Sonia Maria Monteiro Da Silva Burigato, Cécile Ouvrier-Buffet, José Luiz Magalhães De Freitas

Le concept de limite de fonction Une analyse des schèmes d'étudiants à la transition secondaire-supérieur en France et au Brésil

Abstract. The levels of education and the ways to teach the limits of function are different in France and in Brazil. However, we make the hypothesis that the schemes developed by students regarding the concept of limit can be compared. In this article, we develop a methodology to analyze the students' schemes involving the concept of limit of function with two aims: to finely analyze the processes of today's students (in France and in Brazil) at the beginning of the learning of this concept and to highlight the evolution of their schemes, taking into account that these two countries are different in terms of the teaching of this concept.

Key-words. Limit, function, schemes, concept image.

Résumé. Les niveaux de scolarité et les modes d'enseignement des limites de fonction sont différents en France et au Brésil. Nous faisons l'hypothèse que les schèmes développés par les étudiants sur ce concept peuvent cependant être comparés. Nous développons dans cet article une méthodologie pour analyser les schèmes des étudiants sur le concept de limite de fonction avec un double objectif : analyser finement les processus d'étudiants d'aujourd'hui (en France et au Brésil) en début d'apprentissage du concept de limite de fonction et mettre en évidence l'évolution des schèmes dans ces deux pays, différents quant à l'enseignement de ce concept.

Mots-clés. Limite, fonction, schème, *concept image*.

Introduction

Dans le cadre d'un travail de thèse, nous avons investigué l'enseignement et l'apprentissage de la notion de limite de fonctions. Notre problématique était d'enquêter sur les schèmes des élèves (Vergnaud, 1991) dans la construction du concept de limite de fonction. Dans le cadre de cet article, nous interrogeons les différences et les similitudes entre des élèves de deux systèmes d'enseignements dont les approches, que nous présenterons plus loin, diffèrent quant à l'enseignement des limites, le Brésil et la France (Burigato, 2019). En France, le concept de limite

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 26, p. 9 - 43.

est introduit au lycée, et, au Brésil, à l'université. Pour faciliter la lecture, nous utiliserons dorénavant le terme générique d'étudiant.

Rappelons que le concept de « limite » est historiquement complexe et génère des ruptures dans son apprentissage (e.g. Artigue, 1995 ; Cornu, 2002 ; Lecorre, 2016 ; Chorlay, 2019 ; Nascimento, 2003). Ces auteurs pointent les aspects mathématiques fondamentaux à la construction du concept de limite[1], à savoir : l'ensemble **R** des nombres réels est complet, ce qui apporte certaines propriétés importantes dans la construction du concept de limite, comme les conditions de convergence des suites (Bergé et Sessa, 2018), la quantification et la notion de variable. On peut également noter le difficile passage discret/continu lorsque les élèves traitent des propriétés portant sur les limites de suites puis sur les limites de fonctions (e.g. Bloch, 2017). Les difficultés relatives à l'apprentissage du concept de limite de suites et de fonctions, à l'université, dans différents pays, semblent stables depuis de nombreuses années (e.g. Robert, 1982 ; Cornu, 1983 ; Sierpinska, 1985 ; Swinyard, 2011 ; Bloch, 2017). Régulièrement, les obstacles épistémologiques en lien avec l'infini, le concept de fonction, la logique et le symbolisme sont cités. Le fait que la limite peut ne pas être « atteinte » s'érige en difficulté, tout comme « l'obstacle du non calculable pour les fonctions[2] » (Bloch, 2017). Les étudiants n'identifient en général pas le statut opératoire de la définition formelle de limite et préfèrent utiliser des *concept images* (e.g. Tall et Vinner, 1981 ; Roh, 2008) et des conceptions spontanées et intuitives (Alcock et Simpson, 2009) où la représentation graphique peut alors, elle aussi, devenir un obstacle (e.g. Bloch, 2017 ; Vinner et Dreyfus, 1989). Les travaux s'accordent sur la nécessaire transition entre « des conceptions intuitives, dynamiques, voire graphiques, et la définition formelle qui s'avère seule efficace pour valider les propriétés des limites et des fonctions » (Bloch, 2017, p. 7) et sur le saut conceptuel entre l'approche intuitive et l'approche formelle (cf. Oktaç et Vivier, 2016, pour une synthèse). En ce qui concerne l'introduction du concept de limite au lycée, on retrouve les difficultés précédemment citées, et en particulier celle relative aux nombres réels (e.g. Durand-Guerrier et Vergnac, 2014). De récentes ingénieries ont été mises en œuvre, au lycée, en France, pour contourner les difficultés précédentes, avec un travail spécifique sur les définitions, leur construction et leur

---

[1] Ce sont les mêmes aspects mathématiques, mais aussi les mêmes types de difficultés d'apprentissage, que l'on retrouve dans l'étude du concept de fonction (e.g. Sierpinska, 1992 ; Krysinska et Schneider, 2010 ; Vandebrouck, 2011).

[2] Pour les élèves, une limite peut ne pas exister s'ils ne parviennent à effectuer le calcul d'une image.

opérationnalité, et la quantification notamment (e.g. Lecorre, 2016 ; Chorlay, 2019[3]). Dans ces ingénieries, le temps long passé sur la formulation, les définitions, les exemples et contre-exemples, et les différents registres de représentation (Duval, 1993) utilisés porte ses fruits. Nous souhaitons étudier le contexte de classe ordinaire contemporain ; nous cherchons à caractériser les schèmes des étudiants lorsqu'ils sont confrontés à l'introduction du concept de limite de fonction, avec deux questions de recherche principales :

- Quels sont les schèmes élaborés par les étudiants français et brésiliens en début d'apprentissage du concept de limite de fonction ?
- Comment évoluent les schèmes d'étudiants de deux pays (Brésil et France) où l'introduction du concept de limite de fonction diffère ?

Nous présenterons les contextes d'enseignement au Brésil et en France (curricula en vigueur lors de notre expérimentation en 2017/2018), afin de montrer la différence d'approche du concept de limite de fonction, puis la méthodologie de recueil de données et d'analyse des schèmes des étudiants utilisée dans notre recherche. Nous détaillerons une étude de cas avec les productions de deux élèves : Baptiste en France et Mateus au Brésil. Nous ouvrirons des perspectives sur la méthodologie d'analyse utilisée et la portée de cette étude de cas extraite d'un travail de doctorat conséquent (Burigato, 2019).

1. Présentation des curricula en France et au Brésil

1.1. L'introduction du concept de limite en France, au lycée

En France, le concept de limite de fonction est introduit dans les classes de première et terminale[4] (grades 11 et 12). Dans le programme de première :

> On introduit un nouvel outil : la dérivation. L'acquisition du concept de dérivée est un point fondamental du programme de première. Les fonctions étudiées sont toutes régulières et on se contente d'une approche intuitive de la notion de limite finie en un point. Le calcul de dérivées dans des cas simples est un attendu du programme ; dans le cas de situations plus complexes, on sollicite les logiciels de calcul formel. (MEN, 2010, p. 2).

---

[3] Chorlay (2019, p. 275-277) présente une excellente synthèse des ingénieries existantes et choix possibles, prenant en compte les principales difficultés, *concept images* et *misconceptions* des étudiants connus de la littérature.

[4] Suite aux changements de programmes, le concept de limite de fonction reste aujourd'hui présenté au lycée dans le même esprit que dans les programmes de 2010.

La dérivée apparaît pour l'étude de la tangente à une courbe représentative d'une fonction dérivable en un point. Sont également abordées les fonctions dérivables, la dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient, et les fonctions usuelles : $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = 1/x$, etc. Dans les commentaires, il est indiqué que « le nombre dérivé est défini comme limite d'un taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand h tend vers 0 », que l'« on ne donne pas de définition formelle de la limite » et que l'« on évite tout excès de technicité dans les calculs de dérivation ». Cela vient après un enseignement sur les limites de suites. Le bulletin officiel préconise une présentation des suites par l'étude de phénomènes discrets, avec l'utilisation de différents registres : algébrique, graphique, numérique et géométrique. Il souligne également qu'il est important de proposer des questions sur leur comportement « [...] conduisant à une première approche de la notion de limite qui sera développée dans la classe terminale » (MEN, 2010, p.2). Dans la classe de terminale (MEN, 2011), les limites finies et infinies d'une suite sont abordées, ainsi que l'étude de suites qui n'ont pas de limites. Les limites sont aussi travaillées par comparaison et le théorème des gendarmes est admis. Les définitions des limites doivent être abordées, pour les cas limites finis à l'infini, où « la maîtrise complète du formalisme n'est pas un attendu ». Une étude approfondie est proposée pour l'introduction de limites de fonctions en terminale (MEN, 2011).

1.2. L'introduction du concept de limite au Brésil, à l'université

Au Brésil, le lycée est une formation généraliste dans laquelle les étudiants étudient les mêmes matières puis décident, à la fin du lycée, d'une spécialisation pour la suite de leurs études. L'étude des limites au Brésil n'est généralement introduite que dans l'enseignement supérieur, dans les cours de sciences exactes. Les directives curriculaires pour le lycée (Ministério Da Educação Secretaria De Educação Básica, 2006), qui guident les contenus d'enseignement, ne mentionnent pas l'étude de ce concept au lycée. Nous sommes actuellement au Brésil dans une période de mise en œuvre de nouveaux programmes, mais les lignes directrices en vigueur dans le secondaire restent d'actualité. Si l'étudiant choisit de suivre les cours en sciences exactes en premier cycle universitaire, il étudiera le concept de limite de fonctions en première année, dans le cours appelé « Calcul I » qui représente environ 100 heures par semestre. Les contenus du programme de ce cours sont : fonctions d'une variable réelle, limites et continuité des fonctions, dérivées, intégrales et applications. Dans ce cours, en général, est présentée d'abord la limite d'une fonction en un point, de manière dite « intuitive » (au sens de Guidorizzi, 2013, voir plus loin), puis vient ensuite la définition mathématique dite « formelle », où interviennent symbolisme et quantificateurs, généralement appelée « définition en *epsilon* et *delta* ». Le concept de limite apparaît aussi comme objet d'étude dans le calcul différentiel et intégral et dans les cours de fondements en analyse. Il est également repris comme outil dans d'autres disciplines.

2. *Concept image* et schèmes : étudier le rapport des étudiants à un concept

2.1. La notion de *concept image* – un focus sur les définitions

Il existe un écart entre le processus de conceptualisation et l'approche formelle des définitions (Mariotti et Fischbein, 1997). Tall et Vinner (1981) ont développé les notions de *concept image* et *concept definition*[5] : le *concept image* rassemble les images mentales et toutes propriétés associées à un concept et processus le mobilisant, et le *concept definition* représente les définitions formelles d'un concept, définies comme faisant consensus au sein d'une communauté scientifique. Ce qui est notable, c'est que plusieurs *concept images* peuvent coexister chez un même élève et être en contradiction entre eux (tout comme les conceptions, au sens de Balacheff, 1995) et/ou avec le *concept definition*. L'intérêt de cet outil théorique réside dans le diagnostic des *concepts images*. Celui-ci permet de déterminer des implicites qui peuvent être en contradiction avec la théorie mathématique formelle. La caractérisation de *concept images* se fait par l'établissement de propriétés utilisées par les élèves, face à certains types de problèmes, et est mis en regard du *concept definition.* Ainsi, dans ce cadre théorique, il est nécessaire d'étudier les processus, représentations, propriétés mobilisés (*concept image*) par des élèves relatifs à un concept et de les mettre en regard des définitions formelles utilisées dans un ouvrage ou dans un cours (*concept definition*). Cela permet d'analyser le décalage entre *concept images* et *concept definition(s)* et ainsi de faire des hypothèses sur les problèmes d'apprentissage que cela génère (et, en conséquence, faire de nouveaux choix d'enseignement).

Ce cadre théorique apporte une orientation globale à notre méthodologie d'analyse : analyser les *concept images* des étudiants, mais aussi, quand cela est possible, identifier les *concept images* des concepts liés à celui de limite de fonction (en particulier les nombres réels et les fonctions), nous permettra de pointer des contradictions éventuelles chez les étudiants. Nous complétons ensuite cette analyse avec les schèmes.

[5] Nous conservons les termes « *concept image* » et « *concept definition* » en anglais d'origine de Tall et Vinner (1981) et les écrivons en italiques pour l'indiquer.

2.2. Les schèmes

L'hypothèse sous-jacente à la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1991) est que l'acquisition du sens ou des significations d'un concept se fait à partir de la confrontation à des situations problématiques qui mettent en jeu le concept. Vergnaud (1991) parle d'un « processus d'élaboration pragmatique » du concept, affirmant que ce processus est « essentiel pour la psychologie et la didactique, comme il est d'ailleurs essentiel pour l'histoire des sciences. […] C'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances-en-acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire » (p. 136). Dans ce cadre, un *schème* est défini comme « l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée » (Vergnaud, 1991, p. 136) et comprend des règles d'actions, des invariants opératoires et des inférences (Vergnaud, 1991, p. 142). Vergnaud (1991) distingue plusieurs types d'invariants opératoires qui sont en fait de trois types logiques : des invariants de type « propositions », de type « fonction propositionnelle », et de type « arguments ». Nous ferons un focus sur les invariants opératoires des deux premiers types, en particulier les théorèmes-en-acte, règles d'actions, propriétés-en-acte et concepts-en-acte. Les *théorèmes-en-actes* sont des propositions tenues pour vraies par le sujet dans l'activité et qui lui permettent de traiter une information. Les *concepts-en-acte* sont des fonctions propositionnelles, ils permettent l'élaboration de théorèmes-en-acte. Les *règles d'actions* et *propriétés-en-acte* sont des règles et propriétés pour lesquelles les stratégies (correctes ou non) des élèves sont conformes aux concepts-en-acte et théorèmes-en-acte : leurs caractérisations permettent d'identifier les propriétés attribuées à un concept par un élève.

2.3. Méthodologie d'une analyse fondée sur les *concept images* et schèmes

Une étude via les théorèmes-en-acte et règles d'action (Vergnaud, 1991) permet de décrire les processus des élèves relativement à un certain type de problème et à un concept mathématique en particulier et ainsi, d'avoir accès aux conceptions des élèves. L'approche de Tall et Vinner (1981) permet d'insister sur le décalage entre des conceptions et des définitions formelles pour étudier l'impact de ce décalage sur de futurs apprentissages. C'est aussi une méthodologie globale pour identifier et anticiper des difficultés d'élèves. Elle est utile en particulier lorsqu'un concept mathématique (comme celui de la limite) implique de nombreux autres concepts, et dans le cas où l'on n'a pas accès à tous les schèmes des étudiants. L'expérimentation se déroule en amont et en parallèle du cours sur les limites (en France et au Brésil). Notre méthodologie d'analyse prend ainsi en compte les étapes suivantes :

- L'étude des *concept images* des étudiants associées au concept de limite de fonction mis en regard avec le cours dispensé aux étudiants, qui permettra de déterminer d'éventuelles contradictions avec l'apprentissage en cours ;
- L'étude des règles d'action, de leurs domaines de validité et des théorèmes-en-acte mis en œuvre dans différentes activités, en début d'apprentissage du concept de limite, qui nous renseignera précisément sur les schèmes disponibles des étudiants.

L'étude des concepts images, des règles d'actions et théorèmes-en-acte nous permet d'analyser les différences et les similitudes entre les connaissances et procédures mobilisées par les élèves brésiliens et français. Notre recherche est de nature expérimentale : nous plaçons les étudiants face à des activités de type « exercices » de complexité variables et nous discutons, en entretiens individuels, de leurs résolutions.

3. Objectifs et modalités du recueil de données

Nous avons décidé d'utiliser trois modalités de recueil de données, mais qui n'ont pas pu rigoureusement être mises en œuvre de manière identique dans les deux pays (au Brésil, aucun enseignement sur les limites de fonctions n'avait été réalisé en début d'expérimentation, alors qu'en France, un cours avait déjà eu lieu) : un questionnaire, des activités (qui sont en fait des exercices, avec traces écrites des élèves) et des entretiens individuels (figure 1).

La modalité « questionnaire » avait deux objectifs principaux : avoir une première vision rapide des procédures d'un nombre relativement grand d'étudiants, de telle façon à ne retenir que certains étudiants pour la suite de l'étude et enquêter sur leurs connaissances et l'évolution de celles-ci. Ce questionnaire a ainsi permis : d'identifier des étudiants volontaires pour la recherche, d'identifier leurs difficultés par rapport aux concepts mathématiques impliqués dans l'étude des limites, d'étudier l'éventuelle utilisation de définitions de limite (pour le cas des étudiants français) et d'étudier les procédures initiales des étudiants face à des études de limites dans un registre graphique. Le questionnaire était composé de questions ouvertes et fermées. Les questions ouvertes permettaient d'avoir accès à une réponse et une justification nous renseignant ainsi sur les difficultés des étudiants, notamment sur les nombres réels et les fonctions. Nous avons préparé des questions fermées à choix multiples (Mazucato, 2018), en proposant des réponses couvrant plusieurs aspects du sujet. Ces deux types de questions ont été mobilisés dans les questionnaires utilisés au Brésil et en France. L'annexe 1 présente les principales questions utilisées dans les deux pays.

Les activités ont cependant varié selon le pays en raison du temps dont nous disposions (moins de temps en France qu'au Brésil) et le fait qu'un cours sur les limites de fonctions avait déjà été proposé aux étudiants en France. Elles ont été conçues à partir d'exercices proches de ceux proposés par les enseignants et conformément aux curricula des deux pays (MEN, 2011 ; UFMS, 2014). Les résultats des recherches antérieures épistémologiques et didactiques sur les difficultés des élèves dans l'enseignement et l'apprentissage du concept de limite mentionnées en introduction ont été pris en compte et ont permis de faire des choix en termes d'activités et de guides pour les entretiens (variation dans les registres de représentation, demande de justifications en termes de définitions, calculs et représentations, etc.).

Questionnaire, activités et entretiens nous ont permis de travailler avec les étudiants individuellement en France, individuellement et par binôme au Brésil, et d'interagir avec eux afin d'obtenir plus d'informations sur leurs processus de résolution. Nous avons ainsi obtenu des productions écrites et orales (retranscrites).

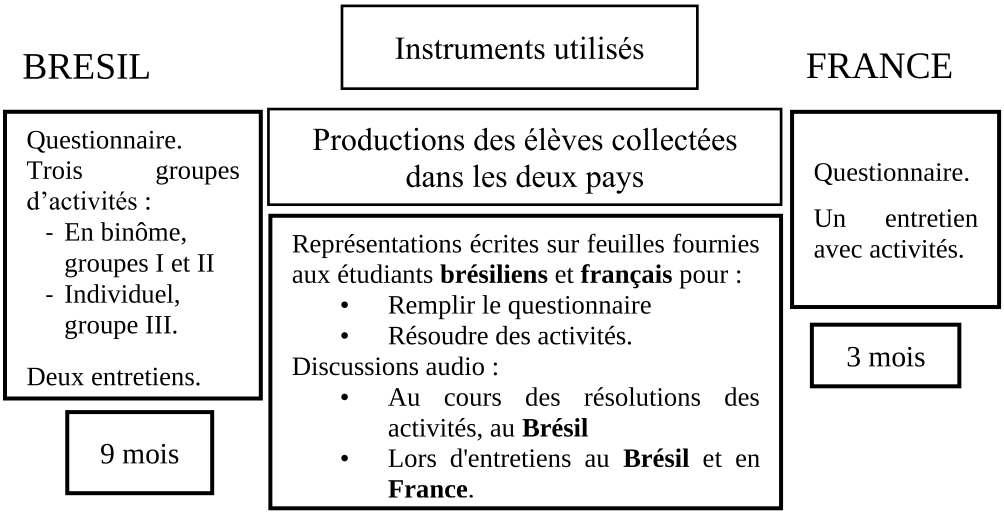


Figure 1. Recueil de données au Brésil et en France

3.1. Méthodologie de l'expérimentation au Brésil

Au Brésil, nous avons utilisé le questionnaire dans une classe du cours de mathématiques (Calcul I, que nous avons observé) de première année de l'Universidade Federal De Mato Grosso Do Sul (UFMS) : 37 étudiants ont répondu au questionnaire, 12 ont accepté de participer à l'étude, 4 sont allés jusqu'au deuxième entretien, mais seulement 2 étudiants ont suivi l'ensemble du processus. Ensuite, nous avons élaboré – en prenant en compte les observations de classe et les premiers résultats du questionnaire – et expérimenté trois groupes d'activités (voir section 4), où les cas suivants ont été considérés : (I) étude des valeurs prises par une fonction (continue ou non) dans le voisinage d'un point de son domaine de définition ; (II) étude de la limite finie d'une fonction en un point ; (III) étude de limites finies et infinies à l'infini et de limites infinies en un point. Après les deux premiers groupes d'activités (I et II) traitées en binôme, nous avons réalisé un entretien avec les étudiants volontaires, puis avons mis en œuvre le troisième groupe d'activités (III) à résoudre individuellement. Nous avons alors conduit un entretien individuel avec les étudiants. Six mois après les activités III, nous avons réalisé un dernier entretien individuel. L'ensemble du processus est représenté dans la figure 2. En gris apparaissent les temps de recueils de données. Afin d'élaborer les activités au plus proche de ce qui était travaillé en classe, nous avons observé des séances de classe, étudié le projet de l'enseignant, les activités travaillées avec les étudiants, ainsi que l'ouvrage utilisé par l'enseignant. Nous avons également pris en compte les résultats intermédiaires obtenus au fur et à mesure du processus de recueil de données (cela est représenté par des flèches courbes dans la figure 2). De plus, nous avons intégré, dans certaines questions, des concepts problématiques pour les étudiants, notamment ceux de nombres réels et de fonction (Artigue, 1995 ; Cornu, 1983), et ce de manière différenciée. Toutes les activités ont été enregistrées en audio et chaque étudiant avait sa propre fiche d'activité. Nous avons également utilisé la modalité « entretien semi-structuré » pour approfondir les faits observés et intégrer d'autres questions (Toloi et Manzini, 2013).

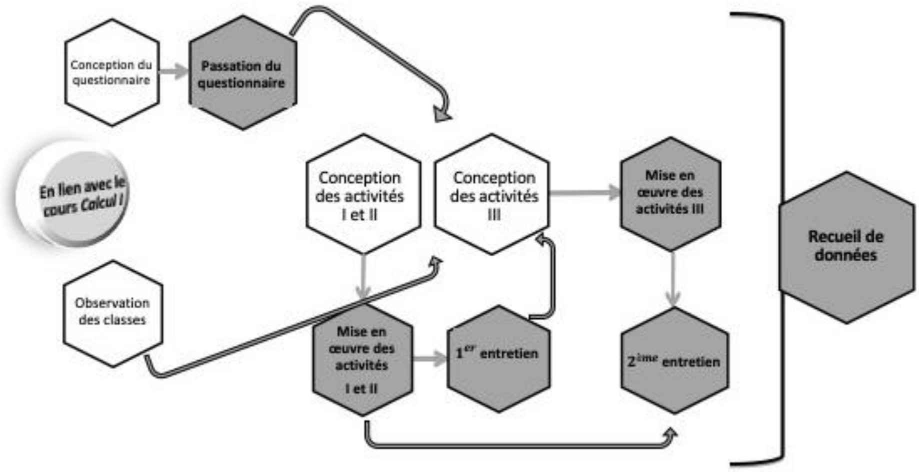


Figure 2. Étapes de l'expérimentation conduite au Brésil

3.2. Méthodologie de l’expérimentation en France

Nous avons effectué notre recherche en 2017-2018, en France, dans une classe de terminale (Grade 12) scientifique, Sciences de la Vie et de la Terre (SVT)[6]. 27 élèves ont répondu au questionnaire et 5 ont réalisé les activités couplées à une interview. En France, nous avons eu moins de temps pour conduire l’expérimentation. Nous avons tout d'abord suivi l’enseignant introduisant le concept de limite de fonction dans la classe de Terminale. Nous avons élaboré une grille d’observation de séances pour analyser ses choix. Nous avons alors préparé un questionnaire similaire à celui utilisé au Brésil pour inclure certains étudiants dans l’étude et avons élaboré des questions pour les entretiens. Nous avons construit l’entretien à partir d’activités où les étudiants devaient résoudre des exercices et justifier leurs choix. Cet entretien avait pour but de mieux comprendre les procédures des étudiants ainsi que leurs justifications, mais aussi d’inciter les étudiants à travailler dans divers registres de représentation. Nous avons retranscrit les entretiens et analysé le corpus avec la méthodologie décrite précédemment (cf. Figure 3).

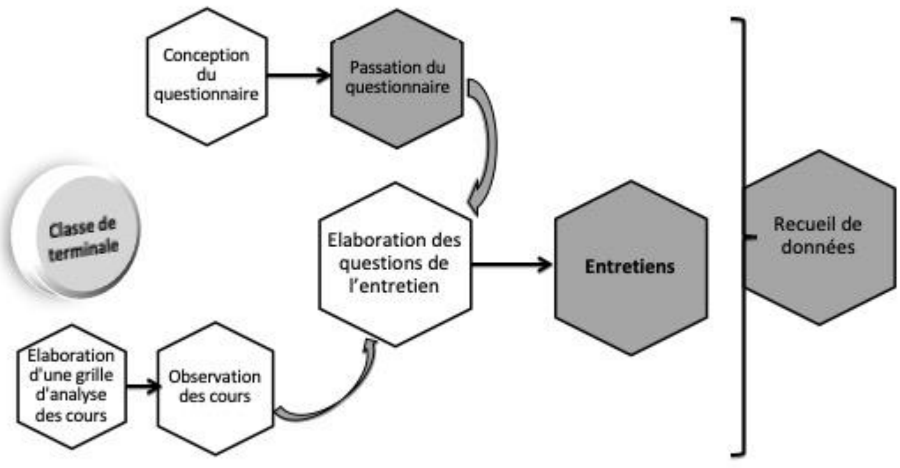


Figure 3. Étapes de l’expérimentation conduite en France

[6] Les étudiants pouvaient choisir différentes spécialités (ISN soit Informatique et Sciences du Numérique, Physique Chimie, SVT, ou Mathématiques).

4. Définitions intuitives et formelles. Activités utilisées dans l'expérimentation

Au Brésil, l'approche du concept de limite mobilise une définition dite « intuitive » de la limite d'une fonction (pas nécessairement continue), telle qu'elle est présentée dans un ouvrage très utilisé au Brésil, proposant une approche conceptuelle valorisant la présentation des définitions et des démonstrations, ainsi que le registre graphique. Il s'agit d'une définition dynamique dans le registre graphique, introduisant une égalité symbolique, mais sans quantificateurs ni *epsilon-delta* : « Intuitivement, dire que la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers p, est égale à L, ce qui s'écrit symboliquement $\lim\limits_{x\to p} f(x) = L$, signifie que quand x tend vers p, $f(x)$ tend vers $f(p)$. » (Guidorizzi, 2013, p. 55, cf. figure 4). Au Brésil, la présentation est faite avec l'idée d'approcher le point de l'investigation en adoptant des valeurs de plus en plus proches du point, avec des fonctions polynomiales et rationnelles, par exemple, avec les fonctions $f(x) = x + 1$ et $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ (Guidorizzi, 2013). Sont alors utilisés un tableau avec ces valeurs, une manipulation de la représentation algébrique si nécessaire, puis une discussion éventuelle sur la confrontation des résultats numériques avec la représentation graphique. La définition « formelle » utilisée au Brésil est celle en *epsilon* et *delta*.

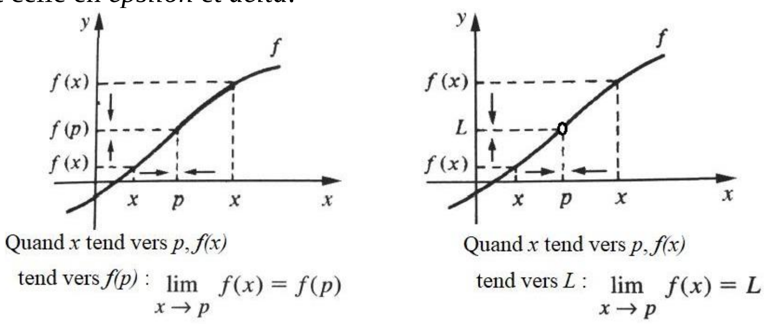
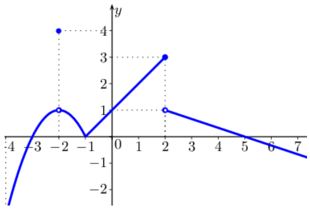
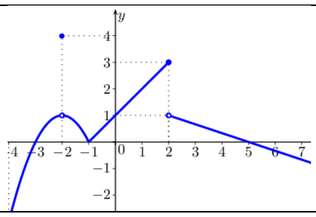


Figure 4. Définition "intuitive" de limite (Guidorizzi, 2013, p. 55)

Les trois groupes d'activités (I, II, III) sont résumés en Annexe 2. Le groupe I avait pour objectif d'identifier les procédures des étudiants dans l'étude de fonctions (domaine de définition, intervalles, images, antécédents, approximation en un point, étude de comportements au voisinage d'un point) dans les registres graphique, numérique (tableaux de valeurs) et algébrique. Les activités du groupe II engageaient une discussion sur la définition intuitive de limite vers la définition formelle (en *epsilon* et *delta*) dans l'étude de limites finies en un point avec un focus sur l'utilisation d'encadrements, valeurs absolues et inégalités en lien avec la représentation graphique. Ces activités débouchaient sur la présentation de la définition formelle de limite et un débat sur les liens avec la définition intuitive. Les activités du groupe III prolongeaient cette discussion dans les entretiens pour le cas de limites à l'infinie et limites en un point, de telles façon à approfondir les propriétés des nombres réels et l'interprétation de la représentation graphique.

En France et au Brésil, les fonctions retenues pour les études de limite étaient proches de ce que l'enseignant avait l'habitude de proposer en classe. Nous avons également fait varier les registres de représentation. Les activités retenues pour les entretiens sont présentées dans le tableau 1. Au Brésil et en France, les deuxième et troisième cas de limites de fonctions sont traités avec la représentation algébrique de fonctions similaires. Dans les activités, les étudiants doivent identifier les limites et les justifier. En général, nous leur demandons de représenter graphiquement ces fonctions. Nous avons également inséré, en France, en accord avec les programmes, manuels et observations de classe, des activités de recherche graphique de limites.

Tableau 1. Limites et représentations étudiées en France et au Brésil

Limites	France		Brésil
	Algébrique	**Graphique**	**Algébrique**
Cas (1) $\lim_{x\to p} f(x) = k$	$f(x) = \frac{2}{x}$ $f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$		$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ $f(x) = x + 1$ $f(x) = 2x - 5$
Cas (2) $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$	$f(x) = \frac{2}{x}$ $f(x) = \frac{2 + x}{x}$	-----------------	$f(x) = \frac{2}{x}$ $f(x) = \frac{2 + x}{x}$
Cas (3) $\lim_{x\to \infty} f(x) = k$	$f(x) = \frac{2}{x}$ $f(x) = \frac{2 + x}{x}$		$f(x) = \frac{2}{x}$ $f(x) = \frac{2 + x}{x}$
Cas (4) $\lim_{x\to \infty} f(x) = \infty$	$f(x) = \frac{x^2 - x}{x - 1}$	----------------	--------------

Nous avons choisi de travailler avec les fonctions suivantes dans les deux pays :

$f(x) = \frac{n}{x}$, où $n>0$ et $x\in\mathbf{R}$; $f(x) = \frac{a\pm x}{x}$, où $a\in\mathbf{R}$ et $x\in\mathbf{R}$.

Ce sont des fonctions connues des étudiants qui permettent une discussion relative au concept de limite et qui sont source de difficultés (notion d'infiniment petit ou grand, valeurs de la fonction tendant vers l'infini, valeurs de x devenant infiniment proches d'un nombre (e.g. Cornu, 2002 ; Artigue, 1995)). Par ailleurs, nous souhaitions faire varier les registres de représentation, chacun impliquant différents aspects et relations (e.g. Duval, 1993 ; Vergnaud, 1991 ; Tall et Vinner, 1981). Ainsi, nous avons cherché à obtenir une variété en termes de représentations mobilisées par les étudiants : algébrique, graphique, numérique, langage naturel (écrit et oral).

Au Brésil, seul le cas (1) a déjà été traité en classe (voir Annexe 3) avec introduction d'une définition intuitive et d'une définition formelle. Pour l'étude des cas (2) et (3) de notre expérimentation, l'étudiant doit étudier la fonction lorsque les valeurs de x tendent vers le point d'investigation de la limite, par valeurs supérieures et inférieures. Un tableau avec des valeurs données doit être renseigné. L'étudiant doit expliquer ce que fait la fonction selon la limite étudiée et représenter graphiquement la fonction en expliquant, dans la construction, les limites identifiées. À différents moments, l'étudiant doit expliquer oralement ce qu'il a fait sur la fiche d'activité.

En France, les cas (2) et (3) ont été traités dans l'entretien. Le cours sur les limites a déjà été mené en classe, sans définition formelle en *epsilon* et *delta* (voir Annexe 3). L'étudiant doit identifier la limite de chaque fonction. Nous lui demandons de le justifier par écrit et de nous expliquer oralement ce qu'il a fait sur la fiche d'activité. Une représentation graphique de la fonction a été parfois demandée.

5. Une étude de cas - Mateus au Brésil et Baptiste en France

Afin d'avoir accès aux schèmes, nous avons retenu des étudiants ayant résolu toutes les activités et fourni des justifications, à l'oral durant l'entretien en France, mais aussi dans les discussions au sein des binômes au Brésil. Nous avons recherché des étudiants ayant mobilisé des représentations graphiques, le langage écrit et oral (formel et naturel), ainsi que des représentations algébriques et avons sélectionné des étudiants n'ayant pas ou peu de difficultés dans les concepts « autres » tels que la factorisation et les fonctions. Pour cela, nous avons mis en place une étude globale fondée sur l'étude des *concept images* qui transparaissaient dans les productions des étudiants : il s'agissait d'identifier les conflits potentiels générés par des *concept images* avec le *concept definition* chez un même étudiant (Vinner et Dreyfus, 1989 ; Tall & Vinner, 1981), de sélectionner des étudiants pour conduire des études de cas, puis d'approfondir l'étude en analysant les schèmes. Nous avons retenu, pour cet article, les productions de deux étudiants dans des activités similaires afin d'identifier les différences et les similitudes dans les schèmes et leurs évolutions : Mateus (17 ans, 1ère année d'université en licence de mathématiques au Brésil) et Baptiste (16 ans, Terminale, ayant déjà étudié les limites de suites, en France).

5.1. Le *concept image* de Mateus : prédominance du registre graphique

Tout au long de notre étude (Burigato, 2019) et des cours, le *concept image* de Mateus s'est enrichi au niveau des registres mobilisés, seul le registre graphique étant mobilisé initialement. Mateus a réussi à résoudre les questions correctement, la plupart du temps par observation de la représentation graphique de la fonction et en faisant des calculs des images de plusieurs points lorsque c'était possible. Ce type de calculs lui a permis de construire des représentations graphiques dont il connaissait l'allure. Au début de l'expérimentation, Mateus ne faisait référence qu'aux valeurs de la fonction qui grandissent vers l'infini, puis il a intégré d'autres éléments vus en cours, comme les notions de *maxima* et de *minima* d'une fonction, ainsi que le comportement des images de la fonction. Lors du dernier entretien, nous lui avons demandé ce que signifiait pour lui « $f(x)$ tend vers l'infini ». Il a répondu :

> Ici, il n'y aura jamais de maximum, [...] il est toujours plus gros que n'importe quel nombre. C'est $f(x)$, ça va toujours... plus grand que n'importe quel nombre... à partir d'ici. Il n'aura pas de maximum.

Dans l'interview, nous lui avons demandé d'expliquer les cas où la fonction tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. Mateus a montré la représentation graphique de la fonction en expliquant :

> Vous voyez comme tous les nombres ici vont à l'infini... Ils ne dépasseront jamais 0, mais si vous prenez chacun d'eux, ils s'approcheront d'un nombre proche de 0, cela aussi ne le sera jamais... il n'y aura jamais de limite, car vous voyez qu'il approche de 0, mais si vous n'en voyez qu'un, il se rapprochera d'un nombre.

Mateus a alors expliqué que « x va à l'infini » et que, pour chaque x, « son $f(x)$ » est un nombre qui se rapproche de zéro, mais ne sera jamais nul. C'est le seul aspect que l'on pourrait rapprocher du concept de nombres réels chez Mateus, obstacle épistémologique ici de la limite qui n'est pas atteinte.

Nous avons vu qu'en justifiant ses choix, à l'écrit ou à l'oral, lors des activités et entretiens, Mateus a corrigé des erreurs, utilisant sa mémoire de problèmes précédemment résolus, refaisant certaines représentations et parvenant progressivement, avec un accompagnement, à mobiliser la représentation algébrique, ce qui nous conduit à souligner l'évolution de son *concept image*. On peut s'interroger sur les obstacles ultérieurs liés à cette prédominance initiale du registre graphique et numérique chez Mateus, conforme à l'approche d'enseignement au Brésil.

5.2. Le *concept image* de Baptiste - Plusieurs registres mobilisés

Dans les activités, Baptiste mobilise des justifications qui s'inscrivent dans plusieurs registres : numérique, algébrique et graphique. Pour étudier son *concept image*, nous avons listé les arguments de Baptiste dans chacun de ces registres et recherché les liens que Baptiste était à même de tisser entre ceux-ci. Dans le registre numérique, Baptiste exploite des substitutions de valeurs et les formes indéterminées. Dans le registre algébrique, il simplifie l'écriture lorsqu'il y a une indétermination. Le registre graphique est mobilisé pour appréhender des fonctions proches de fonctions de référence. D'une manière générale, Baptiste a clairement une vision dynamique des limites (« dans la limite, le *x* s'approche du point » ; « les images de la fonction peuvent s'approcher infiniment d'un certain nombre »). Son *concept image* s'enrichit lorsqu'il intègre les apports du cours de l'enseignant (Annexe 3). Certains éléments et phrases des cours de l'enseignant pouvaient cependant générer des obstacles (e.g. Cornu, 1983) : « *x* tend vers *a* par valeurs supérieures [...] dès que *x* est suffisamment proche de *a* », « Si on peut rendre $f(x)$ aussi grand que l'on veut », « si *x* est suffisamment grand ».

Mais, en classe, l'enseignant a discuté la signification de ces expressions à partir des représentations des élèves, utilisant par exemple la fonction $f(x) = 1/x$. Cela a vraisemblablement contribué à ce que Baptiste fasse des relations pour les fonctions travaillées avec d'autres concepts (réels, asymptotes) et varie les registres de représentation dans les activités (figure 5).

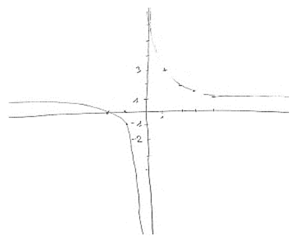
$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{+\infty} = 0$	$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{2}{x}+1\right)}{x(1)} = 1$ car $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right) = 0$	
x peut être plus grand et la limite tend vers 0	Je fais la simplification. La limite d'une fonction constante est la constante elle-même.	Représentation graphique et asymptotes

Figure 5. Baptiste – Cas (3) : limite en l'infini des fonctions $f(x) = 2/x$ et $f(x) = (2+x)/x$

L'enseignant a ensuite introduit une notation plus formelle en *epsilon* (Annexe 2). Ainsi, des expressions telles que « si on peut rendre les valeurs de $f(x)$ proches de *l* » et « si les images de $f(x)$ sont aussi proches que l'on veut de *l* » évoluent vers l'expression « si tout intervalle ouvert contient toutes les valeurs de $f(x)$ ». Il est clair que le souci de l'enseignant est ici de travailler avec les expressions et conceptions « naturelles » considérées comme problématiques dans la littérature (Cornu, 2002). Les éléments décrivant le *concept image* de Baptiste indiquent qu'il fait systématiquement des associations pertinentes avec les définitions présentées par l'enseignant. Cependant, une étude sur un plus long terme serait nécessaire pour étudier les conflits potentiels entre le *concept image* de Baptiste décrit ci-dessus et les définitions formelles en *epsilon* et *delta* qu'il devra mobiliser plus tard.

5.3. Conclusions sur les *concepts images*

Sur l'ensemble de l'expérimentation, l'étude des *concept images* a été guidée par la recherche de conflits potentiels, soit au sein du *concept image* de limite de fonction, soit au niveau des objets mathématiques liés (fonctions, nombres réels, algèbre). Nous avons trouvé deux phénomènes susceptibles de générer des conflits :

- Mateus associe l'étude des fonctions à des problèmes à résoudre en fonction des valeurs de $f(x)$; il associe le domaine de définition et les valeurs des images par la fonction, en particulier aux bords de l'intervalle de définition de la fonction.
- Baptiste associe l'existence de la limite en un point à la valeur de la fonction en ce point au niveau de la représentation graphique.

Dans le cas de Mateus, l'un des problèmes ultérieurs sera relatif à des situations mobilisant la définition formelle, en *epsilon* et *delta*. Il devra alors manipuler des inégalités et des valeurs absolues et cherchera à mettre en relation des éléments du domaine de définition de la fonction avec des valeurs prises par la fonction. Dans le cas de Baptiste, les difficultés ultérieures seront relatives à sa conception de la limite de fonction en un point. L'étude de ces *concept images* montre par ailleurs des différences initiales entre ces deux étudiants, notamment au niveau des registres. L'étude des schèmes va nous permettre de discuter davantage les différences et les similitudes et, en particulier, de voir l'impact de la prédominance de certains registres sur les schèmes.

5.4. Etude des schèmes de Mateus et Baptiste

Pour faire l'étude fine des schèmes mobilisés par Mateus et Baptiste, nous étudions leurs productions lors de l'étude des fonctions utilisées dans les deux pays : $f(x) = n/x$, où $n>0$ et $x\in\mathbf{R}$ et $f(x) = (2+x)/x$, $x\in\mathbf{R}$ pour les cas (2) et (3). Notons que, dans les activités, ces études de limites devaient être traitées en utilisant les registres algébrique, numérique, graphique et en langage naturel. L'intégralité des analyses de l'évolution des règles d'actions (notées R avec l'initiale du pays) et théorèmes-en-acte (notés TA avec l'initial du pays) de Mateus et Baptiste sont dans (Burigato, 2019). Nous en reprenons ici les éléments principaux.

5.4.1. Les schèmes de Mateus et Baptiste pour le cas (2) $\lim\limits_{x \to p} f(x) = \infty$

Suite à plusieurs activités, Mateus mobilise régulièrement, dans ses schèmes, le théorème-en-acte (TAB.iv.a[7]) fondé sur l'étude de représentation graphique. Comme il connaît l'allure de la représentation graphique de la fonction $f(x) = 1/x$, son schème se rapproche en fait des théorèmes-en-acte (TAB.v.a) et (TAB.v.b) par observation du graphique, mais sans réaliser de calculs de valeurs (cf. Figure 6).

Dans l'étude de la fonction $f(x) = (2+x)/x$, Mateus doit apporter de nouvelles adaptations à son schème initial. Il reconnaît la similitude de cette fonction avec celle d'autres activités et éprouve des difficultés dans la manipulation algébrique, dans les calculs de valeurs de la fonction (il obtient donc une représentation graphique incorrecte) et dans la simplification algébrique de l'écriture. Avec l'aide d'un collègue, il réussit à simplifier l'expression : $f(x) = 2/x+1$ et corrige ainsi sa représentation graphique. La figure 6 permet d'identifier la filiation des théorèmes-en-acte et règles d'action selon les fonctions étudiées.

Baptiste a correctement identifié la limite des deux fonctions. Il a mobilisé plusieurs théorèmes-en-acte relatifs aux limites de fonction, représentés sur la figure 7, ainsi que (TAF.vi.a) et (TAF.vi.b) que l'on peut rapprocher des théorèmes-en-acte de Mateus (TAB.v.a) et (TAB.v.b). Dans les deux cas, ces théorèmes-en-acte ont été construits avec un appui sur la mémorisation d'activités similaires précédemment traitées. La différence entre Baptiste et Mateus réside dans le fait que Mateus mobilise d'abord le registre graphique, alors que Baptiste se situe dans le registre numérique et algébrique. En plus de ces deux théorèmes-en-acte, Baptiste en a mobilisé d'autres, différents suivant la fonction travaillée (figure 7).

[7] Nous conservons dans cet article les notations utilisées dans la thèse (Burigato, 2019) par souci de cohérence.

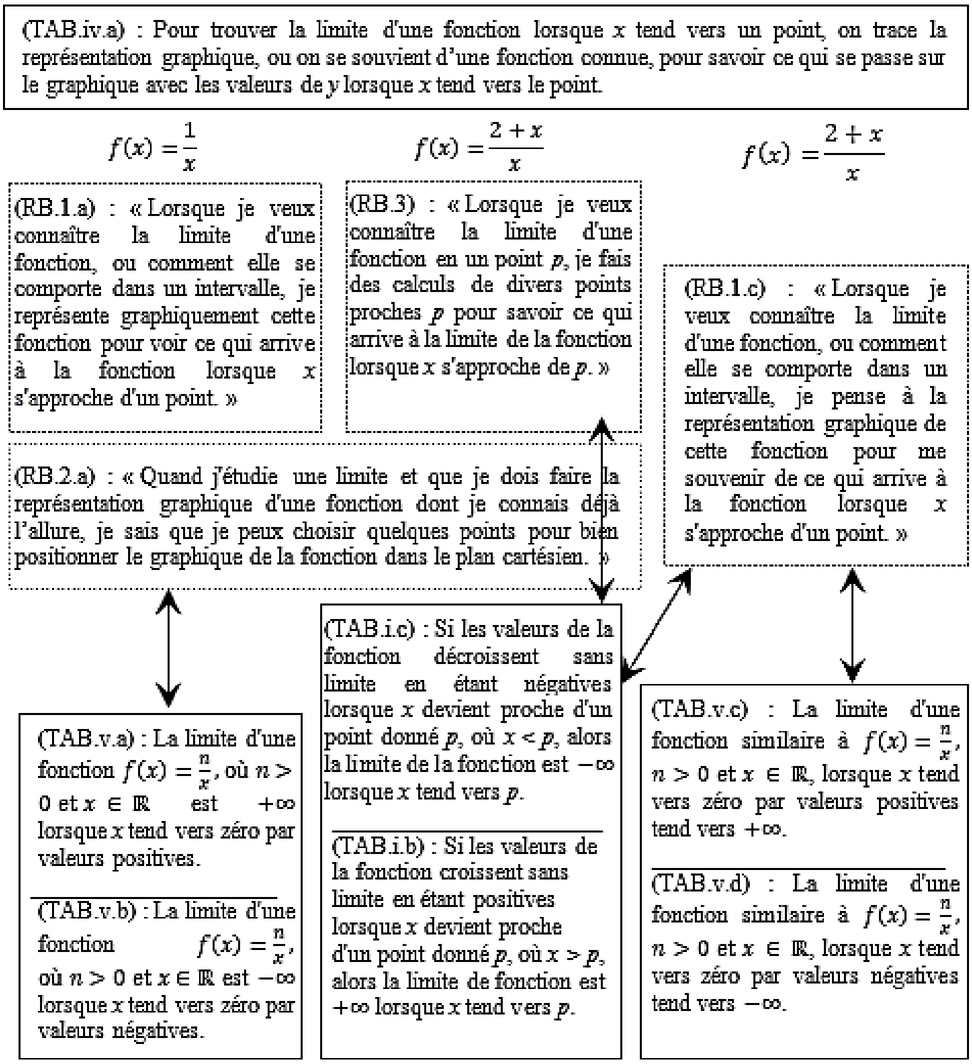


Figure 6. Règles d'actions et théorèmes-en-acte de Mateus[8], cas (2) : $\lim_{x \to p} f(x) = \infty$

[8] Dans les activités conduites au Brésil, correspondant à l'étude de la fonction $f(x) = (2+x)/x$ dans la figure 6, la fonction est étudiée avec des tableaux de valeurs et une représentation graphique, pour des pas de plus en plus petits de x. Des formulations décrivant le phénomène observé graphiquement et par le calcul sont demandées aux étudiants.

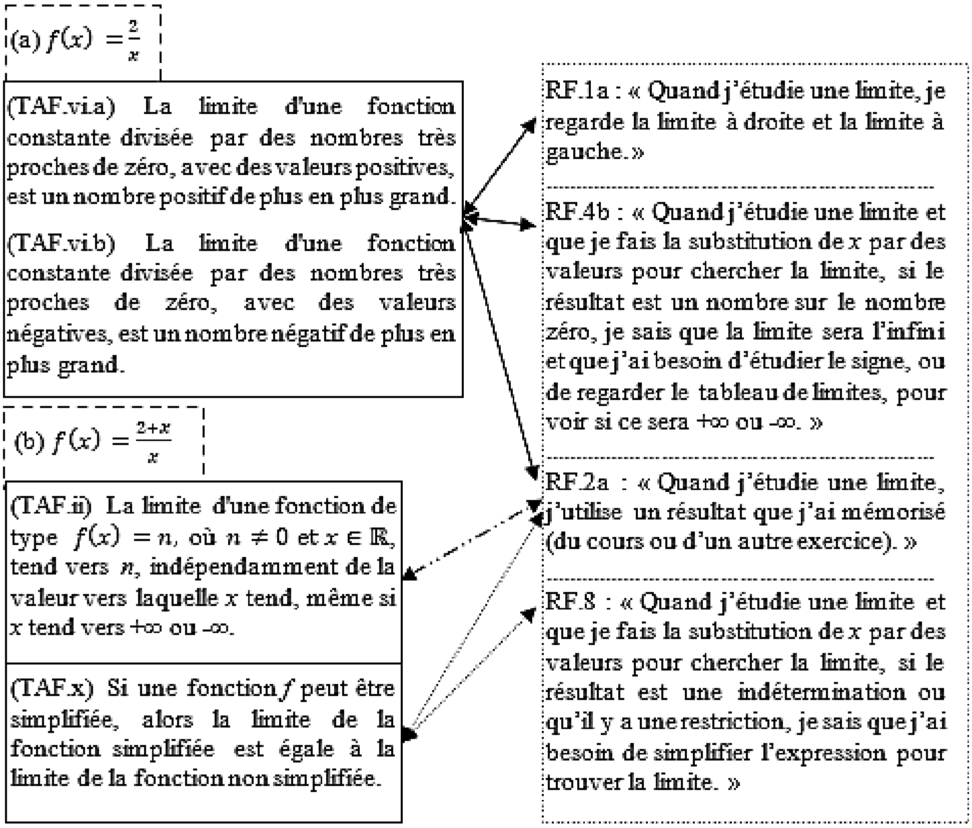


Figure 7. Règles d'actions et théorèmes-en-acte de Baptiste, cas (2) : $\lim_{x \to p} f(x) = \infty$

5.4.2. Les schèmes de Mateus et Baptiste pour le cas (3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = k$

$f(x) = \frac{1}{x}$

(RB.1.b) : « Quand j'ai besoin de connaître la limite d'une fonction, ou comment elle se comporte dans un intervalle, je fais la représentation de cette fonction pour voir ce qui arrive à la fonction lorsque x tend vers $+\infty$ $(ou\ -\infty)$. »

$f(x) = \frac{2+x}{x}$

(RB.1.d) : « Quand j'ai besoin de connaître la limite d'une fonction, ou comment elle se comporte dans un intervalle, je pense à la représentation graphique de cette fonction pour me souvenir de ce qui arrive à la fonction lorsque x tend vers $+\infty$ $(ou\ -\infty)$. »

(RB.2.a) : « Quand j'étudie une limite et que je dois faire la représentation graphique d'une fonction dont je connais l'allure, je sais que je peux choisir quelques points pour bien positionner le graphique de fonction dans le plan cartésien. »

(TAB.vi) La limite d'une fonction $f(x) = \frac{n}{x}$, où $n > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ est zéro lorsque x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$).

(TAB.iv.b) La limite d'une fonction quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) est donnée en observant ou en se rappelant un graphe : on observe les valeurs des images sur le graphe quand x croît ou décroît.

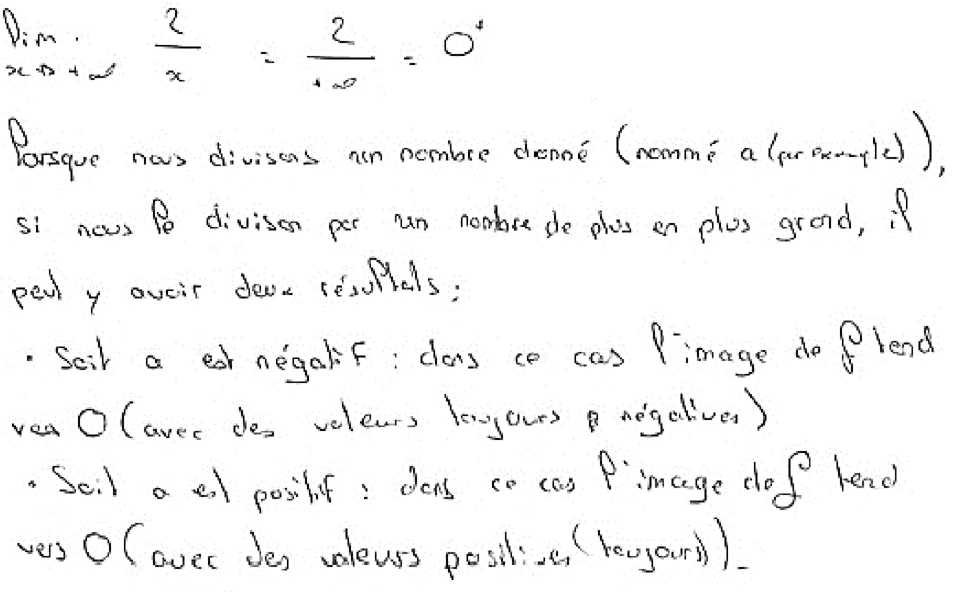
Figure 8. Règles d'actions et théorèmes-en-acte de Mateus, cas (3) : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = k$

L'étude du cas (3) confirme la prédominance de la représentation graphique chez Mateus (cf. Figure 8). Cependant, l'étude des fonctions proposées (similaires à celles connues de Mateus) engage l'étudiant à vérifier algébriquement et numériquement le comportement de cette fonction pour répondre aux questions. Dans l'entretien, il précise qu'il utilise toujours la représentation graphique des fonctions pour traiter les activités, mais qu'il n'a jamais rencontré de situations nécessitant une réflexion sur les comportements graphiques de fonctions. Avec la fonction $f(x) = (2+x)/x$, il a dû revoir sa représentation car, bien qu'il sache que c'est la « même fonction », translatée, il doit mobiliser d'autres connaissances, notamment le fait que les valeurs de la fonction se rapprochent de $y = 1$, lorsque x prend des valeurs plus grandes ou plus petites. Une autre adaptation du schème de Mateus concerne les moyens de contrôle et de validation : il n'aime pas faire des calculs numériques et a déclaré qu'il trouvait que cela prenait beaucoup de temps, même avec la calculatrice. Au cours des activités, nous avons souvent constaté qu'il avait du mal à faire des calculs et à utiliser les résultats obtenus. Sa confiance dans les représentations graphiques des fonctions obtenues dans des situations rencontrées précédemment est relative. Lorsque Mateus a été confronté à la fonction $f(x) = (2+x)/x$ il a commencé par effectuer plusieurs calculs. Il s'agit d'une action significative reflétant une adaptation du schème, relativement à des erreurs liées aux choix précédents (cas (2)).

Les schèmes de Baptiste sont eux aussi en lien avec la connaissance des cas précédemment traités, avec une adaptation selon la fonction en jeu. Dans le cas de la fonction $f(x) = 1/x$, la mémorisation des activités précédentes, les propriétés des nombres réels et l'idée des limites à gauche et à droite ont guidé les actions constitutives du schème de Baptiste. Baptiste a adapté son schème pour la fonction $f(x) = (2+x)/x$ utilisant des opérations d'addition et de division des limites de fonctions, de simplification de l'expression algébrique de la fonction initiale pour traiter l'indétermination. Ici, Baptiste semble bien connaître la division pour les nombres réels, ainsi que les limites de la fonction de référence. Quand nous l'avons interrogé sur $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x}$, il nous a répondu :

> On voit que c'est zéro, parce qu'on va diviser un nombre donné qui ne changera pas, par un plus gros. Le résultat va s'approcher de plus en plus près, enfin il va être de plus en plus près ...nul, zéro.

Et il a écrit sur sa feuille d'activité (figure 9) ses justifications, montrant que la fonction peut tendre vers zéro de deux manières, par valeurs négatives ou positives.



$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{+\infty} = 0^+$

Lorsque nous divisons un nombre donné (nommé a (par exemple)), si nous le divison par un nombre de plus en plus grand, il peut y avoir deux résultats :

• Soit a est négatif : dans ce cas l'image de f tend vers 0 (avec des valeurs toujours négatives)

• Soit a est positif : dans ce cas l'image de f tend vers 0 (avec des valeurs positives (toujours)).

Figure 9. Résolution écrite de Baptiste pour le cas (3) : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = k$

Pour traiter la fonction *f(x)=(2+x)/x*, Baptiste s'appuie sur la mémorisation de situations précédentes, l'identification d'une contrainte et la nécessité de simplifier la fonction et d'identifier les limites connues de fonctions de référence.

(a) $f(x) = \frac{2}{x}$

(TAF.i) Si un nombre est divisé par un nombre infini (+ ou - ∞), alors le résultat sera un nombre très proche de zéro.

(TAF.v.b) La limite d'une fonction $f(x)=n/x$, où $n>0$ et x réel, lorsque x tend vers $+\infty$ est zéro par valeurs positives.

(TAF.v.c) La limite d'une fonction $f(x)=n/x$, où $n>0$ et x réel, lorsque x tend vers $-\infty$ est zéro par valeurs négatives.

(b) $f(x) = \frac{2+x}{x}$

(TAF.v.a) La limite d'une fonction $f(x) = \frac{n}{x}$, où $n > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$), est zéro.

(TAF.ii) La limite d'une fonction de type $f(x) = n$, où $n \neq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, tend vers n, indépendamment de la valeur que x approche, même si x tend vers l'infini.

(TAF.x) Si une fonction f peut être simplifiée, alors la valeur de la limite de la fonction f simplifiée est égale à la limite de la fonction f non simplifiée.

RF.4c : « Quand j'étudie une limite et que je remplace x par une valeur proche du point étudié, si le résultat de la limite est un nombre divisé par un nombre plus grand, alors je sais que la limite tend vers zéro, et je dois étudier le signe, ou regarder le tableau de variation, pour voir si c'est par valeurs positives ou négatives. »

RF.2a : « Quand j'étudie une limite, j'utilise un résultat que j'ai mémorisé (du cours ou d'un autre exercice). »

RF.1a : « Quand j'étudie une limite, je regarde la limite à droite et la limite à gauche. »

RF.4d : « Quand j'étudie une limite et que je remplace x par une valeur proche du point étudié, si le résultat de la limite est un nombre divisé par l'infini (+ ou $-\infty$), je sais que la limite est zéro. Je dois alors étudier le signe, ou regarder le tableau de variation, pour voir si c'est par valeurs positives ou négatives. »

RF.2b : « Quand j'étudie une limite pour une fonction qui ressemble à une fonction de référence, je sais que la limite est la même que celle de la fonction de référence. »

RF.8 : « Quand j'étudie une limite et que je remplace x par une valeur proche du point étudié, si le résultat est une indétermination, ou s'il y a une restriction, je sais que j'ai besoin de simplifier l'expression pour trouver la limite. »

Figure 10. Règles d'actions et théorèmes-en-acte de Baptiste, cas (3) : $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$

Les théorèmes-en-acte (TAF.v.b) et (TAF.v.c) précèdent le théorème-en-acte (TAF.v.a) du schème de l'étudiant, montrant ainsi une adaptation (cf. Figure 10). Ainsi, après simplification lui permettant d'identifier la fonction $f(x) = 1/x$, Baptiste élargit son schème initial, prévoyant qu'il ne sera pas nécessaire d'étudier les limites à droite et à gauche, car la fonction $f(x) = (2+x)/x$ tend vers 1 et « peu importe si $f(x) = 2/x$ tend vers zéro par des valeurs positives ou négatives, car cela ne changera pas le résultat final de la limite ». Baptiste a un schème très stable pour identifier les limites de fonction du type $f(x) = n/x$, $n>0$ et $x\in\mathbf{R}$, et du type $f(x) = (a\pm x)/x$, $n>0$ et $x\in\mathbf{R}$. Il sait également traiter des limites de fonctions et des cas d'indétermination connus. Ses schèmes ont été adaptés, non seulement de manière opérationnelle, en-acte, en mobilisant des tableaux de valeurs et de variations et des résultats mémorisés de certaines limites, mais aussi en intégrant de nouveaux éléments du concept de limite. En effet, Baptiste comprend les connaissances mobilisées dans les activités, par exemple, lors de la représentation graphique de la fonction $f(x) = (2+x)/x$, le comportement de la fonction est justifié lorsque x est proche de zéro (cas (2)). Les représentations mobilisées, à l'écrit et à l'oral par Baptiste, sont cohérentes pour les deux registres travaillés ici (explication de la limite obtenue dans le registre algébrique et au niveau de la représentation graphique, incluant l'identification du comportement de la courbe par rapport à son asymptote horizontale $y = 1$).

5.5. Poursuite de l'évolution des schèmes de Mateus et Baptiste

L'étude du parcours de Mateus et Baptiste sur un temps relativement long, en prenant en compte les activités conduites en cours par l'enseignant et notre expérimentation, nous a permis de montrer l'évolution de leurs schèmes dans notre travail de thèse (Burigato, 2019). À titre d'exemple représentatif, dans le tableau 2, nous présentons l'étude de la limite en 1 de la fonction $f(x) = (x^2–x)/(x–1)$, proposée aux étudiants dans le registre algébrique.

Ce type de fonction est généralement utilisé pour montrer qu'une limite peut exister en un point où la fonction n'est pas définie. Les deux étudiants ont encore mobilisé les schèmes précédemment décrits, tout en faisant des adaptations. Le premier théorème-en-acte (simplification algébrique) est commun aux deux étudiants, mais l'action diffère :

– l'étudiant brésilien étudie les points voisins et voit que les valeurs s'approchent d'un nombre qui est la limite (registre numérique prédominant) ;

– et l'étudiant français reconnaît la fonction et sait que la limite sera la valeur que la fonction simplifiée prend en ce point (registre algébrique).

Nous retrouvons ici les registres mobilisés dans les schèmes précédents de ces étudiants. Cela est en accord avec les schèmes décrits dans les sections précédentes.

Le répertoire de représentations de fonction de Mateus s'est enrichi, et ses actions s'orientent sur le registre numérique. Basptiste, quant à lui, reste fidèle au registre algébrique et au recours de résultats mémorisés et fonctions de référence.

Tableau 2. Règles d'action et théorèmes-en-acte, pour la fonction $f(x) = (x^2–x)/(x–1)$

Mateus	**Baptiste**
Règles d'actions	
« Lorsque je dois trouver la limite d'une fonction rationnelle, je sais que je peux simplifier l'expression algébrique de la fonction pour travailler avec une expression plus simple, afin de faciliter les calculs. » « Lorsque je résous une activité de limite et que je dois traiter des éléments aux bords du domaine de définition, je sais que je dois travailler avec des valeurs proches du point considéré pour l'étude de la limite. »	« Quand j'étudie une limite et que je remplace *x*, et que le résultat est une indétermination, ou s'il y a une restriction, je sais que j'ai besoin de simplifier l'expression pour traiter la limite. »
Théorèmes-en-acte Si une fonction *f* est simplifiée, alors la valeur de la limite de la fonction *f* simplifiée est égale à la limite de la fonction *f*.	
Si les valeurs de la fonction se rapprochent d'une valeur *L* lorsque *x* devient proche d'un point donné *p*, alors la limite de la fonction est *L* lorsque *x* tend vers *p*.	La limite d'une fonction, quand il n'y a pas restrictions, est obtenue en remplaçant dans *f*(*x*) la valeur *x* par la valeur où l'on cherche la limite.

Le concept de fonction est ici un point central : certains aspects de ce concept peuvent être à la fois un point d'appui pour l'évolution des schèmes mais aussi un point de déséquilibre, comme le souligne Vergnaud (2015). Tout au long de l'enseignement, le concept de fonction nécessite l'étude de phénomènes aux points considérés comme problématiques pour la fonction, aux bornes du domaine de définition par exemple, dans des registres variés.

Conclusion et perspectives

Nous avons vu dans notre expérimentation que la mémorisation de résultats, tels que des tableaux de variations de fonctions, des tableaux de valeurs, des propriétés sur les nombres réels, et des représentations graphiques, apparaît comme centrale. Ici, la compréhension de la construction de ces premiers résultats sur les fonctions est fondamentale pour que l'élève puisse les utiliser correctement par la suite. Par exemple, dans le cas de l'élève brésilien, son utilisation d'une représentation graphique d'une fonction mémorisée a été un point d'appui à plusieurs reprises dans son travail : dans certains cas, cela était « efficace » (et lui permettait d'accéder au résultat), dans d'autres non. Il lui fallait donc reprendre cette représentation, réfléchir à sa construction, afin de pouvoir réorganiser son schème face à la situation. D'une manière globale, les schèmes de l'étudiant brésilien, initialement dans le registre graphique, ont progressivement glissé vers le registre numérique et algébrique. La confrontation de ces registres de représentation dans les activités et entretiens lui a permis d'appréhender le fait que la limite peut exister en un point n'appartenant pas au domaine de définition de la fonction, ce qui est un gain par rapport au *concept image* initial.

L'étudiant français a également revu les résultats mémorisés lorsqu'il a trouvé un résultat incorrect et n'a pas pu expliquer la limite obtenue : il a soutenu que, dans le cas précédent (vu en cours), c'était possible, car il s'agissait d'une valeur exacte, et, dans l'activité proposée, il obtenait une valeur approximative. Il a évoqué une autre situation dont la limite avait été obtenue par substitution directe de la valeur d'étude dans la fonction donnée. Mais, dans l'activité proposée, Baptiste n'a réalisé son erreur que lorsqu'on lui a demandé de représenter graphiquement la fonction : il a alors refait toute l'activité, corrigeant et justifiant le résultat trouvé. Ce n'est pas la construction de la représentation graphique elle-même qui a joué ce rôle, mais les règles d'action mobilisées pour sa construction et théorèmes-en-acte afférents. Pour l'étudiant français, les schèmes initiaux ancrés dans le registre algébrique et calculatoire se sont enrichis avec le registre graphique, lors des entretiens. Le registre graphique est devenu pour lui plus qu'une simple représentation de fonction de référence mémorisée.

Ces résultats confirment les résultats de la littérature dans le cas de l'analyse et en montrent les aspects dans un contexte de classe ordinaire (e.g. Cornu, 2002 ; Reis, 2001 ; Nascimento, 2003) : l'expérimentation complémentaire au cours d'une grande variété de situations, mobilisant divers registres de représentations, permet aux étudiants d'enrichir leur domaine d'expérience, de faire évoluer leurs *concept images* et leurs schèmes. Les schèmes des deux étudiants sont à l'origine chacun conformes au type d'enseignement en France et au Brésil et évoluent au cours de l'expérimentation. Si certains théorèmes-en-acte sont communs, les règles d'actions diffèrent, elles sont guidées par le répertoire de l'élève, obtenu au fil des années. Ces règles d'actions constituent la véritable partie génératrice des schèmes (Vergnaud, 1991) et nous renseignent sur la continuité des actions d'un sujet (recherche d'informations, actions, contrôles des résultats d'une action). Ainsi, ce sont elles qui sont intéressantes à exploiter pour identifier les apports de ces différentes approches d’enseignement (Brésil et France) pour la conception d’activités futures pour la classe ordinaire.

Par ailleurs, notre méthodologie d'analyse s'est avérée pertinente, étant données les différences que nous avons présentées des deux pays étudiés. La modélisation théorique retenue nous a permis d’identifier des éléments communs et les spécificités dans les productions des élèves brésiliens et français en termes de *concepts images*, de schèmes, et ce en lien avec les registres de représentation. En particulier, nous avons relevé des théorèmes-en-acte communs à ces étudiants, mais qui étaient guidés par des règles d’action différentes.

Le travail de thèse (Burigato, 2019), dont sont extraites ici les études de cas, a ouvert différentes perspectives. En ce qui concerne la modélisation théorique retenue, nous remarquons qu’elle s’avère pertinente pour l'étude des élèves en difficulté. À titre d’exemple, nous avons étudié le cas d'un élève sans difficulté avec les concepts de base, mais en grande difficulté dans les activités travaillées dans notre recherche. Dans notre étude, nous avons été en mesure d'identifier les représentations les plus problématiques et celles qui lui ont permis d'établir des liens et relations pertinents pour faire face aux activités. Nous envisageons des études ultérieures sur divers concepts mathématiques (dont ceux de limite et de fonction), avec la méthodologie suivante :

– Etudier le *concept image* d'un concept donné, en identifiant les images qui peuvent entraîner des conflits, soit avec d'autres images de ce concept, soit avec la définition du concept ;
– A partir de cela, réaliser une modélisation en termes de règles d’action et de théorèmes-en-acte, en relation avec les activités ou situations travaillées, afin d'analyser plus en détail les difficultés en vue de l’apprentissage de la définition formelle ;
– Construire des situations en prenant en compte les obstacles et conflits possibles identifiés dans le *concept image* et les schèmes des étudiants et ainsi aller vers la définition formelle.

Cette démarche s’inscrit dans un contexte de l’enseignement ordinaire et n’adopte pas la démarche d’ingénierie didactique et de construction de définitions telles que développées dans les travaux de Lecorre (2016) et Chorlay (2019) sur un temps long.

À termes, il serait nécessaire de croiser ces deux types d’approches (ingénierie de construction de définitions et activités locales s’inscrivant dans les curricula) afin d’étudier comment articuler le local et le global (au sens de Bloch, 2017) pour permettre l’accès aux étudiants au domaine mathématique qu’est l’Analyse. Cela rejoint le nécessaire travail sur le concept de fonction caractérisé à la fois par la multiplicité de registres de représentation (algébrique, symbolique, formel, numérique, graphique) (Duval, 1995) et plusieurs perspectives (ponctuelle, globale et locale) (e.g. Vandebrouck, 2011 ; Montoya Delgadillo et al., 2018) que nous n'avons pas exploitées dans notre expérimentation.

Bibliographie

ALCOCK, L. et SIMPSON, A. (2009). The role of definition in example classification. Dans M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, et H. Sakonidis (Dir.), *Proceedings of the 33th conference of the international group for the Psychology of Mathematic Education*, (Vol. 2, p. 33-40). IGPME.

ARTIGUE, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. Dans M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gomez (Dir.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (p. 97-140). Grupo Editorial Iberoamérica.

BALACHEFF, N. (1995). Conception, connaissance et concept. Dans D. Grenier (Dir.), *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques* (p. 219-244). IMAG.

BERGÉ, A. et SESSA, C. (2018). Complétude et continuité à travers 23 siècles : contributions à une recherche en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, **38**(2), 157-205.

BLOCH, I. (2017). L'enseignement de l'analyse : de la limite à la dérivée et au EDO, questions épistémologiques et didactiques. Dans Y. Matheron et al. (Dir.), *Actes de la 18ème école d'été de didactique des mathématiques* (p. 67-91). La Pensée Sauvage.

Ministère de l'Éducation Nationale (2010). *Bulletin officiel Spécial n°4 du 29 avril 2010*. https://www.education.gouv.fr/pid23972/special-n-4-du-29-avril-2010.html

Ministère de l'Éducation Nationale (2011). *Bulletin officiel Spécial n°8 du 13 octobre 2011*.
https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=25847

BURIGATO MONTEIRO DA SILVA, S. M. (2019). *Um Estudo Sobre a Aprendizagem do Conceito de Limite de Função por Estudantes nos Contextos Brasil e França* [Thèse de doctorat, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul]. https://posgraduacao.ufms.br/portal/trabalho-arquivos/download/6246

CORNU, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*. [Thèse de doctorat, Université de Grenoble].

CORNU, B. (2002). Limits. Dans D. Tall (Dir.), *Advanced Mathematical Thinking*, (p. 153-166). Kluwer.

CHORLAY, R. (2019). A Pathway to a Student-Worded Definition of Limits at the Secondary-Tertiary Transition, *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, **5**(3), 267-314.

DURAND-GUERRIER, V. et VERGNAC, M. (2014). Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université, un objet problématique. *Petit x*, ***96***, 7-30.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **5**, 37-65.

DUVAL, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Peter Lang.

LECORRE, T. (2016). *Des conditions de conception d'une ingénierie relative à la définition de la notion de limite* [Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes]. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01421117/document

GUIDORIZZI, H. L. (2013). *Um Curso de Cálculo: volume 1*. LTC (5ème édition).

KRYSINSKA, M. et SCHNEIDER, M. (2010). *Émergence de modèles fonctionnels*. Les Éditions de l'Université de Liège.

MARIOTTI, M.A. et FISCHBEIN, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, **34**, 219–248.

MAZUCATO, T. (Dir.). (2018). *Metodologia da pesquisa e do trabalho científico*. FUNEPE.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA (2006). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. *Volume 2*.
http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf

MONTOYA DELGADILLO, E., PÁEZ MURILLO, R., VANDEBROUCK, F. et VIVIER, L. (2018). Deconstruction with Localization Perspective in the Learning of Analysis. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, **4**, 139-160.

NASCIMENTO, J. C. (2003). *O conceito de limite em cálculo: obstáculos e dificuldades de aprendizagem no contexto do ensino superior de matemática* [Thèse de doctorat, Universidade Federal de Pernambuco].
https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/8244

OKTAÇ, A. et VIVIER, L. (2016). Conversion, Change, Transition... in Research About Analysis. Dans B.R. Hodgson, A. Kuzniak et J.-B. Lagrange (Eds), *The Didactics of mathematics: approaches and issues. A homage to Michèle Artigue* (p. 87-122). Springer.

REIS, F. S. (2001). *A Tensão entre o Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A visão de Professores- Pesquisadores e autores de Livros Didáticos* [Thèse de doctorat, Universidade Estadual de Campinas]. http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/253451

ROBERT, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergences des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **3**(3), 307-341.

ROH, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, **69**(3), 217–233.

SIERPINSKA, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **6**(1), 5-67.

SIERPINSKA, A. (1992). On understanding the notion of function. Dans E. Dubinsky, G. Harel (Dir.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, (p. 23-58, MAA notes, **25**). Washington DC.

SWINYARD, C. (2011). Reinventing the formal definition of limit: The case of Amy and Mike. *The Journal of Mathematical Behavior*, **30**(2), 93–114.

TALL, D. et VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, **3**(12), 151-169.

TOLOI, G. et MANZINI, E. J. (2013). Etapas da Estruturação de um Roteiro de Entrevista e Considerações Encontradas Durante a Coleta dos Dados. Dans ABPEE (Dir.), *VIII Encontro da Associação Brasileira de Pesquisadores em Educação Especial* (p. 3299-3306). Universidade Estadual De Londrina. http://www.uel.br/eventos/congressomultidisciplinar/pages/arquivos/anais/2013/AT14-2013/AT14-008.pdf

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL (UFMS) (2014). *Projeto Pedagógico do Curso (PPC) de Matemática – Licenciatura*. UFMS : Instituto de Matemática (INMA), Campo Grande.

VANDEBROUCK, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, **16**, 149-185.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, **10**(2/3), 133-169.

VERGNAUD, G. (2015). Entrevista com Gérard Vergnaud. [Entrevista cedida a] Candy Marques Laurendon. *Revista do GEEMPA: 45 anos de Pesquisa Formação e Ação*, **11**, 15-23.

VINNER, S. ET DREYFUS, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, **20**(4), 356-366.

SONIA MARIA MONTEIRO DA SILVA BURIGATO

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil

sonia.burigato@ufms.br

CECILE OUVRIER-BUFFET

Université Paris-Est Créteil, LDAR, France

cecile.ouvrier-buffet@u-pec.fr

JOSE LUIZ MAGALHÃES DE FREITAS

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil

jose.freitas@ufms.br

Annexe 1. Questionnaires utilisés au Brésil et en France

Dans ces questionnaires préalables aux entretiens et activités conduits avec les étudiants, des informations générales sont demandées aux étudiants (nom, prénom, âge, souhaits d'études, motivations, souhait d'intégrer l'expérimentation).

Au Brésil, les étudiants n'avaient pas encore eu de cours sur les limites, il s'agissait d'identifier certaines difficultés déclarées par les étudiants, en particulier en lien avec les nombres réels.

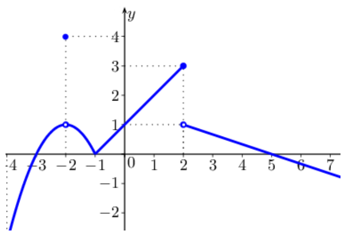
Voici des exemples de questions posées :

6. En pensant aux ensembles numériques que vous avez étudiés, quelles difficultés de compréhension aviez-vous et avez-vous ?
7. Citez des opérations mobilisant des nombres réels où vous rencontrez quelques difficultés (par exemple 2/3+1/2)
8. Dans l'ensemble des nombres réels, citez 3 nombres qui sont dans chacun de ces intervalles

a)]-1 ; 20]	b)]0 ; 1]	c) [-2 ; 0]
d) [0 ; ⅔[	e) [-⅞ ; 0]	f)]-∞ ; 0[

En France, l'enseignement des limites avait commencé en classe, il s'agissait donc d'appréhender les éléments déjà intégrés par les étudiants. Voici des exemples de questions posées (un focus est fait sur le registre graphique, afin d'avoir des éléments de comparaison avec les étudiants brésiliens où ce registre prédomine avec le registre numérique) :

6. Écrivez ce que vous avez compris intuitivement de la limite d'une fonction.
8. Écrivez ce que vous avez compris en ce qui concerne la définition formelle de la limite d'une fonction.
9. Présentez des concepts que vous connaissez déjà et qui sont utilisés dans le concept de limite.
10. Analysez le graphique et déterminez les limites demandées. Justifiez ensuite chaque résultat trouvé.



a) $\lim_{x \to 0} f(x) =$ ___
b) $\lim_{x \to -2} f(x) =$ ___
c) $\lim_{x \to 2} f(x) =$ ___
d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ ___

Annexe 2. Activités des groupes I, II et III

Contenus des activités du Groupe I

Fonction, représentation graphique et tableau de valeurs, $f(x) = \left|\frac{x^2-x}{x-1}\right|$ pour $x\neq 1$.

- Construire un tableau de valeurs
- Représenter les valeurs sur une droite numérique
- Trouver des valeurs entre deux valeurs données
- Étudier les valeurs de la fonction dans le voisinage de 1
- Construire la représentation graphique et l'analyser pour x proche de 1
- Études de la fonction sur des intervalles (par exemple $1{,}2 < f(x) < 2{,}8$).

Contenus des activités du Groupe II (limite finie en un point)

Exemples de fonctions étudiées (quand x tend vers 1) dans les registres algébriques et graphiques : $f(x) = \frac{x^2-x}{x-1}$; $f(x) = x+2$ si $x\neq 1$ et 1 si $x=1$

- Calculs en $x=1$
- Pour un ε donné, étude des valeurs de x telles que $2 - \varepsilon < f(x) < 2+\varepsilon$
- Introduction de δ
- Utilisation d'inégalités avec valeurs absolues (de type $|f(x) - 2| < \varepsilon$)
- Liens entre registres algébriques et graphiques.

Contenus des activités du Groupe III (limites à l'infinie et limites en un point)

Exemples de fonctions étudiées : $f(x) = \frac{1}{x}$ sur]0 ; 2] et [-2 ; 0[puis sur]–∞ ; –1] et [1 ; +∞[(étude des valeurs proches de 0 et représentation graphique, étude des valeurs de la fonction à gauche et à droite de 0, étude des valeurs au voisinage de ±∞).

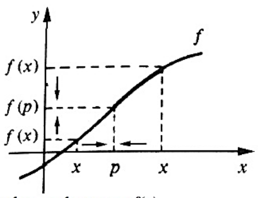
Annexe 3. Définitions introduites en classe

Au Brésil, avant l'expérimentation des cas (2) et (3), seules la définition intuitive et la définition formelle du cas (1) sont introduites en classe par l'enseignant.

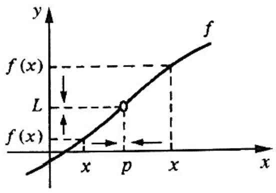
Définition du cas $\lim_{x \to p} f(x) = k$

Définition intuitive

Intuitivement, on dit que limite de *f*(*x*) lorsque *x* tend vers *p*, est égale à *L*, symboliquement s'écrit : $\lim_{x \to p} f(x) = L$ signifie que, lorsque *x* tend vers *p*, *f*(*x*) tend vers *L*.



Quand *x* tend vers *p*, *f(x)* tend vers *f(p)* : $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$



Quand *x* tend vers *p*, *f(x)* tend vers *L* : $\lim_{x \to p} f(x) = L$

Définition formelle

Soit *f* soit une fonction et *p* un point appartenant au domaine de définition de *f* ou à l'extrémité de l'un des intervalles qui composent le domaine de définition de *f*. Nous disons que *f* a pour limite *L*, en *p*, si, pour chaque $\varepsilon>0$ donné, il existe un $\delta>0$ tel que, pour chaque $x \in Df$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Ce nombre *L*, quand il existe, est unique, il sera indiqué par $\lim_{x \to p} f(x)$. Ainsi :

$\lim_{x \to p} f(x) = L \Leftrightarrow$ ($\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, tel que pour chaque $x \in Df$, $0<|x - p|<\delta \Rightarrow |f(x) - L|<\varepsilon$)

Au Brésil, après l'expérimentation, les définitions ont été introduites par l'enseignant de la façon suivante.

Définition du cas $\lim_{x\to p} f(x) = \infty$

Définition

Soit *f* une fonction, *p* un nombre réel et supposons qu'il existe *b* tel que $]p; b[\subset D_f$.

Nous définissons

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = +\infty \iff \begin{cases} \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \text{avec } p+\delta < b, \\ \text{tel que } p < x < p+\delta \implies f(x) > \varepsilon \end{cases}$$

On procède de manière analogique pour définir :

$\lim_{x\to p+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to p-} f(x) = +\infty$

et $\lim_{x\to p-} f(x) = -\infty$

Définition du cas $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$

Définition 1

Soit *f* une fonction et supposons qu'il existe *a* tel que $]a; +\infty[\subset D_f$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \iff \begin{cases} \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \text{avec } \delta > a, \\ \text{tel que } x > \delta \implies L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon \end{cases}$$

Définition 2

Soit *f* une fonction et supposons qu'il existe *a* tel que $]-\infty; a[\subset D_f$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \iff \begin{cases} \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \text{avec } -\delta > a, \\ \text{tel que } x > -\delta \implies L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon \end{cases}$$

En France, avant l'expérimentation, la définition des cas (2) et (3) est introduite par l'enseignant de la façon suivante.

Définition cas (2) $\lim_{x\to p} \boldsymbol{f(x)} = \infty$

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle]*a* ; *b*[.

On dit que *f* tend vers $+\infty$ quand *x* tend vers *a* par valeurs supérieures si on peut rendre *f* (*x*) aussi grand que l'on veut dès que *x* est suffisamment proche de *a* dans l'intervalle]*a* ; *b*[.

On note :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$$

On dit alors que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe représentative de f.

On a des définitions analogues pour $\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = -\infty$, $\lim_{\substack{x\to a\\ x<b}} f(x) = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to b\\ x>b}} f(x) = -\infty$.

Définition cas (3) $\lim_{x \to \infty} \boldsymbol{f(x) = k}$

(1.a) Soit *f* une fonction définie sur un intervalle]* ; $+\infty$[, (* pouvant être un nombre réel ou $-\infty$). *f* a pour limite le réel *l* quand *x* tend vers l'infini si les images *f* (*x*) sont aussi proches que l'on veut de *l*, à condition de prendre *x* suffisamment grand.

On peut formaliser les choses en s'inspirant de la définition donnée pour les limites finies des suites :

(1.b) La fonction *f* admet pour limite *l* en + ∞ si tout intervalle ouvert]*l*-*ε*; *l*+*ε*[contient toutes les valeurs de *f* (*x*) dès que *x* est suffisamment grand.

On note : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = k.$

On dit alors que la droite d'équation *y*=*l* est asymptote horizontale à la courbe représentative de *f*.

On a des définitions analogues pour : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = k.$