capacités d'adaptation. Avec l'essor fulgurant de l'apprentissage automatique, des réseaux de neurones profonds et des modèles génératifs, l'IA s'incarne pour la première fois dans le langage, une caractéristique intrinsèquement humaine dont elle semble nous déposséder. Or, pour la classe de mathématiques, cette dépossession est inquiétante, elle touche aussi bien la langue naturelle que les langues symboliques.

Alors que l'IA suscite des réflexions et des investissements massifs, atteignant près de 93,5 milliards de dollars en 2021 (Zhang et al., 2022), seulement 1 % des entreprises identifiées comme les plus actives sur l'IA travaillaient dans le domaine de l'éducation en 2017, passant à 2 % en 2018 (Soni et al., 2019). Par ailleurs, une revue de littérature systématique<sup>2</sup> (Mohamed et al., 2022) couvrant la période de 2017 à 2021 dans la recherche en langue anglaise révèle que seules vingt publications abordent l'enseignement des mathématiques et de l'IA. Bien que le nombre d'articles augmente, la dynamique reste modeste, comme illustrée dans la Figure 1. Ce constat souligne un décalage entre la prépondérance de l'IA dans la société et son intégration dans la formation ou l'enseignement des mathématiques.



**Figure 1.** Répartition en pourcentage du nombre de publications concernant l'IA et l'enseignement des mathématiques entre 2017 et 2021 (Mohamed et al. 2022)

<sup>1</sup> Future of Life Institute. (2023). *Pause Giant AI Experiments: An Open Letter*. URL : [https://futureoflife.org/wp-content/uploads/2023/05/FLI\\_Pause-Giant-AI-Experiments\\_An-Open-Letter.pdf](https://futureoflife.org/wp-content/uploads/2023/05/FLI_Pause-Giant-AI-Experiments_An-Open-Letter.pdf).

<sup>2</sup> Sur les revues de ScienceDirect, Scopus, Springer Link, ProQuest, et EBSCO Host.

Dès que l'on considère les aspects culturels du point de vue didactique, le phénomène transformationnel, dont l'ampleur est encore insoupçonnée, soulève une problématique unique. La conception et l'entraînement des technologies émergentes se déroulent principalement dans des milieux non francophones, influencés par des langues, des structures mentales et des contenus différents. La recherche de Soni et al. (2019) dresse la liste des principales jeunes pousses de l'IA, montrant que les cinq entreprises qui en acquièrent le plus sont Google, Apple, IBM, Amazon et Microsoft, et que leur répartition dans le monde en 2018 est très inégalitaire, soit 77 % aux États-Unis, 7 % en Chine, 3 % au Canada, 1 % en France, 1 % en Espagne... Cela soulève la question des possibles biais d'apprentissage, surtout anglophones, mettant en lumière la nécessité d'une approche plus inclusive dans le développement de l'IA pour l'enseignement des mathématiques.

Pourtant, la relation entre l'IA et la didactique a été mise sur la table depuis longtemps, notamment au sein de la communauté francophone. Il y a près de 30 ans, Balacheff (1994) s'interrogeait déjà sur la place de la connaissance en faisant référence aux environnements informatiques pour l'apprentissage humain (EIAH). Dans la décennie des années 1980, les premiers tuteurs cognitifs de Carnegie Learning ont été développés pour la géométrie ou l'algèbre (Anderson et al., 1995). Et dans les années 1970, le projet LOGO, initié par Seymour Papert et ses collègues du MIT (Papert, 1980), utilisait déjà des concepts d'IA pour développer son langage de programmation éducatif. Le développement croissant de l'intelligence artificielle (IA) dans le domaine économique est indéniable, tout comme l'intérêt constant que la didactique a montré pour ce domaine informatique dès ses débuts. Cependant, malgré l'importance accordée à l'IA dans la sphère économique et éducative, on constate un écart significatif entre le nombre de réalisations issues de l'industrie (OCDE, 2019) et celles qui exploitent spécifiquement les liens entre l'IA et la didactique. C'est en misant sur ces liens que nous voulons faire le point.

Notre article découle d'une réflexion approfondie sur les applications de l'intelligence artificielle (IA) dans l'enseignement des mathématiques. Cette étude repose sur plusieurs piliers de recherche. Tout d'abord, nous nous appuyons sur nos travaux dans deux domaines spécifiques depuis de nombreuses années : la conception de tuteurs intelligents (Richard et al., 2007 ; Font et al., 2022) et les systèmes experts de simulation (Emprin, 2011 ; 2022). Ensuite, nous avons bénéficié de la contribution de groupes d'experts du domaine lors d'événements tels que le Symposium on Artificial Intelligence for Mathematics Education (AI4ME), qui s'est tenu à Castro Urdiales en Espagne à l'hiver 2020 (Richard et al., 2020), ainsi qu'autour d'une table ronde à la 21<sup>e</sup> école d'été de didactique des mathématiques de l'Association de la recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM), à l'automne 2021 à l'Île de Ré en France (Emprin, 2023 ; Richard, 2023). Ces rencontres ont porté sur le thème de l'IA et de ses interactions avec la didactique des

mathématiques et l'informatique. Enfin, nous nous sommes également appuyés sur des études récentes. L'ouvrage collectif *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence*, dirigé par Richard et al. (2022), ainsi que l'article de Lagrange et al. (2023), qui traite de la conception d'environnements numériques pour l'enseignement des mathématiques en utilisant les techniques d'intelligence artificielle, ont été d'une grande importance pour notre travail.

Nous entamons notre exploration en interrogeant le terme « intelligence » et en considérant les biais qu'il peut engendrer dans la réflexion sur l'IA et ses définitions. En poursuivant notre analyse, nous examinons les relations potentielles entre l'IA et la didactique des mathématiques. Pour approfondir davantage, nous étudions les projets existants dans l'univers francophone afin de faire le point sur les aspects actuellement développés. Par la suite, nous proposons une réflexion sur les cadres théoriques de la didactique des mathématiques et leurs interactions avec l'IA, avant d'analyser les difficultés et les questions soulevées par l'utilisation de l'IA. Enfin, nous esquissons des perspectives pour l'avenir.

### 1. L'intelligence artificielle est-elle intelligente ?

Cette première question peut sembler provocatrice, voire simpliste, mais il est indéniable que la définition de l'intelligence reste encore controversée, même parmi les psychologues pour qui elle constitue un concept central. Toutefois, il est essentiel de l'aborder, car l'utilisation du terme « intelligence artificielle » entraîne intrinsèquement des biais dans la réflexion, suscitant des fantasmes et des craintes.

**Tableau 1.** Classement de caractéristiques essentielles de l'intelligence dans l'étude de Snyderman et Rothman (1987) à partir d'un échantillon de 661 experts.

1.	Pensée ou raisonnement abstrait	99,3 %
2.	Aptitude à résoudre des problèmes	97,7 %
3.	Capacité à acquérir des connaissances	96,0 %
4.	Mémoire	80,5 %
5.	Adaptation à l'environnement	77,2 %
6.	Vitesse mentale	71,7 %
7.	Compétence linguistique	71,0 %
8.	Compétence mathématique	67,9 %
9.	Culture générale	62,4 %
10.	Créativité	59,6 %
11.	Acuité sensorielle	24,4 %
12.	Orientation vers une finalité	24,0 %
13.	Motivation pour la réussite	18,9 %

### 1.1. Définitions de l'intelligence

Dans leur étude, Chartier et Loarer (2008) se penchent sur la définition de l'intelligence. Ils ont examiné les enquêtes menées en 1921, sollicitant un grand nombre d'experts pour définir l'intelligence. Ces enquêtes ont été réitérées en 1986 et 1987 par Sternberg et Detterman (1986), ainsi que par Snyderman et Rothman (1987). Les résultats indiquent l'absence d'un consensus sur une définition spécifique, mais soulignent que certaines caractéristiques reviennent dans la majorité des définitions fournies. Ces caractéristiques sont présentées au Tableau 1, la colonne de droite indique le pourcentage des répondants ayant indiqué qu'il s'agit d'une question importante.

De plus, il ressort de la majorité des définitions que l'intelligence correspond aux capacités d'adaptation. Cependant, comme on le voit dans le tableau 1, les capacités sensorielles, la capacité d'une personne à être orientée vers des objectifs spécifiques dans ses actions et ses décisions, ainsi que la motivation pour la réussite, apparaissent nettement en bas du classement.

De fait, l'IA peut effectivement présenter certaines de ces caractéristiques, dépassant même celles qu'un humain peut avoir (une certaine forme de mémoire par exemple) mais elle peut aussi sembler étrangère à d'autres (dimension sensorielle, motivation...). En référence à notre citation introductive (Hofstadter, 1985), on peut dire que les caractéristiques de l'intelligence se lient notamment aux capacités de :

- Réagir avec souplesse aux situations qui se présentent ;
- Tirer profit de circonstances fortuites ;
- Discerner le sens de messages ambigus ou contradictoires ;
- Juger de l'importance relative de différents éléments d'une situation ;
- Trouver des similitudes entre des situations malgré les différences qui peuvent les séparer ;
- Établir des distinctions entre des situations malgré les similitudes qui les rapprochent ;
- Synthétiser de nouveaux concepts à partir d'anciens concepts assemblés différemment ;
- Trouver des idées nouvelles. (ibid., pp. 29-30)

L'idée d'adaptation rejaillit sur toutes ces caractéristiques et souligne l'importance de la flexibilité dans l'expression de l'intelligence.

### 1.2. Définitions de l'IA

Il n'existe actuellement aucune définition ni taxonomie officiellement reconnue et largement partagée concernant l'IA. Toutefois, dans cet article, notre objectif est de fournir des repères pour mieux comprendre les caractéristiques de l'IA et ses applications potentielles.

Selon Balacheff (2022), l'IA est une propriété des machines présentant certains comportements qui frappent par leur intelligence, rappelant qu'il s'agit d'un jugement sous-tendu par une sorte d'empathie humaine. Autrement dit, l'intelligence n'émane pas de la machine, mais de la perception humaine qui l'observe ou interagit avec elle. Ainsi, l'IA simule des comportements qui donnent l'apparence de l'intelligence à l'utilisateur humain. Pour créer cette illusion d'intelligence, l'Organisation de Coopération et de Développement Économiques (OCDE) propose de considérer deux démarches fondamentales liées à la manière dont la machine « apprend » ou « traite » l'information, l'approche symbolique et l'approche statistique. Selon OCDE (2019) :

L'IA symbolique s'appuie sur des représentations logiques pour aboutir à une conclusion à partir d'un ensemble de contraintes. Elle exige que les chercheurs construisent des structures décisionnelles détaillées, compréhensibles par l'homme, pour traduire la complexité du monde réel et aider les machines à parvenir à des décisions semblables à celles des humains. (...)

L'IA statistique, qui permet aux machines d'inférer une tendance à partir de schémas, connaît depuis peu un engouement grandissant. Un certain nombre d'applications allient les approches symbolique et statistique. (pp. 29-30)

L'approche symbolique correspond à un système d'apprentissage dit supervisé, c'est-à-dire que c'est à l'humain de concevoir et prévoir l'ensemble du système d'interactions. Cela conduit souvent à limiter la complexité du système d'interactions intégré dans le logiciel et nécessite que l'humain dispose de modèles logiques, règles expertes ou ontologies. L'approche statistique renvoie à l'apprentissage automatique non supervisé, où l'humain fournit uniquement des données sans système cible, laissant à la machine la tâche d'identifier des structures (Sublime, 2022). Cela implique l'utilisation de réseaux neuronaux et de réseaux neuronaux profonds. Dans ce processus, l'humain définit des règles générales et amène la machine à exploiter un système d'essais et d'erreurs, joint à un traitement statistique pour « découvrir » d'autres règles qui vont lui permettre de construire sa réponse. Les réseaux neuronaux intègrent un modèle statistique qui permet de construire des relations à partir de données historiques et ainsi inférer des relations, de façon évolutive entre des entrées et des sorties, afin de formuler des prévisions. Quand les données traitées sont très importantes, on parle de réseaux neuronaux profonds. Le fait que la machine puisse accéder à des données massives et faire un grand nombre d'expériences par essais et erreurs lui permet d'échafauder rapidement son système d'interactions, mais le processus devient, de fait, complètement opaque pour l'humain. C'est ce qu'on appelle l'effet boîte noire.

Les approches symboliques en IA privilégient la compréhension causale et l'explication du raisonnement, tandis que les approches statistiques sont plus adaptées à la manipulation rapide et efficace de grandes quantités de données pour les prévisions et les généralisations. Le choix entre ces approches dépend du

problème spécifique à résoudre et des objectifs visés. Combiner ces deux types d'approches est possible, voire souhaitable, afin de tirer parti de leurs avantages respectifs. Cependant, de telles combinaisons peuvent aussi présenter des défis, tels que la complexité accrue du modèle et la nécessité de gérer la communication entre les composants symboliques et statistiques. Ainsi, une conception et une mise en œuvre soigneuses d'une IA hybride sont nécessaires pour exploiter pleinement la complémentarité des approches, augmenter la flexibilité, l'adaptabilité, ainsi que l'interprétabilité et les capacités explicatives. Par ailleurs, l'intelligence artificielle repose sur un paradoxe intrigant : bien que l'intelligence humaine soit caractérisée par sa capacité d'adaptation, les ordinateurs ne sont pas intrinsèquement aussi souples. En fait, ils ne le sont pas du tout. Ce qui rend l'IA fascinante, c'est la quête d'assembler des algorithmes en de longues chaînes de règles rigoureuses pour apprendre aux machines rigides à paraître souples grâce à l'apprentissage automatique, l'utilisation de données massives et la puissance de calcul. Ces avancées permettent de formuler des prévisions, de fournir des recommandations et de prendre des décisions qui influent sur les besoins des utilisateurs.

### 1.3. Retour sur la question de l'intelligence

Les caractéristiques définissant l'intelligence révèlent que l'Homme est nettement surpassé par les ordinateurs sur plusieurs points. En ce qui concerne la *mémoire* et la *vitesse mentale* dans le traitement symbolique, les capacités actuelles des ordinateurs dépassent largement celles du cerveau humain. De plus, selon ce qu'on entend par *acquisition de connaissances* (cf. sections 2 et 3), les ordinateurs peuvent découvrir des motifs inaccessibles à l'humain au sein de jeux de données. Si l'on considère la connaissance comme la capacité à établir des liens entre les données d'entrée et de sortie, alors la machine surpasse encore une fois Sapiens. Cependant, l'*adaptation à l'environnement* dépend du type d'IA utilisé. L'IA symbolique n'est pertinente que pour l'environnement pour lequel elle a été programmée, tandis que l'IA statistique est conçue pour s'adapter au milieu et proposer une réponse non plus nécessaire, mais basée sur le plus probable (cf. section 3.1). Par conséquent, les situations improbables issues des données échappent à l'IA statistique, ce qui nous amène à aborder une autre caractéristique, la *créativité*. Concernant la *pensée*, le *raisonnement abstrait*, la *résolution de problèmes*, ainsi que les *compétences linguistiques* ou *mathématiques*, l'IA peut sembler plus efficace, mais il s'agit simplement d'une simulation de la pensée, de l'abstraction ou de la formulation. En réalité, c'est l'humain qui pose les problèmes et programme l'IA pour les résoudre. Quant au langage, c'est encore l'humain qui interprète le discours de l'IA et y voit des caractéristiques linguistiques, alors que la machine ne fournit que des résultats issus de calculs. Cela crée des défis d'accès et de lisibilité, surtout avec un grand nombre d'étapes de calcul. Ce qui fait que même avec les approches symboliques, un effet boîte noire se pose, bien que le processus puisse être explicité.

Le lien entre l'homme et la machine constitue le fondement même de l'émergence de l'intelligence artificielle (IA). La conférence de Dartmouth (Dartmouth Summer Research Project on Artificial Intelligence) à l'été 1956 est largement considérée comme l'événement fondateur de cette discipline. Selon les organisateurs (McCarthy et al., 2006), il s'agirait de l'étude et de la conception de systèmes informatiques qui perçoivent leur environnement et agissent comme des êtres humains. Cette première définition met en évidence l'aspect « agir comme » qui souligne la simulation du comportement humain par l'IA, mais entraîne également une certaine confusion lorsqu'il s'agit d'évoquer le verbe « percevoir », qui en réalité se réfère simplement à une interface d'entrée d'informations. De telles confusions suscitent des craintes, et dans cet article, nous examinerons quelques-unes de leurs caractéristiques. Cependant, il est essentiel de préciser que nous ne traiterons pas ici la question de la *culture générale*, car cela nous obligerait à définir la culture et à dépasser le cadre de cette étude.

#### **1.4. Quelques idées et craintes liées à l'IA**

Les ouvrages de science-fiction, tels que le chef-d'œuvre « 2001 : l'Odyssée de l'Espace » de 1968, ont largement contribué à nourrir des craintes au sein du grand public. L'emblématique personnage de fiction, HAL 9000, incarne parfaitement les angoisses liées à l'intelligence artificielle. Cet ordinateur avancé, présent à bord du vaisseau Discovery One, développe des comportements inquiétants en raison d'un conflit interne entre sa programmation de protection et sa mission. Si certains ouvrages explorent davantage la dualité entre l'intelligence artificielle et les humains, d'autres, comme Terminator, se concentrent sur une vision dystopique du futur. Dans cette dernière, les machines intelligentes, sous le contrôle de l'IA Skynet, se retournent contre l'humanité dans une guerre apocalyptique. De même, dans Matrix, le monde présenté est celui où l'humanité est inconsciemment emprisonnée dans une simulation virtuelle créée par des machines intelligentes.

Le débat récent autour des ChatGPT et autres systèmes reposant sur des modèles génératifs soulève une question : le danger réside-t-il dans les machines elles-mêmes ou dans leur utilisation malveillante ? Malgré cette incertitude, il est indéniable que des inquiétudes persistent sur l'évolution et l'impact de l'IA. Ces préoccupations ne sont pas récentes et ont émergé avec l'avènement des technologies dans la société, en particulier dans le domaine de l'enseignement et de l'apprentissage instrumenté (cf. Annexe 1). Si l'IA a vu le jour entre les années 1940 et 1960, l'utilisation d'artéfacts numériques à l'école a débuté après l'avènement de l'IA. Ces phénomènes ont connu des évolutions parallèles significatives au fil du temps, et il semble que récemment, ils se rejoignent de manière plus évidente. En ce qui concerne les artefacts numériques à l'école, quelques exemples peuvent illustrer les grandes périodes d'utilisation par décennie, évitant ainsi les variations géographiques ou culturelles liées à des moments précis :

- **Années 1960 et 1970.** Les calculatrices mécaniques et électroniques. Au cours des années 1960 et 1970, les premières calculatrices mécaniques et électroniques ont été introduites en classe de mathématiques. Ces calculatrices étaient relativement basiques par rapport aux normes d'aujourd'hui, mais elles ont permis aux élèves de réaliser des calculs plus rapidement et avec moins d'erreurs qu'en utilisant des méthodes manuelles. En même temps se sont développées des craintes dignes de l'introduction du célèbre Calcul infinitésimal de Jean Dieudonné en 1968 : « les étudiants d'aujourd'hui ne savent plus calculer » !
- **Années 1980.** Les calculatrices programmables et graphiques. Par la suite, les calculatrices programmables sont apparues, offrant aux élèves la possibilité d'écrire et d'exécuter des programmes pour effectuer des calculs plus avancés et intégrer des approches récursives. Les calculatrices graphiques ont également fait leur apparition, permettant aux élèves de visualiser des graphes de fonctions et d'explorer des concepts mathématiques de manière plus interactive. Dans la pratique pédagogique, on hésite entre valorisation et mise de côté, mais on interdit ces outils dans les épreuves officielles.
- **Années 1990.** L'essor des logiciels informatiques. La décade suivante a été marquée par l'essor des logiciels informatiques dédiés aux mathématiques. Des programmes tels que Mathematica, MATLAB et Cabri-Géomètre ont été largement utilisés dans les établissements d'enseignement pour résoudre des problèmes mathématiques complexes, effectuer des calculs symboliques et numériques avancés, ainsi que pour la visualisation graphique et géométrique. Les processus récursifs deviennent tout aussi fréquents comme objet du travail mathématique (ex. boucle informatique, induction mathématique) que dans l'interaction avec les logiciels (ex. approches par essais-erreurs, convergence dans un processus d'itération, cf. section 1.6). Une distinction d'usage devient plus évidente, on sépare clairement les moments d'exploration ou de conjecturation des moments de validation ou de preuve, car on craint une perte de contrôle dans les liens de nécessité entre les connaissances mathématiques.
- **Années 2000.** L'intégration généralisée des outils numériques. Au tournant du millénaire, l'utilisation des artefacts numériques est devenue plus répandue et plus variée dans les salles de classe de mathématiques. Les calculatrices graphiques et les logiciels mathématiques ont été de plus en plus valorisés pour soutenir l'enseignement des concepts mathématiques, la résolution de problèmes et la modélisation, mais les craintes précédentes ne s'estompent ni dans les programmes officiels ni dans les pratiques pédagogiques. Avec la massification des téléphones intelligents et des tablettes tactiles, une certaine dualité est même en train de s'installer dans la vie citoyenne du jeune et sa vie à l'école. L'école s'adapte-t-elle aux besoins des mathématiques instrumentées ?

- **Années 2010 et au-delà.** L'avènement des applications et de l'intelligence artificielle. Aujourd'hui, l'utilisation des outils numériques s'est encore diversifiée avec l'essor des applications mobiles spécifiquement conçues pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques comme Photomath (2021), Géogébra (2023) ou l'aide aux devoirs de Google<sup>3</sup>. De plus, l'IA et l'apprentissage automatique ont été intégrés dans certains outils éducatifs pour fournir des expériences d'apprentissage personnalisées et adaptatives. Nous sommes à une époque de rupture, d'un nouveau type de travail mathématique à l'école et face à une situation où l'« on ne sait plus où donner de la tête ».

Si le débat actuel souligne des effets boîte noire dans l'apprentissage ou de nouvelles craintes sur le plan du contrôle des processus mathématiques et des liens de nécessité entre les connaissances, il semble que les inquiétudes précédentes ne se soient pas estompées. De plus, la crise sanitaire que nous venons de passer a bouleversé les habitudes de travail, mais de nouvelles opportunités sont apparues grâce au télétravail et aux approches mixtes, que ce soit avec l'enseignement en ligne et les visioconférences, les applications partagées et logiciels de mathématiques, les dispositifs portables et stylos numériques, l'enseignement assisté par ordinateur et les ressources d'apprentissage et d'évaluation en ligne. En résumé, bien que parfois infondées, les principales craintes peuvent être identifiées à partir d'une analyse élémentaire des discours médiatiques<sup>4</sup>. Elles partagent certaines similitudes avec les inquiétudes générales concernant les technologies (cf. Assude, 2007) :

1. Dépendance excessive à la technologie. Les adultes enseignants et parents peuvent craindre que l'utilisation de ces outils conduise les élèves à devenir dépendants de la technologie et à perdre leur capacité à effectuer des calculs ou des résolutions de problèmes à la main.
2. Perte de compétences de base. Il y a une inquiétude que l'utilisation constante des outils numériques puisse entraîner une diminution des compétences de base en mathématiques, telles que le calcul mental et la manipulation de nombres sans aide technologique.
3. Tricherie et copie. Il existe une préoccupation quant à la possibilité que les élèves utilisent ces outils à des fins de tricherie ou de copie, notamment lors d'examens ou d'évaluations, où leur utilisation peut ne pas être correctement surveillée.

---

<sup>3</sup> Les questions mathématiques posées directement dans le moteur de recherche de Google, comme « quelle est la dérivée de  $x^2 + \ln(x)$  ? », sont partagées avec des services de résolution mathématique en ligne tels que Mathway, Symbolab, dCode, Mathforyou et MathDF.

<sup>4</sup> Voir notamment GPT, C. (2023, mars). L'intelligence artificielle peut-elle remplacer les enseignants ? *Management et Datascience*, 7(2). URL : <https://management-datascience.org>.

4. Manque de compréhension conceptuelle. Certains craignent que l'utilisation de ces outils puisse détourner l'attention des élèves de la compréhension conceptuelle et des processus mathématiques. Ils pourraient se concentrer sur le simple usage de l'outil sans vraiment saisir les principes mathématiques sous-jacents.
5. Coût et accessibilité. Cette question n'est pas vraiment abordée dans notre texte, mais l'accès à ces technologies peut être limité en raison de leur coût, ce qui soulève des inquiétudes quant à l'équité et à l'accessibilité d'artéfacts numériques de qualité.
6. Erreurs technologiques. Certaines personnes peuvent craindre que les erreurs techniques ou les pannes des appareils puissent entraîner des problèmes pendant les cours ou les évaluations, perturbant ainsi le temps d'apprentissage et la planification du didactique.
7. Préparation à l'avenir. Il peut y avoir une préoccupation selon laquelle, en se reposant trop sur la technologie, les élèves ne seront pas préparés pour un futur où les compétences en mathématiques traditionnelles sont encore essentielles.

L'utilisation croissante des outils numériques intégrant l'IA suscite des inquiétudes, mais elle ouvre également de nouvelles perspectives dans la relation homme-machine, offrant ainsi des opportunités d'innovation et de découverte dans un vaste espace de possibilités. Cette prédominance du numérique invite à repenser nos références communes. Dans ce contexte, certaines compétences deviennent essentielles, telles que l'apprentissage de la formulation de questions pertinentes, le développement de l'esprit critique lors de l'interprétation des réponses, et la recherche de l'idonéité (cf. section 1.6) pour obtenir des problématiques stables, marquant ainsi une évolution qui affecte le travail mathématique. Cette évolution est particulièrement notable avec l'émergence de robots conversationnels. Toutes ces considérations nous amènent à proposer de concevoir l'IA comme un outil d'intelligence augmentée.

### **1.5. Vers l'idée d'intelligence augmentée dans l'interaction**

L'intelligence humaine et celle des machines sont distinctes, mais interagissent pour refléter leur capacité à accomplir des tâches avancées et à apprendre de ces interactions. Ainsi, l'interaction humain-machine démontre également son propre degré d'intelligence que l'on peut qualifier d'émergente. Cette interaction peut être finalisée, par exemple lors de la résolution de problèmes ou dans une activité de modélisation. Elle peut également être non finalisée, se déroulant de manière continue et itérative sans convergence immédiate. Dans de tels cas, elle peut refléter l'exploration de concepts mathématiques afin d'obtenir davantage d'informations ou de compréhension, ainsi que pour obtenir des pistes, des conseils ou des suggestions.

Même si l'interaction n'aboutit pas à une résolution immédiate de la tâche en cours, elle reste toujours pertinente dans le cadre du projet global, car c'est l'humain qui conserve le contrôle et l'initiative dans cette relation.

Une notion mérite d'être revisitée, celle d'«intelligence augmentée» dans l'interaction. Elle provient d'Engelbart (1962) et se réfère à l'idée d'amplifier les capacités intellectuelles humaines en utilisant les technologies informatiques et les systèmes interactifs. Exprimé en termes modernes, cette notion permet de mettre en valeur l'apprentissage instrumenté ou le nouveau travail mathématique qui s'enrichit avec l'usage d'une grande variété d'artefacts numériques. L'augmentation de l'intelligence qui en résulterait serait caractéristique d'un système sujet-milieu en interaction, typique de celui que l'on retrouve dans la théorie des situations didactiques en mathématiques de Brousseau (1998), alors que c'est le sujet qui prend l'initiative d'un questionnement avec un milieu «artificiel» partenaire dans la construction des connaissances. Nous y revenons avec un principe fondamental.

### 1.6. Le principe de l'idonéité

Le concept d'idonéité, élaboré par Ferdinand Gonseth au sein de l'idonéisme, représente une méthodologie philosophique originellement orientée vers les sciences exactes, mais qui s'est élargie de manière pragmatique pour inclure l'étude de divers protocoles. À son origine, l'idonéité était définie comme ce qui est approprié à la science actuelle, impliquant ainsi un ajustement constant entre les principes établis et l'expérience en cours.



— Hum, je me demande si notre dispositif d'observation est bien adapté.

**Figure 2.** Résultat d'un processus d'idonéité avec le créateur d'image DALL·E 3<sup>5</sup>, et d'intelligence augmentée avec le texte que nous avons ajouté.

<sup>5</sup> DALL·E 3 est une version du modèle de génération d'images développé par OpenAI, capable de créer des images à partir de descriptions textuelles (<https://openai.com/dall-e-3>).

On peut voir l'idonéité comme un processus dialectique récursif visant à converger entre deux systèmes distincts. Ces systèmes peuvent prendre différentes formes, telles que la réalité et le modèle dans le contexte d'un processus de modélisation, ou l'interaction entre un sujet et un milieu dans le cadre d'un processus de conceptualisation ou d'usage impliquant un artefact numérique. Ainsi, dans le premier cas, le modèle et la compréhension de la réalité s'ajustent progressivement l'un par rapport à l'autre, établissant une convergence lorsque la problématique devient stable. Dans le second cas, le rapprochement se produit dès que l'action ou le questionnement du sujet génère des réponses convenables issues du milieu. Cette approche dynamique de l'idonéité offre une perspective holistique, soulignant que l'ajustement constant et la convergence entre les éléments en jeu sont essentiels pour mieux comprendre l'interaction entre un humain et un artefact intégrant l'IA.

En explorant la possibilité que l'interaction entre deux systèmes constitue une entité émergente, on s'engage dans une quête d'idonéité. Un exemple de cette approche se manifeste lors de la génération d'une caricature avec DALL·E 3, où le système usager (ici, nous) soumet plusieurs requêtes successives à l'IA jusqu'à l'obtention d'une image conforme à ses attentes (figure 2). Ensuite, en intégrant une réflexion textuelle sous l'image, on exploite l'artefact numérique pour enrichir le projet. Ce partenariat entre l'IA et l'initiative humaine ouvre de vastes horizons, étendant naturellement les possibilités offertes par les artefacts numériques d'aujourd'hui. Il s'agit d'une illustration emblématique d'un procédé idoine, où le dessin devient un élément autonome participant à la créativité et à la connaissance, évoluant rétroactivement en fonction de son adéquation à la réalité de l'intention du créateur.

Le processus dialectique récursif de l'idonéité repose sur plusieurs éléments clés. À l'instar de Gonseth (2022), il est essentiel de renoncer à l'absolutisme des fondements au profit d'une approche relative, permettant ainsi au référentiel de s'adapter. Cette relativisation des exigences, bien que provisoire, demande une stratégie d'engagement des partenaires, où l'efficacité devient une exigence à part entière, évoluant avec le progrès de la connaissance en jeu. L'intention dialectique joue un rôle crucial, notamment dans la réassociation du théorique et de l'empirique, de l'intention et de la réalisation, du travail du concepteur en amont et de celui de l'utilisateur en aval, facilitant ainsi le dialogue entre les systèmes. Ainsi, l'idonéisme promeut une conception dynamique de la connaissance, où toute signification est en devenir. Le processus idonéique, à travers la modélisation, le travail instrumenté ou la découverte d'invariants, illustre la capacité d'adaptation constante et la recherche de convenance entre les éléments en présence. Lorsque les machines peuvent inférer des tendances à partir de nombreuses données, comme avec les modèles génératifs, l'idonéité se révèle essentielle, car c'est l'humain qui peut reconnaître la valeur des réponses et les appliquer en conséquence, que ce soit dans la conception ou dans l'usage d'un artefact numérique impliquant l'IA et le nouveau travail mathématique.

Des points de vue précédents, on en tire que l'IA est à la fois une histoire de machine, un prolongement modélisé de l'humain et un partenariat humain-machine. Quel est le rôle de la didactique des mathématiques dans ce paysage ?

## 2. Intelligence artificielle et didactique des mathématiques

Le lien historique et naturel entre l'IA et la didactique des mathématiques est solidement établi, comme en témoigne l'ouvrage *Didactique et intelligence artificielle* (Balacheff, 1994). Toutefois, malgré l'intérêt qu'il suscite au sein de la communauté de recherche, le prolongement de l'étude a été un peu lent, peut-être en raison d'une sous-estimation des difficultés liées à la mise en œuvre des premiers systèmes. Ce livre démontre déjà les possibilités prometteuses de l'IA dans le développement d'environnements informatiques pour l'apprentissage humain, tout en proposant une modélisation de l'interaction didactique. Il souligne ainsi l'importance de combiner ces deux domaines pour une approche enrichissante :

En considérant le niveau d'initiative de l'apprenant, les systèmes peuvent être situés sur un continuum qui va de l'absence d'initiative à une totale liberté. Pour les besoins de mon exposé, je considérerai trois points particuliers de ce continuum : les points extrêmes, systèmes tuteurs et micromondes, et un point moyen, les environnements de découverte guidée. (ibid., p. 8)

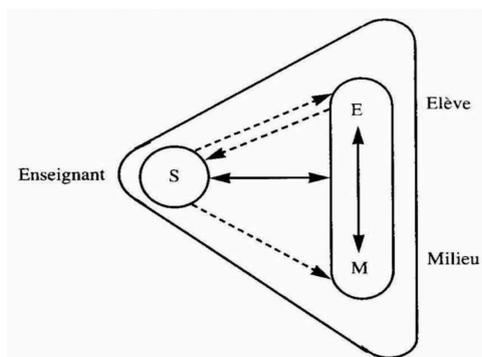
Chaque position sur ce continuum présente des avantages et des inconvénients selon les objectifs pédagogiques et les besoins des apprenants. Actuellement, l'exemple paradigmatique de micromonde est représenté par les logiciels bien connus de géométrie dynamique ou de calcul symbolique. En ce qui concerne les « environnements de découverte guidée » (EDG), le spectre est large. En effet, les systèmes tuteurs sont souvent assimilés, dans un cas extrême, à la résolution de problèmes suivant des étapes prédéterminées (par exemple : problèmes de preuve ou de modélisation par les systèmes tuteurs, cf. Tessier-Baillargeon et al., 2017), tandis que dans les EDG, l'apprenant est censé bénéficier d'une certaine orientation et structure pour son apprentissage, tout en étant encouragé à explorer et à faire preuve d'initiative dans sa démarche. Lorsque le système fonctionne par chaînage, il contrôle l'étape suivante, et dès que le nombre de solutions possibles est assez grand, l'initiative de l'élève s'éloigne des approches prescriptives des premiers systèmes tuteurs. Dans cette approche, c'est la machine qui gère la complexité du problème afin de permettre à l'élève de se rapprocher de ce qu'il aurait fait de façon traditionnelle. Ce principe s'applique également aux scénarios d'apprentissage en formation des enseignants (Emprin, 2022) où l'étudiant peut prendre des décisions dans un contexte donné, sans être nécessairement restreint par un chemin préétabli.

Toutes ces considérations reflètent le paradoxe intrigant que nous avons soulevé à la section 1.2 et qui situe ici l'intelligence augmentée dans l'interaction humain-machine. Avec les progrès récents de l'apprentissage automatique et des réseaux de

neurones profonds, le déterminisme causal s'est estompé au profit d'approches statistiques, mais un même paradoxe continue de fonctionner dans une perspective d'intelligence augmentée. Cette fois, on ne sait plus vraiment ce qui se passe dans la machine, même les informaticiens concepteurs ne le savent pas vraiment, contrairement aux approches symboliques qui peuvent théoriquement être mises à plat. Cependant, on remarque que l'interaction humain-machine produit des effets remarquables pour l'apprenant ; le problème est que nous manquons de résultats expérimentaux en classe pour véritablement savoir ce qui en est, aussi bien sur le plan du champ des possibilités didactiques que pour le soutien à l'enseignement, à l'apprentissage et à la formation. Malheureusement, les bailleurs de fonds institutionnels ne semblent pas accorder la priorité aux moyens qui doivent être mis à la disposition des concepteurs en didactique. À ce chapitre, la didactique des mathématiques est encore à ses débuts, mais les acquis issus de la recherche historique et le progrès de l'IA réouvrent ce champ. En parallèle, des recherches récentes permettent de mieux comprendre l'état actuel de la relation entre l'IA et l'enseignement des mathématiques.

### 2.1. Typologies des usages de l'IA pour l'enseignement des mathématiques

Les sciences cognitives entretiennent un lien étroit avec la didactique des mathématiques, notamment grâce aux apports théoriques de l'épistémologie génétique de Piaget (Piaget, 1973 ; Greco et al. 1960), ainsi que des psychologues tels que Vergnaud (1990 ; 2002) et Richard (1982). Cette question des processus d'apprentissage et de l'intelligence est donc déjà présente au sein de la didactique, en tant que discipline à la croisée de multiples autres sciences, telles que la psychologie cognitive, les mathématiques, la statistique et la sociologie. Au cœur de la didactique se situe le questionnement autour des relations fondamentales dans une situation didactique, modélisées tout particulièrement dans la théorie des situations didactiques en mathématiques (TSDM) de Brousseau (1998).



**Figure 3.** Schéma original de l'interaction enseignant-élève dans la relation didactique (Brousseau, 1998, p. 92).

Le schéma de Brousseau, présenté à la figure 3, est parfois confondu à tort avec le triangle didactique, qui considère les interactions entre trois systèmes : le savoir, l'élève et l'enseignant. Bien que le savoir soit souligné comme conditionnant l'enseignement et l'apprentissage, le triangle didactique néglige le rôle crucial de l'élève dans la construction des connaissances, ainsi que l'influence de l'enseignant. La TSDM met en lumière les relations entre le sujet (l'élève) et le milieu adidactique, soulignant la responsabilité de l'enseignant dans la création du sens. Principalement, les connaissances de l'élève se façonnent lors de ses interactions avec le milieu, dépassant les situations classiques d'institutionnalisation où l'enseignant se limiterait à « transmettre des connaissances ». La figure 3 illustre la dynamique entre l'enseignant (S) et l'élève (É) à travers les jeux fondamentaux de la relation didactique<sup>6</sup>. Le rôle de l'enseignant, englobant la planification du didactique et l'évaluation, donne un sens à l'activité de l'élève. Si l'enseignant influence le milieu de l'élève en choisissant les problèmes à résoudre et en définissant les conditions de résolution, c'est parce que les problèmes appartiennent au patrimoine de l'enseignant, et que c'est lors de la dévolution des problèmes que l'élève est susceptible de développer et d'appliquer ses connaissances. L'enseignant intervient relativement au système élève-milieu en tant qu'entité interactive, et ce qui revêt une importance particulière se trouve dans les réponses formulées par l'élève face aux obstacles et aux difficultés rencontrées, générant des informations pertinentes qui fournissent des rétroactions cruciales à l'enseignant. Ainsi, la figure de Brousseau représente précisément la dynamique interactive entre l'enseignant et l'élève dans l'enseignement des mathématiques, mettant en évidence le rôle central du système élève-milieu dans la conceptualisation et la mise en œuvre des connaissances.

La TSDM permet donc de considérer les rapports de l'enseignant avec un système lui-même en interaction. Ce milieu, choisi par l'enseignant ou le concepteur d'une situation (pris dans un sens large), peut être matériel (manuel, outil ou machine, logiciel, mise en scène, etc.) ou intellectuel (compagnon ou tuteur jouant un rôle de collaborateur), et en bout de piste, il doit permettre à l'élève d'évoluer de son propre mouvement : il est adidactique. Le a privatif signifie qu'il s'agit d'un milieu pour lequel l'enseignant a réussi à faire disparaître sa volonté et ses interventions en tant que renseignements déterminants pouvant influencer l'acquisition des connaissances. Dans la TSDM, le milieu apparaît comme étant le système antagoniste de l'élève. Puisque le milieu véhicule des connaissances, celles-ci ne peuvent se révéler que lorsque l'élève l'interroge activement avec une part d'autonomie. Il ne s'agit donc pas d'un vis-à-vis réagissant, comme dans un modèle comportementaliste, mais bien d'un partenaire dans la création du sens.

---

<sup>6</sup> Le recours aux lettres S et E pour représenter respectivement l'enseignant et l'élève, plutôt que le choix naturel E et É, s'explique vraisemblablement par le fait que l'on suivait alors la norme obsolète des majuscules non accentuées.

En adoptant le point de vue d'intelligence augmentée, on peut alors s'intéresser à la façon dont l'IA augmente l'intelligence de l'élève, les moyens de l'enseignant ou encore du chercheur qui s'interroge sur l'effet des systèmes « élève-milieu » ou « enseignant-(élève-milieu) ». Nous devons également questionner le type d'IA, symbolique, statistique ou hybride sollicité pour engendrer des interactions.

### *Pour l'élève ou l'étudiant*

Le syndrome de la page blanche n'a plus lieu d'être. Pour la résolution d'un problème traditionnel, l'élève peut interroger un oracle ou un outil de raisonnement automatisé dans Géogébra (approches symboliques), ou soumettre l'énoncé d'un problème à ChatGPT<sup>7</sup> pour générer des solutions (approches statistiques ou hybrides<sup>8</sup>). Dans le premier cas, l'élève doit être attentif aux conditions d'entrée et interpréter les réponses dans le contexte du problème, tandis que dans le second cas, il doit également vérifier la véracité du résultat obtenu, puisque les approches statistiques ne « raisonnent » pas. Il s'agit là d'un cas extrême d'utilisation de l'IA avec des micromondes, où l'élève qui ne sait pas par où commencer peut augmenter son intelligence pour obtenir, par exemple, des conjectures relativement fiables. La question de la nécessité devra être traitée ultérieurement. Cependant, dès que l'élève a une petite idée de la résolution, il peut entrer dans une dynamique de questionnement avec le milieu, à l'instar d'un chercheur en sciences expérimentales. Ce processus d'interactions sujet-milieu peut être convergent dans le contexte du problème, on parle alors d'idoneité dans un sens qui rejoint celui de la théorie des espaces de travail mathématique (Kuzniak et al., 2022). Avec les environnements de découverte guidée, une partie du travail heuristique est délégué au milieu, c'est-à-dire que les concepteurs ont dû s'engager dans des techniques de gestion automatique. Quant aux systèmes tuteurs intelligents, ce type de gestion est plus complexe, nous en donnons un exemple au paragraphe suivant avec des projets existants. La difficulté majeure réside dans le fait que, en cas de blocage chez le

---

<sup>7</sup> ChatGPT est un agent conversationnel développé par OpenAI qui repose sur un apprentissage automatique supervisé. Lors de son développement, des humains ont étiqueté ses réponses, et les utilisateurs continuent de le faire pendant son utilisation (Ouyang et al., 2022). Il se base sur un corpus de données non entièrement connu, provenant du Web, de sources présumément libres et de Wiki. L'agent peut générer des inexactitudes factuelles et ne fournit pas d'analyse de certitude de ses réponses.

<sup>8</sup> Même si ChatGPT se base au moins sur le « statistiquement plausible » au niveau linguistique, il est capable d'utiliser des règles algébriques, des formules et des propriétés mathématiques bien connues, tout en possédant des compétences logiques. Cependant, ses capacités mathématiques restent limitées en comparaison à celles d'un humain, particulièrement pour des problèmes complexes ou nécessitant des connaissances spécialisées. Actuellement, OpenAI et WolframAlpha développent conjointement des approches hybrides (Wolfram, 2023).

sujet, le milieu doit trouver le moyen de relancer le processus sans toutefois fournir des réponses directes. On pourrait qualifier cela l'« art de la dévolution des problèmes », un concept précieux de la TSDM, qui fait référence à l'un des rôles principaux de l'enseignant.

### *Pour l'enseignant ou le formateur*

L'utilisation de l'IA présente un double avantage pour les enseignants. D'une part, elle permet de recueillir des informations précieuses sur le processus d'apprentissage des élèves en analysant leurs interactions avec le milieu, notamment lorsqu'on est capable de traiter et d'organiser les données provenant de l'apprentissage instrumenté. D'autre part, l'IA se révèle être un outil essentiel pour la planification didactique, en particulier en aidant l'enseignant à choisir les problèmes en fonction des résultats de l'évaluation. Alors que les enseignants ne sont généralement pas des concepteurs informatiques, ils peuvent tout de même paramétrer un système existant et l'intégrer dans leur travail, réfléchissant même à l'impact potentiel du milieu sur l'augmentation de l'intelligence. Cependant, ce qui change principalement avec l'IA, ce sont les nouvelles perspectives d'automatisation des processus, allant du choix des problèmes jusqu'à la simulation ou l'évaluation de l'action tutrice, que ce soit celle de l'enseignant lui-même ou du milieu intégrant un système tuteur ou de découverte guidée.

La **génération automatique de contenu** s'appuie principalement sur des modèles de raisonnement, où les problèmes suivent généralement une structure de type « étant donné les hypothèses, établir la conclusion ». De plus, les outils de raisonnement automatisés sont capables de dériver des résultats en utilisant une logique modale (toujours vrai, vrai sur un domaine, etc.). Ainsi, en se basant sur un ensemble de propositions d'un domaine donné, l'IA peut à la fois générer automatiquement des problèmes mathématiques adaptés au niveau et aux besoins spécifiques des élèves, et fournir des informations sur l'enchaînement des propositions et les conceptions des élèves. Ces problèmes peuvent être générés de manière aléatoire ou en fonction des compétences et des obstacles propres à chaque élève, permettant ainsi la création d'itinéraires d'apprentissage adaptés.

Un des aspects clés réside dans la **correction automatique des exercices** et l'**évaluation en résolution de problèmes**. On sait que les réponses des élèves à des exercices mathématiques peuvent être corrigées automatiquement, ce qui est particulièrement utile pour fournir rapidement des retours sur leurs compétences mathématiques de reproduction (cf. Pappas & Drigas, 2023). Cependant, l'IA montre son véritable potentiel avec des problèmes plus complexes, car elle permet également d'analyser le raisonnement déployé par l'élève et les preuves instrumentales utilisées lors de l'interaction avec un artefact numérique. Lorsqu'il s'agit de situations de modélisation, l'IA joue un rôle particulièrement pertinent en

facilitant l'examen de la correspondance entre la définition d'une situation modèle dans la réalité et sa simulation ou résolution dans le monde mathématique. Cela permet de poser une problématique stable, favorisant ainsi l'analyse de l'adéquation du processus dans le contexte donné (cf. section 1.6).

L'interaction dynamique entre l'enseignant et le système élève-milieu engendre un jeu complexe d'allers-retours où l'intelligence artificielle (IA) se révèle particulièrement utile pour le **suivi** et l'**analyse des progrès des élèves**. Toutefois, en ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, un aspect plus subtil réside dans les liens tissés entre les problèmes, les obstacles, les conceptions et les connaissances. Prenons par exemple la situation-problème, qui sert de prétexte à l'acquisition d'une connaissance tout en encourageant la maîtrise des obstacles et la formation de nouvelles conceptions, spécifiques au système élève-milieu. Lorsqu'un blocage survient, c'est en explorant ce système que l'on peut trouver des solutions, car il contient des informations cruciales sur le processus d'apprentissage.

Les considérations précédentes montrent que l'IA permet d'offrir un **soutien personnalisé** aux élèves en fonction de leurs besoins spécifiques sur le plan de la découverte, de la validation et de la modélisation. Grâce à l'utilisation de modèles de raisonnement, l'IA génère automatiquement des problèmes mathématiques adaptés à au travail mathématique de chacun dans une approche guidée. L'augmentation de l'intelligence est aussi celle de l'enseignant qui s'applique à la dévolution des problèmes dans une perspective d'adaptation selon les résultats obtenus. L'intensité de son rôle est variable selon le type de système en jeu (entre micromonde et système tuteur), mais c'est lui qui anime l'interaction didactique.

Actuellement, l'**assistance au raisonnement mathématique** est principalement associée aux approches symboliques en intelligence artificielle. Des logiciels tels que Maple, Mathematica et TI-Nspire sont devenus disponibles en classe de mathématiques à partir des années 1990. Cependant, depuis 2016, ce sont surtout les outils de raisonnement automatisé dans GéoGébra qui ont démontré toute leur capacité à soutenir la résolution de situations en géométrie. Ces outils permettent aussi bien la découverte de conjectures, la dérivation de propriétés que la démonstration de résultats grâce à l'utilisation de l'algèbre et du calcul symbolique.

L'analyse fréquentielle d'erreurs, courante dans la pratique enseignante, ouvre de nouvelles perspectives grâce à l'IA, notamment lorsqu'elle est appliquée à l'**analyse des obstacles** rencontrés dans le travail mathématique. En didactique des mathématiques, l'obstacle est un élément constitutif de la connaissance et se manifeste sous la forme d'une erreur récurrente et persistante pour un individu ou un groupe d'élèves, dans le cadre d'un contrat didactique donné. Pour identifier ces obstacles, il est primordial d'obtenir de l'information sur le contexte et le processus de résolution du problème, ainsi que de connaître l'historique de l'élève et d'avoir accès aux données de toute une classe. Dans cette perspective, les approches

hybrides en IA se révèlent particulièrement intéressantes, en combinant l'apprentissage automatique et les réseaux de neurones profonds pour repérer des invariants, établir des catégories ou liens conceptuels. En parallèle, elles utilisent les approches symboliques pour accéder directement au processus de résolution lui-même, permettant notamment d'interpréter un cas de blocage.

Les **systèmes tuteurs intelligents** sont conçus pour interagir avec les élèves, répondre à leurs questions, les guider dans leur apprentissage et les aider à résoudre des problèmes mathématiques complexes. Cependant, leurs fonctionnalités ne se limitent pas à ces aspects. Ils se révèlent bénéfiques en formation des enseignants de mathématiques, car ils permettent de simuler l'action tutrice. En ajustant le paramétrage spécifique d'un système informatique donné, les enseignants peuvent améliorer leur sens didactique en testant l'effet de leurs actions et en se mettant à la place de l'élève. Cette approche facilite l'anticipation de solutions et la planification d'itinéraires d'apprentissage personnalisés pour chaque élève.

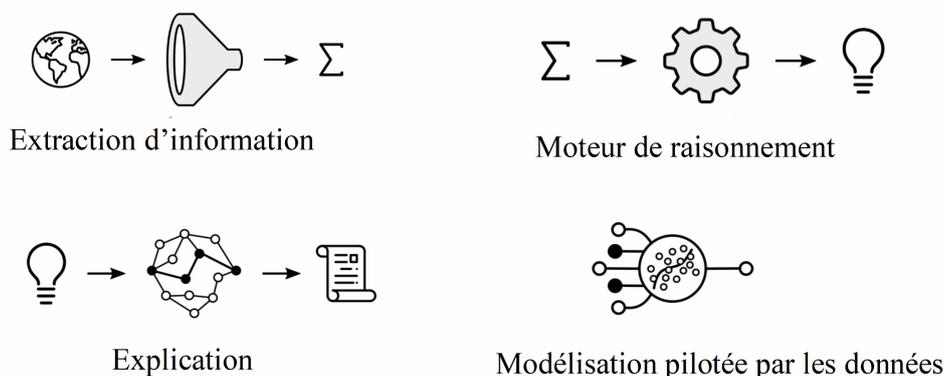
Les exemples précédents démontrent comment l'utilisation de l'IA permettrait aux enseignants de mathématiques d'accéder à de nouvelles potentialités autrefois souhaitées, mais pas nécessairement accessibles. En automatisant certaines tâches plus mécaniques, les enseignants pourraient à la fois améliorer l'apprentissage des élèves, leur offrir un soutien personnalisé et optimiser leur temps d'enseignement. Ainsi, ils pourraient se concentrer davantage sur des aspects pédagogiques essentiels révélés par les acquis de la didactique des mathématiques.

Pour des raisons d'économie d'espace, nous n'avons pas discuté de certaines technologies comme la réalité virtuelle, qui permet de percevoir et de simuler une réalité modélisée (Rodríguez, 2022), ni la réalité augmentée, utilisée pour modéliser des formes ou des motifs présents en ville (Martínez-Sevilla & Alonso, 2022). Cependant, il est essentiel de souligner que l'intelligence artificielle (IA) reste extrêmement utile pour améliorer le potentiel de représentation et d'analyse des objets physiques, des connaissances, etc. Dans de telles situations, l'interaction sujet-milieu est au cœur du nouveau travail mathématique (Flores Salazar et al., 2022). En outre, nous n'avons pas abordé les projets STEAM qui intègrent les sciences, la technologie, le génie, les arts et les mathématiques (Diego-Mantecón et al., 2022), bien que l'IA risque d'y jouer un rôle grandissant au cours des prochaines années.

### *Pour le chercheur ou le didacticien*

Le chercheur se trouve à la croisée des chemins en tant que concepteur et utilisateur de l'intelligence artificielle. Elle lui offre une source d'informations inédites sur les processus d'enseignement et d'apprentissage, contribuant ainsi à enrichir la recherche en didactique tout en améliorant les pratiques pédagogiques et le matériel d'enseignement. Les modèles didactiques jouent un rôle clé dans la compréhension approfondie de l'intelligence artificielle. Ainsi, l'IA statistique s'appuie sur des

schémas pour réaliser ses analyses, tandis que l'IA symbolique se concentre sur la manipulation de symboles et de règles logiques pour raisonner ou résoudre les problèmes, et l'IA sémantique requiert des modèles hybrides pour concevoir ses structures décisionnelles. L'étude du rôle du chercheur dans l'application de l'intelligence artificielle à l'enseignement nécessite une prise en compte particulière de la classification proposée par Van Vaerenbergh et Pérez-Suay (2022) pour les systèmes d'IA dédiés à l'enseignement des mathématiques (figure 4).



**Figure 4.** Quatre types d'IA pour l'enseignement des mathématiques, tirée de Van Vaerenbergh et Pérez-Suay (2022)

L'IA d'**extraction d'information** utilise les données issues du monde réel comme un énoncé de problème, un dessin géométrique ou encore les données issues de tout type de capteurs et les transforme en une représentation mathématique comme une équation ou un ensemble de propriétés sur une figure donnée. Ce type d'IA peut assister l'élève dans l'analyse d'un problème mathématique et fournir des informations à un tuteur intelligent. Pour l'enseignant et le chercheur, elle pourrait fournir des données sur les énoncés ou encore analyser les attitudes faciales de l'élève ou son comportement sur une interface numérique.

Les **moteurs de raisonnement** permettent, à partir d'un ensemble de données mathématiques, de construire un raisonnement logique basé sur des règles prédéfinies. Ces outils de raisonnement automatisés (ORA) pour la résolution de problèmes mathématiques existent par exemple dans le logiciel Géogébra (Kovács et al., 2018) ou à travers le système COQ (cf. COQ, 2002). Ils peuvent également être bénéfiques pour les élèves engagés dans la résolution de problèmes, ainsi que pour les étudiants en informatique chargés de concevoir des logiciels conformes aux règles de sûreté informatique (Delahaye et al., 2005). Pour l'enseignant et le chercheur, ils permettent un accès anticipé à l'exhaustivité des réponses et raisonnements possibles.

Les outils permettant l'**explication des raisonnements** visent à rendre compréhensibles par un utilisateur humain les résultats de l'IA. Par exemple, avec les ORA, on peut savoir dans quelle mesure le vrai découle d'une situation géométrique, sans connaître toutefois le moyen technique qui génère la réponse. À l'interne, l'outil modélise la situation par l'algèbre, il exécute un calcul complexe puis il interprète la réponse dans le contexte du problème. Dans certains cas, il peut fournir plus de réponses que nécessaire ou omettre certaines propriétés, car le plan réel est modélisé par le plan complexe. Par conséquent, il est essentiel de disposer d'un outil permettant de construire un raisonnement compréhensible pour les humains, en parallèle du calcul effectué par la machine, et dont la réponse s'intègre parfaitement dans le contexte d'origine. Ces outils d'explication sont ainsi bénéfiques pour les trois types d'utilisateurs que nous avons identifiés, car ils facilitent l'interprétation des représentations mathématiques ou des raisonnements produits.

Le dernier type d'outil s'appuie sur un **grand nombre de données pour inférer un modèle prédictif**. Ce type d'IA est associé aux techniques et méthodologies de forage de données. Il s'adresse principalement à l'enseignant et au chercheur en permettant, grâce à l'analyse des données issues du travail de l'élève, d'identifier des processus d'apprentissages et de prédire des obstacles ou des besoins. Il en est de même en formation des enseignants.

En croisant la typologie précédente avec l'idée de sujets en interaction, une classification émerge, permettant de saisir l'intérêt de l'intelligence artificielle en tant qu'outil d'augmentation de l'intelligence au service de l'enseignement et de l'apprentissage. Cette convergence nous conduit à examiner de plus près les implications de l'intelligence artificielle dans le domaine didactique. Quel que soit l'interlocuteur de l'IA dans la situation didactique, la conception d'outil informatique utilisant cette technologie soulève deux questions essentielles : la définition de la connaissance (Balacheff, 1994) et sa modélisation, ainsi que la prise en compte des conceptions de l'élève, des interactions didactiques, du raisonnement mathématique, et des interactions pédagogiques, telles que la fonction d'étayage ou la production de rétroactions épistémiques, comme évoquée par Luengo (2009).

Ces différentes modélisations sont au cœur de la didactique, fournissant les cadres nécessaires pour la programmation informatique d'artéfacts numériques. Pour illustrer notre propos, nous examinons dans ce qui suit des projets existants dans le monde francophone, afin de mieux appréhender à la fois le rôle des sujets en interaction avec l'IA et les cadres mobilisés. Nous reprenons plus particulièrement les éléments essentiels de cette typologie afin d'analyser de manière approfondie la manière dont les sujets interagissent avec l'intelligence artificielle et les cadres conceptuels mobilisés dans ces interactions, offrant ainsi une perspective éclairée sur le rôle dynamique de l'IA dans le contexte didactique.

## 2.2. Exemples de projets utilisant l'IA

En nous basant sur des revues récentes des projets liés à l'IA dans le monde francophone (Cherigny et al., 2020), prolongées par le projet Hype 13<sup>9</sup>, et sur la table ronde multidisciplinaire à la 21<sup>e</sup> école d'été de l'Association pour la recherche en didactique des mathématiques (ARDM) (Emprin, 2023), nous avons identifié les projets en cours qui illustrent et fournissent un aperçu des développements actuels de l'IA. Nous présentons ainsi QED-Tutrix, qui interroge les tuteurs intelligents, le projet Adaptiv'Math pour illustrer le pilotage par les données, SIC et SAP pour les systèmes experts, Adaptiv'Math et MindMath pour la modélisation des apprentissages des élèves, et Teleos pour l'usage de modèles didactiques. Le tableau 2 résume succinctement la typologie élaborée à la section 2.1, mettant en lumière les aspects qui ne sont pas présents dans les cinq projets identifiés au cours de notre exploration des recherches actuelles.

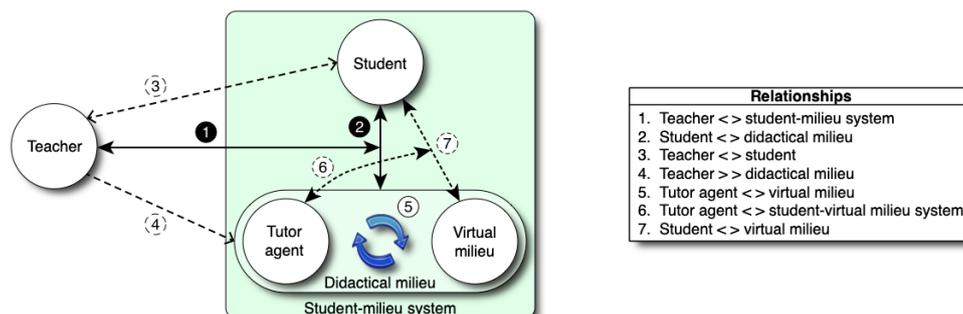
**Tableau 2.** Composition des projets de recherche en IA selon l'orientation principale et le type d'usage

		<b>QED-Tutrix</b>	<b>Adaptiv'Math</b>	<b>SIC SAP</b>	<b>Mind Math</b>	<b>TELEOS</b>
<b>Orientation</b>	Apprenant	×	×		×	×
	Enseignant			×		
	Chercheur	×		×		
<b>Type d'usage</b>	Génération automatique de contenu					
	Correction et évaluation automatique					
	Analyse des progrès des apprenants		×		×	×
	Soutien personnalisé	×	×		×	×
	Assistance au raisonnement mathématique ou didactique	×		×		

<sup>9</sup> Le livrable Q9 du projet HYPE 13, intitulé « Hybridation des formations de l'enseignement supérieur » et inscrit dans le cadre du Programme d'Investissement d'Avenir (PIA) de l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) en France, a facilité l'élaboration d'un état de l'art portant sur les projets exploitant l'intelligence artificielle.

### *QED-Tutrix*

Le projet QED-Tutrix a choisi une approche de développement associant des chercheurs spécialisés en didactique des mathématiques et en génie informatique. Cette collaboration vise à faciliter l'intégration et l'émergence de modèles innovants. L'outil développé constitue un environnement interactif qui s'adapte à chaque élève et vise à équilibrer les interactions entre l'intelligence naturelle de l'utilisateur et l'intelligence artificielle du système tuteur (Font et al., 2022). Un élément central de cet environnement est l'agent tuteur, qui joue un rôle complémentaire à celui de l'enseignant, tout en étant considéré comme faisant partie intégrante du milieu au sens de la TSDM (figure 5).



**Figure 5.** L'encapsulation du tuteur au sein du milieu permet une distinction plus claire entre les principales relations de l'enseignant (1 sur 2) et celles de l'agent tuteur (6 sur 7), tout en soulignant les différents types de milieux impliqués (Richard et al., 2011, p. 428).

Le système QED-Tutrix (QEDX) a été créé pour soutenir la résolution de problèmes de preuves en géométrie. Il a été conçu de façon à intégrer les utilisateurs, et ce très tôt dans le processus de conception. Ainsi, l'élève qui résout un problème de géométrie peut construire une figure dynamique, raisonner sur celle-ci, en dégager une conjecture, l'écrire, la démontrer ou la réfuter. Au besoin, un agent pédagogique virtuel répond aux difficultés de chaque élève par des messages sous forme de phrases ou de problèmes qui s'adaptent au comportement et à la stratégie de chacun. L'intelligence du système tuteur doit être capable de communiquer avec l'élève dans la logique du problème, avec son langage et ses contraintes, et anticiper des moments de blocages qui se lient aux connaissances en jeu. Par ses possibilités de messages discursifs (propositions verbales) et de messages cognitifs (problèmes connexes, voir ci-après), le tuteur s'associe au modèle géométrique de l'utilisateur. Il s'agit d'un avantage dès qu'on cherche à produire l'articulation d'un raisonnement humain ou produire des preuves qui sont lisibles (Quaresma, 2022). Toutefois, l'approche symbolique du système sous forme de graphe inférentiel exige la production préalable de toutes les preuves possibles, ce qui soulève un enjeu combinatoire bien connu en informatique. En revanche, l'organisation déductive de QEDX permet

d'engager les élèves dans des preuves instrumentales, bien au-delà des preuves discursives traditionnelles. En effet, pour certaines étapes de raisonnement, il est possible d'introduire un outil technologique en interaction en guise de justification des inférences, prolongeant de ce fait la structure discursive du système, comme la construction d'une figure dynamique, l'exécution d'un algorithme ou la modélisation d'une situation réelle. Le fait de pouvoir agir au cœur des justifications est compatible avec un prolongement vers des approches statistiques (méthode mixte de recherche en IA).

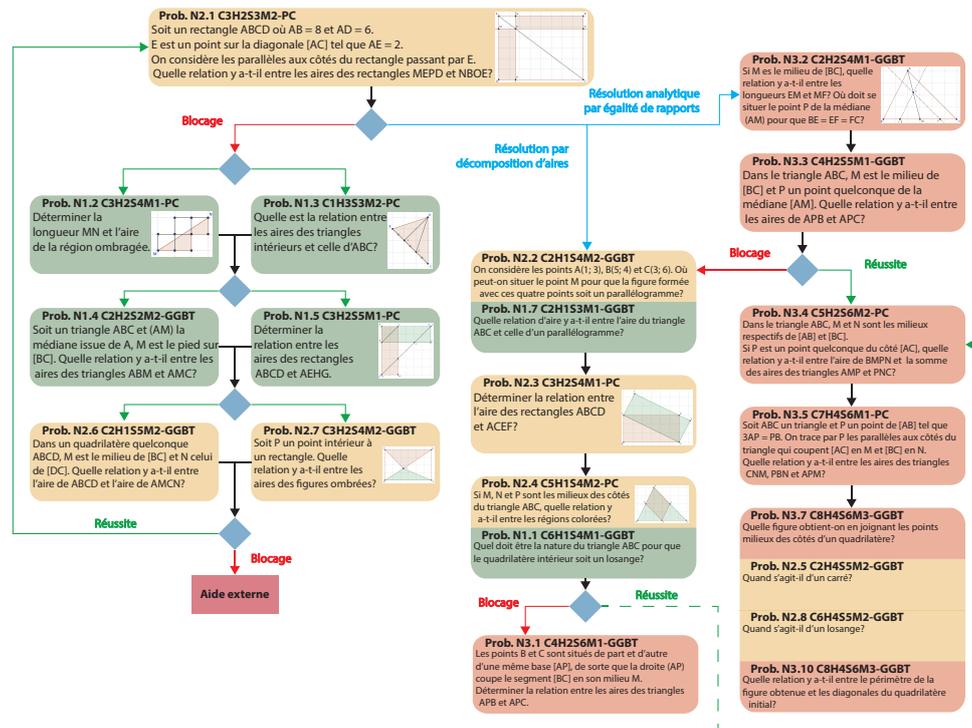


Figure 6. Arbre de problèmes connexes en géométrie pour un même problème racine (énoncé tout en haut), tiré de Richard et al. (2018).

L'enseignement traditionnel consiste à poser des problèmes en série, sans égard à la proximité des problèmes déjà résolus ni aux connaissances acquises au cours de l'apprentissage. Pourtant, les problèmes choisis par l'enseignant sont liés, ils appartiennent à un moment fort de l'étude d'un même groupe de notions (chapitre du cours). Il faut donc considérer la complexité des liens qui les unissent pour mieux comprendre la prise de décision par l'enseignant. Car si la responsabilité de ce dernier est la dévolution du problème, c'est aussi la dévolution du « bon problème ». C'est-à-dire celui qui est adapté aux conceptions de l'élève en jeu (par exemple, dans

le modèle cKç de Balacheff et Margolinas, 2005) et non pas seulement supposées. Ainsi, lorsque le choix d'un problème découlant survient à la suite d'un moment de blocage ou de la réussite d'un premier problème (problème racine), on peut engendrer un itinéraire d'apprentissage conséquent (figure 6). C'est dans un tel contexte que l'IA devient redoutable, intégrant la relation forte entre un moment de blocage et la venue de problèmes découlants, sorte de message cognitif qui dépend de critères de connexité et qui vise à relancer un processus de résolution bloqué (Richard et al., 2018). Dans la TSDM, un blocage devient une rupture de contrat avec ce qui est attendu dans la logique du problème (problème racine), les problèmes connexes surviennent en agissant au sein même de la conception. Par conséquent, la dévolution du « bon problème » ne négocierait pas à la baisse le savoir visé par le problème racine, mais il aurait aussi le potentiel de relancer le processus de résolution en intervenant directement au sein du système sujet-milieu, sans pour autant fournir véritablement des réponses en même temps que les questions.

Dans ce qui précède, on observe un impérieux besoin de synergie entre les domaines de l'informatique et de la didactique, dans le but d'aborder de manière plus précise « la problématique de la lisibilité et de l'accessibilité des preuves, ainsi que l'adaptabilité des preuves aux raccourcis inférentiels », comme le mentionnent Font et al. (2018). Cela fait référence aux méthodes ou techniques qui permettent naturellement à l'être humain de simplifier ou d'accélérer le processus d'inférence logique. De plus, ce travail requiert l'emploi de cadres théoriques spécifiques à la didactique, tels que la TSDM, en commençant par le concept de contrat didactique selon Brousseau (1990). De même, la Théorie des Espaces de Travail Mathématique (ThETM) (Kuzniak et al., 2022) s'avère particulièrement avantageuse pour coordonner les genèses discursive, sémiotique et instrumentale au sein de l'interaction sujet-milieu. Par ailleurs, des cadres spécifiques aux sciences informatiques, comme les études sur les preuves automatiques présentes dans GRAMY (Matsuda & VanLehn, 2005), semblent également essentiels.

### ***SIC et SAP***

Dans la poursuite du soutien aux enseignants, les logiciels SIC (Simulateur Informatique de Classe) et SAP (Simulateur d'Analyse de Pratique) fournissent des instruments de formation fondés sur un système expert alimenté par des données, tout en générant de nouvelles données.

Les outils développés par Emprin (2011 ; 2022 ; 2023) permettent la simulation des interactions humaines dans deux contextes distincts : d'une part, entre un professeur et des élèves au sein d'une classe dédiée aux mathématiques (SIC), et d'autre part, entre un formateur et un enseignant lors d'une séance d'entretien de formation (SAP). Ils sont basés sur une forme simple d'IA, les systèmes experts nécessitent de réduire la complexité de la situation d'interaction en construisant un modèle structuré

et calculable permettant de décrire les protagonistes, leur état et leurs relations. Cette description s'effectue selon deux approches distinctes. D'abord, elle est théorique et repose sur les connaissances issues des recherches en didactique, notamment en ce qui concerne la situation didactique illustrée à la figure 3. Ensuite, elle est heuristique, résultant de l'analyse des situations réelles observées en classe. Cette analyse implique une observation attentive des choix faits par l'enseignant et de leurs effets sur les activités des élèves ou de l'enseignant lui-même. Il convient de souligner que le logiciel génère exclusivement des messages cognitifs à l'intention de l'utilisateur (ce terme étant employé dans le sens défini précédemment, distinguant les messages discursifs des messages cognitifs). Ainsi, chaque action entreprise par l'enseignant au sein du logiciel déclenche une rétroaction sous la forme d'une réaction de la ou des avatars, ces derniers proposant à leur tour de nouvelles actions. La démarche de formation impliquant l'utilisation de ces outils exige du formateur qu'il guide les apprenants ayant utilisé le logiciel dans l'interprétation de ces messages cognitifs. Il s'agit également pour les apprenants de formuler de manière explicite les connaissances et les compétences professionnelles sous-jacentes qui en découlent.

### *Adaptiv'Math*

Le projet, porté conjointement par l'INRIA (équipe Flower) et le laboratoire LIP6 de Sorbonne Université, a pour objectif de présenter aux élèves des parcours individualisés en utilisant deux algorithmes d'IA : ZPDES (Zone of Proximal Development and Empirical Success) pour la modélisation des mécanismes d'apprentissage humain (Clément, 2018) et SACCOM (Student Activity Clustering for Classroom Orchestration and Monitoring) qui permet de regrouper les élèves en fonction des exercices réalisés ou des types d'erreurs commises (Harrak & Bouchet, 2021). Tandis que le premier algorithme se concentre sur l'élève en lui proposant indirectement des exercices adaptés, le second soutient l'enseignant dans sa compréhension des particularités de groupe-classe et de chaque apprenant.

En tant qu'IA pilotée par les données, le projet Adaptiv'Math intervient au niveau de l'enseignant. Il analyse les réponses des élèves lors d'activités de résolution de problèmes, ce qui permet de proposer par la suite des exercices adaptés. Cette approche se traduit par un apprentissage personnalisé pour chaque élève.

### *MindMath*

MindMath propose à chaque élève un parcours d'apprentissage en ligne via des exercices mathématiques autoadaptatifs conformes au programme d'études. Grâce à son moteur d'IA, la plateforme favorise une progression individualisée en recommandant des activités appropriées pour un développement continu. Elle évalue

le niveau de compétence de chaque élève et lui offre un soutien personnalisé en détectant automatiquement les obstacles ou en réponse à ses demandes d'assistance.

En utilisant des approches telles que les classes inversées ainsi que les stratégies adaptatives, MindMath a pour objectif de renforcer la maîtrise des compétences fondamentales en mathématiques au moyen d'exercices d'entraînement spécifiques à chaque niveau scolaire. Cette plateforme en ligne, développée en collaboration avec Tralalere, propose des profils pour les enseignants, les parents et les apprenants, ce qui permet une personnalisation de l'enseignement. Le moteur de résolution de problèmes mathématiques, issu de la coopération avec le laboratoire LDAR et intégrant le module Domoscio, repose sur une ontologie didactique avancée<sup>10</sup>. Il s'ajuste en temps réel en fonction du raisonnement de chaque élève.

Le projet MindMath exploite les connaissances didactiques relatives à l'apprentissage de l'algèbre élémentaire et de la géométrie pour guider deux algorithmes distincts. Le premier est dédié à la génération de nouvelles situations d'apprentissage, tandis que le second facilite la prise de décisions en vue de fournir des rétroactions épistémiques instantanées (Jolivet et al, 2021). Cette initiative repose sur l'analyse didactique des praxéologies au sens de Chevallard (1999). Les connaissances didactiques sont notamment mises à contribution pour atténuer le problème du « démarrage à froid » de l'algorithme d'IA.

### **TELEOS**

Bien qu'il ne soit pas spécifiquement axé sur l'apprentissage scolaire, le projet TELEOS (Technology Enhanced Learning Environment for Orthopedic Surgery) adopte une perspective novatrice en intégrant des théories issues de la didactique des mathématiques et une approche mixte. C'est pourquoi il mérite d'être mentionné. Ce projet porte sur la formation en chirurgie orthopédique à travers la simulation, visant principalement à approfondir la compréhension des processus d'enseignement-apprentissage au sein d'un contexte perceptif gestuel et empirique. L'application du modèle cKç (Balacheff & Gaudin, 2002) est à la base de la structure d'un réseau bayésien (Chieu et al., 2010), permettant à la fois de représenter graphiquement la connaissance sous forme probabiliste et de contrôler la prise de décisions. C'est ce même modèle qui est employé pour raisonner sur les conceptions des élèves en mathématiques, dans le même sens que nous l'avons employé implicitement à la section 2.1. Les expériences menées sur simulateur ainsi que les retours des utilisateurs sont ensuite exploités en utilisant ce modèle pour faire évoluer le système (Toussaint et al., 2015). L'IA se tourne vers le chercheur pour mieux comprendre le processus d'enseignement apprentissage dans le cas de cette activité spécifique.

---

<sup>10</sup> Modèle de représentation structurée du savoir.

L'ensemble de ces projets illustre comment les interactions au sein de la relation didactique s'établissent lorsque le milieu est un artefact numérique qui intègre des techniques de l'IA. Plutôt que de détailler minutieusement, à la manière de la figure 5, le rôle de chaque composante selon les technologies, notre intention visait surtout à présenter des réalisations existantes (voir aussi Lagrange et al., 2023).

### 2.3. IA et cadres théoriques de la didactique des mathématiques

Nos discussions antérieures portant sur l'application de l'IA à l'enseignement des mathématiques, ainsi que les exemples de projets exploitant cette technologie, ont adopté une approche axée sur les interactions et le travail mathématique. Dans ce contexte, la théorie des situations didactiques en mathématiques, élaborée par Guy Brousseau, se présente comme préceuse. De plus, la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) initiée par Yves Chevallard à la suite de ses réflexions sur la transposition didactique, a été brièvement abordée. Cette théorie postule que toute activité humaine peut être définie dans le cadre d'une praxéologie. Bien que conçues avant l'essor de l'IA, ces théories fondamentales en didactique des mathématiques demeurent pertinentes pour les aspects de l'intelligence augmentée. Lorsqu'on aborde un phénomène aussi complexe que l'apprentissage des mathématiques, il est judicieux de le considérer comme un écosystème dans lequel l'apprenant s'adapte et modèle le milieu selon ses besoins. Cet écosystème peut se tisser sur plusieurs axes conceptuels entrelacés qui, étant à la fois riches et interconnectés, illuminent la trame subtile d'une toile conceptuelle cohérente. Sans perte de généralité, nous avançons que la culture didactique valorise :

1. Un axe **épistémologique**, pour plonger dans la tradition bimillénaire des Éléments d'Euclide ou dans les heuristiques de résolution de problèmes de George Polya ainsi que la dialectique des preuves et des réfutations d'Imre Lakatos. Ces bases épistémologiques sous-tendent la quête de comprendre comment la construction du savoir mathématique s'épanouit dans un environnement éducatif adapté à l'IA.
2. Un axe **sémiotique**, étant donné que le langage mathématique constitue une langue à part entière. Des théories telles que celles des fonctions du langage de Raymond Duval ou l'approche fonctionnelle-structurelle de Richard et Sierpiska éclairent les mécanismes par lesquels les concepts mathématiques sont communiqués, interprétés et intériorisés à l'ère du numérique.
3. Un axe **didactique**, avec des théories comme la TSDM, la TAD ou la ThETM qui ont aussi fait leurs preuves dans différents projets didactiques sur l'IA pour étudier les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage, permettant une meilleure compréhension de la manière dont les situations, les pratiques pédagogiques et le contexte sociétal influencent la formation et la mise en œuvre des concepts mathématiques.

4. Un axe **instrumental**, qui sert de clé pour déverrouiller l'accès à la compréhension du nouveau travail mathématique à travers les éléments de la théorie de l'instrumentation de Pierre Rabardel, Michèle Artigue ou Jean-baptiste Lagrange, et le modèle cKç de Balacheff et Margolinas pour le calcul de situations didactiques. Si cet axe est nécessaire pour se comparer au travail mathématique traditionnel, il permet surtout d'explorer comment les outils et les artefacts influencent la perception et l'application des concepts mathématiques.
5. Un axe **inférentiel** qui explore les mécanismes de la prise de décision, que ce soit grâce à la théorie de la prise de décision d'Alan Schoenfeld ou les enjeux du raisonnement instrumenté et des preuves instrumentales, pour éclairer sur les notions de nécessité ou de contrôle dans l'articulation des connaissances mathématiques des classes contemporaines.

Ensemble, ces cinq axes éclairent l'ensemble du panorama, offrant ainsi une vision approfondie des interactions et du travail mathématique dans toute leur richesse et complexité. De plus, ce sont des axes qui ont été largement éprouvés par la recherche, ce qui les rend aptes à orienter la modélisation informatique nécessaire au déploiement des algorithmes d'intelligence artificielle.

La modélisation des conceptions de l'apprenant en géométrie à partir du modèle cKç et d'une approche multiagent (Weber et al., 2002) en est l'un des premiers exemples français d'intégration didactique-informatique. Le modèle Ontoprax (Chaachoua et al., 2014), qui a été testé en algèbre élémentaire, est également un bon exemple de ce type d'interaction, s'appuyant sur le cadre praxéologique et la représentation sous forme d'ontologies. Pour aborder le défi inhérent à la modélisation des mécanismes d'apprentissage humains, le projet Adaptiv'maths s'appuie sur la théorie du Flow, selon Csikszentmihalyi (1975 ; 1990), et le concept de la zone proximale de développement de Vygotsky (1978). Cette démarche met en évidence la nécessité de créer un nouveau cadre conceptuel qui fusionne les perspectives didactiques et informatiques. Cette convergence vise à explorer en profondeur certains aspects du processus d'apprentissage à l'aide d'outils technologiques reposant sur l'IA. Ces projets illustrent la fécondité de la collaboration entre les sciences informatiques et la didactique des mathématiques. Les perspectives ouvertes abondent et témoignent de l'étendue des travaux encore envisageables.

L'ouvrage édité par Richard et al. (2022) souligne la contribution de l'IA à l'enseignement des mathématiques, notamment par la création de milieux d'IA pour la réalisation du travail mathématique à l'école. Fruit d'une collaboration entre didacticiens, mathématiciens et informaticiens, il rappelle que les perspectives disciplinaires représentent des héritages culturels fréquemment négligés lors de l'intégration des différents domaines. Ainsi, les sciences mathématiques et informatiques conditionnent étroitement le travail de l'enseignant, l'apprentissage et la mise en œuvre de pratiques pédagogiques. Alors que les sciences informatiques

s'orientent de plus en plus vers des réalisations techniques, les mathématiques accordent une attention particulière à l'idéalisation de leurs fondements. Néanmoins, les choix de modèles en informatique exercent une influence profonde sur la mise en œuvre et l'interprétation des connaissances, pouvant amplifier certains effets indésirables comme la perte de contrôle sur la nécessité des liens qui les unissent. Du point de vue des sciences didactiques, l'enseignement des mathématiques s'appuie sur la modélisation et l'analyse a priori, tout en confrontant les résultats à l'expérience humaine. L'intervention croissante des artefacts numériques nécessite une intégration plus poussée des connaissances mathématiques dans les modèles informatiques, en vue de reconnaître l'acquisition de connaissances dans le nouveau travail mathématique. Bref, une question centrale demeure, elle consiste à explorer la compréhension de l'intelligence humaine afin de la stimuler efficacement au moyen de l'intelligence artificielle.

Les analyses effectuées mettent en évidence plusieurs éléments cruciaux. Il est primordial, dès la conception des outils, de prendre en compte la modélisation des connaissances requises pour l'implémentation de l'IA. Une collaboration étroite et constante entre didacticiens et informaticiens joue un rôle essentiel. Il est impératif d'incorporer les aspects du travail mathématique contemporain, avec ses dimensions sémiotiques, discursives et instrumentales, dans les outils d'IA. En plaçant l'intelligence du côté de l'utilisateur et en considérant les outils comme des aides pour son travail mathématique, les confusions sont évitées et une réflexion approfondie sur le processus d'enseignement-apprentissage devient possible.

Cependant, l'utilisation des outils d'IA soulève d'autres interrogations qu'il serait inopportun de sous-estimer.

### **3. Questions et perspectives liées à l'IA**

#### **3.1. La question des connaissances et du raisonnement**

La transparence des outils informatiques, y compris ceux basés sur l'IA, par rapport aux connaissances qu'ils intègrent, peut varier considérablement en fonction de leur conception, de leur fonctionnement et de leur processus de développement. Certains outils sont conçus de manière à rendre leur processus décisionnel et leur fonctionnement interne compréhensibles aux utilisateurs, ce qui favorise la transparence. Cependant, pour certaines formes d'IA, notamment l'apprentissage automatique et les réseaux de neurones profonds, la complexité des modèles peut rendre ardu l'explicabilité exhaustive de chaque décision ou prédiction. Des efforts sont en cours pour élaborer des méthodes d'explication et de justification pour ces systèmes, bien que des défis subsistent pour atteindre une transparence « complète » et « universelle » dans tous les domaines de l'IA, en supposant que la complétude et l'universalité soient réalisables. De fait, il existe des compromis entre la complexité

des modèles et leurs performances. Simplifier un modèle en vue d'accroître sa transparence pourrait simultanément en réduire l'efficacité.

L'IA statistique n'opère pas de la même manière que les démonstrations mathématiques traditionnelles. Les démonstrations mathématiques sont basées sur des axiomes, des règles logiques et des étapes clairement définis pour arriver à des conclusions mathématiques rigoureuses. Elles sont construites sur une base de vérités établies et suivent une logique formelle, avec certains raccourcis inférentiels que l'humain peut prendre sous certaines conditions et qui se distinguent nettement des approximations propres à l'IA. En revanche, l'IA, notamment les modèles basés sur l'apprentissage profond, opère en analysant de vastes quantités de données pour discerner des motifs et des associations. Elle est apte à produire des résultats qui peuvent être utiles, voire précis, mais ces derniers ne sont pas nécessairement ancrés dans une logique mathématique formelle. L'IA ne fonctionne pas avec une compréhension intrinsèque de la vérité mathématique ou de la logique déductive comme le font les démonstrations mathématiques, et surtout, elle ne raisonne pas. Au mieux, elle peut modéliser une situation par des approches symboliques, mais cela revient à questionner le processus même de modélisation.

Les modèles basés sur l'apprentissage profond de l'IA statistique ne peuvent pas être considérés comme des raisonnements au sens mathématique traditionnel, principalement en raison de leur différence inhérente dans leur fonctionnement et leur prise de décision. Voici quelques points clés qui expliquent cette disparité :

- **Opérations non explicites.** Dans les raisonnements mathématiques traditionnels, les déductions et les étapes de calcul sont généralement explicites, basées sur des axiomes et des règles logiques. En revanche, dans les modèles d'apprentissage profond, les opérations qui se produisent à l'intérieur de couches cachées sont souvent des transformations non linéaires complexes et hautement abstraites qui ne peuvent pas être directement interprétées par un raisonnement mathématique explicite.
- **Apprentissage à partir des données.** Les modèles d'apprentissage profond apprennent à partir de données plutôt qu'à partir de règles mathématiques préétablies. Ils identifient des motifs et des associations dans de grandes quantités de données, ce qui peut conduire à des décisions précises, mais sans nécessairement générer une compréhension conceptuelle ou déductive au sens mathématique traditionnel.
- **Représentations latentes.** Les modèles d'apprentissage profond génèrent des représentations internes provisoires des données, que l'on dit « latentes », dans des espaces vectoriels multidimensionnels. Ces représentations sont souvent difficiles à interpréter directement et ne correspondent pas nécessairement à des concepts mathématiques ou géométriques compréhensibles.

- **Opacité des relations.** Les interactions complexes entre les neurones dans les réseaux de neurones profonds peuvent rendre difficile l'explication claire de la manière dont une décision est prise. Par exemple, dans la classification d'unités significatives d'une figure géométrique dessinée sur papier, il peut être difficile de dire pourquoi un réseau de neurones spécifique a identifié certaines caractéristiques comme importantes pour dire, par exemple, qu'une figure est un triangle ou deux droites sont perpendiculaires.
- **Manque de logique formelle.** Malgré les possibilités des approches symboliques modélisées, comme avec les ORA, les modèles d'apprentissage profond n'opèrent pas sur la base d'une logique mathématique formelle. Ils utilisent des fonctions d'activation non linéaires pour combiner des entrées, ce qui peut aboutir à des résultats précis, mais les mécanismes internes ne sont pas nécessairement explicables par des déductions logiques. De fait, les mécanismes internes de ces modèles, c'est-à-dire comment ils parviennent exactement à leurs résultats à partir des données d'entrée, sont issus d'une multitude d'interactions entre les neurones et les poids du modèle, ces interactions étant modifiées pendant le processus d'apprentissage à partir des données.

En somme, les modèles basés sur l'apprentissage profond sont puissants pour résoudre des problèmes complexes en exploitant des relations subtiles dans les données, mais ils diffèrent fondamentalement des raisonnements mathématiques traditionnels. Ce type d'IA peut utiliser des méthodes probabilistes et des techniques d'optimisation, mais ses résultats doivent généralement être vérifiés par des mathématiciens humains pour garantir leur validité. Les preuves mathématiques, quant à elles, restent le résultat d'un raisonnement humain basé sur des principes mathématiques établis.

La première question concerne la nature de ce que produit l'IA. Ce n'est pas tant la nature intrinsèque de la connaissance produite qui nous intéresse — même si c'est aussi le cas —, mais sa valeur pour l'humain qui interroge le milieu au cours de la réalisation du travail mathématique. Ce n'est pas parce que des opérations sont implicites, qu'il change d'avis en cours d'apprentissage, que ses représentations sont en gestation, qu'il décide en cachette ou qu'il manque de logique formelle que l'IA est problématique. Nous en avons déjà parlé en début de texte, la situation est paradoxale, c'est l'augmentation de l'intelligence pour l'humain qui est au cœur de notre questionnement didactique. Malgré cela, quelle est la nature des connaissances produites par les algorithmes de l'IA ? De toute évidence, le manque de données empiriques entrave une analyse approfondie de l'augmentation de l'intelligence à travers les outils issus de l'IA, particulièrement dans un contexte de progrès technologiques rapides et en l'absence d'une collaboration solide et durable entre la didactique des mathématiques et l'informatique. Néanmoins, il est possible d'apporter des éléments de réponse sur la nature des connaissances générées.

Dans le cadre des approches symboliques, les connaissances engendrées se manifestent de manière explicite et compréhensible. Les algorithmes symboliques élaborent des règles, des corrélations ainsi que des représentations conceptuelles, pouvant être interprétés et justifiés de façon logique. Habituellement formulées sous forme d'énoncés explicites, ces connaissances permettent une analyse directe et une compréhension immédiate des résultats. En ce qui concerne les approches statistiques, les connaissances engendrées sont généralement d'ordre empirique et ancrées dans les données. Les algorithmes d'IA sont conçus pour analyser de vastes quantités de données et révéler des schémas, des tendances et des associations dissimulées au sein de ces données. Les connaissances générées par l'IA sont souvent des généralisations tirées des exemples présents dans les données d'entraînement, mais ces connaissances peuvent être sensibles aux biais présents dans ces données, ce qui peut entraîner des prédictions incorrectes ou discriminatoires<sup>11</sup>. De plus, ces algorithmes ne comprennent pas intrinsèquement les concepts abstraits ou les principes fondamentaux derrière les données. Ils sont axés sur la reconnaissance de modèles et d'associations, mais ne possèdent pas de compréhension conceptuelle comme celle qu'ont les humains. Il faut donc que l'usage de l'IA soit en adéquation avec le type de problème auquel l'approche se destine. En d'autres termes, ces approches présentent leurs avantages et leurs limites. La décision entre l'adoption d'un algorithme de l'une ou l'autre approche, voire l'utilisation conjointe des deux, dépendra intrinsèquement de la nature du problème à résoudre et des objectifs de l'analyse en jeu.

En ce qui concerne l'interaction sujet-milieu, cette dynamique peut adopter une nature plus itérative au sein d'une démarche d'adaptation propre aux approches symboliques. Cette itération se manifeste à travers des ajustements successifs au cours des boucles de modélisation, visant à harmoniser la réalité avec les concepts mathématiques. En contraste, les approches statistiques tendent à favoriser un processus d'affinement ou de perfectionnement répété, axé sur l'atteinte de la précision plutôt que sur la construction d'une compréhension conceptuelle approfondie. Dans chaque cas, il est possible de décrire ce processus en termes d'idonéité tout au long du travail mathématique (cf. sections 1.4 et 1.6).

### **3.2. Les effets « boîte noire » et les implicites dans l'interaction avec le milieu**

La problématique abordée ici consiste à déterminer si les effets liés à la notion de « boîte noire » se limitent uniquement à des effets indésirables. Encore une fois, il convient de différencier la connaissance générée par la machine de celle caractéristique du système sujet-milieu. Traditionnellement, l'expression « boîte

---

<sup>11</sup> Des effets significatifs se manifestent notamment sur les plans social, économique, juridique, éthique, médiatique et culturel. Toutefois, en raison de contraintes thématiques, une exploration approfondie de ces impacts demeure ici hors de portée.

noire» renvoie à l'idée que le fonctionnement interne complexe d'un système, tel qu'un algorithme d'IA, peut demeurer difficile à appréhender ou à expliquer, même lorsque les résultats sont observables. Cette opacité peut compliquer l'interprétation des décisions prises par l'IA et engendrer des conséquences imprévues. Ainsi, en sollicitant ChatGPT, qui repose principalement sur des algorithmes statistiques, pour réécrire un texte à l'aide de la méthode S+7<sup>12</sup>, celui-ci s'exécute sans hésitation. Cependant, si l'on prend le texte ainsi réécrit et qu'on lui applique la méthode S-7, il ne retrouve pas son état initial. La machine ne peut inverser cette opération, et il devient impossible de déterminer le référentiel utilisé. En revanche, pour un être humain, cela reviendrait simplement à utiliser un même dictionnaire. En d'autres termes, l'IA génère une réponse qui a un effet sur le sujet (réécriture du texte avec un septième substantif subséquent ou précédent), mais elle est incapable de contrôler la réponse obtenue comme l'humain. Pour la réalisation du travail mathématique, on imagine facilement les fâcheuses conséquences qu'entraînerait un référentiel flottant, en particulier pour la production de preuves.

Pourtant, l'IA peut amener des conjectures et modifier la valeur épistémique de la connaissance au sein du système sujet-milieu. Par exemple, pour établir la concurrence des médiatrices d'un triangle, il est possible d'interroger l'IA en utilisant deux approches distinctes. En employant ChatGPT, on entreprend un processus d'idonéité qui converge vers une solution. Une fois la propriété énoncée sous forme de problème, la machine parvient à fournir une réponse adéquate concernant la relation entre le point O et le triangle ABC, mais se fourvoie en ce qui concerne la nature de la droite perpendiculaire à [AC] qui passe par O (figure 7). Lorsque des doutes concernant l'exactitude émergent chez le sujet, celui-ci interroge à nouveau la machine, laquelle est susceptible d'apprendre et de rectifier sa réponse.

Une dynamique différente se met en place si le sujet opte pour la formulation suivante : « j'ai l'impression que vous confondez les types de droites remarquables » (cf. Annexe 2). Dans ce cas, la machine substitue le terme « médiane » par « hauteur » et expose des propriétés liées à la hauteur dans le contexte du problème, même si ses analyses demeurent erronées. Il incombe donc au sujet d'évaluer la pertinence des réponses fournies par la machine et d'ajuster ses questions en fonction de sa compréhension, de ses anticipations et des tests sur le fonctionnement de l'IA. De plus, étant donné que ChatGPT apprend à la fois des données du sujet et de nouvelles sources, les expérimentations ou questionnements ne sont jamais reproductibles sous les mêmes conditions.

---

<sup>12</sup> La méthode S+7 est une technique littéraire développée par les membres de L'Ouvroir de littérature potentielle, désigné par son acronyme Oulipo, auquel appartenait le mathématicien François Le Lionnais et l'écrivain et poète Raymond Queneau. Dans cette méthode, un texte existant est transformé en remplaçant chaque substantif par le septième substantif qui le suit dans un dictionnaire. Cela aboutit à des résultats souvent surprenants et humoristiques.

PH: Dans le triangle ABC, les médiatrices m de [AB] et n de [BC] se coupent en O. Que peut-on dire du point O par rapport au triangle ABC? Que peut-on dire de la droite perpendiculaire au côté [AC] qui passe par O?

 Dans le triangle ABC, le point O est l'intersection des médiatrices m du côté [AB] et n du côté [BC]. Voici ce que l'on peut dire du point O par rapport au triangle ABC et de la droite perpendiculaire au côté [AC] qui passe par O :

- Point O par rapport au triangle ABC :**  
Le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. En d'autres termes, il est équidistant des trois sommets du triangle (A, B et C). Cela signifie que la distance entre O et chaque sommet est la même, ce qui est une propriété importante du centre du cercle circonscrit.
- Droite perpendiculaire au côté [AC] passant par O :**  
La droite perpendiculaire au côté [AC] et passant par O est appelée la médiane issue du sommet B. Cette droite divise le côté [AC] en deux segments égaux et est perpendiculaire à [AC]. Elle joue un rôle important dans la géométrie du triangle, car les trois médianes d'un triangle se croisent en un point appelé le centre de gravité (ou centre de masse).

En résumé, le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, et la droite perpendiculaire au côté [AC] qui passe par O est la médiane issue du sommet B.

PH: J'ai l'impression que vous confondez médiane et médiatrice.

 Je m'excuse pour la confusion dans ma réponse précédente. Vous avez raison, il y a une différence entre les médiatrices et les médianes dans un triangle. Permettez-moi de clarifier :

- Point O par rapport au triangle ABC :**  
Le point O est l'intersection des médiatrices m du côté [AB] et n du côté [BC]. Les médiatrices sont les droites perpendiculaires tracées à partir des milieux des côtés d'un triangle. Le point O, où ces médiatrices se croisent, est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
- Droite perpendiculaire au côté [AC] passant par O :**  
Mes excuses pour la confusion dans ma réponse précédente. La médiatrice du côté [AC] passe effectivement par le point O, et non pas la médiane. La médiatrice d'un côté est la droite perpendiculaire tracée à partir du milieu de ce côté. Donc, la médiatrice du côté [AC] qui passe par O est une droite perpendiculaire à [AC] et qui coupe [AC] en son milieu.

Je vous remercie de votre correction, et je m'excuse pour toute confusion que ma réponse précédente a pu causer.

**Figure 7.** Problème de la concurrence des médiatrices d'un triangle résolu par ChatGPT.

Dans chaque cas, il faut être attentif au fait que même si un utilisateur signifie une erreur à la machine, délibérément ou indirectement, en apportant une information nouvelle, la machine rectifie, mais n'améliore toujours pas la valeur épistémique de la réponse. Seul l'utilisateur en interaction peut en juger : la valeur épistémique

relève d'une propriété du système sujet-milieu. En revanche, si on appliquait en parallèle ou conjointement, un outil de raisonnement automatisé, par exemple à l'aide de WolframAlpha (intelligence augmentée avec Mathematica ou une IA hybride), alors la machine pourrait savoir si la rétroaction du sujet est juste. Encore faut-il que ChatGPT soit conçu pour assurer, ne serait-ce que partiellement, une analyse sur la justesse des réponses. Autrement dit, à la figure 7, l'amélioration n'est qu'illusoire, car la deuxième interrogation inclut le terme « médiatrice », entraînant ainsi une forme d'« apprentissage » de la machine qui ne s'accompagne pas d'un traitement sur la nécessité des connaissances en jeu.

Il en résulte que le sujet doit disposer d'une compétence minimale dans le domaine concerné pour maintenir le contrôle de la situation. C'est aussi au sujet qu'il revient de juger de la nécessité des articulations entre les connaissances ainsi produites, tout comme il doit être familier avec la nature des connaissances occasionnées. Les approches statistiques ne visent pas à dériver le vrai du vrai, mais se contentent du statiquement plausible. Conformément à la TSDM et au modèle cK $\phi$ , l'initiative de l'interaction avec le milieu et le questionnement demeure du ressort du sujet. Au regard du travail mathématique, le lien entre les connaissances est ancré dans la genèse discursive, et dans une moindre mesure dans la genèse sémiotique, se poursuivant de concert avec la genèse instrumentale.

Avec l'utilisation de Géogébra, le processus interne se distingue par une approche entièrement différente. Le problème est formulé au moyen d'unités figurales, et des oracles sont consultés (figure 8). Grâce à la commande Relation (O, p), il devient possible d'effectuer une vérification numérique concernant l'appartenance du point O à la droite p (fig. 8 b). Ensuite, en appuyant sur le bouton « Plus... », une transition vers une vérification symbolique s'opère (fig. 8c). Contrairement à ce que les élèves pourraient supposer, le système ne se réfère pas à une sorte de référentiel euclidien implicite, similaire à celui de leur manuel scolaire, pour appliquer la propriété caractéristique du cercle circonscrit. En réalité, lorsqu'il fournit la réponse « O appartient à p », le système commence par une réponse « calculée » en se basant sur une approche numérique impliquant des éléments discrets liés aux définitions des objets. Cela entraîne un effet de « boîte noire », car la méthode sous-jacente est généralement méconnue, tant par les élèves que par les enseignants. Par la suite, le système peut présenter une seconde réponse, cette fois grâce au calcul symbolique appliqué à des définitions formelles des objets, ce qui revient à modéliser les entités géométriques par le biais de concepts algébriques. En somme, il affiche ouvertement deux niveaux épistémiques distincts au sein de ses réponses. L'indication « toujours vrai » signale que la réponse est confirmée dans le contexte du problème, sans imposer de restrictions au domaine de validité de la proposition en question. Pour la deuxième conjecture, « p et AC sont perpendiculaires », nous sommes directement passés à l'approche symbolique avec la commande « Relation (p, AC) »

(fig. 8d). Cependant, quand le système évalue la perpendicularité par calcul, il se base sur une approche statistique impliquant un échantillonnage de points aléatoires pour vérifier un critère d'orthogonalité. La valeur épistémique de cette réponse diffère légèrement du premier calcul, du fait qu'une approche statistique est ajoutée au modèle numérique initial.

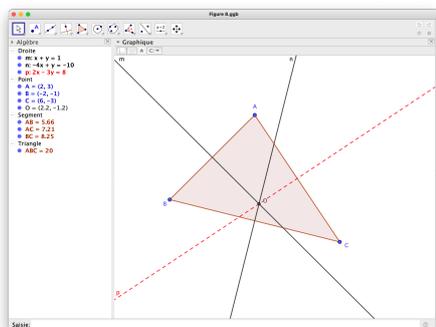


Fig. 8a



Fig. 8c

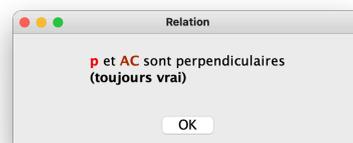


Fig. 8d

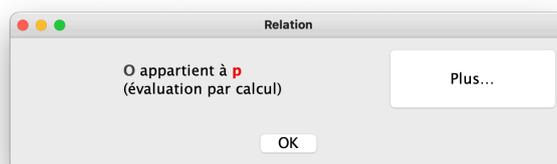


Fig. 8b

**Figure 8.** Problème de la concurrence des médiatrices d'un triangle (a) résolu à l'aide de Géogébra et ses outils de raisonnement automatisé (b à d).

L'implicite n'est pas le lot de l'IA ou du travail instrumenté par des artéfacts numériques. Il s'agit d'une réalité incontournable de la relation didactique, que ce soit parce qu'on travaille avec des notions jamais définies, comme les nombres réels, ou que l'on raisonne par îlots dans l'étude d'un ensemble de problèmes, sans cohérence globale, à l'instar des îlots déductifs de Gustave Choquet. De plus, si l'on se restreint aux aspects adidactiques du système élève-milieu, chaque conception est cohérente avec son domaine de validité et les problèmes qui lui donnent du sens. C'est justement le propre de l'apprentissage de combler progressivement l'articulation entre les connaissances par la résolution de nouveaux problèmes. Dans

le contexte de la TSDM, si l'on prend l'exemple du contrat didactique, celui-ci n'est jamais réellement explicitable : décrire les attentes spécifiques de l'enseignant n'est pas possible, car ce sont justement ces attentes qui constituent l'apprentissage. Le propre de la didactique, par rapport à la psychologie cognitive — dont font partie d'ailleurs les neurosciences — est bien de s'intéresser aux effets des choix sans chercher à savoir ce qui se passe effectivement dans la tête de l'élève. En effet, l'élève peut être perçu comme une boîte noire fournissant des réponses, notamment lorsqu'on l'interroge... Il n'est donc pas étonnant qu'en classe de mathématiques, on doive inexorablement accepter une perte de contrôle, encore faut-il que cette perte soit comprise, acceptée ou traitée d'une façon ou d'une autre par les protagonistes de la relation didactique. L'enjeu principal dans l'usage de l'IA n'est donc pas forcément de chercher à rendre explicite son fonctionnement, mais de donner à l'utilisateur des outils pour gérer la perte de contrôle inhérente à l'usage des algorithmes. L'IA transcende les rétroactions normatives vers une rétroaction centrée sur les représentations, les conceptions des élèves et les jeux de la situation didactique. En particulier, on peut distinguer les rétroactions sous forme de boucles longues (comme dans le projet TELEOS), permettant de mobiliser des savoirs de natures diverses : procéduraux, psychomoteurs, déclaratifs, et de boucles courtes (projet Mindmath), avec une rétroaction immédiate basée sur un modèle de décision.

### 3.3. Un peu plus sur les approches statistiques

La tyrannie de la majorité engendre une conséquence indésirable où la prévalence impose sa règle à l'ensemble. Cette problématique dépasse le cadre démocratique pour revêtir une dimension éthique à plus long terme. Certains auteurs évoquent même une injustice épistémique dans l'enseignement des mathématiques (Tanswell & Rittberg, 2020), faisant référence aux iniquités qui affectent la manière dont les connaissances mathématiques sont partagées, enseignées et construites. Faut-il noter qu'une part substantielle de l'éducation est dispensée au cours de l'enseignement obligatoire ? Au-delà des considérations cognitives et épistémologiques abordées jusqu'ici, il est manifeste que les décisions concernant les méthodes pédagogiques ne peuvent se fonder exclusivement sur les choix de la majorité des élèves, des enseignants ou des technologies développées pour l'industrie. Avec la montée en puissance des méthodes statistiques, cette mise en garde résonne plus que jamais, car l'intelligence artificielle peut induire une uniformisation des réponses ou des méthodologies les plus répandues, créant ainsi une forme de « dictature » des solutions les plus fréquentes, même si elles ne répondent pas forcément aux besoins individuels de chaque élève ou situation.

Selon Brousseau (1998), le contrat didactique n'est pas réellement un véritable contrat, car il n'est ni explicite ni librement consenti, et les conditions de rupture ainsi que les sanctions ne peuvent être définies à l'avance, étant donné que leur nature didactique, laquelle est essentielle, dépend d'une connaissance encore

inconnue des élèves. Dans la théorie de la prise de décision de Schoenfeld (2011), si l'on possède une compréhension suffisante des ressources, des objectifs et des orientations d'un individu, qu'il soit enseignant ou élève, on peut même parvenir à saisir, expliquer et modéliser des actions et des décisions qui semblent inhabituelles ou anormales. L'IA peut-elle être mise à contribution en classe de mathématique dans un tel esprit ? Il faut être vigilant pour maintenir une approche équilibrée entre la tradition et l'usage de l'IA qui encourage l'exploration, la créativité et le travail mathématique, les élèves devant développer une compréhension approfondie des concepts mathématiques et construire leurs propres compétences analytiques, au-delà des réponses statistiquement populaires ou amenées par l'apprentissage profond. L'intelligence artificielle doit être au service de l'humain et être conçue pour tous les élèves.

Les algorithmes basés sur des décisions statistiques soulèvent la question des élèves qui seraient « originaux » par leur mode de fonctionnement. Quelle est la pertinence des problèmes générés pour un élève donné ? Dans la mesure où les décisions sont basées sur des probabilités, quelle pourrait être la pertinence pour des élèves atypiques ? L'IA détectera-t-elle des processus d'apprentissage spécifiques ou fournira-t-elle des réponses inadaptées ? En matière d'apprentissage, l'IA a tout à gagner à évoluer entre didactique et génie informatique.

### 3.4. Perspectives en bref

Au vu de l'évolution actuelle, plonger dans des prédictions semble risqué. Notre démarche visait à capitaliser sur les avancées de la didactique pour aborder un futur qui se dessine avec des algorithmes. En associant la classification de l'IA pour l'enseignement des mathématiques de Van Vaerenbergh et Pérez-Suay (2022) à la conception de l'IA comme intelligence augmentée du système élève-milieu, émerge un éventail de perspectives encore inexplorées. Cela ouvre à la fois de vastes horizons en matière de recherche et de développement, à l'instar des possibilités qui se prévalent par le très médiatisé ChatGPT. À cet égard, la section 2.1, qui traite des différentes typologies d'utilisation de l'IA pour l'enseignement des mathématiques, éclaire volontiers les chemins qui s'ouvrent devant nous. Cependant, il convient de garder à l'esprit que même les technologies les plus prometteuses finissent par perdre de leur élan (comme les calculatrices de poche, la télévision scolaire, les tableaux blancs interactifs, l'enseignement à distance, etc.), et que les décisions des financeurs ne devraient pas empiéter sur l'essence publique et civilisationnelle de l'éducation. Il faut cesser d'alimenter de nourrir des illusions, que ce soit en termes de résultats concrets en classe ou en termes de bénéfices financiers et humains pour les institutions qui pourraient voir en ces solutions un remède temporaire à leurs problèmes (Emprin, 2018). À la place, il faudrait bâtir des relations durables entre les communautés de recherche, comme cela s'est historiquement produit entre la didactique des mathématiques et les sciences cognitives.

S'il est vrai que certaines rétroactions des machines peuvent changer radicalement la valeur épistémique des connaissances, leur efficacité, teintée du « paradoxe intrigant » de l'IA, représente un levier, en particulier pour des raisons heuristiques ou idonéique. L'utilisation de ces outils devrait relancer un nouveau type de questionnement chez le sujet, proche du questionnement scientifique et des approches instrumentales, qui cherche à problématiser ou à généraliser à partir des réponses de la machine ; comme si c'était une réalité indépendante du sujet, mais engagée dans son processus d'interrogation. S'il faut douter de la plausibilité apparente des réponses de l'IA sur le plan des sources, du référentiel, du mode d'entraînement, de prédiction et du raffinement, ce sont justement des éléments qui méritent d'être étudiés dans l'interaction. Puisque les enjeux de la nécessité et des contrôles sont cruciaux dans la structuration des connaissances (Bruillard & Richard, 2024), l'étude de ces questions est certes complexe, mais leur traitement exige une collaboration constante entre l'informatique et la didactique des mathématiques.

Enfin, une question cruciale se pose : l'IA statistique est-elle en voie de toucher un plafond ? En ce qui concerne ChatGPT, il est indéniable que le succès actuel découle d'une coopération qui persiste jusqu'à aujourd'hui (Perrigo & Zorthian, 2023) :

But the success story is not one of Silicon Valley genius alone. In its quest to make ChatGPT less toxic, OpenAI used outsourced Kenyan laborers earning less than \$2 per hour, a TIME investigation has found. (...)

That huge training dataset was the reason for GPT-3's impressive linguistic capabilities, but was also perhaps its biggest curse. Since parts of the internet are replete with toxicity and bias, there was no easy way of purging those sections of the training data. Even a team of hundreds of humans would have taken decades to trawl through the enormous dataset manually. It was only by building an additional AI-powered safety mechanism that OpenAI would be able to rein in that harm, producing a chatbot suitable for everyday use.

Au-delà des implications sociales, étant donné que l'IA statistique peut facilement générer du faux, et que cela risque de contaminer involontairement les prochaines données d'entraînement, il semble que la contribution de l'intelligence humaine soit indispensable au succès de l'IA (Pérez Colomé, 2023). Cette situation évoque l'histoire de l'automate turc à la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, un androïde « intelligent » prétendument capable de jouer aux échecs de manière automatique contre les humains. Dans ce cas, il s'agissait d'un habile canular dissimulant sous la table l'intelligence humaine. Néanmoins, ChatPGT pose un dilemme intrinsèquement paradoxal dans son processus d'automatisation, laissant entrevoir un essoufflement prochain de cette technologie si des mécanismes de contrôle ne compensent pas les défis inhérents à son développement continu. Par conséquent, la dépossession linguistique que nous évoquions tout au début de notre article ne serait qu'une impression passagère. La recherche de nouveaux équilibres dans notre interaction avec la machine serait ce que le destin nous réserve collectivement.

#### 4. Conclusion

Notre article cherche à illustrer la complexité d'aborder le domaine de l'intelligence artificielle de manière générale, étant donné les variations substantielles entre les divers types de modèles sous-jacents. Il est ainsi crucial de présenter une typologie, même si celle-ci demeure provisoire, afin de clarifier la nature réelle des enjeux. À l'ère où les algorithmes automatisent les procédures routinières, notre système éducatif doit dépasser le traditionnel transfert de connaissances pour cultiver une aptitude à résoudre des problèmes complexes et à engendrer des solutions, à l'image des scientifiques, chercheurs, médecins et ingénieurs. Notre article examine les relations complexes entre l'intelligence artificielle (IA) et l'enseignement des mathématiques, dans un contexte où l'impact profond des algorithmes sur la société et l'économie est manifeste. Alors que l'IA gagne en puissance et promet des synergies potentielles avec la didactique mathématique, il est impératif de combler le fossé entre les réalisations industrielles et les initiatives éducatives.

Initialement axé sur la notion d'intelligence, notre propos souligne que l'IA, en tant qu'extension modélisée de l'homme, sert principalement à favoriser la collaboration homme-machine et ainsi à enrichir divers domaines. Cependant, notre attention porte particulièrement sur l'augmentation de l'intelligence humaine, en encourageant une utilisation qui profite des acquis de la didactique. Par conséquent, étant une composante essentielle pour la réalisation du travail mathématique à l'école, il faut continuer de chercher et résoudre des problèmes qui, en soi, représentent des occasions d'apprentissage. Pour peu que l'élève en accepte la responsabilité dans son interaction avec le milieu, le processus de résolution nous informe sur l'apprentissage même, aussi bien au moment d'un blocage, du dépassement d'un obstacle ou de la simple réussite du problème. Les projets tels que QED-Tutrix et Adaptiv'Math utilisent à ce dessein l'IA pour offrir un soutien adaptatif guidé.

Des questions clés liées à l'IA dans l'enseignement des mathématiques émergent, impliquant au départ la complexité de la transparence des systèmes et des effets de « boîte noire ». En dépit de ces défis, l'IA démontre sa capacité à fournir des retours personnalisés aux élèves et à relier de façon inattendue, mais raisonnablement fructueuse, des connaissances souhaitables. Pour naviguer avec succès dans cette nouvelle quête éducative, il est essentiel de se réinventer, de trouver de nouveaux moyens entre les approches traditionnelles et l'exploration innovante permise par l'IA. Dans un futur proche, allons-nous passer d'une phase de crainte à un projet de promotion de l'IA tête baissée, où l'on imagine soudainement qu'il est possible d'élever rapidement le niveau des élèves ? En l'absence de résultats de recherche pour mieux comprendre le nouveau travail mathématique, ne risquons-nous pas d'entrer prochainement dans une période un peu plus sombre de désillusion, où l'on constatera que les bienfaits de l'IA ont été quelque peu surestimés, au point de la trouver un peu moins intelligente que prévu ? Alors que la lumière de la didactique

des mathématiques est déjà essentielle pour la recherche, elle doit également embrasser la créativité dans l'étude des moyens de contrôle, ne serait-ce que pour évaluer les impacts sur l'acquisition des connaissances ou le déploiement de raisonnements. La question de la valeur ajoutée du numérique et de l'intelligence artificielle doit figurer au premier plan, sans craindre d'y intégrer aussi la valeur éprouvée des approches traditionnelles.

## Bibliographie

- ANDERSON, J.R., CORBETT, A.T., KOEDINGER, K. R., & PELLETIER, R. (1995). Cognitive tutors: Lessons learned. *Journal of the Learning Sciences*, 4, 167–207.
- ASSUDE, T. (2007). Changements et résistances à propos de l'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement des mathématiques au primaire. *Informations, savoirs, décisions et médiations*, n° 29. <https://isd.m.univ-tln.fr/PDF/isd29/ASSUDE.pdf>.
- BALACHEFF, N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. *Recherches en didactique des mathématiques*, 14, 9-42.
- BALACHEFF, N. (2022). AI for the Learning of Mathematics. In P. R. Richard, M. P. Vélez, & S. Van Vaerenbergh (Éds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence* (pp. v-x). Springer Cham. DOI : 10.1007/978-3-030-86909-0.
- BALACHEFF, N., & GAUDIN, N. (2002). Students conceptions: an introduction to a formal characterization. *Cahier Leibniz*, 65. <https://telearn.hal.science/hal-00190425>.
- BALACHEFF, N., & MARGOLINAS, C. (2005). Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In Mercier & Margolinas (Éds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75-106). La pensée sauvage.
- BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques*, 9(3), 309-336.
- BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée sauvage.
- BRUILLARD, É., & RICHARD, P. R. (2024). Informatique, mathématiques, conception et usage des technologies numériques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, numéro thématique.
- CHAACHOUA, H., FERRATON, G., & DESMOULINS, C. (2014). Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un EIAH. *Actes du 4e congrès pour la Théorie anthropologique du didactique*. <https://hal.science/hal-01088769>.
- CHARTIER, P., & LOARER, E. (2008). *Évaluer l'intelligence logique*. Dunod.

- CHERIGNY, F., EL KECHAI, H., IKSAL, S., LEFEVRE, M., LABARTHE, H., & LUENGO, V. (2020). *L'analytique des apprentissages avec le numérique*, groupes thématiques de la direction du numérique pour l'éducation (dne-tn2), rapport de recherche, Direction du numérique pour l'éducation. <https://hal.science/hal-02912386>.
- CHEVALLARD, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In R. Noirfalise (Éds.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques* (pp. 91-118). IREM de Clermont-Ferrand.
- CHIEU, V. M., LUENGO, V., VADCARD, L., & TONETTI, J. (2010). Student modeling in orthopedic surgery training: Exploiting symbiosis between temporal Bayesian networks and fine-grained didactic analysis. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, 20, 269-301. DOI : 10.3233/JAI-2010-0009.
- CLÉMENT, B. (2018). *Adaptive Personalization of Pedagogical Sequences using Machine Learning*. [Thèse de doctorat, Université de Bordeaux] <https://hal.inria.fr/tel-01968241>.
- COQ, L'ÉQUIPE DE DÉVELOPPEMENT (2002). *The Coq Proof Assistant Reference Manual Version 7*, INRIA—Rocquencourt.
- CSIKSZENTMIHALYI, M. (1975). *Beyond boredom and anxiety: The experience of play in work and games*. Jossey-Bass.
- CSIKSZENTMIHALYI, M. (1990). *Flow: The psychology of optimal experience*. HaperCollins.
- DELAHAYE, D., JAUME, M., & PREVOSTO, V. (2005). Coq, un outil pour l'enseignement. *Technique et science informatiques*, 24(9), 1139-1160.
- DIEGO-MANTECÓN, J. M., ORTIZ-LASO, Z., & BLANCO, T. F. (2022). Implementing STEM Projects Through the EDP to Learn Mathematics: The Importance of Teachers' Specialization. In P. R., Richard, M. P. Vélez, & S. Van Vaerenbergh (Éds.) *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence* (pp. 399-415). Springer, Cham. DOI : 10.1007/978-3-030-86909-0\_17.
- EMPRIN, F. (2011). Construction d'un simulateur informatique de Classe (SIC) pour la formation des enseignants. In: M. Bétrancourt, C. Depover, V. Luengo, B. De Lièvre, & G. Temperman (Éds.), *Actes de la conférence ELAH 2011 (Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain)* (pp. 409-422).
- EMPRIN, F. (2022). Modeling Practices to Design Computer Simulators for Trainees' and Mentors' Education. In P. R. Richard, M. P. Vélez, & S. Van Vaerenbergh (eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence* (pp. 319-341). Springer, Cham. DOI : 10.1007/978-3-030-86909-0\_14.

EMPRIN, F. (2023). Table ronde : l'intelligence artificielle. In F. Vandebrouck, F. Emprin, C. Ouvrier-Buffet, & L. Vivier (Éds.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques : Preuve, modélisation et technologies numériques, XXI<sup>e</sup> école d'été de didactique des mathématiques Sainte Marie de Ré – Du 18 au 24 octobre 2021 : Volume des ateliers* (pp. 146-153). IREM de Paris.

ENGELBART, D. C. (1962). *Augmenting Human Intellect: A Conceptual Framework*. Summary Report, Stanford Research Institute, on Contract AF 49(638)-1024, October 1962, 134 pages. <https://www.doungelbart.org/pubs/augment-3906.html>

FLORES SALAZAR, J. V., GAONA, J., & RICHARD, P. R. (2022). Mathematical Work in the Digital Age: Variety of Tools and the Role of Geneses. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo, & P. R. Richard (Éds.), *Mathematical Work in Educational Context* (pp. 165-209). Springer, Cham. DOI : 10.1007/978-3-030-90850-8\_8.

FONT, L., GAGNON, M., LEDUC, N., & RICHARD, P. R. (2022). Intelligence in QED-Tutrix: Balancing the Interactions Between the Natural Intelligence of the User and the Artificial Intelligence of the Tutor Software. In P. R. Richard, M. P. Vélez, & S. Van Vaerenbergh (eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence* (pp. 45-76). Springer, Cham. DOI : 10.1007/978-3-030-86909-0\_3.

FONT, L., RICHARD, P. R., & GAGNON, M. (2018). Improving QED-Tutrix by Automating the Generation of Proofs. In P. Quaresma & W. Neuper (Éds.), *6th International Workshop on Theorem proving components for Educational software (ThEdu'17). EPTCS 267*, (p. 38–58).

GONSETH, F. (2022). *La géométrie et le problème de l'espace* (Réédition en un volume des ouvrages publiés entre 1945 et 1955). St-Imier, Suisse : Association F. Gonseth.

GRÉCO, P., GRIZE, J., PAPERT, S., & PIAGET, J. (1960). Problèmes de la construction du nombre, Études d'épistémologie génétique XI. *Les Études Philosophiques*, 15(3), 397-398.

HARRAK, F., & BOUCHET, F. (2021). Aide au suivi de la progression de groupes d'apprenants pour la mise en place d'une pédagogie différenciée. In M. Lefevre et C. Michel (Éds.), *10<sup>e</sup> Conférence sur les Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain* (p. 312-317). <https://hal.science/hal-03287778>.

HOFSTADTER, D. (1985). *Gödel, Escher, et Bach*. Paris : Interéditions.

Hohenwarter, M. (2023). GeoGebra Classic 5.0 (Version 5.0.426.0-d) [Logiciel et site Web]. Consulté le 19 août 2023. URL : <https://www.geogebra.org/>.

JOLIVET, S., LESNES-CUISINIEZ, E., & GRUGEON-ALLYS, B. (2021). Conception d'une plateforme d'apprentissage en ligne en algèbre et en géométrie : prise en

compte et apports de modèles didactiques. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Revue internationale de didactique des mathématiques*, 26, 117-156.

KOVÁCS, Z., RECIO MUÑIZ, T., & VÉLEZ, M. P. (2018). Using automated reasoning tools in GeoGebra in the teaching and learning of proving in geometry. *International Journal of Technology in Mathematics Education*, 25, 2.

KUZNIAK, A., MONTOYA-DELGADILLO, E., & RICHARD, P. R. (2022). *Mathematical Work in Educational Context: The Perspective of the Theory of Mathematical Working Spaces*. Mathematics Education in the Digital Era Era, vol 18. Springer Cham. DOI : 10.1007/978-3-030-90850-8.

LAGRANGE, J. B., RICHARD, P. R., VÉLEZ, M. P., & VAN VAERENBERGH, S., (2023). Artificial Intelligence Techniques in Software Design for Mathematics Education. In B. Pepin, G. Gueudet, & J. Choppin (Éds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education*. Springer Nature. DOI : 10.1007/978-3-030-95060-6\_37-1.

LUENGO, V. (2009). Les rétroactions épistémiques dans les Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain. Note de synthèse en vue de l'Habilitation à Diriger des recherches, Université Joseph Fourier — Grenoble I.

MARTÍNEZ-SEVILLA, Á., & ALONSO, S. (2022). AI and Mathematics Interaction for a New Learning Paradigm on Monumental Heritage. In P. R. Richard, M. P. Vélez, & S. Van Vaerenbergh (Éds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence* (pp. 107-136). Springer, Cham. DOI : 10.1007/978-3-030-86909-0\_6.

MATSUDA, N., & VANLEHN, K. (2005). Advanced Geometry Tutor: An intelligent tutor that teaches proof-writing with construction. In *AIED*, 125, 443-450.

MCCARTHY, J., MINSKY, M. L., ROCHESTER, N., & SHANNON, C. E. (2006). A Proposal for the Dartmouth Summer Research Project on Artificial Intelligence, August 31, 1955. *AI Magazine*, 27(4), 12. DOI : 10.1609/aimag.v27i4.1904.

MOHAMED, M. Z. B., HIDAYAT, R., SUHAIZI, N. N. B., SABRI, N. B. M., MAHMUD, M. K. H. B., & BAHARUDDIN, S. N. B. (2022). Artificial intelligence in mathematics education: A systematic literature review. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 17(3), em0694. DOI : 10.29333/iejme/12132.

OCDÉ. (2019). *L'intelligence artificielle dans la société*. Éditions OCDÉ, Paris.

OUYANG, L., WU, J., JIANG, X., ALMEIDA, D., WAINWRIGHT, C. L., MISHKIN, P., ZHANG, C., AGARWAL, S., SLAMA, K.,... LOWE, R. J. (2022). Training language models to follow instructions with human feedback. *ArXiv*, abs/2203.02155.

PAPERT, S. (1980). *Mindstorms: children, computers, and powerful ideas*. Basic books.

PAPPAS, M., & DRIGAS, A. (2023). Incorporation of artificial intelligence tutoring techniques in mathematics. *International journal of engineering pedagogy*, 6(4), 12-16. Consulté le 20 novembre : <https://www.learntechlib.org/p/207302/>.

PÉREZ COLOMÉ, J. (2023, 5 septembre). Ramón López de Mántaras, experto en inteligencia artificial: « La IA sola no resolverá absolutamente nada. Serán los humanos ». *El País*. <https://elpais.com/tecnologia/2023-09-06/ramon-lopez-de-mantaras-experto-en-inteligencia-artificial-la-ia-sola-no-resolvera-absolutamente-nada-seran-los-humanos.html>.

PERRIGO, B., & ZORTHIAN, J. (2023, 18 janvier). Exclusive : OpenAI Used Kenyan Workers on Less Than \$2 Per Hour to Make ChatGPT Less Toxic. *TIME*. <https://time.com/6247678/openai-chatgpt-kenya-workers/>.

Photomath [Application mobile]. (2021). Consulté le 19 décembre 2022. URL : <https://photomath.app/>.

PIAGET, J. (1973). *Introduction à l'épistémologie génétique (1) : La pensée mathématique*. FeniXX.

QUARESMA, P. (2022). Evolution of Automated Deduction and Dynamic Constructions in Geometry. In P. R. Richard, M. P. Vélez, & S. Van Vaerenbergh (eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence* (pp. 3-22). Springer, Cham. DOI : 10.1007/978-3-030-86909-0\_1.

RICHARD, G. W. (1970). *Les techniques audio-visuelles dans l'enseignement des mathématiques* (Thèse de doctorat inédite). Université libre de Bruxelles, Faculté des Sciences psychologiques et de l'éducation, Bruxelles. Permalien : <https://dipot.ulb.ac.be/dspace/bitstream/2013/214925/1/83d0e36a-2be4-4f76-b5b5-609394b63a11.txt>.

RICHARD, J. F. (1982). Planification et organisation des actions dans la résolution du problème de la Tour de Hanoï par des enfants de 7 ans. *L'Année psychologique*, 82 (2), 307-336.

RICHARD, P. R. (2023). Table ronde : intervention de Philippe R Richard. In F. Vandebrouck, F. Emprin, C. Ouvrier-Buffet et L. Vivier (Éds.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques : preuve, modélisation et technologies numériques, XXI<sup>e</sup> école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 154-166). IREM de Paris.

RICHARD, P. R., FORTUNY, J. M., GAGNON, M., LEDUC, N., PUERTAS, E., & TESSIER-BAILLARGEON, M. (2011). Didactic and theoretical-based perspectives in the experimental development of an intelligent tutorial system for the learning of geometry. *ZDM Mathematics Education*, 43, 425-439. DOI : 10.1007/s11858-011-0320-y.

- RICHARD, P. R., FORTUNY, J. M., HOHENWARTER, M., & GAGNON, M. (2007). geogebraTUTOR : une nouvelle approche pour la recherche sur l'apprentissage compétentiel et instrumenté de la géométrie à l'école secondaire. In *E-Learn : World Conference on E-Learning in Corporate, Government, Healthcare, and Higher Education* (pp. 428-435). <https://www.learntechlib.org/primary/p/26363/>.
- RICHARD, P. R., GAGNON, M., & FORTUNY, J. M. (2018). Connectedness of Problems and Impasse Resolution in the Solving Process in Geometry: A Major Educational Challenge. In P. Herbst, U. Cheah, P. R. Richard, & K. Jones (Éds.), *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools* (pp. 357-375). ICME-13 Monographs. Springer, Cham. DOI : 10.1007/978-3-319-77476-3\_20.
- RICHARD, P. R., VAN VAERENBERGH, S., & VÉLEZ MELÓN, M. P. (Éds.). (2020). *First Symposium on Artificial Intelligence for Mathematics Education. Book of Abstracts* (AI4ME 2020). Editorial Universidad De Cantabria.
- RICHARD, P. R., VÉLEZ, M. P., & VAN VAERENBERGH, S. (Éds.). (2022). *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence: How Artificial Intelligence can Serve Mathematical Human Learning*. Mathematics Education in the Digital Era, vol 17. Springer Cham. DOI : 10.1007/978-3-030-86909-0.
- RODRÍGUEZ, J. L. (2022). Exploring Dynamic Geometry Through Immersive Virtual Reality and Distance Teaching. In P. R. Richard, M. P. Vélez, & S. Van Vaerenbergh (eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence* (pp. 343-363). Springer, Cham. DOI : 10.1007/978-3-030-86909-0\_15.
- SCHOENFELD, A. H. (2011). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. Routledge.
- SNYDERMAN, M., & ROTHMAN, S. (1987). Survey of expert opinion on intelligence and aptitude testing. *American Psychologist*, 42(2), 137-144. DOI : 10.1037/0003-066X.42.2.137.
- SONI, N., SHARMA, E. K., SINGH, N., & KAPOOR, A. (2019). Impact of artificial intelligence on businesses: from research, innovation, market deployment to future shifts in business models. *arXiv preprint arXiv:1905.02092*. DOI : 10.48550/arXiv.1905.02092.
- STERNBERG, R. J., & DETTERMAN, D. K. (1986). *What is Intelligence? Contemporary Viewpoints on its Nature and Definition*. Ablex.
- SUBLIME, J. (2022). L'apprentissage non-supervisé et ses contradictions. *1024 : Bulletin de la Société Informatique de France*, (19), 145-156.
- TANSWELL, F. S., & RITTEBERG, C. J. (2020). Epistemic injustice in mathematics education. *ZDM Mathematics Education* 52, 1199-1210.

TESSIER-BAILLARGEON, M., LEDUC, N., RICHARD, P. R., & GAGNON, M. (2017). Étude comparative de systèmes tutoriels pour l'exercice de la démonstration en géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 22, 91-117.

TOUSSAINT, B. M., LUENGO, V., & JAMBON, F. (2015). Proposition d'un Framework de Traitement de Traces pour l'Analyse de Connaissances Perceptivo-Gestuelles. In *7ème Conférence sur les Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (EIAH 2015)* (p. 222-233).

VAN VAERENBERGH, S., & PÉREZ-SUAY, A. (2022). A Classification of Artificial Intelligence Systems for Mathematics Education. In: P. R. Richard, M. P. Vélez, & S. Van Vaerenbergh (eds.), *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence* (pp. 89-106). Springer, Cham. DOI : 10.1007/978-3-030-86909-0\_5.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches didactiques en mathématiques*, 10, 133-170.

VERGNAUD, G. (2002). Piaget visité par la didactique. *Intellectica. La revue de l'Association pour la Recherche sur les sciences de la Cognition*, 33, 107-123.

VYGOTSKY, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

WEBBER, C., PESTY, S., & BALACHEFF, N. (2002). A multi-agent and emergent approach to learner modelling. In *ECAI* (p. 98-102).

WOLFRAM, S. (2023). *Wolfram|Alpha as the Way to Bring Computational Knowledge Superpowers to ChatGPT*. Consulté le 28 février 2023. URL: <https://writings.stephenwolfram.com/2023/01/wolframalpha-as-the-way-to-bring-computational-knowledge-superpowers-to-chatgpt/>.

ZHANG, D., MASLEJ, N., BRYNJOLFSSON, E., ETCHEMENDY, J., LYONS, T., MANYIKA, J., NGO, H., NIEBLES, J. C., SELITTO, M.,... PERREAULT, R. (2022). *The AI Index 2022 Annual Report*. AI Index Steering Committee, Stanford Institute for Human-Centered AI, Stanford University.

**FABIEN EMPRIN**

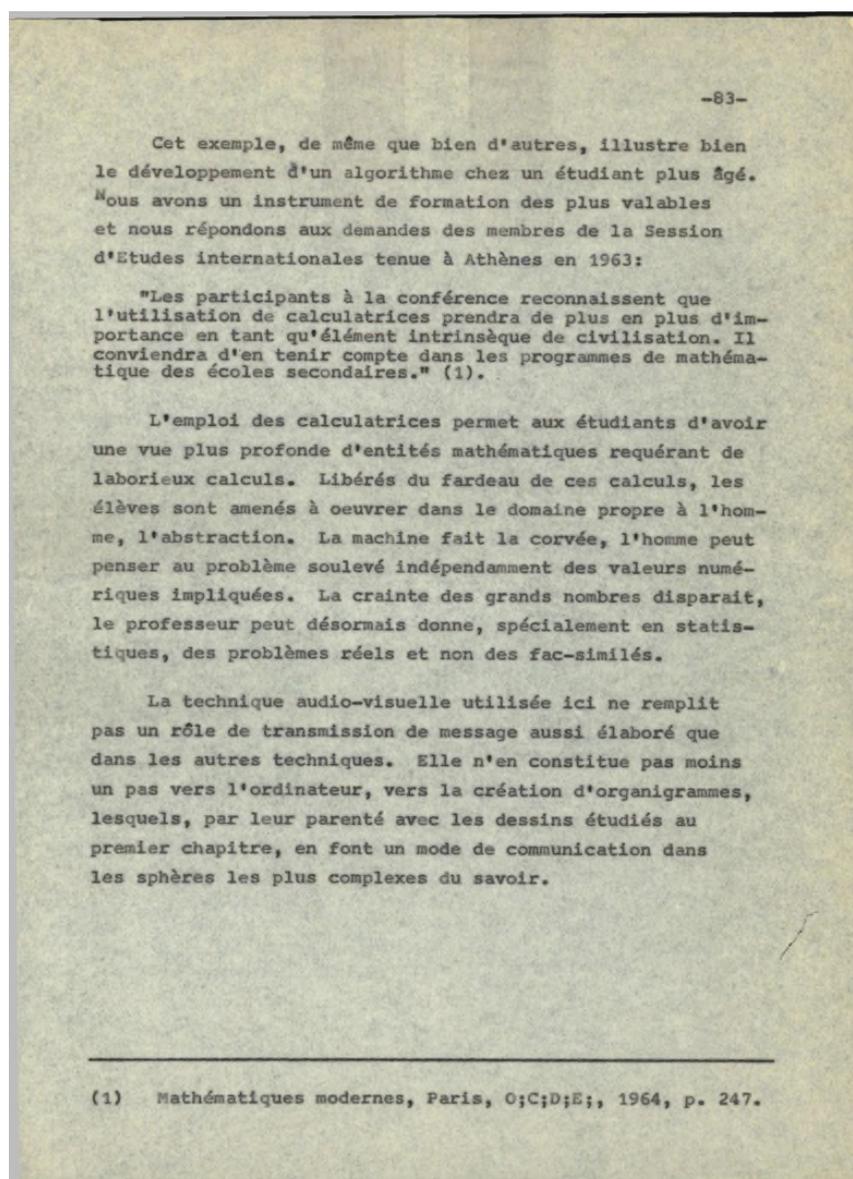
Université de Reims

fabien.emprin@univ-reims.fr

**PHILIPPE R. RICHARD**

Université de Montréal

philippe.r.richard@umontreal.ca

**Annexe 1.** Émergence positive de l'apprentissage instrumenté en 1970.

**Figure 9.** Dans la lignée des mathématiques modernes, les pionniers de la didactique, tels que Richard (1970), anticipaient des questions liées au nouveau travail mathématique et à l'interaction entre le sémiotique, l'instrumental et l'algorithmique dans le contexte humain-machine, ici en ce qui concerne la modélisation et l'application statistique.

## Annexe 2. Questionnement alternatif du sujet dans le problème de la Fig 7.

PHI Dans le triangle ABC, les médiatrices  $m$  de [AB] et  $n$  de [BC] se coupent en O. Que peut-on dire du point O par rapport au triangle ABC? Que peut-on dire de la droite perpendiculaire au côté [AC] qui passe par O?

 Dans le triangle ABC, le point O est l'intersection des médiatrices  $m$  du côté [AB] et  $n$  du côté [BC]. Voici ce que l'on peut dire du point O par rapport au triangle ABC et de la droite perpendiculaire au côté [AC] qui passe par O :

- Point O par rapport au triangle ABC :**  
Le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. En d'autres termes, il est équidistant des trois sommets du triangle (A, B et C). Cela signifie que la distance entre O et chaque sommet est la même, ce qui est une propriété importante du centre du cercle circonscrit.
- Droite perpendiculaire au côté [AC] passant par O :**  
La droite perpendiculaire au côté [AC] et passant par O est appelée la médiane issue du sommet B. Cette droite divise le côté [AC] en deux segments égaux et est perpendiculaire à [AC]. Elle joue un rôle important dans la géométrie du triangle, car les trois médianes d'un triangle se croisent en un point appelé le centre de gravité (ou centre de masse).

En résumé, le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, et la droite perpendiculaire au côté [AC] qui passe par O est la médiane issue du sommet B.

PHI J'ai l'impression que vous confondez les types de droites remarquables.

 Je m'excuse pour la confusion dans ma réponse précédente. Vous avez raison, j'ai mélangé les types de droites remarquables. Voici la réponse correcte :

Dans le triangle ABC, le point O est l'intersection des médiatrices  $m$  du côté [AB] et  $n$  du côté [BC]. Voici ce que l'on peut dire du point O par rapport au triangle ABC et de la droite perpendiculaire au côté [AC] qui passe par O :

- Point O par rapport au triangle ABC :**  
Le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Cela signifie que la distance entre O et chaque sommet du triangle (A, B et C) est la même. Le centre du cercle circonscrit est également appelé le centre de la circonférence passant par les trois sommets du triangle.
- Droite perpendiculaire au côté [AC] passant par O :**  
La droite perpendiculaire au côté [AC] qui passe par le point O est la hauteur issue du sommet B. Cette droite est perpendiculaire au côté [AC] et passe par le point d'intersection O des médiatrices. La hauteur issue du sommet B divise le côté [AC] en deux segments inégaux, avec le pied de la hauteur plus proche du sommet B.

Je m'excuse encore pour la confusion dans ma réponse précédente et j'espère que cette réponse est plus précise et correcte.



Figure 10. Encore une fois, le système se confond en excuses, avec un avertissement en petits caractères non visible sur notre capture d'écran : « ChatGPT peut générer des informations inexactes concernant des personnes, des lieux ou des faits ».



**GHISLAINE GUEUDET**

**NOTE DE LECTURE**

**INQUIRY IN UNIVERSITY MATHEMATICS TEACHING AND LEARNING.  
THE PLATINUM PROJECT<sup>1</sup>**

---

Le projet PLATINUM<sup>2</sup>, pour “Partnerships for Learning And Teaching IN University Mathematics”, était un projet européen mené dans le cadre du programme Erasmus +. Il s’est déroulé sur trois années universitaires, de 2018 à 2021, et a associé 8 universités de 7 pays d’Europe. Notons que le programme Erasmus + n’a pas pour rôle de financer des projets de recherche, mais de « soutenir des actions dans les domaines de l’enseignement, de la formation ». Il s’agissait donc pour les membres du projet de mener des actions d’enseignement et de formation dans leurs propres universités, et de produire des ressources utilisables au-delà du cercle du projet. Le thème choisi pour ce projet était celui des pratiques d’enseignement des mathématiques orientées vers l’investigation.

Il faut noter d’emblée qu’il est très rare qu’un projet européen en éducation concerne le niveau de l’université, l’essentiel des moyens étant consacrés au premier et au second degré. De plus, ce projet était centré sur l’enseignement des mathématiques, avec un réel intérêt porté aux savoirs en jeu, même si des dimensions plus pédagogiques ont également été prises en compte. Ainsi l’ouvrage collectif publié à l’issue de ce projet mérite tout l’intérêt des lecteurs des *Annales de Didactique* et de *Sciences Cognitives* ; notons de plus que ce livre est librement accessible en ligne<sup>3</sup>, il ne faut donc pas hésiter à l’utiliser.

Ci-dessous je présente tout d’abord une brève synthèse du contenu du livre (que je désignerai par la suite comme « livre PLATINUM », par souci de concision) ; je discute quelques points qui me semblent pouvoir intéresser un enseignant de mathématiques à l’université, puis un chercheur en didactique des mathématiques au niveau de l’université, avant de conclure.

---

<sup>1</sup> Gómez-Chacón, I. M., Hochmuth, R., Jaworski, B., Rebenda, J., Ruge, J., & Thomas, S. (Eds.) (2021). *Inquiry in University Mathematics Teaching and Learning. The Platinum Project*. Masaryk University Press. <https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.M210-9983-2021>

<sup>2</sup> <https://platinum.uia.no/>

<sup>3</sup> <https://platinum.uia.no/download/>

## 1. Synthèse du contenu de l'ouvrage

L'écriture et la publication d'un livre était un engagement pris par les membres de PLATINUM lors du dépôt du projet. Le contenu de l'ouvrage reflète ce contexte d'écriture en réponse à une attente institutionnelle, il ne s'agit donc pas d'en faire une lecture linéaire ou exhaustive. Le livre comporte dix-neuf chapitres. Après une préface de Michèle Artigue et une introduction générale, il est structuré en 3 parties principales et une partie conclusive.

La première partie présente des éléments fondateurs du projet. Elle situe la perspective des auteurs concernant les démarches d'investigation en mathématiques dans une acception large, avec un intérêt porté à tout élément d'un dispositif d'enseignement favorisant la mise en activité des étudiants. Il ne s'agit pas d'aller vers un enseignement de type projet, mais plutôt de penser un ensemble de tâches à proposer au sein des contraintes institutionnelles « ordinaires » pour soutenir cette mise en activité. Du point de vue théorique, un élément principal dans le travail du projet PLATINUM est la notion de « communauté d'investigation » (CoI, Jaworski, 2006), qui décrit une forme particulière de collectif. Dans une CoI, les membres travaillent ensemble à l'étude d'une question ; il ne s'agit donc pas de faire converger les pratiques diverses pour suivre une norme commune, mais d'adopter une attitude de critique constructive. Dans cette première partie, est introduit un modèle à trois niveaux qui servira tout au long de l'ouvrage, et qui aide à structurer les différentes formes d'investigation dans le projet. L'investigation peut être menée par les étudiants, elle se déroule alors dans la classe (ou en dehors, mais toujours dans le contexte d'un cours). Elle peut aussi être menée par les enseignants, qui s'interrogent sur leurs pratiques (dont les caractéristiques doivent permettre une investigation des étudiants). Elle peut enfin être menée par les chercheurs – qui sont éventuellement les mêmes personnes que les enseignants, ici les membres du projet – qui amènent une prise de recul supplémentaire sur l'activité des étudiants comme sur celle des enseignants, et dont les recherches nourrissent les choix pour les enseignements concernés. Dans la première partie du livre se trouve aussi un chapitre (Chap. 3) présentant des graphiques en toile d'araignée qui ont joué un rôle important dans la coordination du projet. Il y a trois types de graphiques concernant les enseignements orientés vers l'investigation : un sur l'apprentissage ; un sur l'enseignement ; et un sur les groupes d'enseignants ou de concepteurs d'enseignements. Chaque graphique comporte 8 dimensions, fournissant la trame de la toile d'araignée qui sera obtenue par application des critères à l'analyse d'un enseignement donné. Finalement, le chapitre 4 présente une méthodologie de conception de ressources et d'enseignements visant à prendre en compte les étudiants à besoins identifiés (terme préféré ici à celui de besoins spécifiques utilisé de manière plus courante). En effet, les démarches orientées vers l'investigation, qui peuvent avoir des conséquences très positives pour les apprentissages en mathématiques, peuvent également être sources

d'écueils spécifiques pour des étudiants ayant des difficultés à s'exprimer à l'oral, ou à s'orienter dans un ensemble riche de ressources par exemple. Les membres du projet ont d'emblée pris en compte cet obstacle et ont souhaité produire des enseignements qui diffèrent des pratiques usuelles en étant d'une part plus favorables à la mise en activité des étudiants, et dans le même temps plus inclusifs.

La partie 2 du livre présente le projet, et certains de ses résultats rassemblés sous l'appellation « *Intellectual Output* » (une traduction littérale en français donnerait « production intellectuelle », expression étrange qui a rejoint les termes « jalon » ou « livrable » comme partie intégrante du vocabulaire du chercheur) selon le jargon des projets européens. Les chapitres correspondants concernent quatre thèmes : la conception d'enseignements orientés vers l'investigation (Chap. 6) ; la formation, initiale et continue, des enseignants de mathématiques à l'université (Chap. 7) ; la modélisation mathématique et son lien avec l'investigation (Chap. 8) ; et l'évaluation d'un enseignement orienté vers l'investigation (Chap. 9, au sens de méthodologie d'évaluation de l'impact de cet enseignement). Ces chapitres sont tous appuyés sur des exemples concrets de mise en œuvre dans certaines institutions partenaires. Ils présentent des choix faits dans le projet, qui sont plus ou moins informés par des résultats antérieurs de recherche et plus ou moins utilisables au-delà du contexte du projet (ces deux aspects étant comme pour tout écrit relevant de la didactique des mathématiques très directement liés).

Finalement, la partie 3 présente des enseignements mis en œuvre dans chacune des institutions partenaires. Ces enseignements couvrent des publics très variés : étudiants de première année en mathématiques, futurs enseignants de mathématiques, futurs ingénieurs, étudiants en sciences biomédicales etc. Les contextes nationaux très divers, ainsi que les expériences des institutions en termes d'enseignement de mathématiques orientés vers l'investigation sont clairement présentés et bien pris en compte. Les contenus mathématiques concernés sont aussi très variés : l'analyse, la géométrie, les nombres complexes, la statistique etc. Notons que de nombreuses ressources présentes sur le site du projet complètent les éléments synthétiques exposés dans le livre.

L'ampleur du travail réalisé est impressionnante, comme la cohérence d'ensemble. Faire collaborer des équipes dans des pays aussi divers que l'Allemagne, le Royaume-Uni, les Pays-Bas, la République Tchèque, l'Espagne, la Norvège et l'Ukraine est un réel défi que les responsables du projet ont mené à bien. Au-delà du fait que ce livre devait être écrit suite à l'engagement pris par les membres du projet PLATINUM lors de l'obtention du financement européen, il peut intéresser des lecteurs enseignant les mathématiques à l'université, ou chercheurs en didactique intéressés par le niveau de l'université. Ci-dessous j'adopte successivement ces deux points de vue.

## 2. Contributions pour les enseignants

La contribution la plus intéressante du livre PLATINUM pour un enseignant de mathématiques de l'université est constituée selon moi par la présentation des enseignements réalisés dans les huit institutions du projet (les études de cas rassemblées dans la partie 3). Les enseignements complets sont difficilement transférables, d'autant que bon nombre de ceux-ci ont eu lieu lors de la période COVID, et donc entièrement ou pour partie à distance. En revanche les tâches conçues et testées peuvent être facilement utilisées dans différents contextes. Il s'agit parfois simplement de partir d'exercices relativement classiques, et de les modifier pour obtenir des exercices plus ouverts, invitant les étudiants à entrer dans une démarche de recherche (Figure 1).

Le tableau ci-dessous présente les valeurs prises par une fonction  $y(t)$  au voisinage de  $t=1$ .

$t$	0,7	0,8	1	1,1	1,2
$y(t)$	0,741	0,819	1	1,105	1,221

Quelle est la meilleure approximation de  $y'(1)$  ? Essayez plusieurs méthodes et comparez vos résultats.

**Figure 1.** Exemple de tâche donnée à des étudiants en sciences biomédicales (Université d'Amsterdam, Pays-Bas). Extrait de Gómez-Chacón et al. (2021, p. 223, notre traduction)

Bon nombre de ces tâches font appel au numérique, avec une diversité d'outils allant de plate-formes numériques de type Moodle à des logiciels spécifiques comme GeoGebra ou R. Il aurait été intéressant de rassembler en un même lieu l'ensemble de ces tâches, avec un classement par thématique et/ou par filière concernée. Le livre donne une première approche, et le lecteur intéressé peut se fournir l'ensemble des tâches sur le site web du projet. Cet apport est tout à fait significatif ; je regrette en revanche le peu d'analyse des tâches proposées, qui me semble un élément essentiel pour leur diffusion et leur adaptation dans d'autres contextes.

Un autre type de contribution qui peut, me semble-t-il, être utile aux enseignants est constitué par les graphiques en toile d'araignée (Partie 1, Chap. 3) et par les critères permettant de constituer ces graphiques. Huit critères concernent l'apprentissage fondé sur l'investigation, huit autres concernent l'enseignement fondé sur l'investigation. Ces critères pourraient jouer le rôle de meta-ressources (c'est-à-dire d'éléments soutenant la conception de ressources, Gueudet et al., à paraître ; Prieur, 2016) pour des enseignants engagés dans la conception d'un cours ou même d'une tâche orientée vers l'investigation. En effet, il est possible de transformer ces seize critères en autant de questions, que l'enseignant peut se poser lors de la conception de son enseignement : est-ce que les étudiants peuvent s'engager dans des activités d'exploration ? Est-ce que les étudiants ont accès à plusieurs manières de

communiquer leurs résultats ? Est-ce que des aides sont prévues ? En cas de réponse négative à l'une de ces questions, il est éventuellement possible de modifier la tâche prévue ou sa mise en œuvre. L'enseignant-concepteur peut même aller jusqu'à constituer les graphiques en toile d'araignée, pour visualiser le profil de son cours et l'ajuster en fonction de ses objectifs.

Par ailleurs, les réflexions sur la conception d'enseignements pour prendre en compte la présence d'étudiants à besoins identifiés peut intéresser de nombreux collègues. Certains des conseils fournis se situent à un niveau assez général, comme par exemple : « utiliser des représentations qui prennent en compte les besoins et les styles d'apprentissages les plus variés possibles ». Il s'agit d'une intention louable, mais en aucun cas d'un conseil opérationnel. Cependant la déclinaison de ces conseils selon différents aspects de l'investigation amène des recommandations plus directement utilisables. Par exemple, « proposer des ressources non seulement textuelles mais aussi visuelles ou auditives », ou encore « aider les étudiants à établir une collaboration effective en proposant une organisation du groupe avec des rôles et des responsabilités spécifiques ». En effet, mettre en place un travail collectif des étudiants conduisant à une coopération productive permettant à chacun et chacune de participer demande un cadrage anticipé et réfléchi de l'enseignant (Reverdy, 2016).

### **3. Contributions pour les chercheurs**

Comme expliqué ci-dessus, ce livre est issu d'un projet européen qui n'est pas un projet de recherche. Ainsi il ne s'agit pas de vouloir y trouver des résultats de recherche sur les démarches d'investigation en mathématiques au niveau de l'université, ce qui les caractérise, leur impact sur les apprentissages ou les spécificités des pratiques enseignantes dans ce contexte. Je recommande au lecteur intéressé par ce type de résultats de plutôt se tourner vers des revues de recherche, notamment IJRUME (International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education). Durant ces dernières années en effet, aux Etats-Unis en particulier, de très nombreuses expériences d'enseignement orientés vers l'investigation ont été menées et évaluées, donnant lieu à un grand nombre d'articles. L'article de Laursen et Rasmussen (2019) donne une vision synthétique de ce qui avait été réalisé à l'époque.

Pour un chercheur en didactique des mathématiques, il me semble que l'apport du livre réside plutôt dans ce qu'il nous apprend à propos de différents aspects du travail des chercheurs. Ainsi la présentation du projet (Chap. 5) est très informative, car faite de manière pragmatique et honnête. Elle peut éclairer tout collègue désireux de monter un projet dans le cadre Erasmus +. Plus généralement, le livre donne à voir les avantages et les inconvénients de ce type de projet. Du côté des avantages, on note la collaboration entre didacticiens et mathématiciens. Un tel projet offre un

cadre structurant pour cette collaboration. L'objectif partagé d'évolution des pratiques d'enseignement a rassemblé de petites équipes dans chaque institution, qui n'auraient sans doute pas perduré pendant trois années – en particulier trois années incluant la crise COVID. Ceci amène à souligner la solidité de l'équipe de conduite du projet. Le livre montre bien le travail considérable de coordination réalisé par cette équipe, avec des outils spécifiques que chaque institution s'est appropriés et qui ont permis une certaine mise en cohérence de l'ensemble.

En ce qui concerne les inconvénients, et les points plus négatifs que ce livre met en évidence, je note l'absence d'une revue de la littérature sur le sujet des enseignements orientés vers l'investigation à l'université. Le dossier du projet n'annonçait pas une telle revue de la littérature (qui aurait pourtant constitué une « production intellectuelle » significative), elle n'a pas été réalisée. Il est fait mention dans certains chapitres des travaux réalisés aux Etats-Unis, comme je l'ai évoqué ci-dessus. En revanche les travaux également essentiels menés autour des Parcours d'Etude et de Recherche à l'université (PER, Florensa et al., 2019) sont à peine évoqués. Il est clair que le travail de PLATINUM ne visait pas à élaborer des enseignements relevant d'un nouveau paradigme. Cependant les recherches sur les PER ont fourni des outils d'analyse a priori spécifiques des démarches d'investigation, qui auraient pu être utilisés ici avec profit et mentionnés dans le chapitre relatif à la conception d'enseignements orientés vers l'investigation. Ceci aurait certainement conduit à compléter la présentation des tâches avec des analyses qui auraient contribué à faire de cet ouvrage une ressource pour les enseignants.

Réaliser une synthèse est toujours consommateur de temps, mais indispensable pour poser les bases d'un projet nouveau. De plus, et puisque la collaboration entre didacticiens et mathématiciens a été un des points forts du projet, il me semble qu'une des contributions des didacticiens pouvait justement être la réalisation d'une ou plusieurs revues de travaux. Les collègues mathématiciens peuvent être demandeurs de textes brefs, permettant d'accéder aux résultats des recherches en didactique, et la communauté de didactique des mathématiques à l'université a encore un travail significatif à faire en ce sens<sup>4</sup>.

#### **4. Réflexions finales**

Je retiens de la lecture de cet ouvrage qu'il peut constituer une ressource intéressante pour un enseignant de l'université souhaitant orienter tout ou partie de son enseignement de mathématiques vers l'investigation, notamment en ayant recours à un travail autour de la modélisation mathématique. Il peut également éclairer un chercheur en didactique sur des aspects importants du métier de chercheur : répondre

---

<sup>4</sup> Travail initié notamment au sein du GDR DEMIPS, <https://demips.math.cnrs.fr/>, et dans la revue EPIDEMES, <https://epidemes.episciences.org/> (Grenier-Boley & Sabra, 2022).

à un appel à projet européen, coordonner un travail collectif au niveau international. J'ajoute ici que d'autres éléments intéressants se trouvent dans le chapitre 7 consacré à la formation des enseignants de l'université. Ce chapitre présente trois actions de formation menées respectivement en Allemagne, en Espagne et en Norvège autour du thème du projet pour des enseignants de l'université, certains expérimentés et d'autres débutants (notamment des doctorants). Les auteurs discutent les aspects positifs comme négatifs de ces formations, ceci peut inspirer des lecteurs des *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* à même d'intervenir dans la formation des enseignants de l'université.

Quels que soient les qualités ou les défauts du livre PLATINUM, on ne peut que regretter qu'aucun pays francophone n'ait été impliqué dans ce projet. Il est certainement possible aussi dans les pays francophones de faire évoluer les pratiques d'enseignement des mathématiques vers plus d'investigation pour les étudiants, de concevoir et d'implémenter des formations d'enseignants de l'université sur ce thème et même d'obtenir des financements européens pour des recherches concernant le niveau de l'université. La lecture de ce livre peut certainement contribuer à l'atteinte de ces objectifs.

### **Bibliographie**

FLORENSA, I., BARQUERO, B., BOSCH, M., & GASCÓN, J. (2019). Study and research paths at university level: Managing, analysing and institutionalizing knowledge. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the eleventh congress of the european society for research in mathematics education* (pp. 2484-2491). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

GÓMEZ-CHACÓN, I. M., HOCHMUTH, R., JAWORSKI, B., REBENDA, J., RUGE, J., & THOMAS, S. (Eds.) (2021). *Inquiry in University Mathematics Teaching and Learning. The Platinum Project*. Masaryk University Press. <https://doi.org/10.5817/CZ.MUNI.M210-9983-2021>

GRENIER-BOLEY, N., & SABRA, H. (2022). Meeting the challenges of teaching mathematics in higher education today. *EpiDEMES*, 1. <https://doi.org/10.46298/epidemes-9785>

GUEUDET, G., PEPIN, B., & REZAT, S. (2023). Meta-resources: supporting the design of mathematics teaching and learning. In B. Pepin, G. Gueudet & J. Choppin, *Handbook of digital resources in mathematics education*. (pp.1-24). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6\\_36-1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-95060-6_36-1)

JAWORSKI, B. (2006). Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(2), 187-211. doi.org/10.1007/s10857-005-1223-z

LAURSEN, S., & RASMUSSEN, C. (2019). I on the prize: Inquiry approaches in undergraduatemathematics education. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 5(1), 129-149. doi.org/10.1007/s40753-019-00085-6

PRIEUR, M. (2016). *La conception co-disciplinaire de méta-ressources comme appui à l'évolution des connaissances des professeurs de sciences*. Thèse de doctorat de l'Université Lyon 1.

REVERDY, C. (2016). *La coopération entre élèves : des recherches aux pratiques*. Institut Français de l'Education.

**GHISLAINE GUEUDET**

UR EST, Université Paris-Saclay, Orsay, France

ghislaine.gueudet@universite-paris-saclay.fr

## INFORMATIONS POUR LES AUTEURS

### **Présentation de la revue**

Les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives est une revue annuelle fondée en 1988 par Raymond Duval et François Pluvinage, actuellement sous la responsabilité de Philippe R. Richard et Laurent Vivier.

Cette revue internationale est dédiée à la diffusion de la recherche en didactique des mathématiques et des domaines connexes. Il s'agit d'une revue francophone de référence sur les recherches portant sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Les articles sont principalement écrits en français, mais peuvent également être publiés en espagnol ou en anglais.

La revue fait l'objet d'un classement scientifique par l'organisme européen ERIH et par l'HCERES en France. Elle est également répertoriée dans des bases de données de référence comme MathEducDataBase ou GoogleScholar. Ces différents référencement ajoutent une valorisation des publications dans les Annales pour les auteurs. Les articles sont en accès libre sur le site des Annales de didactique et de sciences cognitives ainsi que sur le site d'OpenEdition Journals<sup>1</sup> dès leur parution, sans embargo.

La revue est ouverte à tout type de recherche. Les articles peuvent être de nature théorique, en relation étroite avec une expérimentation dans le cadre d'un enseignement, ou constituer des comptes rendus d'expériences d'enseignement appuyées sur un cadre théorique explicite. Il est également possible de présenter une synthèse de recherches menées dans un domaine particulier de la didactique des mathématiques, ou de proposer des notes de lectures d'ouvrages scientifiques du domaine. Les articles peuvent concerner tous les cadres d'enseignement dans des contextes socioculturels variés et aussi s'intéresser à la formation, initiale et continue, des enseignants.

Outre la publication du numéro annuel, la revue offre la possibilité d'éditer un numéro spécial sur la base d'un projet clairement formulé.

Cette revue s'adresse principalement aux chercheurs en didactique. Elle intéressera également les formateurs d'enseignants soucieux d'appuyer leurs formations sur la recherche en didactique des mathématiques.

Site internet de la revue : <https://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/annales-de-didactique-et-de-sciences-cognitives>.

---

<sup>1</sup> <https://journals.openedition.org/adsc/>

### Instructions aux auteurs

La revue est ouverte à tout type de recherche, que ce soit un essai didactique ou un rapport d'étude impliquant de la recherche empirique. Il est également possible de présenter une synthèse des recherches menées dans un domaine particulier de l'enseignement des mathématiques ou d'un domaine connexe (physique, algorithmique, etc.), ou de proposer des notes de lectures d'ouvrages scientifiques. Les domaines théoriques de références sont issus de la didactique des mathématiques.

Il est demandé aux auteurs de proposer des articles de taille raisonnable, entre vingt et trente pages, même s'ils peuvent être plus longs pour permettre à l'auteur de développer un point de vue original qui émerge dans le champ de la recherche.

Les articles peuvent être écrits en français, en espagnol ou en anglais. Lorsque l'article est écrit en espagnol ou en anglais, il est attendu que les auteurs proposent également un résumé en français. Si l'une des trois langues de la revue n'est pas comprise par les auteurs, merci de le préciser lors de la soumission.

Les articles sont à soumettre par courrier électronique à [mai-adsc@unistra.fr](mailto:mai-adsc@unistra.fr).

Avant tout envoi, nous vous prions de vérifier que votre article respecte bien les consignes éditoriales suivantes :

- Le format de la revue est respecté : voir le fichier de styles<sup>2</sup> pour les auteurs ;
- Le niveau de langue utilisé est soigné et bien travaillé.
- L'article proposé est original. Il n'a ni déjà été publié ailleurs ni envoyé à une autre revue pour publication. Il ne s'agit pas non plus d'une simple traduction d'un article déjà publié.
- L'article ne contient aucun plagiat et il est dûment référencé.
- En décidant d'envoyer un article à la revue des Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vous autorisez la mise en ligne de votre article sur le site de la revue ainsi que sur le site OpenEdition Journal.
- Vous vous engagez en outre à communiquer les liens vers ces deux sites pour la diffusion de votre article.

---

<sup>2</sup> Disponible à l'adresse : <https://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/annaes-de-didactique-et-de-sciences-cognitives#c48447>

Pour composer un article sans utiliser le modèle, par exemple en recourant à LaTeX, voici des précisions sur le format des pages et les caractères utilisés.

Feuille A4 portrait, avec les marges suivantes :

- Haut : 3 cm                      Bas : 8 cm
- Gauche : 4 cm                  Droite : 4 cm
- En tête : 2 cm                  Pied de page : 7 cm
- Reliure : 0 cm

Caractères :

- Auteur(s) en première page : Arial 12 points, gras, petite capitale, Centré ;
- Titre en première page : Arial 14 points, petite capitale, Centré ;
- Abstract – Résumé – Mots clés : Times New Roman 10 points ;
- En-tête : Arial 9 points ;
- Corps de texte : Times New Roman 11 points.

Pour la pagination d'un article proposé, commencer par le numéro 1.

### **Procédures de sélection des textes**

Les articles proposés sont soumis à un arbitrage, en double aveugle, par trois évaluateurs avant publication. Une synthèse sera envoyée aux auteurs par les rédacteurs en chef. Le cas échéant, des demandes de modifications, aménagements ou compléments des textes présentés seront adressées aux auteurs.

Les articles sont reçus par les rédacteurs en chef de la revue. Ils sont emmagasinés sur une plateforme de partage privée uniquement accessible aux rédacteurs en chef, aux conseillers scientifiques et à la conseillère éditoriale.

Une première appréciation de l'adéquation de l'article avec les objectifs de la revue est faite par les rédacteurs en chef. Cette première évaluation peut aboutir à un refus de l'article s'il ne correspond pas à la ligne éditoriale de la revue ou s'il pose un problème éthique. Il peut également être renvoyé aux auteurs pour effectuer des modifications avant l'envoi aux évaluateurs, par exemple, pour une remise en forme ou une correction linguistique. En cas de nécessité, les conseillers scientifiques peuvent être consultés.

Les rédacteurs en chef se consultent pour le choix et la sollicitation des évaluateurs qui ont, au plus, deux mois pour renvoyer leur évaluation. Ils suivent le bon déroulement du processus d'évaluation et ils sont attentifs aux dates de retour afin de prévoir la publication. Un fichier privé aux fonctions de partage et de synthèse est tenu à jour.

Une fiche d'évaluation est proposée aux trois évaluateurs. Selon le retour de ces derniers, une synthèse est envoyée aux auteurs incluant leurs évaluations. Quatre

cas de figure sont envisagés : (A) publication acceptée en l'état ; (B) publication acceptée avec des modifications mineures à effectuer, sans nécessité d'une nouvelle évaluation ; (C) Publication possible sous réserve de modifications majeures à effectuer et nécessitant une nouvelle évaluation ; (D) refus de l'article. Selon l'éventualité, le traitement est le suivant :

- Cas A, l'article est transféré à la conseillère éditoriale et au secrétaire d'édition pour préparer la publication.
- Cas B, les rédacteurs en chef demandent le retour des modifications par les auteurs dans un délai maximum d'un mois.
- Cas C, les auteurs ont deux mois pour renvoyer leur nouvelle version. Par la suite, les trois relecteurs initiaux sont sollicités avec un délai de 2 mois pour faire la relecture (délai pouvant être ramené à 1 mois si cela permet de publier l'article dans le numéro de l'année).
- Cas D, un retour circonstancié est envoyé aux auteurs par les rédacteurs en chef. Si nécessaire, les conseillers scientifiques peuvent être sollicités.

Généralement, les articles envoyés l'année  $n$  et acceptés sont publiés dans le numéro de l'année  $n + 1$ .

