ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

Revue internationale de didactique des mathématiques

Rédacteurs en chef :
PHILIPPE R. RICHARD, LAURENT VIVIER

Volume 27 - 2022

IREM de Strasbourg

Université de Strasbourg

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
ISSN 0987-7576 (imprimé) – ISSN : 2804-2514 (en ligne)

Éditeur

IREM de Strasbourg – Université de Strasbourg
7, rue René Descartes 67084 Strasbourg CEDEX
Tél. : +33 (0)3 68 85 01 30
Fax. : +33 (0)3 68 85 01 65
irem@math.unistra.fr

Bibliothèque et édition électronique

Christine CARABIN
Tél : +33 (0)3 68 85 01 61
http://irem.unistra.fr

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
VOLUME 27 – 2022

SOMMAIRE

ÉDITORIAL DU NUMERO 27

On aime se rappeler que les années se suivent et ne se ressemblent pas. Enfin, pourrait-on ajouter, après deux années cantonnées dans une même logique pandémique, dite de circonstances exceptionnelles. La notion d'exception est d'ailleurs bien connue des mathématiciens : elle est celle qui échappe non pas à la règle, mais au cas général. Nous sommes tous d'accord pour reconnaître une certaine exception, le désaccord commence dès que l'on s'interroge sur le cas général ou lorsqu'il s'agit de décider l'effet qu'aura l'exception pour la suite. Les *Annales de didactique et de sciences cognitives* aussi font face à des « circonstances exceptionnelles ». Victime de son propre dynamisme, la revue doit conjuguer avec un grand nombre de projets simultanés. Certains sont déjà achevés, d'autres sont encore en chantier, et il en reste toujours un certain nombre sur la planche à dessin.

Commençons par les projets terminés. De toute évidence, le présent numéro vient en tête. Nous revenons sur son contenu en fin d'éditorial. Après plusieurs années de travail continu, c'est le portail de publication OpenEdition Journals (OEJ) qui vole la vedette. Depuis le printemps dernier, la revue est aussi accessible à partir du permalien https://journals.openedition.org/adsc/. Spécialiste public en ressources numériques et communication scientifique, OEJ promeut le libre accès aux articles de nos auteurs et valorise la recherche de l'information induite par le numérique. Jusqu'ici, pour favoriser plus particulièrement la diffusion des exemplaires traditionnels dans les bibliothèques, nous respections un délai d'un an avant d'ouvrir les articles sur le site https://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/adsc/ des Annales. Cet embargo a été abandonné, puisque nous avons rejoint le programme OpenEdition Freemium pour le développement de l'édition électronique scientifique en libre accès complet.

Sur le plan des projets en cours, les numéros thématiques occupent une place de plus en plus importante. C'est d'ailleurs un défi d'équipe qui nous invite à réfléchir sur la composition de nos comités pour soutenir le travail d'accompagnement scientifique. Tout d'abord, la publication du numéro intitulé *Les pratiques de formation à l'enseignement des mathématiques : une approche par la recherche en didactique*, est imminente. Coordonné par Frédérick Tempier, Caroline Lajoie et Valentina Celi, l'ouvrage se propose d'examiner les pratiques des formateurs et leurs effets possibles sur le développement professionnel des étudiants en enseignement des mathématiques. Deux autres projets sont en marche, quoiqu'à des stades différents de mise en œuvre. Le premier s'intitule *Recherches et dialogues en didactique des mathématiques et des sciences*, publication dans le sillage du colloque « Rendez-vous en didactique, recherches, dialogues et plus si affinités », qui avait été organisé par le Laboratoire de didactique André Revuz. Ce ne sont pas des actes, mais le fruit de la poursuite d'un travail qui a débuté autour de six conférences thématiques « à deux voix » au cours desquelles deux chercheurs de deux didactiques disciplinaires distinctes ont débattu des spécificités et des approches liées à leurs didactiques, et des ouvertures possibles, voire nécessaires, à d'autres didactiques. Le second, sous le titre provisoire *Teaching and learning of calculus : duality of the* *transition from secondary to tertiary education*, il se préoccupe de l'enseignement de l'analyse mathématique au cours du passage entre le préuniversitaire (lycée, cégep) et l'université. Il s'inscrit dans un mouvement international de recherche sur l'enseignement des mathématiques et de leurs applications au niveau universitaire. L'appel à contribution est disponible sur le site Web des Annales.

Ce qui se profile prochainement est l'intégration de nos publications à la base de données bibliographiques Scopus, spécialisée dans le traitement des résumés et des citations de publications scientifiques depuis 2004. Comparativement à la plateforme d'information scientifique et technique Web of Science, Scopus est reconnue pour avoir une plus grande couverture des sciences humaines et sociales, tout en desservant mieux les journaux non anglophones. En raison de la nature des Annales et de son caractère international et trilingue, il nous semble qu'il s'agit de l'approche la plus intéressante pour nos auteurs. Bien que la transposition des outils bibliométriques soulève certaines questions en tant qu'outil d'évaluation de la recherche, et plus spécifiquement de celle des chercheurs, notre présence dans l'OEJ et notre participation aux bases de données Scopus est avant tout un engagement à mieux diffuser les travaux de nos auteurs avec les avantages des outils de recherche.

Le comité de rédaction accueille tout projet d'article scientifique inédit et il est heureux de recevoir des propositions de numéros thématiques sur des travaux didactiquement intéressants. Dans les instructions aux auteurs, nous expliquons que la revue est ouverte à tout type de recherche, qu'il s'agisse d'un essai didactique ou d'un rapport d'étude impliquant une recherche empirique. On peut également présenter une synthèse des recherches menées dans un domaine particulier de l'enseignement des mathématiques ou dans un domaine connexe (physique, algorithmique, etc.), ou proposer des notes de lecture sur des ouvrages scientifiques. Les domaines théoriques de références sont issus de la didactique des mathématiques, et lorsqu'ils s'inscrivent dans une problématique d'enseignement des mathématiques, les travaux peuvent aussi s'appuyer sur la psychologie cognitive ou sur la linguistique.

Comme toujours, nous tenons à remercier l'IREM de l'Université de Strasbourg et son personnel pour leur soutien à la publication et à la diffusion de cet ouvrage. Nous tenons également à rappeler l'importance du travail bénévole de nos pairs dans la préparation, l'amélioration et la promotion de notre domaine. À l'instar de nos collègues dans l'article *Writing reviews : perspectives from the editors of Educational Studies in Mathematics* (2021), il convient de rappeler qu'une relecture est un écrit scientifique qui présente une position sur les qualités du manuscrit examiné, étayée par des informations tirées du texte et de l'expertise du relecteur. Même si cette tâche scientifique n'est pas publiée, elle reste indispensable pour éclairer les décisions des éditeurs et l'amélioration des contributions des auteurs.

Dans ce 27e numéro, nous avons le plaisir de présenter six contributions particulièrement intéressantes. Les deux premiers articles composent avec la notion de gestes professionnels, qui comprennent les gestes linguistiques, les gestes de travail et les gestes didactiques, dans le sens où les gestes permettent à l'apprenant de réagir en fonction des visées de l'enseignant. Ils se distinguent toutefois par les valeurs de la variable métamathématique et le contenu mathématique en question, le premier touchant les aspects discursifs en géométrie de la 6e du collège (étape 11-12 ans), tandis que le second, la résolution de problèmes numériques dans les cours préparatoires (étape 6-7 ans). Les deux articles suivants portent sur le même domaine probabiliste. Le premier confronte les démarches associées aux modèles théoriques et aux modèles expérimentaux au collège et au lycée, alors que le second s'intéresse aux variations dans les types de tâches au cours de l'étude des probabilités conditionnelles à la fin du lycée et au début de l'université. Quant aux deux derniers articles, ce sont des notes de lecture de deux ouvrages collectifs internationaux. Le premier traite des rapports émergents de l'enseignement des mathématiques et de l'intelligence artificielle, et le second, du travail mathématique à l'école.

Au premier article, Caroline Bulf se demande quels sont les gestes d'enseignement qui participent à la construction d'une communauté discursive dans la géométrique scolaire. Tablant à la fois sur ce qui est, dans une étude de cas, et sur ce qui devrait favoriser l'émergence d'une communauté discursive dans la géométrie des tracés, la description des gestes est examinée sous l'angle de leurs effets afin de permettre aux élèves de gérer progressivement leur activité de manière autonome. Dans le texte suivant, de Carine Reydy, c'est plutôt le choix des gestes d'enseignement qui focalisent le regard. Pour expliquer la logique qui sous-tend les choix des enseignants, l'auteure analyse ce que chaque enseignant met en œuvre pour comprendre les représentations et l'organisation des actions que prennent les élèves en résolution de problèmes. Au troisième article, Charlotte Derouet caractérise différentes catégories d'approches de modélisation impliquant des modèles probabilistes que l'on peut trouver en classe de mathématiques. La caractérisation est conduite en relation avec les différentes étapes du cycle de modélisation retenu et deux types d'hypothèses qui sont liés aux choix qui doivent être faits pour passer de la réalité au modèle mathématique. Dans le quatrième article, Camille Doukhan introduit l'idée de variation de type de tâches pour mieux comprendre comment s'effectue la transition secondaire-supérieur sur la trame des probabilités conditionnelles. Dans ses analyses, l'auteure croise le point de vue des acteurs avec celui de l'institution pour décrire la pratique enseignante, en considérant les aspects cognitifs et de médiation dans l'activité des étudiants.

Il serait vain de résumer des notes de lecture, encore faut-il souligner qu'il s'agit d'une sorte de conversation scientifique qui ne peut être simplement descriptive : elles engagent forcément une discussion et une critique, tout en reliant le contenu des ouvrages à la recherche actuelle. C'est pourquoi nous devons remercier chaleureusement nos collègues émérites Jean-baptiste Lagrange et Michèle Artigue qui nous aident à mieux comprendre l'intérêt et les limites des écrits. Le premier ouvrage, intitulé *Mathematics education in the age of artificial intelligence : how artificial intelligence can serve mathematical human learning*, met en lumière la contribution de l'intelligence artificielle à l'enseignement des mathématiques, propose des idées concrètes étayées par des travaux mathématiques issus d'une collaboration internationale dynamique et analyse le développement des nouvelles mathématiques dans le monde contemporain. Le second ouvrage, sous le titre *Mathematical work in educational context : the mathematical working space theory* *perspective*, présente une théorie fondamentalement originale qui tient compte du contenu mathématique dans l'enseignement des mathématiques, articule les aspects épistémologiques et cognitifs de l'enseignement des mathématiques et s'appuie sur un corpus riche de plus de 150 articles provenant de différentes régions du monde.

Nous vous souhaitons une lecture des plus agréables.

L'équipe de direction scientifique des ADSC : Philippe R. Richard et Laurent Vivier

Caroline Bulf

Quels gestes professionnels d'enseignement au service d'une communaute discursive geometrique scolaire ?

Abstract. Which professional teaching actions in the service of a school geometric discursive community? Our work seeks to describe professional teaching actions in geometry classes. We rely on the analysis of a collection of observations of sessions in a 6th grade class (pupil ages 11–12 years) conducted by the same teacher during the same school year, based on a progression designed collectively and collaboratively within an IREM group. In our work, the study of the links between teaching and learning in the geometry class is examined through the relations between professional action and the School Mathematical Discursive Community.

Keywords. geometry, didactical professional actions, language, school mathematical discursive community.

Résumé. Notre travail cherche à décrire des gestes professionnels d'enseignement en classe de géométrie. Nous nous appuyons sur l'analyse d'un recueil d'observations de séances de classe de 6^{e} menées par un même enseignant au cours d'une même année scolaire prenant appui sur une progression pensée collectivement et collaborativement au sein d'un groupe IREM. Dans notre travail, l'étude des liens entre enseignement et apprentissage en classe de géométrie est examinée à travers les relations entre gestes professionnels et Communauté Discursive Disciplinaire Scolaire.

Mots-clés. Géométrie, gestes professionnels didactiques, langage, communauté discursive disciplinaire scolaire.

Le titre de notre article fait référence aux perspectives ouvertes par Jean-Paul Bernié il y a déjà une vingtaine d'années :

> L'analyse et la description des pratiques enseignantes gagneraient, à notre sens, à intégrer à ses objectifs la question : quels gestes pour quelle communauté discursive ? (Bernié, 2002, p. 86)

Notre article se veut ainsi une modeste contribution à cette réflexion dans le champ de la didactique de la géométrie.

L'enseignement et l'apprentissage de la géométrie ont fait l'objet de nombreuses recherches mettant au jour les origines épistémologiques et didactiques de certains obstacles ou difficultés rencontrés aussi bien du côté des élèves que du côté des enseignant·e·s. De nombreux travaux décrivent différentes « géométries » qui se

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 27, p. 11 - 51.

retrouvent en tension en raison d'un rapport ambivalent au dessin[1] et aux instruments (Mathé & Mithalal, 2019) : la « géométrie physique » et la « géométrie théorique »[2] au sens de Perrin-Glorian et Godin (2018) ainsi que Mathé et al. (2020) ou « la géométrie I » et « la géométrie II » au sens de Houdement et Kuzniak (2006). Cet article cherche à décrire certains gestes professionnels d'enseignement au sens de Bucheton (2009 ; 2019) à l'aune de ce qui caractérise, selon nous, l'activité géométrique. Nous considérons que l'activité géométrique scolaire des élèves se réalise par la confrontation à des problèmes dont la résolution donne du sens aux concepts géométriques en jeu et qu'apprendre en géométrie consiste à négocier une façon spécifique de voir les figures, mais aussi des modalités spécifiques d'agir sur celles-ci − de façon instrumentée ou non − et d'en parler (Bulf et al., 2014 ; 2015). Nous développons ce positionnement théorique dans la première partie de l'article. Nous nous appuyons ensuite sur l'analyse de plusieurs recueils d'observation de séances de classe (la méthodologie est décrite dans la partie 2) pour décrire en quoi la nature du domaine considéré, ici la géométrie, peut donner lieu à une organisation spécifique et dynamique de gestes professionnels didactiques (partie 3). L'objectif de notre article est d'apporter *in fine* des éléments de réponse à la question : quels gestes d'enseignement participent à la construction d'une Communauté Discursive Géométrique Scolaire ? Notre conclusion propose des pistes de discussion à la fois d'un point de vue théorique afin de penser des articulations entre les cadres théoriques mobilisés, mais aussi du point de vue de la formation à l'enseignement de la géométrie à l'école.

1. Le Modèle théorique du Multi-Agenda (MMA) des préoccupations enchâssées adapté au contexte d'enseignement et d'apprentissage de la géométrie

En nous focalisant sur l'activité enseignante sous l'angle des discours, nous avons choisi de privilégier le modèle théorique de « l'agir enseignant » de Bucheton (2009 ;

---

[1] De nombreux travaux depuis Parzysz (1988) ont décrit la distinction entre dessin et figure, nous renvoyons au cours de l'École d'Été de 2017 de Mathé et Mithalal (2019) ou à la synthèse de Mathé et al. (2020, p. 30).

[2] Nous reprenons les définitions proposées par les auteur·e·s évoqué·e·s : « Comme science de l'espace, la géométrie fournit des outils pour résoudre des problèmes pratiques portant sur des objets matériels, appartenant à l'espace sensible, dans une démarche de modélisation. On pourra parler de *géométrie physique* qui poursuit une finalité pratique. […] La géométrie est d'autre part une théorie mathématique déductive. Refusant la validation perceptive s'appuyant sur l'espace sensible, même outillée par des instruments, la géométrie que l'on tient de Platon puis des Éléments d'Euclide porte sur des objets théoriques, idéaux, déduit ses théorèmes d'axiomes préalablement posés et se veut constituer une théorie fondée sur la rationalité. On parlera de *géométrie théorique* […]. » (Mathé et al., 2020, p. 24).

2019) aussi appelé le Modèle du Multi-Agenda des préoccupations enchâssées (noté MMA[3] par la suite), que nous articulons avec des références et méthodologies spécifiques en didactique des mathématiques. Plus particulièrement, notre approche théorique présente un ancrage disciplinaire fort, spécifique des recherches en didactique de la géométrie dans la continuité des travaux décrits dans Mathé et al. (2020).

Le MMA est le fruit d'un travail collectif et collaboratif de chercheur·e·s de différentes disciplines (dont des didacticien·nes de disciplines différentes) qui a donné lieu à un ouvrage coordonné par D. Bucheton en 2009, elle-même didacticienne du français et chercheure en sciences du langage. Dans cette première partie, nous définissons les concepts clés mobilisés (geste professionnel, langage, Communauté Discursive Disciplinaire Scolaire, agir-parler-penser) afin de mettre en valeur les potentialités qu'offrent leurs articulations au regard de nos questionnements centrés sur l'enseignant·e.

1.1. Une modélisation de l'activité de l'enseignant·e comme un sujet social agissant situé (ou un modèle théorique de « l'agir didactique situé »)

Ancré dans la théorie de l'activité et le champ de l'ergonomie (Vygotski, 1934 ; Leplat, 1997 ; Clot, 1999 ; etc.), le MMA considère le « travail enseignant » comme le « partage de règles et de normes invisibles le plus souvent » (Goffman, 1974 cité par Bucheton, 2009, p. 16). La distinction entre tâche et activité[4] y est centrale, tout comme dans la Double Approche (DA) ergonomique et didactique de Robert et Rogaski (2002). Dans la filiation théorique des travaux de Vergnaud (1991) et Pastré (2006), le cœur de l'analyse de l'activité enseignante, selon Bucheton (2009 ; 2019), se situe au niveau du couple (action ; situation) et de son ajustement[5] ; Bucheton parle

---

[3] Acronyme proposé par D. Bucheton dans son ouvrage de 2019.

[4] La tâche étant « du côté de la situation » et l'activité « du côté du sujet » (Rogalski, 2008, p. 23 dans Vandebrouck, 2008) : « La tâche est ce qui est à faire ; le but qu'il s'agit d'atteindre sous certaines conditions, selon la définition de la notion proposée par Léontiev (1984), élève de Vygotsky, définition reprise et développée par Leplat (1997). L'activité est ce que développe un sujet lors de la réalisation de la tâche : non seulement ses actes extériorisés, mais aussi les inférences, les hypothèses qu'il fait, les décisions qu'il prend, dans ce qu'il fait et ce qu'il retient de faire [...]. »

[5] Le concept d'ajustement fait l'objet de nombreuses approches théoriques. Nous renvoyons à l'ouvrage de Saillot (2020) pour une revue de littérature. Dans cet article, nous partageons la définition de Bucheton (2019, p. 208) : « la manière dont l'agir langagier et corporel de l'enseignant se règle sur la situation spécifique de la classe et, plus encore, sur l'évolution de cette situation pendant la leçon. Cet ajustement est d'autant plus complexe qu'il est un coajustement avec l'agir d'un à vingt-cinq voire quarante élèves, eux-mêmes en train de

de « dynamique de l'action ». Le MMA se centre sur le sujet (enseignant·e) : le sujet y est agissant, social et historiquement, culturellement situé, contrairement à la Théorie des Situations Didactiques (TSD), où l'on se centre sur les situations et la fonction du sujet y est dite épistémique[6]. Néanmoins, précisons que notre objectif n'est pas d'opposer ces deux approches (sujet social *vs* sujet épistémique), mais bien d'en saisir ce qui nous paraît aidant et complémentaire pour mieux décrire et comprendre l'activité enseignante. Nous gardons bien en tête qu'« aucune détermination, ni linguistique, ni praxique, ni narrative, ni éthico-morale de l'action, n'épuise le sens de l'agir » (Ricœur, 1991, cité par Jorro, 2006, p. 1).

Le MMA est constitué de cinq préoccupations constituant « la matrice de l'activité de l'enseignant dans la classe » (Bucheton & Soulé, 2009, p. 32 ; Bucheton, 2019, p. 83). Ces cinq préoccupations sont définies comme des « organisateurs pragmatiques dominants » en référence aux travaux de Pastré (2006) dans le champ de la didactique professionnelle :

- le **tissage**, qui consiste à faire du lien entre ce que l'élève sait déjà ;
- l'**étayage** pour aider l'élève à dire et à faire sans faire à sa place, au sens de Bruner (1983)[7] ;
- l'**atmosphère** pour maintenir des espaces dialogiques ;
- le **pilotage**, qui prend en compte l'organisation (spatiale et temporelle) et la cohérence de la séance ;
- et les **objets de savoir**.

s'ajuster tant à l'agir du maître qu'à celui de leurs pairs et à l'évolution du milieu didactique. »

[6] « Comme elle s'intéresse à un élève générique, la TSD s'intéresse à un enseignant générique ; elle recherche des conditions sur un milieu et ses évolutions possibles dans un ensemble de contraintes. L'accent est mis sur le savoir, son utilité dans la situation et sa progression dans la classe. L'apprentissage peut se vérifier par le traitement par l'élève d'autres situations. La double approche, inscrite dans la théorie de l'activité, s'intéresse davantage à la gestion de la situation par l'enseignant. L'accent est mis sur les sujets et les actions didactiques de l'enseignant pour réduire la distance entre ce que fait l'élève et ce qu'il doit apprendre et qui est attendu de lui. » (Perrin-Glorian et al., 2018 ; extrait traduit dans Mangiante-Orsola et al., 2019, p. 15).

[7] Nous faisons référence aux six fonctions de l'étayage de Bruner (1983, p. 277) : l' « enrôlement », la « réduction des degrés de liberté », le « maintien de l'orientation », la « signilisation des caractéristiques déterminantes », le « contrôle de la frustation » et la « démonstration ».

Ces cinq invariants de l'activité enseignante constituent le « substrat des gestes professionnels » (Bucheton, 2009 ; 2019) (figure 1).

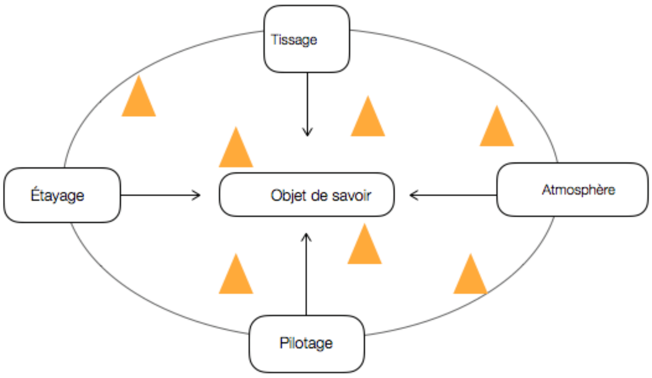


Figure 1. Le modèle du « multi-agenda des préoccupations enchâssées » repris de (Morel et al., 2015).

L'articulation de ces préoccupations est dynamique et en lien étroit avec les savoirs à construire qui sont représentés au centre (figure 1). Ces préoccupations sont « systémiques », car elles interagissent les unes avec les autres : rebondir sur le propos d'un élève par exemple peut relever à la fois de l'atmosphère (l'encourager si sa proposition est incomplète) que de l'étayage (en l'aidant à avancer dans la formulation) voire du pilotage (pour avancer dans la séance). Les petits triangles situent les gestes professionnels dans cette modélisation : ils représentent l'actualisation et l'ajustement permanents des préoccupations, leur articulation au regard de l'activité des élèves. Ils peuvent être des gestes précis identifiés (Morel et al., 2015).

Le terme de « geste », particulièrement usité dans le champ de l'ergonomie, renvoie à l'idée que « l'action du maître est toujours adressée et inscrite dans des codes » (Bucheton & Soulé, 2009, p. 32). Cette référence au corps renvoie aux travaux de Jorro (2002 ; 2006) qui ont participé à la construction des fondements théoriques du MMA. En effet, en appui sur de nombreux travaux tels que Mauss (1936), Merleau Ponty (1945) ou encore Gebauer et Wulf (2004), sur la primordialité du corps dans notre rapport au monde, Jorro décrit « l'agir humain comme un remodelage incessant d'actes, de pratiques héritées, combinées, transformées » (Jorro, 2006, p. 3). Dans ce prolongement théorique, elle définit la notion de « gestes de métier »[8] comme des gestes invariants d'une activité professionnelle pétris symboliquement, socialement,

[8] qui renvoie aussi à la notion de « genre » de l'activité chez Clot (1999).

culturellement (Jorro, 2002). On imagine sans difficulté qu'une journée de classe est jalonnée d'exemples de gestes de ce type, engageant des signes non verbaux (le corps) et verbaux, hérités de pratiques anciennes culturellement partagées : par exemple quand un·e enseignant·e tape dans les mains à la fin de la récréation, les élèves comprennent qu'il est temps de se mettre en rang pour revenir en classe. Jorro évoque plus globalement dans ses travaux le « corps parlant de l'enseignant ».

Jorro distingue les « gestes professionnels » des gestes de métier, comme étant ceux qui « intègrent les gestes de métier en les mobilisant d'une façon particulière, leur mise en œuvre dépend du processus d'ajustement, d'agencement, de régulation » (2006, p. 8). Autrement dit, un geste professionnel prend sens dans un contexte donné et une situation vécue, ce que Bucheton affine dans son modèle :

> Ce sont des gestes langagiers et corporels. Ils sont toujours situés, propres à chaque individu. Ils sont l'actualisation et l'ajustement en contexte des préoccupations complexes de chaque enseignant. […] (Bucheton, 2019, p. 209)

Nous retenons cette dernière définition pour notre étude ainsi que celle de gestes professionnels didactiques qui renvoient :

> À des modes de faire et de dire très précis, spécifiques de l'objet étudié : des tâches, des questionnements, des formes d'évaluation et surtout des situations de classes spécifiques. […] [L]es gestes didactiques de l'enseignant sont évolutifs. Ils se modifient au fur et à mesure de l'avancée des élèves en cours d'année. (Bucheton, 2019, p. 93)

Dès lors, de premières questions sur les conditions d'existence et d'évolution des gestes d'enseignement en classe de géométrie motivent notre étude. Qu'est-ce qu'un geste professionnel didactique en classe de géométrie ? Comment le décrire ? Existe-t-il des formes d'étayage et de tissage spécifiques ? Si oui, sous quelles conditions ? Dans la partie suivante, nous nous focalisons sur le rôle fondateur et fondamental du langage dans le MMA.

1.2. Langage et « Communauté Discursive Disciplinaire Scolaire » (CDDS)

Les références théoriques sur le rôle du langage chez Bucheton (2009 ; 2019) sont nombreuses, renvoyant aux multiples rôles tenus par ce dernier dans l'enseignement et l'apprentissage. En particulier dans son ouvrage de 2019, Bucheton regrette que le langage soit encore un « impensé de la formation » alors que celui-ci est le premier « outil » de l'enseignant·e et des élèves :

> Le langage façonne l'arrière-plan épistémologique de la discipline enseignée, ses modes d'énonciations spécifiques. Il est le vecteur principal du travail partagé et des relations entre le maître et les élèves. Il est un révélateur, une fenêtre sur l'avancée des significations en train de s'élaborer, le levier principal du développement de la réflexivité et de la conceptualisation visée. (Bucheton, 2019, p. 81)

Les travaux de Bernié, Jaubert et Rebière ont contribué à l'élaboration du MMA et constituent également pour nous des références essentielles dans notre travail. Précisons en premier lieu que *langue* et *langage* ne sont pas confondus *:* la langue est vue comme un système de signes linguistiques et codes permettant la communication, et le langage est lui vu comme une activité humaine dialogique et située mettant en jeu la langue et ses codes écrits ou verbaux (Jaubert & Rebière, 2012). Bucheton (2009 ; 2019) fait référence aux « mondes » de François (1990) et évoque « le pouvoir organisateur du langage dans les interactions sociales » et défend l'idée que « [l]e langage traduit, exprime, revendique des appartenances identitaires, sociales » ; François (*ibid.*) parle alors de « communication inégale » entre enseignant·e et élève. Dans ce même ordre idée, Bucheton ainsi que Jaubert et Rebière font référence à Bakhtine/Volochinov[9] (1984) qui parle de « genres de discours » construits historiquement et des « formes discursives culturellement établies » (Bucheton, 2009, p. 14). Bakhtine parle de « sphère d'échanges » qui fédère les humains autour d'une activité. L'école véhicule ainsi des genres différents de discours : le genre premier renvoie à un usage langagier ordinaire tandis que le genre second renvoie à des formes spécifiques, élaborées, plus scientifiques, attestant d'un certain degré de généralisation attaché à la discipline. Les travaux de Bernié (2002), Jaubert et Rebière (2012) mettent en lien cette distinction (genre premier/genre second) et celle proposée par Vygotski (1934) entre concept quotidien et concept scientifique pour développer l'hypothèse de la « secondarisation des discours » et celle de « Communauté Discursive Disciplinaire Scolaire ». En effet, sur le plan des savoirs, le langage est considéré comme un outil de transformation des premières connaissances. Il permet de construire les concepts visés par l'école *via* un certain degré de généralisation, de mises en réseau, les désignations conscientes propres aux disciplines et de multiples reformulations (Jaubert, 2007). Ces processus de construction, de transformation et de négociation de signification *dans* et *par* le langage sont désignés par « secondarisation des discours ». Apprendre dans une discipline c'est donc apprendre des « modes d'agir-parler-penser » dans un univers spécifique ; les auteur·e·s empruntent ainsi à Maingueneau (1984) la notion de « communauté discursive » :

> La notion de communauté discursive désigne le cadre où l'élaboration, la circulation de ces valeurs, de cet *éthos*, est ce qui donne sens aux pratiques matérielles qui en sont le fondement et aux genres discursifs qui leur donnent leur substance. (Bernié, 2002, p. 78)

---

[9] Voir Jaubert & Rebière (2019, p. 157) pour justifier l'usage du double nom Bakhtine et Volochinov.

Cette notion est reprise et adaptée au contexte scolaire :

> Toute classe peut être vue comme une communauté discursive qui apprend à spécialiser son activité (centres d'intérêt, savoirs, valeurs, techniques,…) et notamment ses pratiques langagières (orales et écrites) pour chaque discipline. (Jaubert & Rebière, 2012, p. 4)

La secondarisation est vue métaphoriquement comme une fenêtre sur le processus de conceptualisation opérant au sein d'un espace social discursif spécifique de chaque discipline, désigné par « Communauté Discursive Disciplinaire Scolaire » (noté CDDS par la suite). La notion de CDDS est dès lors considérée comme un outil heuristique pour :

> Décrire les situations didactiques, les stratégies d'enseignement et les dysfonctionnements des apprentissages. Elle permet en particulier d'interpréter les difficultés d'enseignement-apprentissage en termes d'acculturation, de variation et spécification des pratiques et non de défaillance du sujet. […] La notion de CDDS n'a pas vocation d'être prescriptive. En effet, quel que soit le mode d'organisation d'une classe au cours d'un enseignement disciplinaire, la CDDS EST[10]/advient. Elle offre un cadre pour comprendre et analyser le processus d'inscription des élèves dans la discipline visée. (Jaubert & Rebière, 2012, p. 6)

Ainsi considérons-nous qu'instituer une Communauté Discursive Géométrique Scolaire (CDGS), c'est s'inscrire dans les finalités et valeurs partagées par un type de géométrie visé à un niveau donné (une classe de petite section de maternelle ou une classe de 6e ne vise pas les mêmes façons de voir, d'agir ou de parler[11] des figures). Nous partageons le point de vue théorique développé dans les travaux de Jaubert et Rebière (2010 ; 2019) ou ceux de Coulange et al. (2018) dans lesquels on considère que les rapports entre activité enseignante et construction de significations chez les élèves peuvent être exprimés en termes de liens entre gestes professionnels et CDDS dont « l'institution est corrélée aux apprentissages » (Jaubert & Rebière, 2010, p. 1). Nous affinons ce point de vue dans les parties suivantes.

---

[10] En majuscule dans le texte de référence.

[11] Dans nos précédents travaux (Bulf et al., 2014 ; Bulf & Celi, 2020), nous parlons des façons de voir (au sens de Duval, 2005 ; Duval & Godin, 2005), des façons d'agir (actions instrumentées ou non), et des façons de parler (langage oral) pour décrire en classe de géométrie ce que Bernié (2002) désigne par modes d'agir-parler-penser en références aux « mondes » de François (1990). « Voir » n'est pas mis à la place de « penser » ; nous considérons que penser en géométrie relève d'une articulation complexe sans lien de subordination ni hiérarchique entre ces trois dimensions : voir, agir et parler.

1.3. Apports des travaux sur l'apprentissage et l'enseignement en géométrie

Comme déjà évoqué en introduction, il existe de nombreux travaux portant sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie depuis une trentaine d'années dont on peut trouver une synthèse dans Mathé et al. (2020). Ces travaux donnent une attention particulière à l'analyse de situations d'enseignement et les variables didactiques afférentes, les enjeux épistémologiques et didactiques et les effets potentiels en termes d'apprentissages pour les élèves. Certains de ces travaux se sont focalisés du côté des situations pour pointer l'interinfluence des façons de voir une figure et d'agir dessus de façon instrumentée (Duval & Godin, 2005 ; Perrin-Glorian & Godin, 2018). D'après ces auteur·e·s, il est nécessaire de dépasser une vision première de la figure (vision iconique, en termes de surfaces) pour arriver à reconnaître ce qu'il faut géométriquement y voir en termes de relations et propriétés entre des lignes et des points. Duval (2005) parle de « déconstruction dimensionnelle » (DD) pour décrire ce processus de décomposition (et recomposition) de la figure en unités figurales (2D, 1D, 0D) ; celle-ci peut être influencée, voire provoquée par le recours (ou non) à certains instruments. L'on considère que la DD, essentiellement de nature discursive, est un processus nécessaire pour qu'un élève s'inscrive dans une géométrie théorique (ou GII) afin de convoquer des énoncés spécifiques pour s'engager à terme dans des raisonnements hypothético-déductifs. De nombreux travaux[12] ont, en appui sur ces postulats, produit et développé un ensemble de situations fondamentales (au sens de la TSD) pour construire les concepts géométriques scolaires chez les élèves et faire évoluer leur regard, de la maternelle à la fin du secondaire, en jouant sur un ensemble de variables didactiques attachées à une même classe de situation dite des situations de reproduction de figure :

- la nature des figures et leur complexité (juxtaposition, superposition, propriétés et relations géométriques, etc.) ;
- le choix de l'amorce et « la différence » entre la figure-modèle et l'amorce (autrement dit toutes les étapes intermédiaires, tous les tracés non visibles qui restent à la charge de l'élève) ;
- l'échelle (agrandissement-réduction de la figure-modèle) ;
- les positions relatives entre la figure-modèle et la figure-amorce, mais aussi par rapport aux bords de la feuille ;
- la taille de la figure-modèle et de l'amorce ;

[12] Voir Mathé et al. (2020) ainsi que la brochure de l'IREM de l'académie de Bordeaux (groupe didactique cycle 3 de l'IREM de l'académie de Bordeaux, 2021).

– le support (feuille blanche, etc.) ;

– les contraintes sur les instruments mis à disposition (et le coût sur les instruments : gabarits, règle *informable* − que l'on peut informer −, règle graduée ou non graduée, etc.) ;

– les modes de validation (calque, etc.).

Des travaux (dont les nôtres) se centrent explicitement sur le rôle du langage[13] (oral) dans cette façon de penser la géométrie à enseigner et mettent en évidence que les façons de parler des figures participent tout autant que les façons de voir et d'agir dans le processus de construction de connaissances. Dit autrement et en cohérence avec les références théoriques évoquées dans la partie 1.2, nous considérons que le langage joue un rôle consubstantiel dans l'activité géométrique en classe tout aussi important que celui du sujet en interaction avec un milieu caractérisé par des variables didactiques (Bulf et al., 2015).

Les travaux récents de Mangiante-Orsola et Perrin-Glorian (2018) et Mangiante-Orsola (2021) étudient les conditions de mises en œuvre en classe de ces situations fondamentales (au sens de Brousseau, 1998). Analysées sous l'angle des « gestes professionnels et routines » au sens de Charles-Pézard et al. (2012) et de la DA, les pratiques enseignantes y sont décrites lors de phases d'enseignement cruciales (aide à l'analyse de figure complexe, usage des instruments, etc.), mais aussi lors des processus clés du point de vue plus global de l'activité enseignante : la dévolution, la régulation et l'institutionnalisation[14]. Les auteures décrivent une grande variabilité des pratiques et en particulier la difficulté des enseignants à gérer le jeu complexe de variables didactiques précitées.

D'autres travaux portent leur attention sur l'activité des enseignant·e·s en classe de géométrie ordinaire et non dans le cadre d'ingénierie de développement (Mangiante-

[13] Nous n'ignorons pas les nombreux travaux anglosaxons sur le rôle du langage dans la *Mathematic Education.* Notre partie théorique étant déjà assez conséquente, nous renvoyons le lecteur aux HDR récentes de Chesnais (2018) et Hache (2019) pour une revue de littérature.

[14] Nous renvoyons aux travaux de Sensevy (2011 ; 2010) et ses collaborateur·trice·s dans lesquels on peut retrouver des analyses en termes de gestes d'enseignement assignés aux actions de l'enseignant : *définir, dévoluer, évaluer* et *institutionnaliser.* Précisons par ailleurs que Sensevy (2010), tout comme Bucheton (2009 ; 2019), alerte sur les effets pervers associés au concept de geste professionnel qui pourrait avoir tendance à généraliser l'activité enseignante évidée des savoirs visés. Il s'agit bien de dépasser une dichotomie simpliste du type pédagogique *vs* didactique : « […] Le postulat fondamental que nous partageons est donc qu'un geste d'enseignement se caractérise par le fait que c'est le savoir qui lui donne sa forme […] » (Sensevy, 2010, p. 3).

Orsola & Perrin-Glorian, 2018). En comparant des séances d'un·e même enseignant·e ou de plusieurs enseignant·e·s, les travaux de Chesnais (2018), par exemple, mettent en évidence qu'à partir d'une même tâche ou d'un même scénario (dans un sens différent de celui de Bruner évoqué plus loin) les apprentissages susceptibles d'en résulter peuvent être très différents, les élèves des REP (Réseau d'Éducation Prioritaire) étant particulièrement sensibles aux microvariations. En outre, les travaux de Chappet-Pariès (2004) mettent au jour une part d'invariance dans l'activité enseignante d'un·e même enseignant·e, du point de vue des déroulements et dans les interactions langagières (grâce à des outils d'analyse du discours empruntés à la pragmatique et aux travaux de Bruner), ce qui n'est pas sans faire écho à certains points de nos analyses.

Les quelques travaux évoqués ici pointent une grande variabilité des pratiques en classe de géométrie (quelles que soient les situations mises en œuvre) qui est notamment due à leur grande complexité : les pratiques sont extrêmement difficiles à décrire tant les tensions qui s'y rattachent peuvent être d'origine diverse (Charles-Pézard et al., 2012). Il en résulte que le rôle de l'enseignant·e est crucial et est potentiellement différenciateur du point de vue des apprentissages.

1.4. Notre problématique de recherche dans le cadre du MMA

Nous considérons que les préoccupations de l'enseignant·e en classe de géométrie, ses ajustements et actualisations peuvent être décrits à l'aune de ce qui caractérise selon nous l'activité géométrique. Nous précisons donc au centre de la matrice de l'agir enseignant (figure 2) que l'on cherche à faire apprendre des façons spécifiques de voir, d'agir et de parler des figures géométriques.

Rappelons que nous postulons que le langage joue un rôle consubstantiel dans l'activité géométrique en classe tout aussi important que celui du sujet en interaction avec un milieu caractérisé par des variables didactiques spécifiques (voir parties 1.2 et 1.3). Le choix de la classe de situation et des variables didactiques afférentes constituent des éléments clés et complexes, pour penser les situations d'apprentissage et leurs conditions de déroulement en classe. Nous postulons que le choix de la classe de situation dite de reproduction de figure et de ses variables didactiques (telle que décrites précédemment) constitue des conditions favorables pour générer des gestes professionnels didactiques. Nous formulons l'hypothèse qu'un levier fondamental pour favoriser des dynamiques d'action (au sens de Bucheton, 2009) repose sur un jeu des variables didactiques (spécifiques de la classe de situation) qui influence l'activité des élèves et aide l'enseignant·e quant à la prise de décision (Dorier, 2010). Nous supposons également que ce jeu est complexe à mettre en œuvre (Mangiante-Orsola, 2021), ce qui justifie en partie notre choix d'observer un·e enseignant·e non novice par rapport à ces situations et leur arrière-plan théorique.

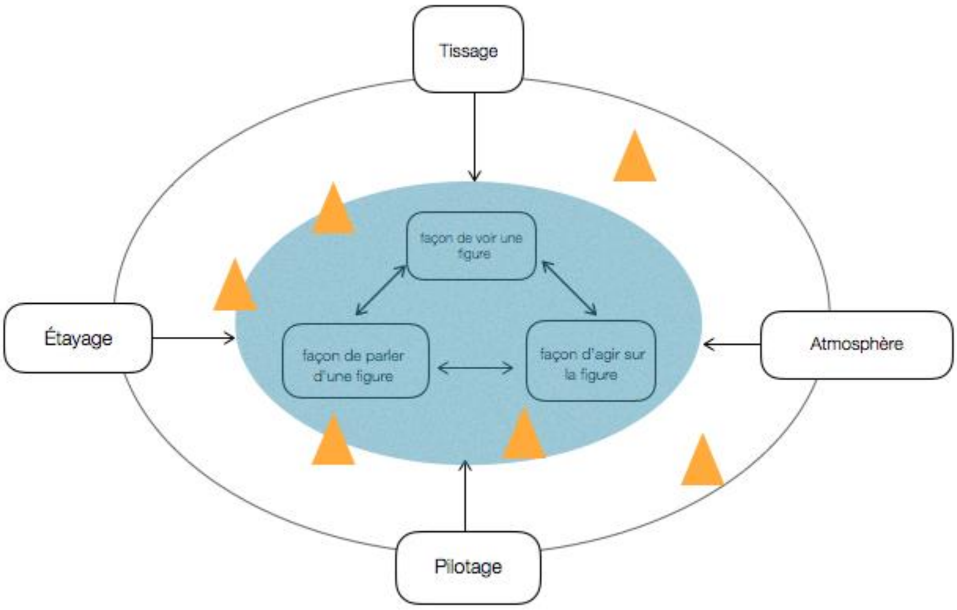


Figure 2. Le modèle du « multi-agenda des préoccupations enchâssées » (figure 1) adapté à la classe de géométrie (Bulf, 2019).

Dans notre travail, l'étude des liens entre enseignement et apprentissage en classe de géométrie est examinée à travers les relations entre gestes professionnels et CDGS. Autrement dit, notre problématique de recherche peut être formulée de la façon suivante : en quoi certains gestes professionnels (didactiques) peuvent-ils favoriser l'institution d'une Communauté Discursive Géométrique Scolaire (CDGS) ?

Notre travail cherche à décrire des gestes professionnels (didactiques) d'enseignement en classe de géométrie : comment s'élaborent-ils et s'ajustent-ils au regard des trois dimensions considérées comme caractéristiques de toute activité géométrique (voir-agir-parler) ? Plus particulièrement, existe-t-il des formes d'étayage ou de tissage spécifiques en classe de géométrie ? Sous quelles conditions et limites s'élaborent-ils puis évoluent-ils ?

2. Méthodologie

2.1. Méthodologie générale et justification des choix des extraits de corpus

L'arrière-plan méthodologique général est basé sur trois niveaux de recueil de données et d'analyse :

– l'observation naturaliste de séances de classe ;

– un entretien d'autoconfrontation de l'enseignant·e observé·e ;

– et une séance d'échanges entre pairs[15].

Ces différents niveaux de recueil de données permettent d'affiner nos analyses, notamment dans le but de reconstruire les intentions et/ou logiques d'arrière-plan et logiques profondes[16], plus ou moins conscientes de l'enseignant·e observé·e, motivant certains gestes observés. Nous travaillons à partir des enregistrements filmiques (des séances en classe, de l'entretien et de la séance entre pairs), des transcriptions écrites des vidéos (l'activité des élèves est filmée et/ou photographiée pour partie) ainsi que des ressources de l'enseignant·e (lorsque cela est possible). Durant la restitution de nos analyses, nous mettons en regard, lorsque cela semble pertinent, des données de nature hétérogène (car parfois c'est lors de l'entretien que nous trouvons des clés pour mieux comprendre certains choix opérés par l'enseignant·e, parfois c'est dans la fiche de préparation, ou parfois nous n'avons pas accès à l'origine de certains choix ou renoncements). Ce faisant, nous rejoignons le

---

[15] Nous nous appuyons dans cette recherche sur une séance de TD de Master 2 PIF (Pratiques et Ingénierie de la Formation, parcours Innovations et Didactiques, option Mathématiques et Sciences) dans laquelle les étudiant·e·s sont tous des enseignant·e·s (venant du 1er ou 2nd degré) qui ne connaissaient pas l'enseignant invité (Jules, voir plus loin) et n'étaient pas familiers des travaux de référence en géométrie. Les enseignant·e·s étaient invité·e·s à questionner Jules sur une des séances filmées faisant partie de notre corpus (la séance choisie était celle sur le cercle se déroulant en décembre) après visionnage de certains extraits choisis (phase de dévolution, remédiations collectives, procédures d'élèves).

[16] Nous faisons référence aux définitions de logiques d'arrière-plan et de logiques profondes de Bucheton (2019, p. 209) : « **Les logiques d'arrière-plan** sont des discours socialement partagés, discutés entre les élèves, parfois instables ou contradictoires. Chez les enseignants, ce sont les discours communs, ordinaires, parfois polémiques qu'on entend lors de conseils de classe, pendant des formations ou dans les salles des professeurs. (…) Les **logiques profondes** sont singulières et inscrites dans l'histoire personnelle, familiale, sociale, scolaire de chacun, élèves et enseignants. Elles sont assez peu conscientes et se manifestent par des comportements, des prises de décisions qui ont leur source autant dans des souffrances, revanches, incompréhensions que dans des défis, réussites, bonheurs, sentiment de sécurité, amitié. »

postulat fondamental méthodologique évoqué par Bucheton (2019, p. 72) des travaux émanant du champ de l'analyse du travail :

> Le postulat fondamental de ces méthodologies est que les conduites des acteurs (à l'école : l'enseignant et les élèves) sont des conduites sensées. Elles obéissent à des motifs qu'il convient de comprendre. Le point de vue des acteurs − leur réflexivité − est donc considéré comme indispensable pour éclairer les analyses, celui surplombant du chercheur ne suffit pas.

Nous nous appuyons sur le corpus construit et recueilli au cours d'un projet de recherche INSPE-CARDIE[17] focalisé sur l'étude des gestes professionnels d'enseignement initié en 2019 et en lien étroit avec le travail collectif et collaboratif au sein du groupe « Didactique Cycle 3 » de l'IREM[18] de l'académie de Bordeaux. Depuis 2017, ce groupe IREM, constitué d'une dizaine d'enseignant·e·s, de formateur·rices INSPE et chercheur·e·s en didactique des mathématiques, travaille à l'élaboration d'une brochure[19] sur la géométrie pour la classe de 6e. Nous avons observé un grand nombre de séances de géométrie d'un même enseignant de ce groupe IREM, renommé Jules pour la recherche, dans une seule et même classe sur une même année scolaire (13 séances entre septembre 2019 et février 2020[20]). Cet enseignant est familier des travaux de recherche en didactique de la géométrie et il est par ailleurs enseignant dans le secondaire depuis plus de vingt-cinq ans. En choisissant d'analyser l'activité de Jules (et de ses élèves de 6e âgés d'environ 11 ans), nous souhaitons observer la genèse et l'évolution des gestes professionnels en lien avec la progression pour la classe de 6e co-construite dans le groupe IREM ; les séances ont été pensées collectivement, testées par plusieurs enseignant·e·s du groupe puis discutées, modifiées, adaptées au fil des années. Ladite progression prend appui sur de nombreux travaux en didactique de la géométrie publiés et reconnus depuis une vingtaine d'années, notamment ceux s'inscrivant dans la filiation de Perrin-Glorian, Godin, Duval, Mathé, *etc*. (cités dans la partie 1). Ces travaux ont permis l'élaboration de situations fondamentales (au sens de la TSD de Brousseau, 1998) de reproduction de figures géométriques, appelées situations de restauration, dont nous postulons qu'elles offrent les conditions idoines (en fonction des valeurs des variables didactiques décrites dans la partie 1.3) pour lever certains obstacles liés aux tensions (voire des ruptures) entre la géométrie physique et la

---

[17] INSPE : Institut National Supérieur du Professorat et de l'Éducation ; CARDIE : Conseil Académique en Recherche, Développement, Innovation et Expérimentation.

[18] Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

[19] https://math-interactions.u-bordeaux.fr/IREM (en ligne depuis juin 2021).

[20] Le recueil pour cette année scolaire là ayant pris fin avec le début de la crise sanitaire due au Covid-19.

géométrie théorique, en élaborant un contrat attaché à une géométrie dite des tracés, faisant alors le lien entre les deux (géométrie physique et géométrie théorique). La géométrie des tracés vise ainsi une forme de continuité de l'enseignement de la géométrie notamment au moment de la rupture institutionnelle CM2-6e :

> La géométrie des tracés se caractérise par *l'usage géométrique des instruments* (hormis les instruments de mesure) pour tracer des figures matérielles dans l'espace graphique, comme modélisation de l'espace sensible, mais aussi et peut-être surtout pour elles-mêmes, notamment dans des situations de reproduction de figures. […] [L]'idée générale est qu'il est possible de prendre appui sur la reproduction instrumentée de figures pour avancer vers la conceptualisation des objets de la géométrie théorique, dans un développement mutuel des techniques de construction avec les instruments et des concepts géométriques. (Mathé et al., 2020, p. 56)

Dans notre article, nous accordons ainsi une attention particulière aux conditions d'institution de la CDGS attachée à une géométrie des tracés qui concerne le corpus choisi. Pour cette raison, toutes les situations observées sont des situations de reproduction de figure plane se différenciant du point de vue du jeu des variables didactiques (voir la brochure en ligne pour prendre connaissance de l'ensemble de la progression). L'objectif est donc de décrire des gestes professionnels d'enseignement spécifiques de cette géométrie des tracés dans la classe de Jules.

2.2. Le traitement des données

D'une part, l'analyse *a priori* des situations, au sens de la TSD, nous est essentielle pour mieux comprendre l'action enseignante en fonction des contraintes portées par et sur la situation, notamment si l'on considère les variables didactiques comme un levier potentiel pour l'ajustement de l'action enseignante (Dorier, 2010). L'analyse *a priori* donne en effet accès « au cœur » du MMA : le savoir en jeu.

D'autre part, notre approche se centre sur le sujet enseignant, ses préoccupations et ajustements, *in situ*. Par conséquent, dans notre corpus (vidéo des séances et transcriptions) nous cherchons des indices potentiels (verbaux ou non verbaux), en lien avec notre cadrage théorique (voir partie 1) que nous pouvons synthétiser de la façon suivante (tableau 1).

Tableau 1. Grille d'analyse pour exploiter les corpus

Des indices (verbaux ou non verbaux)	Catégories possibles
Les préoccupations du MMA	Étayage, tissage, pilotage, atmosphère et savoir géométrique en jeu (façons de voir, façons d'agir, façons de parler de la figure)
Les variables didactiques (pour une situation de reproduction de figure plane)	Nature (et complexité) de la figure-modèle Amorce (et complexité) Position de la figure-modèle Position relative de la figure-modèle et de l'amorce Changement d'échelles Instruments mis à disposition Coût sur les instruments Support papier (uni, quadrillé, *etc.*)
La dimension des unités figurales considérées	2D, 1D, 0D
Le type de géométrie	Géométrie physique Géométrie des tracés Géométrie théorique
Analyse du discours	Reprise - reformulation (précision, focalisation, emphase…), (dé) (re) contextualisation, généralisation, etc. Genre premier/genre second

Sans nécessairement prendre en compte un ordre hiérarchique, nous avons cherché, dans les transcriptions des indices (verbaux ou non verbaux) relevant des préoccupations du multi-agenda. Citons Bucheton et al. (2004) afin d'expliciter qu'il ne s'agit pas de catégoriser le discours de l'enseignant·e de façon linéaire sorti de son contexte dans lequel son usage prend son sens, mais bien d'essayer de reconnaître et préserver son épaisseur et sa complexité ; l'on ne peut donc que supposer des préoccupations sous-jacentes qui s'entremêlent parfois de façon concomitante (caractère « systémique » déjà évoqué) :

> […] les actes de langage de l'enseignant […] ont cette spécificité d'être porteurs de significations multiples et enchâssées, ouvrant toutes sortes de modes de signifier (François, 2004). D'où la notion de *pluri-agenda* (plusieurs choses à faire dans le même acte de langage : évaluer, réconforter, orienter, formuler une question nouvelle, étayer et ponctuer, s'adresser à un élève et à l'ensemble de la classe). Dans la même *unité didactique* de quelques minutes, l'enseignant doit gérer les tâches et les contrats didactiques qui les sous-tendent, l'évaluation de l'avancée du travail, les faces et relations des élèves, la *ponctuation* et le *tissage* entre les diverses unités de la leçon. (*ibid.*, p. 40)

Nous essayons de repérer si les préoccupations identifiées sont en lien (direct ou non) avec des façons de voir des figures géométriques, d'agir dessus et d'en parler.

Nous cherchons également des indices du processus de déconstruction dimensionnelle en repérant des traces dans le discours ou des gestes (physiques) de la prise en compte de la dimension des unités figurales (Duval, 2005), car ils peuvent être des indicateurs de négociation et transformation de signification assignée aux objets. Enfin, la dernière ligne du tableau 1 renvoie aux analyses de discours selon les outils proposés par Jaubert (2007, voir 1.3).

Autrement dit, nous cherchons à mettre en lien des traces d'institution d'une CDGS et les préoccupations du MMA (gestes professionnels). La mise en fonctionnement de cette grille est restituée (pour partie) à travers des exemples d'extraits bruts de corpus dans la partie 3.

3. Étude des gestes professionnels didactiques dans la classe de Jules

Il nous paraît intéressant de nous focaliser sur le début de l'année scolaire dans la classe de 6e de Jules pour plusieurs raisons. Tout d'abord cela correspond à la fin de l'école élémentaire ; en outre beaucoup des situations de la progression considérée sont transférables à l'école élémentaire en jouant sur certaines variables. Certains gestes professionnels observés dans la classe de Jules pourraient être donc potentiellement transférables à l'école élémentaire, ce qui nous offre d'emblée des perspectives pour la formation et pour la recherche. L'autre raison est d'ordre méthodologique, nous partons de la toute première séance afin d'observer l'installation puis l'évolution des gestes professionnels spécifiques au cours de l'année, ce que ne permet pas une observation ponctuelle d'une seule séance.

3.1. L'analyse *a priori* de la séance 1 de géométrie de l'année pour mieux comprendre les ajustements en classe

Nous livrons ici quelques éléments d'analyse *a priori* pour mieux comprendre les enjeux, choix et ajustements opérés par Jules dès la première situation. Il s'agit d'une tâche de reproduction à partir d'une amorce (figure 3). La figure-modèle est une figure complexe dont un certain nombre de tracés sont implicites, rendant les relations d'alignement entre les différentes unités de la figure non évidentes à reconnaître (figure 4).

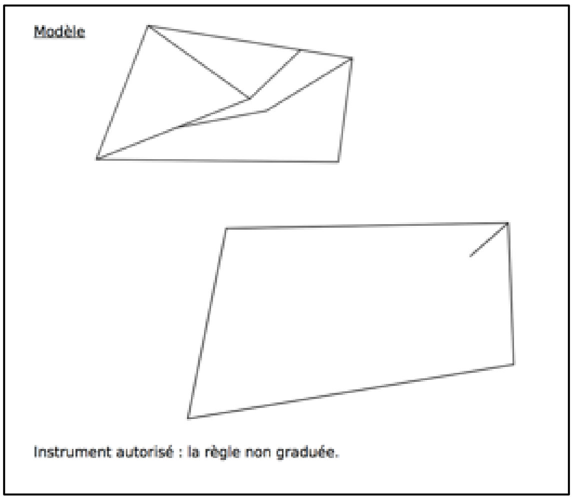


Figure 3. Première situation de reproduction tirée de la brochure IREM 6e

La figure-modèle et l'amorce ne sont pas dans la même position (figure 3) afin d'éviter les reproductions à l'œil en suivant des rappels de droites dans les mêmes directions. Le changement d'échelle cherche à bloquer les stratégies qui recourent à la mesure. Pour les mêmes raisons, le support n'est pas quadrillé et la règle graduée est interdite. L'objectif de la situation ici est la recherche instrumentée des alignements (en visant les prolongements de traits et intersections de lignes), par conséquent le seul instrument autorisé est la règle non graduée. La figure peut être reproduite sans le recours à la mesure, uniquement en traçant des traits et en repérant

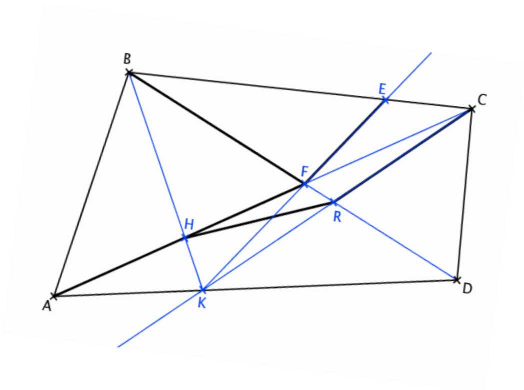


Figure 4. Tracés implicites rendus visibles de la figure-modèle. La figure est annotée pour les besoins de l'article afin de rendre notre propos plus facile à suivre.

des intersections et alignements. Le choix également a été fait de ne pas introduire un système de coûts sur les instruments dès cette première situation, mais plutôt lors de la deuxième situation de restauration afin de ne pas multiplier les contraintes lors de cette première rencontre avec une situation de restauration et familiariser ainsi les élèves petit à petit à ce nouveau contrat assigné à la géométrie des tracés.

Pour réussir la tâche, plusieurs connaissances en acte, au sens de Vergnaud (1991), peuvent être mobilisées :

- on peut toujours tracer un trait à partir de deux points ;
- on peut toujours prolonger un trait avec le bord droit de la règle ;
- deux droites, éventuellement prolongées et non parallèles, se coupent en un point ;
- un sommet d'une figure est un point.

On peut s'attendre à ce que les élèves s'engagent dans un premier temps sur la restauration à partir de l'amorce sans passer par l'analyse de la figure-modèle et tentent de reproduire à l'œil ou en mesurant malgré l'interdiction (en appliquant par exemple des théorèmes en acte erronés propres à toute situation de reproduction dans laquelle l'échelle a été modifiée : ajouter un peu plus à la valeur mesurée sur la figure modèle et reporter cette longueur sur la partie à restaurer). Les élèves peuvent aussi tenter de faire fonctionner de façon forcée des relations « connues » du type milieu, perpendicularité ou parallélisme (si la figure est de taille suffisamment grande, celle-ci ne présente toutefois pas d'ambiguïtés). Ces procédures auront peu de chance d'aboutir ; on peut penser à superposer avec la figure attendue sur calque par exemple pour rendre visible les approximations et marges d'erreur (erreurs qui seront d'autant plus visibles si la figure est grande). Si les élèves commencent à chercher des tracés intermédiaires sur la figure-modèle, alors un des premiers tracés peut être le prolongement du trait tracé sur l'amorce (voir figures 3 et 4 : le segment [CR]). Le tracé des diagonales peut ensuite être effectué, on obtient ainsi les points F, K et R (à condition que les prolongements soient suffisamment longs, voire puissent aller *au-delà* des côtés du quadrilatère ABCD, ce qui n'est pas spontané chez les élèves). Le point H est l'intersection entre la diagonale (AC) et la droite (BK). Le point E est le point d'intersection de la droite (KF) et du côté (BC). Précisons que l'ordre d'apparition des tracés peut être tout autre. Ici, ce qui favorise l'ordre d'apparition des tracés réside dans l'alternance de reconnaissance des différents statuts des points considérés (phénomène de double désignation au sens de Duval, 2014) : comme intersection de lignes ou comme sommet, ce qui n'est pas trivial pour des élèves de 6^{e}. Cette analyse de la figure-modèle (quel que soit l'ordre des tracés) peut être considérée comme une étape de la stratégie experte visée par l'enseignant. Une autre difficulté subsidiaire consiste à discriminer, sur la figure-modèle, les tracés utiles de ceux non utiles pour réussir ensuite la tâche de reproduction à partir de l'amorce.

L'analyse *a priori* permet ainsi d'apporter des éléments de description du cœur du MMA (figure 2) selon la situation d'enseignement considérée ; elle permet de décrire les effets de certaines valeurs de variables didactiques en termes d'activité potentielle des élèves selon des façons de voir, d'agir et de parler (des figures). L'on considère que ces choix peuvent alors impacter l'activité enseignante et ses ajustements (Dorier, 2010). D'autres préoccupations du MMA peuvent être ainsi inférées comme celles relevant du **pilotage** (l'organisation matérielle des situations de reproduction relève bien du choix de certaines variables), ou encore d'**étayage** ou de **tissage** compte tenu des difficultés potentielles des élèves évoquées précédemment. Des questions plus précises guident ainsi notre analyse *a posteriori* : quelles formes d'étayage et de tissage allons-nous observer dans ce type de situation en fonction des difficultés mises en évidence par l'analyse *a priori* ? Comment aider les élèves à dépasser des stratégies résistantes relevant d'une géométrie physique ? Quelle prise d'appui sur les variables didactiques (les instruments en particulier) *in situ* ?

3.2. Analyse des gestes professionnels lors du déroulement de la situation 1

La première situation de la progression (figure 3) se déroule au cours de deux séances d'environ 50 minutes chacune, survenues les 17 et 18 septembre 2019.

3.2.1. Une phase de la dévolution centrée sur les façons de voir la figure

Il s'agit, dans un premier temps, pour les élèves de commencer par « écrire ce qu'ils voient », à partir de la figure-modèle affichée au TBI (cette première sous-tâche sera la même lors des séances suivantes) : on reconnaît dans la classe de Jules une atmosphère que l'on peut qualifier d'assez ouverte. On constate une pluralité des façons de voir cette figure : certains reconnaissent des objets du monde mathématique (« triangle », « un rectangle avec des côtés penchés et des lignes à l'intérieur », *etc*.) tandis que d'autres évoquent des représentations mentales issues de leurs propres expériences du monde (« pyramide », « moitié d'un éclair », « enveloppe », « moitié d'une lettre », « branche », « carte postale », « cadre penché avec un triangle », etc.). Dans la majorité des cas, il s'agit d'une vision globale de la figure qui prédomine : les élèves reconnaissent visuellement d'abord des formes dans leur ensemble, des surfaces, essentiellement dans une vision de juxtaposition. Cette entrée dans la situation, qui concrètement prend seulement quelques minutes, se révèle un moment important aussi bien pour l'enseignant, car cela lui permet de prendre la mesure de la richesse des différentes façons de voir une même figure (cela constitue des traces du fond aperceptif[21] de la classe), que pour

[21] Le fond aperceptif « désigne l'ensemble des éléments culturels dont dispose un individu dans une activité donnée : éléments qu'il fait siens ou au contraire qu'il conteste, mais à partir desquels s'organise sa compréhension du monde. L'énonciateur prête à son destinataire

les élèves, qui se trouvent être « enrôlés » (au sens d'une des fonctions d'étayage de Bruner) facilement dans cette nouvelle tâche et ont l'occasion de donner librement leurs points de vue. D'autre part, cette sous-tâche deviendra la première étape quasi systématique de toutes les situations de reproduction de figure rencontrées dans l'année : un temps sera toujours dédié pour « voir » la figure avant de se lancer dans toute action instrumentée.

3.2.2. Un étayage anticipé du rôle de certaines variables didactiques

Jules formule oralement ensuite la tâche principale, « reproduire la figure-modèle », qui est largement étayée par une explicitation orale directe de certaines variables didactiques :

> Jules : vous allez devoir reproduire cette figure-là, **pas complètement**, on va vous donner ce qu'on appelle une **amorce** [l'amorce est projetée] c'est-à-dire y a une partie de la figure qui est construite et c'est à vous de **construire le reste**. […] **l'amorce et le modèle n'ont pas la même taille** […]
>
> Le seul instrument que vous avez le droit d'utiliser c'est la **règle non graduée** […] ça veut dire **on <u>doit pas utiliser</u> les graduations** […] ça veut dire que **vous n'avez pas le droit de mesurer** […]
>
> Si on réfléchit un petit peu : c[e n']est **pas la même taille** donc y a des chances qu'ici **la mesure <u>j'en ai pas besoin</u>** […] je vous laisse 5 minutes, vous commencez à chercher.

L'on pourrait rapprocher ces diverses interventions langagières à la fonction de « réduction des degrés de liberté » en référence aux différentes fonctions d'étayage de Bruner (1983, p. 277). Les choix des valeurs des variables didactiques (amorce, échelle, règle non graduée, etc.) sont explicités d'entrée ainsi que leurs effets potentiels sur les procédures attendues. L'enseignant formule explicitement et de façon anticipée ses attentes : « on ne doit pas mesurer ». Ce qui nous apparaît important à indiquer c'est qu'au fil des séances, cette forme explicite d'étayage attachée à la dévolution en appui sur certaines variables didactiques, ne sera plus la même par la suite. En effet, dès la troisième séance, Jules ne verbalisera plus le rôle crucial de ces variables didactiques. Jules se contentera même parfois d'un simple affichage de la feuille de travail au TBI sans prononcer un mot, se reposant sur la mémoire de la classe (au sens de Brousseau et Centeno, 1991) ainsi que sur d'autres repères (autres que verbaux), nous y reviendrons. Pourtant, les situations suivantes vont se complexifier avec des (més)usages possibles des instruments plus nombreux, déterminés par un système de malus-bonus spécifique des situations de restauration. Il nous paraît d'ores et déjà intéressant de préciser qu'une piste de prolongement à

---

supposé un fond aperceptif en fonction duquel il organise son discours. » (Jaubert, 2007, p. 294) notre travail pourrait consister à décrire précisément les gestes d'enseignement (et leurs ajustements) attachés à cette variable, à savoir le système de coût des instruments.

Au cours de la première séance, le processus de dévolution passe par des formes de microajustements permanents au niveau de la formulation orale de la tâche proposée aux élèves, conduisant à une (re)négociation du contrat. Par microajustement nous entendons que la tâche est affinée petit à petit en fonction des difficultés observées des élèves, et se traduit par une forme de pilotage serré, sans pour autant conduire à une simplification de la tâche comme cela peut parfois être observé notamment dans des contextes de REP (Charles-Pézard et al., 2012). En effet, comme déjà décrit dans l'analyse *a priori*, les élèves commencent par tracer directement sur l'amorce, sans analyser la figure-modèle et prolongent le petit bout de trait (mais pas nécessairement jusqu'à l'intersection d'un côté de la figure). Aucun élève ne s'autorise à faire des tracés sur la figure-modèle et les élèves poursuivent leur tracé essentiellement « à l'œil ». Par conséquent, Jules va intervenir collectivement plusieurs fois et faire émerger des sous-tâches essentielles visant l'accomplissement de la tâche initialement proposée (« reproduire la figure »). Ces ajustements portent sur les usages normés des instruments puis sur l'analyse de la figure-modèle, ce que nous détaillons dans les deux prochains paragraphes.

3.2.3. Conduite langagière récurrente sur l'usage des instruments : entre « justesse des procédures » et « précision des tracés » (Perrin-Glorian & Godin, 2018)

Au cours de cette première séance, Jules intervient assez vite afin de récuser une façon d'agir largement répandue chez les élèves : un usage « hasardeux » de la règle pour tracer un trait.

Tableau 2. Extrait de verbatim et capture d'écran du début de la séance 1

Jules : alors quand on pose la règle comme ça//regardez bien//donc ici y a pas de problème y a un appui sur ce sommet-là, mais après/ici là///

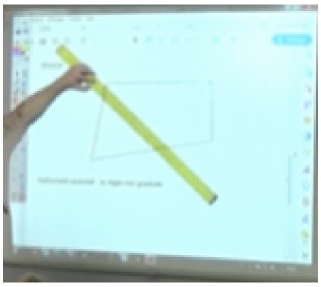
[Jules fait bouger la règle de façon aléatoire]

est-ce que j'ai un autre appui pour poser la règle ? ///pas du tout/donc là on est train de tracer **un trait** au hasard///donc ça c(e n)est pas correct. Qu'est-ce qu'**il faut** avoir pour **tracer** **un trait**

*[et **Jules s'éloigne physiquement** du TBI]*

pour me servir correctement de la règle, ne pas la poser au hasard, **qu'est-ce qu'il faut que j'ai** ? […]

El : des points de repères



Jules : **des points** de repères, donc y a **un mot** qu'on a utilisé//**des points**, **il** en **faut** combien ?

El : deux
Jules : **deux il en faut deux**///Par exemple quand je fais ça

[Jules revient sur le TBI et pose la RG sur la figure projetée]

En gras dans l'extrait, nous remarquons des tentatives de décontextualisation : sa question ne concerne pas que la figure exploitée ici et cherche à avoir une portée plus générale sur les façons d'agir dans la géométrie des tracés (en opposition à la façon d'agir observée des élèves relevant plutôt de la géométrie physique, car les élèves font « à l'œil »). Néanmoins sa question, « qu'est-ce qu'il faut avoir pour tracer un trait », reste ambivalente compte tenu des termes « tracer » (doublement souligné) qui renvoient à un « objet graphique » (souligné dans l'extrait) ainsi que celui de « trait », tandis que l'article indéfini « un » (pour *un trait*) cherche à donner une portée plus générale à l'existence de ce trait (renforcer par le discours injonctif « il faut »). Il ne s'agit plus de ce trait-là dans cette figure-là comme le suggérait plus tôt l'usage des déictiques (« comme ça », « ce sommet -là », « ici », « là », *etc*.). On retrouve en creux la convocation dans le langage de l'opposition explicite, et qui sera récurrente par la suite, entre « objet géométrique » et « objet graphique » au sens de Petitfour (2017). Jules emploie le terme « objet géométrique » en opposition à celui « d'outil pour tracer » dès la phase d'observation de la figure-modèle, en début de séance (et le mobilisera fréquemment durant toutes les séances observées) :

> […] El : équerre
>
> Jules : qu'est-ce que… pour moi équerre c'est un **instrument**, là tu vois des **instruments** ?
>
> E : oui
>
> Jules : oui//alors si on dit ça plutôt avec du **vocabulaire de géométrie** *[inaudible]* alors tu vois des **instruments de géométrie,** mais est-ce que tu vois vraiment **des instruments de géométrie** ? Tu vois peut-être **des instruments dont tu pourrais te servir**, peut-être ? Mais si on distingue **l'instrument de la figure géométrique**, qu'est-ce que tu pourrais nous dire à la place de je vois des équerres ?
>
> E' : triangle
>
> E : des triangles//des triangles rectangles
>
> Jules : des triangles d'accord/on va distinguer **l'outil qui sert à tracer l'objet géométrique**, le triangle rectangle

On relève également dans les remédiations de l'enseignant des traces du processus de déconstruction dimensionnelle des objets convoqués dans le langage. Par exemple, dans le verbatim extrait du tableau 2, Jules parle d'abord d'« un trait » (1D) puis les élèves de « points de repère » (0D) que Jules reprend et reformule ensuite par « des points » (0D). Ce type d'indices langagiers sont systématiquement observés dans les séances suivantes. Voici un autre exemple extrait de verbatim d'une séance se déroulant en décembre sur le cercle[22] dont on retrouve des similitudes avec l'extrait du tableau 2 (les références à l'objet graphique sont soulignées, les références à l'objet théorique sont en gras) :

> Jules : Si je dois faire un report de longueur, c'est à partir de quoi que je fais un report de longueur ?
>
> El : d'un **point**
>
> El : d'un trait
>
> Jules : d'**un** trait qui comme **objet géométrique** représente quel **objet géométrique** ?
>
> El : un **segment**
>
> Jules : un segment… **qu'est-ce qui définit un segment** ?
>
> El : **deux points**
>
> Jules : **deux points**//donc quand vous posez votre bande de papier sur votre figure est-ce qu'a priori vous avez **des points** ?

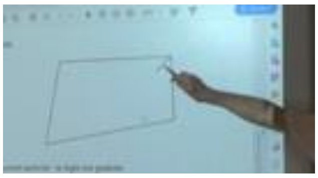
Jules questionne ici un mode d'agir – faire un report de longueur avec une bande de papier –, en reprenant une proposition d'élève. Il cherche à contester cette façon de parler des objets en évoquant l'opposition entre l'objet géométrique et l'objet graphique, liés aux instruments de tracé. L'élève parle d'abord d'un « trait » que Jules reprend et conteste pour préciser l'objet dont on parle. L'élève enchaine et parle alors de « segment », Jules reprend et questionne dans une géométrie des tracés les conditions d'existence d'un segment « qu'est-ce qui définit un segment » afin de susciter une déconstruction dimensionnelle de l'objet théorique considéré (segment, 1D). L'élève concède alors l'existence de deux points (0D), tout comme dans l'extrait du tableau 2. Derrière le mot « point », un implicite fort subsiste néanmoins : d'aucuns considèrent les points *graphiques* (une trace, un repère sur le papier) alors que d'autres l'auront compris comme s'agissant de deux points *théoriques*. L'usage de ce même mot *point* rend compte de façon concomitante d'univers différents : une géométrie physique pour les uns, dans laquelle on se suffit de ce qu'on voit, et une géométrie des tracés pour d'autres, où l'usage des instruments est déterminé par des propriétés.

---

[22] Voir (Bulf et *al.*, 2021) pour une analyse plus détaillée de cette séance sur le cercle.

Ce faisant, nous reconnaissons que des gestes de Jules (langagiers et corporels) peuvent être des traces de contextualisation, décontextualisation et recontextualisation qui visent l'inscription des élèves dans des façons de voir, d'agir et de parler des figures spécifiques de la géométrie des tracés. Par la suite, Jules poursuit et choisit d'étayer collectivement un autre usage normé de la règle en appui cette fois sur un usage correct de l'instrument observé chez les élèves (tableau 3).

Tableau 3. Extrait de verbatim et captures d'écran au cours de la séance 1

Jules : qu'est-ce que je peux faire d'autre ? y en a qui l'ont fait d'ailleurs//qu'est-ce **qu'on peut faire avec la règle correctement** ? ///[…] dis-moi un trait que tu as pu tracer tout de suite là/// *[il finit par pointer le bout du segment sur l'amorce]* y en a qui font quoi avec ça là //// El : prolonger Jules : oui on a **prolongé. Un autre usage correct de la règle** c'est quoi ? c'est de prendre appui sur ce trait qui est déjà tracé et si j'en ai besoin de le prolonger ///la règle **va falloir l'utiliser en respectant ces règles d'usage.** […] maintenant remettez-vous au travail en **cherchant les traits que vous pouvez tracer de manière à peu près sûre**//sur votre figure.	 

Là encore Jules alterne les moments de contextualisation (surligné dans l'extrait) dans le registre graphique et de décontextualisation avec des tentatives de généralisation (en gras). Un geste (physique) de pointage sur la figure (voir capture d'écran tableau 3) puis son renoncement accompagnent ces mouvements de contextualisation, décontextualisation, recontextualisation. Cette intervention s'accompagne d'une nouvelle négociation de la tâche : « chercher les traits que vous pouvez tracer de manière à peu près sûre ».

Malgré ces ajustements focalisés sur l'usage des instruments, la plupart des élèves de la classe de Jules continuent de tracer à l'œil, après avoir pourtant tracé de façon correcte les diagonales ou prolongé le petit trait déjà tracé. Jules intervient à nouveau au bout de quelques minutes, afin d'orienter cette fois l'agir des élèves sur la nécessaire analyse de la figure-modèle.

3.2.4. Une forme forte d'étayage pour l'analyse de la figure-modèle

Voyant les élèves toujours en difficulté, Jules affiche à nouveau la figure-modèle au TBI et insiste :

> Jules : donc si on veut comprendre comment elle est construite cette figure vous avez tout à fait le droit évidemment d'utiliser le modèle et regarder comment elle est faite//vous avez le droit de faire des tracés là-dessus pour comprendre comment elle est construite et non pas être obligé après de choisir des points au hasard//c'est ce **qu'on appellera entre nous après l'analyse de la figure** […] maintenant tout le monde travaille sur le modèle […] je veux que vous fassiez des traits pour essayer de comprendre comment elle est construite.

Précisons d'ores et déjà que lors des séances ultérieures, ce pilotage sera de moins en moins serré, car une majorité des élèves auront intégré cette étape du nouveau contrat, à savoir l'analyse de la figure-modèle. Néanmoins, « l'intégration » de cette étape du contrat résulte d'une forme forte d'étayage pouvant donner lieu à un effet Topaze (Brousseau, 1998 ; Soury-Lavergne, 1998). En effet, cette nouvelle négociation du contrat passe d'une part par un discours plus injonctif qu'auparavant (l'atmosphère se referme) : « si on veut… », « vous avez le droit… », « pas être obligé… », « tout le monde travaille… », « je veux que… ». Jules impose une façon d'agir sur la figure-modèle afin que tous les élèves rendent visibles les tracés implicites de la figure-modèle. Jules explicite ainsi ses attentes, à savoir *repérer et effectuer des prolongements de traits*, ainsi que *repérer différents points* (sommets ou intersection de lignes) et *des alignements* (« je veux que vous fassiez des traits »). Il amorce une décontextualisation et généralisation (« on appellera entre nous après l'analyse de la figure »). Cet ajustement (qui renvoie à la fonction de « démonstration » chez Bruner) peut être considéré comme pertinent (voire efficace) du point de vue du projet d'enseignement, car il conduit en effet une majorité des élèves à la procédure experte et à la réussite du problème posé. Pourtant, quelques élèves, après avoir tracé le plus possible de traits sur la figure-modèle comme attendue, n'arrivent pas (encore) à voir géométriquement ce que ces tracés donnent à voir de *nouveau* qui peut être mis au service de la reproduction attendue. Dans ce cas, l'élève ne transfère pas sur l'amorce les propriétés qui pilotent cette nouvelle façon d'agir. Il ne fait pas « sens » de ces nouvelles traces graphiques et ne consomme donc pas (encore) la rupture avec la géométrie physique. Cette forme d'étayage pourrait alors être apparentée à du surétayage ou un effet Topaze (Soury-Lavergne, 1998). Au cours des séances suivantes observées, il apparaît nettement que la majorité des élèves s'impliquent rapidement en commençant par chercher à tracer des traits (voire *tous les traits)* sur la figure-modèle sans que cette analyse de la figure-modèle soit pilotée par l'enseignant (comme lors de cette première séance). Et, au fil des séances, il apparaît que de moins en moins d'élèves tracent ces traits uniquement par effet de contrat : petit à petit les élèves tracent *tous les traits* sur la figure-modèle puis réussissent également à transférer ceux nécessaires pour reproduire à partir de l'amorce. Il resterait à vérifier l'évolution des procédures des élèves sur du plus long terme afin de vérifier l'hypothèse[23] que cette forme forte d'étayage est un geste professionnel didactique nécessaire, car il ouvre la voie à des perspectives favorables en termes d'apprentissage, bien qu'il puisse s'apparenter à du pilotage serré (ou du surétayage donnant lieu à un effet Topaze) lors de cette séance inaugurale.

3.2.5. La phase de structuration des connaissances par et dans le langage

Dès le début de cette première séance, Jules met en mot des connaissances implicites d'action qui sont reprises et (re)formulées tout au long de la séance (voir précédemment : usage normé de la règle, analyse de la figure-modèle) et stabilisées (lors de la séance du lendemain notamment). La phase de structuration de cette première situation (ainsi que les suivantes) se fait essentiellement à partir d'un Logiciel de Géométrie Dynamique (LGD), ici GéoGébra[24]. Jules procède en deux temps : d'abord il mène une analyse collective de la figure-modèle, en faisant venir un élève au tableau, puis procède à une reproduction à partir de l'amorce, en faisant également venir un autre élève au tableau (figure 5).

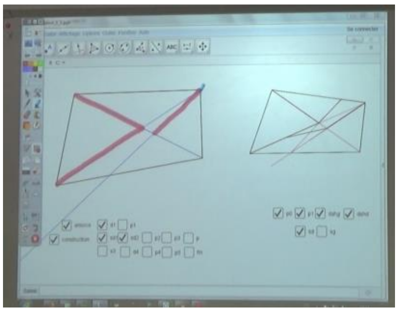


Figure 5. Capture d'écran du TBI lors de la phase de structuration de la situation 1

Les instruments géométriques sont dans cette phase peu mobilisés, car, d'après l'entretien de Jules mené en octobre 2019, ce dernier cherche à valider les constructions uniquement par les propriétés et leurs énoncés (qui justifie également pour lui le renoncement au papier calque).

[23] Notre recueil ayant dû s'achever en février 2020 en raison de la crise Covid, nos données ne nous permettent pas de vérifier cette hypothèse.

[24] Une analyse spécifique en termes de gestes professionnels spécifiques attachés au LGD lors des situations de restauration de figure serait nécessaire mais ce travail n'a pas été mené dans le cadre de cet article.

> Jules : Pendant le travail, on est plutôt sur l'usage des instruments […] pendant la phase de mise en commun, on est plutôt sur les propriétés d'où le recours à GéoGébra.

Jules n'hésite pas néanmoins à revenir sur l'usage instrumenté durant cette phase de structuration : « ce qui est très important/c'est ça///[…] on repère des alignements//et quel est l'instrument qui permet l'alignement ? ».

Jules reprend et reformule les formes langagières des élèves (qui sont essentiellement des déictiques, fortement contextualisés, de genre premier) en verbalisant les connaissances implicites d'action *via* des formulations de connaissances géométriques théoriques plutôt de genre second, qu'il consigne ensuite par écrit. Cette mise à distance, dans le langage, cette acculturation à des formes négociées et partagées de pratiques géométriques expertes de la géométrie des tracés, constitue selon nous un geste professionnel didactique important chez Jules. Les termes « alignement », « intersection » ou « prolongement… » sont repris (ou introduits s'ils n'ont pas été encore formulés jusque-là), mis en emphase, valorisés, et généralisés en faisant l'objet d'une définition orale (tableau 4) puis écrite (voir annexe la fiche-outils). Ces différentes étapes peuvent être reconnues comme des indices du processus de secondarisation.

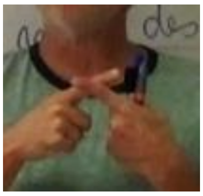
Tableau 4. Extrait de verbatim et captures d'écran de la fin de la séance 1

Jules : on essaie de repérer des//**alignements**//oui/**très bien** ////
[…] l'alignement, ça peut aussi être avec **des segments** [...] on avait oublié tout à l'heure **le mot pour parler de croisement**//**quel est le mot en géométrie** qu'on utilise ?

[JM croise avec ses deux index]

//pas un nœud/////perpendiculaire c(e n)est pas ça///on appelle ça **un point///d'intersection**

[il répète et opine du chef après une proposition d'un élève].



La « fiche-outils » (voir annexe) introduite à cette occasion constitue un fil conducteur majeur, assurant une forme de tissage entre toutes les séances de géométrie, assignant des « façons de parler » à des « façons d'agir » spécifiques attendues, propres à la géométrie des tracés.

3.3. Évolution des gestes professionnels de Jules au cours des séances : l'hypothèse d'un « scénario » au sens de Bruner

Jules privilégie une organisation stable, « ritualisée », des séances de géométrie, articulée selon de grandes phases qui se polarisent explicitement sur les trois dimensions caractéristiques de toute activité géométrique :

– **Le début de chaque séance** est polarisé sur les différentes **« façons de voir »** une même figure. La dimension rituelle de cette phase d'observation contribue selon nous à rassurer les élèves puisqu'ils savent à quoi s'attendre : chaque séance de géométrie commence par cette phase. L'atmosphère est ouverte et favorise l'enrôlement des élèves (un retour sur ces différentes façons de voir la figure pourrait d'ailleurs être ritualisé également en fin de séance afin de mettre en évidence le chemin parcouru par les élèves dans l'évolution de leur regard).

- **Les phases de recherche** des élèves sont focalisées sur « **les façons d'agir** » avec des instruments. Ces phases s'alternent avec des phases de co-ajustements collectives initiées par Jules, en lien étroit avec « des façons de voir » et « de parler » (voir 3.2). Certains ajustements sont spécifiques de la séance inaugurale (comme l'étayage anticipé de certaines variables ou le pilotage serré qui accompagne l'analyse de la figure-modèle).
- **La phase finale de structuration des connaissances** stabilise **« les façons de parler »** en lien toujours étroit avec les « façons d'agir » et « les façons de voir » ; cette phase est médiée par l'usage de GéoGébra et stabilisée *via* la fiche-outil.

En outre, Jules s'appuie essentiellement et de façon consciente[25] sur les mêmes variables didactiques afférentes à une même classe de situation − les situations de reproduction de figure géométrique − dont les valeurs évoluent en fonction des objets de savoir et des objectifs. Ce choix assure selon nous une forme forte de tissage, et renforce la dimension ritualisée des situations d'enseignement de géométrie. Rappelons que l'étayage explicite anticipé de certaines variables didactiques (celles impliquant en particulier le non-recours à la mesure) ne concerne que la séance inaugurale analysée dans cet article ; dans les situations suivantes, ce pilotage serré *inaugural* donne plutôt à voir l'illusion d'un lâcher-prise (ce qui explique les questions des collègues observant une séance unique menée par Jules en décembre, comme décrit dans la note de bas de page 25).

Par ailleurs, nous retrouvons au cours de cette première séance, mais aussi au cours des séances suivantes, des formes récurrentes de co-ajustement. En effet, Jules cherche à favoriser des procédures instrumentées basées sur des propriétés (usage normé des instruments dans une géométrie des tracés) en récusant les procédures de tracé hasardeuses (dans une géométrie physique). Les conduites langagières

[25] Lors de la séance d'échanges entre pairs, en janvier 2020, Jules explique (en réponse à une question portant sur l'absence de traces d'étayage oral lors de la passation de consigne de la situation de reproduction du cercle) qu'il n'a plus besoin d'expliciter les variables en jeu car celles-ci sont sciemment toujours les mêmes d'une séance à l'autre (seules les valeurs changent en fonction des objectifs assignés à chaque séance qui eux sont bien différents).

observées sont reconnaissables (voir 3.2) : on décrit un jeu de formulation et de reformulation entre l'enseignant et les élèves (ou un élève) des façons d'agir sur la figure qui vise l'opposition entre « objet graphique » et « objet géométrique » (au sens de Petitfour, 2017). Ces formulations et reformulations s'accompagnent d'indices forts de contextualisation (avec une mise en mots de connaissances implicites d'action) et de décontextualisation (visant une portée plus générale) ainsi que des indices de déconstruction dimensionnelle. L'entretien d'autoconfrontation confirme cette volonté chez Jules de travailler sur cette tension entre géométrie physique et géométrie des tracés. Jules explique qu'il utilise toujours le terme d'*objet* afin que les élèves aient des « repères » et qu'ils distinguent les « objets matériels » des « objets théoriques ». Pour Jules, cela va avec la sensibilisation qu'il cherche à développer des différentes « représentations possibles des objets idéaux » de la géométrie euclidienne (avec en horizon la géométrie théorique au Cycle 4). Nous faisons alors l'hypothèse que certains élèves repèrent (à un moment ou un autre) ces conduites langagières qui les amènent à leur tour à s'engager dans des formes reconnues de raisonnement et de discours partagés au sein d'une CDGS.

> La récurrence des formats au sein des scénarios et des scénarios eux-mêmes au sein de l'activité disciplinaire de l'enseignement-apprentissage vise à permettre aux élèves de prendre des repères, c'est-à-dire de circonscrire l'activité proposée, de s'inscrire dans la communauté discursive disciplinaire scolaire et de mettre en œuvre ses opérations cognitives, matérielles et langagières qui permettent la construction du savoir. (Jaubert & Rebière, 2019, p. 160)

Par la suite, la fiche-outil (voir annexe) sera un appui essentiel pour l'élève pour faire le lien entre ces ajustements. Ce support rassemble les différentes façons d'agir (et de parler), validées et institutionnalisées ; il sera repris et complété à chaque séance.

Nous formulons plus globalement l'hypothèse que cette façon « ritualisée », au sens de Bruner (1983), de proposer des situations géométriques, participe à *sécuriser* les élèves, favorisant leur implication dans la résolution de problème géométrique. L'une des caractéristiques également d'un scénario au sens de Bruner est la capacité ensuite de l'élève à se l'approprier, de façon autonome, sans l'intervention de l'enseignant·e.

> Stabilité, récurrence, répétition des scénarios routiniers et familiers facilitent la construction de signification, les interprétations, la compréhension des intentions de l'autre. Le scénario est, selon nous, médiateur entre deux niveaux de performance langagière dans le cadre de la zone proximale de développement. Pour Bruner (1983, p. 288), les interactions entre adultes et enfants reposent sur la construction de scénarios qui encadrent l'action conjointe. Ils rendent possible la transformation du sens de l'activité, des actions mises en œuvre et des usages langagiers qui les accompagnent, ce que nous appelons secondarisation. […] Anticipable, d'abord guidé par l'adulte, puis par l'apprenant dans le cadre de la réversibilité des rôles, le scénario

> est progressivement intériorisé et participe au processus d'apprentissage. (Jaubert & Rebière, 2019, p. 158).

Tel que nous le décrivons, tout se passe comme si les élèves de la classe de Jules reconnaissaient « le » scénario attaché aux situations d'enseignement de la géométrie, favorisant ainsi l'institution d'une Communauté Discursive Géométrique Scolaire. Nous étayons cette proposition dans la dernière partie conclusive de notre article.

4. Éléments de conclusion et pistes de discussion

De nombreux travaux en didactique de la géométrie ont construit un ensemble de situations fondamentales pour l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie (voir partie 1.3 et partie 2). Des travaux ont également étudié les pratiques des enseignant·e·s en classe de géométrie et soulignent la grande variabilité des pratiques qui en résultent. En particulier, ceux décrivant les pratiques des enseignant·e·s qui mettent en œuvre les situations fondamentales qui nous intéressent pointent les difficultés qu'ont les enseignant·e·s à investir les enjeux potentiels portés par les variables didactiques spécifiques de ces situations, pour une géométrie des tracés. Dans notre travail, nous avons choisi d'observer l'activité d'un enseignant membre d'un groupe IREM qui a participé à l'élaboration d'une progression d'enseignement de la géométrie en classe de 6^{e} basée sur les travaux de recherche précités. Notre travail cherche à décrire des gestes professionnels (didactiques) d'enseignement de la géométrie dans la classe de cet enseignant. Quels gestes peut-on reconnaître comme étant des gestes professionnels (didactiques) spécifiques de la géométrie des tracés chez Jules ? Comment s'élaborent-ils et s'ajustent-ils au regard des trois dimensions considérées comme caractéristiques de toute activité géométrique (voir-agir-parler) ? Existe-t-il des formes d'étayage et/ou de tissage spécifiques ? Sous quelles conditions et limites s'élaborent-ils puis évoluent-ils ?

4.1. Retour sur l'hypothèse du rôle des variables didactiques dans l'ajustement didactique

Au-delà du rôle essentiel tenu par les variables didactiques dans l'analyse *a priori* permettant de mieux comprendre, pour partie, l'agir enseignant (voir 3.1), a-t-on observé dans notre corpus des traces du rôle joué par les variables didactiques dans les ajustements *in situ* de l'activité enseignante de Jules ? Nous pensons que nous pouvons répondre par l'affirmatif bien que les traces recueillies soient de nature hétérogène et incomplète. Dans la partie précédente, nous formulons l'hypothèse selon laquelle des configurations de gestes d'enseignement participeraient à l'installation d'un « scénario » au sens de Jaubert et Rebière (2019) reprenant Bruner (1983). Le rôle des variables didactiques y est souligné et l'étude de notre corpus rend compte d'une grande stabilité de la pratique de Jules selon deux dimensions :

– *ex situ* : le projet global d'enseignement sur l'année est cohérent[26] et vise l'inscription des élèves dans une géométrie des tracés (projet fondé sur une classe de situation fondamentale). La structuration ritualisée des séances et la stabilité du choix des variables didactiques associées à cette classe de situation assurent selon nous une forme forte de tissage.

– *in situ* : pendant la classe, lors des co-ajustements repérés, Jules garde une cohérence forte. Les négociations collectives décrites (toutes à l'initiative de Jules), nécessaires au regard des difficultés des élèves, débouchent sur une avancée significative du point de vue de la construction du sens des concepts géométriques en jeu (les concepts d'alignement et de prolongement sont au cœur de cette séance inaugurale) et selon des temporalités différenciées d'après l'activité des élèves observée. Nous les répertorions dans le tableau 5, seulement dans un but de synthèse pour l'article afin de mettre en évidence ces différences de temporalité des gestes d'enseignement et leurs traces « visibles » ou « non visibles », à l'échelle d'une séance ou de plusieurs séances, qui ne présagent pas pour autant de leur absence d'effets.

Certains gestes d'enseignement sont « visibles » (au sens « observable ») uniquement lors des séances inaugurales (la première situation décrite ici se déroule sur deux séances) alors que leurs effets sur l'apprentissage des élèves peuvent être eux non observés (voire absents) à l'échelle de ces séances, mais bien réels sur du plus long terme : c'est le cas des gestes d'étayage anticipé de certaines variables (colonne B) et des gestes de pilotage pour agir sur la figure-modèle (colonne D), nous avons alors écrit « non visible » dans les cases correspondantes. D'autres formes d'étayage sont visibles dès la séance inaugurale et se répètent à l'échelle d'une séance (les conduites langagières sur l'usage des instruments, colonne C grisée) et des suivantes (la fiche outil, colonne E) ; d'autres sont repérées à chaque séance sans être récurrentes au sein d'une même séance (colonne A). Rappelons que nos données, à ce jour, ne nous permettent pas de faire un relevé exhaustif et qu'il resterait à décrire d'autres gestes professionnels de Jules dans notre corpus (celles attachées à l'usage d'un LGD, celles attachées à la contrainte du malus-bonus, *etc*.).

---

[26] Au sein du projet Région Nouvelle Aquitaine « Étude didactique et interdisciplinaire des gestes professionnels d'enseignant·e·s du premier degré », nous qualifions un geste de « cohérent » s'il s'inscrit de manière rationnelle dans le projet pédagogique et l'éthique professionnelle de l'enseignant·e, et s'il est possible de l'interpréter en termes de logiques d'arrière-plan et de logiques profondes de l'enseignant·e, au sens de Bucheton. Nous qualifions également un geste professionnel de « pertinent » s'il révèle la capacité de l'enseignant·e à s'ajuster au plus près de l'activité de l'élève (ou des élèves) auquel il s'adresse tout en prenant en compte le projet didactique visé ainsi que les autres préoccupations toujours présentes (Billon et al., 2021 ; Reydy, à paraître).

Le rôle des variables didactiques dans cette différenciation des gestes dans le temps (didactique) apparaît essentiel et son étude nous semble une piste à poursuivre. Méthodologiquement, il resterait donc à mieux décrire la co-activité *effective* (Elève-Enseignant) à la fois de façon synchronique, mais aussi diachronique.

Tableau 5. Des configurations de gestes d'enseignement dans la classe de géométrie de Jules selon différentes échelles

	A. Atmosphère ouverte attachée aux différentes façons de voir la figure-modèle (début de séance)	B. Étayage/pilotage anticipé des V. D. liées aux procédures de mesurage	C. Étayage des façons d'agir instrumentées (géométrie des tracés *vs* géométrie physique)	D. Pilotage pour agir sur la figure-modèle (effet Topaze)	E. Tissage *via* la fiche-outil (Façons d'agir et de parler)
Geste(s) récurrent(s) à l'échelle de **plusieurs séances**		Non visible		Non visible	
Geste(s) récurrent(s) à l'échelle **d'une séance**					
Geste « inaugural » (traces visibles seulement lors des deux premières séances)					

4.2. Limites et perspectives pour la formation

Revenons à notre problématique : comment certains gestes professionnels didactiques peuvent-ils favoriser l'institution d'une Communauté Discursive Géométrique Scolaire (CDGS) ? Nous avons fait le rapprochement entre l'organisation spécifique, stable et cohérente de l'activité enseignante dans cette classe de géométrie (celle de Jules) et le concept de « scénario » au sens de Jaubert et Rebière (2019) reprenant Bruner (1983). Nous avons décrit dans notre article des gestes d'enseignement et leur configuration spécifique qui selon nous favoriserait une certaine « scénarisation » instituant la CDGS visée (géométrie des tracés). Nous faisons l'hypothèse que cette forme anticipable et l'aspect routinier (sous différents aspects : voir parties 3.3 et 4.1) des séances de géométrie peuvent permettre petit à petit aux élèves de piloter leur activité de façon de plus en plus autonome (comme par exemple pour l'analyse de la figure-modèle).

Bien qu'organisées apparemment de façon chronologique, les différentes façons de voir, de parler ou d'agir sont intrinsèquement liées et s'interinfluencent mutuellement et de façon concomitante[27], ce qui constitue selon nous l'un des moteurs de la dynamique des préoccupations chez Jules. Bien qu'il nous resterait à compléter cette étude des gestes d'enseignement en classe de géométrie chez Jules qui n'est certainement pas exhaustive, en investiguant davantage du côté des gestes d'étude des élèves, il nous semble néanmoins raisonnable de penser qu'une architecture pertinente[28] de l'agir enseignant, comme celle décrite chez Jules, en classe de géométrie, ne se forge pas naturellement chez les enseignants, au fil des années. Nous faisons l'hypothèse que ce sont les logiques profondes de Jules, tenant compte des ruptures paradigmatiques de la géométrie enseignée à l'école, qui pilotent ainsi l'architecture de tout son « agir enseignant » et ses ajustements pour instituer, petit à petit, une CDGS propre à une géométrie des tracés. Nous formulons un corollaire à cette proposition : lorsque ces caractéristiques fondamentales et fondatrices de l'enseignement de la géométrie ne sont pas connues et conscientes chez les enseignant·e·s, ces dernier·ère·s peuvent se retrouver plus facilement face à des difficultés ou dilemmes spécifiques, comme ceux observés chez les enseignants débutants (Bulf, 2019). Il ne s'agit donc pas d'attribuer aux situations de reproduction évoquées dans ce travail un rôle « magique » dont elles seraient porteuses à elles seules, bien qu'elles soient pensées *a priori* pour aménager une certaine continuité entre la géométrie physique et la géométrie théorique *via* une géométrie des tracés. Nous avons décrit ici un ensemble de gestes professionnels d'enseignement, qui sont situés et singuliers, qui semblent concourir à l'institution d'une CDGS.

Finalement, notre travail cherche à décrire sur quoi portent la stabilité et la cohérence de la pratique de Jules en classe de géométrie et comment elle évolue malgré la complexité sous-jacente. Aussi, à ce stade de l'article, s'offrent à nous plusieurs pistes (dont celles déjà évoquées au fil de l'article que nous ne répétons pas) en lien avec les limites de notre travail. En particulier, il nous semblerait intéressant de se focaliser sur l'étude des conditions d'évolution de certains gestes d'enseignement repérés, comme ceux en lien avec l'obstacle résistant de la mesure. Dans Bulf et al. (2021), nous décrivons comment Jules adapte certaines situations de la progression, plus tard dans l'année, pour confronter encore et encore les élèves à des procédures erronées et résistantes dues à la mesure. En outre, il aurait été intéressant également d'observer et de décrire l'évolution des gestes de Jules jusqu'à la fin de l'année (ce que notre corpus n'a pas permis compte tenu de la crise sanitaire) puis d'observer et

[27] Nous renvoyons à nos travaux antérieurs pour décrire plus finement ces relations selon ce tryptique (voir, agir, parler) dans l'activité géométrique des élèves en remédiation avec l'enseignant·e (Bulf et al., 2014 ; 2015 ; Bulf & Celi, 2020).

[28] Voir note de bas de page 26 pour définir ce que nous entendons par « pertinent ».

de décrire aussi leur évolution au fil des niveaux (5e, 4e et 3e), en lien avec l'activité d'une cohorte d'élèves qui pourrait être la même au fil de ces années.

Nous avons fait le choix de mobiliser un cadre théorique peu fréquemment utilisé en didactique des mathématiques, mais dont les ambitions originelles nous semblaient porteuses. En effet, l'un des objectifs des fondateurs·rices du MMA était de mettre à disposition une « modélisation outillante » (Jaubert, 2020) facile d'accès pour aider à penser et questionner l'agir enseignant. Sans perdre de vue ce que cette facilité apparente peut générer comme risques de réification, nous pensons que la mobilisation de ce cadre, largement partagé et diffusé dans d'autres champs que celui de la didactique des mathématiques, peut contribuer à l'élaboration d'une culture commune entre enseignant·e·s, formateur·rice·s et chercheur·e·s en rendant possible le dialogue entre disciplines. Et si le MMA, tout comme n'importe quel modèle théorique, « n'épuise [pas] le sens de l'agir », pour reprendre la formule de Ricœur (1991) déjà citée précédemment, alors l'on peut poursuivre le travail et s'engager dans l'éclaircissement des « points aveugles » du modèle (Saillot, 2020) ou se poser la question de savoir ce que ce cadre apporte de plus ou de différent par rapport à d'autres cadres théoriques plus usités en didactique des mathématiques. Quels résultats supplémentaires ou complémentaires aurions-nous obtenus si nous avions analysé l'activité de Jules en changeant de « lunettes » ? Au-delà d'un dialogue entre disciplines, nous cherchons aussi à poursuivre le dialogue entre cadres théoriques des didactiques des disciplines.

Bibliographie

BAKHTINE, M. (1984). *Esthétique de la création verbale.* Gallimard.

BERNIE, J.-P. (2002). L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de « communauté discursive » : un apport à la didactique comparée ?, *Revue française de pédagogie, 141*, 77-88. http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/revue-francaise-de-pedagogie/INRP_RF141_8.pdf

BILLON, V., BOIRON, V., BULF, C., CELI, V., REYDY, C., & TUPHILE, C. (2021, 12 avril). Introduction et présention du projet [communication orale], *1ère Journée d'Étude du Projet Région Nouvelle Aquitaine « Etude didactique et interdisciplinaire des gestes professionnels d'enseignant du premier degré »*, Université de Bordeaux.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G., CENTENO, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 11*(2.3), 167-210.

BRUNER, J.S. (1983). *Le développement de l'enfant. Savoir faire, savoir dire*. (Ed. 2017, 5e tirage, traduit par Michel Deleau). PUF.

BUCHETON, D. (2009). *L'agir enseignant : des gestes professionnels ajustés*. Octarès.

BUCHETON, D. (2019). *Les gestes professionnels dans la classe, Ethique et pratiques pour les temps qui viennent.* ESF.

BUCHETON, D., BRONNER, A., BROUSSAL, D., JORRO, A., & LARGUIER, M. (2004). Les pratiques langagières des enseignants : des savoirs professionnels inédits en formation. *Repères, recherches en didactique du français langue maternelle*, *30*, 33-53. https://www.persee.fr/doc/reper_1157-1330_2004_num_30_1_2635

BUCHETON, D., & SOULE, Y. (2009). Les gestes professionnels et le jeu des postures de l'enseignant dans la classe : un multi-agenda de préoccupations enchâssées, *Éducation et Didactique*, *3-5*, 29-48. https://journals.openedition.org/educationdidactique/543

BULF, C. (2019). Analyse des gestes professionnels d'enseignants débutants en classe de géométrie. Dans *46e colloque international sur la formation en mathématiques des professeurs des écoles « Dispositifs de formation à l'enseignement des mathématiques au XXIème siècle »* (pp. 380-395), HEP de Lausanne. http://www.arpeme.fr/documents/Actes-Lausanne-e.pdf

BULF, C., & CELI, V. (2020). Reproduire un cercle et en parler en classe de mathématique est-ce si simple ? Quelques éléments d'analyse d'une étude didactique comparant trois mises en œuvre d'une même situation. *Recherche en Éducation*, *40*, 125-147. https://journals.openedition.org/ree/468

BULF, C., V. CELI, K., MILLON-FAURE, BEAUGRAND, C., & MENDONÇA-DIAS, C. (2021). Tracé du cercle et circulation des discours, Première partie, Approche didactique des (inter)actions langagières et matérielles, *Petit x, 114*, 3-37.

BULF, C., MATHE, A.-C., & MITHALAL, J. (2014). Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique, *Spirale – Revue de Recherches en Education*, *54*, 151-174. http://www.persee.fr/issue/spira_0994-3722_2014_num_54_1

BULF, C., MATHE, A.-C., & MITHALAL, J. (2015). Langage et construction de connaissances dans une situation de résolution de problèmes en géométrie, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *35*(1), 7-36. https://revue-rdm.com/2015/langage-et-construction-de/

CHAPPET-PARIES, M. (2004). Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques, relations entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 24(2/3)*, 251-284.

CHARLES-PEZARD, M., BUTLEN, D., & MASSELOT, P. (2012). *Professeurs des écoles débutants en ZEP, quelles pratiques ? quelle formation ?* La pensée sauvage.

CHESNAIS, A. (2018). *Un point de vue de didactique des mathématiques sur les inégalités scolaires et le rôle du langage dans l'apprentissage et l'enseignement* [Note de synthèse, Habilitation à Diriger des Recherches]. Université de Montpellier. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-02046178/document

CLOT, Y. (1999). *La fonction psychologique du travail*. PUF.

COULANGE, L., JAUBERT, M., & LHOSTE, Y. (2018). Les gestes professionnels langagiers didactiques dans différentes disciplines : fondements théoriques et méthodologiques − étude de cas en mathématiques et en français. *eJRIEPS*, *Numéro spécial 1*, 64-86.

DORIER, J.-L. (2010). L'analyse *a priori* : un outil pour la formation d'enseignants − exemple d'un jeu issu des manuels suisses romands de première année primaire, Dans *XXXVIème colloque Copirelem « L'Enseignement des Mathématiques à l'ecole : où est le Problème ?* (pp. 80-92), Auch.

DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement, *Annales de didactique et de sciences cognitives, 10*, 5-53. http://numerisation.univ-irem.fr/ST/IST05010/IST05010.pdf

DUVAL, R. (2014). Ruptures et oublis entre manipuler, voir, dire et écrire. Histoire d'une séquence d'activités. Dans C. F. Brandt, & M. T. Moretti (Dir.) *As Contribuiçoes da Teoria das Representaçoes Sémioticas Para o Ensino e Perquisa na Educaçao Matematica* (pp. 227-251), Unijuí.

DUVAL, R., & GODIN, M. (2005). Les changements de regards nécessaires sur les figures, *Grand N*, *76*, 7-27. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/grand-n/consultation/numero-76-grand-n/

FRANÇOIS, F. (1990). *La communication inégale.* Delachaux et Niestlé.

GEBAUER, G., & WULF, C. (2004). *Jeux, rituels, gestes. Les fondements mimétiques de l'action sociale*. Anthropos.

HACHE, C. (2019). *Questions langagières dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques* [Note de synthèse, Habilitation à Diriger des Recherches]. Université Paris Diderot. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-02420979/document

HOUDEMENT, C., & KUZNIAK, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *11*, 175-193. https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00858709/document

GROUPE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES CYCLE 3, IREM DE L'ACADEMIE DE BORDEAUX (2021). *Géométrie en 6e, une progression à partir de restaurations de figures*. IREM de Bordeaux. https://framadrive.org/s/YXn4Bo62Dn3a4EM

JAUBERT, M. (2020, octobre). Genre professionnel, pratiques enseignantes, quelle(s) modélisation(s) outillante(s) pour la formation ? [communication orale] *Colloque La circulation des modèles didactiques dans les pratiques des enseignant·e·s debutants,* INSPE de Poitiers.

JAUBERT, M. (2007). *Langage et construction de connaissances à l'école : un exemple en sciences.* PUB.

JAUBERT, M., & REBIERE, M. (2010). Gestes professionnels, communauté discursive disciplinaire scolaire et savoirs : le triangle infernal. *CidD Congrès international de didactique,* Université de Genève. https://gpc-maths.org/data/documents/doks/jauberttriangle.pdf

JAUBERT, M., & REBIERE, M. (2012). Communautés Discursives Disciplinaires Scolaires et construction de savoirs : l'hypothèse énonciative, *forumlecture.ch, plate-forme internet sur la littératie* http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf

JAUBERT, M., & REBIERE, M. (2019). Le scénario langagier didactique, un outil dans le processus de construction des savoirs ? Un exemple : l'enseignement et l'apprentissage de la lecture, *Raisons éducatives*, *23*, 153-176. https://www.cairn.info/revue-raisons-educatives-2019-1-page-153.htm

JORRO, A. (2002). *Professionnaliser le métier d'enseignant*. ESF.

JORRO, A. (2006, 28 février). L'agir professionnel de l'enseignant, conférence au séminaire de recherche du Centre de Recherche sur la Formation. *Séminaire de recherche du Centre de Recherche sur la formation*, CNAM Paris. https://hal.inria.fr/file/index/docid/195900/filename/CNAM-06.pdf

LEPLAT, J. (1997). *Regard sur l'activité en situation de travail*. PUF.

MAINGUENEAU, D. (1984). *Genèse du discours*. Pierre Mardaga (Philosophie et langage).

MANGIANTE-ORSOLA, C. (2021, 22-24juin). Étude des pratiques de trois enseignants utilisant une ressource pour enseigner la géométrie « un peu autrement » [communication orale]. *Symposium international de Recherche en Didactique des Mathématiques (RDiMath) − Espace et Géométrie*, à distance.

MANGIANTE-ORSOLA, C., PERRIN-GLORIAN, M.-J, & STRØMSKAG, H. (2019). La theorie des situations didactiques comme outil pour comprendre et developper des pratiques d'enseignement en mathematiques. Dans J. Pilet et C. Vendeira (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2019* (pp. 12-15). IREM de Paris – Université Paris Diderot. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03041140/document

MANGIANTE-ORSOLA, C., & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2018). Ingénierie didactique de développement en géométrie au cycle 3 dans le cadre du LéA Valenciennes-Denain. Dans T. Barrier et C. Chambris (dir.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2016* (pp. 35-59). IREM de Paris – Université Paris Diderot. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01704879/document

MATHÉ, A.-C., BARRIER, T., & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2020). *Enseigner la géométrie élémentaire − Enjeux, ruptures et continuités.* Academia L'Harmattan.

MATHÉ, A. -C., & MITHALAL, J. (2019). L'usage des dessins et le rôle du langage en géométrie : quelques enjeux pour l'enseignement. Dans S. Coppé et al. (dir.), *Nouvelles perspectives en didactique : géométrie, évaluation des apprentissages mathématiques* (pp. 47-86). La Pensée sauvage.

MAUSS, M. (1936). Les techniques du corps, *Journal de Psychologie*, *XXXII*, ne, 15 mars-15 avril 1936.
http://classiques.uqac.ca/classiques/mauss_marcel/socio_et_anthropo/6_Techniques_corps/techniques_corps.pdf

MERLEAU-PONTY, M. (1945). *Phénoménologie de la perception.* Gallimard.

MOREL, F., BUCHETON, D., CARAYON, B., FAUCANIE, H., & LAUX, S. (2015). Décrire les gestes professionnels pour comprendre les pratiques efficientes. *Le français aujourd'hui*, *188*, 65-77. https://www.cairn.info/revue-le-francais-aujourd-hui-2015-1-page-65.htm

PARZYSZ, B. (1988). Knowing vs Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures, *Educational Studies in Mathematics*, *19-1*, 79–92.

PASTRE, P. (2006). *La didactique professionnelle*. PUF.

PERRIN-GLORIAN, M.-J., & GODIN, M. (2018). Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. *CORFEM Ressources pour la formation des professeurs. Savoirs mathématiques à enseigner au collège et au lycée*, Bordeaux. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01660837/document

PERRIN-GLORIAN, M.-J, MANGIANTE-ORSOLA, C., & STRØMSKAG, H. (2018). Theory of didactical situations as a tool to understand and develop mathematics teaching practice. *Annales de Didactiques et de Sciences cognitives, Volume Spécial Anglais-Français*,145–173.

PETITFOUR, É. (2017). Enseignement de la géométrie en fin de cycle 3. Proposition pour un dispositif de travail en dyade. *Petit x, 103,* 5-31.

REYDY, C. (2022, à paraître). Étude de gestes professionnels didactiques d'enseignants de Cours Préparatoire en séance de résolution de problèmes. *Annales de Didactiques et de Sciences cognitives.*

RICOEUR, P. (1991). *Soi-même comme un autre.* Le Seuil.

ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants en mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 2-4*, 505-528.

SAILLOT, É. (2020). *(S') ajuster au cœur de l'activité d'enseignement-apprentissage. Construire une posture d'ajustement*. L'Harmattan.

SENSEVY, G. (2010). Notes sur la notion de gestes d'enseignement. *Travail et formation en éducation, 5,* 1-16. https://journals.openedition.org/tfe/1038

SENSEVY, G. (2011). *Le sens du savoir : éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Boeck Supérieur.

SOURY-LAVERGNE, S. (1998). De l'étayage à l'effet Topaze, Regard sur la négociation dans la relation didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 23-1*, 9-40.

VANDEBROUCK, F. (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Octarès.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(2/3),* 133-170.

VYGOTKSI, L.S. (1934). *Pensée et Langage* (3e édition, Trad. F. Sève). La dispute.

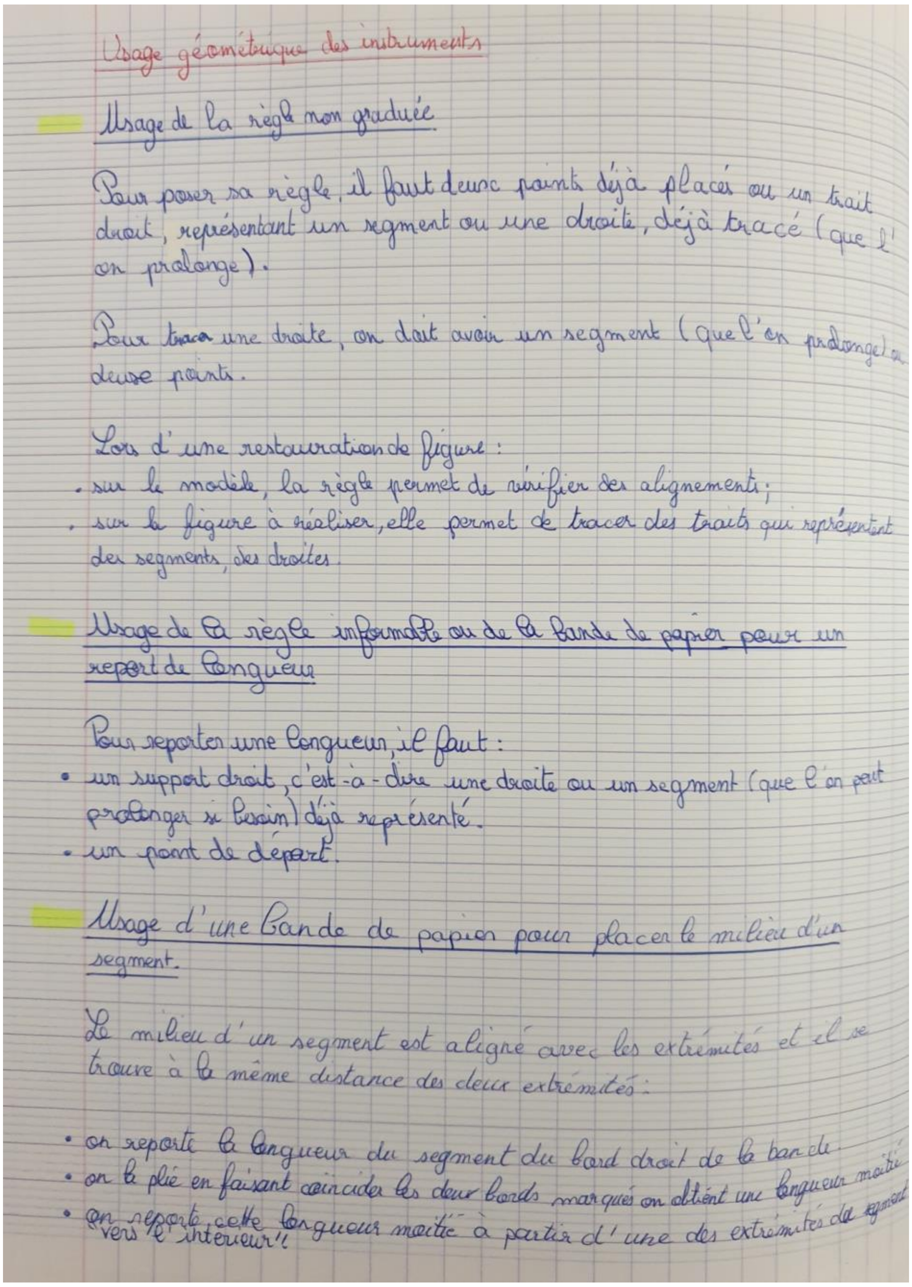
CAROLINE BULF

Université de Bordeaux,
LaB-E3D, EA7441, INSPE de l'académie de Bordeaux

caroline.bulf@u-bordeaux.fr

Annexe

Extrait de la fiche-outils en fin d'année dans la classe de 6e de Jules (extrait d'un cahier d'élève, juin 2020).



Usage géométrique des instruments

Usage de la règle non graduée

Pour poser sa règle, il faut deux points déjà placés ou un trait droit, représentant un segment ou une droite, déjà tracé (que l'on prolonge).

Pour tracer une droite, on doit avoir un segment (que l'on prolonge) ou deux points.

Lors d'une restauration de figure :
- sur le modèle, la règle permet de vérifier des alignements ;
- sur la figure à réaliser, elle permet de tracer des traits qui représentent des segments, des droites.

Usage de la règle informable ou de la bande de papier pour un report de longueur

Pour reporter une longueur, il faut :
- un support droit, c'est-à-dire une droite ou un segment (que l'on peut prolonger si besoin) déjà représenté.
- un point de départ.

Usage d'une bande de papier pour placer le milieu d'un segment.

Le milieu d'un segment est aligné avec les extrémités et il se trouve à la même distance des deux extrémités :

- on reporte la longueur du segment du bord droit de la bande.
- on la plie en faisant coïncider les deux bords marqués on obtient une longueur moitié
- on reporte cette longueur moitié à partir d'une des extrémités du segment "vers l'intérieur" !

Carine Reydy

Étude de gestes professionnels didactiques d'enseignants de Cours Preparatoire en seance de resolution de problemes

Abstract. Study of professional didactical teaching skills of first grade teachers in problem solving session. In this work, we question the practices of three first grade teachers in a basic problem-solving session. We identify the teaching skills and postures that emerge in the three practices based on the tools and methods developed by Bucheton. To explain the deep logic underlying the choices of these teachers, we analyze what each of them deploys in order to have a vision of the representations and strategies mobilized by their students to solve the problem posed. We specifically question certain didactical teaching skills that we see emerging and relate their capacity for transferability in a particular training framework.

Keywords. Teaching skill, teachers practices, basic problem, first grade.

Résumé. Nous interrogeons dans ce travail les pratiques de trois enseignants de CP en séance de résolution de problèmes basiques. Nous identifions les gestes professionnels et les postures qui émergent dans les trois pratiques en appui sur les outils et méthodes développés par Bucheton. Pour expliquer les logiques profondes qui sous-tendent les choix de ces professeurs, nous analysons ce que chacun d'eux déploie afin d'avoir une vision des représentations et des stratégies mobilisées par ses élèves pour résoudre le problème posé. Nous questionnons plus particulièrement certains gestes professionnels didactiques que nous voyons émerger et évoquons leur capacité de transférabilité dans un cadre particulier de formation.

Mots-clés. Geste professionnel, pratiques enseignantes, problèmes basiques, cours préparatoire.

La résolution de problèmes est l'un des principaux enjeux de l'apprentissage des mathématiques à l'école, les problèmes mathématiques[1] étant « à la fois la source et la finalité des connaissances mathématiques » (Houdement, 2011, p. 67). Les programmes d'enseignement pour le cycle 2 précisent à ce sujet qu'elle est « au centre de l'activité mathématique des élèves, développant leurs capacités à chercher,

[1] Par problème mathématique, nous entendons « toute situation dans laquelle il faut découvrir des relations, développer des activités d'exploration, d'hypothèse et de vérification, pour produire une solution » (Vergnaud, 1986, p. 22) grâce à l'utilisation de notions mathématiques.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 27, p. 53 – 88.

raisonner et communiquer » (M.E.N., 2018) et que « [l]'étude des quatre opérations commence dès le début du cycle à partir de problèmes qui contribuent à leur donner du sens » (*Ibid.*). Parmi les cinq heures hebdomadaires dédiées aux mathématiques en cycle 2 (M.E.N., 2015), nous pouvons donc supposer que les enseignants consacrent un temps de classe conséquent à la résolution de problèmes numériques.

Lorsqu'un élève résout un problème arithmétique, il convoque différents types de représentations mentales ou publiques[2] (Sperber, 2003, p. 133) de ce problème et qui peuvent être imagées, conceptuelles ou opérationnelles pour tenter de comprendre le problème et d'élaborer une stratégie. Si quelques-unes de ces représentations sont visibles, la plus grande partie constitue une boîte noire à laquelle l'enseignant n'accède pas. Pourtant, ce sont elles qui peuvent lui permettre de comprendre l'activité de l'élève et d'adapter ses réponses. Ainsi, le professeur ajuste continuellement son action en s'accommodant plus ou moins d'une incertitude sur les représentations que se construit et que mobilise l'élève pour résoudre le problème.

Nous nous intéressons dans cet article aux pratiques de trois enseignants de Cours Préparatoire[3] (CP) en séance de résolution de problèmes arithmétiques verbaux du champ additif, c'est-à-dire des problèmes numériques dont l'énoncé est un texte et qui se résolvent avec une addition, une soustraction ou une addition à trou. Ces séances sont menées dans le cadre d'une recherche-action centrée sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques dans le domaine du calcul et de la résolution de problèmes, au cours de laquelle chercheurs et praticiens interagissent en classe et lors de séances plénières de la recherche-action. Nous nous appuyons sur les outils et méthodes développés par Bucheton et al. (Bucheton, 2009 ; Bucheton et Soulé, 2009 ; Bucheton et al., 2015) pour identifier des gestes professionnels et des postures liés à l'enseignement de la résolution de problèmes qui émergent dans les trois pratiques. Pour tenter de comprendre les logiques profondes qui motivent les choix de ces professeurs, nous analysons ce qu'ils déploient afin d'avoir une vision des représentations mobilisées par leurs élèves pour résoudre le problème posé. Nous nous demandons quelle gestion de l'incertitude relative à ces représentations est faite par chacun d'eux et quel est son impact sur l'agir de ces professeurs et sur les apprentissages de leurs élèves. Nous questionnons plus particulièrement certains gestes professionnels orientés vers le savoir en jeu qui nous semblent porteurs pour

---

[2] D'après Sperber (2003), une représentation mentale existe à l'intérieur même de son utilisateur : il en est le producteur et l'utilisateur unique. Une représentation publique, en revanche, est un moyen de communication entre un producteur et un ou plusieurs utilisateurs qui sont distincts du producteur.

[3] Première année de l'école élémentaire en France, élèves de 6 à 7 ans.

les apprentissages. Au regard des échanges ayant eu lieu au sein de la recherche-action lors de séances plénières, nous nous interrogeons sur la transférabilité de ces gestes dans le cadre de la formation.

Après avoir décrit le cadrage théorique dans lequel nous nous inscrivons, nous énonçons nos questions de recherches et précisons la méthodologie utilisée pour le recueil des données. Nous analysons alors des extraits de séances menées par chacun des trois professeurs avant de conclure sur les gestes professionnels spécifiques que nous identifions.

1. Appuis théoriques

1.1. La théorie des champs conceptuels

Selon Vergnaud (1991), un concept n'acquiert du sens pour l'enfant qu'au travers des situations et des problèmes qu'il permet de résoudre. Il envisage une construction simultanée de l'addition et de la soustraction, de la multiplication et de la division et définit ainsi le champ conceptuel des structures additives comme l'ensemble des situations faisant appel à une addition, à une soustraction ou à une combinaison de ces deux opérations. De même, le champ conceptuel des structures multiplicatives renvoie aux situations dont le traitement appelle une multiplication, une division, ou une combinaison de telles opérations. Il élabore au sein de ces deux champs des catégories de problèmes. Pour le champ des structures additives qui concerne notre étude, il distingue six catégories : les problèmes de transformation (dynamique) d'un état-mesure en un autre état-mesure, les problèmes de composition (statique) de deux états-mesures en un troisième, les problèmes de comparaison établissant une relation (statique) entre deux mesures, les problèmes de composition de deux transformations (dynamiques), les problèmes de transformation d'une relation et les problèmes de composition de relations (statiques). Plusieurs études ont montré qu'à l'instar de la taille des nombres ou des difficultés lexicales de l'énoncé, l'appartenance à l'une des catégories de cette classification et la place de l'inconnue dans le problème avaient une incidence significative sur la réussite des élèves. Par exemple, 100 % des élèves de 6-7 ans de la cohorte étudiée par Riley et al. (1983) réussissent un problème de transformation négative dont les données numériques sont inférieures à 10, ne comportant pas de difficultés lexicales et dans lequel on cherche la valeur de l'état final (« Joe avait 8 billes. Puis il a donné 5 billes à Tom. Combien de billes a maintenant Joe ? »). Ces performances chutent à 78 % lorsqu'ils doivent déterminer la valeur de la transformation (« Joe avait 8 billes. Il en a donné à Tom. Maintenant Joe a 3 billes. Combien a-t-il donné de billes à Tom ? ») et à 39 % lorsqu'ils cherchent celle de l'état initial (« Joe avait des billes. Il en a donné 5 à Tom. Maintenant Joe a 3 billes. Combien avait-il de billes ? »). La classification élaborée par Vergnaud est donc un indicateur pertinent pour guider le choix des problèmes proposés en classe. Elle nous sert de point d'appui pour l'analyse *a priori* des problèmes qui sont étudiés dans cet article : ce sont des problèmes de transformation pour lesquels la donnée recherchée peut être la valeur de l'état initial, de la transformation ou de l'état final et des problèmes de composition pour lesquels la donnée recherchée peut être la valeur du tout ou d'une des parties.

1.2. Processus cognitifs en jeu dans l'activité de résolution de problèmes

Julo décrit l'activité de résolution de problèmes comme un ensemble de « processus cognitifs ad hoc qui vont faire que l'on est capable ou non de mettre cette situation sous une forme telle que nos connaissances deviennent mobilisables pour les traiter. » (Julo, 2002, p. 35). Certains de ces processus ont pour objet la construction d'une représentation du problème qui permettra alors au sujet d'agir, c'est-à-dire d'élaborer une procédure ou une stratégie. Toutefois, il attire l'attention sur le fait que « ni la construction de la représentation, ni la résolution d'un problème en général, ne sont des processus linéaires » (Julo, 1995, p. 27). Au contraire, plusieurs processus interviennent simultanément et interagissent pour faire avancer la compréhension et la démarche de résolution. Il identifie deux types de connaissances ayant un rôle déterminant dans la mise en place de la représentation du problème : les connaissances liées aux outils de modélisation et celles qui sont liées « aux situations particulières que nous avons rencontrées auparavant et à l'expérience représentationnelle que nous avons acquise à leur propos » (*Ibid.*, p. 88). Cette mémoire de problèmes[4] se forme selon lui à partir « des différents problèmes auxquels nous sommes confrontés, des représentations que nous nous en faisons pour les résoudre et des analogies que nous percevons entre eux » (*Ibid.*, p. 88). Ainsi, deux cas de figure pourraient se présenter lorsqu'un élève découvre l'énoncé d'un problème : soit il reconnait une situation connue et il dispose alors d'une stratégie de résolution associée, soit il n'identifie pas de situation connue et il doit construire une représentation et une stratégie de résolution associée à ce nouveau problème. De ce point de vue, la confrontation régulière à des problèmes est primordiale pour que chaque élève enrichisse sa mémoire de problèmes. C'est en effet un cercle vertueux : plus l'élève résout de problèmes, plus il étoffe sa mémoire de problèmes et plus il est alors capable de résoudre, en partie par analogie, d'autres problèmes. Cette analogie n'est d'ailleurs pas forcément consciente : lorsque Julo interroge des sujets sur ce point, ils disent avoir « plutôt l'impression qu'à chaque nouveau problème ils « pensent directement » à le résoudre de la même manière que les précédents » (*Ibid.*, p. 90).

---

[4] Julo utilise l'expression « schémas de problèmes ». Toutefois nous préférons conserver dans cet article la terminologie « mémoire de problèmes » pour éviter toute confusion car le terme « schéma » sera employé à d'autres fins.

Dans la lignée de Julo, Houdement (2017) note que les pratiques enseignantes, souvent basées sur la monstration, ne sont pas toujours les plus adaptées au développement de la mémoire de problèmes des élèves car si elles leur permettent en général de côtoyer des problèmes, elles ne leur donnent pas nécessairement l'opportunité de mener à terme leur résolution :

> L'enseignant suppose souvent qu'assister à la correction (qu'elle soit magistrale ou proposée par l'entremise de brefs exposés d'élèves sur leurs productions) produira des effets positifs sur la prochaine résolution. (Houdement, 2017, p. 64)

Dans une étude menée auprès d'élèves de 8 à 11 ans, Houdement cherche à identifier des connaissances qui aideraient les élèves à résoudre des problèmes arithmétiques et dont l'absence serait pénalisante. Elle aboutit à la conclusion que la résolution de certains types de problèmes vus comme des briques élémentaires de raisonnement doit être automatisée en fin de cycle 3, dans le sens où la structure mathématique sous-jacente de ces problèmes doit être rapidement reconnue par les élèves. Ces problèmes, qu'elle nomme « problèmes basiques », sont les problèmes « à deux données […], où il s'agit de déterminer une troisième valeur […], à énoncé court, syntaxe simple, sans information superflue » (*Ibid.*, p. 64). Elle insiste sur le fait qu'un enseignement progressif de ces problèmes sur les cycles 2 et 3 doit être pensé.

Pour les élèves concernés dans cet article, nous nous intéressons à des problèmes de transformation ou de composition du champ additif dont les énoncés répondent aux critères définis ci-dessus par Houdement. Ces élèves de CP ne disposent pour le moment que des opérations d'addition ou de soustraction pour résoudre un problème numérique. L'enjeu des séances étudiées ici est donc en premier lieu de leur faire percevoir que ces opérations ne permettent pas seulement de résoudre des problèmes de transformation dans lesquels l'état final est recherché, mais bien toute une « gamme » de problèmes.

1.3. Registres de représentations sémiotiques

Au cours des processus en jeu lors de la résolution d'un problème, l'élève mobilise tour à tour plusieurs types de représentations au sein de différents registres. En effet, Duval note que l'une des caractéristiques de l'activité cognitive en mathématiques est que « les objets mathématiques ne sont pas directement accessibles dans la perception […]. Il faut donc pouvoir en donner des représentants » (Duval, 1993, p. 38) qu'il nomme « représentations sémiotiques ». Il précise qu'il peut s'agir de « productions discursives (en langue naturelle, en langue formelle), ou non discursives (figures, graphiques, schémas...) » (Duval, 1996, p. 356) qu'il classe dans différents registres sémiotiques. Deux représentations distinctes d'un même objet donnent accès à des propriétés différentes de cet objet, c'est ce qui en fait l'intérêt. Duval appelle « conversion » le passage d'une représentation à une autre représentation appartenant à un registre différent ; il appelle « traitement » le passage d’une représentation à une autre représentation appartenant au même registre. Ainsi en situation de résolution de problème, l’élève est conduit à opérer différents traitements et conversions pour passer de l’énoncé du problème (registre de la langue naturelle) à l’écriture du calcul à effectuer et à l’éventuelle transformation de cette écriture (registre symbolique) en transitant peut-être par d’autres types de représentation (schémas ou représentations analogiques, avec usage de matériel, par exemple).

Duval (1996) note également que certaines représentations, qu’elles appartiennent ou non à un même registre, peuvent être « congruentes » ou « non-congruentes ». Par exemple, l’énoncé « Paul avait 5 billes. Il en gagne et il en a maintenant 8. Combien a-t-il gagné de billes ? » est congruent avec la représentation « 5 + ? = 8 » mais pas avec « 8 – 5 = ? ». En effet, si pour les deux représentations symboliques, chaque unité signifiante élémentaire de la première représentation est traduite par une et une seule unité signifiante élémentaire de la seconde, ces unités sont arrangées dans le même ordre pour « 5 + ? = 8 » mais pas pour « 8 – 5 = ? ». Par ailleurs, le verbe « gagner » induit plutôt l’addition que la soustraction ce qui renforce la non-congruence. Une conversion ou un traitement entre deux représentations est plus aisé lorsqu’il s’agit de deux représentations congruentes.

Dans cette recherche, cinq registres de représentations sont convoqués par les élèves lors de la résolution des problème étudiés : le registre de la langue naturelle (l’énoncé oral ou écrit et ses reformulations), le registre pictural (dessins), le registre des représentations schématiques (« boîtes » qui seront définies dans le paragraphe 3.3[5]), le registre analogique (jetons, figurines, doigts de la main, etc.) et le registre symbolique (expressions mathématiques utilisant des écritures chiffrées et des symboles). Certaines représentations mobilisées par l’élève sont rendues publiques et données à voir à l’enseignant. Comme nous allons l’expliquer dans le paragraphe suivant, elles peuvent lui servir d’indices pour essayer de comprendre la démarche de l’élève.

1.4. Espace problème de recherche de l’élève

La théorie de l’activité (Leontiev, 1975 ; Leplat, 1997) différencie les notions de tâche et d’activité : la tâche est « ce qui est à faire ; « le but qu’il s’agit d’atteindre sous certaines conditions »» alors que l’activité est « ce que développe un sujet lors de la réalisation de la tâche » (Rogalski, 2003, p. 349). Plus précisément chez l’enseignant, on distingue « la tâche prescrite : ce sont les buts et les conditions explicités dans les textes prescriptifs » de « la tâche attendue : c’est le contenu réel

---

[5] D’autres représentations schématiques pourraient être mobilisés par les élèves mais ne sont pas apparues lors de l’expérimentation.

des attentes du prescripteur » et chez l'élève, « la tâche redéfinie : c'est la représentation de la tâche que se donne le sujet » de « la tâche effective : c'est celle à laquelle il répond effectivement, et qui peut différer de celle qu'il pense s'être fixée » (*Ibid.*, p. 350). L'activité est alors déterminée par la tâche effective.

Le constat de l'écart existant entre la tâche prescrite par l'enseignant et l'activité de l'élève en situation de résolution de problème arithmétique conduit Musquer (2009, p. 218) à considérer deux espaces de recherche : « l'espace tâche de recherche » constitué de l'expérience construite et raisonnée du maître (la consigne qu'il a donnée et l'interprétation qu'il en espère par les élèves, la ou les stratégies de résolution plus ou moins expertes du problème qu'il attend de ses élèves) et « l'espace problème de recherche » (EPR), espace mental et privé constitué de l'expérience empirique et tâtonnante de l'élève lors de la résolution de ce problème. De son point de vue, la construction de cet EPR est associée à la formation de plusieurs types de représentations dans une « série de va-et-vient, tantôt descendant vers des opérationnalisations possibles et tantôt remontant vers le problème posé pour le formuler » (*Ibid.*, p. 219). Ainsi, l'EPR désigne l'ensemble des processus que l'élève met en œuvre et des représentations qu'il mobilise lors de la résolution du problème : ces représentations peuvent être exclusivement mentales (par exemple, l'élève a en tête une image mentale du contexte du problème) ou plus ou moins publiques en étant oralisées (par exemple, l'élève énonce à voix basse une partie de la comptine numérique), gestuelles (il compte sur ses doigts, manipule des jetons) ou écrites (il produit un dessin intelligible par lui seul ou par un autre, ou encore une écriture mathématique ou une représentation schématique ayant précédemment été institutionnalisée en classe). Par essence, cet EPR est donc relativement opaque et l'élève ne donne souvent à voir qu'une infime partie de son contenu au professeur. En effet, il n'est pas toujours en mesure de formaliser oralement ou à l'écrit le recours à telle ou telle représentation. Comme le note Julo (2022), les analogies qu'il fait avec des problèmes stockés dans sa mémoire de problèmes peuvent en outre s'opérer de manière relativement inconsciente :

> il est vraisemblable que nous nous dotons […] d'une bibliothèque de cas, celle-ci se complexifiant très vite dès que notre maîtrise du domaine augmente. Nous avons quelquefois conscience de l'intervention de ces cas dans le processus de résolution, en particulier lors d'un raisonnement par analogie explicite (« Ah oui, c'est comme le problème que j'ai fait l'autre jour... »), mais cette intervention reste le plus souvent totalement implicite, limitée au façonnage de notre représentation du problème. » (Julo, 2002, p. 36)

Il est pourtant primordial pour l'enseignant d'accéder au moins partiellement à cet espace : en effet, c'est ce qui lui permet d'estimer l'écart existant entre la tâche qu'il pensait avoir prescrite et l'interprétation qu'en a fait l'élève, mais aussi d'identifier les difficultés que l'élève rencontre pour tenter d'y remédier. Nous postulons que grâce à ces informations, il ajuste son action *in situ* pour réorienter l'élève vers l'espace tâche de recherche qui correspond à son objectif initial. Pour interpréter les choix des trois enseignants de notre étude, nous regardons la manière dont ils procèdent pour prendre des informations sur l'EPR de leurs élèves.

1.5. Analyser l'agir didactique situé de l'enseignant et des élèves

Afin d'examiner « l'agir didactique situé » de ces trois enseignants, nous utilisons les outils, les concepts théoriques et les méthodes d'observation dont se sont dotés Bucheton et al. (Bucheton, 2009 ; Bucheton et Soulé, 2009 ; Bucheton et al., 2015) pour étudier la co-activité entre le maître et ses élèves et analyser l'action et les prises de décision de l'enseignant au regard de la situation et de ses contraintes. Ils postulent en effet que pour comprendre la diversité des obstacles inhérents à un apprentissage, il est nécessaire de penser conjointement l'appropriation des savoirs et le contexte d'apprentissage, d'envisager l'élève et l'enseignant comme des sujets sociaux et pas seulement comme des sujets épistémiques, de les considérer « comme des personnes, porteuses d'une histoire, d'une culture, d'un rapport à l'institution, d'un rapport au savoir enseigné » (Bucheton et Soulé, 2009, p. 30). Par *geste professionnel*, ils désignent de manière métaphorique « l'action de l'enseignant dirigée vers l'élève ou la classe, dans le but d'instruire ou d'éduquer » (Bucheton, 2019, p. 79). Les gestes de l'enseignant sont professionnels dans le sens où ils lui permettent d'ajuster son activité en fonction de celle de l'élève au vu du savoir visé. Ces gestes professionnels ont pour objectif premier la construction de *savoirs*. C'est en principe la préoccupation centrale du professeur, mais il la conjugue à d'autres au sein d'un « multi-agenda de préoccupations enchâssées » que l'on peut observer par la manifestation d'un certain nombre de gestes professionnels. Bucheton (2009) a identifié, de manière très générique, quatre autres catégories de préoccupations en étroite relation avec celle du savoir. Une de ces catégories est liée au souhait de maintenir une certaine *atmosphère* dans la classe par un « climat général cognitif et relationnel, un certain ethos (Maingueneau, 2002) qui autorise ou non la prise de parole de l'élève et régule le niveau d'engagement attendu dans l'activité » (Bucheton, 2009, p. 58). Une catégorie regroupe les *gestes de pilotage* des dimensions spatiotemporelles (contrôle du timing, gestion des déplacements de l'enseignant ou des élèves, du tableau, du matériel nécessaire à la leçon, etc.). Une catégorie englobe les *gestes d'étayage*, concept que les auteurs empruntent à Bruner (1983). Ces gestes « relèvent du double registre toujours en tension de l'enseigner et du faire apprendre » (*Ibid.*, p. 59) et se manifestent lorsque l'enseignant accompagne l'élève dans les apprentissages que l'élève ne peut conduire seul. Une catégorie regroupe les *gestes de tissage* : ils correspondent à ce que l'enseignant met en œuvre pour faire des liens entre les apprentissages, entre ce qui se passe à l'école et hors de l'école, pour donner du sens à la situation et au savoir visé.

Pour ces auteurs, les gestes professionnels *didactiques* sont les gestes :

> spécifiques aux objectifs de savoir ou compétences travaillés : choix de types de problèmes, de tâches, de milieux d'apprentissage, de temporalités, de formes d'étayage ou d'évaluation, etc. Ils évoluent et s'ajustent en cours d'année ou de cycle en fonction de l'avancée des apprentissages des élèves. (Bucheton, 2019, p. 209)

Dans le cadre des travaux menés au sein du projet « Étude didactique et interdisciplinaire des gestes professionnels d'enseignants du premier degré »[6] porté par la région Nouvelle Aquitaine, nous distinguons et définissons les notions de *cohérence* et de *pertinence* d'un geste professionnel. Un geste professionnel est *cohérent* s'il s'inscrit de manière rationnelle dans le projet pédagogique et l'éthique professionnelle de l'enseignant, s'il est possible de l'interpréter en termes de « logiques d'arrière-plan » et de « logiques profondes » (*Ibid.*, p. 209-210) de cet enseignant. D'autre part, nous qualifions un geste professionnel de *pertinent* s'il révèle la capacité de l'enseignant à ajuster ce geste en tenant compte des spécificités du ou des élèves auxquels il est adressé au regard du projet didactique poursuivi. Pour qu'un geste professionnel soit pertinent, il est nécessaire que le projet didactique auquel il est associé le soit aussi.

Pour s'adapter à l'activité des élèves face aux tâches proposées, l'enseignant met en œuvre des modes d'agir spécifiques que Bucheton et Soulé. (2009) nomment *postures*. Une posture regroupe différents gestes qui correspondent à des préoccupations conjointes. Au cours d'une séance, l'enseignant ajuste son action en passant d'une posture à l'autre et modifie ainsi potentiellement l'activité des élèves. Les auteurs identifient cinq grands types de postures chez l'enseignant :

- une *posture d'accompagnement* : il relève les difficultés, oriente vers les ressources disponibles, laisse du temps pour la réflexion et la discussion ;
- une *posture de contrôle* : il pilote les tâches en exerçant un contrôle fort, explique les erreurs et les corrige ;
- une *posture d'apparent lâcher-prise* : il n'intervient pas et laisse les élèves travailler en autonomie ;
- une *posture d'enseignement* : il formule, structure les savoirs, les nomme, en fait éventuellement la démonstration, il fait alors ce que l'élève ne peut pas encore faire tout seul ;

[6] Le projet réunit une équipe constituée de Caroline Bulf (porteuse du projet), Valentina Celi et Carine Reydy, didacticiennes des mathématiques, Virginie Billon et Véronique Boiron, didacticiennes du français et permet le financement du doctorat de Caroline Tuphile, doctorante en didactique du français.

– enfin, une *posture du magicien* : en théâtralisant la situation, il capte momentanément l'attention des élèves, « *le savoir n'est ni nommé, ni construit, il est à deviner* » (Bucheton et Soulé, 2009, p. 40).

Pour cerner ce qui se joue dans la situation d'enseignement, les auteurs précisent qu'il importe d'analyser simultanément l'agir de l'enseignant et celui des élèves.

2. Questions de recherche

Nous cherchons à identifier dans les pratiques de trois enseignants de CP des gestes professionnels didactiques spécifiques de la résolution de problèmes basiques. Les gestes ainsi repérés sont-ils cohérents ? Sont-ils pertinents au regard de leurs effets supposés sur l'activité des élèves ? Le cas échéant, ces gestes sont-ils transférables à d'autres enseignants dans le cadre de la formation ?

Afin de mieux comprendre les logiques profondes qui sous-tendent les choix des trois professeurs, nous interrogeons la manière dont ils procèdent pour accéder à l'EPR de leurs élèves : que souhaitent-ils en connaître ? Quel degré d'incertitude tolèrent-ils ? Quels sont les indicateurs qui témoignent pour eux d'une compréhension suffisante de la tâche à accomplir par l'élève ? Quels effets ce retour d'informations produit-il sur leurs actions, sur l'activité de l'élève et plus généralement sur la situation de recherche ?

Pour tenter de répondre à ces questions, nous pointons et nous catégorisons à partir des transcriptions de séances les gestes professionnels et les postures que nous voyons émerger dans les pratiques des trois enseignants. Ce découpage et cette classification sont artificiels : ils ne sont réalisés que pour guider l'analyse alors que l'imbrication des préoccupations de l'enseignant est constante. Par exemple, un même geste repéré chez deux enseignants qui apparaît en posture de contrôle chez l'un et en posture d'accompagnement chez l'autre nous conduit à interroger leurs logiques d'arrière-plan pour essayer de juger de sa cohérence et de sa pertinence dans chacun des cas. Ceci peut ensuite permettre, lors d'une réunion plénière de la recherche-action, de pointer ce geste pour tenter d'en valoriser une utilisation appropriée. La prépondérance marquée d'une posture chez un enseignant lors d'une séance est un autre exemple de signal qui nous conduit à un questionnement du même type.

3. Recueil des données

3.1. Éléments de contexte

Les trois classes choisies pour cette étude présentent plusieurs similitudes. D'une part, Céline, Angèle et Paul (les prénoms ont été modifiés pour garantir l'anonymat des participants) sont trois enseignants expérimentés : ils sont professeurs des écoles depuis 15 à 20 ans, Paul est titulaire du CAPPEI[7] et a été enseignant spécialisé pendant 8 ans, Angèle et Céline songent à préparer le CAFIPEMF[8]. Tous les trois exercent dans des CP « dédoublés » de REP[9] dont l'effectif est de 13 ou 14 élèves car ces classes bénéficient de la mesure « 100 % de réussite en CP » initiée en 2017 et dont l'objectif est de « garantir, pour chaque élève, l'acquisition des savoirs fondamentaux – lire, écrire, compter, respecter autrui ».

D'autre part, ces trois enseignants sont impliqués dans des recherches-action[10] centrées sur l'enseignement des mathématiques. Elles occasionnent des visites de classe fréquentes, chacune suivie d'un entretien entre la ou le professeur ayant mené la séance et la ou le chercheur l'ayant observée, des réunions en petits groupes (par niveau de classe ou par cycle) entre enseignants et chercheurs du projet et enfin des séances plénières réunissant tous les acteurs du projet au cours desquelles des extraits vidéos de classes sont visionnés et discutés et des échanges sont organisés au sujet des points ayant émergé des entretiens post-visites. C'est dans ce cadre que les séances étudiées dans cet article ont été filmées. Afin de donner davantage accès aux logiques d'arrière-plan des enseignants, des éléments des entretiens post-visites sont également restitués.

Enfin, les séances étudiées ont toutes eu lieu dans la deuxième quinzaine du mois de novembre 2019. Par conséquent, l'état d'avancement dans la programmation annuelle en mathématiques est sensiblement similaire dans les trois classes.

3.2. Modalités adoptées par les enseignants pour les séances

Dans la classe de Paul, la séance de résolution de problèmes basiques se déroule en atelier de quatre élèves dirigé par l'enseignant. Le reste de la classe travaille sur d'autres tâches mathématiques au sein d'ateliers autonomes. Les élèves sont réunis avec l'enseignant autour d'une table. Ce dernier lit l'énoncé du problème plusieurs fois, puis chaque élève répond sur son ardoise. Une barquette remplie de jetons est à disposition sur la table d'atelier. Au cours de l'atelier qui dure approximativement 10 minutes, Paul fait travailler les élèves sur deux problèmes (P1 et P2).

---

[7] Certificat d'aptitude professionnel aux pratiques de l'éducation inclusive.

[8] Certificat d'aptitude aux fonctions d'instituteur ou de professeur des écoles maître formateur.

[9] Réseau d'éducation prioritaire.

[10] « La recherche-action est un processus destiné à doter tous les participants de la scène éducative […] des moyens d'améliorer leurs pratiques grâce à leurs expériences éclairées et nourries des savoirs théoriques en cours. Tous les participants deviennent acteurs consentants du processus de recherche. » (Catroux, 2002, p.8)

Dans la classe d’Angèle, la séance de résolution de problèmes basiques est proposée à la classe entière, elle dure 45 minutes. Les élèves sont à leurs bureaux et travaillent également sur ardoise. Cinq problèmes (A1, A2, A3, A4 et A5) sont successivement traités. Pour chacun, Angèle lit deux fois l’énoncé et les élèves cherchent individuellement. Aucun matériel n’est immédiatement disponible.

Dans la classe de Céline comme dans celle de Paul, la séance de résolution de problèmes basiques a lieu lors d’un créneau d’ateliers mathématiques qu’elle dirige et qui concerne trois élèves. L’atelier dure environ 20 minutes. Toutefois, le support adopté diffère : les élèves travaillent sur un livret issu de la ressource utilisée par Céline – la MHM[11] – dans lequel figurent pour chaque problème l’énoncé écrit et un emplacement pour les écrits de recherche et la réponse de l’élève. Lors de l’atelier observé, les trois élèves découvrent le livret-MHM et son utilisation. Chacun avance à son rythme : il lit l’énoncé soit seul, soit avec l’aide de l’enseignante et répond à la question posée en écrivant si nécessaire dans l’encadré prévu à cet effet. Les élèves traitent, en fonction de leur rapidité, entre six et neuf problèmes du livret (C1 à C9). Dans la classe, les élèves ont a leur disposition la « boîte à problèmes » proposée dans la MHM : il s’agit d’une boîte contenant du matériel (billes, jetons, personnages, bande numérique, tableau de nombres, dés, etc.) que les élèves peuvent utiliser s’ils le jugent nécessaire. Ils peuvent également écouter des enregistrements des énoncés des problèmes sur un baladeur.

Les énoncés des problèmes proposés par Paul, Céline et Angèle figurent en annexe.

3.3. La ressource utilisée par Angèle et Paul

Dans le cadre du projet de recherche-action auquel ils participent, Angèle et Paul testent tous les deux une ressource conçue et mise à disposition par l’auteure dont l’objectif est de favoriser la mémorisation et la mobilisation des faits numériques additifs pour la résolution de problèmes basiques. Deux outils sont systématiquement utilisés : les « trios de nombres », expression qui désigne trois nombres liés par une relation additive ou soustractive (par exemple (3 ; 5 ; 8) car 8=5+3) et les « boîtes » qui sont des représentations permettant d’illustrer la structure additive existant dans le trio de nombres (figure 1).

---

[11] Méthode Heuristique des Mathématiques. Il s’agit d’un ensemble de ressources mathématiques conçues par Nicolas Pinel. Elles sont gratuitement accessibles en ligne à l’adresse https://methodeheuristique.com/ et également éditées chez Nathan.

8	
5	3

Figure 1. Boîte du trio de nombres (3 ; 5 ; 8)

Cette représentation a entre autres été décrite et analysée par Fischer (1993) et reprise par Descaves (2000). Elle illustre aisément les problèmes de composition ou de comparaison d'états mais ne permet pas de rendre compte de la chronologie des événements présente dans un problème de transformation (*Ibid.*, p. 188), contrairement à des représentations s'appuyant sur la droite numérique (Davydov, 1975 ; Joffredo-Le Brun, 2020, p. 285). Toutefois, elle peut être indifféremment mobilisée par les élèves de Paul et Angèle pour des problèmes de transformation ou de composition. En effet dans la progression proposée, son usage a avant tout pour objectif de rendre compte des relations entre les nombres et de faciliter des traitements du type « 3 + ? = 8 ⇔ 8 – 3 = ? », et non pas de représenter le problème. La ressource est également accompagnée d'une liste de problèmes basiques conçue par l'auteure qu'Angèle et Paul utilisent pour les séances analysées dans cet article et plus généralement pour toutes les séances de résolution de problèmes basiques. Les échanges qui ont lieu entre praticiens et chercheurs lors des entretiens post-visites et lors des réunions en petits groupes ou en plénière permettent aux chercheurs du projet de réajuster continuellement la ressource puis de soumettre ces modifications à l'équipe enseignante : ainsi, un processus d'amélioration continue de la ressource s'organise autour de ces va-et-vient. Céline, qui fait partie d'une autre recherche-action, connait l'existence de la ressource testée par Angèle et Paul mais ne l'utilise pas cette année-là. Elle se sert du livret-MHM et d'autres problèmes de la MHM.

3.4. Analyse *a priori* des problèmes proposés

Dans les neuf problèmes du livret de la MHM traités dans la classe de Céline, il s'agit de déterminer l'état final dans un problème de transformation ou le tout dans un problème de composition ; de plus, les sept premiers se résolvent en calculant le résultat d'une addition. Il est à noter que plusieurs faits numériques en jeu ne sont pas « dans les tables d'addition » (C5 : 9 + 12 = ? ; C6 : 17 + 6 = ? ; C8 : 13 – 2 = ?). On peut donc supposer que les problèmes C1 à C7 et C9 devraient être majoritairement réussis malgré des erreurs de calcul prévisibles en particulier pour C5 et C6, alors que C8 devrait souvent donner lieu à un calcul erroné d'addition (premier problème soustractif après sept problèmes additifs). Dans les problèmes abordés dans les classes d'Angèle et Paul, les élèves sont conduits à déterminer tour à tour une des parties, le tout, l'état final ou la transformation et pour cela, ils doivent calculer alternativement le résultat d'additions, de soustractions ou d'additions à trou. D'autre part, le champ numérique convoqué est différent : tous ces problèmes sont « dans les tables d'addition » et font appel à des résultats mémorisés qui ont été travaillés préalablement dans la ressource proposée par l'auteure. Ainsi dans la classe de Paul, P1 devrait être majoritairement réussi et P2 peu réussi (recherche d'une des parties dans un problème de composition) ; dans la classe d'Angèle, A1 devrait être plutôt réussi et A4 très réussi. A2 comme A3 et A5 devraient donner lieu à davantage d'échecs (recherche d'une des parties ou recherche de la transformation négative). Enfin, on peut anticiper pour A2 des difficultés à interpréter correctement « 2 vaches qui sont marron et les autres sont noires et blanches », « noires et blanches » pouvant renvoyer à deux catégories distinctes de vaches pour certains élèves. Le tableau 1 récapitule les caractéristiques des problèmes proposés et les prévisions concernant les performances des élèves lors de leur résolution (- : peu réussi ; + : plutôt réussi ; ++ : majoritairement réussi).

Tableau 1. Récapitulatif des problèmes proposés

	Paul				**Céline**				**Angèle**			
Problèmes	P1	$\begin{smallmatrix}P_1\searrow & \\ & ? \\ P_2\nearrow & \end{smallmatrix}$	3 + 4 = ?	++	C1	$E_i \xrightarrow{T^+} ?$	3 + 1 = ?	++	A1	$E_i \xrightarrow{T^-} ?$	8 – 3 = ?	+
	P2	$\begin{smallmatrix}P_1\searrow & \\ & T \\ ?\nearrow & \end{smallmatrix}$	2 + ? = 7	-	C2	$E_i \xrightarrow{T^+} ?$	8 + 2 = ?	++	A2	$\begin{smallmatrix}P_1\searrow & \\ & T \\ ?\nearrow & \end{smallmatrix}$	2 + ? = 6	-
					C3	$\begin{smallmatrix}P_1\searrow & \\ & ? \\ P_2\nearrow & \end{smallmatrix}$	5 + 4 = ?	++	A3	$E_i \xrightarrow{?^-} E_f$	6 - ? = 4	-
					C4	$E_i \xrightarrow{T^+} ?$	6 + 5 = ?	++	A4	$\begin{smallmatrix}P_1\searrow & \\ & ? \\ P_2\nearrow & \end{smallmatrix}$	4 + 4 = ?	++
					C5	$\begin{smallmatrix}P_1\searrow & \\ & ? \\ P_2\nearrow & \end{smallmatrix}$	9 + 12 = ?	+	A5	$\begin{smallmatrix}P_1\searrow & \\ & T \\ ?\nearrow & \end{smallmatrix}$	3 + ? = 8	-
					C6	$E_i \xrightarrow{T^+} ?$	17 + 6 = ?	+				
					C7	$\begin{smallmatrix}P_1\searrow & \\ & ? \\ P_2\nearrow & \end{smallmatrix}$	9 + 4 = ?	++				
					C8	$E_i \xrightarrow{T^-} ?$	13 – 2 = ?	-				
					C9	$E_i \xrightarrow{T^+} ?$	8 + 4 = ?	++				
Durée	10 minutes				20 minutes				45 minutes			
Modalité	atelier dirigé, 4 élèves				atelier dirigé, 3 élèves				classe entière, 14 élèves			
Consigne	orale, lue deux fois par Paul				lue par l'élève avec aide de Céline si nécessaire				orale, lue deux fois par Angèle			
Origine	liste conçue par l'auteure				livret MHM				liste conçue par l'auteure			
Support	ardoise, barquette de jetons				livret MHM, boîte à problèmes				ardoise			

4. Analyse des données

Les séances proposées par les trois enseignants ont été transcrites, puis les gestes professionnels ont été repérés et catégorisés. À chaque fois que des gestes consécutifs semblaient associés à des préoccupations conjointes, la posture correspondante a été identifiée, ce qui a fourni un découpage artificiel de chaque séance en successions de postures professionnelles. L'intégralité de la transcription ne pouvant être fournie, seuls des éléments saillants correspondant à des gestes professionnels qui nous semblaient intéressants à analyser sont restitués dans la suite du texte. Les enseignants sont désignés par leur prénom fictif et les élèves par une numérotation (E1, E2, etc.) correspondant à leur ordre d'apparition dans l'extrait concerné. Les indications portant sur leurs attitudes et gestes non-verbaux sont en italique. Dans trois extraits, les prises de parole sont numérotées afin d'y faire plus facilement référence (elles sont appelées « lignes » pour simplifier).

4.1. La séance menée par Paul : prédominance de la posture de contrôle

Pour le traitement du problème P1 (« Léa a invité 3 copines et 4 copains. Combien a-t-elle d'invités ? »), Paul adopte très brièvement une posture de lâcher-prise (après avoir répété trois fois l'énoncé, il se tait et cesse ostensiblement d'observer E1, E2, E3 et E4 pour poser son regard sur les autres tables d'ateliers), se place pendant une longue phase en posture de contrôle (qui se manifeste par une succession de demandes de justifications) et conclut par une phase rapide en posture d'enseignement. Dans l'extrait suivant, on peut aisément constater les effets de la posture de contrôle sur l'activité des élèves :

> [*Tous les élèves ont écrit 3+4= ou 3+4=7 sur leur ardoise.*]
> Paul : Vous n'avez pas besoin, donc, de manipuler les jetons, non ? Vous n'avez pas besoin de dessiner non plus ?
> E2 : Non.
> Paul : Vous allez m'expliquer pourquoi alors après, hein ! Faudra m'expliquer comment vous avez fait.
> [*E1 efface son ardoise, se saisit des jetons et en prépare un tas de 3 et un de 4*]

En effet, alors que tous les élèves de l'atelier ont directement produit une écriture mathématique correcte, il effectue un guidage serré vers d'autres types de procédures, ce qui a pour effet immédiat de faire renoncer E1 à la stratégie qu'il avait choisie. Paul précise en outre aux élèves l'enjeu du choix d'une procédure plutôt qu'une autre :

> Paul : Qu'est-ce que vous avez fait, E1, E2 et E3 ? E3, est-ce que tu peux expliquer ce que vous avez fait ? Pourquoi vous avez écrit ça ?
> E3 : Non…
> Paul : Non, vous n'êtes pas capables de me l'expliquer. Donc est-ce que vous avez compris, je ne sais pas… Je ne sais pas si vous avez compris le problème.

On voit nettement dans la persistance de la posture de contrôle que les procédures que les élèves exhibent ne suffisent pas à convaincre Paul d'un degré suffisant de compréhension de leur part. Ce doute peut s'expliquer ainsi : il s'agit d'un problème du champ additif et comme nous l'avons déjà précisé, à ce moment de leur scolarité les élèves ne disposent que de deux opérations (addition et soustraction). Un élève qui combinerait les données de l'énoncé avec une opération choisie au hasard obtiendrait donc une écriture mathématique adéquate dans la moitié des cas. Pour pallier cette incertitude, Paul semble vouloir fournir, par la monstration, un répertoire de procédures que les élèves n'ont pas spontanément mobilisées lors de la résolution du problème ou, pour le moins, qu'il n'a pas pu observer. Il leur suggère de faire appel à des représentations publiques tangibles (dessin ou jetons) qui lui donneraient davantage à voir de leur EPR. C'est lui-même qui fixe la nature de ces représentations, dont en particulier une reformulation de l'énoncé congruente à l'expression mathématique obtenue comme on le voit dans l'extrait suivant :

> Paul : E3, lis ce que tu as écrit s'il te plait.
> E3 : 3 plus 4 égalent 7.
> Paul : Oui, quel est le signe que tu as écrit ?
> E3 : Plus.
> Paul : Pourquoi tu as écrit « plus » ?
> E3 : Parce qu'elle a… Elle a invité 4 copains…
> Paul : En plus ! Elle avait 3 copines, elle a invité 4 copains en plus ! D'accord ? C'est ce que vous n'avez pas été capables de me dire, tous les deux.

L'utilisation de la représentation congruente à laquelle il aboutit est par ailleurs discutable : en effet, on peut redouter qu'elle engendre chez certains élèves l'effet inverse de celui escompté en instaurant dans leur esprit une règle du type « C'est quand j'entends « plus » ou « en plus » que je fais une addition ».

Dans le traitement du problème P2 (« Anna a 7 billes dans ses poches. Elle en a 2 dans sa poche gauche. Combien en a-t-elle dans sa poche droite ? ») dont la résolution met davantage les élèves en difficulté, on constate une alternance de postures plus fréquente et la posture d'accompagnement apparait de manière significative : dans l'enchaînement de gestes identifiés dans la transcription, on repère tour à tour une posture de lâcher-prise, de contrôle, de lâcher-prise, d'accompagnement, de contrôle et d'accompagnement. Lors de la dernière phase, Paul demande aux élèves, après la résolution du problème, comment on aurait pu représenter la situation à l'aide d'un dessin. On voit en lignes 1 et 12 qu'il s'appuie sur la production de l'élève le plus en difficulté (E4) et fait en sorte que ce soit lui qui conclue :

1. Paul [*montrant l'ardoise de E4 sur laquelle 7 ronds sont dessinés*] : Regardez, comment on fait pour le dessin ? Qu'est-ce que je peux faire pour le dessin ?
2. E4 : Heu… 7.

3. Paul : Elle en a 7 en tout. Elle en a 2 dans sa poche gauche. Qu'est-ce que je fais pour les 2 ? Comment je représente, sur l'ardoise, les 2 ?
4. E4 : Ben tu rajoutes 2.
5. Paul : Non. Mais non. Est-ce qu'on en a rajouté 2, là ? [*Paul montre les jetons au centre de la table*]. Non, on les a séparés… Comment je fais pour les séparer, là ?
6. [*E4 gesticule, sourit*]
7. E3 : T'as qu'à barrer.
8. Paul : On peut les barrer si tu veux. Tu veux qu'on en barre 2 ? Les barrer, ça voudrait dire qu'on les perd, qu'on les enlève. Là, ce n'est pas le cas.
9. E2 : Ils sont pas en moins.
10. Paul : Et non, elle ne les a pas perdues, elle les a juste mises dans sa poche. [*Paul entoure 2 ronds sur l'ardoise de E4*]. Voilà, celles-là, elles sont dans la poche gauche, celles-là, elles sont dans la poche droite, et en tout, ça fait ?
11. E4 : 7.

Par les questions qu'il adresse aux élèves (lignes 1, 5 et 8) et les réponses qu'elles occasionnent (lignes 7 et 9), on peut dire que Paul nourrit l'échange et accompagne les élèves E2 et E3 dans leur raisonnement. C'est en ce sens que l'on pourrait repérer ici une posture d'accompagnement. Toutefois pour E4 qui ne fournit pas les réponses attendues (lignes 2 et 4), voire ne répond pas (ligne 6), l'effet produit est différent : à l'issue d'une série de prises de paroles au cours desquels E4 s'exprime très peu, c'est finalement Paul qui, après avoir resserré ses questions vers la réponse qu'il attend, produit la représentation (ligne 10). E4 ponctue l'échange en annonçant simplement le nombre de ronds qu'il avait dessinés initialement. La posture de Paul s'apparente donc davantage à une posture de contrôle.

Une analyse des deux problèmes fait apparaitre une corrélation entre leur degré de complexité et leur traitement par Paul en termes d'alternance et de nature des postures adoptées : comme nous l'avions précisé dans l'analyse *a priori*, dans le problème P1, on cherche le tout alors que dans le problème P2, il s'agit de déterminer la valeur d'une des parties, ce qui en fait un problème plus difficile à résoudre pour les élèves. Paul, de par ses connaissances didactiques, a parfaitement conscience de cette différence. Il semblerait qu'il s'autorise une posture de lâcher-prise et bascule vers des postures d'accompagnement lorsqu'il juge le problème suffisamment complexe et qu'il modifie alors ses exigences sur les représentations de l'EPR des élèves qu'il souhaite pouvoir observer. Dans le problème P1, il signifie clairement aux élèves qu'il veut les voir dessiner, manipuler et reformuler l'énoncé, puis et seulement après, en phase de conclusion, il les conduit à produire une boîte[12] et une expression mathématique (3 + 4 = ?). Dans le problème P2 en revanche, il accompagne les élèves dans leurs raisonnements en s'appuyant sur deux types de représentations : des boîtes (non visibles dans l'extrait sélectionné) et des jetons. Il

[12] Cf. paragraphe 3.3.

ne fait référence à des représentations de type dessin qu'une fois le problème résolu, en interrogeant collectivement les élèves en fin de séance sur la façon dont on aurait pu « dessiner l'histoire ».

L'entretien entre Paul et la chercheuse qui suit la séance vise à mieux comprendre les intentions de Paul dans sa gestion de l'atelier. Pourquoi demande-t-il aux élèves d'utiliser des procédures auxquelles ils n'ont pas fait appel alors même qu'ils ont déjà résolu correctement le problème ? En particulier, Paul et la chercheuse s'accordent sur le fait que lorsque nous résolvons nous-même le premier problème, nous effectuons une addition car nous « reconnaissons » immédiatement un problème additif, ce que nous serions bien en peine d'expliciter. Dès lors, peut-on attendre d'élèves de CP qu'ils soient en mesure de verbaliser le choix d'une opération plutôt qu'une autre ? En réponse à ces interrogations, Paul explique qu'il a besoin de pouvoir observer des éléments qui témoignent d'un degré suffisant de compréhension de ses élèves. Pour ce premier problème, il pense que la plupart d'entre eux proposent une addition par effet de contrat (Brousseau, 1998) : ils additionnent les deux données numériques de l'énoncé sans s'être réellement représenté le problème, parce que l'addition est l'opération la plus disponible pour eux. C'est pourquoi il ne se contente pas d'une réponse du type « 3 + 4 = 7 ». La chercheuse lui rappelle que par l'alternance des opérations en jeu et de la place de la donnée recherchée, la liste de problèmes est conçue de manière à pouvoir rapidement déceler des élèves qui procèderaient au hasard, même si une incertitude momentanée est bien sûr inévitable. L'échange semble interpeler Paul mais ne pas le convaincre pleinement. La chercheuse n'a en outre au moment de l'entretien pas de solution alternative à lui proposer qui pourrait l'aider à savoir si ses élèves choisissent l'opération à effectuer sciemment ou au hasard. Ce questionnement est soumis aux enseignants et aux chercheurs de la recherche-action lors d'une réunion plénière et devient un nouveau sujet de réflexion pour la suite du projet. Nous décrirons dans les paragraphes 4.3 et 4.4 un geste professionnel didactique qui a émergé des réflexions et des observations menées dans le cadre de la recherche-action et qui offre une possibilité à l'enseignant de vérifier le niveau de compréhension de l'élève. Nous préciserons également de quelle manière Paul s'en est spontanément emparé pour enrichir sa pratique sur cet aspect.

4.2. La séance menée par Céline : entre accompagnement et lâcher-prise, une pratique plus individualisée et différenciée

Nous analysons les problèmes C1, C2, C3 et C5 dont le traitement comporte des épisodes significatifs. Pour le traitement du problème C1 (« Dans ma famille, il y avait 3 enfants avec moi. Maman a eu un bébé. Combien sommes-nous d'enfants à présent ? »), on note dans la pratique de Céline une alternance entre posture d'enseignement et de lâcher-prise, non seulement lorsqu'elle s'adresse à un élève en particulier mais aussi selon l'élève auquel elle s'adresse. Elle utilise un mode d'intervention plus individualisé que celui de Paul : par exemple, pour E1 qu'elle juge à l'aise pour la résolution de ce problème, elle adopte spontanément une posture de lâcher-prise :

> Céline [*à E1*] : Allez, vas-y.
> E1 [*montre l'emplacement sur le livret*] : On écrit la réponse là ?
> Céline [*à E1, avec un geste de la main lui signifiant de rester à l'écart de la conversation avec E3*] : Si tu sais, oui.

En revanche, elle adresse beaucoup plus ses interventions à E3 qu'elle estime plus en difficulté en alternant posture d'accompagnement, d'enseignement et de lâcher-prise. Dans l'extrait suivant, en posture d'enseignement, elle fait glisser l'élève du registre verbal au registre symbolique :

> E3 : 4 !
> Céline : Alors comment tu fais ?
> E3 : Y'a trois enfants et un bébé.
> Céline : D'accord. Et donc c'est quoi le calcul que tu as fait alors ?
> E3 : 3 plus 1 est égal à 4.
> Céline : Et beh ok.

Les deux professeurs cherchent à obtenir une reformulation verbale du problème ayant une structure congruente à l'écriture mathématique. Toutefois, la représentation attendue dans le registre verbal n'est pas la même. En effet, Céline utilise la formulation « Y'a trois enfants et un bébé » alors que Paul attend une formulation du type « Elle a invité 4 copains en plus » évoquant clairement l'opérateur en présence dans l'écriture mathématique. La suite de l'extrait illustre la façon dont Céline se saisit d'une intervention imprévue d'élève pour pointer la propriété de commutativité de l'addition :

> E1 : 1 plus 3 !
> Céline : 1 plus 3, est-ce que c'est pareil ?
> E1 : Heu…
> Céline : Je ne sais pas, je te pose la question. Est-ce que qu'on écrive 1 + 3 ou 3 + 1, c'est pareil ?
> E1 : Non, c'est pas pareil !
> Céline : Pourquoi ?
> E1 : Parce que c'est inversé.
> Céline : D'accord. Mais le résultat ?
> E1 : Ben c'est pareil le résultat.

Elle passe alors en posture d'enseignement pour la dernière phase de la résolution de ce problème :

> Céline : C'est ça ! Donc que tu écrives 1 + 3 ou 3 + 1, tu as raison, même si les nombres sont inversés, le résultat [*Céline ralentit son débit*] est le même. Dans l'addition, c'est ce qu'on avait vu ce matin.

Dans cet extrait, on voit apparaitre un geste professionnel didactique d'atmosphère (elle ralentit son débit lorsqu'elle dit « est le même » pour capter l'attention de l'élève) et un geste professionnel didactique de tissage quand elle précise que cette même propriété avait été étudiée dans un autre contexte le matin-même (« c'est ce qu'on avait vu ce matin »).

Le traitement du problème C2 (« Dans ma boite, j'ai déjà 8 perles dorées. Maman m'en donne 2 autres. Combien ai-je de perles maintenant ? ») fait apparaître un enchaînement de postures très similaire à celui du problème C1, avec une alternance entre postures d'accompagnement et de lâcher-prise en fonction des élèves auxquels Céline s'adresse et une conclusion en posture d'enseignement en fin de traitement du problème :

> Céline : Les 8, c'est celles que j'avais déjà [*Céline montre 8 doigts*]. Et maman, elle en a donné en plus, elle en a rajouté.

En effet dans cette réplique, Céline cherche à faire une démonstration du savoir en jeu. Elle se porte garante de la réponse qui a été produite. Il est intéressant de noter qu'elle s'appuie à nouveau sur le même type de représentation verbale que Paul : elle emploie une reformulation de l'énoncé utilisant l'expression « en plus » pour obtenir une représentation congruente à l'expression symbolique « 8 + 2 = ? » afin de faciliter la compréhension de la conversion entre ces deux représentations. Tout comme Paul, on peut remarquer qu'elle ne prend pas appui sur des représentations qui auraient été produites par les élèves pour illustrer son propos et on peut également redouter chez certains de ses élèves des généralisations abusives de ce qu'elle vient d'énoncer. Toutefois, alors que Paul fait appel à cette reformulation congruente en posture de contrôle et signifie aux élèves qu'il attendait d'eux qu'ils la produisent, Céline la mobilise en posture d'enseignement : c'est elle qui la fournit pour légitimer le recours à l'addition dans ce type de problème. Il semblerait que cette représentation n'endosse pas la même fonction dans la pratique des deux enseignants : pour Paul, c'est un moyen d'accéder à l'EPR de ses élèves et il les conduit, par ses interventions, à renoncer à leurs procédures initiales pourtant correctes ; Céline, en revanche, l'utilise comme justification mathématique en phase d'institutionnalisation.

Le problème C3 (« Dans le coin autonomie de la classe, il y a 5 fiches de mathématiques et 4 fiches de lecture. Combien y a-t-il de fiches en tout ? ») est traité encore plus rapidement que les deux précédents. Céline est en posture de lâcher-prise avec E1 et E4 et s'adresse exclusivement à E2 et E3 en posture d'accompagnement. Elle différencie son enseignement en consacrant toutes ses interventions à E2 et E3 qu'elle pense plus en difficulté et laisse E1 et E4 continuer leur travail de manière autonome : elle permet ainsi à E1 et E4 de traiter davantage de problèmes tout en se rendant plus disponible pour E2 et E3. Cependant cela a lieu au détriment d'interactions entre élèves qui se révèlent parfois plus fécondes que les échanges maître-élèves générés par cette modalité de travail. Plusieurs gestes d'étayages viennent confirmer le choix d'une gestion très individualisée de la séance, comme le montre l'extrait suivant :

> E1 : On peut tourner la page ?
> Céline : Oui. Alors après, chacun va aller à sa vitesse. Ici, c'est la table où on peut se donner un coup de main, où on peut poser des questions. E2, s'il y a des mots qui bloquent, je vais te montrer que les problèmes sont enregistrés et tu peux les écouter. Moi, je vais rester avec E3 pour lui donner un coup de main.

Encore une fois pour le problème C5 (« Mamie a planté des fleurs dans le jardin. Il y a une rangée de 9 tulipes et une rangée de 12 roses. Combien y a-t-il de fleurs au total ? »), Céline se place presque exclusivement en posture d'accompagnement, à l'exception d'un bref passage en posture d'enseignement en fin de traitement :

> Céline : Et beh oui, parce que les fleurs de Mamie, tu as raison, il fallait compter les tulipes, mais aussi les roses.

Sa pratique est à nouveau très individualisée : elle s'adresse majoritairement à l'élève E3 et adopte une posture de lâcher-prise avec les autres vers lesquels elle ne se tourne qu'à de rares instants si cela lui semble nécessaire ou s'ils en font la demande. Il semblerait que ce déroulement soit routinisé dans sa pratique.

Attardons-nous maintenant sur un épisode particulier entre E3 et l'enseignante. Céline lit lentement deux fois l'énoncé à E3 et revient sur les termes « rangée » et « tulipe » pour s'assurer qu'ils sont connus de l'élève. E3 propose alors spontanément « 9 plus 3 égalent 12 ». Cette réponse d'élève donne un exemple intéressant d'obstacle potentiel lié au travail sur les trios de nombres. Après un temps de flottement, Céline interroge E3 de la manière suivante :

> Céline : Alors où tu prends le 3 ?
> E3 [*regardant attentivement l'énoncé*] : Heu…

La question n'éclaire pas l'élève. En effet, E3 propose une réponse en combinant les deux données du texte (9 et 12) avec un troisième nombre (3) issu d'un fait numérique mémorisé qu'elle a identifié (9 + 3 = 12). Si elle avait proposé « 9 plus 12 égalent 21 » qui correspond à la réponse attendue, l'un des nombres (21) aurait également été absent de l'énoncé. Ce flottement et cette question caduque peuvent s'expliquer par le fait que Céline a été surprise par cette réponse imprévue. En effet, elle sait que les sept premiers problèmes du livret se résolvent par une addition des données de l'énoncé et s'attend donc à ce qu'E3 effectue spontanément une addition comme elle l'a fait pour les deux problèmes précédents. Prenant conscience de l'inefficacité de sa première intervention, elle suggère alors un changement de registre en sollicitant une autre représentation :

> Céline : Si on faisait un dessin ? Tu te rappelles qu'on a le droit de s'aider du matériel pour faire le film dans sa tête[13]. Comment on dessinerait les fleurs de Mamie ?

Il est à noter que dans son discours, Céline met sur le même plan les représentations du registre analogique et du registre pictural. De plus, on peut constater qu'elle convoque les mêmes registres de représentation que Paul, mais dans des circonstances différentes : ici, le recours au dessin est invoqué en remédiation, pour pallier un échec lorsque l'élève n'arrive pas à procéder autrement alors que Paul le propose après que les élèves ont fourni la bonne réponse, pour les conduire à justifier leur démarche. Céline essaie dans l'extrait qui suit de faire évoluer les dessins produits :

> Céline [*à E3 qui s'applique à dessiner les tulipes pétale après pétale*] : Non, bon, ok. Tu sais, après, le nombre de pétales, ce n'est peut-être pas très très important. L'important, c'est qu'on comprenne les fleurs que tu as représentées.

Après avoir rapidement représenté les roses par 12 cercles, E3 regarde son dessin et pointe les fleurs une par une avec son crayon pour les dénombrer.

> E3 : 21.
> Céline : Et alors, comment t'arrives à ce total de 21 ? Qu'est-ce que tu fais ?
> E3 : 9 plus 12 est égal à 21.
> Céline : Et beh oui parce que les fleurs de Mamie, tu as raison, il fallait compter les tulipes, mais aussi les roses. C'est bien. Tu vois que le dessin, il faut pas hésiter à le faire, E3. Ça permet de bien mettre le film dans notre tête et de le comprendre.

Enfin, Céline utilise un argument similaire à l'un de ceux utilisés par Paul :

> Céline [*à E1*] : Comment je peux savoir, ma grande, comment tu arrives à ce résultat, moi, si je n'ai pas réfléchi en même temps que toi et que je n'ai pas entendu ton raisonnement ? Tu es arrivée comment à ce résultat ? T'as fait quoi dans ta tête ?

Toutefois comme le montre la suite de l'extrait, la représentation attendue n'est pas la même. Paul souhaitait une justification orale alors que Céline attend ici une écriture mathématique :

> E1 : 12 plus 9.
> Céline : Tu voudrais bien me l'écrire ? S'il te plait. [*E1 écrit 12 + 9 dans son livret*]
> Céline : Ok. Pareil pour celui du dessous si tu veux bien. Ok ?

---

[13] L'expression « faire le film dans sa tête » fait référence à un procédé phare de Lector-Lectrix (Cèbe et Goigoux, 2009) repris dans la ressource Auditor-Auditrix qui en est une adaptation pour le CP produite et mise en ligne par des enseignants en 2017. L'objectif est d'apprendre aux élèves à construire une représentation mentale cohérente d'une histoire dans le but de favoriser la compréhension de textes narratifs. Ce procédé n'a pas été conçu par ses auteurs pour aider à la résolution de problèmes mathématiques, on peut donc légitimement interroger son efficacité dans ce cadre.

Lors de l'entretien qui suit la séance, Céline précise qu'elle a acheté cette année la version éditée du livret de la MHM pour chacun des élèves de sa classe. Elle tient à utiliser ces supports dans le but de « rentabiliser » son investissement, bien qu'il présente des aspects dont elle doute de la pertinence. En particulier, elle a bien noté avant la séance que les sept premiers problèmes du livret étaient des problèmes d'addition (recherche du tout dans une composition ou de l'état final dans une transformation positive) ; elle soupçonne le fait qu'après avoir résolu un ou deux problèmes, les élèves additionneront systématiquement les deux nombres présents dans l'énoncé pour les problèmes suivants, ce qui correspond exactement à l'effet de contrat redouté par Paul. Cette crainte est confirmée par le fait que la seule élève ayant traité le problème 8 a calculé le résultat de 13 + 2 au lieu de 13 – 2, ce qui témoigne aux yeux de Céline d'une perte de sens avérée. Elle s'appuie sur l'analyse qu'elle fait de la ressource pour interpréter les réussites et l'échec d'une de ses élèves, mais ne renonce pas pour autant à l'utilisation du livret pour l'année en cours. Dans ce geste de pilotage, l'aspect matériel – un investissement financier conséquent pour le budget de la classe – prime sur les enjeux didactiques dont elle a pourtant pleinement conscience. Céline assure toutefois qu'elle ne commandera pas de nouveau ces livrets l'année suivante.

4.3. La séance menée par Angèle : trois phases pour chaque problème

Nous analysons les traitements des problèmes A1 et A2 qui sont ceux comprenant les épisodes qui nous semblent les plus significatifs. Lors de la dévolution (Brousseau, 1998) du problème A1 (« Charlotte a 8 biscuits dans son sac. Elle en mange 3. Combien lui en reste-t-il ? »), Angèle, en posture de contrôle, cadre la recherche pour le groupe-classe et précise ses attendus :

> Angèle : Je redis. [*Angèle pose un doigt sur la bouche en regardant E1*]. Charlotte a 8 biscuits dans son sac. Elle en mange 3. Combien lui en reste-t-il ? [*Angèle baisse la voix*]. On fait son calcul, son trio de nombres. Après, quelqu'un viendra expliquer.

Elle se place alors en posture de lâcher-prise avec l'ensemble de la classe. Puis en posture d'accompagnement, elle propose des interventions individuelles ponctuelles avec quelques élèves et une intervention plus prolongée avec E4 qui a écrit sur son ardoise « 8 + 3 = 11 » :

1. Angèle [*à E4*] : C'est quoi, E4, mon histoire ?
2. E4 : Charlotte avait, heu… 8, heu, gâteaux…
3. Angèle : Oui.
4. E4 : Elle en mange 3… Du coup, ça fait 11.
5. Angèle : Ça fait 11 quoi ?
6. E4 : Gâteaux.
7. Angèle : Gâteaux que quoi ?
8. E4 : Heu…

9. Angèle : Moi, je veux savoir combien il lui reste de gâteaux. [*Angèle appuie le mot « reste » et marque une pause*].
10. E4 : Ben du coup, on va mettre le signe moins.
11. Angèle : Ah ! Pourquoi on va mettre le signe moins ?
12. E4 : Parce qu'on en enlève.

Nous notons un geste de tissage qui a pour objet de faire accéder l'élève à une stratégie correcte : Angèle rappelle une partie de l'énoncé qu'elle reformule partiellement, puis marque une pause après avoir insisté sur le mot « reste ». Elle fait ainsi écho à une liste de mots évoqués lors de précédentes séances et étant associés à la soustraction, liste qui sera à nouveau proposée aux élèves à la fin du traitement de ce problème. Si le geste de tissage observé ici est pertinent, on peut néanmoins remettre en question la pertinence du geste langagier qui y conduit : l'accentuation du mot « reste » en ligne 9 qui succède au jeu de questions-réponses des lignes 1 à 8 s'apparente à un effet Topaze (Brousseau, 1998) et permet d'obtenir la réponse attendue (ligne 10), ce qui est confirmé par le « Ah ! » satisfait d'Angèle en ligne 11. Ce passage débouche sur une phase rapide en posture d'enseignement dans laquelle Angèle, comme Paul et Céline, utilise une reformulation de l'énoncé congruente à la représentation « 8 – 3 = ? » :

> Angèle : Ah ! Pourquoi on en enlève ? Parce que si elle les mange, et beh elle ne les a plus, elle les a en moins. D'accord ?

Cependant, dans cette phase en posture d'enseignement (elle donne la justification mathématique de l'opération employée pour en garantir le choix), elle ne s'adresse qu'à une seule élève, ce qui n'est jamais le cas de Céline et de Paul lorsqu'ils adoptent cette posture. De même que Céline, Angèle prend en charge cette reformulation. Elle adopte alors une posture de lâcher-prise avec E4 (elle se lève et quitte sa table pour se rendre à celle d'un autre élève). Puis elle aborde une phase de mise en commun au cours de laquelle elle se place majoritairement en posture d'accompagnement alternant avec plusieurs temps rapides en posture d'enseignement. Dans l'épisode suivant, Angèle effectue un guidage fort dans le but d'inciter les élèves à opérer un traitement puis une conversion (ligne 7). C'est d'ailleurs elle qui effectue, en ligne 7, le traitement dans le registre de la langue naturelle permettant d'obtenir une reformulation congruente de l'énoncé :

1. Angèle : Vas-y. Alors, c'est l'histoire de qui ?
2. E6 : C'est Charlotte, elle a 8 biscuits dans son sac et elle en a mangé 3.
3. Angèle : D'accord. Et qu'est-ce qu'on veut savoir ?
4. E6 : Elle en a mangé combien ?
5. Angèle : Est-ce qu'on veut savoir combien elle en…
6. E6 : Ah ! Elle en a eu combien !
7. Angèle : Combien il lui en reste. Combien, à la fin, elle en a. D'accord. Comment tu vas écrire ça sous forme mathématique ?

Elle dirige alors l'élève vers une conversion dans le registre symbolique pour aboutir à l'expression mathématique « 8 – 3 = ? ». Plus tard, elle précise comment opérer le traitement qui fournit le résultat numérique :

Angèle : Qu'est-ce que tu fais pour savoir ce que tu mets à la place du point d'interrogation[14] ? Comment tu fais ?
E6 : Je regarde là. [*E6 montre une affiche qui recense des trios en boîtes*].
Angèle : Et beh si tu veux. Soit on le connait par cœur et on l'écrit, soit on le regarde. Tu nous montres le trio ?
[*E6 montre la boîte sur l'affiche*]

Puis elle replace le résultat dans le contexte du problème lors d'une conversion :

Angèle : Alors ma question était : « Combien lui reste-t-il de biscuits ? ». C'est quoi la réponse, alors ? Il lui en reste combien, des biscuits ?
Plusieurs élèves : 5.
Angèle : Il lui reste 5 biscuits, très bien.

Elle termine en posture d'enseignement par un geste de tissage dans lequel elle effectue avec les élèves une association mathématique et linguistique :

E12 : C'est l'affiche rose.
Angèle : Pourquoi ? Pourquoi c'est comme l'affiche rose ?
E12 : C'est moins, et aussi y'a point d'interrogation à la fin et c'était point d'interrogation à la fin[15].
Angèle : Oui. Mon histoire rose, souvenez-vous, c'était quand on jouait au jeu de l'oie. On est sur la case 5 et on recule de 3 cases. Et on avait vu que quand on recule, on en enlève. Qu'est-ce qu'on avait dit, aussi, comme mots qu'on pouvait mettre ? Reculer, casser, détruire…
E8 : Jeter.
E13 : Démonter.
Angèle : Enlever, perdre. Tout ça, c'est…
E5 : Donner.
Angèle : Donner, oui, si on donne… Très bien.

En effet depuis le début de l'année, des problèmes de référence ont été notés sur des affiches de couleur. Après la résolution de chaque problème, un élève repère

---

[14] Suite à un questionnement en séance plénière de la recherche-action, Angèle choisit cette année-là de faire utiliser le signe « ? » à ses élèves pour repérer la donnée recherchée dans l'écriture mathématique car ils ne parviennent fréquemment plus à l'identifier une fois le calcul réalisé. L'année suivante, elle fait plutôt entourer le nombre recherché pour ne pas utiliser un signe emprunté au domaine de l'écrit.

[15] Sur chaque affiche figure un énoncé de problème, l'écriture mathématique congruente à l'énoncé dans laquelle la donnée recherchée est représentée par un point d'interrogation et le trio de nombre associé dans une boîte.

l'affiche à laquelle correspond le problème. Puis des mots ou des formulations concordant avec le sens du problème de référence sont donnés. Notons que lors de cette phase de mise en commun, Angèle répète à l'ensemble du groupe-classe les mêmes gestes que ceux qu'elle avait adressés individuellement à E4. Le temps qu'elle « gagne » du fait de l'organisation collective de sa séance (contrairement à Céline et Paul, elle n'aura pas à reproduire l'atelier avec d'autres élèves) semble contrebalancé par des redites collectives lors de la mise en commun. Elle traite en proportion un nombre de problèmes comparable à celui de ses collègues.

Nous voyons à nouveau se dégager trois phases dans le traitement du problème A2 (« Un fermier a 6 vaches. Il y en a 2 qui sont marron et les autres sont noires et blanches. Combien a-t-il de vaches noires et blanches ? ») : la dévolution de la situation, une phase de recherche et une phase de mise en commun. Comme dans le problème précédent, elle adopte une posture de lâcher-prise après avoir précisé ses attendus et être revenue sur une ambiguïté de l'énoncé (une vache peut être noire et blanche, mais ni seulement noire ni seulement blanche) en posture de contrôle lors de la dévolution du problème. Pendant la phase de recherche, elle repère les productions erronées. En posture d'accompagnement, elle mobilise le geste professionnel didactique suivant : elle donne l'opportunité aux élèves de constater par eux-mêmes l'inadéquation de leurs propositions en leur demandant de s'assurer que la conversion « inverse » de celle qu'ils ont opérée est correcte :

> Angèle : Regardez ce que vous avez fait. Je vous le relis une fois. Regardez bien si ce que vous avez écrit correspond à mon histoire. Écoutez bien, E3 comme tout le monde, si ça correspond bien à mon histoire. E5, tu es avec moi ? Un fermier a 6 vaches. Il y en a 2 qui sont marron et les autres sont noires et blanches. Combien a-t-il de vaches noires et blanches ? C'est ça que je cherche. Regardez votre calcul pour voir si ça correspond à mon histoire.

Puis elle s'adresse à E7 en particulier en alternant, comme dans le problème A1, postures d'accompagnement et d'enseignement. Notons qu'elle commence par s'appuyer sur ce qui est correct dans la production d'E7 qui a écrit une boîte avec 6 (pour le tout), ? et 2 (pour les parties) puis a inscrit au-dessus : 6 + 2 = ? :

> Angèle [*à E7*] : Alors, cette histoire, elle correspond à quoi ? Ce que tu as écrit là ? [*Angèle montre le 2 dans la boîte*]
> E7 : Les vaches marron.
> Angèle : Oui, les vaches marron.

Par un geste professionnel didactique d'étayage assez proche de celui décrit ci-avant, elle incite E7 à vérifier la conversion qu'il a faite, ce qui le conduit immédiatement à déceler une erreur :

> Angèle [*à E7*] : Tu crois que ça, ça correspond à ça ? [*Angèle désigne tour à tour la boîte et l'égalité*]
> E7 : Non.

Angèle : Pourquoi ?
E7 : Parce que le point d'interrogation, il est au milieu.
Angèle : Alors tu le corriges ?

Nous voyons ici l'intérêt que peut revêtir l'utilisation de représentations publiques telles que les boîtes dont l'usage a été systématisé en classe. L'élève et l'enseignante utilisent un langage commun qui permet de rendre visible pour E7 la structure mathématique du problème. Angèle le conduit alors à réaliser à nouveau la conversion qui consiste à passer de la boîte à l'égalité mathématique. Il est à noter que cette conversion, qui fait l'objet d'un travail spécifique dans l'ingénierie testée dans le cadre de la recherche-action, n'est pas mobilisée par Céline et Paul dans les séances observées.

Angèle : Comment tu vas l'écrire ?
E7 : 6 plus point d'interrogation
Angèle : Regarde. [*Angèle désigne tour à tour le 6 de l'égalité et le 6 de la boîte*]. C'est 6 plus point d'interrogation ?
E7 : Ah ! 2.
Angèle : Pourquoi ?
E7 : Heu, y'a… 2 vaches marron. Et y'a…
Angèle : Plus les vaches noires et blanches. Et c'est égal à combien ?
E7 : 6.
Angèle : 6. Alors réécris ton calcul s'il te plait [*Angèle efface ce qui reste du calcul précédent*]. Vas-y.
E7 : 2 ?
Angèle : 2, oui. Les vaches marron.
[*E7 écrit 2 +*]
Angèle : Plus quoi ? [*Angèle montre dans la boîte*]. 2 plus…
[*E7 complète son écriture par ? = 6*]
Angèle : Et c'est égal à 6. Les vaches marron plus les vaches noires et blanches, ça fait toutes les vaches.

Dans la conclusion de cet épisode, elle fournit encore une fois une reformulation de l'énoncé congruente à l'expression mathématique utilisée. Pendant la mise en commun, elle alterne entre posture d'accompagnement et posture d'enseignement. Elle guide les élèves vers un registre qui lui semble plus approprié pour la résolution du problème :

Angèle : Peut-être qu'avant d'écrire ton calcul, parce que c'est celui-là qui vous gêne, peut-être que tu pourrais ou regarder les affiches ou faire la boîte. Qu'est-ce qui est le plus simple ? Essaye d'expliquer.

Comme dans le problème précédent, elle redit en phase collective des éléments qu'elle avait déjà pointés en intervention individuelle lors de la phase de recherche.

4.4. Discussion

En premier lieu, nous notons à un niveau général que la variété des postures mobilisées chez les trois enseignants de l'étude dénote une grande stabilité dans leurs pratiques, ce que Bucheton (2019) décrit en précisant que l'enseignant expérimenté s'est constitué « un capital de postures pour enseigner. Elles lui permettent de penser plus vite dans l'action, lui ouvrent un panel plus large pour s'ajuster aux élèves, aux situations, aux imprévus » (Bucheton, 2019, p. 99). Au-delà de la nature des postures sollicitées, nous voyons se reproduire chez chacun d'eux des enchaînements de postures selon des patterns facilement identifiables : Paul se place majoritairement dans une alternance entre posture de contrôle et posture d'accompagnement s'il juge le problème facile, il n'adopte la posture de lâcher-prise que lorsque le problème lui semble complexe. La posture d'accompagnement domine largement chez Céline qui n'est jamais en posture de contrôle et fait preuve d'une pratique très individualisée. Angèle organise le traitement de chaque problème en trois phases : la dévolution du problème lors de laquelle elle précise ses attendus en posture de contrôle et conclut en posture de lâcher-prise pour l'ensemble de la classe, la phase de recherche pour laquelle elle se place en posture de lâcher-prise avec une majorité d'élèves et propose des interventions individualisées en alternant posture d'accompagnement et posture d'enseignement, la phase de mise en commun enfin au cours de laquelle elle oscille entre posture d'accompagnement et d'enseignement en effectuant des redites de ce qu'elle a pointé avec certains élèves dans la phase précédente. Ce constat vient étayer le postulat de stabilité émis par Robert et Rogalski (2002) selon lequel « il existe des choix analogues pour gérer des situations comparables, en amont de la classe et pendant la classe, ce qui ne préjuge pas du détail des déroulements correspondants, toujours singuliers. » (Robert et Rogalski, 2002, p. 508).

En second lieu, l'analyse de ces séances nous conduit à nous intéresser plus finement à certains gestes professionnels déployés par ces trois enseignants. Nous les qualifions de didactiques puisqu'ils sont spécifiques à la résolution de problèmes basiques du champ additif qui constitue l'objet de savoir en jeu dans les séances étudiées. Toutefois, le protocole utilisé ne permet pas de vérifier si ces gestes évoluent et s'ajustent au cours de l'année en fonction de l'avancée des apprentissages des élèves.

Tout d'abord, l'étude comparative de leurs pratiques met en évidence des différences concernant les représentations que les trois enseignants sollicitent au cours de la résolution d'un problème avec leurs élèves, que ce soit du point de vue de leur nature, du moment auquel elles sont mobilisées ou des raisons qui animent l'enseignant lors de leur utilisation. Dans les séances observées, Angèle et ses élèves font exclusivement appel à des représentations du registre de la langue naturelle (l'énoncé, des reformulations de l'énoncé, une phrase réponse), du registre symbolique (écritures mathématiques et résultat numérique) et du registre des représentations schématiques (boîtes). Céline, Paul et leurs élèves en convoquent également dans le registre pictural (dessins) et le registre analogique (jetons et matériel divers). En outre, ces deux derniers types de représentations n'ont pas forcément la même fonction dans la pratique de Céline et dans celle de Paul et peuvent correspondre à des logiques d'arrière-plan différentes. Chez Céline, leur recours constitue un geste professionnel didactique d'étayage : elle suggère à l'élève de les utiliser s'il ne parvient pas à résoudre le problème avec des représentations des registres de la langue naturelle, symbolique ou schématique. Paul, pour le problème P1, sollicite ces représentations *a posteriori*, lorsque les élèves sont déjà parvenus à résoudre le problème. Il encourage ses élèves à les utiliser en priorité car il pense que leur nature tangible lui donne accès à leur EPR.

Le deuxième geste professionnel didactique auquel on s'intéresse est commun aux pratiques des trois enseignants de l'étude. Nous l'appelons geste de *reformulation congruente* car il convoque une représentation particulière : il s'agit d'une reformulation de l'énoncé qui facilite la production de l'écriture mathématique exprimant le problème. Par exemple, Paul reformule l'énoncé « Léa a invité 3 copines et 4 copains. Combien a-t-elle d'invités ? » en « Elle avait 3 copines, elle a invité 4 copains en plus. Combien a-t-elle d'invités ? » afin de rendre plus visible l'emploi du signe « + » dans l'expression « 3 + 4 = ? ». Notons que ce nouveau problème peut être interprété comme une transformation alors qu'il s'agissait initialement d'une composition. Ce type de reformulation que les trois enseignants produisent peut faciliter la conversion entre le registre de la langue naturelle et le registre symbolique. Néanmoins, on peut noter que ces derniers l'introduisent avec une intention et selon des modalités différentes. Céline, dont la pratique est très individualisée, la fournit à l'élève auquel elle s'adresse pour ponctuer la résolution du problème par une justification mathématique de la procédure adoptée. Angèle procède de même, mais elle répète cet épisode une deuxième fois devant l'ensemble du groupe-classe en phase de mise en commun. Paul, pour sa part, l'utilise encore une fois comme un moyen d'accéder à l'EPR de ses élèves. Ce geste de reformulation congruente sert, chez Céline, Angèle et Paul, l'objectif d'apprentissage poursuivi bien qu'il soit motivé par des logiques d'arrière-plan différentes. Il est en ce sens cohérent dans la pratique des trois enseignants, mais la méthodologie adoptée ne nous permet pas concrètement d'en évaluer la pertinence. Comme nous l'avons évoqué précédemment, il existe un risque de sur-généralisation du type « Tout problème qui se résout par une addition contient le mot « plus » » par certains élèves. D'autre part, une interrogation persiste : Angèle, Céline et Paul produisent aisément cette reformulation congruente car paradoxalement, ils connaissent déjà l'expression mathématique qui traduit le problème. Mais lors de la résolution d'un autre problème, un élève qui ne dispose pas de l'écriture mathématique sera-t-il en mesure de choisir une reformulation congruente plutôt qu'une autre non-congruente qui pourrait alors l'induire en erreur ?

Enfin, nous avons pu observer dans la pratique d'Angèle deux autres gestes professionnels didactiques très proches l'un de l'autre. Le premier, que nous qualifions de *conversion inverse*, est un geste d'étayage qui consiste à demander aux élèves de vérifier si la conversion inverse de celle qu'ils ont opérée entre deux représentations est correcte : dans l'extrait de corpus, les élèves ont converti l'énoncé oral en écriture mathématique et Angèle leur demande de vérifier que l'écriture mathématique correspond à l'énoncé oral. Le second, que nous qualifions de *vérification de conversion*, est un geste d'étayage dans lequel elle demande à un ou plusieurs élèves de vérifier que deux représentations obtenues suite à une conversion correspondent bien : dans l'extrait de corpus, l'élève a produit (dans un ordre qu'elle ignore) une boîte et une écriture mathématique en convertissant l'énoncé oral ; Angèle lui demande de vérifier que ces deux représentations correspondent l'une à l'autre dans le sens qu'il souhaite. Ces gestes de *conversion inverse* et de *vérification de conversion* sont clairement cohérents et nous pouvons de plus relever des traces tangibles dans l'activité des élèves qui témoignent de leur pertinence. Par exemple dans l'extrait cité dans le paragraphe 4.3, l'élève E7 décèle immédiatement l'erreur qu'il a commise lorsqu'Angèle utilise avec lui le geste de *vérification de conversion*. Notons que la capacité de ce geste à faire aussitôt rectifier sa procédure par l'élève est largement conditionnée par la pratique ritualisée d'exercices qui s'intègrent à la ressource testée dans le cadre de la recherche-action (associer une boîte à une écriture mathématique, associer une ou plusieurs écritures mathématiques à une boîte donnée, etc.).

Le geste particulier de *conversion inverse* de l'écriture mathématique vers une formulation de l'énoncé dans le registre de la langue naturelle a émané de nos observations, réflexions et échanges au sein de la recherche-action comme une piste pour apprécier le niveau de compréhension des élèves une fois le problème résolu : il s'agit de les interroger *a posteriori* pour leur demander de montrer comment on « retrouve l'histoire du problème » à partir de l'écriture mathématique obtenue. Paul s'est spontanément emparé de cette idée : pour entrainer ses élèves à opérer cette conversion, il leur propose dès la rentrée suivante un rituel consistant à créer un énoncé de problème à partir d'une écriture mathématique. Après avoir été filmé, ce rituel est présenté aux membres de la recherche-action lors d'une séance plénière. Le geste de *conversion inverse* est maintenant présent dans les pratiques de la plupart des enseignants impliqués dans la recherche-action.

Ces trois enseignants nous livrent des pratiques contrastées dues à des logiques profondes singulières et que nous pouvons en partie expliquer par une gestion différente de l'incertitude concernant l'EPR de leurs élèves. Céline effectue un compromis : elle utilise une ressource qui a nécessité un investissement financier conséquent mais dont le contenu va probablement induire des réponses automatisées chez les élèves. Elle prend le parti d'adopter un rythme soutenu dans la séance. Le critère de réussite qu'elle retient et dont elle se contente est la production par les élèves d'un résultat numérique correct. C'est elle qui prend en charge, en posture d'enseignement, la production de représentations facilitant les conversions de registres nécessaires à la résolution du problème. Dans le cadre de la mise en place de la ressource au plus près de ce qui lui est proposée au sein de la recherche-action, Angèle fait le choix, dès le début de l'année, de changer radicalement sa pratique sur un aspect : elle n'incite plus ses élèves à dessiner le problème ou utiliser du matériel. Le critère de réussite qu'elle retient est la production par les élèves d'une écriture mathématique ou d'une boîte modélisant correctement le problème posé. Malgré des doutes pour certains élèves, les progrès rapides qu'elle constate chez la plupart d'entre eux ainsi que les échanges réguliers avec les chercheurs et les enseignants impliqués dans la recherche-action l'encouragent à poursuivre dans cette voie. Paul, fort d'une longue expérience en CP au cours de laquelle il a pu éprouver les difficultés liées à l'enseignement de la résolution de problèmes, veut disposer de davantage d'éléments concernant l'EPR de ses élèves pour s'assurer d'un certain niveau de compréhension de leur part. Pour cela, il attend d'eux qu'ils utilisent des représentations tangibles qui lui permettraient d'accéder à leurs procédures. Le critère de réussite qu'il retient au moment où les séances analysées dans cet article se déroulent est la production d'un dessin, l'utilisation explicite de matériel ou la production par les élèves d'un énoncé congruent à l'expression mathématique modélisant le problème.

Ces différences de pratiques observées ont donné lieu à des questionnements et des échanges dans le cadre de la recherche-action impliquant Paul et Angèle. Comme nous l'avons évoqué précédemment, la réflexion a par exemple conduit à la mise en évidence d'un geste professionnel didactique de *conversion inverse* de l'écriture mathématique vers une formulation de l'énoncé qui peut, en aval de la résolution du problème, renseigner le professeur sur le niveau de compréhension de l'élève sans agir sur les procédures qu'il mobilise en situation, geste dont s'est saisi Paul pour concevoir une nouvelle tâche qu'il a ritualisée dans sa classe. La réflexion a également permis d'exhiber des usages différenciés du matériel et des dessins, voire de l'absence de ces derniers. En faisant émerger différentes manières de faire, elle a permis un enrichissement des pratiques des participants. Ainsi, cette expérimentation qui a eu lieu dans le cadre d'une recherche-action laisse entrevoir des perspectives prometteuses concernant la formation continue des enseignants.

Conclusion

Dans cette étude, nous avons observé les pratiques de trois enseignants de CP en séance de résolution de problèmes basiques afin d'identifier des gestes professionnels et des postures qu'ils mobilisent pour accéder à l'EPR de leurs élèves dans le but d'ajuster leur action. L'analyse des séances du corpus a mis en exergue la difficulté qu'ils rencontrent unanimement pour établir des justifications auprès de leurs élèves concernant le choix de la « bonne opération ». Tous y apportent des réponses plus ou moins adaptées qui se manifestent au travers de certains gestes professionnels didactiques. Quatre gestes spécifiques, déclinés de manière différente selon chaque enseignant, ont été mis en évidence : le recours ou non à des représentations du registre pictural ou du registre analogique, le geste dit de *reformulation congruente*, le geste de *conversion inverse* et celui de *vérification de conversion*. Ils sont cohérents dans les pratiques de ces enseignants et peuvent constituer à certaines conditions des leviers favorisant les apprentissages en jeu, c'est-à-dire être potentiellement pertinents. De plus, ces quatre gestes professionnels identifiés ici étoffent le cadre de Bucheton (2009) de gestes propres à l'enseignement des mathématiques. Le geste de *conversion inverse* ou celui de de *vérification de conversion* nous semblent par exemple pouvoir constituer les prémices de gestes de validation et de preuve.

Enfin, nous avons constaté la stabilité et la cohérence des pratiques de ces trois enseignants et nous avons également vu de quelle manière ces pratiques pouvaient être enrichies par des alternatives qui se dégagent des observations, des échanges et de la réflexion menés au sein d'un projet de recherche-action. Cette dynamique qui nait d'une démarche commune entre chercheurs et praticiens réunit les conditions nécessaires au déclenchement d'une conscientisation lisible dans les propos des enseignants et laisse également présager d'une évolution de leurs pratiques favorable pour les apprentissages des élèves.

Bibliographie

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée sauvage.

BRUNER, J. S. (1983). *Le développement de l'enfant : savoir faire, savoir dire.* PUF.

BUCHETON, D. (2009). *L'agir enseignant : des gestes professionnels ajustés.* Octarès Éditions.

BUCHETON, D., & SOULE, Y. (2009). Les gestes professionnels et le jeu des postures de l'enseignant dans la classe : un multi-agenda de préoccupations enchâssées. *Éducation et Didactique*, *3*(3), 29-48. https://journals.openedition.org/educationdidactique/543

BUCHETON, D., CARAYON, B., FAUCANIÉ, H., LAUX, S., & MOREL, F. (2015). Décrire les gestes professionnels pour comprendre des pratiques efficientes. *Le Français aujourd'hui*, *188*, 65-77. https://www.cairn.info/revue-le-francais-aujourd-hui-2015-1-page-65.htm

BUCHETON, D. (2019). *Les gestes professionnels dans la classe. Éthique et pratiques pour les temps qui viennent.* ESF Sciences humaines.

CATROUX, M. (2002) Introduction à la recherche-action : modalités d'une démarche théorique centrée sur la pratique. *Cahiers de l'Apliut, 23*(3), 8-20. https://journals.openedition.org/apliut/4276

CEBE, S., ET GOIGOUX, R. (2009). *Lector & Lectrix. Apprendre à comprendre des textes narratifs.* Retz.

DAVYDOV, V. (1975). Logical and psychological problems of elementary mathematics as an academic subject. Dans L.P. University (Dir.). *Soviet studies in the psychology of teaching and learning* (VII, pp. 55-107). National Science Foundation.

DESCAVES, A. (2000). *Optimath CP.* Hachette Éducation.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*, 37-61. http://centre-alain-savary.ens-lyon.fr/CAS/documents/documents-smd/registres-de-representation-semiotique-et-fonctionnement-cognitif-de-la-pensee-raymond-duval/view

DUVAL, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16*(3), 349-382. https://revue-rdm.com/1996/quel-cognitif-retenir-en/

FISCHER, J.-P. (1993). La résolution des problèmes arithmétiques verbaux : propositions pour un enseignement proactif, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*, 177-210.

HOUDEMENT, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, *100*, 59-78. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01902810/document

HOUDEMENT, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 67-96.

JOFFREDO-LE BRUN, S. (2020). Co-conception d'un curriculum en mathématiques au cp entre professeurs et chercheurs : une étude exploratoire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *40*(3), 269-318. https://revue-rdm.com/2020/co-conception-dun-curriculum-en-mathematiques-au-cp-entre-professeurs-et-chercheurs-une-etude-exploratoire/

JULO, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement.* Presses Universitaires de Rennes.

JULO, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N, 69,* 31-52. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/69n4_1555591199676-pdf

LEONTIEV, A. N. (1975). *Activité, conscience, personnalité.* Edition du progrès.

LEPLAT, J. (1997). *Regards sur l'activité en situation de travail.* PUF.

MAINGUENEAU, D. (2002). Problème d'ethos, *Pratiques, 57,* 113-114. https://www.persee.fr/doc/prati_0338-2389_2002_num_113_1_1945

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (M.E.N.) (2015). Arrêté du 9 novembre 2015 fixant les horaires d'enseignement des écoles maternelle et élémentaire. *JORF. n°0272 du 24-11-2015.*

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (M.E.N.) (2018). Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4). *B.O. n°30 du 26-7-2018.*

MUSQUER, A. (2009). Accéder à l'espace problème de recherche des élèves. Le cas de la résolution de problèmes arithmétiques. *Carrefours de l'éducation, 28*, 215-228. https://www.cairn.info/revue-carrefours-de-l-education-2009-2-page-215.htm

RILEY, M. S., GREENO, J. G. & HELLER, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. Dans H. P. Ginsburg (dir.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153-196). Academic Press.

ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Science and Technology Education, 4,* 505-528. https://www.researchgate.net/publication/232913077_Le_systeme_complexe_et_coherent_des_pratiques_des_enseignants_de_mathematiques_Une_double_approche

ROGALSKI, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *23*(3), 343-388. https://revue-rdm.com/2003/y-a-t-il-un-pilote-dans-la-classe/

SPERBER, D. (2003). L'étude anthropologique des représentations : problèmes et perspectives. Dans D. Jodelet (dir.), *Les représentations sociales* (pp. 133-148). Presses Universitaires de France, Sociologie d'aujourd'hui. http://www.dan.sperber.fr/wp-content/uploads/1989_l-etude-anthropologique-des-representations.pdf

VERGNAUD, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives. *Grand N*, *38*, 21-40. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/38n2_1563257743078-pdf

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2.3), 133-170. https://gerardvergnaud.files.wordpress.com/2021/09/gvergnaud_1990_theorie-champs-conceptuels_recherche-didactique-mathematiques-10-2-3.pdf

CARINE REYDY

INSPE de l'académie de Bordeaux, université de Bordeaux, Lab-E3D

carine.reydy@u-bordeaux.fr

Annexe : énoncés des problèmes posés par Paul, Céline et Angèle aux élèves

Paul

P1. Léa a invité 3 copines et 4 copains. Combien a-t-elle d'invités ?
P2. Anna a 7 billes dans ses poches. Elle en a 2 dans sa poche gauche. Combien en a-t-elle dans sa poche droite ?

Céline

C1. Dans ma famille, il y avait 3 enfants avec moi. Maman a eu un bébé. Combien sommes-nous d'enfants à présent ?
C2. Dans ma boite, j'ai déjà 8 perles dorées. Maman m'en donne 2 autres. Combien ai-je de perles maintenant ?
C3. Dans le coin autonomie de la classe, il y a 5 fiches de mathématiques et 4 fiches de lecture. Combien y a-t-il de fiches en tout ?
C4. Tu joues au jeu de l'oie. Tu as lancé le premier dé qui donne 6. Puis tu lances le deuxième dé qui indique 5. De combien de cases vas-tu avancer ?
C5. Mamie a planté des fleurs dans le jardin. Il y a une rangée de 9 tulipes et une rangée de 12 roses. Combien y a-t-il de fleurs au total ?
C6. Lucas a 17 images de football. Son copain lui en donne 6. Combien Lucas a-t-il d'images maintenant ?
C7. Il y a 9 jetons noirs et 4 jetons verts dans la boite. Combien de jetons y a-t-il en tout ?
C8. Manon donne 13 fleurs à sa mère. Sa maman en jette 2 qui sont fanées. Combien peut-elle en mettre dans le vase ?
C9. Pierre aide son père à planter des pieds de tomates. Il y en avait déjà 8, ils en ont planté 4. Combien y a-t-il de pieds de tomates au total ?

Angèle

A1. Charlotte a 8 biscuits dans son sac. Elle en mange 3. Combien lui en reste-t-il ?
A2. Un fermier a 6 vaches. Il y en a 2 qui sont marron et les autres sont noires et blanches. Combien a-t-il de vaches noires et blanches ?
A3. Maman a acheté 6 œufs. En les portant, elle en casse. En rentrant à la maison, il lui en reste 4. Combien d'œufs a-t-elle cassés ?
A4. Léa achète un livre à 4 € et une poupée à 4 €. Combien va-t-elle payer ?
A5. Dans notre cour, nous avons 8 bancs. Pendant la récréation, 3 bancs sont occupés par des enfants. Combien de bancs sont vides ?

CHARLOTTE DEROUET

CARACTERISATION DE DEMARCHES DE MODELISATION PROBABILISTE

Abstract. Characterisation of probabilistic modelling approaches. The modelling process is an essential part of any probabilistic approach. In this article, we propose three different categories of modelling approaches involving a probabilistic model that can be encountered in French secondary education: one based on the Laplacian approach to probability, another on the frequentist approach and the last one based on informal statistical inference. Based on the work of modelling of the German current, the objective of this article is to characterise the three categories of approaches and to identify what place and role statistics plays in these categories. The theoretical reflection is illustrated by an *a priori* analysis of examples of modelling problems. The characterisation is based on the different stages of the chosen modelling cycle and the associated working and model assumptions.

Keywords. Modelling, probability, statistics, Laplacian and frequentist approaches, informal statistical inference.

Résumé. La modélisation est un élément essentiel de toute démarche probabiliste. Dans cet article, nous proposons trois catégories différentes de démarches de modélisation faisant intervenir un modèle probabiliste pouvant être rencontrées dans l'enseignement secondaire français : l'une prenant appui sur l'approche laplacienne des probabilités, une autre sur l'approche fréquentiste et enfin la dernière relevant de l'inférence statistique informelle. S'appuyant sur les travaux autour de la modélisation du courant allemand, l'objectif est de caractériser les trois catégories de démarches et d'identifier quelle place et quel rôle joue la statistique dans ces catégories. La réflexion théorique est illustrée par une analyse *a priori* d'exemples de problèmes de modélisation. La caractérisation se fait en relation avec les différentes étapes du cycle de modélisation choisi et les hypothèses de travail et de modèle associées.

Mots-clés. Modélisation, probabilités, statistique, approches laplacienne et fréquentiste, inférence statistique informelle.

Les travaux de recherche en didactique des mathématiques sur l'activité de modélisation dans l'enseignement des mathématiques sont nombreux, notamment dans le cadre international. Le groupe d'étude pour la modélisation et les applications mathématiques ICTMA[1], affilié à la commission internationale de l'enseignement

[1] International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 27, p. 89 – 131.

mathématique (ICMI[2]), travaille depuis 1983 sur des questions en lien avec l'intégration de la modélisation et d'applications mathématiques dans les classes, de l'école primaire à l'université (par exemple Blum et al., 2007 ; Kaiser et al., 2011 ; Leung et al., 2021). En France, nous pouvons citer plusieurs travaux de recherche sur la modélisation mathématique en tant qu'objet d'apprentissage : la thèse de Rodriguez (2007) porte sur la démarche de modélisation en physique et en mathématiques et la récente thèse de Yvain-Prébiski (2018) sur le travail de mathématisation horizontale (Treffers, 1986) nécessaire pour envisager un traitement mathématique d'une situation ancrée dans le réel et de sa possible transposition dans les classes de collège et de lycée, dans le contexte des sciences du vivant. Des travaux ont aussi été menés autour des pratiques de modélisation et de la démarche de modélisation à l'école primaire (Cabassut et Wagner, 2011 ; Wozniak, 2012 ; Adjiage et Rauscher, 2013).

Dans cet article, nous nous focalisons sur le domaine des probabilités dans une perspective de modélisation probabiliste. Nous partageons le point de vue de Henry (1999) selon lequel « d'un point de vue didactique […] en probabilités, peut-être plus que dans d'autres domaines, les situations de modélisation sont essentielles » (Henry, 1999, p. 25). Les probabilités fournissent des outils pour modéliser des systèmes réels afin de comprendre et faire des prédictions sur ces modèles (par exemple, Henry, 2001a ; Chaput et al., 2011 ; Greer et Mukhopadhyay, 2005 ; Konold et Kazak, 2008). Des travaux internationaux ont montré l'importance de la modélisation probabiliste pour amener les étudiants vers une meilleure acculturation de la pensée probabiliste (Pratt, 2011). Pfannkuch et al. (2016) ont étudié les pratiques de sept professionnels utilisant des modèles probabilistes dans différents domaines (file d'attente/réseaux, écologie, probabilités, commerce, hydroélectricité, agriculture, gestion d'opérations) et ont dégagé des éléments pour caractériser la modélisation probabiliste et la pensée probabiliste. Ils concluent en disant que, pour développer au mieux la pensée probabiliste, il est important de trouver un équilibre entre l'utilisation de modèles théoriques, la construction de modèles empiriques et l'exploration des comportements des modèles (p. 34). Le potentiel de problèmes de modélisation pour construire de nouvelles notions probabilistes comme la fonction de densité a été illustré dans nos travaux (Derouet, 2019).

L'objectif de cet article est de caractériser différentes catégories de démarches de modélisation faisant intervenir des modèles probabilistes pouvant être rencontrées dans une classe de mathématiques de collège ou de lycée en France.

Dans une première partie, nous présenterons nos points d'appui théoriques concernant la modélisation mathématique, que nous préciserons ensuite de manière spécifique à la modélisation probabiliste. À l'issue de cette partie, nous formulerons

[2] International Commission on Mathematical Instruction.

nos questions de recherche. Les trois parties suivantes illustreront notre réflexion théorique sur la modélisation probabiliste. Puis nous dégagerons des éléments liés à la place de la statistique dans les différentes démarches. Enfin, nous conclurons cet article par une discussion et des perspectives.

1. Modélisation et probabilités

Dans cette partie, nous présentons les éléments théoriques sur lesquels s'appuie notre réflexion. Après avoir défini la modélisation mathématique et retenu un cycle de modélisation, nous précisons des éléments spécifiques à la modélisation probabiliste.

1.1. Modélisation mathématique

Dans cet article, nous définissons la modélisation mathématique comme « une démarche de construction d'un modèle en langage mathématique[3] permettant de mettre en relation les éléments choisis d'un fragment de réalité en lien avec la question à étudier » (Yvain-Prébiski, 2018). Par modèle, nous entendons « une interprétation abstraite, simplifiée et idéalisée d'un objet du monde réel, ou d'un système de relations, ou d'un processus évolutif issus d'une description de la réalité » (Henry, 2001b, p. 151). Cette définition distingue le modèle en tant que structure abstraite de la symbolique utilisée pour le décrire (Henry, 2001b). Comme dans les travaux autour de la modélisation du courant allemand (par exemple Kaiser (1995)), nous considérons les problèmes de modélisation comme des problèmes complexes et ouverts issus du monde réel.

1.2. Cycle de modélisation retenu

Comme l'a montré Yvain-Prébiski (2018) dans son travail de thèse, différents cycles décrivant le processus de modélisation se retrouvent dans la littérature, détaillant plus ou moins les différentes étapes constitutives du processus suivant les objectifs d'apprentissage visés dans les recherches. Dans cet article, nous prenons comme point de départ le cycle de modélisation (figure 1) proposé par Blum et Leiss (2007), qui complète le cycle de modélisation de Kaiser (1995). Ce cycle est, selon Hankeln et Hersant (2020), « reconnu comme le plus pertinent pour l'analyse cognitive. Il tient compte de travaux sur la modélisation en mathématiques appliquées (Pollak, 1979 ; Burghes, 1986), en linguistique (Kintsch et Greeno, 1985) et en psychologie cognitive (Staub et Reusser, 1995) » (p. 41).

---

[3] À comprendre : « exprimé dans un langage des mathématiques ».

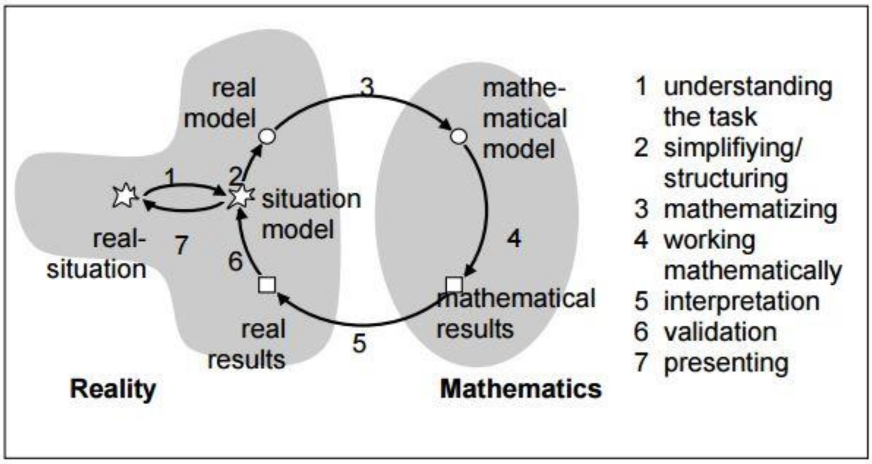


Figure 1. Le cycle de modélisation proposé par Blum et Leiss (2007)

Le point de départ du processus est une situation du monde réel, que le modélisateur (souvent l'élève dans notre contexte) lit et « comprend », qui va amener à la construction d'une représentation mentale de la situation réelle (Borromeo Ferri, 2006), appelé *situation model* que l'on pourrait traduire par modèle de situation ou encore situation générique (qui s'apparente à une situation modèle). La situation de départ, bien qu'issue du monde réel, comporte déjà des simplifications, car nous n'avons pas accès à l'intégralité des informations relatives à cette situation. Le réel est trop complexe et ne peut être appréhendé dans toute sa complexité. Un individu n'a finalement accès qu'à une partie du réel, sa réalité. Ensuite au niveau du modèle de situation (ou situation générique), la situation a été simplifiée pour ne garder que ce qui est important pour le modélisateur, au regard de la question qu'il se pose, d'où le caractère générique de la situation décrite à ce stade. Les simplifications sont plus ou moins automatiques, mais sont le fait de choix conscients ou non du modélisateur. La situation est ensuite idéalisée (2), simplifiée ou structurée pour obtenir un *real model* (Kaiser, 1995) traduit par modèle réel. Le modèle réel est mathématisé (3), c'est-à-dire traduit en langage mathématique pour obtenir un modèle mathématique de la situation de départ. Un traitement mathématique (4) entraîne des résultats mathématiques, interprétés en « résultats réels » (5) qui seront validés ou non par rapport au modèle de situation (6). Puis, si les résultats obtenus semblent cohérents, ils seront présentés comme prédictions sur la situation réelle (7).

En s'appuyant sur les travaux de Chevallard (1989) et Henry (1999), Coulange (1998)[4] propose, dans la démarche de modélisation, de séparer le domaine réel (extramathématique) du domaine mathématique par un troisième domaine, le domaine « pseudo-concret » :

> On appelle modèle pseudo-concret un *modèle intermédiaire* (en langage naturel ou éventuellement sous forme d'un schéma) entre la situation réelle et le modèle mathématique à construire. C'est en quelque sorte un premier niveau d'abstraction de la "réalité" invoquée, qui n'est d'ailleurs pas fixe la plupart du temps : […] un modèle pseudo-concret peut être plus ou moins proche de la situation réelle considérée ou du modèle mathématique à construire. (Coulange, 1998, p. 36).

Elle emprunte cette idée de « pseudo-concret » à Henry (1999) qui définit un modèle pseudo-concret comme « une sorte d'abstraction et de simplification de la réalité perçue dans sa complexité, dans la mesure où certains choix sont faits pour ne retenir que ce qui semble pertinent de cette situation vis-à-vis du problème étudié » (p. 28).

De cette description de la démarche de modélisation, nous retenons le domaine pseudo-concret et le modèle pseudo-concret qui nous paraissent plus appropriés que le terme *real model* dans les cycles de modélisation proposés par Kaiser (1995) ou Blum et Leiss (2007). Cela nous amène à considérer le cycle de modélisation en figure 2.

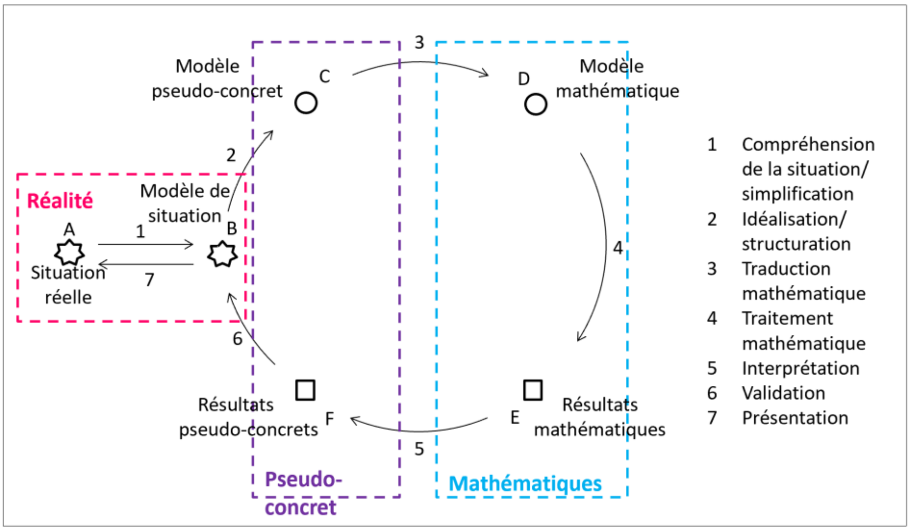


Figure 2. Cycle de modélisation retenu

[4] Dans son article, Coulange (1998) s'appuie sur les propos tenus par Henry lors d'une présentation au séminaire Didatech du 5 février 1997.

Pour préciser la distinction entre modèle pseudo-concret et modèle mathématique, nous reprenons Henry (2001b ; 2010) :

> [Le] modèle peut être représenté dans différents systèmes de signes : images, schémas, langages ou symbolismes, s'inscrivant dans différents registres de représentations, plus ou moins isomorphes.
>
> Par exemple, on peut représenter un modèle par une analogie, en y introduisant des objets idéalisés de la réalité. Cela veut dire que dans un vocabulaire courant, les objets du modèle sont doués de propriétés caractéristiques bien définies. Nous parlerons alors de modèles « pseudo-concrets ». C'est le cas notamment des modèles d'urnes en probabilités, où l'hypothèse implicite est l'équiprobabilité des boules dans un tirage « au hasard ».
>
> Parmi les différents registres de représentations, le langage et le symbolisme mathématiques permettent des descriptions puissantes sur lesquelles peuvent opérer des propriétés et des algorithmes généraux. Nous les appellerons « modèles mathématiques ». Souvent, ils nous sont tellement familiers que nous n'en voyons pas d'autres, et nous avons tendance à confondre ces représentations avec les objets idéaux en jeu, lesquels sont souvent confondus avec la réalité qu'ils modélisent. (Henry, 2001b, p. 152)

Il précise et illustre :

> Un modèle peut être présenté dans un vocabulaire courant renvoyant à des objets réels, mais qui dans le modèle sont doués de propriétés caractéristiques idéales et abstraites que j'appelle modèle pseudo-concret (Henry, 2001[b]). Ainsi une urne de Bernoulli est une abstraction d'une urne réelle, dans laquelle les boules sont de deux couleurs, mais pour le reste parfaitement identiques. Elles sont supposées rigoureusement équiprobables (hypothèse de modèle) dans un tirage « au hasard ». (Henry, 2010, p. 42-43)

Dans la suite, nous nous focaliserons sur une partie de la démarche de modélisation allant de la situation réelle, et de la question qui se pose, au modèle mathématique avec la reformulation mathématique de la question, puis au traitement mathématique de la question, sans nous intéresser au retour à la réalité[5]. Ces étapes de la démarche de modélisation renvoient aussi aux questions relatives à la mathématisation horizontale et à la mathématisation verticale que Yvain-Prébiski (2018) définit, en prenant appui sur Treffers (1986) et Freudenthal (1991), comme suit :

---

[5] Le retour à la réalité *via* la validation c'est-à-dire « l'évaluation du degré d'approximation des résultats théoriques obtenus avec les valeurs expérimentales correspondantes et la décision que le modèle est ou n'est pas bien adapté à la situation étudiée » (Henry, 2001b, p. 157) est une étape délicate qui nécessite des connaissances spécialisées des phénomènes étudiées (Henry, 2001b) d'où le fait qu'elle soit peu (voire pas du tout) rencontrée en classe.

> *La mathématisation horizontale* relève du choix d'un fragment de réalité, de l'identification et du choix de certains aspects de ce fragment de réalité susceptibles de relever d'un traitement mathématique puis de leur mise en relation en vue de construire un modèle mathématique. (p. 79)
>
> *La mathématisation verticale* relève du travail mathématique à l'intérieur « *du monde des symboles* », c'est-à-dire du traitement mathématique d'un problème mathématique. (p. 80)

Cependant, dans cet article, nous n'aborderons pas le processus de modélisation selon cette approche.

1.3. Modélisation probabiliste

Notre étude s'intéresse à la modélisation, mais plus particulièrement au cas où interviennent des modèles probabilistes. Selon Biehler (1994) :

> A major point is that the ontological debate of whether something 'is' deterministic or not may not be useful, rather, a situation can be described with deterministic and with probabilistic models and one has to decide what will be more adequate for a certain purpose. (p. 4)

La question est alors de savoir quand il est plus pertinent de choisir un modèle probabiliste plutôt que déterministe suivant l'objectif. Quand la situation réelle de départ s'appuie sur une expérience réelle dont :

– plusieurs résultats de cette expérience sont possibles,

– on ne peut ni prévoir *a priori*, ni calculer le résultat, notamment car celui-ci est très sensible aux conditions initiales,

on va alors préférer associer un degré de certitude que l'on peut avoir dans la réalisation des différents résultats possibles (Girard, 2001 ; Henry, 2003). Dans ce cas, on adopte une modélisation probabiliste (Pratt, 2011, p. 892) mettant en jeu tout d'abord une expérience aléatoire mathématique c'est-à-dire « un modèle d'expérience aléatoire » (Girard, 2001, p. 141).

1.3.1 Expérience aléatoire

Dans le cas de la modélisation probabiliste, le passage de la réalité aux domaines pseudo-concret puis mathématique repose immanquablement sur l'identification de l'expérience aléatoire. Pour Henry (2001c), la notion d'expérience aléatoire désigne « un processus réel de nature expérimentale, où le hasard intervient, avec des issues possibles bien identifiées » (p. 163). Il poursuit :

> On ne sépare donc pas la description d'une expérience aléatoire de la donnée de ces issues possibles que l'on va considérer. Ainsi, dans la nature, il n'y a pas d'expériences aléatoires, il y a des situations complexes ou des systèmes évolutifs (par

> exemple le jet d'une pièce de monnaie, mais aussi la situation météorologique, etc.) qui dépendent de manière sensible des conditions initiales, de telle sorte qu'on ne peut pas déterminer leurs évolutions, quels que soient les instruments d'observation et la puissance des outils de calcul. (Henry, 2001c, p. 163)

Henry (1997) met bien en évidence la distinction entre réalité et modèle en lien avec l'expérience aléatoire :

> Pour approfondir [la notion d'expérience aléatoire] on est immanquablement amené à séparer la description de situations réelles, des modèles simplifiés qui permettent de les mathématiser. (p. 55)

Henry (2001c) associe à la notion d'expérience aléatoire la notion de protocole expérimental, c'est-à-dire « le texte des instructions à respecter pour pouvoir affirmer que l'on a bien réalisé l'expérience aléatoire, objet de l'étude » (p. 164). Il précise ensuite qu'« une expérience aléatoire est donc la mise en œuvre dans des conditions expérimentales déterminées par un protocole, d'un processus évolutif pour un système matériel dont le comportement est sensible par rapport aux conditions initiales, de telle sorte que l'on ne peut prévoir son état en fin de parcours » (p. 164-165). Il distingue alors l'expérience « concrète », qui relève de la réalité, et l'expérience aléatoire « abstraite », qui sera donnée dans les mêmes termes naïfs de la réalité, mais qui cette fois revêt un sens plus précis en désignant des objets abstraits (Henry, 2001c, p. 166). Une expérience aléatoire peut être remplacée par une autre qui la représente génériquement, faisant intervenir des objets pseudo-concrets usuels comme la pièce de monnaie, le dé, les cartes à jouer… Ce passage au modèle pseudo-concret par le biais de choix à opérer sur le réel est guidé par un regard théorique, car il suppose des connaissances préalables (Henry, 2001c, p. 166). Ces choix opérés pour déboucher sur un modèle pseudo-concret correspondent à ce qu'Henry (2003) appelle hypothèses de travail.

1.3.2 Hypothèses de travail, hypothèses de modèle

Pour comprendre la démarche de modélisation qui permet d'analyser des situations réelles à l'aide de connaissances probabilistes théoriques, Henry (2003) distingue deux types d'hypothèses qui relèvent des choix à faire pour passer de la réalité au modèle mathématique : les hypothèses de travail et les hypothèses de modèle. Les hypothèses de travail, à relier au modèle pseudo-concret, permettent de définir l'expérience aléatoire en précisant notamment les résultats possibles et le protocole expérimental associé (Parzysz, 2009) dans un langage courant. Les hypothèses de modèle, à relier au modèle probabiliste théorique (modèle mathématique), permettent quant à elles de définir l'expérience aléatoire mathématique dans le langage probabiliste en termes d'issues, d'univers, de loi de probabilité, de variable aléatoire, de probabilité…[6]

1.3.3 Détermination des probabilités élémentaires

Dans le modèle mathématique, une fois l'expérience aléatoire décrite, il faut déterminer les probabilités élémentaires, c'est-à-dire les probabilités associées aux issues constituant l'univers, dont la somme est égale à 1. Selon Henry (2001c), « Il reste à préciser les conditions dans lesquelles les probabilités élémentaires sont déterminées. Elles relèvent d'hypothèses de modèle. Dans la pratique, on trouve trois catégories d'hypothèses » (p. 168). Le premier cas cité est le suivant :

> a- Le contexte de l'expérience aléatoire, les symétries des objets matériels utilisés, permettent de ramener tous les résultats à un ensemble n d'issues[7] qui sont considérées comme également possibles. On fait alors l'**hypothèse d'équiprobabilité**[8]. […] (ibid.)

Ce premier cas relève de l'approche laplacienne (ou classique) des probabilités, basée sur le premier principe de Laplace, qui postule une égalité de probabilité des événements élémentaires et qui consiste à définir la probabilité d'un événement associé à diverses issues comme le rapport du nombre de celles qui le produisent à leur nombre total[9] (Parzysz, 2011). Le modèle est créé *a priori*, sans nécessité de recourir à l'expérience réelle.

Le deuxième cas présenté par Henry (2001c) est le suivant :

> b- La complexité de l'expérience aléatoire ne permet pas de se ramener à un système d'issues équiprobables […]. On peut alors déterminer la probabilité de chaque issue ou événement en effectuant « un grand nombre de fois » l'expérience aléatoire, et en retenant pour valeur numérique de cette probabilité la **valeur des fréquences observées** de cette issue ou événement. (p. 168-169)

Ce deuxième cas relève de l'approche fréquentiste des probabilités. Cette dernière se rapporte à « une probabilité objective, résultant de nombreuses observations de [l'] événement » (Parzysz, 2011). Dans ce cas, à partir des fréquences observées, il existe en fait plusieurs possibilités pour choisir le modèle :

---

[6] Henry (2003) illustre sur plusieurs exemples la description des hypothèses de travail et de modèle, notamment sur l'exemple simple du lancer de dé (p. 6-7).

[7] Selon nous, lire : « de n issues ».

[8] Les mots en gras l'étaient dans le texte original.

[9] Cette probabilité se retrouve en faisant la somme des probabilités élémentaires.

– Soit on décide de prendre comme probabilité de chaque issue la valeur numérique de la fréquence obtenue (comme proposé ci-dessus par Henry, 2001c) ; mais alors, si on effectue une nouvelle fois « un grand nombre de fois » l'expérience aléatoire, on obtiendra une autre valeur ;

– Soit on décide de prendre une autre distribution « proche » de celle trouvée empiriquement, par exemple en prenant comme probabilité de chaque issue des rationnels simples ;

– Soit, si les réalisations peuvent laisser penser à un modèle d'équiprobabilité, on teste l'hypothèse d'équiprobabilité (test statistique) et, si on ne peut la récuser, on l'accepte *a posteriori*. Les tests statistiques ne sont cependant pas dans les programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire français.

Le modèle est créé à partir d'« un grand nombre » de réalisations de l'expérience réelle, donc d'un échantillon de taille aussi grand que choisi par le solveur.

Selon Henry (2001c), les fréquences observées « sont alors conçues comme mesures approximatives de cette probabilité, comme une mesure physique, avec le degré de précision souhaité suivant le nombre d'expériences que l'on consent d'effectuer » (p. 169). Cependant, selon nous, concevoir la fréquence observée comme une approximation de la valeur de la probabilité n'est pas de même nature que la mesure physique d'une grandeur spécifique. En effet, un objet physique a une masse (théorique) unique, on peut mesurer sa masse (grandeur mesurée), ce qui va donner une mesure physique avec un degré de précision. Un autre mesurage pourra donner une autre mesure. En revanche, la question de savoir si une punaise porte « en elle » la probabilité de tomber la pointe vers le haut, comme elle a une unique masse, est moins consensuelle. La probabilité appartient au modèle mathématique et non à la réalité.

Enfin, le troisième cas précisé par Henry (2001c) est le suivant :

> c- On reconnaît dans le processus expérimental une situation relevant d'un modèle standard. Dans ce modèle, les probabilités des issues sont réparties selon une **loi** connue qui dépend d'un ou plusieurs **paramètres**[10]. On **estime** alors ces paramètres à partir d'un **échantillon** de résultats obtenus en répétant l'expérience (estimation inférentielle), ce qui détermine entièrement la loi que l'on accepte alors comme **hypothèse de modèle**. Les probabilités élémentaires sont alors calculées à partir des données ou des propriétés mathématiques connues du modèle. (p. 169)

---

[10] Les paramètres sont quant à eux inconnus.

Dans ce troisième cas, l'approche est différente. En effet, il s'agit de créer un modèle[11] à partir d'un échantillon donné, de taille fixe, qui peut être plus ou moins grand, mais non contrôlable par le solveur. Le modèle peut être connu du solveur avec les paramètres inconnus à estimer (Henry, 2001c), mais il peut aussi être envisageable que le modèle soit entièrement à construire par le solveur en appui sur les propriétés mathématiques qu'il doit vérifier.

Dans ce cas, il s'agit d'une méthode de statistique inférentielle. Les méthodes d'inférence statistique permettent de tirer des conclusions sur des populations ou des processus à partir d'un échantillon de données (Zieffler et al., 2008). Zieffler et al. (2008) rappellent deux définitions de la statistique inférentielle :

> David Moore (2004) describes statistical inference as moving beyond the data in hand to draw conclusions about some wider universe, taking into account that variation is everywhere and the conclusions are therefore uncertain. Garfield and Ben-Zvi (2008) define statistical inference further by differentiating two important themes in statistical inference, parameter estimation and hypothesis testing, and two kinds of inference questions, generalization (from samples) and comparison and determination of cause (from randomized comparative experiments). In general terms, the first theme is concerned with generalizing from a small sample to a larger population, whereas the second involves determining whether a pattern in the data can be attributed to a real effect. (p. 41)

Dans notre cas, il s'agit du premier thème concernant la généralisation d'un petit échantillon à une (plus large) population.

Les concepts de statistique inférentielle, notamment d'estimation statistique, ne sont pas des attendus des programmes de l'enseignement secondaire français, cependant des méthodes informelles sont possibles. Au niveau international, des chercheurs travaillant sur l'enseignement de la statistique (*statistics education* en anglais) ont introduit et décrit l'inférence statistique informelle (*informal statistical inference*) (par exemple, Pfannkuch, 2005, 2006 ; Ben-Zvi, 2006 ; Zieffler et al., 2008). Zieffler et al. (2008) résume le cadre du raisonnement inférentiel informel (IIR, en anglais) en trois composantes :

> 1. Making judgments, claims, or predictions about populations based on samples, but not using formal statistical procedures and methods (e.g., p-value, t tests);
>
> 2. Drawing on, utilizing, and integrating prior knowledge (e.g., formal knowledge about foundational concepts, such as distribution or average; informal knowledge about inference such as recognition that a sample may be surprising given a particular claim; use of statistical language), to the extent that this knowledge is available; and

---

[11] Soit à partir d'un modèle connu dont les paramètres sont inconnus comme présenté dans Henry, 2001, mais il serait aussi envisageable de construire le modèle.

> 3. Articulating evidence-based arguments for judgments, claims, or predictions about populations based on samples.
>
> Note that this definition refers to IIR as a process for making inferences that does not utilize the formal methods of statistical inference described earlier and that may or may not include use of formal statistical concepts or language. (p. 45)

Les trois cas de figure décrits par Henry (2001c) sont à relier à trois approches différentes. Cela nous amène à considérer les trois catégories de démarches de modélisation probabiliste associées, toutes envisageables dans l'enseignement secondaire français[12]. Chacun des cas fait intervenir les probabilités et la statistique, mais avec des approches et/ou des rôles différents.

1.3.4 Relation entre probabilité et fréquence : la loi des grands nombres de Bernoulli

La loi des grands nombres, qui permet de justifier théoriquement la relation entre probabilité et fréquence, est depuis 2019 au programme de spécialité Mathématiques de terminale du lycée français, mais reste non abordable sous ses formes relatives à la théorie de la mesure pour des élèves du lycée. Le théorème de Bernoulli est quant à lui une version qui pourrait être accessible à des élèves, même avant la classe de terminale.

D'une urne de Bernoulli contenant t boules dont r blanches (fertiles) et s noires (stériles), on tire n boules avec remises et on compte le nombre de boules blanches obtenues (schéma binomial). D'après Pichard (2001), Bernoulli, dans son ouvrage *Ars Conjectandi*, formule ainsi son théorème :

> On peut concevoir des expériences en un nombre tel qu'il soit plus vraisemblable d'autant de fois que l'on veut […] que le nombre des observations fertiles soit au nombre de toutes les observations dans un rapport ni plus grand que $(r + 1)/t$, ni plus petit que $(r – 1)/t$. (p. 40)

En écrivant $r/t = p$ et $1/t = \varepsilon$,

> on peut exprimer ce théorème de la façon suivante avec des notations modernes : Soit A une issue possible d'une épreuve, de probabilité p. On répète n fois cette épreuve et on note F_n la fréquence de réalisations de A dans ces n épreuves.
>
> Alors pour toute valeur $1 – \alpha$ entre 0 et 1 et tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver n_0 assez grand tel que si $n > n_0$, on a : $P(|F_n – p| < \varepsilon) > 1 – \alpha$ ce qui signifie que la suite de variables aléatoires F_n tend « en probabilité » vers la valeur p de la probabilité. (Pichard, 2001, p. 39)

[12] Dans le cadre des nouveaux programmes de mathématiques du lycée français de 2019 (enseignement scientifique et option mathématiques complémentaires, de terminale), l'approche bayésienne serait aussi à considérer, mais nous ne le faisons pas dans cet article.

On peut aussi le traduire ainsi :

Si l'on répète une même expérience aléatoire un nombre n de fois assez grand, alors pour tout $\alpha > 0$ et tout $\varepsilon > 0$ aussi petits que l'on veut, la probabilité que la fréquence observée F_n d'un événement de probabilité p soit comprise entre $p - \varepsilon$ et $p + \varepsilon$ est supérieure à $1 - \alpha$: $P(p - \varepsilon < F_n < p + \varepsilon) > 1 - \alpha$.

$1 - \alpha$ est alors le niveau de confiance de l'estimation de p par F_n. En fin de compte, la suite des fréquences tend probablement vers la probabilité.

La loi des grands nombres aussi peut jouer un rôle dans la démarche de modélisation probabiliste, que nous allons interroger en lien avec la place de la statistique.

2. Objectifs et questions de recherche

L'objectif de cet article est de caractériser les trois catégories de démarches de modélisation probabiliste présentées dans la section 1.3.3, à savoir les démarches :

a) prenant appui sur l'approche laplacienne des probabilités,

b) prenant appui sur l'approche fréquentiste,

c) relevant de l'inférence statistique informelle.

Ces trois démarches peuvent être rencontrées dans l'enseignement secondaire français et seront étudiées dans ce contexte[13].

Nous pouvons formuler les deux questions de recherche suivantes :

– QR1 : Dans le cadre de notre cycle de modélisation, comment caractériser chacune de ces trois catégories de démarches de modélisation probabiliste ?

– QR2 : Quelle place tient la statistique et quel rôle joue-t-elle dans les trois catégories de démarches de modélisation probabiliste considérées ?

La réflexion théorique sera illustrée par une analyse *a priori* d'exemples de problèmes de modélisation « complexes », dans le sens où le modèle mathématique à étudier n'est pas connu à l'avance des élèves. Il ne s'agit donc pas, par exemple, de se limiter à une situation réelle de lancer d'un dé. La caractérisation se fera en s'appuyant sur les différentes étapes du cycle de modélisation et, en particulier, sur les trois domaines (réalité, domaine pseudo-concret, domaine des mathématiques) et les hypothèses de travail et de modèle associées.

[13] Nous rappelons que l'approche bayésienne pourrait être considérée dans le cadre des nouveaux programmes de lycée de 2019.

3. Modélisation probabiliste et approche laplacienne

L'exemple choisi pour illustrer cette première catégorie de démarches de modélisation probabiliste est le problème de la rencontre qui a déjà été étudié dans le cadre d'une ingénierie didactique (Derouet et Alory, 2018 ; Derouet, 2019), sous un autre angle que celui de la modélisation probabiliste. Nous en proposons ici une description légèrement différente pour mettre en évidence toutes les étapes du cycle de modélisation, en partant autant que possible d'une situation réelle.

3.1. Description de la situation réelle (A)

> Deux amis, Karine et Olivier, se donnent rendez-vous au café de la gare de Strasbourg demain entre 7h et 8h.

De cette situation réelle, plusieurs questions peuvent émerger, notamment : Qui arrivera le premier ? Combien de temps va attendre le premier arrivé ?...

Nous nous intéresserons ici à la question :

> Combien de temps va attendre le premier arrivé ?

Étant donné que l'on considère une situation réelle, on pourrait chercher à avoir des informations complémentaires concernant cette situation : Quand et d'où partent Karine et Olivier avant de venir au café ? Par quels moyens de transport vont-ils se rendre au café ? Ont-ils un train à prendre après ? Sont-ils connus pour être ponctuels ou souvent en retard ?...

3.2. Modèle de situation

Nous considérons que nous n'avons accès à aucune autre information sur cette situation. De cette situation réelle, dont on ne connait finalement qu'un fragment de réalité, on peut en tirer un modèle de situation, pour laquelle on se pose une question. Par exemple :

> Karine et Olivier (personnages fictifs) se donnent rendez-vous au café de la gare entre 7h et 8h. Combien de temps va attendre le premier arrivé ?

Cette description de la réalité est déjà une simplification de la situation réelle, ne prenant en compte que certains éléments constitutifs de la situation réelle.

L'expérience « concrète » repose sur les instants d'arrivées de Karine et d'Olivier (Karine et Olivier étant des personnages dont les prénoms importent peu).

3.3. Modèle pseudo-concret

Dans ce modèle de situation retenu, le temps d'attente du premier arrivé ne peut pas être prévu même si l'on répète l'expérience réelle une deuxième fois « dans les mêmes conditions » ; c'est cela qui rend cette expérience aléatoire (Girard, 2001, p. 141), d'où le fait de proposer une modélisation probabiliste de la situation. Bien que nous ne soyons pas encore dans le domaine mathématique, cette perspective d'un modèle probabiliste va guider la construction du modèle pseudo-concret. Henry (2001c) parle du « regard théorique », qui oriente les choix pour décrire l'expérience aléatoire que l'on va considérer, dans une perspective de traitement mathématique de la situation.

En effet, lorsque l'on définit un modèle pseudo-concret, on fait des choix pour simplifier et idéaliser le problème. Cela sous-entend que d'autres choix pourraient être faits et amener à d'autres modèles pour la même situation réelle de départ. Plusieurs options sont possibles (associés à des hypothèses de travail différentes), mais certains des choix doivent être guidés par un regard théorique (Henry, 2001c) sur la situation, lié aux connaissances mathématiques disponibles pour l'élève. Par exemple, ici, il va être pertinent de considérer que les personnages puissent arriver à n'importe quel instant indifféremment entre 7h et 8h, non pas parce que cela colle bien à la réalité, mais plutôt, car cela pourra amener à un modèle mathématique disponible pour les élèves, à savoir la loi uniforme. Il serait possible d'envisager de prendre en compte, par exemple, le trait de caractère ponctuel ou retardataire des personnages (en reconsidérant peut-être le modèle de situation), mais il serait ensuite moins aisé de faire concorder un modèle probabiliste disponible pour les élèves, au niveau de l'enseignement secondaire.

Dans le tableau 1, nous présentons des hypothèses de travail (Henry, 2003) et un protocole d'expérience (Parzysz, 2009) permettant de décrire l'expérience aléatoire mathématique choisie, dans le but de garantir que « la description des conditions de l'expérience détermine celle-ci de façon précise et suffisante pour en garantir l'unicité » (Girard, 2001, p. 142).

On considère que les instants d'arrivée des deux personnages ne peuvent être prédits, car ils sont soumis à trop de conditions non connues. D'où le fait que l'on étudiera cette situation à l'aide d'un modèle probabiliste.

Les deux premières hypothèses, H1 et H2, définissent le protocole expérimental et la troisième les résultats possibles. Nous avons ainsi défini l'expérience aléatoire pseudo-concrète. Nous pourrions envisager un retour dans la « réalité » via le modèle de situation, pour produire et reproduire autant de fois que l'on veut cette expérience dans le « monde réel ». Cependant ce monde réel serait fortement contrôlé par le domaine pseudo-concret. Nous pouvons considérer qu'il y a ici un chevauchement entre la réalité et le domaine pseudo-concret.

Tableau 1. Hypothèses de travail du problème de la rencontre

Modèle pseudo-concret
Hypothèses de travail
H1 : On considère que Karine ou Olivier arrive lorsqu'il ou elle franchit la porte du café.
H2 : Si Karine ou Olivier arrive avant 7h ou après 8h, l'expérience est annulée.
H3 : L'instant d'arrivée de Karine ou Olivier est donné de la forme 7h et *n* minutes ou 8h.
H4 : Karine et Olivier peuvent arriver à n'importe quel instant, indifféremment entre 7h (inclus) et 8h (inclus). L'instant d'arrivée de l'un n'influence pas l'instant d'arrivée de l'autre.
H5 : Le temps d'attente du premier arrivé commence quand le premier arrive au café. Karine et Olivier se rencontrent (donc le premier n'attend plus) lorsque le second franchit la porte du café.

Pour revenir sur les choix possibles, pour l'hypothèse H1, nous aurions pu faire un autre choix en considérant que Karine ou Olivier arrive lorsqu'il ou elle s'assoit à une table. Pour l'hypothèse H2, nous pourrions considérer que les personnages puissent arriver en avance ou en retard et élargir le créneau possible des instants d'arrivées. Dans le protocole, nous pourrions considérer en H3 que l'instant d'arrivée est de la forme 7h *n* minutes et *m* secondes.

Comme mentionné plus tôt, le choix fait dans l'hypothèse H4, « à n'importe quel instant, indifféremment entre 7h et 8h », est guidé par le « regard théorique », qui mènera dans le domaine mathématique à un modèle de répartition uniforme de la probabilité. De même, il a été choisi de s'intéresser aux instants d'arrivées de Karine et Olivier et non aux instants d'arrivées du premier et du second. En effet, dans le second cas, l'instant d'arrivée du second arrivé dépend de l'instant d'arrivé du premier, ce qui rendra le traitement mathématique plus complexe et même impossible au niveau de l'enseignement secondaire ; ce qui n'est pas le cas lorsque l'on considère les instants d'arrivées de Karine et Olivier, qui eux sont indépendants l'un de l'autre.

3.4. Modèle mathématique, traitement mathématique

La traduction du modèle pseudo-concret en modèle mathématique s'appuie notamment sur la connaissance de modèles de référence (loi uniforme, loi de Bernoulli, loi exponentielle…), qui ne sont pas forcément connus des élèves au moment considéré. La traduction mathématique peut donc se faire à travers différents registres de représentation sémiotique (langage naturel, registre symbolique des probabilités, registre des tableaux…), mais aussi suivant différents modèles. Par exemple, ici, nous pouvons associer au modèle pseudo-concret un modèle discret ou un modèle continu. Ces différents possibles dépendront notamment des connaissances mathématiques des élèves.

3.4.1 Modèle discret

Nous allons dans cette section considérer un modèle où le temps est discret. À partir des hypothèses de travail choisies dans le tableau 1, nous arrivons aux hypothèses de modèle suivantes (tableau 2).

Une fois ces hypothèses posées, il faut reformuler la question « combien de temps va attendre le premier arrivé ? » pour qu'elle puisse être abordée par un traitement mathématique dans le modèle choisi. Cette question peut être :

> Quelle est la probabilité que le premier arrivé attende entre a et b minutes ? (avec a et b deux nombres entiers compris entre 0 et 60)

Ou encore, dans un autre registre de représentation sémiotique (Duval, 1993), elle peut être reformulée :

> Quelle est la probabilité $P(a \leq T \leq b)$ pour tous a et $b \in \{0 ;… ;60\}$ tels que $a \leq b$?

Cette question pourra alors être traitée mathématiquement avec des outils mathématiques mobilisant différents registres de représentation sémiotique, mais toujours dans le même modèle. Par exemple, nous pouvons envisager une résolution dans le registre des tableaux à double entrée (figure 3) ou encore dans le registre symbolique des probabilités. Le registre des arbres de probabilités n'est en revanche pas très efficace dans ce modèle (l'arbre sera vite illisible et donc inexploitable). Un autre traitement mathématique (au niveau de l'enseignement secondaire en France) serait de travailler à partir de simulation informatique. Nous détaillerons le travail mathématique dans ce cadre dans le cas continu.

Tableau 2. Hypothèses de modèle du problème de la rencontre (cas discret)

<table>
<tr><th>Modèle pseudo-concret</th><th>Modèle mathématique</th></tr>
<tr><td>Hypothèses de travail</td><td>Hypothèses de modèle</td></tr>
<tr><td>H1</td><td rowspan="3">On considère l’expérience aléatoire composée de deux épreuves décrivant l’arrivée de Karine et l’arrivée d’Olivier (épreuves identiques et indépendantes). Dans cette expérience aléatoire, on s’intéresse aux caractères : « instant d’arrivée de Karine » et « instant d’arrivée d’Olivier »[14].
On considère le temps discret (à la minute près). Cette hypothèse relève du modèle mathématique.
L’univers considéré est : Ω = {7h00 ; 7h01 ; 7h02 ; … ; 7h59 ; 8h00}×{7h00 ; 7h01 ; 7h02 ; … ; 7h59 ; 8h00} (61^2 éléments)
[On note Ω_K et Ω_O les ensembles des issues possibles des épreuves respectivement « instant d’arrivée de Karine » et « instant d’arrivée d’Olivier ». $\Omega_K = \Omega_O$ = {7h00 ; 7h01 ; 7h02 ; … ; 7h59 ; 8h00}. On a donc $\Omega = \Omega_K \times \Omega_O$]</td></tr>
<tr><td>H2</td></tr>
<tr><td>H3</td></tr>
<tr><td>H4</td><td>Les 61 issues possibles de $\Omega_{i\in\{K;O\}}$ sont supposées toutes équiprobables. La probabilité est distribuée sur $\Omega_{i\in\{K;O\}}$ suivant la loi représentée par le tableau :
<table><tr><td>$w_{i,j}$</td><td>7h00</td><td>7h01</td><td>7h02</td><td>…</td><td>7h59</td><td>8h00</td></tr><tr><td>$p_{i,j}$</td><td>1/61</td><td>1/61</td><td>1/61</td><td>…</td><td>1/61</td><td>1/61</td></tr></table>Dans le modèle probabiliste, on peut numériser ces issues en introduisant une variable aléatoire $X_{i\in\{K;O\}}$, définie sur $\Omega_{i\in\{K;O\}}$, à valeurs dans {0 ; 1 ; … ; 60} et dont la loi est donnée par les probabilités élémentaires p = 1/61. X_i suit une loi uniforme (discrète) sur {0 ; 1 ; … ; 60}.</td></tr>
<tr><td>H5</td><td>On considère la variable aléatoire $T = \mid X_K - X_O \mid$, correspondant au temps d’attente du premier arrivé :
T : $\Omega \to \{0 ; \ldots ; 60\}\times\{0 ; \ldots ; 60\} \to \{0 ; \ldots ;60\}$
$(w_{K,j} ; w_{O,j}) \to (x_{K,j} ; x_{O,j}) \to \lvert x_{K,j} - x_{O,j} \rvert$</td></tr>
</table>

[14] Comme précisé dans la section précédente, nous choisissons de considérer l’expérience aléatoire rattachée aux instants d’arrivées de Karine et Olivier, qui sont des épreuves indépendantes, plutôt que de considérer les instants d’arrivées du premier arrivé puis du second, qui sont, elles, des épreuves dépendantes. En effet, sinon, le traitement mathématique ne serait pas envisageable, même au niveau de la classe de terminale.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
2	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58
3	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57
4	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
5	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
6	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
7	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
8	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
10	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
11	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
12	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
13	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
14	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
15	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45
16	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44
17	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
18	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
19	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41
20	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
21	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
22	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
23	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
24	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
25	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
26	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
27	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
28	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
29	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
30	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
32	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
33	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
34	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
35	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
36	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
37	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
38	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
39	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
40	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
41	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
42	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
43	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
44	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
45	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
46	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
47	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
48	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
49	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
50	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
51	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
52	52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
53	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
54	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6
55	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5
56	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4
57	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3
58	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2
59	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1
60	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Figure 3. Tableau à double entrée représentant le temps d'attente du premier arrivé

Pour déterminer les probabilités à l'aide de ce tableau à double entrée, étant donné que toutes les issues possibles de l'expérience aléatoire sont équiprobables, nous pouvons utiliser la formule de Laplace pour déterminer $P(T = k)$, pour tout $k \in \{0 ; \dots ; 60\}$. On a alors :

$$P(T = k) = \textit{nombre de cas favorables} \,/\, \textit{nombre de cas possibles}.$$

Il s'agit alors ensuite d'un problème de dénombrement pour déterminer pour chaque k le nombre de cas favorables. Pour cela, on peut s'appuyer sur des considérations de symétries. On obtient : $P(T = 0) = 61/61^2 = 1/61$ et

$$\forall\, k \in \{1 ; \dots ; 60\},\ P(T = k) = (2(61 - k)) / 61^2.$$

Nous rappelons qu'une arrivée après 8h est exclue. Cela nous permet ensuite de déterminer la probabilité $P(a \leq T \leq b)$ pour tous a et $b \in \{0 ; \ldots ; 60\}$.

3.4.2. Modèle continu

Nous allons dans cette section choisir un modèle où le temps est continu. À partir des hypothèses de travail considérées dans le tableau 1, nous arrivons aux hypothèses de modèle suivantes (tableau 3).

Tableau 3. Hypothèses de modèle du problème de la rencontre (cas continu)

Modèle pseudo-concret	**Modèle mathématique**
Hypothèses de travail	*Hypothèses de modèle*
H1 H2 H3	On considère l'expérience aléatoire composée de deux épreuves décrivant l'arrivée de Karine et l'arrivée d'Olivier (épreuves identiques et indépendantes). Dans cette expérience aléatoire, on s'intéresse aux caractères : « instant d'arrivée de Karine » et « instant d'arrivée d'Olivier ». On considère le **temps continu**. Cette hypothèse relève du modèle mathématique. L'univers considéré est : $\Omega = [7h ; 8h] \times [7h ; 8h]$ On note Ω_K et Ω_O les ensembles des issues possibles des épreuves respectivement « instant d'arrivée de Karine » et « instant d'arrivée d'Olivier ». $\Omega_K = \Omega_O = [7h ; 8h]$
H4 H4' : Karine et Olivier peuvent arriver à tout instant entre 7h n minutes et 7h n + 1 minutes avec « autant de chance », etc.	Dans le modèle probabiliste, on peut numériser ces issues en introduisant une variable aléatoire $X_{i \in \{K;O\}}$, définit sur Ω_i, à valeurs dans [0 ; 1] et dont X_i suit une loi uniforme (continue) sur [0 ; 1].
H5	On considère la variable aléatoire $T = \mid X_K - X_O \mid$, correspondant au temps d'attente du premier arrivé : $T : \Omega \rightarrow [0 ; 1] \times [0 ; 1] \rightarrow [0 ; 1]$ $(w_{K,j} ; w_{O,j}) \rightarrow (x_{K,j} ; x_{O,j}) \rightarrow \mid x_{K,j} - x_{O,j} \mid$

Dans ce modèle mathématique, la question peut être posée de cette façon :

> Quelle est la probabilité que le premier arrivé attende entre a et b heure ? (avec a et b deux réels compris entre 0 et 1)

Ou encore, dans un autre registre de représentation sémiotique (Duval, 1993), elle peut être reformulée ainsi :

> Quelle est la probabilité $P(a \leq T \leq b)$ pour tous a et $b \in [0 ; 1]$ tels que $a \leq b$?

Théoriquement, la loi de T découle de la loi du couple de variables aléatoires uniformes indépendantes X_K et X_O, que l'on obtient par double intégration. Cependant, ces connaissances mathématiques ne sont pas disponibles chez les élèves du lycée. Plusieurs traitements mathématiques mobilisant des cadres différents (Douady, 1986), cadre probabiliste ou cadre géométrique (figure 4), ou registres différents, comme le registre symbolique probabiliste ou le registre du langage tableur, sont envisageables au niveau lycée. Sur la même idée que le tableau à double entrée dans le cas discret (figure 3), une résolution géométrique avec un travail sur les aires est envisageable (figure 4).

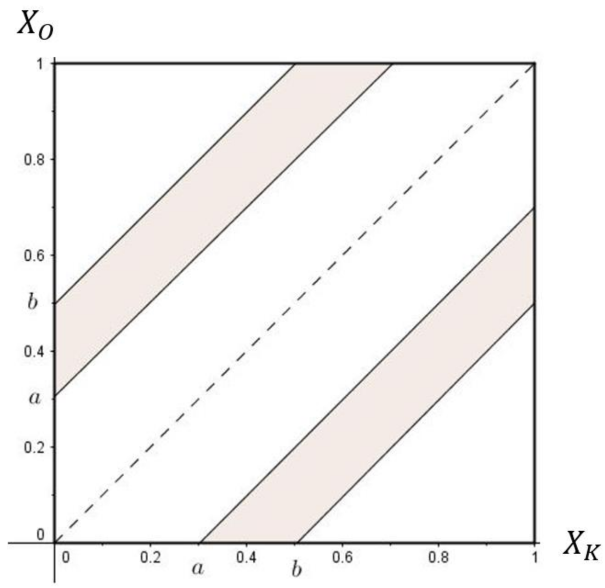


Figure 4. Résolution géométrique (Alory et Derouet, 2018)

Une résolution prenant appui sur la simulation informatique est possible, donc avec un passage par le cadre statistique. À l'aide de la commande =ABS(ALEA() − ALEA()) sur le tableur, on peut simuler des réalisations de la variable aléatoire T.

À partir de cette simulation, nous pouvons représenter les données statistiques obtenues sous forme d'un histogramme (figure 5).

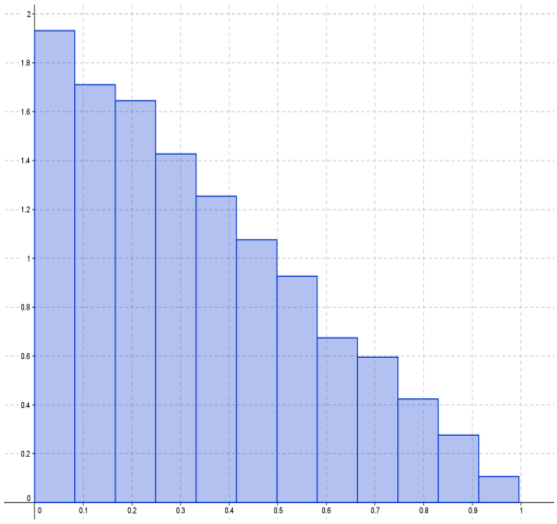


Figure 5. Histogramme d'un échantillon de taille 10 000 avec des classes d'amplitude 5 minutes (Alory et Derouet, 2018)

En appui sur la loi faible des grands nombres[15], le haut de l'histogramme représentant un grand nombre de réalisations de la variable aléatoire T se rapproche de la courbe représentative de la fonction de densité de probabilité f de la variable aléatoire T. En utilisant notamment le fait que l'aire sous la courbe d'une fonction de densité est égale à 1 et en s'appuyant sur l'histogramme, un travail mathématique permet d'arriver au fait que f est la fonction affine définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = 2 - 2x$ (Derouet et Alory, 2018 ; Derouet, 2019). Connaître f permet alors de calculer $P(a \leq T \leq b) = \int_a^b f(x)dx$, pour tous a et $b \in [0 ; 1]$.

La simulation d'un grand nombre de réalisations des instants d'arrivées des deux personnages permet d'obtenir des fréquences permettant d'approcher les probabilités qui nous intéressent grâce à la loi des grands nombres (plus précisément dans sa forme particulière et simplifiée du théorème de Bernoulli). Ici, grâce à d'autres considérations qualitatives, il est possible de déterminer complètement la loi de T.

[15] Se reporter au théorème de Bernoulli à la section 1.3.4.

4. Modélisation probabiliste et approche fréquentiste

Les expériences classiques pour illustrer l'approche fréquentiste sont le lancer de punaise, le lancer d'osselets, le lancer de capsules de bouteilles… Pour complexifier un peu la situation de départ, nous allons nous intéresser au lancer de deux punaises.

4.1. Description de la situation réelle (A)

Nous partons de la situation réelle suivante, que nous appellerons le problème des trois sœurs :

> Alice, Elya et Juliette sont trois sœurs. Elles doivent mettre la table. Elles décident de jouer à un jeu de hasard pour décider laquelle d'entre elles mettra la table. Alice propose :
>
> « Je vais lancer ces deux punaises de bureau :
>
> Si les deux punaises ont la pointe vers le haut, je mets la table ;
>
> Si les deux punaises ont la pointe qui touche le sol, Elya met la table ;
>
> Si les deux punaises s'arrêtent dans des positions différentes (une la pointe vers le haut, l'autre la pointe touchant le sol), Juliette met la table.
>
> Êtes-vous d'accord ? »
>
> Juliette dit qu'elle n'est pas d'accord, car elle a beaucoup plus de risque de mettre la table que les autres et qu'Alice a peu de chance de la mettre.
>
> Qu'en pensez-vous ?

4.2. Modèle de situation

Nous n'avons pas connaissance ici des caractères de chacune des trois sœurs ni d'autres informations plus personnelles que nous pourrions prendre en compte. On peut donc considérer que les personnes en question et le contexte (dresser la table) n'ont pas d'importance dans la situation. Seul le jeu est à questionner. Le problème pourrait finalement être :

> Lorsqu'on lance deux punaises, y a-t-il beaucoup plus de chance que les deux punaises s'arrêtent dans des positions différentes, plutôt que les deux s'arrêtent dans la même position ?

4.3. Modèle pseudo-concret, modèle mathématique, traitement mathématique

4.3.1 Modèle 1

Nous présentons un premier modèle possible à partir d'hypothèses détaillées (tableau 4).

Tableau 4. Hypothèses de travail et hypothèses de modèle du problème des trois sœurs

<table>
<tr><th>Modèle pseudo-concret</th><th>Modèle mathématique</th></tr>
<tr><td>Hypothèses de travail</td><td>Hypothèses de modèle</td></tr>
<tr><td>H1 : On prend deux punaises de la même fabrication, sans défauts apparents. On considère les punaises indiscernables.</td><td rowspan="4">On considère l'expérience aléatoire du lancer simultané de deux punaises. Dans cette expérience aléatoire, on s'intéresse au caractère « positions d'arrivée des deux punaises ».

L'univers considéré est :

$\Omega = \{HH\,;\, SS\,;\, SH\}$ (H correspond à une punaise qui s'arrête la pointe vers le haut ; S la pointe touchant le sol). Remarque : SH correspond aux punaises qui ont chacune une position différente (SH est équivalent à HS).</td></tr>
<tr><td>H2 : On lance par terre simultanément les deux punaises, suffisamment fort. Dans ces conditions, on ne peut pas anticiper leurs positions d'arrêt.</td></tr>
<tr><td>H3 : Une fois arrêtées, on note les positions des deux punaises.</td></tr>
<tr><td>H4 : Une punaise peut s'arrêter soit la pointe vers le haut, soit avec la pointe touchant le sol (ce sont les deux seules positions possibles). Les positions d'arrivées des deux punaises sont soit : les deux ont la pointe vers le haut, les deux ont la pointe qui touche le sol ou les deux punaises ont une position différente. On ne distingue pas quelle punaise est dans quelle position en vertu de H1.</td></tr>
</table>

La question est alors :

> Quelles sont les probabilités élémentaires associées à cette expérience aléatoire ?

En comparant ces probabilités, nous pourrons avoir des éléments pour analyser le jeu.

Étant donné qu'aucune symétrie dans les résultats ne peut être prise en compte *a priori* pour les objets « punaises », il n'est pas possible de considérer une approche laplacienne. Une fois le protocole expérimental établi (H1, H2, H3), il est possible de revenir dans la « réalité » pour simuler matériellement un grand nombre de fois le lancer de deux punaises comme décrit et de prendre note des résultats des différentes réalisations.

Après 5000 lancers de deux punaises, avec deux punaises du monde réel, dans le cadre d'une expérience du monde pseudo-concret, nous avons obtenu les fréquences d'apparition suivantes : $f(HH) \approx 0{,}3684$; $f(SS) \approx 0{,}1506$; $f(SH) \approx 0{,}4810$.

On peut alors décider de poser les probabilités élémentaires suivantes (les fréquences arrondies à 10^{-2} près) :

w_i	*HH*	*SS*	*SH*
p_i	0,37	0,15	0,48

On a alors : la probabilité $P(SH)$ est un peu plus de 3 fois plus grande que la probabilité $P(SS)$, tandis que $P(HH) \approx 2{,}5\ P(SS)$.

4.3.2 Modèle 2

Nous pourrions envisager un autre protocole expérimental et donc un autre modèle (tableau 5).

Avec ces considérations, nous pouvons considérer un « sous-protocole expérimental », celui associé à l'épreuve « lancer d'une punaise » :

H1' : On prend une punaise d'un certain modèle.

H2' : On lance par terre la punaise suffisamment fort.

H3' : Une fois arrêtée, on note la position de la punaise.

Cela nous permet de simuler matériellement un grand nombre de fois le lancer de punaise.

Après 5000 lancers de la même punaise, nous obtenons une fréquence d'apparition de la pointe de 0,3812. Bien entendu 5000 autres lancers donneraient une fréquence différente, mais espérée proche. Nous sommes ici entre « réalité » et pseudo-concret. Cette fréquence est issue d'expérimentations sur un objet matériel de la « réalité », qui ont été guidées par des considérations et des choix dans le monde pseudo-concret.

Tableau 5. Deuxième proposition d'hypothèses de travail et hypothèses de modèle du problème des trois sœurs

<table>
<tr><th>Modèle pseudo-concret</th><th>Modèle mathématique</th></tr>
<tr><td>Hypothèses de travail</td><td>Hypothèses de modèle</td></tr>
<tr><td>H1 : On prend deux punaises de la même fabrication, sans défauts apparents, mais de couleur différente (par exemple une verte et une jaune). On considère les punaises identiques mis à part la couleur.</td><td rowspan="5">On considère l'expérience aléatoire du lancer simultané de deux punaises (de couleur différente), qui se décompose en deux épreuves simultanées, mais indépendantes : le lancer de punaise verte et le lancer de punaise jaune. Dans cette expérience aléatoire, on s'intéresse au caractère « position d'arrivée des deux punaises », composé de la « position d'arrivée de la punaise verte » et de la « position d'arrivée de la punaise jaune ». En considérant que la position d'arrivée d'une punaise est indépendante de la couleur de celle-ci, on peut dire que l'expérience aléatoire du lancer simultané de deux punaises est composée de deux épreuves identiques et indépendantes de lancer d'une punaise.

L'univers considéré de l'expérience aléatoire est :

$\Omega = \{(H,H) ; (H,S) ; (S,H) ; (S,S)\}$
Remarque : la première coordonnée correspond au résultat de la punaise verte et la deuxième au résultat de la punaise jaune.

L'univers de l'épreuve « lancer d'une punaise » est :

$\Omega' = \{H ; S\}$

Il s'agit d'une épreuve de Bernoulli de paramètre inconnu qui reste à déterminer.</td></tr>
<tr><td>H2 : On lance par terre simultanément les deux punaises, suffisamment fort. Dans ces conditions, on ne peut pas anticiper leurs positions d'arrêt.</td></tr>
<tr><td>H3 : Une fois arrêtées, on note la position de la punaise verte puis celle de la punaise jaune.</td></tr>
<tr><td>H4 : Une punaise peut s'arrêter soit la pointe vers le haut, soit avec la pointe touchant le sol (ce sont les deux seules positions possibles). Les positions d'arrivée des deux punaises sont soit : les deux ont la pointe vers le haut, les deux ont la pointe qui touche le sol ou les deux punaises ont une position différente.</td></tr>
<tr><td>H5 : Le résultat d'une punaise n'influence pas celui de l'autre.</td></tr>
</table>

Nous allons utiliser cette fréquence pour construire le modèle mathématique. Comme présenté dans la section 1.3.3, plusieurs choix sont envisageables. Nous décidons ici de poser $P(S)$ = 0,4 (la fréquence trouvée arrondie au dixième), notamment pour simplifier les calculs. On pourrait aussi considérer $P(S)$ = 0,3812 ou encore faire de nouveaux lancers et prendre la nouvelle fréquence obtenue…

Nous avons donc une expérience aléatoire « lancer simultané de deux punaises » constitué de deux épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p = 0,4 (nous considérons l'événement « s'arrêter la pointe touchant le sol » comme l'événement « succès »).

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de punaises qui s'arrêtent la pointe touchant le sol dans l'expérience aléatoire « lancer simultané de deux punaises » :

$$X : \Omega \to \{0\,;1\,;2\}$$

X suit une loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = 0{,}4$.

Au sein de ce modèle, la question que l'on se pose peut alors se reformuler dans le registre de la langue naturelle, comme suit :

> Quelles sont les probabilités des événements suivants :
>
> - Les deux punaises s'arrêtent la pointe vers le haut (événement A) ;
> - Les deux punaises s'arrêtent avec la pointe touchant le sol (événement B) ;
> - L'une des punaises s'arrête la pointe vers le haut et l'autre avec la pointe touchant le sol (événement C) ?

Ou encore, dans un autre registre de représentation sémiotique, le registre symbolique des probabilités, elle peut être reformulée ainsi :

> Calculer $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.

Cela permettra alors de comparer les différentes probabilités relatives aux différents cas de figure possibles pour le jeu.

Suivant les connaissances des élèves, plusieurs traitements mathématiques sont alors possibles.

a) Utilisation des formules liées à la loi de Bernoulli :

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{2}{k} 0{,}4^k 0{,}6^{2-k}$, pour tout $k \in \{0\,;1\,;2\}$.

b) Utilisation d'un arbre de probabilités (figure 6), des probabilités conditionnelles et utilisation de la formule des probabilités totales :

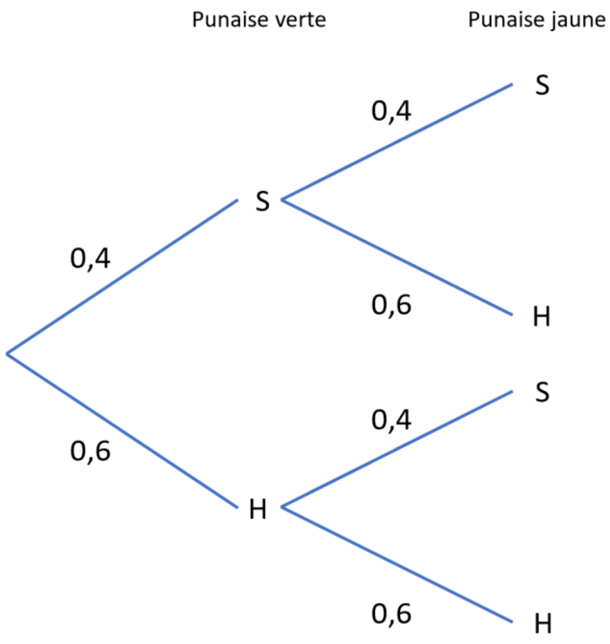


Figure 6. Arbre de probabilité

$P(A) = P((H,H)) = 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}36$

$P(B) = P((S,S)) = 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}16$

$P(C) = P((S,H)) + P((H,S)) = 2 \times (0{,}4 \times 0{,}6) = 0{,}48$

On a donc $P(C) = 3 \times P(B)$ et $P(A) = 2{,}25 \times P(B)$.

c) Utilisation de la simulation informatique

Il est aussi envisageable de procéder à l'aide d'une simulation informatique. Avec le tableur, la commande = SI(ALEA() < 0,4 ; P ; T) permet de simuler le lancer d'une punaise (dans le modèle que nous avons choisi avant). Il est alors possible de simuler un grand nombre de fois le lancer de deux punaises et de calculer les fréquences d'apparition des différentes issues.

Ces différents registres (registre symbolique des probabilités, registre des arbres de probabilités, registre du tableur avec un passage par le cadre statistique) permettent de traiter mathématiquement la situation dans le même modèle. Les résultats mathématiques permettent ensuite de retourner dans le domaine pseudo-concret et de conclure dans la réalité.

5. Modélisation probabiliste et inférence statistique informelle

Dans cet exemple, nous allons nous intéresser à une question d'inférence statistique relevant de la généralisation à partir d'un échantillon (Garfield et Ben-Zvi, 2008). L'exemple présenté, que nous appelons le problème du volcan Aso, a déjà été présenté et étudié dans un autre cadre (Alory et Derouet, 2018 ; Derouet, 2019).

5.1. Description de la situation réelle (A)

> Le mont Aso est le volcan le plus vaste du Japon, et aussi un des plus actifs. Quand aura lieu la prochaine éruption de ce volcan ?

5.2. Modèle de situation

Un expert en vulcanologie doit prendre en compte beaucoup de paramètres pour aborder cette question. Ici nous allons limiter l'étude de la situation à partir des simples données des relevés des dates d'éruptions du volcan depuis le XIIIè siècle. Nous pouvons modifier légèrement la question :

> À partir des données des dates des précédentes éruptions, évaluer quand aura lieu la prochaine éruption du volcan Aso.

5.3. Modèle pseudo-concret

Le tableau 6 présente les hypothèses de travail que nous pouvons faire.

Tableau 6. Hypothèses de travail du problème du volcan Aso

Modèle pseudo-concret
Hypothèses de travail
H1 : On ne peut pas prédire avec certitude la date d'éruption de la prochaine éruption volcanique.
H2 : On considère comme date d'éruption du volcan Aso la date de début de l'éruption déclarée par des organismes de vulcanologie reconnus. Nous en retenons ensuite seulement l'année, notée A_i.
H3 : On utilise toutes les données accessibles des éruptions passées.
H4 : On considère que le temps d'attente entre deux éruptions passées est donné par l'intervalle $]A_{i+1} - A_i - 1 ; A_{i+1} - A_i]$.
H5 : Le temps d'attente entre deux éruptions peut être compris entre 0 et une durée aussi grande que l'on veut (si la prochaine éruption n'arrive jamais).

Bien entendu, lors de la récolte des données statistiques, d'autres choix seraient possibles et tout aussi valables (par exemple prendre comme date d'éruption non pas la date de début, mais la date où l'intensité est la plus forte, prendre en compte la date précise et pas seulement l'année…). Nous ne les discutons pas ici. Les données récoltées, depuis le XIIIe siècle, peuvent être représentées sous forme d'un histogramme de fréquences (figure 7).

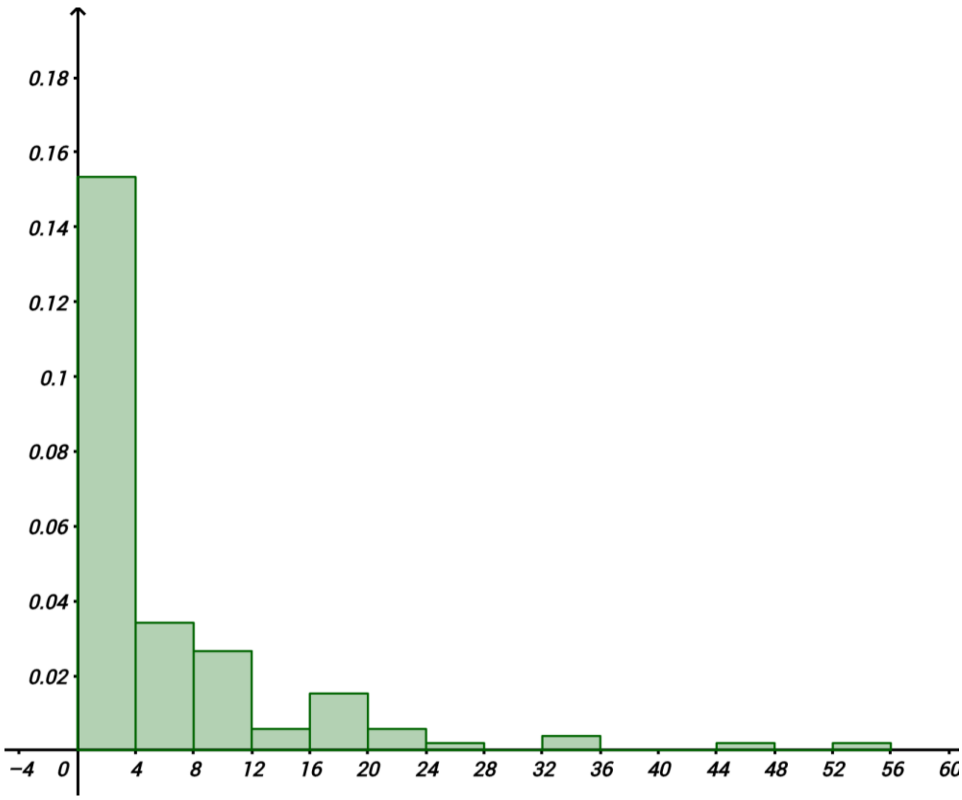


Figure 7. Histogramme des temps d'attente entre deux éruptions consécutives

5.4. Modèle mathématique, traitement mathématique

Comme pour le problème de la rencontre, nous pouvons ici considérer le temps discret ou continu. Nous faisons le choix de le considérer continu dans la suite. À partir des hypothèses de travail considérées (tableau 6), nous pouvons obtenir les hypothèses de modèle suivantes (tableau 7).

Tableau 7. Hypothèses de modèle du problème du volcan Aso

<table>
<tr><th>Modèle pseudo-concret</th><th>Modèle mathématique</th></tr>
<tr><td>Hypothèses de travail</td><td>Hypothèses de modèle</td></tr>
<tr><td>H1</td><td rowspan="3">On considère l'expérience aléatoire de la date d'éruption du volcan Aso.
On considère le temps continu. Cette hypothèse relève du modèle mathématique.
L'univers considéré est : $\Omega = [1200 ; +\infty[$ (nous ne disposons que des données depuis le XIIIe siècle).</td></tr>
<tr><td>H2</td></tr>
<tr><td>H3</td></tr>
<tr><td>H4</td><td rowspan="2">On considère la variable aléatoire X correspondant au temps d'attente entre deux éruptions du volcan :
$$\begin{array}{rcl} X : \quad \Omega^2 & \rightarrow & [0 ; +\infty[\\ (w_i ; w_{i+1}) & \rightarrow & w_{i+1} - w_i \end{array}$$
La loi de probabilité de X doit suivre une distribution « proche » de la distribution de fréquence des données statistiques récoltées.</td></tr>
<tr><td>H5</td></tr>
</table>

Il s'agit maintenant de choisir une loi de probabilité pour la variable aléatoire à partir, par exemple de l'histogramme construit dans le modèle pseudo-concret (figure 7). Dans les lois à disposition ou abordables par les élèves de lycée, seule la loi exponentielle est possible. En revanche, plusieurs choix sont possibles pour le paramètre (figure 8).

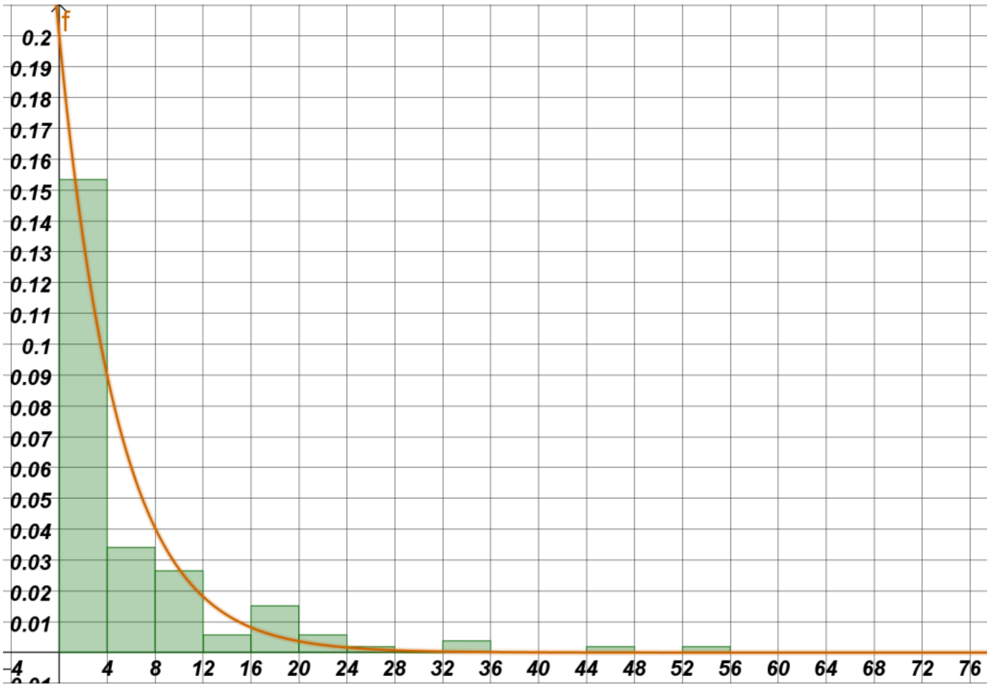


Figure 8. Choix de fonction de densité f associée à la variable aléatoire X (loi exponentielle de paramètre 0,2)

On peut alors remplacer la question par une autre comme par exemple :

> Quelle est la probabilité que le temps d'attente entre deux éruptions du volcan soit inférieur à 5 ans ?

Ou de façon plus générale, la question peut être :

> À partir de combien d'années A la probabilité que le temps d'attente soit inférieur à A est supérieure à 0,9 ?

En considérant que X suit une loi exponentielle de paramètre 0,2, on obtient :

$P(X \leq A) \geq 0{,}9$

$1 - e^{-0{,}2A} \geq 0{,}9$

$A \geq -\,ln(0{,}1) / 0{,}2$

Or $-\,ln(0{,}1) / 0{,}2 \approx 11{,}5$.

La probabilité que le temps d'attente entre deux éruptions du volcan Aso soit inférieur à 12 ans est supérieure à 0,9.

6. La place et le rôle de la statistique descriptive dans la modélisation probabiliste

Dans cette partie, nous allons aborder la question de recherche QR2, qui concerne la place de la statistique dans les trois catégories de démarches de modélisation probabiliste étudiées et le rôle qu'elle joue.

6.1. Les données statistiques

Au regard des trois exemples de problèmes de modélisation étudiés et des généralisations que l'on a pu en tirer, il est visible que les données statistiques en appui sur la réalité sont indispensables à la construction du modèle probabiliste dans le cas de l'approche fréquentiste et dans le cas de la statistique inférentielle.

Cependant dans le cas de l'approche fréquentiste, les données statistiques sont récoltées dans le respect du protocole expérimental. Il s'agit de données réelles obtenues dans le cadre du modèle pseudo-concret. On peut le voir comme un retour dans la réalité. On peut alors récolter un grand nombre de résultats de l'expérience, aussi grand que l'on veut dans la limite des possibilités temporelles et matérielles notamment. La distribution des fréquences va permettre de construire la distribution de probabilités. Un modèle probabiliste sera choisi en appui sur les fréquences. Cet enchaînement est illustré en figure 9.

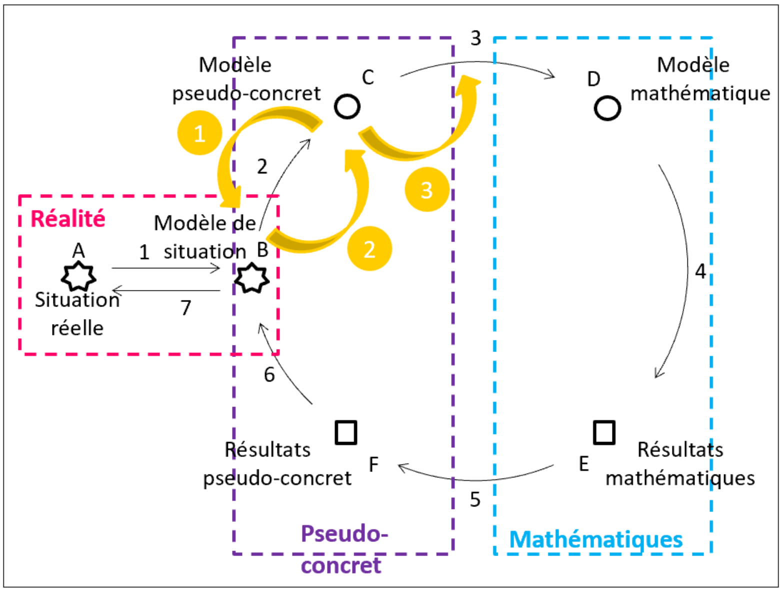


Figure 9. Approche fréquentiste : des données statistiques réelles contrôlées par le modèle pseudo-concret

Dans le cas de la statistique inférentielle, le rapport aux données est différent. En effet, les données sont issues de la situation réelle, ce n'est pas un retour à la réalité (tout du moins pas entendu dans le même sens que dans le cas précédent). Ces données sont le point de départ de la construction du modèle pseudo-concret, ce n'est pas le modèle pseudo-concret qui impose des données contrôlées (figure 10). Ces données ont tout de même été récoltées de manière rigoureuse. Elles sont en nombre fixé, qui peut être relativement assez limité. On ne peut pas en avoir autant que l'on veut comme précédemment. La distribution des fréquences va permettre de faire des inférences pour la construction du modèle. Cependant les fréquences ne vont pas directement être utilisées comme probabilités. Il y a un jeu de reconnaissance d'un modèle probabiliste connu ou de construction de celui-ci en appui sur des propriétés mathématiques.

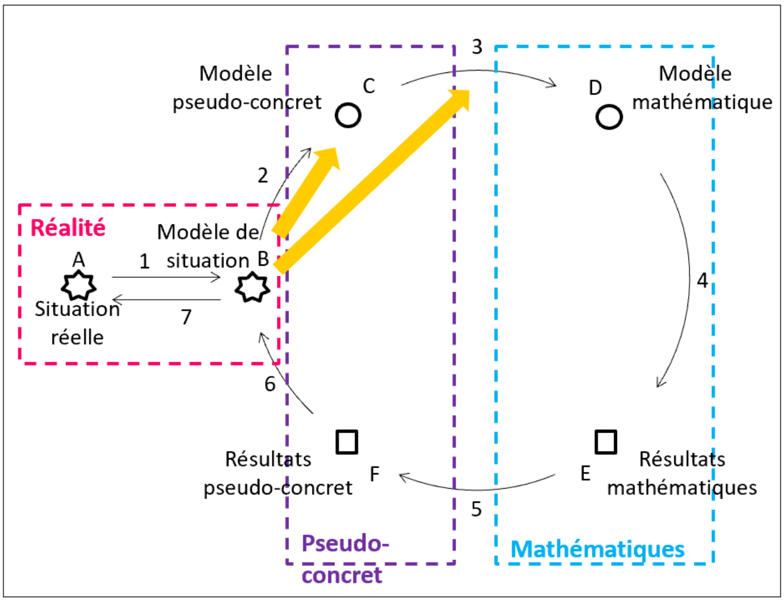


Figure 10. Statistique inférentielle informelle : les données statistiques comme point de départ

6.2. La simulation informatique

La statistique descriptive est aussi présente lors de simulations informatiques. En revanche, ce passage à la simulation informatique ne relève pas spécifiquement d'une des trois catégories. Elle peut en effet être présente dans chacune d'elles, mais non obligatoire. La simulation relève en fait du domaine des mathématiques (et bien entendu du domaine de l'informatique) et non de la réalité ou du modèle pseudo-concret. Elle s'appuie sur le modèle mathématique choisi et permet d'obtenir des résultats relatifs à des modèles plus complexes composés de modèles initiaux. Par exemple dans le problème de la rencontre, par l'intermédiaire de la simulation des instants d'arrivées de Karine et d'Olivier qui suivent des lois uniformes, on obtient des résultats sur le temps d'attente du premier arrivé T en considérant la valeur absolue de la différence des deux instants d'arrivées simulés.

Dans nos deux premiers exemples de situation de modélisation, il est bien visible que la simulation informatique a lieu après le choix du modèle. Comme la définit Dogme (1993) :

> La simulation est la méthode statistique permettant la reconstitution fictive de l'évolution d'un phénomène. C'est une expérimentation qui suppose la construction d'un modèle théorique présentant une similitude de propriétés ou de relations avec le phénomène faisant l'objet de l'étude.

Parzysz (2009) explique aussi qu' « une « bonne » simulation présuppose l'association d'un modèle probabiliste à l'expérience étudiée, modèle qui servira ensuite à déterminer la simulation » (p. 94).

Cela permet de bien mettre en évidence la différence entre l'approche fréquentiste qui permet de construire un modèle (et des probabilités d'événements associés) et la simulation informatique qui permet d'estimer des probabilités d'événements dans un modèle choisi. En prenant appui sur le cycle de modélisation, on peut mettre en évidence que l'approche fréquentiste se situe à la liaison entre réalité et domaine pseudo-concret, tandis que la simulation est entièrement dans le domaine mathématique (au sein du cycle de modélisation), dépendant du modèle mathématique choisi. Cette différence est illustrée dans les figures 11 et 12. Cette place et ce rôle différents sont aussi à relier à la loi des grands nombres. En effet, la loi des grands nombres (dans sa version théorème de Bernoulli) n'est présente que dans la simulation, lorsqu'un modèle est arrêté. La simulation est d'ailleurs un outil très utilisé pour ensuite invalider ou non un modèle choisi, en comparant avec les données réelles (étape 6 du cycle de modélisation). En revanche, l'approche fréquentiste, permettant de construire un modèle mathématique, ne mobilise pas la loi des grands nombres. Cependant, la loi des grands nombres justifie (*a posteriori*) l'approche fréquentiste. Enfin, dans l'exemple simple du lancer d'un dé, comme dans toutes situations pouvant prétendre à l'équiprobabilité du fait notamment de symétries, l'approche laplacienne et l'approche fréquentiste donnent (fort heureusement) des modèles très proches (à hypothèses similaires).

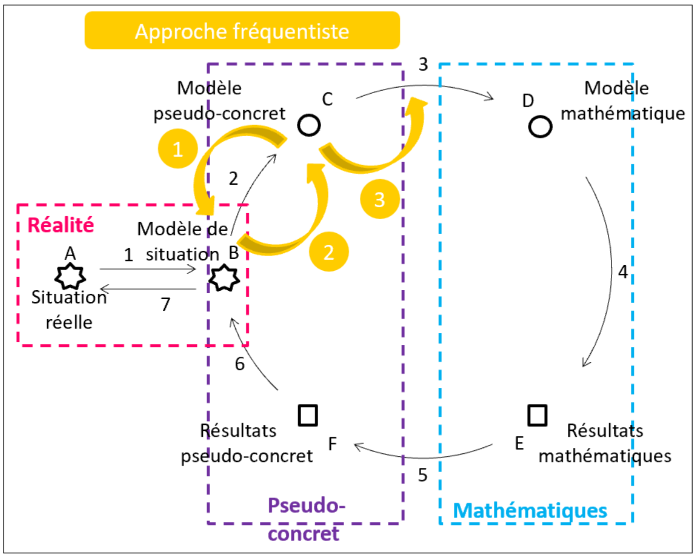


Figure 11. Place de l'approche fréquentiste dans le cycle de modélisation

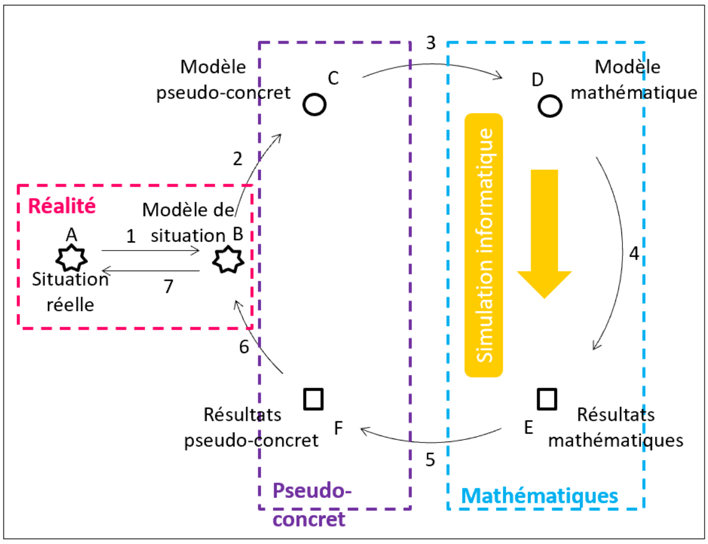


Figure 12. Place de la simulation informatique dans le cycle de modélisation

7. Conclusion et perspectives

En prenant appui sur trois exemples de problème de modélisation probabiliste, nous avons cherché à répondre aux deux questions suivantes :

- QR1 : Dans le cadre du cycle de modélisation, comment caractériser chacune des trois catégories de démarches de modélisation probabiliste considérées (approche laplacienne, approche fréquentiste, inférence statistique informelle) ?
- QR2 : Quelle place tient la statistique et quel rôle joue-t-elle dans les trois catégories de démarches de modélisation probabiliste considérées ?

En considérant les différentes étapes du cycle de modélisation, nous avons cherché à illustrer et à mettre en évidence les hypothèses de travail et de modèle sous-jacentes dans le contexte des trois problèmes de modélisation probabiliste « complexes » relevant chacun d'une des trois approches étudiées. Nous pouvons en extraire des informations généralisables :

- Une modélisation avec une approche laplacienne nécessite une hypothèse d'équiprobabilité à expliciter dès le modèle pseudo-concret ;
- Une modélisation avec une approche fréquentiste nécessite l'élaboration d'un protocole expérimental au niveau du modèle pseudo-concret pour permettre un retour dans la « réalité » (modèle de situation) pour récolter un grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire telle que décrite dans le protocole expérimental ;
- Une modélisation par inférence statistique informelle nécessite la mise à disposition de données réelles (réalité) qui sont dans un premier temps étudiées dans le domaine de la statistique descriptive (modèle pseudo-concret) et vont permettre de construire un modèle pseudo-concret afin d'être ensuite un point d'appui pour construire un modèle probabiliste compatible avec ces données (modèle mathématique).

Nous avons aussi mis en évidence que suivant l'approche mobilisée, la place et le rôle des données statistiques et de la statistique descriptive sont différents. En effet, les données statistiques réelles sont le point de départ d'une modélisation par inférence statistique, tandis que les données statistiques dans l'approche fréquentiste sont des réalisations d'une expérience aléatoire élaborée dans le modèle pseudo-concret. Il y a, dans ce second cas, un jeu d'aller-retour entre le modèle pseudo-concret et la *model situation*. Par une approche par inférence statistique, les données statistiques réelles sont ensuite simplifiées par exemple en regroupant des données, en éliminant des données considérées comme aberrantes… pour construire un modèle pseudo-concret, alors que dans l'approche fréquentiste la simplification se fait en amont de l'expérimentation, elle guide le recueil de données. Dans le cas de l'approche laplacienne, les données statistiques peuvent être complètement absentes.

Nous avons aussi essayé de clarifier la place des réalisations issues de la simulation informatique. En effet, la simulation informatique peut se retrouver dans les différentes approches, en revanche elle se situe à l'intérieur même du modèle mathématique, car simuler informatiquement une expérience aléatoire nécessite d'implémenter un modèle dans le tableur ou autre outil de simulation. Cependant, comme le signalait Parzysz (2014), « dans la pratique le modèle est souvent escamoté : on fait comme si on passait directement de la situation réelle à la simulation » (p. 71). La simulation informatique peut ensuite permettre d'estimer une probabilité d'un événement en appui sur la loi faible des grands nombres. Une confusion peut exister chez les enseignants et les élèves entre l'approche fréquentiste des probabilités et l'utilisation de la loi faible des grands nombres. Il est important de repérer que l'approche fréquentiste permet de construire un modèle mathématique, tandis que la loi des grands nombres permet d'estimer des probabilités dans le monde des mathématiques une fois un modèle choisi.

Ces distinctions apportées entre les différentes approches pouvant être en jeu dans la modélisation probabiliste ainsi que le couplage du cycle de modélisation avec les hypothèses de travail et de modèle nous apportent un cadre théorique pour étudier différentes questions d'enseignement-apprentissage dans le domaine des probabilités dans l'enseignement secondaire, voire aussi dans l'enseignement supérieur. Cela peut permettre de donner un outil d'analyse pour repérer les étapes de modélisation qui sont travaillées ou non en classe, et étudier les étapes pouvant être source de difficultés chez les élèves. Bien entendu, le détail des hypothèses de travail et de modèle formulées dans l'article ne l'est pas de façon aussi visible dans les classes, cependant elles peuvent tout de même être présentes plus ou moins explicitement ou encore totalement absentes, ce qui peut poser question sur le travail de modélisation des élèves. Pour étudier des déroulements en classe, il pourrait être intéressant de prendre en plus en compte les compétences spécifiques à la mathématisation horizontale (Yvain-Prébiski, 2018) pour compléter les analyses.

Outre un outil théorique et méthodologique pour la recherche, ces apports pourraient se révéler utiles pour la formation des enseignants. De plus, le protocole expérimental, les hypothèses de travail et de modèle mériteraient d'être explicités en classe, notamment lors des débuts de l'enseignement des probabilités (actuellement au collège), comme l'a déjà mentionné Parzysz (2009). Ces pratiques sont encore très rares (voire inexistantes), or elles permettraient de lever des ambiguïtés et des confusions entre réalité et modèle, fréquentes dans les classes (Girard, 2001b).

Henry (1999) affirme que « d'un point de vue didactique, l'enjeu est de faire de la modélisation en probabilités un objectif d'enseignement et d'apprentissage fondé sur la pratique des élèves » (p. 33-34). Nous partageons cet avis. Cependant, force est de constater que vingt ans plus tard, la démarche de modélisation probabiliste est encore très peu présente dans les classes de collège et lycée, en France. La nouvelle réforme du lycée de 2019 ne va pas dans le sens d'une amélioration de ce phénomène dans la spécialité Mathématiques, en revanche l'option Mathématiques complémentaires en terminale pourrait être le lieu d'un véritable travail de modélisation probabiliste.

Bibliographie

ADJIAGE, R. ET RAUSCHER, J.-C. (2013). Résolution d'un problème de modélisation et pratique écrite de l'écrit. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 33(1), 9–43.

BEN-ZVI, D. (2006). Scaffolding students' informal inference and argumentation. Dans A. Rossman et B. Chance (Dir.), *Working cooperatively in statistics education: Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. International Statistical Institute.

BIEHLER, R. (1994). Probabilistic thinking, statistical reasoning, and the search for causes: Do we need a probabilistic revolution. Dans J. Garfield (Dir.), *Research Papers from ICOTS 4*. University of Minnesota.

BLUM, W., GALBRAITH, P. L., HENN, H.-W. ET NISS, M. (2007). *Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study*. Springer.

BLUM, W. et LEISS, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? The example "Sugarloaf" and the DISUM Project. Dans C. Haines, P. L. Galbraith, W. Blum et S. Khan (Dir.), *Mathematical modelling (ICTMA12) – Education, engineering and economics* (p. 222–231). Horwood.

BORROMEO FERRI, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phasis in the modelling process. *ZDM - Mathematics Education*, 38(2), 86–95.

BURGHES, D. (1986). Mathematical modelling – are we heading in the right direction? Dans J. et al. Berry (Dir.), *Mathematical Modelling Methodology, Models and Micros* (p. 11–23). Horwood.

CABASSUT, R. et WAGNER, A. (2011). Modelling at Primary School Through a French–German Comparison of Curricula and Textbooks. Dans G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri et G. Stillman (Dir.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling, vol. 1* (p. 559–568). Springer.

CHAPUT, B., GIRARD, J. C. et HENRY, M. (2011). Frequentist approach: Modelling and simulation in statistics and probability teaching. Dans C. Batanero, G. Burrill et C. Reading (Dir.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study* (p. 85–95). Springer.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x*, 19, 45–75.

COULANGE, L. (1998). Les problèmes "concrets" à "mettre en équation" dans l'enseignement. *Petit x*, 47, 33–58.

DEROUET, C. et ALORY, S. (2018). Une séquence d'enseignement articulant les lois de probabilité à densité et le calcul intégral en terminale S. *Repères IREM*, 113, 45–80.

DEROUET, C. (2019). Introduire la notion de fonction de densité de probabilité : dynamiques entre trois domaines mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 39(2), 213–266.

DOGME, Y. (1993). *Statistique. Dictionnaire encyclopédique.* Dunod.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 7(2), 7–31.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37–65.

FREUDENTHAL, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Kluwer Academic.

GARFIELD, J. et BEN-ZVI, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching*. Springer.

GIRARD, J.-C. (2001a). Qu'est-ce qu'une expérience aléatoire ? Dans M. Henry (Dir.), *Autour de la modélisation en probabilités* (p. 141–144). Presses universitaires Franc-Comtoises.

GIRARD, J.-C. (2001b). Un exemple de confusion modèle-réalité. Dans M. Henry (Dir.), *Autour de la modélisation en probabilités* (p. 145–148). Presses Universitaires Franc-Comtoises.

GREER, B. et MUKHOPADHYAY, S. (2005). Teaching and Learning the Mathematization of Uncertainty: Historical, Cultural, Social and Political Contexts. Dans G. A. Jones (Dir.), *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (p. 297–324). Springer.

HANKELN, C. et HERSANT, M. (2020). Processus de modélisation et de problématisation en mathématiques à la fin du lycée. Une étude de cas dans une perspective de didactique comparée. *Education et Didactique*, 14(3), 39–67.

HENRY, M. (1997). Qu'est-ce qu'une expérience aléatoire ? Modélisation en probabilités. Introduction. Dans Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités (Dir.), *Enseigner les probabilités au lycée. Ouvertures statistiques, enjeux épistémologiques, questions didactiques et idées d'activités* (p. 55–56). IREM de Reims.

HENRY, M. (1999). L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *Repères-IREM*, 36, 15–34.

HENRY, M. (Dir.). (2001a). *Autour de la modélisation en probabilités*. Presses Universitaires Franc-Comtoises.

HENRY, M. (2001b). Modélisation d'une situation aléatoire. Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. Dans M. Henry (Dir.), *Autour de la modélisation en probabilités* (p. 149–159). Presses Universitaires Franc-Comtoises.

HENRY, M. (2001c). Notion d'expérience aléatoire. Vocabulaire et modèle probabiliste. Dans M. Henry (Dir.), *Autour de la modélisation en probabilités* (p. 161–171). Presses Universitaires Franc-Comtoises.

HENRY, M. (2003). Des lois de probabilité continues en terminale S, pourquoi et pour quoi faire ? *Repères - IREM*, 51, 5–25.

HENRY, M. (2010). Evolution de l'enseignement secondaire français en statistique et probabilités. *Statistique et Enseignement*, 1(1), 35–45.

KAISER, G. (1995). Realitätsbezüge im Mathematikunterricht – Ein Überblick über die aktuelle und historische Diskussion. Dans G. Graumann (Dir.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht* (p. 66–84).

KAISER, G., BLUM, W., BORROMEO FERRI, R. et STILLMAN, G. (2011). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling. ICTMA14*. Springer Netherlands.

KINTSCH, W. et GREENO, J. (1985). Understanding word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92(1), 109–129.

KONOLD, C. et KAZAK, S. (2008). Reconnecting data and chance. *Technology Innovations in Statistics Education*, 2(1).

LEUNG, F. K. S., STILLMAN, G. A., KAISER, G. et WONG, K. L. (2021). *Mathematical Modelling Education in East and West. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. Springer.

PARZYSZ, B. (2009). De l'expérience aléatoire au modèle, via la simulation. *Repères - IREM*, 74, 91–103.

PARZYSZ, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 127–147.

PFANNKUCH, M. (2005). Probability and statistical inference: How can teachers enable learners to make the connection? Dans G. A. Jones (Dir.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (p. 267–294). Springer.

PFANNKUCH, M. (2006). Informal inferential reasoning. Dans A. Rossman et B. Chance (Dir.), *Working cooperatively in statistics education: Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. International Statistical Institute.

PFANNKUCH, M., BUDGETT, S., FEWSTER, R., FITCH, M., PATTENWISE, S., WILD, C. ET ZIEDINS, I. (2016). Probability modeling and thinking: what can we learn from practice? *Statistics Education Research Journal*, 15(2), 11–37.

PICHARD, J.-F. (2001). Les probabilités au tournant du XVIIIè siècle. Dans M. Henry (Dir.), *Autour de la modélisation en probabilités* (p. 13–45). Presses Universitaires Franc-Comtoises.

POLLAK, H. (1979). The Interaction between Mathematics and Other School Subjects. Dans UNESCO (Dir.), *New Trends in Mathematics Teaching IV* (p. 232–248).

PRATT, D. (2011). Re-connecting probability and reasoning from data in secondary school teaching. *Proceedings of the 58th International Statistical Institute World Statistical Congress*, 890–899.

RODRIGUEZ, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S*. [Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble I]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00292286/document

STAUB, F. C. et REUSSER, K. (1995). The role of presentational structures in understanding and solving mathematical word problems. Dans C. A. Weaver, S. Mannes et C. R. Fletcher (Dir.), *Discourse comprehension. Essays in honor of Walter Kintsch* (p. 285–305). Lawrence Erlbaum.

TREFFERS, A. (1986). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas project*. Kluwer Academic.

WOZNIAK, F. (2012). Analyse didactique des praxéologies de modélisation mathématique à l'école : une étude de cas. *Education et Didactique*, 6(2), 63–86.

YVAIN-PRÉBISKI, S. (2018). *Etude de la transposition à la classe de pratiques de chercheurs en modélisation mathématique dans les sciences du vivant. Analyse des conditions de la dévolution de la mathématisation horizontale aux élèves* [Thèse de doctorat, Université Montpellier, Montpellier]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01956661v1/document

ZIEFFLER, A., GARFIELD, J., DELMAS, R. et READING, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 40–58.

CHARLOTTE DEROUET

LISEC UR2310, Université de Strasbourg, UL, UHA

charlotte.derouet@inspe.unistra.fr

CAMILLE DOUKHAN

COMMENT L'ARTICULATION ENTRE THEORIE DE L'ACTIVITE ET THEORIE ANTHROPOLOGIQUE ECLAIRE LA TRANSITION SECONDAIRE-SUPERIEUR : LE CAS DES PROBABILITES CONDITIONNELLES

Abstract. How networking Activity Theory and Anthropological Theory of Didactics sheds light on the secondary-tertiary transition: the case of conditional probability. The study of the secondary-tertiary transition requires taking into account institutional evolution but also the point of view of the actors. For this reason we have chosen to network the activity theory adapted to the didactics of mathematics with the anthropological theory of the didactic. In this article we present this networking and illustrate its use through the example of conditional probabilities. We propose to operationalize the complementarity of these two theories by making use of the concept of type of tasks' variations that we define and illustrate through the example presented. The new theoretical framework constructed allows us to describe praxeologies taught while taking into account the cognitive and mediative dimensions of the subject's activity.

Keywords. Secondary-tertiary transition, Activity, ATD, Mathematics for non-specialists, Probabilities.

Résumé. L'étude de la transition secondaire-supérieur nécessite de prendre en compte les évolutions institutionnelles, mais également le point de vue des acteurs. C'est pourquoi nous avons choisi d'articuler la théorie de l'activité adaptée à la didactique des mathématiques avec la théorie anthropologique du didactique. Dans cet article, nous présentons cette articulation et nous illustrons son emploi à travers l'exemple des probabilités conditionnelles. Nous proposons d'opérationnaliser la complémentarité de ces deux théories au moyen du concept de variation de type de tâches que nous définissons et illustrons à travers l'exemple présenté. Le nouveau cadre théorique ainsi construit nous permet notamment de décrire les praxéologies enseignées tout en prenant en compte les dimensions cognitives et médiatives de l'activité du sujet.

Mots-clés. Transition secondaire-supérieur, Activité, TAD, Mathématiques pour les non-spécialistes, Probabilités.

Nous nous intéressons dans cet article à la transition secondaire-supérieur en probabilités pour les étudiants non-spécialistes et plus particulièrement pour les étudiants de première année de biologie. Cette recherche se déroule dans le contexte français.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 27, p. 133 - 167.

Ce travail se situe à l'intersection entre différents thèmes de recherche de la didactique des mathématiques : la transition secondaire-supérieur, les étudiants non-spécialistes et leurs spécificités, l'enseignement et l'apprentissage des probabilités et les questions de modélisation associées.

Il s'agit d'un sujet de recherche peu abordé dans les travaux actuels en didactique des mathématiques. Nous l'avons choisi pour plusieurs raisons. D'une part, les étudiants rencontrent de nombreuses difficultés en mathématiques en première année d'université (Gueudet et Thomas, 2019) et les difficultés rencontrées par les étudiants non-spécialistes sont souvent une des causes d'abandon de leurs études (Heublein, 2014). D'autre part, en France, les probabilités enseignées en première année d'université de biologie ne semblent pas présenter de grande nouveauté en termes de contenus, il s'agit alors de s'intéresser à d'autres facteurs de difficultés chez ces étudiants débutants. Enfin, les probabilités soulèvent des questions tout à fait intéressantes pour ces étudiants de biologie, d'une part, vis-à-vis des enjeux de modélisation de processus biologiques qu'elles présentent et d'autre part, car ces étudiants suivent un cours obligatoire de probabilités en première année dans le but de suivre les années suivantes des cours de statistiques, puis pour certains, en fonction de leur spécialisation en fin de licence, des enseignements de biostatistiques ou de *machine learning*. Aussi nous nous demandons comment caractériser certains aspects de la transition secondaire-supérieur dans le cas des probabilités conditionnelles, pour ces étudiants débutants.

Pour ce faire, nous combinons des éléments de la théorie de l'activité adaptée à la didactique des mathématiques (Vandebrouck, 2018) avec des concepts issus de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard, 2003) afin d'articuler, dans nos analyses de la transition secondaire-supérieur, le point de vue des acteurs avec celui de l'institution. Nous illustrons dans le cas de l'enseignement des probabilités conditionnelles, comment l'articulation de deux cadres théoriques majeurs de la didactique des mathématiques, par une caractérisation croisée en termes de praxéologies mathématiques enseignées et d'activités des élèves et des étudiants, contribue à mettre en évidence les continuités et ruptures dans le cas de l'enseignement des probabilités conditionnelles ainsi que les difficultés rencontrées par les sujets et les facteurs de ces dernières.

Nous commençons par présenter le contexte scientifique de cette recherche et les principaux résultats issus de la recherche en didactique des mathématiques sur lesquels s'appuie cette étude. Dans une seconde partie, nous articulons théorie de l'activité adaptée à la didactique des mathématiques et théorie anthropologique du didactique afin de construire le cadre théorique approprié à notre étude spécifique de la transition puis nous formulons nos questions de recherche en appui sur ce cadre. Nous présentons ensuite la méthodologie suivie afin de répondre à ces questions. Dans une quatrième partie, nous exposons les analyses menées dans le secondaire, puis dans la partie suivante les analyses menées à l'université. Les résultats de ces analyses sont comparés dans une sixième section. Nous les discutons et apportons un approfondissement de ces analyses dans la partie suivante. Enfin, nous concluons cet article dans une huitième et dernière partie.

1. Revue de la littérature : transition, étudiants non-spécialistes et probabilités

Nous présentons dans cette partie une revue de la littérature permettant de situer notre travail dans le contexte actuel de la recherche en didactique.

1.1. A propos des difficultés rencontrées par les étudiants à la transition secondaire-supérieur

Les difficultés liées à la transition secondaire-supérieur sont bien connues de la recherche en didactique. Selon les perspectives théoriques adoptées, la recherche en didactique identifie différents types de causes à ces difficultés (Gueudet, 2008). Ici nous nous intéressons particulièrement aux recherches menées selon une perspective socioculturelle, et plus précisément institutionnelle. Artigue (2004) parle d'un changement de culture institutionnelle entre le secondaire et l'université, par exemple dans le secondaire elle explique que les tâches sont découpées en de multiples sous-tâches et que les aides fournies sont nombreuses. Gueudet et Vandebrouck (2022) identifient de nouvelles attentes de l'institution et des enseignants. Ces nouvelles attentes résultent en partie des modes de pensée et des pratiques « expertes » du mathématicien, dont la position dans l'institution université lui confère une place d'expert selon Robert (1998). Dans le cas qui nous intéresse des étudiants de première année de biologie, ce sont justement des enseignants-chercheurs de mathématiques qui enseignent les probabilités à ce public de non-spécialistes. Robert (1998) explique que ces modes de pensée « experts » sont considérés comme nécessaires pour développer le raisonnement mathématique attendu et requis à l'université. Généralement, le temps didactique s'accélère à l'université, désormais les notions défilent plus rapidement et les techniques, faute de répétition, n'ont plus le temps d'être routinisées (Gueudet, 2008). C'est notamment le cas chez les étudiants non-spécialistes pour lesquels, dans leur cursus, les mathématiques ne sont pas la discipline principale.

1.2. La spécificité des étudiants non-spécialistes

Les étudiants non-spécialistes ont des besoins et des attentes spécifiques, qui ont récemment fait l'objet d'un nombre croissant de recherches en didactique des mathématiques, là encore selon une perspective socioculturelle. Des auteurs comme González-Martín et al. (2021) ont établi que les difficultés qu'ils rencontrent sont dues en partie à un enseignement de mathématiques trop éloigné des attentes et besoins de ces étudiants dans les autres disciplines. Selon ces auteurs, il est nécessaire d'expliciter auprès des étudiants l'intérêt de l'utilisation des mathématiques dans les matières scientifiques telles que la biologie par exemple. Ces mêmes auteurs expliquent que l'enseignement de mathématiques reçu par ces étudiants non-spécialistes est trop déconnecté de leurs futures pratiques professionnelles ce qui rend difficile la motivation dans ces apprentissages. Aussi, selon Gonzalez-Martin et al. (2021), l'apport de la modélisation semble tout à fait pertinent pour ces étudiants, car elle permet une meilleure perception de l'utilité des mathématiques. Chiel et al. (2010) ont d'ailleurs présenté des résultats très significatifs sur l'impact positif d'activités de modélisation chez les étudiants de biologie. Les auteurs constatent que les étudiants habituellement les plus en difficulté en mathématiques sont ceux qui progressent le plus dans la construction et l'utilisation de modèles mathématiques à des fins de modélisation de systèmes biologiques. Enfin, Viirman et Nardi (2018) ont mis en évidence que l'implication des étudiants de biologie dans des activités de modélisation est un facteur de motivation dans l'apprentissage des mathématiques.

1.3. Le cas des probabilités conditionnelles

Les probabilités font partie des contenus mathématiques présents dans un grand nombre de filières de non-spécialistes, et elles sont également enseignées au niveau du lycée dans de nombreux pays. Nous nous penchons ici sur les résultats de la recherche qui concernent plus particulièrement l'enseignement des probabilités conditionnelles et les difficultés spécifiques associées à ces contenus. Huerta (2014) a établi que les élèves et étudiants rencontrent des difficultés à interpréter correctement les quantités numériques ainsi qu'à distinguer la probabilité conditionnelle de la probabilité de l'intersection. Diaz et De la Fuente (2007) ont mis en évidence que les étudiants ont des difficultés à inverser le conditionnement et que cela est dû à une conception « temporelle » de la probabilité conditionnelle systématisée chez certains d'entre eux. Pour Parzysz (2011), la conception « cardinaliste » de la probabilité conditionnelle est une autre cause de difficulté. Il serait préférable selon lui de choisir des situations dans lesquelles il n'est pas possible d'avoir recours aux effectifs. Dans l'enseignement des probabilités au secondaire, différents registres de représentation sémiotiques (Duval, 1993) sont utilisés : le registre de la langue naturelle qui permet de présenter des situations ayant une dimension aléatoire, le registre des tableaux ou encore celui des arbres de probabilités. Diaz et De la Fuente (2007) recommandent d'enseigner les probabilités conditionnelles en utilisant des représentations, comme des arbres de probabilités, ce qui est le cas dans l'enseignement secondaire en France. L'intérêt des arbres de probabilités est qu'ils sont particulièrement lisibles par les étudiants et qu'ils permettent de faire apparaître une grande quantité d'informations. Cependant, comme le souligne Parzysz (2011), l'utilisation de plusieurs registres de représentations (tableaux, graphiques, arbres, boites, etc.) ne doit pas empêcher de construire du sens pour chacun d'eux ni d'apprendre à les articuler, au risque de voir disparaitre le bénéfice de leur utilisation. Ainsi la théorie des registres de représentation sémiotiques (Duval, 1993) fait partie de notre cadre théorique et nous nous intéresserons aux emplois et aux conversions de registres, au lycée puis à l'université.

1.4. L'activité de modélisation probabiliste

Nous souhaitons terminer cette revue de la littérature par des résultats qui concernent l'activité de modélisation probabiliste. La modélisation probabiliste, comme nous la définissons dans ce travail, commence généralement par une situation aléatoire décrite en langage naturel. Il faut ensuite identifier les évènements en jeu, les nommer et déterminer leurs probabilités. Selon la situation, l'utilisation d'un arbre ou d'un tableau de probabilités peut être pertinente ou non. De nombreux chercheurs se sont appliqués à décrire les étapes du processus de modélisation, nous nous référons ici au cycle de modélisation présenté par Derouet (2022). Dans le domaine des probabilités, l'interprétation contextuelle est importante et d'après Huerta (2014) les difficultés varient suivant le contexte des exercices. Selon Martignon et Wassner (2002), les situations qui manquent d'authenticité ou qui sont présentées dans un contexte artificiel pourraient être une cause de difficulté supplémentaire pour les étudiants. On retrouve dans les textes des programmes officiels de mathématiques pour la classe de terminale série scientifique (MEN, 2011) pour le thème des probabilités conditionnelles, la recommandation suivante : « [c]ette partie du programme se prête particulièrement à l'étude de situations concrètes » (p. 12). Néanmoins, un exercice issu d'une situation relevant du monde réel, au sens de la classification de Eichler et Vogel (2014), peut très bien ne pas proposer d'activité de modélisation à la charge de l'étudiant. Or l'une des spécificités des probabilités est le lien très fort qui les unit aux phénomènes réels et à leur modélisation. Aussi selon Bakker et al. (2018) les probabilités ne doivent pas être enseignées sans données. Ces auteurs préconisent d'enseigner les probabilités comme un moyen de modéliser les phénomènes réels. L'activité de modélisation pourrait ainsi être un outil de remédiation aux difficultés rencontrées en probabilités, mais aussi un levier permettant de motiver les étudiants de biologie dans l'apprentissage de ces contenus.

2. Cadre théorique et formulation de la question de recherche

Compte tenu de la complexité du contexte de notre recherche, nous avons été conduite à mobiliser des notions issues de différentes théories didactiques. Le cadre théorique ainsi construit nous permettra de formuler nos questions de recherche, de construire une méthodologie (partie 3) et de mener à bien les analyses des séances en classes présentées dans les parties 4 et 5.

Afin de répondre à notre questionnement initial par une perspective institutionnelle nous retenons pour notre travail la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) développée par Chevallard (1998). Cependant, souhaitant interroger la transition d'un point de vue institutionnel, mais aussi du point de vue de l'élève et de l'étudiant, apprenant dans leur contexte spécifique, nous allons également nous appuyer sur la Théorie de l'Activité adaptée à la Didactique des Mathématiques (TADM) à la suite de Robert et Rogalski (Vandebrouck, 2008). La TADM, en complément de la TAD, permettra l'analyse des activités des élèves et des étudiants en intégrant notamment la dimension cognitive et médiative de l'activité des sujets. La complémentarité de ces deux cadres nous permettra en particulier de mettre en évidence comment la complexité des tâches prescrites aux élèves et aux étudiants ainsi que leur gestion par l'enseignant (au sens de la TADM, définition donnée par Robert et Vandebrouck, 2014) impacte les organisations praxéologiques (au sens de la TAD) et en particulier les techniques et leurs mises en œuvre. Nous y revenons dans la partie 2.2.

2.1. Concepts issus de la théorie anthropologique du didactique

Nous utilisons dans ce travail certains concepts fondamentaux issus de la TAD (Chevallard, 1998). Nous complétons ces définitions avec des notions issues du cadre T4TEL développé par Chaachoua (2018) qui s'inscrit lui-même dans la TAD. Ce cadre est une extension du modèle praxéologique. Il permet d'enrichir la description des organisations mathématiques et de rendre opérationnelle, du point de vue informatique (voir le travail de Jolivet et al., 2021), la modélisation du savoir en jeu qui en résulte.

D'après la TAD, les savoirs sont des productions humaines façonnées par les institutions dans lesquelles vivent ces personnes. L'analyse des savoirs mathématiques doit aller de pair avec l'étude des pratiques institutionnelles. Nous nous plaçons dans une perspective institutionnelle et considérons la transition secondaire-supérieur comme une transition institutionnelle : dans l'institution *université*, les mathématiques enseignées aux étudiants de biologie ne sont pas les mêmes que les mathématiques enseignées dans l'institution *lycée*.

Dans la TAD, l'activité mathématique fait partie de l'ensemble des activités humaines. De cette manière toute activité humaine peut être modélisée par ce que Chevallard (1998) nomme praxéologie. À partir d'un type de tâches T, une certaine technique τ permet de l'accomplir, cette technique peut être justifiée par une technologie θ, qui elle-même sera justifiée par une théorie Θ. L'ensemble forme un quadruplet $[\ T \mid \tau \mid \theta \mid \Theta\ ]$ appelé praxéologie relative au type de tâches T.

Afin de décrire encore plus finement les organisations mathématiques, Chaachoua (2018) propose de décrire la technique par un ensemble de types de tâches. Ces types de tâches sont alors appelés ingrédients de la technique. Ainsi, chaque type de tâches qui est également ingrédient de technique, est réalisé par une ou plusieurs techniques qui s'expriment elles aussi par un ensemble de types de tâches. Afin de ne pas se retrouver face à une description infinie, il sera à notre charge de choisir le niveau de granularité pertinent où il sera bon de s'arrêter pour décrire ces techniques.

Pour des raisons de place, nous n'abordons pas dans cet article la question de l'échelle, avec des praxéologies plus ou moins générales (ponctuelle, locale ou régionale).

2.2. Éléments de la théorie de l'activité adaptée à la didactique des mathématiques

En complément de la perspective institutionnelle développée précédemment, nous avons choisi d'utiliser la théorie de l'activité adaptée à la didactique des mathématiques afin d'examiner du point de vue de l'élève et de l'étudiant, la complexité de son activité pour une tâche donnée dans un contexte donné, de mobiliser explicitement les dimensions cognitives et médiatives de l'activité[1], et de prendre en compte les spécificités des étudiants débutants à l'université, qu'il s'agisse de leurs ressources, leurs histoires, le contexte de leur enseignement ou de leurs connaissances antérieures (habitudes, contrats, etc.).

Dans la TADM, nous distinguons la tâche de l'activité. La tâche est l'objet de l'activité, c'est ce que le sujet élève doit faire dans les conditions données. Tandis que l'activité[2], au sens large, correspond aux moyens d'action et aux interactions de l'élève avec son environnement. Aussi, dans le reste de cet écrit nous utilisons la notion de tâche telle que décrite dans la TADM, c'est-à-dire en référence à l'objet de l'activité et à sa description.

Comme définie par Rogalski (2008), l'étude de l'activité est toujours définie du point de vue du sujet, ici l'élève ou de l'étudiant, on parle alors d'activité du sujet. Le sujet a des intentions, des compétences et des responsabilités. La TADM permet d'envisager l'activité du sujet selon plusieurs dimensions complémentaires, en dépassant la dimension institutionnelle principalement proposée par la TAD. En particulier, la TADM permet d'envisager entre autres la dimension cognitive de

[1] La dimension médiative de l'activité concerne l'impact du discours de l'enseignant sur l'activité des élèves, il peut s'agir des interactions entre sujets et enseignants et des aides données par l'enseignant. Quant à la dimension cognitive, elle concerne l'organisation des tâches prescrites et les apprentissages qui peuvent en découler (Rogalski, 2012).

[2] « L'activité est un processus qui se développe dans une temporalité donnée, intégrant des facteurs psychiques (...), des opérations d'interaction avec les objets dont la transformation ou la conservation est visée par l'action, et des processus d'interaction avec d'autres humains. » (Rogalski, 2008, p. 26)

l'activité (on parlera des mathématiques cognitives, ou plus simplement des sous-activités).

Pour analyser convenablement l'activité de l'élève selon la TADM il nous faut aussi tenir compte du contexte en jeu (ici les mathématiques), de la temporalité de la séance, du scénario de la séquence et plus généralement du cadre scolaire. C'est ce que nous appelons la situation. Le sujet agit dans la situation qui lui apporte des contraintes, mais aussi des ressources. Le rôle du professeur est ainsi fondamental comme médiateur de l'activité du sujet élève. Le professeur propose notamment des aides procédurales aux élèves qui modifient l'activité attendue sur les tâches prescrites. Étudier la situation dans laquelle agit l'élève permet ainsi de comprendre l'activité selon des dimensions médiatives, institutionnelles et sociales, et de faire le lien notamment avec l'approche proposée par la TAD.

La tâche prescrite appelle des adaptations des connaissances à la charge de l'élève, ces adaptations relèvent de la dimension cognitive de l'activité. Afin de caractériser précisément l'activité mathématique des élèves (et des étudiants) dans son versant cognitif, nous utilisons les sous-activités mathématiques définies par Robert et Vandebrouck (2014). Ces sous-activités sont de trois types : sous-activité de reconnaissance d'outils ou d'objets mathématiques à mettre en fonctionnement, sous-activité d'organisation du raisonnement global, sous-activité de traitement interne.

Selon Robert et Vandebrouck (2014) une tâche est alors définie comme complexe lorsqu'elle combine plusieurs de ces sous-activités. Ces tâches complexes nous intéressent tout particulièrement dans notre étude de la transition secondaire-supérieur. L'emploi de la théorie de l'activité en complément de la théorie anthropologique du didactique nous permet d'étudier comment la complexité d'une tâche impacte l'organisation praxéologique associée et en particulier les techniques et leurs mises en œuvre. Par exemple, reconnaître pour l'étudiant qu'une tâche prescrite relève de tel ou tel type de tâches nécessite une adaptation et cette adaptation suppose une sous-activité de reconnaissance que l'élève doit développer ou bien qui est prise en charge par le contexte, l'énoncé ou le professeur. Si, de surcroit, la sous-activité d'organisation est laissée à la charge de l'élève par l'énoncé, alors il s'agit d'une tâche complexe au sens de Robert et Vandebrouck (2014). Le type de tâche reste le même, mais pas la tâche. La technique (composée d'ingrédients de la technique, au sens de Chaachoua, 2018) alors à mettre en œuvre pour résoudre la tâche n'est plus la même que si la tâche n'avait pas appelé d'adaptations. L'organisation praxéologique (TAD) est alors affectée par la complexité de la tâche (TADM).

Nous proposons d'opérationnaliser la complémentarité de ces deux théories au moyen du concept de *variation de type de tâches*. Nous appelons variation de type de tâches (TAD) toutes modifications dans les énoncés des tâches prescrites qui provoquent des adaptations, au sens de la TADM, dans l'activité de l'élève (ou de l'étudiant). En particulier, ces variations de types de tâches appellent des adaptations en termes de sous-activités mathématiques à la charge des sujets, adaptations qui auront, ou n'auront pas, un impact sur les techniques et leurs mises en œuvre.

Par exemple, pour le type de tâches *calculer une probabilité conditionnelle*, la variation *il s'agit de la seule et unique question de l'exercice* provoque des adaptations dans l'activité du sujet (changer de registres, introduire des intermédiaires, etc.). Cette variation de type de tâches va considérablement impacter les sous-activités d'organisation et de traitement et par la même occasion les conditions de mise en œuvre de la technique (composée d'ingrédients) permettant d'accomplir la tâche.

Cette articulation théorique nous permet ainsi de proposer une caractérisation novatrice de la transition secondaire-supérieur dont nous proposons une exemplification dans les parties 4 et 5.

Nous nous appliquerons donc, pour chacune des variations relevées, à décrire l'activité mathématique attendue de l'élève (ou de l'étudiant) en matière de sous-activités mathématiques et de mise en œuvre des techniques.

2.3. Registres de représentation sémiotique

Les résultats présentés dans la revue de travaux mettent en avant la place prépondérante et l'intérêt de l'utilisation des registres de représentations tels que les arbres et les tableaux dans l'apprentissage des probabilités discrètes. Pour cette raison, nous avons choisi de compléter notre cadre théorique en utilisant la notion de registre de représentation sémiotique introduite par Duval (1993). L'approche cognitive des représentations proposée par cet auteur s'articule bien avec la TADM comme nous le montrons ci-dessous.

Dans le cas qui nous intéresse des probabilités conditionnelles, Parzysz (2011) a mis en évidence que les arbres de probabilités ont des règles de traitement et de conversion précises et possèdent ainsi les caractéristiques d'un registre de représentation. De son côté Nechache (2016) a établi que les tableaux de probabilités sont également des registres de représentation sémiotique dans lesquels des traitements mathématiques sont permis. Dans ce travail, nous rencontrerons également le registre symbolique probabiliste et le registre de la langue naturelle.

Les objets mathématiques étant imperceptibles, Duval (1993) explique que l'utilisation de représentations est indispensable dans l'activité mathématique afin de rendre communicables les représentations mentales que l'on peut avoir de ces objets. Les représentations sémiotiques permettent aux élèves (et aux étudiants) de manipuler les objets mathématiques et rendent ainsi possibles les trois activités cognitives suivantes :

- la production ou la reconnaissance d'une représentation selon les règles de formation propres au registre dans lequel la représentation est faite,
- le traitement d'une représentation, tout en restant dans un même registre et donc en se pliant aux règles qui y sont données,
- la conversion d'une représentation en une autre tout en changeant de registre. Cette transformation permet souvent un apport de sens.

Ces différentes activités cognitives font largement écho à la dimension cognitive considérée dans la théorie de l'activité au travers notamment des adaptations de connaissances et des sous-activités mathématiques que nous venons de présenter. Aussi, nous considérons que la production, le traitement et la conversion de registres peuvent être considérées comme un autre type de sous-activités, centré sur les représentations. Ces sous-activités associées aux registres de représentation viendront compléter notre cadre théorique dans la description de l'activité des sujets.

Selon Duval (1993), il est indispensable de pouvoir utiliser plusieurs registres sémiotiques de représentation pour un même objet mathématique, tout comme il est nécessaire d'être capable de choisir un registre plutôt qu'un autre. En appui sur cela, nous nous intéressons tout particulièrement aux activités des sujets en ce qui concerne l'emploi et la conversion de registres, au lycée puis à l'université.

Les résultats issus de la revue de travaux et le cadre théorique que nous venons de présenter nous permettent de reformuler la question initialement posée dans la première partie. Ainsi la question retenue pour notre étude est la suivante :

Comment l'articulation des cadres de la TADM et de la TAD, avec au cœur le concept nouveau de variation de type de tâches, contribue à la compréhension de la transition secondaire-supérieur dans le cas des probabilités conditionnelles ?

3. Méthodologie de la recherche

Afin de répondre à la question précédemment formulée, nous avons choisi de réaliser des observations en classe de terminale série scientifique et en première année de biologie pour des enseignements de probabilités conditionnelles. Le choix de ce terrain dans le secondaire s'explique, car les étudiants de première année de biologie en France provenaient, jusqu'en 2020-2021, majoritairement de terminale série scientifique. Nos observations se déroulent en France. La méthodologie spécifique d'analyse de ces données est construite en appui sur le cadre théorique que nous venons de présenter et vise à répondre à notre question de recherche.

Dans une perspective institutionnelle qui s'inscrit dans le cadre de la TAD, nous cherchons à déterminer quels sont les types de tâches et techniques proposés aux élèves du secondaire et aux étudiants de l'université dans le cadre de l'enseignement des probabilités conditionnelles. Nous répertorions les types de tâches en analysant des supports : manuel, fascicule d'exercices et diapositives de cours. Les techniques sont quant à elles extraites à partir des films de classes.

En considérant les besoins de notre étude, nous construisons notre méthodologie en appui sur l'articulation théorique présentée dans la partie précédente. Aussi, nous nous intéressons tout particulièrement à la présence ou non de variations de type de tâches. Comme en ce qui concerne les types de tâches, nous les répertorions à partir des supports : manuel, fascicule d'exercices et diapositives de cours. Nous nous penchons également, au moyen des vidéos de classe, sur la prise en charge de ces variations. Quelles sont les variations à la charge des élèves et étudiants, celles systématiquement prises en charge ou bien éliminées par l'enseignant(e) ? Enfin, intrinsèquement lié à la définition de variation de type de tâches, il nous est nécessaire de chercher à mesurer l'impact de ces variations sur les techniques et leurs mises en œuvre afin de résoudre les tâches.

Par ailleurs, la dimension médiative de l'activité des sujets telle qu'elle est définie dans la TADM, nous intéresse tout particulièrement dans le contexte de la transition lycée-université. Nous souhaitons aussi identifier le rôle de l'enseignant(e) et son impact sur l'activité des élèves (secondaire) et des étudiants (supérieur). Par exemple, quelles sont les aides procédurales qui modifient l'activité des élèves (et étudiants) relative aux types de tâches et variations relevés ? Nous nous appuyons sur les films de classe pour relever ces aides, ce qui nous permettra également d'identifier les éléments du discours (enseignant ou élève) relevant de la dimension *logos* des praxéologies.

Enfin, dans la prise en compte de la dimension cognitive de l'activité, nous cherchons à décrire les activités (cognitives) de production et de conversion de registres de représentations ainsi que les sous-activités de reconnaissance, d'organisation et de traitement à la charge des élèves et étudiants. Pour cela nous disposons des films de classes dont nous avons produit des transcriptions.

Dans ce qui suit, nous décrivons avec précisions nos données empiriques et celles retenues dans le cas de cet article. Les observations menées ont eu lieu en France au cours de l'année scolaire 2018-2019.

Dans le secondaire, nos observations se déroulent dans une classe de terminale série scientifique, au sein d'un lycée français en milieu rural. Les élèves sont âgés de 17 ans en moyenne. L'enseignante de cette classe est ce que nous appelons une experte du point de vue didactique, elle est chevronnée, s'implique à l'IREM de Rennes et encadre des stagiaires. Cette enseignante choisit de consacrer environ huit heures au thème des probabilités conditionnelles. Ces heures sont réparties en six séances, dont une séance de travaux pratiques d'algorithmique de 2 h, en salle informatique. Nous avons observé trois des six séances dédiées aux probabilités conditionnelles dans cette classe de lycée qui compte 29 élèves.

À l'université, nous avons assisté à deux séances d'un module de probabilités à destination des étudiants en première année de filière biologie (première année de licence). Il s'agit des deux seules séances de ce module, un Cours Magistral (CM) suivi d'une séance de Travaux Dirigés (TD), sur le thème de probabilités conditionnelles. Les étudiants sont environ 300 en CM et une trentaine en séance de TD. Les enseignants que nous avons observés, l'un en CM, l'autre en TD, sont enseignants-chercheurs en mathématiques pures et ont suivi une formation de mathématiques classique (formation initiale en mathématiques puis thèse en mathématiques fondamentales).

Nous avons pu filmer certaines des séances dans le secondaire, mais nous n'avons pas pu le faire à l'université. À partir des notes prises au cours de nos observations, ou des films le cas échéant, nous avons produit des synopsis de chacune des séances auxquelles nous avons assisté. Ces synopsis de séances présentent un découpage des séances en épisodes selon la méthode suivante : un épisode prend fin, soit lorsque les contenus changent (par exemple, des nombres complexes on passe aux probabilités), soit lorsque l'on passe d'un moment de cours à des exercices, soit lorsque l'on change d'exercice.

Dans cet article notre étude porte sur une seule séance du secondaire (la séance n° 4) et une seule séance (celle de TD) à l'université. Les synopsis des séances sont présentés dans les tableaux 1 et 2.

Tableau 1. Synopsis de la séance n° 4 sur les probabilités conditionnelles — Terminale scientifique

n° de l'épisode	Thème de l'épisode
1	Exercice sur les nombres complexes à préparer en dehors de la classe et présenté par un élève.
2	Questions succinctes et posées oralement par l'enseignante sur le cours de la fois précédente : rappeler la formule de Poincaré qui donne la probabilité d'une union, rappeler le critère d'indépendance de deux évènements, rappeler la formule des probabilités totales.
3	Travail en autonomie sur un extrait de sujet de baccalauréat
4	Travail en autonomie sur un extrait de sujet de baccalauréat

Tableau 2. Synopsis de la séance de TD les probabilités conditionnelles — Première année de biologie à l'université

n° de l'épisode	Thème de l'épisode
1	Exercice 1 : étudier l'indépendance d'évènements dans une configuration d'équiprobabilité
2	Exercice 3 : calculs d'intersection d'évènements et de probabilités conditionnelles
3	Exercice 5 : associer les valeurs numériques d'un énoncé à des probabilités et calcul d'une probabilité conditionnelle
4	Exercice 7 : calcul d'une probabilité conditionnelle à partir d'un énoncé en langage naturel

Nous présentons dans ce qui suit l'analyse détaillée de l'épisode n° 3 de la séance de lycée et de l'épisode n° 4 de la séance de TD à l'université.

Nos analyses sont illustrées par des extraits de transcriptions et s'appuient sur les résultats de l'analyse historico-épistémologique et de l'analyse des manuels de terminale que nous ne présentons pas ici, mais dont les résultats principaux sont à retrouver dans notre thèse (Doukhan, 2021).

À partir de ces deux exemples que nous analysons finement dans la suite, nous souhaitons mettre en évidence des points saillants de la transition secondaire-supérieur pour des étudiants non-spécialistes dans les cas des probabilités conditionnelles. Il s'agit de répertorier les types de tâches et techniques proposés aux élèves (et étudiants) puis, pour chaque type de tâches relevé, d'identifier les variations qui sont à la charge des élèves (et étudiants), celles qui sont systématiquement prises en charge par l'enseignant (lycée ou université) et comment elles sont gérées dans la classe. Nous nous demandons également si l'enseignant(e) (lycée ou université) élimine certaines variations, quel est son rôle et quelles sont les aides procédurales qui modifient l'activité des élèves (et étudiants) sur les types de tâches et variations relevés.

4. Observation et analyse au lycée : épisode 3, séance 4

Nous présentons dans ce qui suit les résultats issus de l'analyse des synopsis et des transcriptions de l'épisode n° 3 de la séance n° 4 dédiée aux probabilités conditionnelles dans la classe de terminale scientifique dans laquelle nous avons fait nos observations.

L'analyse des supports a permis de repérer des types de tâches et des variations « a priori ». Dans cet article, par manque de place, nous ne développons pas ces analyses préliminaires, nous nous centrons sur les types de tâches et variations « effectives » apparaissant dans les mises en œuvre. Nous les avons choisis sur la base de l'analyse des supports, qui a indiqué leurs potentialités.

Les types de tâches (et variations associées) qui ont été rencontrés jusqu'à présent par les élèves de cette classe de terminale dans le cadre de la séquence sur les probabilités conditionnelles sont les suivants :

– T-CompletTab : *compléter un tableau de probabilités* (étant donné que les évènements ont déjà été décrits et nommés dans le texte ; étant donné que c'est la première question de l'exercice ; les données sont en fréquences relatives)

– T-CalcSimple : *calculer la probabilité d'un évènement simple* (à partir d'un tableau de probabilités ; faisant intervenir une variable aléatoire binomiale ; à partir d'un énoncé en langage naturel ; étant donné que les évènements ont déjà été décrits et nommés dans le texte ; étant donné que c'est la première question de l'exercice ; les données sont en pourcentages ; les données sont en fréquences relatives)

– T-CalcInter : *calculer la probabilité d'une intersection d'évènements* (à partir d'un tableau de probabilités ; à partir d'un énoncé en langage naturel ; étant donné que les évènements ont déjà été décrits et nommés dans le texte ; sans que les évènements aient été explicitement nommés dans l'énoncé ; les données sont en fréquences relatives)

– T-CalcProbaCond : *calculer une probabilité conditionnelle* (étant donné que les probabilités qui apparaissent dans la formule ont déjà été calculées ou sont données dans l'énoncé ; faisant intervenir une variable aléatoire binomiale ; à partir d'un énoncé en langage naturel ; étant donné que les évènements ont déjà été décrits et nommés dans le texte ; étant donné que la situation a déjà été représentée par un arbre ; sans que l'évènement apparaisse sur l'arbre ; étant donné que les probabilités qui apparaissent dans la formule ont déjà été calculées ; les données sont en pourcentages ; étant donné que les probabilités qui apparaissent dans la formule ont déjà été calculées ou sont données dans l'énoncé)

– T-LirArb : *associer les valeurs numériques présentes sur les branches de l'arbre à des valeurs de probabilités* (étant donné qu'il est demandé d'indiquer la signification d'une certaine valeur numérique qui correspond à une probabilité située sur une branche de l'arbre ; étant donné qu'il est demandé de donner/préciser la valeur de la probabilité d'un évènement présent sur une branche de l'arbre)

- T-CompletArb : *compléter un arbre de probabilités* (étant donné que les évènements ont déjà été nommés et placés sur l'arbre ; les données sont en fréquences relatives)

Les élèves viennent de terminer un moment de questions succinctes et posées oralement par l'enseignante. Ces questions ont permis de mobiliser des connaissances vues lors de la séance précédente qui ne sont pas encore totalement acquises par les élèves : formule de Poincaré qui donne la probabilité d'une union, critère d'indépendance de deux évènements, formule des probabilités totales.

Les élèves se mettent à travailler en autonomie et en groupe de trois ou quatre. L'enseignante se déplace dans la salle et envoie au fur et à mesure des élèves corriger au tableau les différentes questions. L'exercice proposé aux élèves est un extrait de sujet de baccalauréat provenant du manuel Indice (Poncy et al., 2012) dont l'énoncé est en figure 1.

La première question de cet exercice correspond au type de tâches T-CompletArb : *compléter un arbre de probabilités*. C'est un type de tâches qui est en réalité un ingrédient de la technique (au sens de Chaachoua, 2018) qui réalise le type de tâches T-ModéArb : *modéliser une situation probabiliste décrite en langage naturel par un arbre de probabilités*. Le type de tâches T-ModéArb a déjà été rencontré par les élèves en tant qu'ingrédient de technique permettant de calculer une probabilité simple relativement à T-CalcSimple. Cette praxéologie a été rencontrée dans un exemple du cours et traitée par l'enseignante lors de la séance n° 2. Il fallait dans cet exemple faire un arbre. Ici l'activité de production de représentation dans le registre « arbre » fait partiellement partie de la tâche prescrite. Il n'y a pas l'étape *identifier et nommer les évènements en jeu*, ni l'étape *tracer l'arbre et placer les évènements sur l'arbre* que l'on retrouve pour T-ModéArb. Ici il faut associer les évènements aux valeurs numériques de l'énoncé puis compléter l'arbre. Les variations de T-CompletArb présentes ici sont les suivantes :

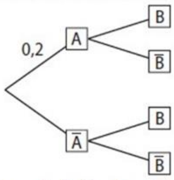
- *à partir d'un énoncé en langage naturel*. Il s'agit d'une variation qui nous semble importante d'un point de vue contextuel. Par ailleurs, cette variation de type de tâches va impacter l'activité de l'élève dans le traitement de la tâche relative à T-CompletArb, car elle induit une activité de conversion de registres de la part de l'élève : il doit passer du registre de la langue naturelle au registre de représentation de l'arbre ;

Sujet D

Capacités mises en œuvre

- *Compléter un arbre de probabilités*
- *Calculer et utiliser des probabilités conditionnelles*
- *Tester l'indépendance de deux événements*

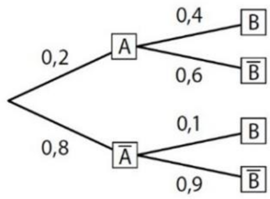
Une revue est proposée en deux versions : papier ou électronique. Il est possible de s'abonner à une seule des deux versions ou de s'abonner simultanément aux deux versions. Un centre d'appel est chargé de démarcher les personnes figurant sur une liste de lecteurs potentiels. On admet que :
– lorsqu'un lecteur potentiel est contacté par le centre d'appel, la probabilité qu'il s'abonne à la version papier est égale à 0,2 ;
– s'il s'abonne à la version papier, la probabilité qu'il s'abonne aussi à la version électronique est égale à 0,4 ;
– s'il ne s'abonne pas à la version papier, la probabilité qu'il s'abonne à la version électronique est égale à 0,1. Une personne figurant sur la liste de lecteurs potentiels est contactée par le centre d'appel. On note :
– A : l'événement « la personne s'abonne à la version papier » ;
– B : l'événement « la personne s'abonne à la version électronique ».



1. a. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.
b. Donner la probabilité de $\overline{B}$ sachant A et celle de $\overline{B}$ sachant $\overline{A}$.
2. a. Calculer la probabilité que la personne contactée s'abonne à la version papier et à la version électronique.
b. Justifier que la probabilité de l'événement B est égale à 0,16.
c. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
3. On suppose que la personne contactée s'est abonnée à la version électronique. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit aussi abonnée à la version papier ?

Sujet D

1. a.



b. $P_A(\overline{B}) = 0{,}6$ et $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0{,}9$.
2. a. $P(A \cap B) = 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08$.
b. $P(B) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = 0{,}08 + 0{,}08 = 0{,}16$.
c. A et B ne sont pas indépendants :

$$P(A) \times P(B) = 0{,}2 \times 0{,}16 = 0{,}032 \neq P(A \cap B).$$

3. $P_B(A) = \dfrac{0{,}08}{0{,}16} = \dfrac{1}{2}$.

Figure 1. Énoncé du sujet D (à gauche) — Corrigé issu du manuel du professeur (à droite)
Extraits du manuel Indice (p. 316)

– *étant donné que les évènements ont déjà été décrits et nommés dans le texte*. Cette variation nous semble importante, car elle provoque des adaptations dans l'activité de l'élève, la sous-activité d'organisation est impactée, l'élève n'a pas – pour résoudre T-CompletArb – à identifier les évènements en jeu ;

– *les données sont en fréquences relatives*. Cette variation va impacter l'activité de l'élève dans le traitement de la tâche relative à T-CompletArb : ici les données sont déjà dans le « bon » format pour être représentées sur l'arbre.

L'enseignante demande à un élève d'aller au tableau pour écrire la correction de cette première question. L'élève qui va au tableau pour corriger reproduit et complète l'arbre, mais il ne donne aucune explication oralement ce qui nous empêche d'obtenir des informations concernant la dimension *logos* de cette praxéologie. Ce que l'élève écrit au tableau se trouve dans la figure 2.

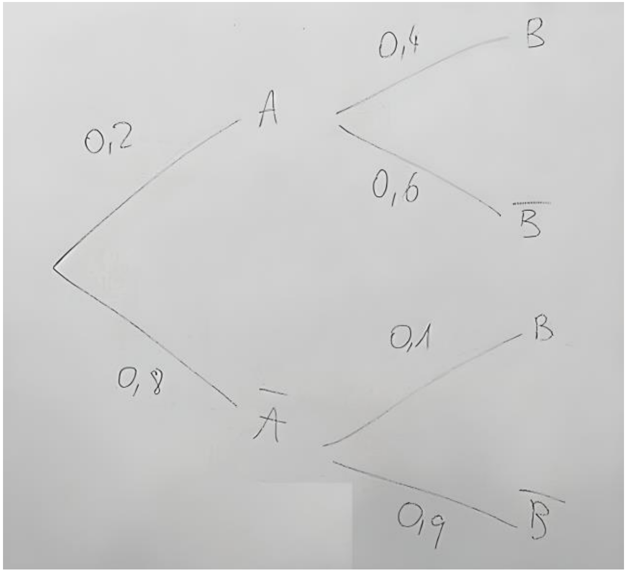


Figure 2. Extrait du tableau

Les variations susmentionnées semblent avoir été prises en charge par l'élève. En effet, les variations de T-CompletArb sont ici les mêmes que celles présentes dans l'exemple traité en cours lors de la séance n° 2. Ce dernier avait été traité en classe sous la forme d'interactions entre l'enseignante et les élèves, ces variations ont donc déjà été rencontrées par les élèves. L'enseignante précise à l'oral :

> Faites attention aux mots dans l'énoncé. Qu'est-ce qu'on nous demande exactement ?

Une élève répond :

> Reproduire et compléter.

Cet élève fait référence ici à l'activité cognitive de production de représentation, l'enseignante insiste :

> Donc on attend que toutes les branches soient reproduites et complétées.

La seconde question (1.b) de cet exercice correspond au type de tâches T-LirArb : *lire les données présentes sur un arbre*. Ici les évènements sont connus et nommés, la seule variation présente est la suivante : donner la valeur de la probabilité d'un évènement représenté sur une des branches de l'arbre. Cette variation impacte l'activité de traitement de l'élève. En effet, on lui demande ici une valeur numérique et non un évènement, il y a un changement de registres à effectuer. C'est un type de tâches et une variation déjà rencontrés lors d'un exercice durant la séance n° 2.

L'enseignante prend rapidement en charge la reconnaissance du type de tâches (il faut lire l'arbre) et de la variation. En effet, elle indique oralement à l'ensemble des élèves :

> C'est donner ceci cela et non pas calculer. Donc il n'y a pas de calcul, c'est juste une lecture dans l'arbre. Ce n'est pas étonnant, car on a dit « donner ».

Tout en circulant dans la classe, l'enseignante s'adresse à un élève après avoir regardé les notes de celui-ci :

> Ça, tu le lis dans l'arbre, il n'y a pas de calcul, c'est une probabilité conditionnelle.

L'enseignante prend ici en charge une partie de la résolution en indiquant qu'il s'agit d'une probabilité conditionnelle. Par cet élément de discours, l'enseignante justifie la technique en indiquant qu'il s'agit d'une probabilité conditionnelle apparente sur une des branches de l'arbre, l'arbre apparaît donc ici comme aide procédurale dans l'activité de traitement. Une élève est envoyée au tableau et corrige cette deuxième question sans donner oralement d'explication supplémentaire, nous n'avons donc pas d'élément concernant la dimension *logos* de cette praxéologie.

La troisième question de cet exercice (2.a) correspond au type de tâches T-CalcInter : *calculer la probabilité d'une intersection d'évènements*. Ce type de tâches a déjà été rencontré dans les exercices de la séance n° 2. Les variations associées à ce type de tâches sont très proches de celles rencontrées dans les questions précédentes, il y a donc une certaine routinisation de la technique à mettre en œuvre. Les variations présentes ici sont les suivantes :

– *à partir d'un énoncé en langage naturel* ;

– *étant donné que les évènements ont déjà été décrits et nommés dans le texte* ;

– *étant donné que la situation a déjà été représentée par un arbre*. Cette variation impacte les sous-activités d'organisation et de traitement de l'élève ;

– *les données sont en fréquences relatives*.

Le type de tâches T-CalcInter accompagné de la variation, *étant donné que la situation a déjà été représentée par un arb*re, a déjà été rencontré dans l'exemple du cours de la séance n° 2 en tant qu'ingrédient de technique du type de tâches T-

CalcProbaCond : *calculer une probabilité conditionnelle*. Dans cet exemple, l'enseignante avait pris en charge les sous-activités mathématiques d'organisation. Les ingrédients d'une technique sont, identifier l'évènement en jeu, à partir des données présentent sur l'arbre exprimer la probabilité d'intersection en fonction d'une probabilité conditionnelle, effectuer le calcul. L'arbre est donc un support à la technique. Ici, l'élève au tableau prend en charge les sous-activités de reconnaissance, d'organisation et de traitement de la tâche. Il n'a pas de difficulté et écrit ce qui suit : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}08$

L'élève ne donne pas d'explication supplémentaire, nous n'avons donc pas d'élément concernant la dimension *logos* de cette praxéologie.

La quatrième question (2.b) de cet exercice correspond au type de tâches T-CalcSimple : *calculer la probabilité d'un évènement simple*. Il a déjà été rencontré dans les exercices de la séance n° 2. Les variations présentes ici sont les suivantes :

– *étant donné que les évènements ont déjà été décrits et nommés dans le texte* ;

– *étant donné que la situation a déjà été représentée par un arbre* ;

– *les données sont en fréquences relatives*.

L'enseignante envoie au tableau un élève pour corriger la quatrième question. Après avoir circulé dans la classe, l'enseignante s'adresse aux élèves :

> Je ne le vois pas assez dans vos cahiers, d'après la formule des probabilités totales.

Il s'agit là d'un élément du discours de l'enseignante qui appelle la justification de la technique utilisée, nous sommes donc ici face à la dimension *logos* de la praxéologie.

Ce type de tâches a déjà été traité par les élèves, notamment avec l'enseignante lors de la première question de l'exemple traité lors de la séance n° 2. De ce fait, s'il est reconnu par les élèves grâce à l'enseignante ou à l'énoncé, la technique devient plus naturelle à mettre en œuvre et donc la reconnaissance de la technique est minorée. L'élève qui est au tableau corrige la question et écrit au tableau ce qui suit :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= 0{,}08 + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) \quad \text{d'après la formule des probabilités totales} \\ &= 0{,}08 + 0{,}1 \times 0{,}8 \\ &= 0{,}16 \end{aligned}$$

L'élève ne donne pas d'explication supplémentaire, mais il a justifié la formule algébrique utilisée par la formule des probabilités totales.

La cinquième question (2.c) correspond au type de tâches suivant T-EtudInd : étudier l'indépendance de deux évènements. Les variations présentes ici sont les suivantes :

– *étant donné que les évènements ont déjà été décrits et nommés dans le texte* ;

– *étant donné que la situation a déjà été représentée par un arbre* ;

– *les données sont en fréquences relatives*.

Étant donné que nous n'avons pas pu assister à la séance n° 3 qui était sur le thème de l'indépendance, nous ne pouvons pas apporter d'éléments sur les connaissances qui ont déjà été mises en fonctionnement ni sur les tâches qui ont déjà été proposées ou non sur le thème de l'indépendance de deux évènements.

En passant près d'un élève l'enseignante lui dit :

> Tu confonds évènements indépendants et évènements incompatibles. Et ici, ils ne sont surtout pas indépendants. Indépendant c'est la leçon qu'on vient de faire.

L'élève confond ici deux définitions : « les évènements A et B sont incompatibles $\Leftrightarrow$ $A \cap B = \emptyset$ » et « les évènements A et B sont indépendants $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ ». La caméra étant placée près d'un îlot de quatre élèves (que nous appellerons E1, E2, E3 et E4) nous avons pu recueillir des extraits de leurs échanges. Un élève (E2) s'adresse à un autre élève (E1) de son îlot :

> E2 : Comment tu justifies que deux évènements ne sont pas indépendants ?
> E1 : Tu fais A et B...
> E2 : Ah oui, A et B pas égal à…
> E3 : Il faut calculer avant

La sixième et dernière question (3.) de l'exercice correspond au type de tâches T-CalcProbaCond : *calculer une probabilité conditionnelle*. Ce type de tâches a déjà été rencontré dans les exercices de la séance n° 2. Les variations présentes ici sont les suivantes :

– *à partir d'un énoncé en langage naturel* ;

– *étant donné que les évènements ont déjà été décrits et nommés dans le texte* ;

– *étant donné que la situation a déjà été représentée par un arbre* ;

– *sans que l'évènement apparaisse sur l'arbre*. Cette variation impacte la sous-activité de reconnaissance du type de tâches, mais également l'activité de traitement, il s'agit ici d'un calcul et non de la lecture d'une branche de l'arbre ;

– *étant donné que les probabilités qui apparaissent dans la formule ont déjà été calculées*. Cette variation impacte l'activité de traitement, car l'élève – en utilisant les résultats aux questions précédentes – peut s'alléger une partie du traitement (ici le calcul) ;

– *les données sont en fréquences relatives*.

Un élève (E) s'adresse à l'enseignante (A) qui passe à côté de lui :

> E : En fait la question 3 elle embrouille. Enfin, elle n'est pas si compliquée, car la proba on l'a déjà !
> A : Ah ! On l'a déjà ? Tu es sûr ?

L'élève (E) hésite, bafouille (inaudible) puis reprend :

> E : Ça serait plutôt P(A sachant B) ?
> A : Il y a une conditionnelle, oui c'est P(A sachant B). Et on l'a où dans l'arbre ? »
> E : Non on ne l'a pas. »
> A : Ça c'est classique, la dernière question c'est une conditionnelle, mais pas lisible dans l'arbre, donc il faut la calculer.

Face à ce type de tâche, du point de vue de l'élève, il y a une adaptation qui est que l'évènement n'apparaît pas sur l'arbre. La sous-activité de reconnaissance attendue (quel calcul dois-je faire ?) est à la charge de l'élève, mais est ici prise en charge par l'enseignante. L'élément de discours suivant « ça c'est classique, la dernière question c'est une conditionnelle, mais pas lisible dans l'arbre, donc il faut la calculer », fait référence à la dimension *logos* de la praxéologie. L'enseignante justifie la nécessité de faire un calcul (ici la technique) par le fait que l'évènement n'apparaisse pas sur l'arbre (technologie).

Un second élève (P) du même îlot questionne l'enseignante (A) à propos de cette dernière question :

> Mais dans la question, le texte peut prêter à confusion, le « aussi » on peut le comprendre comme « et » ou « en plus » ? Ça peut être l'intersection ?

L'enseignante accompagne la reconnaissance du bon type de tâches et répond à l'élève :

> Non parce que c'est quand même une structure particulière de phrase. C'est même deux phrases et j'ai quelque chose qui est certain. On me dit que…

Il s'agit ici d'aides procédurales que l'enseignante adresse à l'élève. Une des adaptations ici est de reconnaître qu'il faut calculer une probabilité conditionnelle. De plus, l'évènement n'apparaît pas sur l'arbre, il s'agit d'une autre adaptation, il y a donc une activité de reconnaissance à la charge de l'élève (quel calcul dois-je faire ?).

Un troisième élève de l'îlot s'adresse à l'enseignante :

> Ce genre de question on ne peut pas y répondre si on n'a pas fait le reste…

Un élève est envoyé au tableau pour corriger cette dernière question. Il n'y aura pas de remarque de l'enseignante ni d'interaction orale de cet élève avec la classe concernant la réponse écrite au tableau. L'élève écrit au tableau :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}08}{0{,}16} = 0{,}5$$

Dans cette analyse nous avons observé des choix de l'enseignante qui jouent sur les variations et la mise en œuvre des techniques. Nous nous intéressons dans la section suivante à un épisode à l'université.

5. Observation et analyse à l'université : épisode 4

Nous présentons dans cette partie l'analyse d'un exercice traité lors d'une séance de travaux dirigés à l'université auprès d'étudiants en première année de filière de biologie. La séance de cours magistral (CM), qui a précédé le TD, a permis de présenter quelques exemples, traités exclusivement par l'enseignant à travers des diapositives, présentant les types de tâches suivants : T-CalcSimple, T-CalcProbaCond et T-CalcEtudInd.

L'exercice 7 (figure 3) a été proposé à la fin de cette séance de TD, qui est la seule séance sur le thème des probabilités conditionnelles au sein de ce module de probabilités.

Exercice 7. Le quart d'une population est vacciné contre le choléra. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour 4 non-vaccinés. En plus, parmi les vaccinés il y a une personne sur 12 qui tombe malade. Quelle est la probabilité qu'un non-vacciné tombe malade ?

Figure 3. Exercice issu de la feuille de TD du cours de probabilités de première année de biologie

Les types de tâches et variations qui ont été rencontrés par les étudiants tout au long de cette séance de TD sont les suivants :

– T-EtudInd : *étudier l'indépendance de deux évènements* (à partir d'un énoncé en langage naturel ; étant donné que les évènements ont déjà été décrits et nommés dans le texte ; les données sont en fréquences naturelles ; sans que les évènements aient été explicitement nommés dans le texte)

- T-CalcUnion : *calculer la probabilité d'une union d'évènements* (à partir d'un énoncé en langage naturel ; sans que les évènements aient été explicitement nommés dans le texte)
- T-CalcProbaCond : *calculer une probabilité conditionnelle* (à partir d'un énoncé en langage naturel ; sans que les évènements aient été explicitement nommés dans le texte ; étant donné que les évènements ont déjà été décrits et nommés dans le texte ; les données sont en pourcentages)
- T-Assoc : *associer les valeurs de l'énoncé à des probabilités d'évènements* (à partir d'un énoncé en langage naturel ; étant donné que c'est la première question de l'exercice ; étant donné que les évènements ont déjà été décrits et nommés dans le texte ; les données sont en pourcentages)
- T-CalcBar : *calculer, à partir de la probabilité d'un évènement, la valeur de la probabilité de son évènement contraire* (à partir d'un énoncé en langage naturel ; étant donné que c'est la première question de l'exercice ; étant donné que les évènements ont déjà été décrits et nommés dans le texte ; les données sont en pourcentages)

L'exercice 7 présente une seule et unique question, celle-ci relève du type de tâches T-CalcProbaCond avec une forte modélisation laissée à la charge de l'étudiant. Les variations de type de tâches sont les suivantes :

- *à partir d'un énoncé en langage naturel*. Cette variation impacte l'activité de reconnaissance du type de tâches par l'étudiant. Par reconnaissance de la tâche, nous entendons *associer la tâche prescrite à un type de tâches pour lequel une technique est connue* ;
- *sans que les évènements n'aient été décrits ni nommés dans le texte*. Cette variation influe sur les sous-activités d'organisation à mettre en œuvre par l'étudiant. En effet, il doit d'abord identifier les évènements ;
- *les données sont en fréquences naturelles*. Cette variation impacte l'activité de traitement des étudiants. Une étape supplémentaire, de transformation des données en un format plus à même d'être manipulé, est nécessaire pour avoir accès aux probabilités des évènements donnés dans l'énoncé.

Les étapes de l'activité de modélisation telle qu'elle est présentée au travers de cet exercice sont les suivantes : identifier et nommer les évènements décrits dans l’énoncé, associer les valeurs numériques de l’énoncé à des probabilités d’évènements (T-Assoc), interpréter la question et formuler la tâche.

L’enseignant donne des éléments de contexte aux étudiants de biologie :

> C’est un exercice typique, car c’est l’utilisation du calcul de probabilités pour avoir des statistiques en épidémiologie. On cherche à savoir, si vous êtes vaccinés, quelles sont les chances pour que vous tombiez malade face à cette épidémie de choléra. En fait, ça peut être utile, parce que si vous avez des données statistiques, notamment dans des modèles bio-médico, dans des enquêtes épidémiologiques, savoir calculer certaines probabilités d’une certaine manière plutôt qu’une autre, ça peut être intéressant parce que le coût d’implémentation de votre étude n’est pas forcément le même.

L’enseignant commence la correction et demande aux étudiants quels sont les évènements que l’on peut considérer d’après l’énoncé, il prend ainsi en charge la variation *sans que les évènements n’aient été décrits ni nommés dans le texte*. Un étudiant répond :

> La probabilité d’être vacciné c’est un quart.

L’enseignant attendait ici une réponse différente et formulée dans un registre différent. Il lui répond :

> Quels sont les évènements qu’il faut considérer ? Avant de mettre les nombres, il faut les évènements. Typiquement, on a quoi dans cet énoncé ? On a ceux qui sont vaccinés et ceux qui sont malades, donc on a deux évènements.

Il prend finalement en charge l’identification des évènements et leur dénomination. De cette manière, la sous-activité d’organisation et la sous-activité de traitement sont prises en charge ici par l’enseignant. Il écrit au tableau (figure 4) :

On considère deux évènements :

M = le patient est malade

V = le patient est vacciné

On dispose des informations suivantes :

$$P(V) = \frac{1}{4}$$

Figure 4. Extrait du tableau

L’enseignant (P) demande aux étudiants de poursuivre l’identification des données présentes dans l’énoncé, un étudiant (E) répond :

> P : Qu’est-ce qu’on connaît encore ?
> E : La probabilité d’être malade sachant qu’on est vacciné c’est 1/12.

> P : Et sachant qu'on est malade, la probabilité d'être vacciné c'est 1/5.

Puis l'enseignant écrit au tableau (figure 5) :

$$P(M|V) = \frac{1}{12} \quad ; \quad P(V|M) = \frac{1}{5}$$

Figure 5. Extrait du tableau

L'enseignant prend en charge les conversions de registres de la langue naturelle vers le registre symbolique probabiliste.

Il reste à interpréter la question et à identifier la probabilité recherchée, c'est-à-dire la reconnaissance du type de tâches. Un étudiant (E_1) propose quelque chose puis un autre (E_2) complète. L'enseignant (P) clôt l'échange :

> E1 : Qu'on soit vacciné sachant qu'on est malade... Qu'on soit non vacciné sachant qu'on est malade.
> E2 : Non c'est l'inverse !
> P : C'est le problème, il faut réussir à traduire le français dans les maths ce qui n'est pas toujours évident.

Une étudiante propose finalement :

$$P(M|\overline{V})$$

L'enseignant conclut :

> Quelqu'un qui n'est pas vacciné quelles sont ses chances d'être malade ? Comme ça vous pourrez comparer à la probabilité d'être malade sachant qu'on est vacciné, et savoir quelle est l'efficacité du vaccin dans la population. Typiquement, vous avez un certain nombre de données épidémiologiques, vous savez parmi les gens vaccinés quelle est la proportion de ceux qui sont malades et vous voulez connaître la probabilité d'être malade quand on n'est pas vacciné, de façon à comparer l'efficacité du vaccin par rapport au taux de prévalence dans la population.

Puis il écrit au tableau (figure 6) :

On cherche à déterminer :

$$P(M|\overline{V}) = \frac{P(\overline{V}|M)P(M)}{P(\overline{V})}$$

On connait $P(V)$ et $P(\overline{V}|M) = 1 - P(V|M) = \frac{4}{5}$

Figure 6. Extrait du tableau

L'enseignant entoure dans la formule les probabilités qui sont connues d'après l'énoncé et celles qui ne le sont pas, il écrit au tableau les valeurs des probabilités qui sont connues (figure 7).

$$P(\overline{V}) = \frac{3}{4}$$
$$P(\overline{V}|M) = \frac{4}{5}$$
$$P(\overline{M}|V) = 1 - P(M|V) = \frac{11}{12}$$

Figure 7. Extrait du tableau

L'enseignant s'adresse à la classe :

> Ici, on cherche *P*(*M*), comment on fait ? Il faut aussi se souvenir qu'on peut utiliser la formule des probabilités totales. Est-ce que vous pouvez m'exprimer la probabilité de *M* en fonction de l'évènement *V* ?

En indiquant qu'il faut exprimer la probabilité de *M* par la formule des probabilités totales, l'enseignant prend ici en charge la sous-activité de reconnaissance de la technique à mettre en œuvre et la sous-activité d'organisation. Cet élément du discours fait également référence à la dimension *logos* de la praxéologie, on utilise la formule des probabilités totales pour calculer *P*(*M*) car on connait les probabilités conditionnant l'apparition de l'évènement *M*. Il écrit au tableau (figure 8) :

Or : $P(M) = P(M|V)P(V) + P(M|\overline{V})P(\overline{V})$

Figure 8. Extrait du tableau

L'enseignant entoure d'une certaine couleur les probabilités, dans l'expression ci-dessus, qui sont connues d'après l'énoncé et termine la résolution de l'exercice en posant $p = P(M|\overline{V})$ la probabilité recherchée. Il écrit au tableau (figure 9):

En remplaçant les valeurs numériques et en posant $p = P(M|\overline{V})$ on obtient :

$$p = \frac{\frac{4}{5}\left(\frac{1}{12} \times \frac{1}{4} + p\frac{3}{4}\right)}{\frac{3}{4}}$$

Cela donne $p = \frac{1}{45} + \frac{4}{5}p$ et finalement : $p = \frac{1}{9}$

Figure 9. Extrait du tableau

6. Comparaison entre les deux institutions

Le type de tâches commun aux deux exemples présentés dans les parties 4 et 5 est T-CalcProbaCond : calculer une probabilité conditionnelle. Il s'agit donc d'un type de tâches rencontré dans le secondaire qui fait à nouveau partie du savoir enseigné dans le supérieur. Nous nous concentrons au début de cette partie, sur ces deux exemples et nous les comparons, en termes d'activités des élèves (et étudiants) et de praxéologies enseignées associées.

Ce type de tâches apparaît à la sixième et dernière question de l'exercice présenté dans le secondaire tandis qu'il est l'unique question de l'exercice à l'université. Une variation apparaît donc à l'université : *étant donné qu'il s'agit de la seule et unique question de l'exercice*. Le fait qu'il s'agisse de l'unique question de l'exercice impacte la sous-activité d'organisation (et donc de traitement) à la charge de l'étudiant. Il s'agit ici d'une tâche complexe au sens de Robert et Vandebrouck (2014), car elle combine plusieurs sous-activités à mettre en œuvre. Dans le secondaire en revanche, et d'ailleurs l'enseignante le souligne elle-même, il est assez classique que la dernière question d'un exercice soit une probabilité conditionnelle qu'il faille calculer en utilisant les résultats issus des questions précédentes. En effet, dans l'exercice présenté dans la partie 4 un certain nombre de questions ont précédé ce dernier calcul, permettant ainsi de réduire les sous-activités d'organisation et de traitement à la charge de l'élève. Autrement dit, les premières questions présentent une description de la technique à mettre en œuvre pour résoudre la tâche T-CalcProbaCond proposée dans la dernière question.

Dans les deux exercices (lycée et université), le type de tâches T-CalcProbaCond présente des variations similaires. En effet, l'énoncé de la question est en langage naturel et l'évènement, dont on cherche à connaître la valeur de la probabilité, n'apparaît pas explicitement ni sur un arbre de probabilités (question 3, exercice du secondaire) ni dans l'énoncé de l'exercice. Ces variations induisent des adaptations à la charge des élèves et étudiants. Nous relevons que les sous-activités mathématiques qui en découlent (y compris les activités cognitives faisant référence aux registres de représentation) à la charge des élèves sont finalement assez similaires à celles à la charge des étudiants. Dans l'exemple présenté au secondaire, la reconnaissance du type de tâches (quel calcul dois-je faire ?) est à la charge de l'élève, mais est rapidement prise en charge par l'enseignante. Dans l'exemple présenté à l'université la reconnaissance est à la charge des étudiants, mais celle-ci se fait après que les évènements en jeu ont été identifiés et nommés par l'enseignant. L'organisation des différentes étapes, quant à elle, est prise en charge par l'enseignant. Les étudiants n'ont donc plus à leur charge que le traitement de chacune des différentes étapes précisément identifiées par l'enseignant. Les étudiants à l'université n'ont finalement pas mis en fonctionnement les connaissances de façon plus complexe que dans le secondaire même si la tâche de prime abord est plus complexe (d'après la caractérisation de Robert et Vandebrouck, 2014).

Les techniques mises en œuvre dans les deux exercices pour résoudre T-CalcProbaCond diffèrent par la présence des variations mentionnées ci-dessus. À partir de l'exemple présenté, nous observons qu'au lycée, les ingrédients qui forment une technique sont : identifier l'évènement dont on cherche à déterminer la probabilité, utiliser la définition d'une probabilité conditionnelle, remplacer les deux termes par les valeurs préalablement calculées. Si les ingrédients sont si peu nombreux, c'est notamment, car cette question arrive comme la dernière de l'exercice, de nombreuses étapes ont déjà été prises en charge par l'énoncé. À l'université, tout un travail de modélisation (au sens restreint présenté dans l'exercice) est à faire. Les ingrédients (au sens de Chaachoua, 2018) qui composent la technique sont ici : identifier les évènements en jeu, associer les valeurs numériques de l'énoncé à des probabilités d'évènements, identifier l'évènement dont on cherche à déterminer la probabilité, utiliser la formule de Bayes, exprimer chacun des termes en fonction des données présentes dans l'énoncé, résoudre une équation algébrique dont l'inconnue est la probabilité recherchée.

Nous élargissons certains résultats en nous appuyant sur des observations menées dans le secondaire et à l'université dont les détails sont à retrouver dans (Doukhan, 2021, dans le chapitre 5).

Une différence que nous relevons à l'université vis-à-vis du lycée est la non-utilisation du registre de représentation « arbre de probabilités ». Il s'agit selon nous d'un point important en ce qui concerne la transition. En effet, dans le secondaire l'arbre de probabilités a une place majeure. Dans l'exemple présenté dans la partie 4, il apparaît à la fois en tant qu'intermédiaire dans l'activité de modélisation (première question : T-CompletArb), comme aide procédurale (dimension *logos*) dans l'activité de traitement (seconde question : T-LirArb), mais aussi comme ingrédient de la technique (dimension *praxis*) lors du calcul de la probabilité de l'intersection (T-CalcInter). Les changements de registres liés à une activité de modélisation du type passage du registre de la langue naturelle au registre de représentation arbre sont alors à la charge de l'élève au lycée – c'est le cas de la première question de l'exemple présenté à la partie 4. Dans l'exemple du TD de l'université, l'arbre pourrait permettre de représenter la situation probabiliste décrite par l'énoncé et permettre de faire apparaître les données et l'évènement dont on cherche à déterminer la probabilité. En revanche, dans le cas de la recherche d'un inversement de conditionnement (ce qui est le cas dans l'exemple traité) l'arbre n'est pas d'une utilité technique comme ce qui est le cas dans la question 2 de l'exemple du lycée. C'est pour cela que le recours à la formule de Bayes est préféré. De façon systématique, désormais, à l'université, l'arbre ne fait plus partie du savoir enseigné, ni dans la composante *praxis*, ni dans la composante *logos*. On peut donc s'interroger sur la disparition de l'arbre qui intervenait comme soutien dans l'activité mathématique pour les élèves de terminale, à la fois comme élément de la *praxis*, du *logos*, et comme support à l'activité de modélisation. Nous y reviendrons dans la partie de discussion.

Une nouvelle notation apparaît à l'université, pour une notion qui existait déjà dans le secondaire. Il s'agit de la notation de la probabilité conditionnelle notée $P(A|B)$ au lieu de $P_B(A)$. Nous ne l'avons pas détaillé ici, mais durant le cours magistral qui précède cette séance de TD l'enseignant motive ce changement de notation en expliquant qu'elle est plus facilement mémorisable pour un public de biologistes (Doukhan, 2021, p. 198). L'enseignant s'adapte au public et argumente en faveur de cette notation, car elle représente, selon lui, un moyen mnémotechnique de se souvenir de la définition d'une probabilité conditionnelle.

Nous venons de comparer les deux exemples présentés dans la partie 4 et la partie 5, en termes de praxéologies, d'activités des élèves (et étudiants) et de pratiques des enseignants. La comparaison menée nous a conduit à formuler des hypothèses complémentaires que nous présentons dans la partie suivante.

7. Discussion

À partir des principaux éléments de résultats présentés dans la partie précédente, nous souhaitons désormais examiner en quoi ces constats dépassent le cas des deux séances observées. Nous nous appuyons pour cela sur les analyses d'autres observations que nous avons menées dans le secondaire et à l'université (Doukhan, 2021, chapitre 5).

De façon quasi systématique, dans le secondaire, et c'est notamment le cas dans l'exemple présenté à la partie 4, l'enseignante prend en charge la reconnaissance du type de tâches et de la variation. Nous pouvons alors nous demander si les élèves savent prendre en charge ces sous-activités de façon autonome. La complémentarité entre TAD et TADM développée dans notre méthodologie nous permet d'affiner ce questionnement. Les élèves sont-ils capables de reconnaitre le type de tâches (au sens de « associer à la tâche prescrite un type de tâches dont on connait une technique »), qui leur est adressé ? Sont-ils capables de mettre en œuvre la technique adaptée et notamment les ingrédients de la technique sans que l'enseignante prenne en charge une partie de l'organisation ?

À travers l'exemple présenté à la partie 5, nous avons pu relever qu'à l'université l'enseignant prend lui aussi en charge certaines des sous-activités et notamment les conversions de registres lorsqu'il s'agit de passer de la langue naturelle (réponse proposée par un étudiant) au registre symbolique probabiliste (trace écrite au tableau). Ce constat a également été fait dans les autres séances (Doukhan, 2021). On peut alors se demander dans quelle mesure ces conversions sont si naturelles pour les étudiants, et si les techniques (au sens de la TAD) qui leur sont associées ont suffisamment été mises en fonctionnement dans le secondaire pour être disponibles désormais à l'université. L'intérêt d'articuler description des praxéologies et prise en compte de la dimension cognitive de l'activité du sujet apparaît à nouveau lorsque l'on cherche à questionner l'utilisation et la conversion de registres de représentations. Au moyen d'un test, composé d'exercices ciblés, et d'entretiens, nous avons mené une étude auprès de ces élèves de terminale scientifique et de ces étudiants afin de répondre à ces questions. Nous explorons actuellement ces questions dans une recherche en cours.

La non-utilisation, dans le supérieur (du moins dans le cours universitaire où se déroulent nos observations), d'arbres de probabilités comme intermédiaires dans la représentation d'une situation probabiliste nous questionne. En effet, des auteurs comme Martignon et Wassner (2002), expliquent que l'utilisation de représentations permet une meilleure compréhension des problèmes par les étudiants. Concernant les arbres de probabilités en particulier, Diaz et De la Fuente (2007) ajoutent qu'un intérêt de leur utilisation est qu'ils permettent de faire apparaître une grande quantité d'informations grâce à leur lisibilité. L'utilisation d'un arbre dans l'exemple présenté à la partie 5 aurait ainsi pu faciliter la résolution du problème par les étudiants en permettant la représentation de la situation probabiliste étudiée.

En appui sur la comparaison présentée dans la partie 6 et sur les analyses menées à l'université pour ce cours de probabilités, nous constatons que les contenus ne sont pas particulièrement plus abstraits ni plus étoffés à l'université. Les nouveautés en termes de praxéologies enseignées dans le module d'université, tout du moins en ce qui concerne le bloc *praxis* que nous avons principalement observée, sont assez peu nombreuses par rapport à ce que nous avons observé en classe de terminale scientifique. On peut relever la technique de l'utilisation de la formule de Bayes (sans qu'elle soit nommée) pour le calcul de $P\left(M\middle|\overline{V}\right)$.

Le croisement entre TAD et TADM nous permet enfin d'apporter un éclairage quant aux éléments de discours. En effet, la dimension *logos* des praxéologies enseignées est très peu perceptible chez les élèves et étudiants, elle est cependant présente dans le discours des enseignants, notamment dans le secondaire où l'enseignante en formulant des aides ou des indications apporte des éléments de technologies justifiant les techniques à mettre en œuvre.

À partir des analyses présentées dans la partie 5, nous pouvons affirmer que la tâche associée au type de tâches T-CalcProbaCond rencontré à l'université, dans le cadre de ce cours, est complexe. En effet, l'étudiant doit ici reconnaitre le type de tâches (dans le sens, associer à la tâche prescrite un type de tâches dont il connait une technique), puis prendre en charge l'organisation et le traitement de la technique à mettre en œuvre. Mais la complexité est également dans la mise en œuvre de la technique qui est composée d'un grand nombre d'ingrédients, contrairement à ce que nous avons pu observer dans le secondaire où la description de la technique à mettre en œuvre est prise en charge par l'énoncé et le découpage en sous-questions.

8. Conclusion

Nous avons présenté ci-dessus des résultats concernant l'enseignement des probabilités conditionnelles à la transition secondaire-supérieur. Toutefois, l'objet de cet article dépasse ces résultats, puisqu'il concerne la proposition d'une approche théorique et méthodologique spécifique à l'étude de la transition secondaire-supérieur.

L'articulation des cadres de la TADM et de la TAD, avec au cœur le concept nouveau de variation de type de tâches, nous permet de mettre en évidence des éléments saillants de la transition secondaire-supérieur dans le cas de l'enseignement des probabilités conditionnelles. Nous les reprenons ci-dessous.

Dans une perspective institutionnelle qui s'inscrit dans le cadre de la TAD, nous avons souligné que les nouveautés en termes de praxéologies enseignées dans le module d'université sont assez peu nombreuses par rapport au lycée. Il s'agit là d'un constat s'inscrivant principalement dans la dimension *praxis* des praxéologies.

Par ailleurs, les variations de type de tâches, leurs prises en charge ou non dans la résolution de la tâche, par l'enseignant ou l'enseignante, l'énoncé ou l'élève ainsi que leurs impacts sur les techniques a guidé notre analyse présentée aux parties 5 et 6. Par exemple, le fait qu'il s'agisse de l'unique question de l'exercice (variation) impacte la sous-activité d'organisation et de traitement, ainsi que la technique et sa mise en œuvre.

L'articulation de ces outils théoriques nous a permis de nous pencher sur la manière dont la complexité d'une tâche impacte l'organisation praxéologique associée et en particulier les techniques et leurs mises en œuvre. C'est notamment le cas de la tâche proposée à l'université et présentée à la partie 5, cette tâche est complexe et appelle des adaptations en termes d'organisation, de traitement. Le nombre important d'ingrédients de la technique nécessaire à la résolution participe à la complexité de la tâche du point de vue de l'étudiant. Par ailleurs, la gestion de la tâche dans le déroulement modifie cette complexité *a priori*.

En ce qui concerne les activités (cognitives) de production et de conversion de registres de représentations, nous soulignons que l'arbre de probabilités a une place très importante dans l'enseignement secondaire, à la fois comme intermédiaire dans l'activité de modélisation, comme aide procédurale dans l'activité de traitement, mais aussi comme ingrédient de la technique lors du calcul de probabilités. Ce n'est plus le cas à l'université ou le registre symbolique probabiliste est préféré pour la résolution (algébrique) des problèmes de probabilités.

Le croisement entre TAD et TADM nous a également permis d'apporter un éclairage sur certains éléments de discours des enseignants et ainsi considérer la dimension médiative de l'activité des sujets. En effet, nous avons relevé que la dimension *logos* des praxéologies enseignées est relativement absente chez les sujets, mais présente dans le discours des enseignants. C'est notamment le cas dans le secondaire où l'enseignante en formulant des aides ou des indications apporte des éléments de technologies justifiant les techniques à mettre en œuvre.

Enfin, concernant les aspects de modélisation, le modèle est généralement donné dans les exemples et exercices proposés pour le thème des probabilités conditionnelles. La modélisation laissée à la charge du sujet est assez faible au sens de l'activité de modélisation présentée par Derouet (2022), car elle ne présente que quelques étapes qui sont : identifier les évènements à partir d'un énoncé en langage naturel ou encore représenter la situation probabiliste à travers un arbre de probabilités. Ces étapes nécessitent la mise en œuvre de sous-activités de production et conversion de registres, de type passage du registre de la langue naturelle au registre des arbres de probabilités, mais ont également un impact sur les mises en œuvre des techniques pour résoudre la tâche.

Ces choix théoriques nous ont aussi amenée à adopter une méthodologie spécifique. En effet, si notre étude globale a débuté avec la comparaison des institutions (manuel, polycopiés de cours, etc.) dont les détails sont à retrouver dans (Doukhan, 2021), nous allons plus loin en comparant les mises en œuvre en classe de ces supports. Nous considérons en effet que ces mises en œuvre sont caractéristiques de l'institution. Cette méthodologie est conçue en cohérence avec notre cadre théorique original, elle permet de prendre en compte les différences institutionnelles, mais également le point de vue des acteurs et notamment le contexte dans lequel sont proposées les tâches. Les limites que présente cette méthodologie sont liées à la seule observation d'une classe et d'une enseignante dans le secondaire, mais aussi d'un seul enseignant à l'université. Il n'est pas certain que ces sujets soient représentatifs des institutions, aussi, pour lever ces limites, nous envisageons d'ouvrir nos observations à d'autres terrains, notamment dans le supérieur.

Enfin, puisque nous nous situons ici au niveau des programmes du secondaire en vigueur jusqu'en 2020, les changements de programme majeurs qui ont eu lieu dans le secondaire en France impliquant la disparition des filières générales S, ES et L ne font pas l'objet du travail présenté. Il s'agit là de perspectives à ce travail étant donné que ces changements soulèvent de nombreux questionnements quant à la transition secondaire-supérieur.

Bibliographie

ARTIGUE, M. (2004). *Le défi de la transition secondaire-supérieur. Que peuvent nous apporter les recherches en didactique des mathématiques* [communication orale]. Premier congrès franco-canadien de sciences mathématiques.

BAKKER, A., HAHN, C., KAZAK, S., & PRATT, D. (2018). Research on probability and statistics education. Dans T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, K. Ruthven (dir.), *Developing Research in Mathematics Education: twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (p. 46-59). Routledge.

CHAACHOUA, H. (2018). T4TEL un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. Dans J. Pilet & C. Vendeira (dir.), *Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM*. IREM de Paris - Université Paris Diderot. https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/PS/IPS19021/IPS19021.pdf

CHEVALLARD, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. Dans R. Noirfalise (dir.), *Actes de l'université d'Été de didactique de la Rochelle* (p. 91-118). IREM de Clermont-Ferrand.
https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/WD/IWD99008/IWD99008.pdf

CHEVALLARD, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. Dans S. Maury & M. Caillot (dir.), *Rapport du savoir et didactiques* (p. 81-104). Editions Fabert. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Approche_anthropologique_rapport_au_savoir.pdf

CHIEL, H. J., MCMANUS, J. M., & SHAW, K. M. (2010). From biology to mathematical models and back: Teaching modeling to biology students, and biology to math and engineering students. *CBE-Life Sciences Education*, *9*(3), 248-265.

DEROUET, C. (2022). Caractérisation de démarches de modélisation probabiliste. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *27*, 89-131.

DIAZ, C., & DE LA FUENTE, I. (2007). Assessing students' difficulties with conditional probability and bayesian reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *2*(3), 128-148.
https://www.iejme.com/download/assessing-students-difficulties-with-conditional-probability-and-bayesian-reasoning.pdf

DOUKHAN, C. (2021). *Modèles praxéologiques dans la transition secondaire-supérieur : le cas des probabilités en filière biologie* [thèse de doctorat, Université de Bretagne Occidentale]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03632311/document

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*, 37-65.

EICHLER, A., & VOGEL, M. (2014). Three approaches for modelling situations with randomness. Dans E. J. Chernoff & B. Sriraman (dir.), *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives* (p. 75-99). Springer.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A., GUEUDET, G., BARQUERO, B., & ROMO-VÁZQUEZ, A. (2021). Mathematics and other disciplines, and the role of modelling: advances and challenges. In V. Durand-Guerrier, R. Hochmut, E. Nardi, & C. Winsløw (dir.), *Research and development in university mathematics education* (pp. 169–189). Routledge ERME Series: New Perspectives on Research in Mathematics Education.

GUEUDET, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 237-254.

GUEUDET, G., & THOMAS, M. (2019). Secondary-tertiary transition in mathematics education. Dans S. Lerman (dir.), *Encyclopedia of mathematics education* (p. 762-766). Springer.

GUEUDET, G., & VANDEBROUCK, F. (2022). Transition secondaire-supérieur: Ce que nous apprend la recherche en didactique des mathématiques. *ÉpiDEMES, 1*. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-03225490v2/document

HEUBLEIN, U. (2014). Student drop-out from german higher education institutions. *European Journal of Education, 49*(4), 497-513.

HUERTA, M. P. (2014). Researching conditional probability problem solving. Dans E. Chernoff & B. Sriraman (dir.), *Probabilistic Thinking. Adances in Mathematics Education* (p. 613-639). Spinger.

JOLIVET, S., LESNES-CUISINIEZ, E. & GRUGEON-ALLYS, B. (2021). Conception d'une plateforme d'apprentissage en ligne en algèbre et en géométrie : prise en compte et apports de modèles didactiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 26*, 117-156.

MARTIGNON, L., & WASSNER, C. (2002). Teaching decision making and statistical thinking with natural frequencies. Dans B. Phillips (dir.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. https://iase-web.org/documents/papers/icots6/10_52_ma.pdf?1402524959

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (MEN). (2011). Programme de l'enseignement des mathématiques. Classe terminale de la série scientifique. *Bulletin Officiel spécial du 13 octobre 2011*. https://cache.media.education.gouv.fr/file/special_8_men/98/4/mathematiques_S_195984.pdf

NECHACHE, A. (2016). *La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire* [Thèse de doctorat, Université Paris Diderot Paris 7].

PARZYSZ, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *16*, 127-147.

PONCY, M., MENY, J., MOUNIER, F., VIEUDRIN, D., VINCEROT, F., BONNAFET, J., & RUSSIER, M. (2012). *Indice Mathématiques Spécialité Tle S*. Bordas.

ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'Université. *Recherche en didactique des mathématiques*, *18*(2), 139-190.

ROBERT, A., & VANDEBROUCK, F. (2014). Proximités en acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *34*(2-3), 239-285.

ROGALSKI, J. (2008). Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Dans F. Vandebrouk (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (p. 23-30). Octarès Editions.

ROGALSKI, J. (2012). Théorie de l'activité et didactique pour l'analyse conjointe des activités de l'enseignant et de l'élève. *International Journal for Studies in Mathematics Education, 5*(1). http://periodicos.uniban.br

VANDEBROUCK, F. (dir.). (2008). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants.* Octarès Editions.

VANDEBROUCK, F. (2018). Activity theory in French didactic research. Dans G. Kaiser, H. Forgasz, M. Graven, A. Kuzniak, E. Simmt, & B. Xu (dir.), *Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education* (p. 679-698). Springer.

VIIRMAN, O., & NARDI, E. (2018). Negotiating different disciplinary discourses: biology students' ritualized and exploratory participation in mathematical modeling activities. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(2).

CAMILLE DOUKHAN

LISEC UR2310, Université de Strasbourg, UL, UHA

camille.doukhan@espe.unistra.fr

JEAN-BAPTISTE LAGRANGE

NOTE DE LECTURE

MATHEMATICS EDUCATION IN THE AGE OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE. HOW ARTIFICIAL INTELLIGENCE CAN SERVE MATHEMATICAL HUMAN LEARNING.[1]

Contexte

Selon le chapitre de présentation, le livre vise à mettre en lumière la contribution de l'intelligence artificielle à « l'éducation mathématique ». En premier lieu, il convient de s'entendre sur les termes. « L'éducation mathématique » (*mathematics education* en anglais), même complétée par « recherche en » couvre un champ plus large que la didactique telle qu'on l'entend dans le contexte francophone. De plus, selon moi, l'éducation mathématique se distingue de la didactique par son orientation pragmatique ; elle s'intéresse à « est-ce que ça marche ? » plus souvent qu'à « pourquoi ça marche ? ». Le livre présenté ici est bien représentatif de ces deux caractères : une grande diversité de préoccupations et de situations, ainsi que des approches s'appuyant sur l'expérience plus souvent que sur une problématique de recherche.

Il convient de s'entendre aussi sur le terme « Intelligence Artificielle ». Le propos introductif (*foreword*) de Nicolas Balacheff propose de distinguer des *machines d'IA* mettant en œuvre des algorithmes et des modes de représentation issus de l'IA comme domaine de l'informatique, et ce qu'il appelle les « machines mathématiques intelligentes » (*Smart mathematical machines*) dont il fait remonter la généalogie jusqu'à la machine arithmétique de Pascal, en passant par les micromondes (*micro-worlds*) et la Géométrie Dynamique. Balacheff souligne :

> D'une part, les machines d'IA (…) ont donné des résultats prometteurs pour l'acquisition de compétences techniques, mais elles sont limitées lorsqu'il s'agit de problèmes, ce qui restreint leur impact sur le développement d'une

---

[1] Richard, P.R., Vélez, M.P. et Van Vaerenbergh, S. (dir.). (2022). *Mathematics Education in the Age of Artificial Intelligence. How Artificial Intelligence can Serve Mathematical Human Learning*. Springer, Cham.

> compréhension des mathématiques. D'un autre côté, les machines mathématiques intelligentes (smart) sont des outils efficaces pour concevoir des situations problématiques par la possibilité qu'elles offrent de créer des champs d'expérience mathématique. (p. ix).

Balacheff ne s'étend pas sur la différence entre « smart » et « intelligent ». « Smart » se distingue de « intelligent » par une forte dimension d'ingéniosité et de capacité à agir, bref d'intelligence pratique. Le terme « smart » est donc bien choisi pour des environnements dont les concepteurs se préoccupent d'abord de l'expérience des utilisateurs. Il est cependant difficile de le traduire en français. Les termes les plus proches seraient « futé » ou « malin », mais ils peuvent avoir une connotation péjorative ou réductrice. Je propose donc de distinguer dans cette présentation d'une part les analyses qui considèrent des environnements numériques permettant de créer des champs d'expérience mathématique pour l'enseignement ou l'apprentissage sans qu'existe une référence précise à l'IA et d'autre part celles qui s'adressent à la conception ou à la mise en œuvre de logiciels faisant explicitement appel à l'IA comme domaine de l'informatique. Même si je partage l'analyse de Balacheff quant aux limites qu'a connues l'IA, je pense qu'il est important de s'intéresser à ses développements, car, ayant récemment connu des progrès spectaculaires dans certains domaines, l'IA a aujourd'hui une grande visibilité sociale qui s'étend à l'éducation par le biais de plateformes d'apprentissage revendiquant être fondées sur (*powered by*) l'IA.

Je vais présenter quelques chapitres, les plus à même d'intéresser les lecteurs des Annales.

Les champs d'expérience mathématique

Je commence par les chapitres qui considèrent des environnements technologiques permettant de créer des champs d'expérience mathématique (*smart machines* pour Balacheff). Parmi ces chapitres, une majorité peut être vue comme du partage d'expérience plus ou moins appuyé sur une analyse réflexive, ce qui est cohérent avec ce qui a été dit plus haut de l'« éducation mathématique ». Ces expériences sont souvent très riches et ouvrent des perspectives novatrices. Je retiens particulièrement quatre chapitres dans l'ordre d'apparition dans le livre. Betteridge et al. (pp. 251-276) font un bilan de plus de 10 ans de rénovation des cours pour étudiants en mathématiques dans deux universités. Un choix raisonné a été fait de fonder ces cours sur des activités de programmation. Celles-ci ne sont pas vues comme des applications de savoirs mathématiques, mais bien comme participant à la construction de ces savoirs. Le chapitre montre comment la programmation, en tant qu'activité créatrice, a évolué dans les années récentes et comment elle peut contribuer aux différents champs des mathématiques enseignés dans ces cours. Jarvis et al. (pp. 283-317) analysent eux aussi un exemple de rénovation des cours au niveau universitaire, fondé cette fois sur l'utilisation du calcul formel (CAS en anglais). Nous sommes maintenant 40 ans après l'invention du calcul formel, et au fil des ans, cette technologie a été vue sous deux aspects : d'une part les nombreuses opportunités offertes pour l'enseignement ou l'apprentissage, et d'autre part une difficile intégration dans la réalité des classes. Le chapitre de Jarvis et al. montre comment ces deux aspects peuvent être réconciliés grâce à des années de pratique réfléchie. L'analyse des pratiques d'un enseignant et de leur évolution témoigne aussi des liens profonds qui existent entre ses usages de la technologie et sa conception personnelle des mathématiques et de l'apprentissage des mathématiques.

Parmi les perspectives innovantes, le chapitre de Rodríguez (pp. 343-363) propose une utilisation de la réalité virtuelle en classe. Rodríguez repère des potentialités de visualisation et de manipulation à partir d'utilisations observées dans d'autres domaines comme la médecine. L'étude empirique, réalisée pendant la pandémie, vise à confronter ces potentialités à la réalité de l'enseignement ou l'apprentissage des mathématiques au niveau universitaire. Les observations sont obtenues à partir des réactions des élèves en tenant compte des différentes positions de l'apprenant (observateur ou manipulateur) et des différents environnements matériels. Les avantages pour la pratique de l'enseignant sont soulignés. Le chapitre de Diego-Mantecon et al. (pp. 399-416) porte sur les retombées de projets innovants menés en classe conjointement par des enseignants de mathématiques et de technologie avec des équipes d'élèves de 14-15 ans. Les technologies ont été utilisées par les équipes en fonction de leur projet, notamment l'impression 3D et les environnements de programmation. Les compétences visuelles ou spatiales ainsi que le raisonnement ont été stimulés, mais les enseignants ont eu tendance à négliger les occasions apportées par les connexions entre les mathématiques et la technologie, privilégiant les contenus curriculaires dans leur spécialité.

Dans une perspective nettement didactique, le chapitre de Trgalová (pp. 417-430) s'appuie sur une quarantaine d'années de recherche sur l'utilisation de la géométrie dynamique en classe, pour aborder la diversité des façons dont la technologie numérique peut être mise en œuvre. Elle propose une classification des tâches en quatre niveaux, depuis les tâches où la géométrie dynamique est simplement substituée à la construction papier-crayon jusqu'aux tâches spécialement conçues pour tirer parti de ses potentialités. Étant donné que l'engagement et l'activité cognitive des élèves se développent mieux dans les niveaux supérieurs de la classification, Trgalová insiste sur le fait qu'il ne faut pas considérer la technologie comme un vecteur de transformation en soi, mais plutôt examiner de près la manière dont elle est utilisée dans les contextes éducatifs. Comme elle le dit dans sa conclusion, la classification se propose comme valable pour des usages de technologies autres que la géométrie dynamique, en fait elle s'applique bien aux environnements permettant de créer des champs d'expérience dans tous les domaines des mathématiques.

La preuve automatique

Parmi les chapitres portant sur des applications faisant explicitement appel à l'IA (machines d'IA), je vais d'abord considérer ceux qui s'intéressent à la preuve automatique. Quaresma (pp. 3-22) fait le point sur les différentes approches de la preuve automatique en géométrie : méthodes synthétiques utilisant les axiomes classiques et des heuristiques, méthodes algébriques qui transposent un problème géométrique en problème algébrique, méthodes semi-synthétiques basées sur une axiomatique appropriée au traitement automatique et finalement méthodes basées sur la logique propositionnelle. Chaque type de méthode est discuté de deux points de vue : son efficacité dans la production de preuves automatiques, et la possibilité qu'ont ou non les preuves produites d'être lues par des êtres humains. Le chapitre de Kovács et al (pp. 23-44) concerne la méthode algébrique, puisqu'il s'agit de présenter les outils de preuve automatique dans le logiciel GeoGebra. Ces outils sont en effet implémentés grâce à la représentation des objets dans un système de calcul formel interne au logiciel et grâce aux traitements permis par le calcul formel, notamment la résolution de systèmes polynomiaux utilisant les bases de Gröbner. Les auteurs insistent sur le changement de perspective que ces outils entraînent, de par leur disponibilité dans un logiciel très présent dans l'enseignement des mathématiques. Narboux et Durand-Guerrier (pp. 167-192) quant à eux font l'hypothèse que l'introduction d'un logiciel de preuve automatique en géométrie est susceptible de contribuer à l'analyse de preuves, une activité importante particulièrement pour de futurs enseignants. Globalement, ces chapitres sur la preuve automatique font penser aux réflexions sur les potentialités du calcul formel dans les années 1980. Il a fallu des années d'investigation tant empirique que théorique pour outiller la recherche sur ces potentialités. Du travail en perspective, donc pour faire de même avec la preuve automatique.

Environnements tutoriels

Les trois chapitres présentant des environnements tutoriels (*Intelligent Tutoring Systems*) font aussi explicitement appel à des méthodes d'IA. Ces chapitres ont en commun d'être issus de projets menés dans le contexte francophone et qui sont peut-être déjà connus des lecteurs des Annales. Les auteurs ont fait l'effort de développer leurs travaux pour un public plus large. Ils ont aussi en commun de fonder leur recherche sur un cadre didactique qui permet d'apprécier les objectifs et les hypothèses sous-jacents. Font et al (pp. 45-76) s'appuient sur les études didactiques concernant le passage d'une conjecture à une démonstration en géométrie notamment. L'objectif du projet QED-Tutrix que présente ce chapitre est d'aider l'élève grâce à un environnement logiciel qui lui permet d'explorer le problème et de construire une preuve, et fournit un tuteur virtuel basé sur l'identification de l'étape de la preuve sur laquelle il travaille, le tout de façon non supervisée. Le chapitre détaille les principes de réalisation de QED-Tutrix et l'évaluation de ses capacités. Grugeon-Allys et al (pp. 141-165) s'appuient sur une recherche menée depuis 20 ans pour développer des systèmes permettant de différencier l'apprentissage. Ils détaillent les modèles qui permettent de concevoir, développer et implémenter un environnement de diagnostic automatisé. Le travail des élèves sur l'environnement permet d'identifier des profils et des besoins d'apprentissage personnalisés. Emprin (pp. 319-341) s'appuie quant à lui sur des cadres théoriques concernant l'apprentissage et l'activité des élèves, et les enseignants et leur formation. La réalisation de simulateurs informatiques qu'il présente dans le chapitre prolonge une recherche sur les stratégies visant à ce que les enseignants et formateurs prennent conscience des potentialités de la géométrie dynamique pour l'apprentissage des mathématiques, mais aussi des conditions permettant à ces potentialités de se réaliser.

L'apprentissage machine

Sur le plan des techniques d'IA, les chapitres que je viens de présenter s'appuient en général sur le calcul formel ou les systèmes experts et la programmation logique. Chacun sait que de nouvelles techniques se sont développées sous le terme générique d'apprentissage machine (*machine learning*) et que ces techniques ont permis des avancées décisives dans des domaines comme le traitement des langues naturelles et la reconnaissance d'image. Van Vaerenbergh et Pérez-Suay (pp. 89-106) notent que l'influence de ces techniques commence à être perceptible dans les environnements numériques pour l'enseignement des mathématiques. Ils proposent une classification et, à partir de celle-ci, discutent les usages possibles. Le chapitre comporte de nombreuses références à des travaux de spécialistes de l'IA. Ces travaux s'intéressent surtout aux performances de systèmes simulant l'apprentissage. Elles sont plutôt modestes dès que l'on sort d'applications phares comme la reconnaissance d'images ou d'écriture manuscrite. La classification proposée permet cependant d'apercevoir comment des environnements d'apprentissage pourraient évoluer. Le lecteur trouvera des pistes dans les chapitres de Emprin et de Grugeon-Allys et al. Le chapitre de Martínez-Sevilla et Alonso (pp. 107-136) est quant à lui basé sur un projet éducatif exploitant directement l'apprentissage machine. Les auteurs présentent l'environnement logiciel MonuMAI, construit comme un outil d'aide à la reconnaissance de motifs typiques dans une façade de monument. Pour ces auteurs, les monuments concentrent une grande partie des connaissances mathématiques de leur époque, ainsi que des informations artistiques précieuses. MonuMAI peut donc servir d'outil dans un travail pédagogique en mathématiques, en éducation artistique et en histoire. Les auteurs ont de plus veillé à ce que les étudiants portent un regard critique sur

MonuMAI notamment en les encourageant à repérer des cas où l'algorithme échoue à reconnaître des éléments ou détermine une conception architecturale erronée. Il paraît en effet fondamental que les élèves prennent conscience de ce qu'un environnement d'IA fonctionne selon un modèle, certes performant du fait de l'apprentissage machine, mais qui a nécessairement des limites liées au panel d'exemples sur lequel il a été entraîné.

Conclusion

Sur le plan de l'édition, le livre propose de nombreuses illustrations dont beaucoup utilisent la couleur. Le livre est structuré en trois parties : (1) création de milieu d'IA, (2) apprentissage aidé par l'IA et (3) apports de recherches empiriques. Chaque partie débute par une présentation rédigée par un expert. En l'absence de résumés, le lecteur devra se référer à ces présentations pour un aperçu des points forts de chaque chapitre. En fonction de l'intérêt que j'ai trouvé à ce livre, particulièrement aux chapitres présentés ici, j'ai fait le choix d'une structure différente, axée sur les potentialités des environnements technologiques pour l'enseignement des mathématiques de façon à montrer comment le livre s'inscrit dans l'histoire déjà longue de ces environnements.

JEAN-BAPTISTE LAGRANGE

LDAR, UNIVERSITE PARIS-CITE, FRANCE

jb.lagrange@casyopee.eu

MICHÈLE ARTIGUE

NOTE DE LECTURE

MATHEMATICAL WORK IN EDUCATIONAL CONTEXT THE MATHEMATICAL WORKING SPACE THEORY PERSPECTIVE [1]

Cet ouvrage en anglais de 280 pages, co-édité par Alain Kuzniak, Elizabeth Montoya Delgadillo et Philippe R. Richard constitue le volume 18 de la collection *Mathematics Education in the Digital Era* chez Springer.

Il est consacré aux travaux relevant de ce qui est maintenant dénommé la théorie des espaces de travail mathématiques (ThETM en français et ThMWS en anglais), une construction qui a émergé des travaux de Catherine Houdement et Alain Kuzniak sur l'enseignement de la géométrie. Au cours des deux dernières décennies, un collectif international de chercheurs a progressivement développé et consolidé les outils conceptuels et méthodologiques de cette approche théorique, une entreprise à laquelle les colloques ETM, organisés tous les deux ans depuis 2009, ont substantiellement contribué. Utilisée par un nombre croissant de chercheurs, la théorie a vu parallèlement s'élargir ses domaines d'intervention à d'autres domaines mathématiques (probabilités, analyse…), mais aussi au-delà des seules mathématiques (algorithmique, cinématique, relativité…). La publication même de cet ouvrage au sein de la collection *Mathematics Education in the Digital Era* atteste de l'importance de ce développement.

L'ouvrage est constitué de 14 chapitres qui ont tous été rédigés en co-écriture, sauf deux, et 15 chercheurs ont directement contribué à son élaboration. Ces 14 chapitres sont organisés en trois sections, intitulées respectivement : "The General Framework of the Theory of Mathematical Working Spaces", "The Different Types of Mathematical Work and MWS", et "Development of the Theory and Interaction with Other Theoretical Approaches". Ces sections comportent respectivement trois, trois et cinq chapitres. L'ouvrage se conclut par un chapitre

---

[1]Kuzniak, A., Montoya Delgadillo, E. & Richard, P. (dir.). (2022). *Mathematical Work In Educational Context – The Mathematical Working Space Theory Perspective*. Mathematics Education in the Digital Era, 18, Springer.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 27, p. 175 – 182.

globalement plus réflexif sur les acquis du travail réalisé jusqu'ici et les perspectives qui s'en dégagent pour des recherches futures.

En 2016, j'avais déjà eu à écrire un texte sur les ETM et les recherches associées (Artigue, 2016) du fait de la parution d'un numéro spécial de *ZDM*, le numéro 46.3 dédié à cette approche (Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016). Je l'ai relu en préparant celui-ci.

Ce numéro spécial attestait déjà de la maturité acquise par l'approche. La plupart de ses notions fondamentales – la distinction opérée entre un plan épistémologique et un plan cognitif, les trois composantes distinguées dans chaque plan, les genèses sémiotiques, instrumentales et discursives introduites pour rendre compte des relations entre ces deux plans, et même la notion de travail mathématique complet – étaient déjà présentes. Je pointais dans mon texte la diversité des méthodes utilisées par les chercheurs se réclamant de ce cadre théorique dont je soulignais l'apparente plasticité. J'avais également fait état d'un certain nombre de questions que je me posais, à la lecture de ce numéro spécial. Celles-ci, concernaient notamment la nature réelle du plan qualifié d'épistémologique, mais qui me semblait plus institutionnel qu'épistémologique, l'attribution des observables recueillis à telle ou telle genèse, et surtout la notion de genèse instrumentale qui me paraissait très distante de la conceptualisation proposée en ergonomie cognitive qui avait été à la base du développement de l'approche instrumentale à l'émergence de laquelle j'avais contribué avec d'autres collègues. Je m'interrogeais aussi sur le potentiel offert par ce cadre théorique pour analyser le travail mathématique dans la durée, et soulignais le caractère encore émergent de l'association de différents paradigmes au travail mathématique dans d'autres domaines que la géométrie.

Six ans après, où en est-on et qu'apporte ce nouvel ouvrage ? Jusqu'à quel point permet-il à une personne intéressée par cette approche didactique de se familiariser avec le travail mathématique ? Comment éclaire-il sur le sens des concepts de la théorie, des praxéologies de recherche qui lui sont associées, et d'apprécier en quoi elle contribue à l'avancée des connaissances didactiques ? C'est en ayant ces questions à l'esprit que j'ai entamé la lecture de l'ouvrage.

Les trois premiers chapitres sont essentiels de ce point de vue, en particulier pour le lecteur qui cherche à se familiariser avec la théorie, ses raisons d'être, les principes qui la fondent, la façon dont les questions didactiques y sont problématisées et méthodologiquement travaillées. Le premier chapitre, écrit par Alain Kuzniak, sans aucun doute la personne la mieux placée pour le faire, nous fait en effet pénétrer dans l'histoire de cette approche, qui vise à décrire et comprendre le travail mathématique dans les classes, et aussi à le transformer pour le rendre plus efficace. Le second chapitre est consacré aux méthodologies. Le troisième chapitre, intitulé « The theory of mathematical working spaces in brief », revient, de façon synthétique, sur les principaux éléments de la théorie et les auteurs, ayant à l'esprit des questions souvent posées, cherchent à y répondre et à limiter les incompréhensions possibles. Ces trois chapitres permettent bien au lecteur de se familiariser avec la théorie, de rendre intelligibles ses concepts, de comprendre comment elle oriente les problématiques de recherche et la forme que prend le travail méthodologique dans les travaux qu'elle nourrit. Les auteurs montrent bien notamment que, dans cette construction théorique, les contenus mathématiques en jeu font l'objet d'une grande attention, que l'analyse cognitive se fait dans une perspective matérialiste, à partir d'une étude fine des formes et effets visibles du travail mathématique, sans chercher à en inférer des processus psychologiques sous-jacents, et aussi que l'utilisation de cette théorie ne présuppose pas une vision particulière de l'apprentissage. Le chapitre méthodologique, quant à lui, souligne clairement qu'au fil des recherches, des techniques d'étude spécifiques se sont progressivement stabilisées, exploitant les connexions entre le plan épistémologique et le plan cognitif permises par le jeu des trois genèses mentionnées plus haut et leur coordination.

La seconde partie de l'ouvrage est consacrée aux trois types d'ETM distingués dans la théorie, l'ETM de référence, l'ETM personnel et l'ETM idoine (en anglais *reference MWS*, *personal MWS* et *suitable MWS*). Ces distinctions prennent en compte les transformations qui s'opèrent au fil du processus de transposition didactique, notamment dans sa dimension interne. Comme son nom l'indique, le premier type d'espace est celui de la référence institutionnelle, il correspond au travail mathématique attendu dans une situation ou séquence donnée, le second au travail mathématique réel de chaque élève ou groupe d'élèves, et le troisième à l'adaptation faite par l'enseignant pour rapprocher le plus possible le travail personnel réel du travail attendu. Dans chaque chapitre, de nombreux travaux sont évoqués, montrant bien la vitalité de cette ligne de recherche et la diversité des chercheurs qui y contribuent. On perçoit bien que la réflexion théorique progresse, se nourrissant de travaux empiriques menés dans un nombre croissant de domaines. Cependant, pour quelqu'un qui est moins familier, ces évocations me semblent souvent rester un peu trop allusives pour permettre de bien apprécier la progression conceptuelle, et ce qu'elle permet ou non. J'aurais préféré moins d'exemples, mais présentés de façon plus approfondie, et une sélection des exemples en fonction des chapitres qui évite l'impression de répétition ressentie au fil de la lecture.

La troisième section est consacrée aux interactions avec d'autres théories et cherche aussi à montrer ce qu'apporte la théorie à travers ces interactions à des thématiques de recherche importantes en éducation mathématique, qu'il s'agisse de l'enseignement dans le monde numérique actuel, de la formation des enseignants ou de la modélisation. Le premier chapitre de cette section, intitulé "The theory of mathematical working spaces: theoretical environment, epistemological stance and dialogue with other theories" plante en quelque sorte le décor. Les auteurs reviennent sur l'émergence de la théorie en mettant l'accent sur la richesse de l'environnement théorique existant, notamment en France, à l'époque ; ils précisent la vision épistémologique qui sous-tend la théorie, puis en viennent aux connexions théoriques qui se sont progressivement développées. Celles-ci, comme ils l'expliquent, ont répondu aux nécessités des recherches et au fait que la ThETM n'a pas la prétention de permettre à elle seule d'aborder toutes les problématiques didactiques. Elles ont été favorisées par la diversité des intérêts et cultures théoriques des chercheurs impliqués. Elles ont nourri des dialogues fructueux, mais, comme le soulignent aussi les auteurs, ceci n'a été possible que parce que les approches considérées présentaient une certaine proximité épistémologique.

Les chapitres suivants visent à montrer plus précisément les apports de ces connexions. Le premier est centré sur le travail mathématique à l'ère du numérique. Tout en rappelant que le travail mathématique a été de tout temps instrumenté, pour appréhender les nouvelles formes de travail mathématique qui se développent en cette ère numérique, les auteurs souhaitent mettre l'accent sur la façon dont la diversité des outils technologiques utilisés dans le contexte scolaire aujourd'hui affecte les genèses sémiotiques, instrumentales et discursives, et leurs interactions, ce qu'ils dénomment une danse de ces genèses. Après un long développement sur la multiplication et les techniques opératoires associées, avec ou sans technologie, les auteurs s'attellent à caractériser ces nouvelles formes de travail mathématique. Le chapitre se termine par une partie qui considère le travail mathématique à la fois du point de vue de l'utilisateur et du concepteur d'artefacts technologiques. La réflexion multiforme développée dans ce chapitre propose sans aucun doute des pistes intéressantes pour appréhender les nouvelles formes de travail mathématique qui se développent en cette ère numérique et leurs effets, mais elle m'a semblé pour l'instant moins aboutie que celle proposée dans les chapitres précédents. Peut-être les auteurs ont-ils abordé trop de points différents, ceci rendant plus difficile l'identification des idées principales et de leur organisation.

Le second chapitre de cette section contraste avec ce qui précède. Il est consacré à la notion de genèse instrumentale et vise à clarifier les relations entre la notion qui a été introduite en ergonomie cognitive par Vérillon et Rabardel (1995), et le concept de genèse instrumentale tel que conceptualisé dans la théorie des ETM. Ce court chapitre est particulièrement clair et il a répondu à des questions que je me posais depuis longtemps et que j'avais pointées dans mon article de 2016. Je conseille au lecteur de ne pas attendre d'arriver à ce point de l'ouvrage pour le lire, car il permettra de mieux comprendre la notion de genèse instrumentale dans la ThETM, et aussi de montrer que, bien que très différente de celle qui a été conceptualisée dans l'approche instrumentale, cette notion peut être utilisée productivement par les chercheurs et chercheuses qui se réfèrent à cette approche, comme c'est le cas pour Jean-Baptiste Lagrange, co-auteur de ce chapitre et qui a joué un rôle clef dans l'émergence et le développement de l'approche instrumentale.

Le troisième chapitre aborde le thème des connaissances des enseignants et de leur développement professionnel, et la contribution des recherches menées dans le cadre des ETM à cette thématique. L'analyse proposée s'appuie sur la comparaison de trois études sélectionnées à l'issue d'une méta-analyse. La première, centrée sur les connaissances mathématiques des enseignants, concerne des travaux qui combinent les ETM avec le modèle MTSK (Mathematics Teachers' Specialized Knowledge) (Carrillo-Yañez et al., 2018). La seconde, centrée sur les relations entre connaissances mathématiques, domaines et tâches, met plus particulièrement en jeu les interactions entre les ETM et la théorie de l'activité. Elle s'appuie sur la thèse de Charlotte Derouet (2018) sur l'enseignement des probabilités continues en France dans la dernière année du lycée. La thèse est aussi utilisée comme exemple dans divers chapitres de l'ouvrage : elle mobilise à la fois les ETM et la double approche didactique-ergonomique des pratiques enseignantes qui repose sur la théorie de l'activité (Robert & Rogalski, 2002). La troisième est centrée sur la notion de travail mathématique complet, qualifiant un travail où les trois genèses sémiotique, instrumentale et discursive se combinent pour connecter les plans épistémologique et cognitif, avec une circulation harmonieuse du travail mathématique qui mobilise les trois plans associés à ces genèses. Elle concerne deux recherches exploitant cette notion pour analyser le travail des enseignants et guider leur développement professionnel. Ce chapitre montre bien, me semble-t-il, que sur cette thématique si importante des connaissances des enseignants et de leur développement professionnel, des connexions théoriques productives ont été effectivement développées entre la ThETM et des approches et modèles développés spécifiquement pour l'étude des connaissances et pratiques des enseignants, qu'elles permettent de nouveaux éclairages. En même temps, elles sont aussi source de questions pour la théorie elle-même.

Le dernier chapitre de cette section interroge les perspectives offertes par la théorie des ETM au thème de la modélisation. S'appuyant d'abord sur la thèse de Charlotte Derouet, mentionnée ci-dessus, et celle d'Assia Nechache (2018), concernant elle aussi l'enseignement des probabilités, les auteurs montrent d'abord ce qu'apporte une analyse soutenue par les ETM à l'approche classique en éducation mathématique en termes de cycle de modélisation. Ils élargissent ensuite la perspective, considérant le monde du travail et les travaux sur la modélisation et la mathématisation d'épistémologues francophones. Ces perspectives sont ensuite utilisées pour rendre compte d'un travail mené avec des élèves de terminale en France sur un pont suspendu, et les modèles mathématiques que ce travail va successivement mobiliser, mettant en jeu plusieurs espaces mathématiques de travail. L'analyse proposée, très fine, montre bien ce que peut apporter la théorie des ETM sur ces questions de modélisation en ne séparant pas mathématiques et réalité, et en associant des ETM différents à la pluralité des modèles généralement envisageables. Cependant, comme le soulignent les auteurs eux-mêmes, ce potentiel des recherches utilisant la théorie des ETM a jusqu'ici été encore peu exploré.

L'ouvrage se termine par un chapitre co-écrit par six des auteurs investis dans la poursuite de la théorie. Plusieurs directions sont successivement envisagées : l'extension à de nouveaux domaines mathématiques et la prise en compte du développement du travail mathématique sur le long terme qui requièrent des méthodologies spécifiques, l'attention portée aux formes collectives de travail mathématique ou aux activités extrascolaires, et aussi l'étude des formes renouvelées de ce travail induites par l'accroissement de la multidisciplinarité ou l'incessante évolution technologique. Est posée aussi la question importante de la capacité de la théorie à guider la formation et transformation du travail mathématique. Comme cela a été souligné dès les premiers chapitres de l'ouvrage, la théorie des ETM peut-être utilisée a priori pour analyser le travail mathématique dans les classes, quelles que soient les visions de l'apprentissage et de l'enseignement qui sous-tendent ce travail. Mais toute visée transformative suppose une vision de ce qu'est un travail mathématique de qualité, même si cette vision est relativisée à un contexte donné. Comme le rappellent les auteurs de ce dernier chapitre, les formes du travail mathématique sont souvent analysées et caractérisées en fonction de trois critères : conformité à un certain paradigme, complétude au sens rappelé plus haut et correction. La question de savoir si ces caractéristiques peuvent valablement guider la transformation du travail mathématique est à ce stade une question ouverte.

Cette note de lecture ne donne sans aucun doute qu'une vision très partielle du contenu de l'ouvrage. C'est aussi une vision marquée par ma culture didactique et mes intérêts de chercheuse. Sa lecture m'a permis de mieux apprécier la diversité et richesse des travaux de recherche se réclamant de la théorie des ETM, et aussi les efforts déployés pour capitaliser les connaissances produites par ces travaux et les mettre au service de la consolidation et du questionnement théorique. Elle a confirmé ma première impression que le plan épistémologique est tout autant institutionnel qu'épistémologique. Elle m'a permis de mieux comprendre la signification donnée dans la théorie aux différentes genèses et l'importance du travail mené sur leurs interactions, même si le discours sur les relations entre genèses sémiotique et instrumentale demeure contestable dans certains chapitres. La question n'est pas facile, car les ostensifs sur lesquels s'appuie le travail mathématique, notamment ceux des registres symboliques, ont à la fois une valence sémiotique et une valence instrumentale, pour reprendre le langage de la théorie anthropologique du didactique. La puissance de ces ostensifs est étroitement liée à leur valence instrumentale. De ce fait, les genèses sémiotiques et instrumentales qui les concernent sont étroitement imbriquées, peut-être indémêlables.

Pour revenir aux questions soulevées au début de cette note de lecture, je crois que cet ouvrage permet effectivement à une personne intéressée par cette approche didactique du travail mathématique de se familiariser avec elle, de donner du sens à ses concepts, aux praxéologies de recherche qui lui sont associées et d'apprécier comment elle contribue à l'avancement des connaissances didactiques. J'ai lu le livre dans l'ordre des chapitres. Je ne suis pas sûre que ce soit la meilleure approche, car cela confronte le lecteur à de nombreuses répétitions ou quasi-répétitions. Peut-être qu'après avoir lu les premiers chapitres, le lecteur devrait, en fonction de ses intérêts ou de ses questions, choisir comment naviguer dans l'ouvrage. Je lui souhaite une bonne lecture.

Bibliographie

ARTIGUE, M. (2016). Mathematical working spaces through networking lenses. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *48*(6), 935-939.

CARRILLO-YAÑEZ, J., CLIMENT, N., MONTES, M., CONTRERAS, L., FLORES-MEDRANO, E., ESCUDERO-ÁVILA, D., VASCO, D., ROJAS, N., FLORES, P., AGUILAR-GONZÁLEZ, A., RIBEIRO, M. & MUÑOZ-CATALÁN, M. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236-253.

DEROUET, C. (2016). *La fonction de densité au carrefour entre probabilités et analyse en terminale S. Etude de la conception et de la mise en œuvre de tâches d'introduction articulant lois à densité et calcul intégral.* [Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01431913/document

KUZNIAK, A., TANGUAY, D., & ELIA, I. (Eds.) (2016). Mathematical working spaces in schooling. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education* (special issue), *48(*6).

NECHACHE, A. (2018). *La validation dans l'enseignement des probabilités au niveau secondaire.* [Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01345747/file/Manuscrit-Assia-Nechache-IREM.pdf

VÉRILLON, P., & RABARDEL, P. (1995). Cognition and artefacts : A contributionto the study of thought in relation to instrumental activity. *European Journal of Psychology of Education, 10*, 77-101.

ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 4*, 505-528.

MICHELE ARTIGUE

Université Paris Cité, Université Paris-Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Université de Lille, Université de Rouen, LDAR, F-75013 Paris, France.

michele.artigue@univ-paris-diderot.fr

INFORMATIONS POUR LES AUTEURS

Présentation de la revue

Les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives est une revue annuelle fondée en 1988 par Raymond Duval et François Pluvinage, actuellement sous la responsabilité de Philippe R. Richard et Laurent Vivier.

Cette revue internationale est dédiée à la diffusion de la recherche en didactique des mathématiques et des domaines connexes. Il s'agit d'une revue francophone de référence sur les recherches portant sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Les articles sont principalement écrits en français, mais peuvent également être publiés en espagnol ou en anglais.

La revue fait l'objet d'un classement scientifique par l'organisme européen ERIH et par l'HCERES en France. Elle est également répertoriée dans des bases de données de référence comme MathEducDataBase ou Googlescholar. Ces différents référencements ajoutent une valorisation des publications dans les Annales pour les auteurs. Les articles sont en accès libre sur le site des Annales de didactique et de sciences cognitives ainsi que sur le site d'OpenEdition Journals[1] dès leur parution, sans embargo.

La revue est ouverte à tout type de recherche. Les articles peuvent être de nature théorique, en relation étroite avec une expérimentation dans le cadre d'un enseignement, ou constituer des comptes rendus d'expériences d'enseignement appuyées sur un cadre théorique explicite. Il est également possible de présenter une synthèse de recherches menées dans un domaine particulier de la didactique des mathématiques, ou de proposer des notes de lectures d'ouvrages scientifiques du domaine. Les articles peuvent concerner tous les cadres d'enseignement dans des contextes socioculturels variés et aussi s'intéresser à la formation, initiale et continue, des enseignants.

Outre la publication du numéro annuel, la revue offre la possibilité d'éditer un numéro spécial sur la base d'un projet clairement formulé.

Cette revue s'adresse principalement aux chercheurs en didactique. Elle intéressera également les formateurs d'enseignants soucieux d'appuyer leurs formations sur la recherche en didactique des mathématiques.

Site internet de la revue : http://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/adsc.

[1] https://journals.openedition.org/adsc/

Instructions aux auteurs

La revue est ouverte à tout type de recherche, que ce soit un essai didactique ou un rapport d'étude impliquant de la recherche empirique. Il est également possible de présenter une synthèse des recherches menées dans un domaine particulier de l'enseignement des mathématiques ou d'un domaine connexe (physique, algorithmique, etc.), ou de proposer des notes de lectures d'ouvrages scientifiques. Les domaines théoriques de références sont issus de la didactique des mathématiques.

Il est demandé aux auteurs de proposer des articles de taille raisonnable, entre vingt et trente pages, même s'ils peuvent être plus longs pour permettre à l'auteur de développer un point de vue original qui émerge dans le champ de la recherche.

Les articles peuvent être écrits en français, en espagnol ou en anglais. Lorsque l'article est écrit en espagnol ou en anglais, il est attendu que les auteurs proposent également un résumé en français. Si l'une des trois langues de la revue n'est pas comprise par les auteurs, merci de le préciser lors de la soumission.

Les articles sont à soumettre par courrier électronique à mai-adsc@unistra.fr.

Avant tout envoi, nous vous prions de vérifier que votre article respecte bien les consignes éditoriales suivantes :

- Le format de la revue est respecté : voir le fichier de styles[2] pour les auteurs ;
- Le niveau de langue utilisé est soigné et bien travaillé.
- L'article proposé est original. Il n'a ni déjà été publié ailleurs ni envoyé à une autre revue pour publication. Il ne s'agit pas non plus d'une simple traduction d'un article déjà publié.
- L'article ne contient aucun plagiat et il est dûment référencé.
- En décidant d'envoyer un article à la revue des Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vous autorisez la mise en ligne de votre article sur le site de la revue ainsi que sur le site OpenEdition Journal.
- Vous vous engagez en outre à communiquer les liens vers ces deux sites pour la diffusion de votre article.

[2] Disponible à l'adresse : https://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/adsc/#c6853

Pour composer un article sans utiliser le modèle, par exemple en recourant à LaTeX, voici des précisions sur le format des pages et les caractères utilisés.

Feuille A4 portrait, avec les marges suivantes :

- Haut : 3 cm Bas : 8 cm
- Gauche : 4 cm Droite : 4 cm
- En tête : 2 cm Pied de page : 7 cm
- Reliure : 0 cm

Caractères :

- Auteur(s) en première page : Arial 12 points, gras, petite capitale, Centré ;
- Titre en première page : Arial 14 points, petite capitale, Centré ;
- Abstract – Résumé – Mots clés : Times New Roman 10 points ;
- En-tête : Arial 9 points ;
- Corps de texte : Times New Roman 11 points.

Pour la pagination d'un article proposé, commencer par le numéro 1.

Procédures de sélection des textes

Les articles proposés sont soumis à un arbitrage, en double aveugle, par trois évaluateurs avant publication. Une synthèse sera envoyée aux auteurs par les rédacteurs en chef. Le cas échéant, des demandes de modifications, aménagements ou compléments des textes présentés seront adressées aux auteurs.

Les articles sont reçus par les rédacteurs en chef de la revue. Ils sont emmagasinés sur une plateforme de partage privée uniquement accessible aux rédacteurs en chef, aux conseillers scientifiques et à la conseillère éditoriale.

Une première appréciation de l'adéquation de l'article avec les objectifs de la revue est faite par les rédacteurs en chef. Cette première évaluation peut aboutir à un refus de l'article s'il ne correspond pas à la ligne éditoriale de la revue ou s'il pose un problème éthique. Il peut également être renvoyé aux auteurs pour effectuer des modifications avant l'envoi aux évaluateurs, par exemple, pour une remise en forme ou une correction linguistique. En cas de nécessité, les conseillers scientifiques peuvent être consultés.

Les rédacteurs en chef se consultent pour le choix et la sollicitation des évaluateurs qui ont, au plus, deux mois pour renvoyer leur évaluation. Ils suivent le bon déroulement du processus d'évaluation et ils sont attentifs aux dates de retour afin de prévoir la publication. Un fichier privé aux fonctions de partage et de synthèse est tenu à jour.

Une fiche d'évaluation est proposée aux trois évaluateurs. Selon le retour de ces derniers, une synthèse est envoyée aux auteurs incluant leurs évaluations. Quatre cas de figure sont envisagés : (A) publication acceptée en l'état ; (B) publication acceptée avec des modifications mineures à effectuer, sans nécessité d'une nouvelle évaluation ; (C) Publication possible sous réserve de modifications majeures à effectuer et nécessitant une nouvelle évaluation ; (D) refus de l'article. Selon l'éventualité, le traitement est le suivant :

- Cas A, l'article est transféré à la conseillère éditoriale et au secrétaire d'édition pour préparer la publication.
- Cas B, les rédacteurs en chef demandent le retour des modifications par les auteurs dans un délai maximum d'un mois.
- Cas C, les auteurs ont deux mois pour renvoyer leur nouvelle version. Par la suite, les trois relecteurs initiaux sont sollicités avec un délai de 2 mois pour faire la relecture (délai pouvant être ramené à 1 mois si cela permet de publier l'article dans le numéro de l'année).
- Cas D, un retour circonstancié est envoyé aux auteurs par les rédacteurs en chef. Si nécessaire, les conseillers scientifiques peuvent être sollicités.

Généralement, les articles envoyés l'année n et acceptés sont publiés dans le numéro de l'année $n + 1$.

Imprimerie et reprographie
Directions des affaires logistiques intérieures
Université de Strasbourg

Dépôt légal 4ème trimestre 2022