ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

Revue internationale de didactique des mathématiques

Rédacteurs en chef :
PHILIPPE R. RICHARD, LAURENT VIVIER

Volume 25 - 2020

IREM de Strasbourg

Université de Strasbourg

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
ISSN 0987 – 7576

Éditeur

IREM de Strasbourg – Université de Strasbourg
7, rue René Descartes 67084 Strasbourg CEDEX
Tél. : +33 (0)3 68 85 01 30
Fax. : +33 (0)3 68 85 01 65
irem@math.unistra.fr

Bibliothèque

Christine CARABIN
Tél : +33 (0)3 68 85 01 61
http://irem.unistra.fr

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
VOLUME 25 – 2020

SOMMAIRE

ÉDITORIAL DU NUMERO 25

L'année 2020 a été marquée par une crise sanitaire dont les répercussions sur notre communauté de chercheurs se sont fait sentir du jour au lendemain. Les colloques ont été repoussés ou se sont déroulés en distanciel, de nombreuses tâches ont souffert de la situation comme l'évaluation d'articles scientifiques. Le travail quotidien, dont l'enseignement universitaire et la formation enseignante, s'est poursuivis à distance, créant un indésirable effet de concentration dans l'usage des nouveaux moyens de communication. Ceux-ci nous avaient déjà habitués à nous rapprocher de collègues éloignées, désormais, ils nous ont éloignés de nos collègues autrement proches. Nous avons dû repenser, revisiter ou adapter nos projets à une nouvelle réalité complexe et mouvante, avec la conciliation travail-famille au cœur de nos préoccupations.

Pour les *Annales*, une conséquence douloureuse nous a immédiatement touchés avec la perte de notre très regretté collègue François Pluvinage le 23 mars dernier. François nous laisse une revue scientifique en bonne santé qui perpétue le souhait le plus cher de ses fondateurs. En effet, comme nous le rappellent Alain Kuzniak et Jean-Claude Rauscher dans leur *hommage à la pensée vagabonde et active du chercheur et homme rare* qu'il était, la revue se caractérise par un esprit d'ouverture bienveillant depuis sa fondation en 1988. On pourrait croire qu'un tel esprit va de soi dès qu'il s'agit de révision et de publication scientifique, mais « en ces temps sombres où plusieurs laissent libre cours à leur colère, leur frustration et leur agressivité sans égard pour l'autre » (voir l'éditorial du Québec Science, Octobre-Novembre 2020, vol. 59, no. 03), cette manière de faire avancer les connaissances a encore aujourd'hui des allures de pionnier visionnaire. Merci, François, d'avoir tenu la barre aussi longtemps, après 32 ans d'engagement éditorial. La communauté t'en est redevable. À sa suite, nous nous engageons à poursuivre ce travail éditorial contre vents, marées et sirènes à la mode.

Il y a un certain temps, nous avons entrepris des démarches auprès du portail de publication OpenEdition Journals afin de favoriser l'accès ouvert aux résultats de la recherche scientifique de nos auteurs. En ce moment, nous attendons les conclusions de l'évaluation interne pour l'acception de notre revue. Par ailleurs, notre politique de publication thématique suit son cours. Un numéro spécial sur « les pratiques de formation à l'enseignement des mathématiques », coordonné par Valentina Celi, Caroline Lajoie et Frédérick Tempier, est prévu pour 2021. Nous en profitons pour renouveler notre appel à des numéros spéciaux. N'hésitez pas à communiquer avec la rédaction scientifique des *Annales* pour nous faire part de vos projets.

Si la publication des *Annales* est à vocation institutionnelle, elle est avant tout une entreprise bénévole. Nous devons remercier d'emblée l'équipe de l'IREM de l'Université de Strasbourg, et de son UFR de mathématique et d'informatique, pour leur soutien à la publication et à la diffusion. Nous voulons aussi souligner le travail remarquable de Charlotte Derouet pour sa relecture finale des manuscrits, sa mise à jour des fichiers de styles pour les auteurs, et sa recherche sur l'introduction de normes bibliographiques, inspirées du format éditorial défini par *l'American*

Psychological Association pour les publications et écrits scientifiques en sciences humaines (normes de l'APA). Et comme le disait si bien François dans son éditorial du numéro 24 : « nous tenons à remercier au passage l'exemplarité du travail des nombreux rapporteurs qui nous éclaire dans l'ombre discrète de leur bienveillance, tout comme celui de notre comité de rédaction et des autres responsables ».

Il peut sembler illusoire de remercier les auteurs, puisque logiquement ce sont les premiers à profiter d'une publication dans la revue. Toutefois, il ne faut pas oublier que non seulement les auteurs participent volontiers au mouvement collectif de rehaussement de la qualité des articles, mais aussi à la mise en forme de leur texte. Cette contribution sur deux plans a été particulièrement utile cette année et cela témoigne d'un engagement bénévole bien apprécié. C'est pourquoi nous sommes heureux de vous proposer ce numéro 25 composé de neuf contributions.

Les deux premiers articles s'intéressent à l'enseignant. Valérie Batteau et Takeshi Miyakawa s'intéressent aux pratiques ordinaires d'un enseignant japonais, en 3e année du primaire, afin de mieux comprendre comment se traduit la spécificité culturelle au cours d'une séquence d'enseignement sur le concept de longueur. Blandine Masselin caractérise le travail d'une enseignante sur la simulation en probabilités en classe de troisième en France, se basant notamment sur les rapports entre les espaces de travail mathématique idoine et potentiel. Puis, trois articles s'intéressent plus spécifiquement aux élèves. Valérie Viné Vallin propose, chez des élèves en situation de handicap en France, une évaluation diagnostique et une médiation par rapport aux notions d'âge et de temps, en tant que dimension selon laquelle s'opèrent les changements dans le monde. Virginie Houle, Fabienne Venant et Raquel Isabel Barrera-Curin expérimentent un enseignement adapté à une classe composée d'élèves québécois de 10 à 12 ans en difficulté d'apprentissage, offrant un regard spécifique sur les modes d'agir, de parler et de penser les relations multiplicatives inhérentes au concept de fraction. Natacha Duroisin, Romain Beauset et Jessica Lucchese portent sur le type de visualisation engagé par des élèves belges à la fin du primaire, autour d'une ingénierie didactique qui sous-tend l'idée de déconstruction dimensionnelle et dont le but est de faciliter le passage vers le secondaire. Enfin, les trois derniers articles proposent une étude curriculaire. Gloriana González regarde les références aux arts visuels dans des manuels de géométrie du secondaire, selon les normes du tronc commun de mathématiques aux États-Unis d'Amérique. Nathalie Anwandter Cuellar et Steve Tremblay présentent une étude comparative de manuels scolaires français et québécois en partant du traitement conceptuel ou processuel privilégié au début du secondaire, suivant un modèle praxéologique de référence. Danielly Kaspary, Hamid Chaachoua et Annie Bessot étudient, à travers une étude de cas dans le système d'enseignement français, quelques aspects de la dynamique praxéologique qui utilise les notions de portée des techniques concernant l'étude de la résolution des équations du second degré.

L'article de Alain Kuzniak et Jean-Claude Rauscher conclut ce 25e numéro des *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*.

Nous vous souhaitons une bonne lecture.

L'équipe de direction scientifique des ADSC : Philippe R. Richard et Laurent Vivier

VALERIE BATTEAU, TAKESHI MIYAKAWA

DES SPÉCIFICITÉS DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE PRIMAIRE AU JAPON : UNE ÉTUDE DES PRATIQUES D'UN ENSEIGNANT

Abstract. The specificities of mathematics teaching in Japanese primary school: a study of the teacher's practices. Mathematics teaching in Japanese primary school presents some specificities: the structured *problem solving* lessons, the importance of *mathematical thinking*, and the *lesson study* tradition. This paper aims to understand ordinary practices of a Japanese teacher, especially how these cultural specificities translate into his practices. We analyze teacher practices during a sequence of lessons on the length of the 3rd year of primary school (students of 8-9 years) from the perspective of double didactic and ergonomic approach.

Résumé. L'enseignement des mathématiques à l'école primaire au Japon présente des spécificités : des leçons structurées par *problem solving*, l'importance accordée aux *mathematical thinking* et la pratique des *lesson study*. Cet article vise à comprendre les pratiques ordinaires d'un enseignant japonais et comment se traduisent dans ses pratiques ces spécificités culturelles. L'analyse des pratiques se place dans le cadre de la double approche didactique et ergonomique lors d'une séquence sur la longueur en 3e année d'école primaire (élèves de 8-9 ans).

Mots-clés. *Mathematical thinking*, *problem solving*, *lesson study* japonais.

1. Contexte de la recherche[1]

Cet article présente le contexte de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire au Japon, contexte éloigné et peu connu du monde francophone de l'enseignement des mathématiques. Cet article propose d'une part une autre vision de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et d'autre part d'enrichir les connaissances sur ce contexte en vue d'adaptations du dispositif japonais *lesson study* dans le contexte francophone. En effet, lors d'adaptation de *lesson study*

[1] Dans cet article, nous conservons les vocables *problem solving* (résolution de problèmes), *lesson study* (études des leçons), *mathematical thinking* (pensée mathématique) et *mathematics education* (enseignement des mathématiques) en anglais pour mettre en valeur leur caractère particulier dans la culture japonaise et à la fois pour permettre aux lecteurs de aisément saisir le sens. Au fil du texte, nous définissons aussi certains termes techniques japonais concernant les *lesson study* et l'approche par *problem solving*.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 25, p. 9 – 48.

japonaises, les chercheurs japonais pointent la mauvaise compréhension des *lesson study* à l'international (Clivaz & Takahashi, 2018).

1.1. Des spécificités de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire dans le contexte japonais

L'enseignement des mathématiques à l'école primaire au Japon est marqué par plusieurs spécificités : les leçons ordinaires sont généralement structurées par *problem solving* (Elipane, 2012; Inprasitha, Isoda, Wang-Iverson & Yeap, 2015; Isoda, Stephens, Ohara & Miyakawa, 2007; Stigler & Hiebert, 1999; Takahashi, 2006, 2008). La formation initiale et continue des enseignants s'organise souvent sous forme de *lesson study* (Fernandez & Yoshida, 2004 ; Isoda et al., 2007 ; Miyakawa & Winsløw, 2009b). Une troisième spécificité est l'importance accordée aux *mathematical thinking* dans l'enseignement des mathématiques, dans les programmes scolaires et les manuels scolaires (Hino, 2007 ; Isoda, 2012).

Ces trois spécificités de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire sont imbriquées et se sont développées conjointement. D'un point de vue historique, la pratique des *lesson study* est la plus ancienne, car elle date de la fin du XIXe siècle. Le concept de *mathematical thinking* que nous développerons plus loin dans le texte, s'est quant à lui développé dans un mouvement de modernisation du Japon après la Deuxième Guerre mondiale (Baba, Iwasaki, Ueda & Date, 2012; Hino, 2007). La culture des *mathematical thinking* influe sur la recherche en *mathematics education* et sur les pratiques dans la classe (Hino, 2007). L'approche par *problem solving* devient l'approche d'enseignement reconnue et recommandée pour développer les *mathematical thinking* à partir des années 1960 (Isoda, 2012). Et les *lesson study* représentent un moyen déjà en place dans le système éducatif pour développer les pratiques enseignantes, former et perfectionner les enseignants à cette approche d'enseignement. Des chercheurs japonais revendiquent que l'approche par *problem solving* est la conséquence de la pratique des *lesson study* (Fujii, 2018 ; Isoda, 2012 ; Isoda & Nakamura, 2010 ; Isoda et al., 2007) : les *lesson study* ont permis la diffusion à large échelle de cette approche et cette approche est issue du travail des enseignants en *lesson study*.

L'enseignement japonais par *problem solving* fait référence à une structure de leçon[2] et à une approche d'enseignement axée sur l'enseignement collectif et le

---

[2] Nous employons le terme de leçon en référence à la culture japonaise des *lesson study* que nous exposons dans cet article. Une séquence d'enseignement est composée de plusieurs leçons et chaque leçon recouvre une période d'enseignement (ou séance) d'une durée de 45 minutes à l'école primaire.

Nous employons aussi le terme de leçon en référence aux recherches internationales de comparaison de l'enseignement des mathématiques qui utilise la leçon comme unité développement des *mathematical thinking* lors de ces moments collectifs. Dans cette approche, le problème est souvent un problème ouvert[3] c'est-à-dire qui admet plusieurs solutions ou plusieurs procédures de résolution. La comparaison et la discussion de ces différentes solutions et procédures lors de moments collectifs visent le développement de *mathematical thinking* qui correspondent à une connaissance mathématique non encore disponible chez les élèves ou à une méthode mathématique (ce que nous développerons plus loin dans le texte, ce sont des types de raisonnement : induction, analogie...). Dans la culture japonaise, les enseignants d'école primaire estiment souvent que le cœur de la leçon correspond au moment collectif qui suit la résolution du problème par les élèves (Shimizu, 1999). L'enseignement par *problem solving* se définit par une structure de leçon, par la compréhension par l'enseignant de cette structure et de ses objectifs associés, et par le rôle déterminant de l'enseignant lors de chaque phase de la leçon.

1.2. Mise en perspective avec le contexte francophone

La structure d'une séance de résolution de problème valorisée en formation peut présenter différentes phases ou processus : de dévolution du problème aux élèves, de résolution du problème individuel ou en groupe, de mise en commun des différentes solutions et procédures, et d'institutionnalisation des savoirs nouveaux, en se basant sur les travaux de Batteau (2018) dans le contexte d'un dispositif de formation continue en Suisse romande et sur les travaux de Charles-Pézard, Butlen et Masselot (2012) dans le contexte français. Dans la vision suisse de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, le cœur de la leçon tant en importance qu'en temps accordé par les enseignants, ne se situe pas dans la gestion de la mise en commun (Clivaz & Miyakawa, 2020). Dans une comparaison de leçons suisse et japonaise, ces auteurs ont montré que la mise en commun dans la leçon japonaise représente le cœur de la leçon et correspond à la phase la plus longue de la leçon, contrairement à la leçon suisse qui donne une part plus importante au moment de recherche de la solution par les élèves. Cette différence de vision de l'enseignement des mathématiques est majeure, car elle implique une importance accordée à l'enseignement collectif dans le contexte japonais et une importance accordée à

---

d'analyse et de comparaison (étude TIMSS vidéo dans les années 90 : http://www.timssvideo.com), même si certains la requestionnent en proposant « lesson event » prenant en compte la place de la leçon dans la séquence d'enseignement (récent projet international LPS, The Learner's Perspective Study).

[3] Il ne s'agit pas ici de « problème ouvert » tel que défini par Charnay (1992-1993) comme étant des problèmes « destinés à mettre l'élève en situation de recherche et donc de développer des compétences plus méthodologiques » (p. 79). Nous conservons toutefois les mêmes termes de « problème ouvert » mais en référence à l'*open-ended approach* qui utilise des « open-ended problem » défini comme étant des « problem that is formulated so as to have multiple correct answers" (Hino, 2007, p. 508).

l'individualisation de l'enseignement dans le contexte francophone. D'ailleurs, Brousseau critique l'individualisation de l'enseignement :

> Le public a le sentiment que la condition idéale pour l'enseignement serait celle du précepteur s'occupant d'un élève unique. [...] Conjuguée avec des apports de la psychologie, elle [*cette idée*] amène à croire que chaque élève penserait et apprendrait de façon différente ce qui requerrait une pédagogie différenciée et des classes homogènes ! Ce modèle est faux [...]. (1997, p. 56)

> Parmi les demandes les plus populaires, la plus violente et la plus destructrice a été [*lors du mouvement de réformes dans les années 50-70 en France*] et est encore celle de l'individualisation de l'enseignement. (2012, p. 124)

L'enseignement par *problem solving* japonais vise le développement de *mathematical thinking* et celles-ci ne concernent pas des connaissances transversales aux mathématiques : elles sont bien en lien avec les connaissances et les méthodes (types de raisonnement). Dans l'enseignement par résolution de problème dans le contexte de la France, les objectifs d'apprentissage sont davantage en lien avec des connaissances transversales aux mathématiques : développer des compétences générales de résolution de problème chez les élèves (Coppé & Houdement, 2002). L'enseignement par résolution de problème, influencé par les travaux de Schoenfeld (1985), se limite dans les programmes [4] de l'école primaire en France à la méthodologie de la résolution de problème et aux problèmes non routiniers (Houdement, 2013). Ainsi, l'enseignement des mathématiques à l'école primaire dans ces deux contextes a été influencé par les mêmes travaux principaux de Polya (1945) et Schoenfeld (1985), mais avec des adaptations et des objectifs bien différents. Dans le contexte japonais, la focale a été mise sur le développement de *mathematical thinking* lors d'enseignement en collectif, tout en adaptant une structure de leçon proche des quatre étapes de résolution de problème mentionnées dans les travaux de Polya (1945). Dans le contexte français, la focale dans les programmes officiels et les manuels scolaires a été mise sur des aspects méthodologiques et des connaissances transversales aux mathématiques.

1.3. Problématique de la recherche

La problématique de cette recherche est d'analyser pour comprendre les pratiques enseignantes observées à l'école primaire en appui sur une étude historique de

---

[4] Houdement (2013, p. 55) se réfère aux programmes français d'avant 2002, « 1. Savoir rechercher et sélectionner l'information pertinente : les informations données sont-elles toutes nécessaires ? Sont-elles suffisantes ? etc. 2. Savoir organiser l'information 3. Savoir exploiter l'information pertinente. » (MEN 1981, p. 41), « Dans des situations variées, l'élève pourra : - reconnaître, trier, organiser et traiter les données utiles à la résolution d'un problème[...] » (Les cycles à l'école primaire, 1991, CNDP, p. 52).

spécificités japonaises de l'enseignement des mathématiques, l'approche par *problem solving*, les *mathematical thinking* et les *lesson study*, pour ensuite pouvoir mieux envisager des transpositions dans d'autres contextes éducatifs. Bien qu'il existe d'autres spécificités de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire au Japon (par exemple, les liens étroits entre recherche et enseignement), cet article se focalise sur ces trois spécificités, car celles-ci permettent d'expliciter les marges de manœuvre et les contraintes des enseignants dans nos analyses de leurs pratiques. Ces spécificités se situent au niveau de l'enseignement : l'approche par *problem solving* se place au niveau de l'enseignement mis en œuvre pour les élèves, les *mathematical thinking* représentent les objectifs d'apprentissage et les *lesson study* se placent au niveau de la formation des enseignants, mais aussi au niveau de l'enseignement dans la préparation (et l'observation) des leçons notamment.

Cette recherche s'inscrit dans la continuité de notre travail de thèse (Batteau, 2018) dans lequel nous avons montré l'influence de la représentation de l'enseignement des mathématiques sur ce que des enseignantes s'autorisent ou non en classe, en particulier par rapport aux interventions et aides qu'elles s'autorisent à apporter aux élèves lors de la prescription de la tâche et des moments de recherche, dans une étude de cas de trois enseignantes dans le contexte de la Suisse romande. Dans le contexte japonais, nous analysons les pratiques ordinaires d'un enseignant : quelles sont les marges de manœuvre qu'il ou elle s'autorise et les contraintes auxquelles il ou elle est soumis ou soumise ?

1.4. Plan de l'article

Bien que les trois spécificités soient imbriquées, chacune est présentée séparément dans cet article en prenant à chaque fois le point de vue de l'une d'entre elles. La deuxième partie présente l'approche par *problem solving* au Japon, les phases d'un modèle de leçon structuré par *problem solving* et un des éléments clés de cette approche : l'utilisation du tableau noir. La troisième partie présente les *mathematical thinking* du point de vue de la recherche japonaise en *mathematics education* et montre comment les *mathematical thinking* se traduisent dans les programmes, dans l'enseignement et dans un manuel scolaire. La quatrième partie expose les caractéristiques des pratiques de *lesson study* japonaises, qui ont d'abord été remarquées par les chercheurs américains (Stigler & Hiebert, 1999) et puis qui se sont répandues dans le monde entier. La cinquième partie est une analyse des pratiques d'un enseignant de 3^{e} année d'école primaire (élèves de 8-9 ans) lors d'une séquence sur la longueur. Cette partie sert à illustrer comment les spécificités se traduisent dans les pratiques ordinaires d'un enseignant, dans ce qu'il ou elle dit, pense et fait avant, pendant et après la classe. Nous concluons cet article avec des perspectives quant à de potentielles adaptations des spécificités japonaises dans d'autres contextes éducatifs.

2. L'approche par *problem solving*

2.1. Présentation

Le principe de base de l'enseignement des mathématiques japonais est que les élèves doivent apprendre par et pour eux-mêmes (Isoda, 2012), ce qui correspond à un certain idéal d'enseignement dans lequel l'enseignant va jouer un rôle primordial. Cette approche d'enseignement place l'élève au centre, mais pas seul devant ses apprentissages, bien au contraire, le rôle de l'enseignant est de gérer les moments collectifs de la leçon et de prendre des informations sur l'activité des élèves pendant les moments de travail individuel ou en groupe afin de préparer les moments collectifs. En suivant ce principe, l'enseignement porte autant sur des connaissances mathématiques que sur des méthodes (types de raisonnement). Cette approche en question sert à développer les *mathematical thinking* des élèves (Isoda, 2012). L'approche d'enseignement choisie est l'approche par *problem solving,* car celle-ci a pour objectif de rendre les élèves capables d'apprendre par et pour eux-mêmes. Cette approche n'a pas pour objectif seulement de résoudre le problème, mais aussi de développer de nouvelles idées mathématiques à partir de ce qui a déjà été appris (Isoda, 2012).

Cette approche d'enseignement accorde de l'importance à la diversité des procédures mises en œuvre par les élèves pour résoudre un problème (Isoda, 2012). Cette importance accordée à la diversité des procédures se retrouve dans les manuels scolaires (voir annexe 1-C) quels que soit les sujets mathématiques, à travers par exemple de nombreuses illustrations de personnages ou de photos de vrais élèves qui mettent en œuvre des procédures personnelles pour résoudre des problèmes, ou encore avec des suggestions de procédures variées associées à des prénoms d'élèves. Ces manuels scolaires résultent parfois de la collaboration des enseignants lors de *lesson study* et les activités proposées s'inscrivent dans une approche par *problem solving* (Isoda, 2012).

L'importance accordée à la diversité des procédures de résolution d'un problème repose en partie sur l'approche par problème ouvert (*open-ended approach*) dans laquelle un problème admet plusieurs solutions ou procédures de résolution.

> It is significant that the students' multiple solutions were raised and deliberation on them spontaneously occurred in the lesson. This is because it is not enough to have many ideas. It was recognized as necessary to systematize various students' solutions as mathematical activity and theorize them. In other words, the mathematization of the phenomenon was a part of *mathematical thinking* and it was assumed that the mathematization should not be just one way but allow for many possible ways. And it became necessary to revisit the significance of the diversity of students' solutions. The team understood this as an important research agenda and developed this study as a case of interaction between theory and practice. Gradually, the treatment of

> multiple solutions has been systematized and theorized. (Baba, Ueda, Ninomiya & Hino, 2018, p. 29)

La diversité des procédures de résolution d'un problème est une condition nécessaire pour viser les objectifs d'apprentissage d'une leçon structurée par *problem solving*. En effet, pendant l'enseignement collectif, l'enseignant amène les élèves à comparer les différentes procédures et solutions du problème et ces discussions permettent de développer collectivement les *mathematical thinking*.

2.2. Dans les programmes scolaires

Au Japon, il existe un programme national unique qui détermine les objets à enseigner dans tout le pays, comme en France. Dans le programme de l'école primaire ainsi que les guides officiels qui accompagnent les programmes, les termes de *mondai-kaiketsu* (*problem solving*) apparaissent de temps en temps. Ces termes apparaissent explicitement pour la première fois dans la version de 1951 (Hino, 2007). À partir des programmes de 1958, l'objectif de l'enseignement des mathématiques est de favoriser les *mathematical thinking* des élèves et le terme de *problem solving* n'est plus utilisé sauf dans les guides. Dans les nouveaux programmes récemment publiés en 2017, ce terme réapparaît.

Or, les termes de *mondai-kaiketsu* sont utilisés comme une forme d'activités mathématiques visées dans la classe plutôt qu'une approche d'enseignement des mathématiques. L'approche d'enseignement par *problem solving* comme moyen de parvenir aux objectifs d'apprentissage n'est pas explicite dans les programmes, ni dans les guides. Le terme d'approche par *problem solving* souvent appelée en japonais *mondai-kaiketsu-gata-jugyo* n'est jamais utilisé d'après notre analyse des programmes et des guides. Malgré tout, nous pouvons parfois, mais pas toujours, y identifier ses traces. Par exemple, dans la rubrique consacrée aux commentaires pour planifier l'enseignement, le nouveau programme suggère les activités visées dans la classe qui pourraient correspondre plus ou moins aux étapes de l'approche par *problem solving* : « saisir des phénomènes de la vie courante d'une manière mathématique, identifier un problème mathématique, résoudre le problème d'une façon autonome et collaborative, réfléchir au processus d'apprentissage, et former le concept ». Les programmes scolaires induisent implicitement l'approche par *problem solving* et cette approche représente un moyen d'enseignement partagé dans la communauté des enseignants notamment à travers des pratiques de *lesson study*.

2.3. Dans les leçons

Les leçons ordinaires de mathématiques à l'école primaire sont généralement[5] enseignées par *problem solving* (Funahashi & Hino, 2014 ; Stigler & Hiebert, 1999).

Par ailleurs, il n'existe pas de consensus de modèle de leçon structuré par *problem solving*. Les professeurs d'université et les enseignants de terrain au Japon formalisent dans leurs publications la structure de leçon de façons différentes. Le modèle proposé dans cet article reprend les phases d'enseignement de différents modèles de leçon établis par des chercheurs japonais[6] (Fujii, 2018 ; Isoda, 2012 ; Isoda & Nakamura, 2010; Miyakawa & Winsløw, 2009b ; Shimizu, 2009, 2015) ou américains (Stigler & Hiebert, 1999). Les leçons ordinaires débutent généralement par

(1) l'introduction du problème par l'enseignant (*hatsumon* signifie poser une question), suivie éventuellement de l'estimation, la planification ou la prédiction de la solution par les élèves (*mitōshi* signifie deviner ou prévoir) ;

(2) la résolution individuelle du problème, suivie éventuellement de la résolution en groupe (*jiriki-kaiketsu* signifie résolution individuelle et *group gakushu* signifie travail en groupe). Lors de la résolution du problème, l'enseignant se déplace dans la classe (*kikan-shido* signifie enseignement entre les bureaux), observe le travail de chaque élève et s'informe pour préparer la phase suivante ;

(3) la phase collective de présentation, discussion, validation et comparaison des différentes procédures, idées et solutions des élèves, phase de résolution collective (*neriage* vient de *neri* qui signifie malaxer, polir et *age* qui signifie élever) ;

(4) le résumé de la leçon (*matome* signifie résumé) et le nouveau développement ou extension du problème (*hatten* signifie développement).

---

[5] L'enseignement ordinaire des mathématiques à l'école primaire repose sur l'approche par *problem solving*. Cela ne signifie pas que toutes les leçons reposent sur un nouveau problème donné aux élèves. En s'appuyant sur la recherche internationale sur la comparaison de l'enseignement des mathématiques, Funahashi et Hino (2014) ont collecté une séquence de dix leçons consécutives et ordinaires dans une école primaire publique japonaise : les huit premières leçons sont consacrées à de la résolution de problème et les deux dernières à des séances d'exercices. Cette recherche donne une idée de la proportion de leçon par *problem solving* proposées aux élèves dans le cas d'une enseignante expérimentée et d'une séquence d'enseignement ordinaire sur les relations de proportionnalité en 6ème année d'école primaire (élèves de 11-12 ans).

[6] Contrairement au cas de la France, il n'y a pas de théorie didactique mathématique développée au Japon qui permettrait de décrire un modèle de leçon dans l'approche par *problem solving* ou les Japanese Lesson Study, ainsi, il existe des variations dans les interprétations et les modèles proposés par les chercheurs japonais ou étrangers.

Le problème posé par l'enseignant aux élèves relève souvent du contexte réel et permet ainsi des hypothèses assez immédiates chez les élèves (Miyakawa & Winsløw, 2009b), ce qui facilite l'estimation, la planification ou la prédiction de la solution par les élèves. Ce moment peut participer à aider les élèves à se représenter et à s'engager dans le problème (Shimizu, 2015). Quelques élèves sont interrogés pour proposer une solution, une estimation ou une idée initiale de procédures de résolution. Lors de la phase 2, les élèves résolvent le problème d'abord individuellement, puis souvent en groupe, l'enseignant circule dans les rangs, relève mentalement des informations sur le travail des élèves en vue de préparer la phase suivante. Lors de la phase 3, les élèves présentent leurs idées, leurs procédures et leurs solutions. L'enseignant veille à avoir une diversité des procédures et compare ensuite les différentes procédures dans l'objectif de dégager et développer les *mathematical thinking* visées par le problème. Lors de la phase 4, l'enseignant résume ce qui était visé par le problème. Le résumé de la leçon correspond plus ou moins à l'institutionnalisation au sens de la didactique des mathématiques francophone (Shimizu, 2006) : l'enseignant institutionnalise une connaissance ou une procédure mathématique, à partir des procédures effectivement mises en œuvre par les élèves et à partir de la discussion collective lors du *neriage*. Dans cette approche d'enseignement, la leçon ne se termine pas après le *matome*. L'enseignant va développer ou étendre le problème et viser des valeurs de généralité, d'universalité, de simplicité ou de beauté en termes de *hatten* (Isoda & Nakamura, 2010).

Ces phases peuvent avoir lieu lors de plusieurs séances d'enseignement et peuvent aussi ne pas être toutes présentes. Il s'agit d'un modèle de leçon dans lequel le rôle de l'enseignant est essentiel dans sa maîtrise des enjeux liés à cette approche d'enseignement.

L'approche par problème ouvert (*open-ended approach*) est reconnue comme une approche par *problem solving* (Hino, 2007) et elle est très souvent pratiquée dans les classes ordinaires. Cette approche se retrouve également dans le modèle de leçon structuré par *problem solving,* car le problème proposé lors du *hatsumon* est souvent un problème ouvert (Miyakawa & Winsløw, 2009b).

Outre ce modèle de leçon en plusieurs phases, l'enseignement des mathématiques à l'école primaire est également marqué par une pratique de l'utilisation du tableau noir partagée dans la profession.

2.4. Dans l'utilisation du tableau noir

Pour favoriser la compréhension des élèves, l'une des caractéristiques les plus importantes de l'enseignement des mathématiques japonais est la planification attentive et bien organisée du tableau noir pendant une leçon (Yoshida, 2005). En particulier dans l'approche par *problem solving*, le tableau noir joue un rôle primordial de construction collective de connaissances et un rôle de mémoire du déroulement de la leçon. Le tableau noir[7] retrace ainsi le problème (*hatsumon*), les estimations ou prédictions de la solution, les différentes idées et procédures des élèves (*neriage*). Chaque idée et procédure inscrite au tableau sont présentées et discutées lors de la phase collective (*neriage*). Écrire au tableau les noms des élèves à côté de leurs idées et procédures facilite le débat et la comparaison des idées et procédures. La synthèse ou le résumé de la leçon sont également inscrits au tableau (*matome*). Les enseignants utilisent le tableau noir pour illustrer les *mathematical thinking* des élèves et pour permettre aux élèves d'apprendre les mathématiques par eux-mêmes (Isoda, 2012). En d'autres termes, le tableau sert à organiser les processus de pensée et les résultats (Fujii, 2018). Yoshida (2005) résume les différentes fonctions du tableau noir pendant les leçons de mathématiques : garder en mémoire la leçon, aider les élèves à se rappeler ce qu'ils ont besoin de faire et de penser, aider les élèves à voir les connexions entre les différentes parties de la leçon et sa progression, comparer, contraster, discuter les différentes idées et procédures des élèves, aider à organiser les pensées et idées des élèves et découvrir de nouvelles idées, favoriser les capacités des élèves à prendre des notes avec une bonne organisation. Le tableau noir a ainsi une fonction de mémoire et d'affichage, une fonction de partage d'idées, et permet une construction collective des connaissances. L'utilisation du tableau noir véhicule et repose ainsi sur une valeur de partage d'idées et une valeur d'égalité entre les élèves par la pratique des *neriage*. Par ailleurs, une bonne organisation du tableau est donc importante lors de chaque phase d'enseignement dans l'approche par *problem solving*.

L'utilisation du tableau noir peut s'expliquer par des valeurs fortes de partage et d'égalité, d'autant plus que le nombre d'élèves par classe à l'école primaire est important (environ 35 par classe), mais aussi peut-être par l'importance accordée à l'écrit dans la langue japonaise. Dans une étude comparative de leçon sur la symétrie avec des élèves français et japonais, Denys et Grenier (1986) ont mentionné que toutes les étapes d'un raisonnement sont exprimées oralement dans la langue française alors que dans la langue japonaise, le degré d'explicitation est beaucoup plus réduit à l'oral, mais cette langue utilise de très nombreux signes à l'écrit, davantage qu'en français. Cette différence peut renforcer aussi l'utilisation du tableau noir et le passage à l'écrit de toutes les idées des élèves.

2.5. Dans la recherche japonaise en *mathematics education*

La recherche sur l'approche par *problem solving* pendant les années 1950, 1960 et 1970 s'est focalisée sur les « word problems » ; les chercheurs japonais

---

[7] L'enseignant et les élèves écrivent au tableau noir, mais l'enseignant organise la gestion et l'occupation de l'espace.

s'intéressaient alors à développer les *mathematical thinking* des élèves et à analyser les interventions des enseignants en prenant en compte les processus de résolution des élèves (Nunokawa, 2015). Puis dans les années 1970-1980, se déroule l'un des principaux mouvements de réforme de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques (NCTM, 1980) avec une emphase sur la résolution de problème mathématique (Nunokawa, 2015 ; Takahashi, 2006). Pendant cette même période, les travaux de Schoenfeld (1985) et de Silver (1985) sont introduits dans la communauté de *mathematics education* au Japon (Nunokawa, 2015). Au niveau des pratiques, l'un des principaux aspects de cette réforme a été de basculer de la classe traditionnelle centrée sur l'enseignant à la classe centrée sur les élèves, avec leurs participations actives dans les activités mathématiques (Takahashi, 2006). L'approche par *problem solving* devient alors le fondement de l'enseignement centré sur les élèves (Takahashi, 2006). La recherche sur l'approche par *problem solving* conserve ses traditions qui accordent de l'importance à la nature mathématique de la résolution de problème et à la richesse des *mathematical thinking* même après l'impact des travaux américains et européens (Nunokawa, 2015). Comme nous l'avons vu dans la partie 1.2, l'adaptation française de l'enseignement par *problem solving* a été différente de celle japonaise dans le sens où l'accent a été davantage porté sur des connaissances transversales ou méthodologiques (Houdement, 2013).

Pour résumer, l'approche par *problem solving* se traduit dans l'enseignement des mathématiques au Japon par plusieurs éléments clés : la structure des leçons ordinaires par *problem solving*, l'importance accordée à la diversité des procédures des élèves, la pratique du tableau noir pour l'affichage et la mémorisation du déroulement de la leçon, des processus d'apprentissage, des différentes idées et procédures des élèves, pour le partage des idées des élèves et pour la construction collective des *mathematical thinking*.

La partie suivante expose comment s'est développé le concept de *mathematical thinking* au Japon depuis les années 50 et comment ce concept imprègne l'enseignement des mathématiques en étant le principal objectif d'apprentissage de cette approche par *problem solving*.

3. Mathematical thinking

3.1 Présentation

Au Japon, le terme de *mathematical thinking* (*sugakuteki kangaekata* en japonais) est utilisé depuis longtemps dans les programmes officiels ainsi que dans l'enseignement des mathématiques. Ce terme a été utilisé dans le contexte des programmes pour la première fois en 1958 (Baba et al., 2018). Les *mathematical thinking* y apparaissent en tant que principal objectif de l'enseignement des mathématiques. Celles-ci visent à développer d'une part, un niveau plus avancé de connaissance et de pensée mathématique à partir de concepts fondamentaux et de capacités élémentaires acquises, et à développer d'autre part, les capacités à les appliquer dans des situations de la vie quotidienne (Baba et al., 2018). Les chercheurs japonais ont alors essayé de décrire et caractériser ce terme utilisé dans les programmes et par les enseignants, mais aussi de le concrétiser à travers des exemples. Les travaux de Nakajima et Katagiri sont emblématiques de ces recherches et proposent deux caractérisations différentes. Selon Nakajima qui a introduit ce terme dans les programmes de 1958, « les *mathematical thinking* dénotent de la capacité et de l'attitude permettant de conduire d'une façon autonome des activités créatives pertinentes aux mathématiques » (1982-2015, p. ii). Katagiri, Sakurai, Takahashi et Oshima (1971)[8] proposent une autre caractérisation des *mathematical thinking* d'abord en trois éléments : les situations qui permettent de produire des *mathematical thinking*, les processus qui permettent d'organiser les *mathematical thinking* et les contenus des *mathematical thinking*. Katagiri (1988) réorganise cette catégorisation en méthodes mathématiques, contenus mathématiques et capacités mathématiques. Puis, il propose une catégorisation en deux types de MT, les méthodes mathématiques et les contenus mathématiques, et en a établi une liste exhaustive (Katagiri, 2017). Les méthodes mathématiques recouvrent dix types de raisonnement : raisonnement déductif, raisonnement analogique, raisonnement inductif, raisonnement d'intégration (*togo*)[9], raisonnement lié au développement (*hatten*)[10], raisonnement d'abstraction, raisonnement de

---

[8] Baba et al. (2018) ont proposé une traduction en anglais de la caractérisation des Mathematical Thinking de Katagiri et al. (1971) et Katagiri (1988), que nous avons reprise et traduite en français dans cet article.

[9] "What is integrative thinking? Rather than leaving a large number of propositions disconnecte and separate, this thinking method abstracts their essential commonality from a wider viewpoint, thereby summarizing the propositions as the same thing." (Isoda & Katagiri, 2012, p. 62).

[10] Dans la *mathematics eduction* au Japon, la notion de développement, *hatten*, correspond au développement ou évolution du problème initialement proposé et résolu dans la classe en un nouveau problème par le changement de conditions ou par le changement de points de vue, comme Isoda & Katagiri (2012) remarquent :

"What is developmental thinking? Developmental thinking is when one achieves one thing and then seeks an even better method, or attempts to discover a more general or newer thing based on the first thing. There are two types of developmental thinking: Type I developmental thinking. Changing the conditions of the problem in a broad sense. By "changing the conditions of the problem" is meant: (1) Changing some conditions to something else, or trying to loosen the conditions; (2) Changing the situation of the problem.

Type II developmental thinking. Changing the perspective of thinking." (Isoda & Katagiri, 2012, p. 66) simplification, raisonnement de généralisation, raisonnement de spécification et raisonnement de symbolisation. Le contenu mathématique inclut à la fois le contenu et le raisonnement (*thinking*) sur le contenu pour : les nombres, le calcul, les grandeurs et mesures, la géométrie, les expressions et formules, les fonctions et les statistiques. Isoda et Katagiri (2012) ont écrit un livre en anglais "Mathematical thinking: how to develop it in the classroom?" dans lequel ils distinguent en plus les capacités mathématiques derrière les MT liées aux méthodes mathématiques et les MT liées aux contenus mathématiques et aux idées. Dans le cadre de cet article, nous retenons la catégorisation des *mathematical thinking* donnée par Katagiri (2017) en méthodes mathématiques (types de raisonnement) et en contenus mathématiques (contenus et raisonnement sur ce contenu).

3.2 Dans les programmes

Dans les programmes officiels, le terme de *mathematical thinking* est utilisé d'une façon différente selon les périodes. Comme mentionné plus haut, ce terme apparaît dans l'objectif principal des mathématiques de l'école primaire dans le programme de 1958. Dans les programmes de 1968 qui correspondent à l'introduction des Mathématiques Modernes, le terme de *mathematical thinking* apparaît encore, mais l'objectif principal insiste sur les notions de *hatten* et *togo* (raisonnement d'intégration). Dans les programmes de 1977, ces trois termes de *mathematical thinking*, *hatten* et *togo* n'apparaissent plus dans les objectifs principaux. Néanmoins, les *mathematical thinking* demeurent dans les guides de programmes comme étant un élément important de l'enseignement des mathématiques à l'école au Japon (Hino, 2007). Et aujourd'hui, le terme de *mathematical thinking* reprend un statut particulier dans le nouveau programme de mathématiques au primaire qui est entré en vigueur à la rentrée 2020. L'objectif principal de ce programme commence par le terme *mathematical thinking* : « Nous visons à favoriser les compétences et les capacités de penser d'une façon mathématique en mobilisant les *mathematical thinking* et à travers les activités mathématiques. […] » [11]. Ce programme définit également les *mathematical thinking* avec les deux termes japonais suivants, *mikata* : « saisir les caractéristiques ou les essences de l'événement en remarquant des quantités numériques ou des figures et leurs rapports » et *kangaekata* : « penser d'une façon *togo* et *hatten* en utilisant les nombres, expressions mathématiques, diagrammes, graphes, etc. selon l'objectif, penser d'une manière rationnelle utilisant des arguments, et mettre en rapport les connaissances et compétences acquises en réfléchissant sur les processus de *problem solving* » (MEXT, 2017, pp. 22-23).

[11] En raison de la traduction française, l'ordre des termes en japonais est changé.

3.3 Dans l'enseignement

Selon Fujii (2018), les *mathematical thinking* ne peuvent pas être enseignées en montrant simplement des définitions de concept, mais doivent être réellement expérimentées à travers des activités de *problem solving*. L'enseignement par *problem solving* vise le développement des *mathematical thinking* : en particulier, la discussion des procédures et solutions (*neriage*) et le développement de problèmes après avoir résolu le problème initial (*hatten*) sont des composantes importantes des *mathematical thinking* (Fujii, 2018 ; Nunokawa, 2015). Cet enseignement par *problem solving* encourage les élèves à penser mathématiquement et les aide à devenir des élèves indépendants, ce qui représente l'un des objectifs de l'enseignement à l'école (Fujii, 2018).

Le concept de *mathematical thinking* est utilisé par les chercheurs, mais aussi par les enseignants japonais. Ce concept est défini dans le lexique en ligne du manuel scolaire Shinko Keirin[12] avec une catégorisation proche de celle de Katagiri (2017) mais en trois catégories. Les *mathematical thinking* recouvrent : l'objet de la pensée, la méthode mathématique (types de raisonnement) et les connaissances/contenus mathématiques. L'objet de la pensée correspond à l'abstraction, la concrétisation, la mise en nombres, la mise en figure, le symbolisme, la formalisation, la spécification...

Dans les manuels scolaires, les objets de la pensée, les méthodes mathématiques (types de raisonnement) et la connaissance/contenu mathématique travaillés et visés par les tâches et problèmes apparaissent explicitement. Il en est de même dans les plans de leçon issu du travail en *lesson study*.

Les éléments clés de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, l'importance accordée à la diversité des procédures des élèves, l'approche par *problem solving* et la pratique du tableau noir ont pour objectif de développer les *mathematical thinking*. Ces pratiques sont partagées dans la profession enseignante notamment grâce aux formations initiales et continues sous forme de *lesson study* que nous présentons dans la partie suivante.

4. Les *lesson study* japonaises

4.1. Présentation

D'un point de vue étymologique, le terme de *lesson study* est la traduction anglaise de l'expression japonaise *jugyo kenkyu* : *jugyo* signifie la leçon ou l'enseignement et *kenkyu* signifie la recherche. Les premiers textes francophones sur les *lesson study*

---

[12] Le lexique en japonais est consultable à cette adresse : https://www.shinko-keirin.co.jp/keirinkan/sansu/WebHelp/02/page2_25.html.

ont proposé la traduction « étude collective d'une leçon » (Miyakawa & Winsløw, 2009a, 2009b). Dans ce texte, nous utilisons la traduction anglaise qui est celle utilisée à l'international.

Les *lesson study* sont une approche de développement professionnel originaire du Japon basée sur le travail collectif entre enseignants et sur l'observation de l'enseignement (Miyakawa & Winsløw, 2009a, 2009b). Ces pratiques datent de la fin du XIXe siècle au Japon et connaissent un intérêt international depuis les années 1990-2000 (par exemple, Clivaz, 2015 ; Miyakawa & Winsløw, 2009a). Dans les années 1990, après des études internationales TIMSS, des chercheurs américains Stigler et Hiebert (1999) ont comparé des leçons de mathématiques dans des classes de 8e année aux États-Unis, au Japon et en Allemagne. À partir des vidéos de leçon de l'étude TIMSS[13], ces chercheurs ont mis en évidence plusieurs éléments : un facteur critique est l'enseignement et les approches d'enseignement, mais pas l'enseignant. Autrement dit, selon Stigler et Hiebert (1999), de bons enseignants avec des approches d'enseignement limitées ne peuvent pas amener leurs élèves à de hauts niveaux de résultats. Ils ont ensuite relevé que l'enseignement est une activité culturelle et qu'il existe un fossé entre les pays dans les méthodes pour améliorer l'enseignement. En particulier, le système éducatif japonais perfectionne en continu ses approches d'enseignement par un mécanisme de développement professionnel : les *lesson study*.

Selon Stephens et Isoda (2007), les *lesson study* reposent sur plusieurs idées sous-jacentes : les enseignants apprennent mieux et améliorent leurs pratiques en voyant d'autres enseignants enseigner. La deuxième est une idée de partage des connaissances et d'expériences des enseignants qui ont développé certaines expertises. La troisième est l'accent porté sur les intérêts des élèves et les apprentissages des élèves. Selon ces auteurs, le cœur des *lesson study* japonaises porte sur l'amélioration de la qualité de l'apprentissage des élèves.

4.2. Fonctionnement au niveau institutionnel

Les *lesson study* sont un mode de fonctionnement ordinaire des enseignants au Japon et sont enracinées à toutes les échelles du système éducatif : de l'établissement, de la ville, de la préfecture, de la région et du pays (Okubo, 2007). Ce mode de fonctionnement remplit différentes fonctions. Les *lesson study* représentent un moyen pratique et effectif d'implémenter le curriculum national. Ainsi, les écoles les utilisent pour aider les enseignants à la transition lors de nouveaux programmes scolaires (Murata & Takahashi, 2002, dans Clivaz & Takahashi, 2018). Les *lesson study* remplissent des fonctions de formation enseignante : formation initiale et continue, insertion dans la profession des stagiaires et novices, développement

---

[13] L'ensemble de l'étude se trouve à cette adresse http://www.timssvideo.com/.

professionnel (par exemple, Miyakawa & Winsløw, 2009a, 2009b). En fonction du niveau, les modalités, les fonctions et les objectifs diffèrent. En particulier, les *lesson study* au niveau national ont pour principale fonction de partager de nouvelles idées sur les pratiques, du nouveau matériel, de nouvelles approches d'enseignement et de montrer leur mise en œuvre en classe (Shimizu, 2002).

La pratique des *lesson study* concerne toutes les écoles de la maternelle au lycée (mais sont peu présentes au lycée). Il existe par ailleurs différents types d'école : les écoles rattachées (*fuzoku*) à chaque Université d'Éducation[14], les écoles spéciales[15] au niveau national comme des écoles désignées écoles de recherche par le ministère de l'Éducation et les écoles ordinaires. Les *fuzoku* tissent des liens étroits avec les chercheurs et les étudiants de l'Université d'Éducation en ce qui concerne la formation et la recherche (Miyakawa & Winsløw, 2009a, 2009b; Shimizu, 2002).

Dans les écoles ordinaires, les *lesson study* sont ancrées dans les pratiques ordinaires des enseignants (Okubo, 2007) et se déroulent souvent entre enseignants sans observateur extérieur à l'établissement, hormis de manière occasionnelle un cadre éducatif ou un expert dans la discipline, nommé *knowledgeable other* : chercheur, formateur ou enseignant reconnu en tant qu'expert par ses pairs. Elles ont pour principal objectif le développement professionnel des enseignants et l'amélioration de l'enseignement en lien avec le thème pédagogique annuel de l'école (Fernandez & Yoshida, 2004).

Dans les écoles *fuzoku* et écoles spéciales, les *lesson study* sont ouvertes aux membres de la communauté éducative. Dans ces écoles *fuzoku*, les *lesson study* ont pour principal objectif de montrer les nouvelles approches d'enseignement en classe (Shimizu, 2002 ; Takahashi, 2015). Des *lesson study* sont généralement organisées une fois par année autour d'une ou de deux journées ouvertes, nommées *kenkyukai* (*kenkyu* signifie recherche et *kai* réunion). Lors d'un *kenkyukai*[16], des leçons de recherche (expression que nous définissons dans la partie suivante) se déroulent en parallèle dans plusieurs classes et parfois dans des salles de sport lorsque les observateurs sont très nombreux. Ces journées proposent souvent des conférences

---

[14] Chaque préfecture du Japon a au moins une Université d'Education et donc au moins une école *fuzoku* rattachée, généralement une école maternelle, primaire, collège/secondaire et parfois lycée (voir annexe 1-A).

[15] Chaque année, une dizaine d'établissements japonais (école maternelle, école élémentaire, collège et lycée) peuvent obtenir le statut d'école de recherche pour un projet d'une durée de 3, 4 ou 5 ans.

[16] Les écoles ordinaires organisent aussi occasionnellement des *kenkyukai* mais l'objectif principal n'est pas la diffusion d'approche d'enseignement comme dans les écoles *fuzoku*, mais la formation continue des enseignants.

de chercheurs invités, ainsi que la présentation générale des objectifs pédagogiques de l'école. En plus de ces journées ouvertes *kenkyukai*, ces écoles organisent aussi des *lesson study* ancrées dans les pratiques ordinaires des enseignants plusieurs fois par an.

4.3. Présentation des différentes étapes d'une *lesson study* japonaise

Dans une *lesson study* japonaise, l'enseignant choisit un sujet mathématique, prépare une séquence de leçons sur ce sujet et prévoit la mise en œuvre d'une des leçons, celle-ci est appelée la leçon de recherche qui sera préparée en détail, observée et analysée. Cette étape, nommée *kyozai kenkyu*, correspond à une analyse attentive du sujet selon les objectifs de la leçon et du curriculum. Cette étape inclut des analyses des liens mathématiques entre le sujet actuel et les sujets précédents, l'anticipation des procédures des élèves et la planification de la leçon basée sur l'anticipation des procédures des élèves (Shimizu, 1999 ; Watanabe, Takahashi & Yoshida, 2008).

L'enseignant, qui va enseigner la leçon de recherche, présente le plan de leçon en collectif : lors de réunions internes à l'établissement et/ou lors de réunions externes à l'établissement organisées par des associations locales de professeurs de mathématiques (Miyakawa & Winsløw, 2019 ; Miyakawa & Xu, 2019). Les réunions externes sont ouvertes à l'extérieur et fonctionnent sur le volontariat des différents participants : chercheurs, formateurs, enseignants externes à l'école, étudiants... Les réunions internes se déroulent entre enseignants de l'école avec parfois un cadre éducatif ou un expert de la discipline. Lors de ces réunions externes ou internes s'en suit un débat entre les participants sur le plan de leçon présenté. L'enseignant reprend alors le plan de leçon, modifie et intègre (ou non) les différents commentaires. Cette étape correspond souvent à la fois à un travail individuel de l'enseignant (pour une partie de la préparation et la rédaction du plan de leçon) et à un travail collectif (discussions collectives avant la rédaction d'un premier plan de leçon, puis discussions du plan de leçon).

L'étape suivante consiste en la leçon de recherche enseignée par l'enseignant dans sa classe avec ses élèves. La leçon est observée par les enseignants de l'école dans les écoles ordinaires et par les membres de la communauté éducative dans le cas des écoles *fuzoku* et écoles spéciales.

Enfin, une discussion post-leçon se déroule avec les participants de la leçon de recherche en réunion interne ou en réunion externe.

Ces *lesson study* aboutissent à la rédaction d'un rapport de leçon par l'enseignant, recueilli et archivé dans l'école dans une brochure annuelle qui regroupe le travail en *lesson study* dans toutes les disciplines.

Pour résumer, les *lesson study* sont culturellement ancrées, existent sous différentes formes et remplissent plusieurs fonctions dont la diffusion d'approche d'enseignement. Après avoir donné quelques clés de compréhension de l'enseignement mathématique japonais, nous pouvons nous demander comment prendre en compte les contraintes de l'institution pour analyser leur impact possible sur les pratiques ? Comment analyser dans la planification et le déroulement de l'enseignement la place de ces spécificités du contexte japonais ? La partie suivante propose une analyse des pratiques d'un enseignant d'école primaire dans le cadre de la double approche didactique et ergonomique.

5. Analyse des pratiques dans la double approche didactique et ergonomique

5.1. Cadre théorique

Cette recherche s'inscrit dans le cadre théorique de la Double Approche (Robert, 2008 ; Robert & Rogalski, 2002) pour analyser les pratiques d'un enseignant, car ce cadre permet de prendre en compte l'activité de l'enseignant en classe, mais aussi ce qui se passe hors la classe et qui peut influencer son activité en classe. Dans ce cadre, les pratiques des enseignants sont analysées selon cinq composantes : cognitive, médiative, personnelle, sociale et institutionnelle. Les deux premières traduisent les choix de l'enseignant sur l'organisation de la leçon et de son déroulement : le choix des contenus, des tâches et les différentes interventions de l'enseignant avec les élèves, la dévolution des consignes, les validations... La composante personnelle correspond à la représentation de l'enseignant sur ses élèves, sur les mathématiques, sur l'enseignement des mathématiques. La composante sociale se traduit par l'inscription de l'enseignant dans son établissement et en particulier dans le travail collectif en *lesson study* dans notre contexte. La composante institutionnelle correspond au rapport qu'entretient l'enseignant avec les diverses contraintes de la profession. Cette composante des pratiques correspond à l'adhésion de l'enseignant aux programmes officiels qui sont marqués dans le contexte japonais par l'importance accordée aux *mathematical thinking* et par l'enseignement par *problem solving*. Cette composante des pratiques correspond aussi à la façon dont l'enseignant s'approprie les manuels scolaires ou encore les contraintes liées au type d'école.

L'analyse des pratiques en composantes a pour objectif d'interpréter les choix de l'enseignant ou de l'enseignante pour sa classe en termes de marges de manœuvre laissées par le contexte et que l'enseignant ou l'enseignante va investir et en termes de contraintes auxquelles il ou elle est soumis ou soumise.

5.2. Question de recherche

Au vu du cadre théorique choisi et des spécificités japonaises présentées, nous émettons une hypothèse qui donne lieu à une question de recherche. Nous faisons l'hypothèse que l'importance accordée aux *mathematical thinking* et l'enseignement par *problem solving* peut être donnée à voir pendant la leçon, dans les composantes cognitive et médiative des pratiques. D'où la question de recherche : comment l'approche d'enseignement par *problem solving* et l'importance accordée aux *mathematical thinking* se traduisent-elles dans les composantes cognitive et médiative des pratiques ?

Nous complétons l'analyse des pratiques pendant les leçons observées, par l'analyse des composantes personnelle, sociale et institutionnelle, et nous discutons dans la conclusion du comment se traduisent les spécificités japonaises dans ces composantes.

5.3. Données de recherche

La séquence observée s'est déroulée au mois d'octobre 2018 dans la classe d'un enseignant de l'école primaire *fuzoku* rattachée à une Université d'Éducation au Japon. L'enseignant, nommé Kazu, a une dizaine d'années d'expérience d'enseignement. Il est impliqué en mathématiques, notamment par son adhésion à l'association des professeurs de mathématiques de la ville. Cet enseignant est représentatif d'un enseignant expérimenté, car il a intégré une école *fuzoku*.

La séquence observée s'inscrit dans le thème pédagogique annuel de l'école autour de la démarche d'investigation. La séquence s'est déroulée pendant quinze leçons dont la 8e est une leçon de recherche en *lesson study*. L'enseignant a étudié individuellement le curriculum sur le sujet (*kyozai kenkyu*). Il a ensuite préparé et rédigé un plan de la leçon de recherche qu'il a présenté à ses collègues lors de réunions internes sans observateur extérieur. La leçon de recherche a ensuite été observée par des chercheurs, tous les enseignants de l'école[17] et quelques étudiants. La discussion post-leçon a eu lieu en interne sans observateur extérieur et l'enseignant a rédigé un rapport de leçon suite à cette discussion. Cette *lesson study* est suivie d'un autre type de *lesson study* : une journée ouverte *kenkyukai* (fin novembre 2018) dans laquelle la leçon de recherche est enseignée par cet enseignant, devant une centaine d'observateurs. Cette autre leçon de recherche concerne le même thème « grandeurs et mesures », mais porte sur la masse.

Le corpus contient quinze vidéos des leçons de la séquence sur la longueur. Les vidéos des leçons 1 et 3 ont été transcrites et traduites en anglais et en français. Le corpus contient aussi des données écrites que nous avons traduites et analysées : les photos du tableau noir de chaque leçon, le manuel scolaire et le guide de l'enseignant, le plan de la leçon de recherche, le rapport de leçon, la correspondance email entre l'enseignant et un chercheur de cette Université d'Éducation.

---

[17] Les enseignants de l'école laissent leurs élèves travailler en autonomie pour pouvoir observer la leçon de recherche.

En particulier, l'analyse de la composante cognitive s'appuie sur les vidéos des leçons, sur nos notes d'observations, le programme officiel (extrait en annexe 1-G), le manuel scolaire, les transcriptions des leçons 1 et 3. L'analyse de la composante médiative s'appuie sur les vidéos des leçons, les transcriptions des leçons 1 et 3, et les tableaux noirs des leçons. L'analyse des composantes personnelle, sociale et institutionnelle s'appuie sur les données qui ont été récoltées hors temps de classe et qui peuvent expliquer les choix de l'enseignant en classe : le plan de leçon, le rapport de leçon, le manuel scolaire, le guide de l'enseignant, le programme officiel et la correspondance courriel. Nous nous appuyons sur l'hypothèse de stabilité et de cohérence des pratiques (Robert, 2007 ; Roditi, 2008) pour généraliser l'analyse des pratiques de cet enseignant observées pendant quinze leçons.

5.4. Analyses des pratiques

Le thème de la séquence observée est « sentir/ressentir la longueur » dans le cas de grandes longueurs en 3^{e} année d'école primaire (annexe 1-A). Cette séquence se place dans le domaine « grandeurs et mesures » dont les principaux objectifs sont de comprendre les unités et les mesures de diverses quantités qui sont étroitement liées à la vie quotidienne des élèves, pour développer les compétences de mesure et pour favoriser un sens riche des quantités. Un autre objectif est de faire prendre conscience aux élèves de l'utilité d'exprimer la taille en utilisant des unités, afin qu'ils soient capables de choisir une unité de façon ciblée (guide du programme, Isoda, 2010, p. 67)[18]. Les objectifs de la séquence en termes de nouveaux contenus mathématiques sont l'introduction de l'unité de longueur kilomètre et les procédures de mesurages. Les connaissances en jeu dans la séquence sont le système métrique : les unités mètres, centimètres et millimètres, les conversions entre ces différentes unités et les additions de ces unités de longueur. Bien que les élèves aient déjà été amenés à effectuer des procédures de mesurage l'année précédente, le programme scolaire indique que « Measurement using instruments » (guide du programme, Isoda, 2010, p. 27) se fait à partir de la 3ème année (Batteau, 2019).

5.4.1. Composante cognitive des pratiques

Kazu a proposé les tâches suivantes aux élèves pour organiser la séquence de quinze leçons (figure 1).

Kazu propose une même tâche pendant plusieurs leçons d'une durée allant de 2h05 à plus de 5h d'enseignement. Cela signifie qu'en accord avec l'approche par *problem solving*, la leçon ne s'arrête pas lorsque les élèves ont trouvé la solution du problème. Il consacre les cinq premières leçons sur une même tâche alors même que la valeur considérée comme exacte est trouvée au début de la leçon 3. Le temps accordé à

[18] Voir annexe 1-G.

chaque tâche permet aux élèves d'aller jusqu'au bout de leur idée ou de la mise en œuvre de leurs procédures même si celles-ci ne sont pas optimales. Cela signifie aussi qu'en accord avec le programme officiel japonais, il est possible pour cet enseignant d'accorder autant de temps pour chaque tâche dans une séquence d'enseignement (voir annexe 1-B-G).

Leçon	Durée	Tâches proposées
1, 2, 3, 4 et début leçon 5	4:50:00	Mesurer la longueur du couloir du 2e étage de l'école
5	2:05:00	Mesurer différentes longueurs choisies par les élèves à l'intérieur de l'école : couloir du 1er étage, longueur de la salle de gymnastique, hauteur du 1er étage au 2e étage...
6, 7 et leçon de recherche 8	3:02:00	Mesurer le tour du terrain de sport
10, 11 et début leçon 12	5:32:00	Mesurer et parcourir 1 km
9, fin leçon 12, 13, 14 et 15	4:18:00	Mesurer la distance de l'école à un magasin de bonbons (environ 750 mètres)

Figure 1. Organisation de la séquence d'enseignement observée

La composante cognitive des pratiques de Kazu est marquée en particulier par le choix de problèmes adaptés du manuel scolaire et qui relèvent de la vie quotidienne des élèves. Les élèves sont ainsi amenés à résoudre des problèmes concrets de mesurage. Par exemple, la roue de mesure numérique ne peut pas aller contre le mur au bout du couloir (voir figure 2). Les élèves devront donc prendre en compte la longueur du rayon de la roue et la rajouter à la longueur totale.

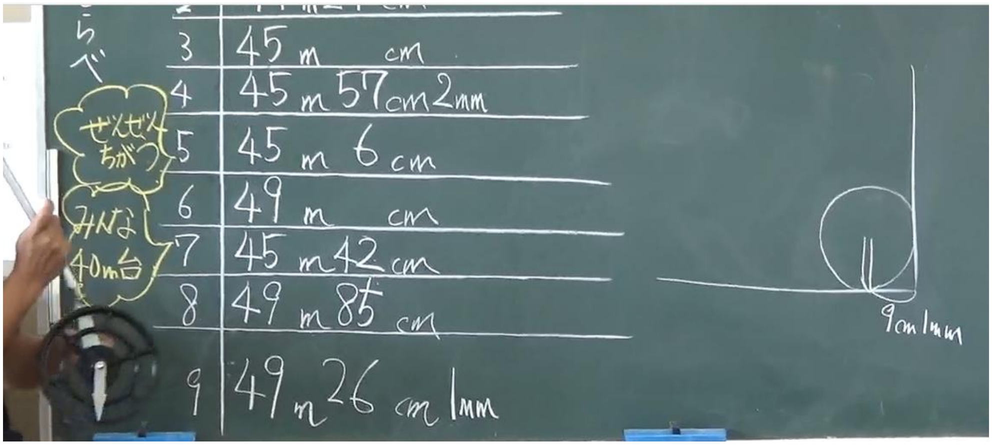


Figure 2. Tableau noir au début de la leçon 3

Pour chacune des tâches de la séquence, Kazu a suivi la même structure de leçon par *problem solving* décrite précédemment dans cet article. Nous détaillons les activités proposées aux élèves lors des cinq premières leçons qui sont représentatives, en termes d'organisation, de l'ensemble de la séquence (voir annexe 2). En particulier, il propose la tâche de mesurage de la longueur du couloir lors des leçons 1, 2 et 3, puis il repropose cette même tâche lors de la leçon 4 en demandant aux élèves d'utiliser des procédures variées, alors même que la valeur de haute précision considérée comme la mesure exacte a déjà été trouvée et validée au début de la leçon 3. En effet, il explique que trop d'élèves, quatre groupes sur neuf, ont utilisé le même instrument de mesure, une règle d'un mètre. Ainsi, le choix des tâches est guidé en partie par l'importance accordée à la diversité des procédures personnelles (voir figure 3). Ces procédures reposent sur l'utilisation d'instruments de mesure conventionnels (règles graduées, dérouleur de cent mètres, roue de mesure numérique) ou non conventionnels[19] (écartement d'un compas pour tableau noir, fil en laine, baguettes, pieds, pas, corps, tabourets).

Figure 3. Quelques exemples de procédures

[19] « Les instruments de mesure non conventionnels sont des objets utilisables pour mesurer une longueur et dont on a besoin de mesurer la longueur » (Batteau, 2019).

Les élèves ont eu des tâches pour lesquelles ils connaissaient déjà le résultat (leçon 4 pour la longueur du couloir du 2e étage, leçon 8 pour le mesurage du tour du terrain de sport pour vérifier que la longueur est de 200 mètres). Ceci peut être expliqué par l'importance accordée à la diversité des procédures des élèves et non à l'obtention du résultat ou de la solution du problème, en cohérence avec l'approche par *problem solving*.

Une autre caractéristique de la composante cognitive des pratiques de Kazu est l'importance accordée au développement *hatten* et à l'extension du problème. Il demande aux élèves de développer des idées mathématiques (*hatten*) à partir des idées et procédures personnelles des élèves. Dans le plan de leçon de recherche (leçon 8), il développe l'idée de moyenne arithmétique lorsqu'il reprend une idée d'élève qui est de mesurer la distance parcourue en marchant pendant une minute. Il propose de calculer la distance moyenne parcourue en répétant l'expérience « un certain nombre de fois ». De même pour la procédure qui consiste à compter le nombre de pas avec un podomètre, « le résultat étant différent chaque fois, il est bien de calculer la moyenne ». Puis lors de la leçon 12, il demande aux élèves comment ils feront s'ils trouvent des résultats différents pour le mesurage de la distance entre leur école et le magasin de bonbons. Le développement attendu est ici aussi l'idée de moyenne arithmétique. Un autre exemple de développement d'idées noté dans son rapport de leçon porte sur les notions d'erreur et de précision de mesure.

Une autre caractéristique de sa composante cognitive des pratiques est le rapport à l'écrit. Dans cette école *fuzoku*, les élèves sont invités à écrire quotidiennement et librement leurs réflexions, ce qu'ils ont aimé ou ce qu'ils ont appris. Les élèves ont aussi l'habitude de recopier le tableau avec toutes les procédures et idées des élèves, le *hatsumon*, le *matome* et d'écrire leurs réflexions par rapport au problème présenté. À la fin des leçons, Kazu propose de nouveaux problèmes qui sont un développement du problème présenté (ce qui correspond à la phase de *hatten*) et demande aux élèves de réfléchir par écrit ou alors il leur demande de développer des idées mathématiques par rapport à ce qui a été présenté.

Nous en déduisons que le choix des tâches est guidé en partie par l'importance accordée à la diversité des procédures des élèves, que l'organisation des tâches de la séquence est en cohérence avec l'approche d'enseignement par *problem solving*, en accordant de l'importance à l'enseignement collectif, à la diversité des procédures des élèves et au développement (*hatten*) de nouveaux problèmes issus de la discussion collective du *neriage*. L'enseignant s'appuie sur la diversité des procédures des élèves pour développer les *mathematical thinking*, et en particulier par son guidage lors de l'enseignement collectif que nous précisons dans la partie suivante.

5.4.2. Composante médiative des pratiques

L'analyse de la composante médiative des pratiques est réalisée en lien avec le développement des *mathematical thinking* et l'approche par *problem solving*. Dans son enseignement, la présentation du problème (*hatsumon*) se déroule en collectif, le moment de recherche d'abord individuellement puis en groupe de deux, trois ou quatre élèves avec chaque élève qui effectue une tâche précise. Le *neriage* et le *matome* se déroulent en classe complète (voir annexe 2). Pour les cinq premières leçons, l'enseignement est en collectif (56% du temps), individuel (1% du temps) et en groupe (43% du temps). De plus, toutes les phases de la leçon par *problem solving* sont présentes pendant ces leçons.

La composante médiative des pratiques de Kazu se caractérise par des interventions spécifiques lors des moments collectifs, en particulier du *neriage*. Nous illustrons ses interventions avec ce qu'il écrit au tableau noir, car sa pratique du tableau noir retrace une partie de son activité et de celle des élèves pendant les leçons de la séquence, ce qui est un élément clé de l'approche par *problem solving*. Nous montrons en particulier comment ses interventions participent au développement des *mathematical thinking* dans le cas de la tâche de mesurage de la longueur du couloir, pendant le *neriage* (leçon 3) et le *matome* (leçon 4).

Lors du *neriage* de la leçon 3, Kazu demande à chaque groupe d'élèves : la mesure de la longueur trouvée (dans la partie gauche du tableau, figure 4), l'instrument de mesure utilisé (tableau en liège, compas pour tableau noir, taille d'un élève, règle de 1 mètre), la longueur de l'unité[20] choisie (60 cm pour le tableau en liège par exemple), le nombre d'unités (83 fois pour le tableau en liège) et la procédure mise en œuvre et leurs idées (voir figure 4). Ainsi il retrace les résultats et les processus au tableau : par exemple pour la procédure qui utilise l'écartement d'un compas pour tableau (82 cm), le groupe 3 a trouvé 45 m et 52 cm (au lieu de 45 m et 92 cm), en reportant 56 fois l'écartement du compas de 82 cm et sur la partie droite du tableau, une des élèves du groupe 3 a reporté deux fois l'écartement du compas le long d'une ligne droite.

---

[20] Dans le guide qui accompagne le programme scolaire de l'école primaire, une unité est définie comme "the basic size that is used to express size of a quantity" (Isoda, 2010, p. 73).

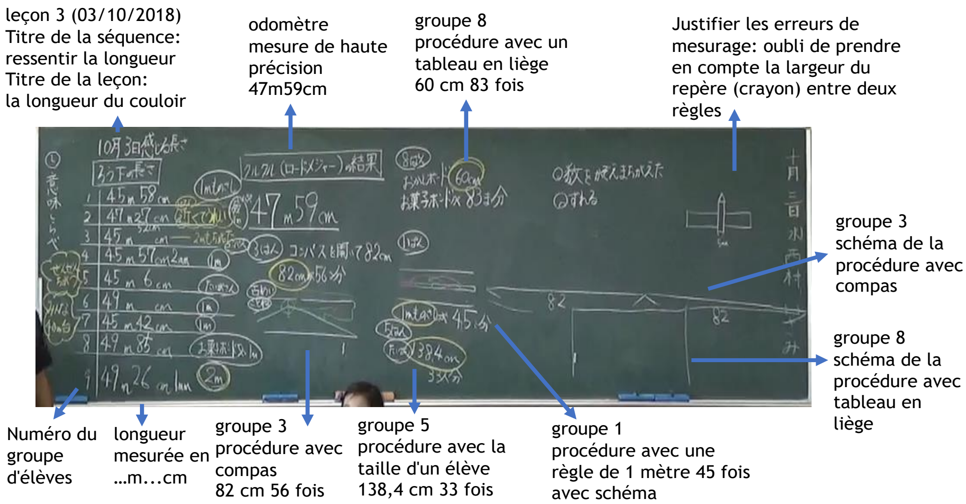
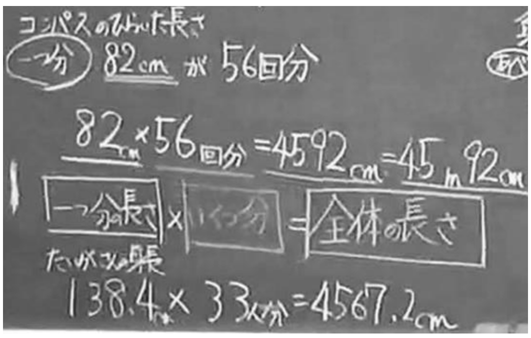


Figure 4. Tableau noir à la fin de la leçon 3

Les éléments identifiés dans chaque procédure (figure 4) constitueront chacun des éléments de l'expression mathématique visée : la longueur de l'unité multipliée par le nombre d'unités est égale à la mesure de la longueur du tout (figure 5).



Longueur de l'écartement du compas
Unité de mesure choisie : 82 cm, 56 fois

$82_{cm} \times 56_{fois} = 4592_{cm} = 45_{m}92_{cm}$

La longueur de l'unité choisie	×	le nombre d'unités choisies	=	la longueur entière

La taille de l'élève
$138.4_{cm} \times 33_{fois} = 4567.2_{cm}$

Figure 5. Tableau noir au début de la leçon 4 (Batteau, 2019)

Les interventions de l'enseignant en *neriage* sont ainsi guidées par l'institutionnalisation de l'expression mathématique lors du *matome* qui aura lieu au début de la leçon 4 (figure 5). L'expression mathématique permet de modéliser les procédures de mesurage réellement mises en œuvre, même si cette modélisation ne prend pas en compte la longueur potentiellement restante entre le dernier report de l'instrument et le bout du couloir. Cette expression illustre aussi les *mathematical thinking* : le contenu qui est l'expression elle-même et les *thinking* sur le contenu identifié comme étant la nécessité du concept d'unité dans les stratégies de mesure. En effet, Kazu écrit dans son rapport de leçon l'importance de l'intégration (le *togo*, l'un des dix types de raisonnement des *mathematical thinking*) des unités dans l'apprentissage à long terme, en conformité avec le programme officiel (Isoda, 2010). Kazu s'appuie sur la diversité des procédures des élèves pour renforcer la conceptualisation de l'unité (la longueur de l'unité correspond ici à la longueur de l'instrument de mesure choisi) et la conceptualisation de la multiplication avec la comparaison de stratégies additives et multiplicatives proposées par des élèves lors du *neriage*. Les élèves ont utilisé des données différentes dans leurs procédures et Kazu s'appuie sur cette diversité pour recontextualiser l'expression mathématique dans chaque groupe d'élèves, comme dans l'exemple au tableau noir avec la taille d'un élève (figure 4). Un premier mouvement des procédures des élèves vers l'expression mathématique correspond à la décontextualisation des connaissances et un deuxième mouvement de l'expression mathématique aux procédures des élèves correspond à la recontextualisation des connaissances. Le premier mouvement s'appuie sur la diversité des procédures des élèves avec l'identification d'éléments communs pour identifier l'expression mathématique. Le deuxième mouvement utilise également la diversité des procédures pour que les élèves s'approprient et recontextualisent l'expression mathématique avec leurs propres données.

Pendant toute cette séquence, Kazu va, dans ses choix et ses interventions, accorder une importance à la diversité des procédures des élèves. Il fait primer les procédures personnelles de mesurage sur la mise en œuvre de procédure plus optimale, comme le dérouleur de 100 mètres. Ainsi, pour mesurer la distance de l'école à un magasin de bonbons (environ 750 mètres), aucun élève n'a utilisé la roue de mesure numérique ou de dérouleurs de 100 mètres et plusieurs élèves ont utilisé l'écartement d'un compas pour tableau noir. Dans son rapport de leçon, il écrit que les élèves ont comparé les différentes procédures, leurs avantages et leurs inconvénients, mais que la procédure qu'ils ont choisie reste toujours la meilleure selon eux.

Un autre aspect de la composante médiative des pratiques est de faire appliquer aux élèves des connaissances mathématiques qui ne sont pas directement celles visées par la séquence sur les longueurs lors des moments collectifs de *neriage*. Cette caractéristique permet de faire des liens entre les connaissances mathématiques des élèves, de les réappliquer dans d'autres contextes et cela peut contribuer à développer les *mathematical thinking*. Par exemple, pour comparer les mesures proposées par les élèves, Kazu place sur une droite graduée les différents nombres correspondant aux mesures trouvées lors de la leçon 12 lors d'un moment collectif (voir figure 6).

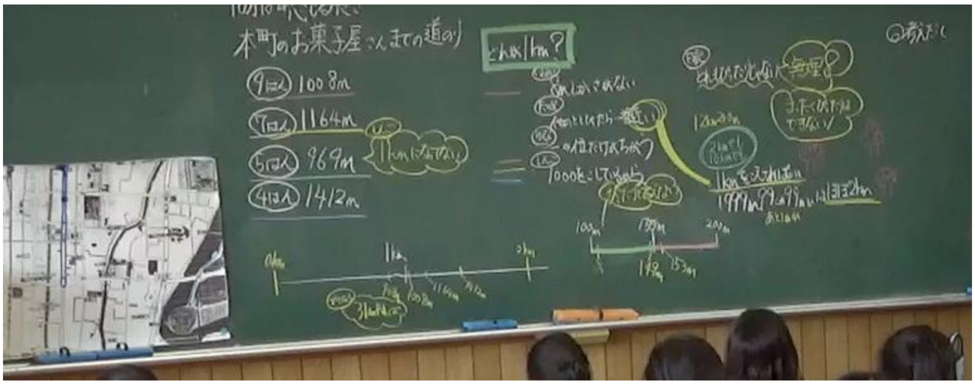
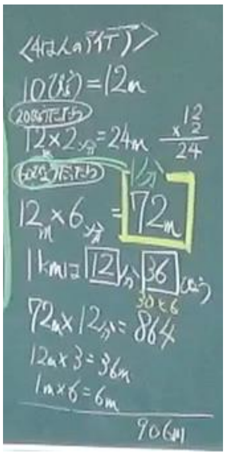


Figure 6. Tableau noir lors de la leçon 12

Les élèves sont amenés à appliquer des connaissances mathématiques pour résoudre des problèmes rencontrés de mesurage : mesurer le rayon d'un disque (voir figure 2), placer des nombres sur une droite graduée pour les comparer (voir figure 6), travailler la proportionnalité entre le temps et la distance en supposant une vitesse constante (voir figure 7) et travailler la proportionnalité entre longueur et nombre de pas.



<Idée du groupe 4>

10 secondes = 12 m

si c'est 20 secondes

$12_{m} \times 2_{fois} = 24_{m}$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \underline{\times\ 2} \\ 24 \end{array}$$

si c'est 60 secondes

1 minute

$12_{m} \times 6_{fois} = \boxed{72_{m}}$

1 km = $\boxed{12}_{min}$ $\boxed{36}$ secondes

30 et 6

$72_{m} \times 12_{min} = 864$

$12_{m} \times 3 = 36_{m}$

$1_{m} \times 6 = 6_{m}$

906_{m}

Figure 7. Extrait du tableau noir lors de la leçon 11

En résumé, la composante médiative des pratiques de Kazu est marquée par un guidage précis de l'enseignant lors des *neriage* et par le fait de faire appliquer des connaissances mathématiques autres que celles directement inscrites dans la séquence qui concernent l'introduction de l'unité kilomètre et les stratégies de mesurage. Le guidage s'illustre à l'oral par les questions posées par l'enseignant dont les réponses figurent sur le tableau noir avec toutes les informations qui seront utilisées pour écrire l'expression mathématique institutionnalisée lors du *matome* et qui correspond aux *mathematical thinking* visées.

5.4.3. Composantes personnelle, sociale et institutionnelle des pratiques

Les écoles *fuzoku* ont la particularité d'avoir des enseignants « actifs » et expérimentés, ce qui est le cas de Kazu. Comme les *lesson study* en école *fuzoku* ont pour fonction de montrer des approches et des pratiques d'enseignement, les enseignants subissent une certaine pression les amenant à devoir « faire plus et mieux » que les tâches proposées dans les manuels scolaires obligatoires. Dans les écoles ordinaires, il est attendu dans la plupart des cas que les enseignants proposent toutes les tâches du manuel scolaire. Le parcours de Kazu (comme celui des enseignants d'école *fuzoku*) a été d'abord d'enseigner dans des écoles ordinaires pendant plusieurs années, tout en s'investissant dans une association d'enseignants, puis d'enseigner quatre ou cinq années (voir annexe 1-D) dans une école *fuzoku* avant d'évoluer vers un autre poste, soit comme responsable de la recherche dans une école ordinaire, soit comme cadre de l'établissement scolaire (par exemple le chef des enseignants). Kazu a donc pour objectif professionnel de partager son expertise d'enseignement et de recherche auprès d'autres enseignants d'école primaire ordinaire. Sa composante personnelle des pratiques est marquée par son adhésion à l'approche par *problem solving* avec une maîtrise de ses éléments clés : accorder de l'importance à la diversité des procédures des élèves, structurer les leçons par *problem solving* et la pratique du tableau noir. Sa représentation de l'enseignement est marquée aussi par une recherche de créativité de l'activité mathématique des élèves, en accord avec les objectifs de l'approche par *problem solving* et des programmes officiels.

Conformément au manuel scolaire, Kazu reprend certaines tâches du méso-espace (mesures de différentes longueurs dans l'école) et aussi du macro-espace : marche de 1 km pour ressentir la longueur de 1 km et pour connaître le temps nécessaire pour la parcourir. Il reprend et adapte une tâche du macro-espace en la plaçant dans le cadre de la vie réelle des élèves : mesurer une distance de leur école à un magasin de bonbons. Pour cette tâche, il se conforme aux indications du guide de l'enseignant : à propos des longueurs, « je ressens à travers les expériences » et « les élèves sont habitués à apprendre à l'extérieur de l'école en vivant les études et l'apprentissage » (p. 12). Les tâches du manuel concernant le macro-espace sont proposées sous la forme de schémas de quartiers dans lesquels les élèves sont amenés à additionner des longueurs, à réfléchir aux chemins possibles, à comparer les longueurs des différents chemins, etc. Il va ainsi modifier ces tâches privilégiant des calculs de longueurs en une tâche du macro-espace qui permet aux élèves de « ressentir la longueur ». Ce choix illustre l'importance accordée à l'inscription de problèmes dans le cadre de la vie réelle, l'importance de ressentir avec son corps des notions qui peuvent être abstraites pour les élèves (ici les unités de mesure : mètre et kilomètre) et aussi l'importance de donner du sens aux différentes unités de mesure en accord avec le programme officiel (voir annexe 1-G).

Lors de la *lesson study,* Kazu montre une envie d'améliorer ses pratiques. Dans son rapport de leçon, il écrit : « je réfléchis moi-même jusqu'au dernier moment et je veux faire de meilleures activités avec les enfants ». Il montre aussi la prise en compte et la réflexion de l'apprentissage des élèves à long terme lorsqu'il écrit dans son rapport de leçon « en apprentissage à long terme, je pense que l'enseignement des unités est important ». Dans l'expression mathématique qu'il a institutionnalisée lors de la leçon 4, il emploie les termes « nombre d'unités », ce qui relève d'un degré de conceptualisation supérieur aux termes usuels « nombre de reports » et il confirme dans son rapport l'importance qu'il accorde à l'enseignement des unités, ce qui est en accord avec les programmes (voir annexe 1-G).

Cette séquence sur la longueur permet à Kazu de favoriser les *mathematical thinking* des élèves comme prescrit dans les programmes, de comparer les différentes procédures des élèves en *neriage,* de mettre en œuvre des connaissances mathématiques pour résoudre des problèmes rencontrés de mesurage : mesurer le rayon d'un disque, placer des nombres sur une droite graduée, comparer des nombres, travailler sur la proportionnalité entre temps et distance (en supposant une vitesse constante) et travailler sur la proportionnalité entre nombre de pas et distance, s'initier au calcul de moyenne arithmétique.

5.4.5. Discussion et conclusion de l'analyse des pratiques

Pour apporter des éléments de réponse à la première question de recherche, le choix des tâches par cet enseignant (composante cognitive des pratiques) est régi par des contraintes relevant de son appartenance à une école *fuzoku* (composantes sociale et institutionnelle). Il est attendu de Kazu qu'il propose des tâches du manuel scolaire. Ses marges de manœuvre portent sur la modification des tâches pour les inscrire dans le contexte de la vie réelle des élèves. De plus, il privilégie des tâches de mesure de distance dans le macro-espace à des tâches davantage calculatoires proposées dans le manuel. Le choix des tâches est aussi régi par l'importance qu'il accorde à la diversité des procédures des élèves. Cette caractéristique influe sur le choix des tâches (composante cognitive) et sur sa gestion des phases collectives de *neriage* (composante médiative).

La structure des leçons de cette séquence se place dans l'approche par *problem solving*. Kazu accorde une importance aux *mathematical thinking,* en particulier lors des *neriage* et du développement *hatten* qui se déroule souvent à l'écrit à la fin des leçons.

Cette recherche a permis de donner à voir comment la participation aux *lesson study* se traduit dans les composantes cognitive (choix et organisation des problèmes), médiative (interventions de l'enseignant lors des phases collectives) et personnelle des pratiques de l'enseignant (représentation de l'enseignement des mathématiques). La composante personnelle des pratiques de Kazu est marquée par son adhésion à l'approche par *problem solving* avec une maîtrise des éléments clés. Toutefois, le fait qu'une leçon de recherche se déroule au milieu de cette séquence ne semble pas avoir de conséquence sur ses composantes cognitive et médiative, mais davantage sur sa composante personnelle. En effet, sa participation à la *lesson study* implique la rédaction d'un rapport de leçon dans lequel il adopte une posture réflexive sur ses pratiques. Par ailleurs, la participation aux *lesson study* peut aussi être de l'ordre des contraintes professionnelles, car elles présentent un caractère obligatoire, par exemple avec la participation au *kenkyukai* annuel au niveau de la préfecture et au moins une *lesson study* au niveau de l'école *fuzoku*.

Cette recherche n'a pas questionné l'influence de la participation aux *lesson study* sur la préparation des leçons, sur les analyses mathématiques et didactiques de l'enseignant, sur le travail en collaboration avec les autres membres du monde éducatif dans et hors l'école dans les composantes sociales et institutionnelles des pratiques. Ces données de recherche ne nous permettent pas de mesurer les effets des *lesson study* sur les composantes sociale et institutionnelle des pratiques.

Conclusion

Cet article a illustré des spécificités de l'enseignement mathématique dans le contexte de l'école primaire japonaise sur la base d'une revue de littérature en *mathematics education* au Japon complétée par des points de vue de chercheurs étrangers, d'une part pour établir ce qui est générique dans les pratiques ordinaires d'enseignants japonais et d'autre part pour voir comment se traduisent ces spécificités dans les pratiques ordinaires d'un enseignant particulier.

Cette étude de cas est révélatrice de pratiques ordinaires dans le cadre d'école *fuzoku* rattachée à une Université d'Éducation. L'analyse des pratiques de cet enseignant donne à voir les trois spécificités culturelles : la structure de leçon par *problem solving* en phases qui s'étalent pendant plusieurs leçons, l'importance accordée aux *mathematical thinking* avec un guidage de l'enseignant pendant les phases de *neriage* et de développement *hatten*, et les *lesson study* avec la leçon de recherche, un plan de leçon et un rapport de leçon, dans lesquels l'enseignant a pu montrer une réflexivité sur ses pratiques et une envie de se développer professionnellement. Cette étude de cas illustre les pratiques ordinaires d'un enseignant expérimenté. Ses pratiques peuvent être considérées comme des « bonnes pratiques » dans le sens où l'enseignant a préparé la séquence de leçons observées, dont la leçon de recherche, dans un travail collectif en *lesson study* entre enseignants expérimentés de l'école *fuzoku*. De plus, ses pratiques sont diffusées parmi les enseignants d'écoles ordinaires lors de l'observation de la leçon de recherche en *lesson study*. Cette étude de cas questionne également la part de travail personnel des enseignants qui semble conséquente notamment à travers le travail de préparation de leçon de recherche en *lesson study*. En se basant sur l'étude internationale TALIS 2013[21], la part de travail et de dialogue entre collègues du secondaire (toutes disciplines confondues), dans laquelle les activités de *lesson study* se placent, correspond à 3,9h en moyenne par semaine au Japon contre 2,9h par moyenne par semaine pour les autres pays participants (Oba, 2019, p. 37). Cette étude illustre comment un enseignant japonais investit les marges de manœuvre laissées par le contexte institutionnel de son école *fuzoku* et du dispositif *lesson study* : notamment par rapport au choix et à l'adaptation des tâches du manuel scolaire. Ainsi, les tâches choisies lors de la séquence observée présentent de multiples solutions ou méthodes de résolution, ce qui est souvent le cas dans l'approche d'enseignement par *problem solving*. Une autre marge de manœuvre concerne le temps investi dans chaque tâche de la séquence par l'enseignant. Le temps investi révèle une importance mise sur les moments de discussion et d'enseignement collectifs pour développer les *mathematical thinking* à partir des procédures, idées et solutions des élèves et non – uniquement – une importance apportée à l'obtention des solutions des problèmes proposés.

Une des perspectives de cet article est de fournir des clés de compréhension en vue d'éventuelle transposition du fonctionnement des *lesson study* japonaises imbriquées dans une approche par *problem solving* dont l'objectif principal est de favoriser les *mathematical thinking* des élèves.

Quand on cherche à apprendre d'un autre pays, il ne faut pas seulement s'intéresser à la réussite des élèves ou aux pratiques éducatives, mais également aux valeurs culturelles qui fondent les pratiques (Leung, Park, Shimizu & Xu, 2018). Cet article a tenté d'enrichir la palette des possibles pour l'enseignement des mathématiques à l'école primaire, accompagnée de valeurs portées par l'adaptation japonaise de l'enseignement par *problem solving*, telles que la créativité de l'activité mathématique au travers de la recherche de la diversité des procédures des élèves ou encore l'importance accordée à l'enseignement collectif.

---

[21] Consultable à cette adresse : https://www.oecd-ilibrary.org/education/talis-2013-results_9789264196261-en.

L'étude TALIS 2018 (http://www.oecd.org/fr/education/resultats-de-talis-2018-volume-ii-69e92fca-fr.htm et en particulier http://dx.doi.org/10.1787/888934111873) place le Japon en 3è position pour la collaboration professionnelle, l'échange et la coordination à finalité pédagogique pour les enseignants du premier cycle de l'enseignement secondaire. Les activités de collaboration (faire cours à plusieurs dans la même classe et observer les cours d'autres enseignants pour leur fournir des commentaires au moins une fois par mois) ont progressé au Japon entre 2013 et 2018 (http://dx.doi.org/10.1787/888934111930).

Remerciements

Cet article a été réalisé dans le cadre d'études postdoctorales, subventionnées par le Fonds National Suisse, sous la supervision du Professeur T. Miyakawa. Ces études sont réalisées avec le soutien de l'UER MS de la HEP Vaud et du laboratoire 3LS. Nous remercions aussi le Professeur J.-L. Dorier de l'équipe DiMaGe de l'Université de Genève pour avoir porté et soutenu ce projet. Le projet est visible à cette adresse : http://p3.snf.ch/Project-181510#. Nous remercions les étudiants de Master pour leur aide (accompagnement lors des séances de classe et des séances collectives, traduction, transcription...) tout au long de cette recherche, en particulier Ryu et Yuichi, mais aussi l'enseignant qui nous a accueillis pendant plus d'un mois dans sa classe et la Direction de l'école primaire *fuzoku*.

Bibliographie

BABA, T., IWASAKI, H., UEDA, A. & DATE, F. (2012). Values in Japanese mathematics education. *ZDM,* **44**, 21-32.

BABA, T., UEDA, A., NINOMIYA, H. & HINO, K. (2018). Mathematics Education Lesson Study in Japan from Historical, Community, Institutional and Development Assistance Perspectives. In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. da Ponte, A. Ní Shúilleabháin, & A. Takahashi (Eds.), *Mathematics Lesson Study Around the World* (pp. 23-45). Cham, Switzerland: ICME-13 Monographs Springer.

BATTEAU, V. (2018). *Une étude de l'évolution des pratiques d'enseignants primaires vaudois dans le cadre du dispositif de formation lesson study en mathématiques.* (Thèse de Doctorat), Université de Genève, Genève. https://archive-ouverte.unige.ch/unige:106282

BATTEAU, V. (2019). Activité de mesure de la longueur d'un couloir dans une école primaire japonaise. *Revue de Mathématiques pour l'école,* **232**, 4-14. http://www.revue-mathematiques.ch/consultation/numero-229/

BROUSSEAU, G. (1997). *La théorie des situations didactiques*. Paper presented at the Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal. http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/

BROUSSEAU, G. (2012). des dispositifs piagétiens… aux situations didactiques. *Education et Didactique,* **6(2)**, 103-129.

CHARLES-PEZARD, M., BUTLEN, D. & MASSELOT, P. (2012). *Professeurs des écoles débutants en ZEP. Quelles pratiques? Quelle formation?* Grenoble, France : La pensée sauvage.

CHARNAY, R. (1992-1993). Problème ouvert. Problème pour chercher. *Grand N,* **51**, 77-83.

CLIVAZ, S. (2015). Les Lesson Study ? Kesako ? *Math-Ecole,* **224**, 23-26. http://www.ssrdm.ch/mathecole/wa_files/224-Clivaz.pdf

CLIVAZ, S. & MIYAKAWA, T. (2020). The effects of culture on mathematics lessons: an international comparative study of a collaboratively designed lesson. *Educational Studies in Mathematics,* **105(1)**, 53-70.

CLIVAZ, S. & TAKAHASHI, A. (2018). Mathematics Lesson Study Around the World: Conclusions and Looking Ahead. In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. da Ponte, A. Ni Shuilleabhain, & A. Takahashi (Eds.), *Mathematics Lesson Study Around the World. Theoretical and Methodological Issues* (pp. 153-164). Cham, Switzerland: ICME-13 Monographs Springer.

COPPE, S. & HOUDEMENT, C. (2002). Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire. *Grand N,* **69**, 53-62.

DENYS, B. & GRENIER, D. (1986). Symétrie orthogonale : des élèves français et japonais face à une même tâche de construction. *Petit x,* **12**, 33-56.

ELIPANE, L. E. (2012). I*ntegrating the essential elements of lesson study in pre-service mathematics teacher education*. University of Copenhagen, Copenhagen.

FERNANDEZ, C. & YOSHIDA, M. (2004). *Lesson Study. A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning*. New York: Routledge.

FUJII, T. (2018). Lesson Study and Teaching Mathematics Through Problem Solving: The Two Wheels of a Cart. In M. Quaresma, C. Winsløw, S. Clivaz, J. da Ponte, A. Ni Shuilleabhain, & A. Takahashi (Eds.), *Mathematics Lesson Study Around the World. Theoretical and Methodological Issues* (pp. 1-21). Cham, Switzerland: ICME-13 Monographs Springer.

FUNAHASHI, Y. & HINO, K. (2014). The teacher's role in guiding children's mathematical ideas toward meeting lesson objectives. *ZDM,* **46**, 423-436. doi:10.1007/s11858-014-0592-0.

HINO, K. (2007). Toward the problem-centered classroom: trends in mathematical problem solving in Japan. *ZDM,* **39**, 503-514. doi:10.1007/s11858-007-0052-1.

HOUDEMENT, C. (2013). *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques.* (Habilitation à Diriger des Recherches), Université Paris Diderot, Paris.

INPRASITHA, M., ISODA, M., WANG-IVERSON, P. & YEAP, B. H. (2015). *Lesson study: challenges in mathematics education* (Vol. 3). New Jersey: World Scientific.

ISODA, M. (2010). *Elementary School Teaching Guide for the Japanese. Course of Study Mathematics (Grade 1-6), with the English translation on the opposite page* (CRICED Ed.). University of Tsukuba, Tsukuba.

ISODA, M. (2012). Introductory Chapter: Problem Solving Approach to Develop Mathematical Thinking. In M. Isoda & S. Katagiri (Eds.), *Mathematical Thinking: How To Develop It In The Classroom* (pp. 1-28). Singapour: World Scientific.

ISODA, M. & KATAGIRI, S. (2012). *Mathematical Thinking: How To Develop It In The Classroom*. Singapour: World Scientific.

ISODA, M. & NAKAMURA, T. (2010). The Theory of Problem Solving Approach. In M. Isoda & T. Nakamura (Eds.), *Journal of Japan Society of Mathematical Education. Special Issue: Mathematics Education Theories for Lesson Study: Problem Solving Approach and the Curriculum through Extension and Integration* (Vol. XCII, pp. 83). Tokyo: Japan Society of Mathematical Education.

ISODA, M., STEPHENS, M., OHARA, Y. & MIYAKAWA, T. (2007). *Japanese lesson study in mathematics: its impact, diversity and potential for educational improvement*. Singapour: World Scientific.

KATAGIRI, S. (1988). *Concretization of mathematical thinking and attitudes and the teaching.* Tokyo: Toyokan Press (in Japanese).

KATAGIRI, S. (2017). *Sugakutekina kangaekata no gutaika to shido (Concretization and teaching of mathematical thinking)(First edition in 1988)*. Tokyo: Meijitosho.

KATAGIRI, S., SAKURAI, T., TAKAHASHI, E. & OSHIMA, T. (1971). *Mathematical thinking and its teaching (Primary School Editions)*. Tokyo: Modern Shindo Printed (in Japanese).

LEUNG, F. K. S., PARK, K., SHIMIZU, Y. & XU, B. (2018). L'enseignement des mathématiques en Asie du Sud-Est (traduit par Ghislaine Gueudet). In J.-L. Dorier, G. Gueudet, M.-L. Peltier, A. Robert, & E. Roditi (Eds.), *Enseigner les mathématiques. Didactique et enjeux de l'apprentissage*. Paris : Belin Education.

MEXT (2017). *Elementary School Teaching Guide for the Japanese. Course of Study：Mathematics*. Osaka: Nihon Bunkyo Shuppon.

Ministère de l'Éducation nationale de la Jeunesse et des Sports, direction des écoles (1991). *Les cycles à l'école primaire*. Paris : Hachette, CNDP.

Ministère de l'Éducation nationale, Direction des écoles (1981). *Contenus de formation à l'école élémentaire : cycle moyen*. Paris : CNDP.

MIYAKAWA, T. (2007). Textbooks and teaching guides. In M. Isoda, M. Stephens, Y. Ohara & T. Miyakawa (Eds.), *Japanese lesson study in mathematics: its impact,* *diversity and potential for educational improvement* (48-51). Singapour: World Scientific.

MIYAKAWA, T. & WINSLØW, C. (2019). Paradidactic infrastructure for sharing and documenting mathematics teacher knowledge: a case study of "practice research" in Japan. *Journal of Mathematics Teacher Education,* **22(3)**, 281-303. doi:https://doi.org/10.1007/s10857-017-9394-y.

MIYAKAWA, T. & WINSLØW, C. (2009a). Etude collective d'une leçon : Un dispositif japonais pour la recherche en didactique des mathématiques. In I. Bloch & F. Conne (Eds.), *Nouvelles perspectives en didactique des mathématiques. Cours de la XIVe école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 1-17). Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

MIYAKAWA, T. & WINSLØW, C. (2009b). Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants: Etude collective d'une leçon. *Education et Didactique,* **3(1)**, 77-90.

MIYAKAWA, T. & XU, B. (2019). Teachers' collective work inside and outside school as an essential source of mathematics teachers' documentation work: experiences from Japan and China. In L. Trouche, G. Gueudet, & B. Pepin (Eds.), *The 'Resource' Approach to Mathematics Education* (pp. 145-172). Switzerland: Springer.

NAKAJIMA, K. (1982-2015). *Fostering Mathematical Thinking. The Progress of Mathematics Education in Japan*. Tokyo: Toyokan.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. (1980). *An agenda for action: Recommandations for school mathematics of the 1980s.* Reston, VA: NCTM.

NUNOKAWA, K. (2015). Developments in research on mathematical problem solving in Japan. In B. Sriraman, J. Cai, K.-H. Lee, L. Fan, Y. Shimizu, C. S. Lim, & K. Subramaniam (Eds.), *The First Sourcebook on Asian Research in Mathematics Education: China, Korea, Singapore, Japan, Malaysia, and India* (pp. 1409-1436). Charlotte: Information Age Publishing Inc.

OBA, J. (2019). *L' organisation du système éducatif japonais 2018*. Institut de Recherche pour l'Enseignement Supérieur (RIHE). Hiroshima: Université d'Hiroshima. https://home.hiroshima-u.ac.jp/oba/index-f.html

OKUBO, K. (2007). How is in-service teacher training conducted in Japan? In M. Isoda, M. Stephens, Y. Ohara, & T. Miyakawa (Eds.), *Japanese lesson study in mathematics: its impact, diversity and potential for educational improvement* (pp. 16-21). Singapour: World Scientific.

POLYA, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical model*. Princeton: University Press Princeton.

ROBERT, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. . *RDM,* **27(3)**, 271–312.

ROBERT, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In P. Rabardel & P. Pastré (Eds.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (collection formation ed., pp. 59-68). Toulouse : Octarès.

ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies,* **2(4)**, 505–528.

RODITI, E. (2008). Des pratiques enseignantes à la fois contraintes et personnelles, et pourtant cohérentes. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 73-93). Toulouse : Octarès.

SCHOENFELD, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: FL Academic Press.

SHIMIZU, Y. (1999). Aspects of mathematical teacher education in Japan: Focusing on the teachers' roles. *Journal of Mathematics Teacher Education,* **2**, 107-116.

SHIMIZU, Y. (2002). *Sharing a new approach to teaching mathematics with the teachers from outside the school: the role of lesson study at "fuzoku" schools.* Paper presented at the The US-Japan Cross Cultural Seminar on the Professionalization of Teachers Through Lesson StudyPark City, Utah.

SHIMIZU, Y. (2006). How do you conclude today's lesson? The form and functions of ''Matome'' in mathematics lessons. In D. Clarke, J. Emanuelsson, E. Jablonka, & I. A. C. Mok (Eds.), *Making connections: Comparing mathematics classrooms around the world* (pp. 127–145). Rotterdam: Sense Publishers.

SHIMIZU, Y. (2009). Japanese approach to teaching mathematics via problem solving. In B. Kaur, Y. B. Har, & M. Kapur (Eds.), *Mathematical problem solving: Yearbook 2009, Association of Mathematics Educators* (pp. 89-101). Toh Tuck, Singapore: World Scientific Publishing.

SHIMIZU, Y. (2015). Cross-cultural studies of mathematics classroom practices. In B. Sriraman, J. Cai, K.-H. Lee, L. Fan, Y. Shimizu, C. S. Lim, & K. Subramaniam (Eds.), *The First Sourcebook on Asian Research in Mathematics Education: China, Korea, Singapore, Japan, Malaysia, and India* (pp. 1475-1490). Charlotte: Information Age Publishing Inc.

SILVER, E. A. (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. Hillsdale: NJ: Erlbaum.

STEPHENS, M. & ISODA, M. (2007). Introduction: to the English Translation. In M. Isoda, M. Stephens, Y. Ohara, & T. Miyakawa (Eds.), *Japanese lesson study in mathematics: its impact, diversity and potential for educational improvement* (pp. XV-XXIV). Singapour: World Scientific.

STIGLER, J.-W. & HIEBERT, J. (1999). *The teaching gap: best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom* (1st Free Press trade pbk. ed.). New York, United States: Free Press.

TAKAHASHI, A. (2006). Characteristics of Japanese Mathematics Lessons. *Tsubuka Journal of Educational Study in Mathematics,* **25**, 37-44. www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2006/Tsukuba_Journal_25.pdf

TAKAHASHI, A. (2008). Beyond Show and Tell: Neriage for Teaching through Problem-Solving - Ideas from Japanese Problem-Solving Approaches for Teaching Mathematics. In M. Santos-Trigo & Y. Shimizu (Eds.), *ICME 11, Topic Study Group 19: Research and Development in Problem Solving in Mathematics Education* (pp. 145-157). Monterrey, Mexico: ICME11.

TAKAHASHI, A. (2015). Systematic support of life-long professional development for teachers through lesson study. In B. Sriraman, J. Cai, K.-H. Lee, L. Fan, Y. Shimizu, C. S. Lim, & K. Subramaniam (Eds.), *The First Sourcebook on Asian Research in Mathematics Education: China, Korea, Singapore, Japan, Malaysia, and India* (pp. 1491-1503). Charlotte: Information Age Publishing Inc.

WATANABE, T., TAKAHASHI, A. & YOSHIDA, M. (2008). Kyozaikenkyu: A critical step for conducting effective lesson study and beyond. In F. Arbaugh & P. M. Taylor (Eds.), *Inquiry into Mathematics Teacher Education* (pp. 131-142). San Diego: Association of Mathematics Teacher Educators.

YOSHIDA, M. (2005). Using Lesson Study to Develop Effective Blackboard Practices. In P. Wang-Iverson & M. Yoshida (Eds.), *Buiding Our Understanding of Lesson Study* (pp. 93-100). Philadelphia, United States: Research for Better Schools.

VALÉRIE BATTEAU

UER MS, 3LS, Haute Ecole Pédagogique du Canton de Vaud, Suisse

valerie.batteau@hepl.ch

TAKESHI MIYAKAWA

Waseda University, Tokyo

tmiyakawa@waseda.jp

Annexe 1 : Quelques informations sur le système éducatif et le guide du programme officiel japonais

A. Système scolaire japonais

Âge	Degré	Établissement
3 à 6 ans		École maternelle (non obligatoire)
6 – 7 ans	1	École primaire (obligatoire)
7 – 8 ans	2	
8 – 9 ans	3	
9 – 10 ans	4	
10 – 11 ans	5	
11 – 12 ans	6	
12 à 15 ans	1 à 3	Collège/enseignement secondaire (obligatoire)
15 à 18 ans	1 à 3	Lycée/enseignement secondaire (non obligatoire)

B. Comparaison de la durée annuelle d'enseignement des mathématiques au Japon, en Suisse (Canton de Vaud) et en France au degré 3

- 175 unités horaires de 45 minutes au Japon (Oba, 2019, p. 27)
- 190 périodes[22] de 45 minutes dans le Canton de Vaud en Suisse
- 180 heures[23] en France (ce qui correspond à 240 périodes de 45 minutes)

C. Manuels scolaires au Japon

Dans les écoles primaires, il existe six manuels scolaires obligatoires (Tokyo-Shoseki, Keirinkan, Gakko-Tosho, etc.) approuvés par le ministère de l'Éducation, de la Culture, des Sports, de la Science et de la Technologie (MEXT), publiés par des entreprises privées (Miyakawa, 2007). Le choix du manuel se fait au niveau de la ville ou de la préfecture, les enseignants n'ont donc pas le choix du manuel.

D. Mutation des enseignants

En général, les enseignants japonais d'école primaire ont l'obligation de changer d'établissement tous les quatre à cinq ans.

E. Fréquence de la pratique des *lesson study* au Japon

Les *lesson study* sont une pratique ordinaire dans les écoles primaires et très répandue, en tant que dispositif de formation continue à l'intérieur de l'établissement scolaire. D'après une étude réalisée en 2010 par l'Institut national de Recherche en Politiques Educatives, rattaché au MEXT, environ trois quarts des écoles primaires stipulent que tous les enseignants s'impliquent dans les études de leçon [*lesson*

---

[22] Il y a 5 périodes par semaine d'enseignement des mathématiques pendant 38 semaines par année au degré 3 (élèves de 8/9 ans). Consulté à vd.ch/themes/formation/scolarite-obligatoire/deroulement-de-lecole-obligatoire-dans-le-canton-de-vaud/grilles-horaires et https://www.irdp.ch/institut/temps-enseignement-officiel-obligatoire-eleves-2739.html

[23] Consulté à https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletinofficiel.html?cid_bo=95203

study]. Les deux tiers des écoles primaires organisent des études de leçon au moins six fois (43 % de 6 à 10 fois, 12 % de 11 à 15 fois, etc.) par an (Oba, 2019, p. 38).

F. Formation des enseignants du primaire au Japon

Il existe trois certificats d'enseignement (classe supérieure, première et seconde classe) qui correspondent au niveau maitrise (second cycle universitaire, avant le doctorat), du baccalauréat (premier cycle universitaire), au niveau « licence junior » (2 années dans une université à cycle court - équivalent de l'IUT dans le système français). Il est intéressant de noter que depuis 2009, ces certificats ne sont valables que 10 années et que les enseignants ont l'obligation de suivre 30 heures de formation au minimum lors des deux dernières années pour prolonger la validité de leur certificat de 10 ans (Oba, 2019). La formation continue officielle est organisée à l'intérieur de l'établissement scolaire ainsi qu'au centre préfectoral de l'éducation.

G. Extrait du guide du programme sur les grandeurs et mesures - degrés 1 à 6

"The main objectives of the domain are to gain understanding about units and measurements of various quantities which have close ties with students' daily life, to develop the skills to measure, and to foster a rich sense of quantities. Quantities taught in mathematics include length, area, volume, time, weight, angle, and speed. Units and measurements appropriate for each quantity are taught. Students are taught to become aware of usefulness of expressing size by using units, and they should become able to choose a unit purposefully." (Isoda, 2010, p. 67)

	Units of quantities	Comparison/ Measurements/ etc.
1		Direct comparisons in length, area, and volume Clock reading
2	Units of lengths (mm, cm, m) Units of volume (ml, dl, l) Units of time (day, hour, minute)	Measurements of length and volume
3	Units of lenghts (km) Units of weight (g, kg) [t] Units of time (second)	Measurements of length and weight Measuring by choosing appropriate units Calculation of clock time and elapsed time
4	Units of area (cm^2, m^2, km^2) [a, ha] Units of angle (°)	Determining area (squares, rectangles) Measurements of angles
5	Units of volume (cm^3, m^3)	Determining area (triangles, parallelograms, trapezoids, rhombuses) Determining volume (cubes, rectangular parallelepipeds) Mean of measurements Determining per-unit quantities
6		Approximating shapes and approximate area Determining area (circles) Determining volume (prisms, cylinders) Determining speed The system of the Metric units

Annexe 2 : Description des activités proposées aux élèves pendant les cinq premières leçons de la séquence

Leçon	Dispositif de travail, durée	Activité proposée aux élèves
1	Collectif *6:07* Individuel *1:43* Collectif *13:27* Groupe *9:07*	Créer collaborativement le problème principal (*hatsumon*) : quelle est la longueur du couloir du 2^{e} étage ? Ce problème principal se décline en deux sous-questions : trouver une estimation de la mesure de la longueur du couloir (*mitōshi*) et trouver une procédure pour mesurer la longueur du couloir avec le choix d'un instrument de mesure (*jiriki-kaiketsu)* Présenter et comparer les estimations et les procédures de mesurage *(neriage)* Planifier en groupe une procédure de mesurage que les élèves mettront en œuvre lors de la leçon suivante *(group gakushu)*
2	Groupe – *1:00:00*	Mesurer la longueur du couloir avec l'instrument choisi et avec la procédure de mesurage planifiée (*jiriki-kaiketsu)*
3	Collectif *1:05:00*	Donner la mesure de la longueur du couloir trouvée lors de la leçon 2 Valider la mesure effectuée avec une roue de mesure numérique (odomètre), mise en œuvre par un élève et observée par la classe (21:00). Cette mesure de haute précision est considérée par l'enseignant et les élèves comme la réponse exacte Discuter des différents résultats et procédures (*neriage*, 44:00)
4	Collectif 43:00 Groupe 57:00	Institutionnaliser que la mesure de la longueur totale du couloir est égale à la mesure de la longueur de l'unité choisie multipliée par le nombre d'unités (*matome)* Les élèves doivent alors écrire l'expression mathématique correspondant à leur procédure personnelle, suivie d'une discussion collective (*neriage)* Mesurer la longueur du couloir *(group gakushu)*
Début 5	Collectif 35:00	Discuter des différents résultats et procédures (*neriage*)

BLANDINE MASSELIN

DYNAMIQUE DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE EN CLASSE ENTRE UN ENSEIGNANT ET DES GROUPES D'ÉLÈVES SUR LA SIMULATION EN PROBABILITÉS : UNE ÉTUDE DE CAS

Abstract. **Dynamics of mathematical work in class between a teacher and groups of students on simulations in probability: a case study.** The purpose of this contribution is to characterize the work of a teacher on simulations in probability in grade 9 course in France (14-15 year-old students). In a case study, we report in particular on what is at stake in the solving of a probability task with simulations when the teacher decides to organize small group work. Methodological tools, such as the chronogram, related to the specificity of this type of work in class are defined in the article. We have used the theory of Mathematical Work Spaces (MWS) and concepts such as potential suitable MWS and actual suitable MWS have been defined to conduct our study. The analysis of the teacher's interventions in the classroom revealed a standardization of the probabilistic model produced by the teacher during the simulation. The role of the teacher and the choice of the digital artefact transformed the students' work. We matched blockages, rebounds or identified containments in the actual MWS with the potential MWS. Our research has clarified first cognitive task routes in probability on The Hare and the Tortoise game.

Résumé. Le propos de cette contribution est de caractériser le travail d'une enseignante sur la simulation en probabilités au niveau troisième en France (élèves de 14-15 ans). A partir d'une étude de cas, nous rendons compte en particulier de ce qui se joue lors de la résolution d'une tâche de probabilités, en particulier sur la simulation, quand une enseignante décide de faire travailler ses élèves en petits groupes. Des outils méthodologiques, comme le chronogramme, reliés à la spécificité de cette modalité de travail en classe sont précisés dans l'article. Nous avons utilisé la théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM) et des concepts comme l'ETM idoine potentiel et l'ETM idoine effectif ont été définis pour mener notre étude. L'analyse des interactions entre l'enseignante et les groupes d'élèves dans la classe a mis en évidence une uniformisation du modèle probabiliste produite par l'enseignante lors de la simulation. Le rôle de l'enseignante dans l'apparition de blocages, ou dans la façon de les prendre en compte a transformé le travail des élèves. Nous avons mis en relation ces blocages, rebonds ou confinements repérés dans l'ETM idoine effectif avec l'ETM potentiel. Notre recherche a précisé de premiers itinéraires cognitifs de tâche en probabilités sur le jeu du lièvre et de la tortue.

Mots-clés. Probabilités, simulation, espaces de travail mathématique, itinéraire cognitif, blocage, rebond, confinement.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 25, p. 49 – 88.

Introduction

Des recherches existantes s'intéressent au travail de l'enseignant comme dans la théorie de l'action conjointe développée par Sensevy (Sensevy (2007), Sensevy, Mercier & Schubauer-Leoni (2000)) où l'action didactique est précisée dans différentes formes au sein de situations, avec une approche anthropologique de la didactique. Si notre étude porte également sur le travail de l'enseignant, nous adoptons un autre point de vue en considérant le développement du travail des élèves lors de la résolution d'une tâche. Plus spécifiquement, nous nous intéressons à l'orientation du travail mathématique des élèves sous l'effet d'interventions de l'enseignant quand il décide de faire travailler ses élèves en petits groupes de trois ou quatre. Nous avons pour cet article choisi de nous centrer sur une tâche de probabilités.

En France, que ce soit au collège ou au lycée, les programmes actuels préconisent d'effectuer des simulations d'expériences aléatoires, reliant ainsi probabilités et statistique par l'incitation à une approche fréquentiste des probabilités. En effet, les programmes actuellement en vigueur du collège (MENESR, 2015) précisent la nécessité de :

> Faire le lien entre fréquence et probabilité, en constatant matériellement le phénomène de stabilisation des fréquences ou en utilisant un tableur pour simuler une expérience aléatoire (à une ou deux épreuves). (p. 373)

Pour la classe de seconde, le programme de 2019 (MENJ, 2019) s'inscrit dans la continuité du collège où l'usage de la simulation est mentionné ainsi dans les capacités attendues :

> Observer la loi des grands nombres à l'aide d'une simulation sur Python ou tableur. (p.14)

Parce que la simulation nous paraît pouvoir permettre une dialectique entre les probabilités et la statistique, nous souhaitons interroger dans cet article comment les liens entre ces domaines vivent dans une classe avec, en arrière plan, l'élaboration d'une formation continue en probabilités.

Notre problématique s'organise à partir des conditions curriculaires précédemment évoquées qui justifient notre intérêt pour l'étude de situations de classe où des tâches de probabilités sont résolues en s'appuyant sur des simulations, et en mettant les élèves en situation de recherche. Plus précisément, nous nous interrogeons sur le travail mathématique qui peut se développer en classe sur de telles situations. Si d'autres chercheurs se sont intéressés à la simulation en probabilités (Gaydier, 2011 ; Kiet, 2015 ; Parzysz, 2014 ; ou encore Laval, 2018), notre étude porte plus spécifiquement sur la façon dont le travail mathématique impliquant de la simulation est influencé par les interactions entre élèves et enseignant, dans un contexte de travail en petits groupes en classe (qui est le plus souvent privilégié lorsque l'on veut mettre les élèves en situation de recherche).

Pour cela, nous allons nous appuyer sur une tâche précise, le jeu du lièvre et de la tortue, que nous avons étudié de façon approfondie dans notre thèse (Masselin, 2019), et nous allons nous centrer sur l'analyse d'une classe particulière, celle animée par l'enseignante Lucie. Cette dernière a choisi de faire travailler ses élèves de troisième sur cette tâche, en petits groupes et en utilisant des simulations.

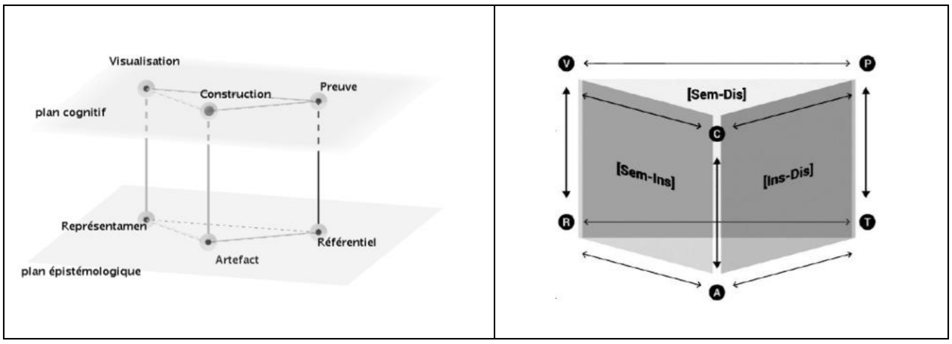
Pour répondre à notre problématique sur le travail mathématique et comme nous l'avons réalisé dans notre thèse sur la trajectoire d'un avatar (Masselin, 2018) inspirée de la trajectoire d'un problème (Kuzniak, Parzysz &Vivier, 2013), nous allons adopter le cadre théorique des Espaces de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011 ; Kuzniak, Tanguay et Elia, 2016), noté ETM. Nous ciblerons en particulier l'étude des moments critiques du déroulement du travail mathématique (ce qui nous amènera à introduire les concepts de blocage, de rebond et de confinement dans l'ETM) et celle du rôle des interactions entre enseignante et élèves dans l'apparition et le devenir de ces moments critiques. Ainsi, nous préciserons nos questions de recherche sur la gestion par l'enseignante du travail mathématique développé par divers groupes d'élèves lors d'une séance de classe sur la tâche de probabilités considérée. Nous présenterons une analyse épistémologique de la tâche complétée par une analyse, côté chercheur, de sa ou ses possibles mises en œuvre. Nous décrirons la dynamique de circulation du travail dans l'ETM à travers ce que nous appellerons des itinéraires cognitifs de tâche afin de préciser l'ETM idoine attendu. L'examen du travail de préparation de la séance (ETM idoine potentiel) permettra également de mieux comprendre la gestion de la séance de classe par l'enseignante. Les données sont issues de notre recherche doctorale (Masselin, 2019) qui porte sur le travail de plusieurs enseignants sur la tâche du jeu du lièvre et de la tortue. Notre méthodologie de recherche intègrera des outils spécifiques en lien avec l'organisation du travail en groupe des élèves, tels que le chronogramme. Il permettra d'analyser l'agencement des interactions entre l'enseignante et les élèves au fil de la séance et aidera à préciser les itinéraires cognitifs effectivement empruntés dans la classe de l'enseignante.

1. Cadrage théorique

1.1. La théorie des Espaces de Travail Mathématique et son modèle

Nous souhaitons décrire et repérer la nature et la spécificité du travail mathématique quand des enseignants et des élèves sont effectivement engagés dans une tâche**.** Afin d'analyser la forme du travail mathématique, nous inscrivons notre travail dans la théorie des Espaces de Travail Mathématique développée par Kuzniak (Kuzniak (2011) ; Kuzniak & Richard (2014) ; Kuzniak, Tanguay & Elia, (2016)). La théorie comporte un modèle de l'Espace de Travail Mathématique (noté ETM) qui est représenté par un diagramme articulant deux plans (Kuzniak, 2011). Le plan épistémologique concerne les contenus mathématiques tandis que le plan cognitif est en lien avec l'usage ou la génération de connaissances.

Le plan épistémologique contient trois composantes : un ensemble de signes (le representamen) ; un ensemble d'outils et d'instruments technologiques (artefact), et un ensemble de définitions, propriétés ou théorèmes (le référentiel théorique).
Les arêtes verticales du diagramme (figure 1) qui relient les plans épistémologique et cognitif définissent la dimension sémiotique (reliant representamen et visualisation), la dimension instrumentale (reliant artefact et construction) et la dimension discursive (lien entre référentiel et preuve).



Figures 1 et 1bis. Diagramme de l'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak, 2011) et ses trois plans verticaux (Kuzniak & Richard, 2014)

Le diagramme de l'ETM (figure 1) permet une étude de l'articulation des aspects épistémologiques et cognitifs du travail mathématique. Il permet de repérer une dynamique des rôles partagés entre élèves et enseignants sur une tâche. Les plans verticaux définis par Kuzniak et Richard (2014) (figure 1bis), aideront à décrire la circulation des savoirs. Il s'agit des plans sémiotico-instrumental, noté [Sem-Ins], sémiotico-discursif, [Sem-Dis], et instrumental-discursif, [Ins-Dis]. Nous repérerons les plans (ou dimensions) verticaux activés lors de la résolution d'une tâche mathématique par les élèves et ceux encouragés par les enseignants. Nous recherchons aussi à comprendre les raisons de ces activations ou au contraire du fait que certaines genèses ne sont pas mobilisées.

1.2. Trois types d'ETM

Pour étudier le travail mathématique dans toute sa complexité, Kuzniak, Tanguay et Elia (2016) distinguent trois types d'ETM : l'ETM de référence, l'ETM idoine et l'ETM personnel. Vivier (2020) précise que pour rendre compte du travail mathématique dans une institution, il est nécessaire de considérer les trois niveaux :

> Le niveau des différentes institutions qui se préoccupent de l'enseignement des mathématiques (ETM de référence) ;
>
> Le niveau de la classe avec le travail proposé par un enseignant et mis en œuvre avec ses élèves (ETM idoine) ;
>
> Le niveau du sujet (ETM personnel) où l'on cherche à caractériser le travail mathématique d'un individu. (Ibid, p. 59)

Un ETM idoine permet de préciser comment le savoir est enseigné dans une institution avec ses propres visées. Il dépend de l'élève, de l'enseignant et de la mise en œuvre de la situation étudiée. À la suite de la mise en place d'un ETM idoine par un enseignant, les élèves construisent petit à petit des ETM personnels, incorporant des connaissances. Notre étude porte à la fois sur la préparation des séances et sur leur mise en œuvre effective, ce qui nous conduit à distinguer deux types d'ETM idoines : l'ETM idoine potentiel et l'ETM idoine effectif.

1.2.1 L'ETM idoine potentiel

Le travail mathématique proposé par un enseignant, lorsqu'il donne une tâche à ses élèves, est influencé par l'ETM de référence, mais aussi par son ETM personnel qui sera prégnant dans la conception et la mise en œuvre d'un ETM idoine pour sa classe. Pour déceler des éléments de l'influence de l'ETM personnel de l'enseignant, nous considérerons l'ETM idoine potentiel qui est l'ETM dans lequel un enseignant se projette et qu'il élabore en amont de la mise en place d'une tâche dans une classe.

1.2.2 L'ETM idoine effectif

Afin de cerner le travail mathématique développé autour d'une tâche, nous étudierons l'ETM idoine observé lors de la mise en œuvre effective dans la classe de l'enseignant. Cet ETM idoine effectif (au sens de Derouet, 2019) sera comparé à l'ETM idoine potentiel en étudiant les choix initiaux et les choix réellement opérés lors de la mise en œuvre en classe. Les écarts éventuels qui pourront apparaître nous livreront des éléments de réponse à nos questions de recherche.

1.3. Blocages, confinements et rebonds

Pour analyser le travail de l'enseignant à travers ses ETM idoine potentiel et ETM idoine effectif, nous prendrons appui sur les interactions en classe entre l'enseignant et ses élèves soumis à la résolution du « jeu du lièvre et de la tortue ». Afin de préciser la dynamique de la circulation du travail dans l'ETM et parce que nous nous intéressons aux moments critiques dans le déroulement du travail, nous définissons les concepts de blocage, de rebond et de confinement dans l'ETM. Un blocage dans l'ETM est la manifestation d'un arrêt de la circulation du travail mathématique sur une tâche par l'élève qui est empêché de le poursuivre. Un rebond est le développement nouveau du travail d'un individu ou d'un collectif après un arrêt momentané. En cela il permet d'éviter que l'arrêt ne se transforme en blocage. Un confinement dans l'ETM est la manifestation d'une restriction du travail de l'élève dans un plan, sur une unique dimension ou encore sur un modèle donné.

1.4. Ajout de cadrage sur la simulation pour notre étude

La proximité entre simulation et modèle sera un axe retenu dans notre analyse du travail développé en classe lors des interactions entre l'enseignante et ses groupes d'élèves. En effet, selon Parzysz (2009), simuler suppose de se référer à un modèle probabiliste, concept uniquement accessible en classe de première grâce au « schéma d'expérience » :

> Simuler c'est prendre conscience des points communs entre des expériences diverses, de l'existence d'un modèle d'expérience associée. (Ibid., p. 91)

Il est donc important d'associer simulation et modèle. Mais ce lien n'est pas simple comme le précise Parzysz (2009) qui considère que le tableur peut aider à mettre sur la voie de la modélisation.

1.5. Précision de nos questions de recherche

L'étude de la structuration de l'ETM idoine autour d'une tâche de probabilités (le jeu du lièvre et de la tortue) nécessite l'analyse de la dynamique du travail dans l'ETM idoine effectif mis en œuvre par l'enseignante Lucie. Elle sera effectuée sous la focale des moments critiques matérialisés par des interactions entre Lucie et ses groupes d'élèves. Nous repérerons des blocages, confinements ou encore des rebonds au fil de la résolution de la tâche et en rechercherons la ou les causes éventuelles dans l'ETM idoine potentiel.

Nos deux questions de recherche sont les suivantes :

– Dans son organisation effective de l'ETM idoine, comment l'enseignante Lucie gère-t-elle des moments critiques du déroulement de séance comme des blocages, confinements et rebonds ?

– Quelle est l'influence de l'enseignante sur l'évolution de l'ETM idoine effectif ?

2. Analyse de la tâche

2.1. Présentation et premiers éléments d'analyse de la tâche

Voici l'énoncé (figure 2) de la tâche donnée par Lucie pour sa classe de troisième :

Une course du lièvre et de la tortue s'effectue avec un dé à 6 faces sur un parcours à six cases.

					Arrivée

Cette course se déroule de la manière suivante.

- *A chaque manche de la course, on lance le dé :*
    - *Si le dé tombe sur 6, le lièvre atteint directement l'arrivée*
    - *Sinon, la tortue avance d'une case*
- *Le premier à atteindre la case « Arrivée » gagne.*
- *On réalise autant de manches que nécessaire pour avoir un gagnant.*

Qui du lièvre ou de la tortue a le plus de chance de gagner cette course ?

Figure 2. L'énoncé de Lucie du jeu du lièvre et de la tortue (Masselin, 2019)

Dans son énoncé des règles du jeu, l'enseignante inclut un dé précisé équilibré à six faces. Le parcours représenté indique un total de six cases sans situer le départ, ce qui permet d'envisager deux modélisations du parcours illustrées en figure 3.

Cas 1 : Cinq lancers de dés sans obtenir « 6 » sont nécessaires pour que la tortue gagne.

Départ					*Arrivée*

Cas 2 : Six lancers de dés sans obtenir « 6 » sont nécessaires pour que la tortue gagne.

Départ						*Arrivée*

Figure 3. Exemples de parcours modélisés à six cases (Masselin, 2019)

Les probabilités varient selon le nombre de cases intermédiaires[1] du parcours.

Nombre de cases intermédiaires	Valeur exacte de P(T)[2]	Valeur approchée de P(T)	Valeur exacte de P(L)	Valeur approchée de P(L)
4 (Cas 1)	$\frac{3125}{7776}$	0,402	$\frac{4651}{7776}$	0,598
5 (Cas 2)	$\frac{15625}{46656}$	0,335	$\frac{31031}{46656}$	0,665

Tableau 1. Probabilités selon le nombre de cases intermédiaires du parcours.

---

[1] Une case intermédiaire est une case située entre le départ et l'arrivée (exclus).

[2] P(T) et P(L) désignent respectivement la probabilité que la tortue gagne et la probabilité que le lièvre gagne.

La question posée est ouverte et porte sur la comparaison des probabilités de gain des deux animaux. Ce choix d'énoncé de Lucie s'explique par le contexte de travaux dans lesquels il s'inscrit. Préciser d'autres choix possibles à propos de la tâche permettra ensuite de mesurer les impacts des choix de Lucie sur le travail mathématique.

2.2. Eléments épistémologiques d'analyse *a priori* via les ETM

2.2.1 Présentation de la grille d'analyse

La théorie des Espaces de Travail Mathématiques (Kuzniak, 2011, Kuzniak, Tanguay & Elia, 2016) nous permet de réaliser une analyse épistémologique basée sur l'énoncé présenté en figure 3 selon une grille spécifique (annexe 1). Cette grille s'appuie sur quatre axes dont trois sont portés par les dimensions (sémiotique, instrumentale et discursive) du modèle des ETM (figure 1). La tâche considérée est intégrée dans la thèse de Masselin (2019) ; elle a nécessité une analyse épistémologique approfondie en suivant quatre axes afin de comparer des choix de plusieurs enseignants dans leur classe. Par la suite, nous livrons des éléments de cette analyse afin d'éclairer les choix opérés par l'enseignante Lucie au regard des possibles.

2.2.2 L'analyse a priori des solutions

Plusieurs modélisations du parcours sont possibles à partir de l'énoncé. Le nombre de cases intermédiaires influe sur les valeurs des probabilités de gain des deux animaux qui sont plus ou moins proches. Les solutions varient selon le nombre de cases du parcours (annexe 2). Le positionnement des « départ » et « arrivée » modifie les valeurs des probabilités de gain des animaux. Les solutions dépendent aussi de la probabilité que le lièvre gagne au énième lancer (selon le type de dé, ou selon les règles du jeu).

Lucie mentionne un « dé équilibré à 6 faces », ce qui implicitement considère le modèle de la loi uniforme avec équiprobabilité[3] sur chaque face. Elle aurait pu choisir un dé avec moins de faces ou avec des faces non équiprobables en donnant par exemple la probabilité d'obtenir la face i (i variant de 1 à 6), égale à $\frac{i}{21}$. L'enseignante aurait pu également faire inventer une règle du jeu par ses élèves ou en proposer une variante[4].

---

[3] En particulier P(S) = $\frac{1}{6}$ si S désigne l'événement « Obtenir 6 ».

[4] Un exemple de variante : « *On lance un dé équilibré à six faces. Si un multiple de 3 sort, alors le lièvre gagne, sinon la tortue avance de deux cases*.»

2.2.3 L'analyse a priori relative à la modélisation

La modélisation renvoie à l'émission d'hypothèses. Deux modèles sont possibles pour la simulation numérique. Dans l'énoncé de Lucie, une course est une partie du jeu qui s'arrête dès qu'un animal gagne. La loi géométrique tronquée est un premier modèle où l'expérience aléatoire consiste à répéter dans des conditions identiques une épreuve de Bernoulli de paramètre $1/6$, avec au maximum six répétitions. Le jeu s'arrête au premier six obtenu car le lièvre a alors gagné ; si le nombre maximum de répétitions est atteint (six), c'est la tortue qui gagne.

Un deuxième modèle peut être considéré. L'expérience aléatoire consiste alors à répéter autant de fois que de cases du jeu (six) des lancers de dé successifs, sans tenir compte du fait qu'un six soit apparu auparavant. Ainsi, même si le lièvre a gagné, les lancers de dé se poursuivent. Une épreuve de Bernoulli qui consiste à lancer six fois un dé de façon identique et indépendante intervient alors. Soit Y la variable aléatoire dénombrant le nombre de 6 obtenu en lançant six fois un dé, Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 1/6$. La probabilité que le lièvre gagne est $P(Y \geq 1)$.

2.2.4 L'analyse a priori en termes de registres

Cette analyse tient compte du nombre de cases du parcours et des accès possibles des élèves de troisième aux modèles probabilistes par différents registres familiers. Les arbres ou tableaux sont inexploitables pour des parcours à plus de deux cases intermédiaires. Cette analyse n'est pas détaillée, car nous la jugeons secondaire pour la focale d'analyse choisie dans cet article .

2.2.5 L'analyse a priori en termes d'artefacts

Dans notre étude de cas, Lucie s'est focalisée sur le tableur où le choix du modèle de la loi géométrique tronquée nécessite de réaliser des lancers conditionnés à l'obtention d'un six avec des tests SI (figure 4).

1er choix de modèle (loi géométrique tronquée)

A	B	C	D	E	F	G	H	I
course	1er lancer	2e éventuel	3e éventuel	4e éventuel	5e éventuel	6e éventuel	gagnant	fréquence L
1	4	1	6				lièvre	1
2	3	5	6				lièvre	1
3	1	3	4	2	1	6	lièvre	1

C3 contient le test conditionnel =SI(B3<6 ; ALEA.ENTRE.BORNES(1 ; 6) ; " ")

Figure 4. Simulation tableur avec la loi géométrique tronquée

L'emploi de la loi binomiale avec six lancers systématiques pour une course nécessite six fois la saisie de la commande « =ALEA.ENTRE.BORNES(1 ; 6) » et un décompte des six obtenus (avec « =NB.SI() »), puis un test SI pour dénombrer si au moins un six est sorti lors des six lancers) comme indiqué en figure 5.

2^e^ choix de modèle (loi binomiale)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Lancer	Lancer 1	Lancer 2	Lancer 3	Lancer 4	Lancer 5	Lancer 6	Nombre de 6	Gagnant	Fréquence lièvre
Course 1	4	1	5	2	5	2	0	tortue	0,733333333
Course 2	6	2	2	3	6	2	2	lièvre	
Course 3	5	5	2	2	5	2	0	tortue	

H2 contient =NB.SI(B2 :G2 ;6) et I2 contient =SI(H2>=1 ; "lièvre" ; "tortue")

Figure 5. Simulation tableur, avec la loi binomiale

La simulation au plus près des règles du jeu de l'énoncé de Lucie (figure 5) est complexe à implémenter dans le tableur ; le recours à la loi binomiale facilite la simulation, mais au détriment de la proximité.

2.3. Analyse des itinéraires cognitifs de la tâche précisant l'ETM attendu

2.3.1 Vers une définition

Nous intéressant aux interactions entre l'enseignant et ses élèves et au développement du travail en classe, nous avons jugé notre grille d'analyse insuffisante. En effet, elle ne nous renseigne pas sur des moments critiques tels que des blocages ou confinements dans la dynamique du travail mathématique en classe. Afin de tenir compte des aspects cognitifs de la tâche, nous avons décrit un ETM idoine caractérisant ce qui pourrait être attendu de façon optimale, sans pour autant représenter un idéal. Il permet de repérer les potentialités d'adaptations par rapport à une tâche initialement proposée aux enseignants. Nous avons réalisé, une analyse *a priori* d'un ETM idoine attendu par la personne chercheure, avec lequel nous allons pouvoir étudier l'ETM idoine de Lucie. Cet ETM idoine attendu est un ETM pour la recherche. Il comporte différentes phases relatives à l'ETM de référence de la classe considérée. Trois grandes phases d'exploration, de simulation et de preuve (et leurs sous-phases) permettent de décrire l'ETM attendu. L'itinéraire cognitif d'une tâche est une succession de phases de l'ETM attendu visant à résoudre la tâche.

2.3.2 Description de l'ETM attendu

Phases d'Exploration (Expl.)

Il s'agit d'une phase de dévolution et de compréhension d'une expérience aléatoire autour du problème du jeu du lièvre et de la tortue à partir d'un énoncé fixé par l'enseignant et donné à ses élèves. Cette phase peut être décomposée en trois sous-phases suivantes :

Expl.1 : découverte du problème (SansDé, DéMan)

Elle pourrait être envisagée avec un dé à jouer ou un dé numérique prêté aux élèves pour faire des expériences aléatoires. Le dé à jouer est soumis aux lois de la physique, tandis qu'un dé numérique réfère à un modèle attribué « au lancer de dé ». Lors de cette phase d’action, l'enseignant repérerait peut-être des interprétations erronées des règles du jeu (blocage éventuel) en se situant dans le plan [Sem-Ins], l'élève produisant des signes lors des divers lancers. Les élèves pourraient convoquer des registres sémiotiques tels que des arbres (sans usage de dé). Le travail situé alors dans le plan [Sem-Dis] pourrait être purement descriptif chez l'élève quand l'enseignant apporterait possiblement des éléments du référentiel théorique (expérience aléatoire, événements considérés) situant son intervention sur la dimension discursive.

Expl.2 : Mise au point sur la compréhension des règles du jeu

Cette phase aurait comme objectif pour l'élève de comprendre les règles du jeu, en cas de blocage lié à une mauvaise interprétation ou non-compréhension de ces règles. Une circulation du travail possible est décrite en figure 6.

Après une interprétation erronée des règles du jeu, un élève pourrait verbaliser celles-ci, produisant alors des signes dans le plan [Sem-Dis] (vignette 1, figure 6). L’enseignant pourrait alors introduire un dé à jouer et activer la dimension instrumentale (vignette 2, figure 6) pour faire réaliser manuellement des courses. L’élève travaillerait ensuite dans le plan [Sem-Ins] (vignette 3, figure 6). Avec les signes produits par faces obtenues, il pourrait rectifier son interprétation des règles et identifier le gagnant des courses jouées manuellement. L’enseignant pourrait ainsi lever un blocage potentiel.

La dynamique se résume dans l’ETM attendu par : [Sem-Dis]→**dim Ins**→[Sem-Ins]. Le fléchage indique la succession de plans et dimensions qui pourraient être activés (en gras ceux par l’enseignant, en maigre, ceux par l’élève).

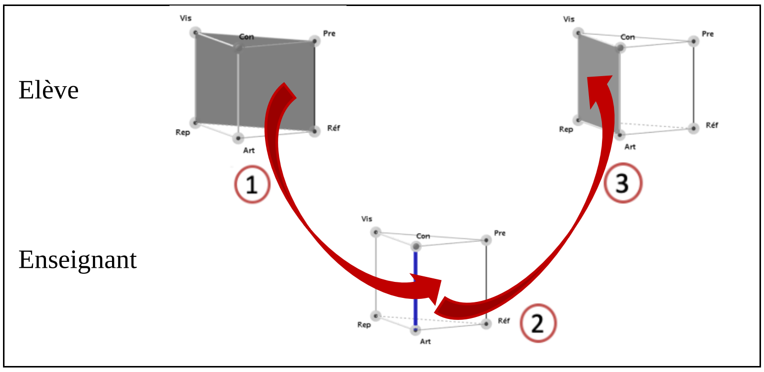


Figure 6. Dynamique de circulation, Expl.2, ETM attendu

Expl.3 : Explicitation des expériences aléatoires (Expl.)

La réalisation de lancers ne garantit pas le repérage des expériences aléatoires en jeu. Identifier une course est nécessaire pour résoudre la tâche et cette identification prend appui sur le référentiel théorique. Plusieurs événements peuvent être considérés après un lancer de dé (ceux élémentaires ou les événements « la tortue avance d'une case » et « le lièvre gagne »). Cette phase participe de la dévolution. Il s'agira de ne pas confondre l'événement contraire de « Obtenir 6 » avec « La tortue gagne ». L'enseignant peut ici jouer sur le nombre de cases du parcours pour donner accès à cette identification de l'événement contraire de « Ne pas obtenir 6 ».

Phases de Simulation (Sim.)

Elle se découpe en trois sous-phases décrites succinctement.

Sim.1 : Justification de l'introduction de la Sim

Elle pourrait s'appuyer sur un recueil d'échantillons de petite taille où élèves et enseignant travaillent dans deux plans distincts (respectivement [Ins-Dis] et [Sem-Dis]). L'élève émettrait une conjecture à partir des données d'un petit nombre de courses réalisées et il se confronterait aux résultats des autres élèves de la classe. Les différents résultats mobiliseraient la notion de fréquence pour les comparer. La simulation serait alors un outil au service de la résolution de la tâche activant la dimension instrumentale.

Sim.2 : Elaboration d'un outil de simulation

Cette phase pourrait se diviser en deux : la création d'un outil de simulation et son emploi. L'élaboration d'un outil de simulation renverrait un travail initial dans le plan [Sem-Ins], avec des lancers de dé numérique et la référence à un modèle.

Sim.3 : Traitement des données issues de la simulation

L'exploitation des données de simulation (signes produits en lien avec la dimension instrumentale), permettrait d'estimer les probabilités en jeu via l'obtention des fréquences calculées pour un grand nombre de courses. Du plan [Sem-Ins], le travail se déplacerait alors dans [Ins-Dis] en mobilisant la loi faible des grands nombres implicitement. L'organisation des données pourrait (ou non) être indiquée à l'élève en suggérant des registres de représentation sémiotique. Des allers et retours auraient ainsi lieu entre [Ins-Dis] et [Sem-Ins], avec un travail plus ou moins guidé par l'enseignant qui pourrait demander de relancer la simulation afin de faire visualiser une convergence des fréquences.

Phases de Preuve (Preuv.)

Nous signalons ici la nature des phases de preuve sans les détailler.

Preuv.1 : Preuve expérimentale

Elle correspondrait, pour l'élève, à l'emploi de la loi faible des grands nombres sous forme vulgarisée et à conclure grâce à un grand nombre de courses obtenues, en observant un phénomène de convergence grâce à un outil de simulation.

Preuv.2 : Preuve formelle

En mobilisant l'approche laplacienne[5], l'élève conduirait des calculs de probabilités en s'appuyant sur un outil sémiotique (tels un arbre ou un tableau). Il pourrait ici changer de point de vue en considérant l'événement « la tortue avance d'une case ».

Preuv.3 : Rapprochement des Preuv.1 et Preuv.2

L'enseignant pourrait (si ce n'est pas réalisé par l'élève) rapprocher les deux types de preuve obtenus s'ils émergent dans une même classe. Ce serait l'occasion d'un enrichissement du référentiel théorique et d'un rapprochement entre l'ETM des Probabilités et l'ETM de la Statistique descriptive tout en exposant les approches fréquentielle et laplacienne. Il s'agirait d'articuler les deux approches.

2.3.3 Dynamique de la circulation du travail dans l'ETM attendu

Nous avons défini l'ETM idoine attendu comme l'ensemble des phases qui pourraient se produire idéalement et où les rôles respectifs des enseignants/élèves dans la circulation du travail sont décrits. Cet ETM « idéal » permet de repérer des adaptations réalisées par les enseignants et constitue pour le chercheur un outil de référence. Les différentes phases identifiées en classe livrent dans leur agencement, ce que nous appelons des itinéraires cognitifs de tâche dans l'ETM.

L'ensemble des possibilités *a priori* de circulation du travail dans les différentes phases entourant la simulation (tableau 2) précise la dynamique du travail entre élèves et enseignant. Les plans de l'ETM figurant en gras seraient, idéalement, ceux qui pourraient être activés par l'enseignant tandis que les autres seraient relatifs au travail de l'élève. Le tableau 2 est donc un ensemble de possibilités *a priori* repéré par le chercheur qui complète notre analyse épistémologique d'un point de vue cognitif.

[5] Dans de nombreux écrits scientifiques rédigés en français et en anglais, cette approche probabiliste est nommée l'approche théorique.

	Exploration (Expl.)		
	Expl.1	Expl.2	Expl.3
Dé Manuel ou Dé Numérique	[Sem-Ins]→**[Sem-Ins]**	[Sem-Dis] → **Dim Ins** →[Sem-Ins]	[Sem-Ins]→**[Sem-Dis]**→[Sem-Dis]
Sans Dé	[Sem-Ins]→**[Sem-Dis]**		[Sem-Dis]→**[Sem-Dis]**→[Sem-Dis]

Simulation (Sim.)		
Sim.1	Sim.2	Sim.3
[Dis-Ins] → [**Sem – Dis**] →[Sem-Ins]	[Sem-Ins] → **Dim Sem, Ins, Dis** →[Sem-Ins]	[Sem-Ins] → **Dim Sem** →[Dis-Ins]

Preuve (Preuv.)		
Preuv.1	Preuv.2	Preuv.3
[Sem-Dis] → **Dim Dis**	[Sem-Ins] → **Dim Dis** →[Sem-Dis]	**[Sem-Dis]** → Dim Sem

Tableau 2. Circulation du travail dans l'$ETM_{attendu}$ (Masselin, 2019)

2.4. Étude du cas de l’enseignante Lucie

Lucie est une enseignante de mathématique experte[6] du secondaire (collège en France) qui a décidé de faire travailler ses élèves d’une classe de troisième (grade 9) durant deux heures non consécutives par groupes de trois ou quatre sur le jeu du lièvre et de la tortue (figure 2). Son objectif pour sa classe était de faire réinvestir la loi faible des grands nombres implicitement tout en faisant élaborer par petits groupes une simulation avec un tableur. Nous avons filmé l’enseignante ainsi que ses différents groupes d’élèves lors de sa mise en oeuvre du jeu du lièvre et de la tortue dans sa classe.

2.4.1 Quelques blocages potentiels liés à l’énoncé de Lucie

L’énoncé de Lucie nous fait envisager un certain nombre de blocages dont voici une liste non exhaustive.

– Le « départ » qui peut être considéré sur la première case, ou avant, ne fixe pas le nombre de cases que la tortue à parcourir pour gagner (cinq ou six) ;

– L’emploi des mots « course » et « manche» est ambigu. L’élève pourra assimiler une course à un lancer de dé et confondre les événements

[6] Lucie est membre d'un groupe « Activités » de l'IREM de Rouen (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) depuis 2014 et anime des formations continues au PAF de l’académie de Rouen. Elle a une quinzaine d’années d’ancienneté.

« obtenir six » et « le lièvre gagne », car l'énoncé sous-entend qu'une course peut être constituée de plusieurs manches et le lien entre « des lancers de dé » et « des manches » n'est pas explicité ;

– La formulation conditionnelle « Si …, sinon … » nécessite des connaissances de logique. Certains élèves pourraient considérer que l'événement contraire de « le lièvre gagne » est « la tortue gagne », ce qui n'est pas toujours le cas ;

– La formulation « on lance le dé » : une tierce personne lance le dé, chose peu usuelle dans les jeux de société connus des élèves. Ils pourront considérer une avancée simultanée des deux animaux à chaque lancer de dé.

3. Méthodologie d'étude de l'ETM idoine effectif

Lucie a choisi de faire travailler ses élèves en groupe : cette organisation a nécessité une méthodologie spécifique. Nous avons réalisé des diagrammes de circulation du travail de chaque groupe d'élèves[7] et défini le concept de chronogramme (Masselin, 2019) comme outil méthodologique au service de l'étude de la dynamique du travail mathématique organisé en groupe.

3.1. Diagramme de circulation du travail des groupes d'élèves

Réaliser un diagramme de circulation du travail permet de repérer, au fil des interventions de l'enseignant, les plans (ou dimensions) successivement activés lors du travail. Les plans convoqués sont représentés pleins, et les dimensions sont épaissies. Comme présenté dans le diagramme (figure 9), les interventions de l'enseignant dans un groupe sont situées au niveau inférieur en gras tandis que le travail des élèves est au niveau supérieur. Les vignettes numérotées sont organisées au-dessus d'un axe du temps (temporalité) qui permet de repérer chronologiquement la dynamique des échanges entre les divers intervenants. Ce diagramme se parcourt de gauche à droite en alternant entre la ligne du groupe (Gr) et celle de l'enseignant. Il précise au niveau supérieur l'itinéraire cognitif emprunté par le groupe d'élèves sur la tâche.

[7] Les groupes sont constitués de trois ou quatre élèves mis ensemble par proximité géographique.

3.2. Le chronogramme : un outil spécifique au service de notre étude

Afin de repérer la dynamique du travail dans l'ETM idoine sur une tâche par des petits groupes d'élèves, nous étudions les interactions entre ces collectifs et l'enseignante. Cette organisation de l'ETM idoine effectif a nécessité pour chaque groupe de repérer pour chacun comment la circulation se bloque ou pas et comment l'enseignante gère, ou provoque éventuellement un blocage du travail mathématique. Nous avons initialement réalisé un diagramme de circulation du travail pour chaque groupe d'élèves tout en cherchant des cohérences d'actions, l'idée étant de répertorier les interventions de l'enseignant de manière plus globale en les situant chronologiquement pendant ses séances.

Nous avons également étudié comment, généralement pour sa classe, l'enseignante opère un rebond. Cette deuxième étape, à une échelle plus macroscopique, nous a incités à créer un nouvel outil méthodologique de recherche adapté à un scénario de classe incluant du travail de groupe avec pour visée une appréciation plus fine de l'ETM idoine effectif. Dans Masselin (2019), nous avons défini un chronogramme (figure 7) comme étant un outil méthodologique qui représente, au fil d'une séance, les temps et durées d'interventions d'un enseignant dans différents groupes d'élèves et permet de visualiser les passages de l'enseignant d'un groupe à un autre.

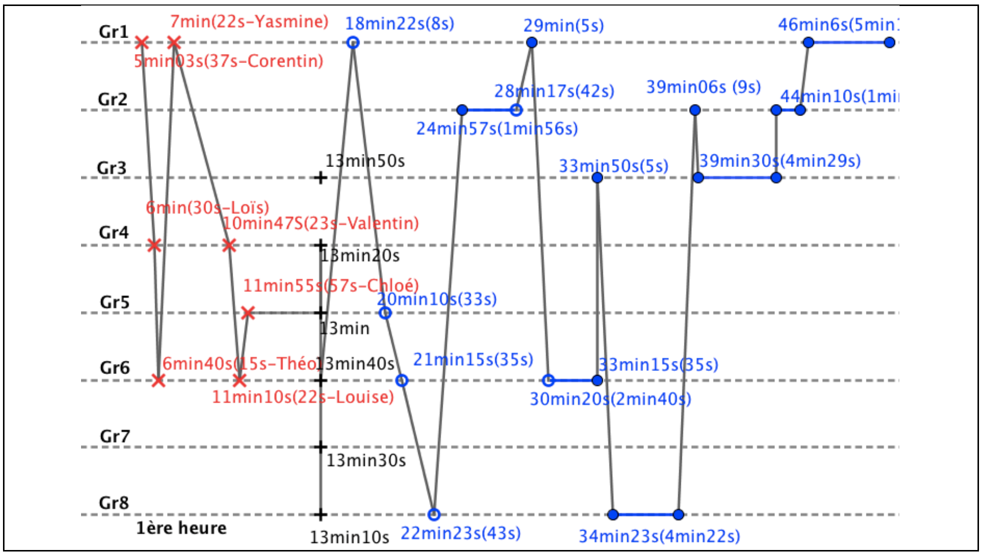


Figure 7. Extrait du Chronogramme de Lucie, (Masselin, 2019)

Les interventions de l'enseignant sont de deux sortes, et elles se matérialisent de manière distincte. Des points situés sur chaque ligne de groupe représentent une intervention ponctuelle de l'enseignant, isolée et courte (moins de 30s), qui n'engage pas un dialogue précis sur le contenu des démarches existantes. Les interventions plus longues et significatives sur des démarches mathématiques sont figurées par des segments dessinés en trait plein sur les lignes pointillées des groupes. Les interventions de l'enseignant de groupe en groupe sont précisées par une ou des lignes brisées, parfois coupées, qui illustrent ainsi la chronologie de leur agencement. Le travail en autonomie des groupes est figuré en pointillés. Les interventions de l'enseignant adressées à un élève sont notées en rouge, celles destinées à un groupe d'élèves sont en bleu. Nous nous appuierons sur ce chronogramme pour répondre à nos questions.

4. Description de l'ETM idoine effectif de Lucie

4.1. Itinéraires cognitifs effectifs empruntés dans l'ETM idoine effectif

De leur propre initiative, les différents groupes ont entrepris des itinéraires cognitifs variés (tableau 3) et Lucie est intervenue en orientant leur travail de façon tangible.

Expl.	**Expl. 1** Découverte de la situation	**Expl. 2** Mise au point sur les règles du jeu	**Expl. 3** Explicitation autour de l'expérience aléatoire
	Expl.1 dé manuel ou sans dé Nombre de courses libre, dés à volonté dans un pot sur le bureau de Lucie	Absente dans Expl. Présente dans Sim.2	Absente
Sim.	**Sim. 1** Introduction de la simulation	**Sim. 2** Simulation effective	**Sim. 3**
	Absente	Artefact tableur, Sim élaborée par les élèves et modèle libre *a priori*. Puis Sim.2 où modèle imposé par Lucie	Relance du fichier tableur et observation des valeurs affichées dans chaque groupe
Preuv.	**Preuv. 1** Preuve expérimentale	**Preuv. 2** Preuve par calcul des probabilités	**Preuv. 3** Rapprochement des preuves
	Présente, dans la majorité des groupes	Existe dans un groupe	Absente

Tableau 3. Déroulement effectif de la séance de Lucie (Masselin, 2019)

Lucie a consacré du temps à une mise au point sur les règles du jeu (phase Expl.2 de l'ETM attendu), une fois la phase de simulation engagée par plusieurs groupes, ce qu'elle a déclaré *a posteriori* ne pas avoir anticipé suffisamment. Elle imaginait que la règle du jeu serait comprise plus aisément.

Lucie n'a jamais explicité les expériences aléatoires en jeu ni justifié l'introduction de la simulation (phases Expl.3 et Sim.1 de l'ETM attendu). Concernant la phase exploratoire, Lucie n'a pas utilisé le caractère aléatoire du problème comme levier pour mener un débat en classe sur le gagnant potentiel. Lucie n'est pas intervenue sur la dimension discursive pour décrire l'expérience aléatoire, l'univers, les événements. Certains élèves étaient bloqués pour avoir interprété qu'une course correspondait à un unique lancer de dé (comme le Gr8). Les parties de jeu effectuées dans le groupe Gr2 sont restées confinées et restreintes à peu de courses, sans être partagées à la classe entière pour un traitement, ce qui explique en partie l'absence de phase d'introduction de la simulation (Sim.1). La phase d'élaboration d'un outil de simulation (Sim.2) est arrivée précocement dans l'ETM idoine effectif. Si les élèves partaient d'un fichier vierge, leur travail a été canalisé petit à petit par l'enseignante. Elle a dirigé dans six groupes sur huit (tous sauf le Gr1 et Gr5) le choix du modèle probabiliste à intégrer lors de la simulation.

4.2. Données des circulations du travail des groupes de l'ETM idoine effectif

La classe de Lucie a été organisée en huit groupes. Nous présenterons précisément le travail de cinq groupes d'élèves avec des extraits de diagrammes de circulation sans le même grain de détail pour tous . De façon complémentaire à l'étude de Derouet et Masselin (2018) se focalisant sur le travail d'un groupe d'élèves, nous tiendrons compte du travail des élèves et du professeur. Seuls les groupes qui nous semblent significatifs en termes de blocages, rebonds ou confinements, et caractérisant le travail de l'enseignante Lucie seront précisés. L'ordre des groupes est lié à la numérotation incluse dans le chronogramme.

4.2.1 Groupe Gr6

Ce groupe demande dès le début de la séance un ordinateur sans effectuer de lancers manuels malgré la présence de dés à disposition sur le bureau de l'enseignante. Il élabore un fichier de simulation à partir d'une feuille vierge de tableur (figure 8).

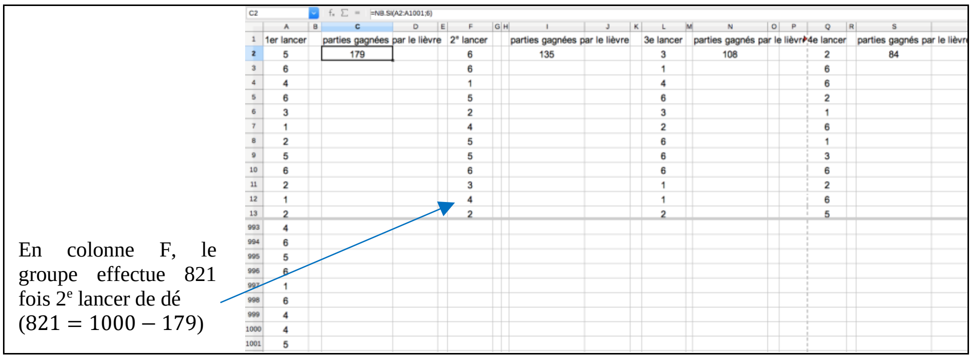


Figure 8. Extrait de la feuille de simulation tableur, Gr6, feuille 1

Le groupe initie un travail dans le plan [Sem-Ins] (1ère vignette, figure 9) en effectuant en colonne A du tableur 1000 fois un premier lancer de dé avec =ALEA.ENTRE.BORNES(1;6). Dans la colonne C, il saisit la formule =NB.SI(A1:A1000 ;6)[8] qui compte le nombre de « parties gagnées » par le lièvre dès

[8] NB.SI (plage, critère) est une fonctionnalité du tableur qui renvoie l'effectif du critère choisi dans une plage de données sélectionnée.

le premier lancer. Le groupe relance alors des dés autant de fois que le nombre obtenu en soustrayant à 1000 le nombre de 6 apparus en colonne, nombre qu'il trouve à la calculatrice. Il procède pour chaque lancer de manière identique. La relance conditionnée à l'obtention d'un 6 à l'étape précédente n'est pas automatisée au tableur, elle est effectuée à l'aide d'une calculatrice. Après la pause méridienne, à la réouverture du fichier tableur, les lancers sont réinitialisés, modifiant le nombre de 6 de la colonne A. Le nombre de dés relancés en colonne C (obtenu à la calculatrice l'heure précédente) n'ayant pas été automatisé n'est plus adapté. Le groupe appelle alors à l'aide l'enseignante, qui indique pour une partie[9] :

> P : Je peux vous donner le conseil de reprendre les 1000 parties à chaque fois, même celles qui sont gagnées, ce n'est pas grave, vous rejouez quand même.

L'enseignante incite à faire 1000 courses avec six lancers de dés systématiques Elle situe son intervention dans le plan [Sem-Ins]. Elle ajoute :

> P : Ça ne vous coûte rien au niveau des coûts de calculs de l'ordinateur.

Son indication, située dans le plan [Sem-Ins] ne fait pas référence au changement de modèle qu'elle tente de faire opérer. Elle tente de faire basculer le groupe du modèle de la loi géométrique tronquée à celui de la loi binomiale.

L'enseignante quitte ce groupe et des échanges ont lieu entre deux élèves E1 et E2 :

> E1 : Elle ne t'a pas dit *fais étape par étape*.
>
> E2 : Pourquoi si le lièvre gagne la première manche[10], on s'en fiche ?
>
> E1 : Parce que s'il gagne la première manche, il gagne.
>
> E2 : Oui, mais par rapport aux résultats, ça nous coûte!
>
> E1 : Elle a dit que ça ne nous coûte rien.

Nous repérons un blocage du travail chez l'élève E2 lors de son questionnement à E1 (4e vignette, figure 9) sur l'impact de lancers pour rien sur les résultats. Se situant dans le plan [Ins-Dis], E2 explicite qu'il n'est pas nécessaire de relancer le dé si un six est déjà obtenu et pense que la poursuite d'une course (avec le modèle de la loi binomiale) va perturber, voire modifier les résultats en lien avec des lancers pour rien par rapport à l'usage de la loi géométrique tronquée lors de la simulation.

---

[9] Pour Lucie, une « partie » correspond à une course.

[10] Pour l'élève, une « manche » correspond à un lancer de dé.

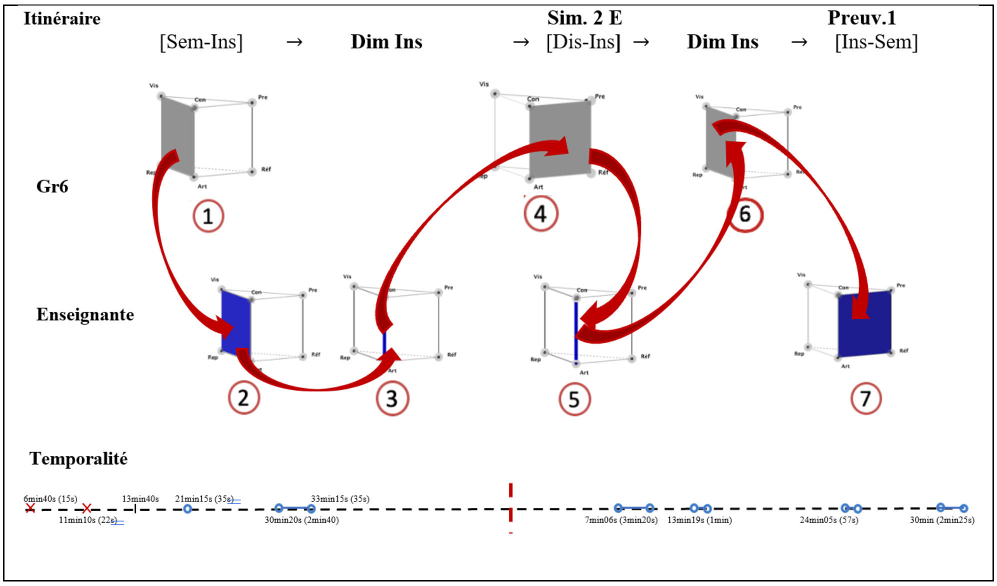


Figure 9. Diagramme de la circulation du groupe Gr6, (Masselin, 2019)

L'enseignante intervient de nouveau au sein du groupe et indique d'employer la fonctionnalité du tableur =NB.SI(critère, plage), qui correspond à Nombre Similaire, afin de faire dénombrer au tableur le nombre de 6 obtenus dans une plage donnée. L'enseignante fait considérer le nombre de parties gagnées par la tortue. Ses indications techniques sur des fonctionnalités du tableur sont situées sur la dimension instrumentale.

Après un arrêt momentané du travail en cours et suite aux échanges avec l'enseignante, l'élève E1 réalise pour chaque course six lancers de dés systématiques, et exécute ainsi la modification de modèle suggérée par Lucie. L'enseignante a provoqué un rebond (5e vignette, figure 9), car le groupe développe, un nouveau travail dans le plan [Sem-Ins]. Il modifie son tableur (6e vignette, figure 9). Lucie impulse alors des relances de la simulation (7e vignette, figure 9) pour observer une stabilisation de la fréquence. Dans le plan [Ins-Dis], le travail réalisé mobilise une « forme vulgarisée de la loi faible des grands nombres » (MENESR, 2015), et le groupe observe la stabilisation des fréquences. Lucie favorise une approche fréquentielle.

Conclusion sur la circulation du groupe Gr6

Si le groupe tente initialement d'élaborer une simulation au tableur (en se situant dans [Sem-Ins]) tout en choisissant la loi géométrique tronquée, il se trouve bloqué pour relancer de manière conditionnelle un deuxième dé. L'enseignante gère ce blocage en imposant un autre modèle avec la loi binomiale. Son intervention crée une résistance de la part d'une élève du groupe. Située dans le plan [Ins-Dis] (4e vignette, figure 9), elle émet comme frein que cette modification changera les valeurs des probabilités. Finalement, le groupe accepte de simuler des courses en conformité avec le modèle de l'enseignante. L'ETM idoine potentiel de Lucie montre qu'elle n'avait pas imaginé *a priori* une telle simulation avec la loi géométrique tronquée au tableur avant la séance. L'enseignante impose au groupe d'emprunter un modèle probabiliste lors de la simulation.

4.2.2 Groupe Gr2

Initialement un des élèves du groupe, E1, effectue 11 courses manuellement avec des feutres qui incarnent les animaux et qu'il déplace sur le parcours de l'énoncé. Ses lancers de dés produisent des signes qu'il interprète en termes de gagnant (en notant des bâtons pour chaque gagnant), son travail se situant dans le plan [Sem-Ins]. Une autre élève du groupe, E2, écrit 1/6 et 5/6 sur son brouillon. Le travail de E2 est situé dans le plan [Sem-Dis] avec des calculs de probabilités sans emploi de dé. Elle amorce un raisonnement impliquant la loi uniforme avec l'équiprobabilité d'obtenir chaque face du dé. La circulation initiale du travail dans le groupe emprunte deux plans distincts (1ere et 2e vignettes, figure 10). À sa première intervention dans le groupe, l'enseignante répond à E1 :

> E1 : On est obligé de prendre l'ordinateur ?
>
> P : Alors, on n'est pas obligé de prendre l'ordinateur, mais il peut peut-être nous permettre de gagner du temps.

L'intervention de Lucie oriente le travail vers l'approche fréquentiste et un effet immédiat de celle-ci est que E1 rature sa production. L'enseignante interroge E2 :

> P : Pour que le lièvre gagne, il y a une chance sur 6, mais pour la tortue ?
>
> E2 : Il y a 5 chances sur 6 qu'elle avance.
>
> P : Voilà, donc en fait une partie, ce n'est pas un lancer de dé.
>
> E2 : Il faut donc faire six parties pour que le lièvre gagne.
>
> P : Alors tu t'es emmêlé les pinceaux, mais ton idée était bonne. Il peut suffire d'une manche pour que le lièvre gagne une partie, mais pour que la tortue gagne la partie, il faut que le lièvre perde six fois les manches. Donc effectivement, pour pouvoir simuler/pour pouvoir obtenir une expérience aléatoire qui représente une partie gagnée par la tortue, il faut avoir fait six lancers de dé.

L'enseignante tente de commencer un rebond du travail de E2 où elle détecte une confusion entre une partie et un lancer de dé. Face à ce blocage, elle insiste sur la dimension instrumentale, incitant les élèves à effectuer des simulations. L'explication de Lucie, dans sa dernière intervention, fournit également des informations aux élèves qui leur permettent de mieux interpréter la consigne.

> P : Il y a deux possibilités, soit on utilise un tableur pour faire un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, d'accord et on calcule les fréquences, soit on écrit toutes les possibilités. Il va y en avoir 6 fois 6 fois 6 fois 6 fois 6 donc ça va faire beaucoup de possibilités. (…) je vous laisse choisir la méthode… Ce n'est pas parce que j'ai une manche que j'ai forcément la tortue qui gagne. Avec une manche, la tortue ne gagne pas forcément, d'accord ? Donc il va falloir faire une première manche.

Lucie balaie du doigt la colonne A du fichier tableur vierge de haut en bas.

> P : Mais si la tortue n'a pas gagné, il va falloir faire une deuxième manche. Est-ce qu'avec deux manches la tortue peut gagner ? Non. Combien de manches faut-il pour que la tortue gagne ?

L'enseignante conseille alors l'emploi de « ALEA.ENTRE.BORNES(1;6) ». E2 reste cependant bloquée par l'asymétrie d'avancée des deux animaux dans le jeu. Quand l'enseignante revient dans le groupe, l'état du fichier est celui de la figure 11.

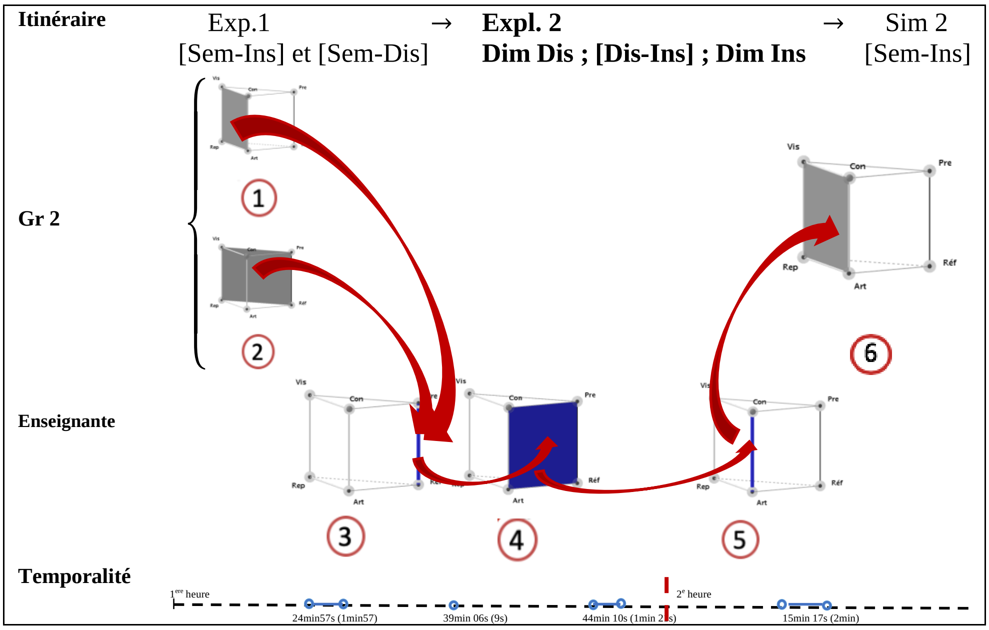


Figure 10. Extrait du début du diagramme de la circulation du groupe Gr2

	A	B	C	D
5000 lancers de dés	nombre	Nombre de 6		
	1	800		
=NB.SI(A2 : A5002 ; 6)	4			
	6			
	…			

Figure 11. Reconstitution d'extrait du tableur, Gr2, état 2

Lucie interroge le groupe sur sa feuille de tableur :

> P : Vous avez fait 5000 parties, mais en ne lançant qu'à chaque fois un seul dé. Est-ce que votre première partie elle est terminée ?
>
> E2 : Non
>
> E1 : Il faut le faire six fois
>
> E3 : C'est ce que j'avais dit.
>
> P : Vous avez vu où était le problème ? Donc là effectivement les 800 ceux sont bien des victoires du lièvre, mais les 4200 qui vous restent, elle a juste avancé d'une case. Mais pour autant, la partie n'est pas terminée. Effectivement, pour savoir si la partie elle est gagnée par le lièvre ou la tortue, il faut avoir joué les six manches. Je vous laisse reprendre votre feuille de tableur.

Le modèle de la loi géométrique tronquée est bloquant pour la relance automatisée conditionnée à l'obtention d'un 6. Lucie impose alors une organisation horizontale des courses et le modèle de la loi binomiale par ses propos « *pour savoir si une partie est gagnée, il faut jouer six manches*[11] », occasionnant une rupture d'organisation du tableur. Après cette intervention, le groupe modifie sa feuille de tableur (figure 12).

Le groupe compte le nombre de 6 obtenus pour les six lancers effectués par course (colonne G), puis parmi les 5000 courses réalisées, il extrait le nombre de courses où il n'y a pas eu de 6 avec la formule « =NB.SI(G2:G5002; 0) » en colonne H. Cette formule automatise le calcul de l'effectif de courses gagnées par la tortue sur 5000.

A	B	C	D	E	F	G	H	Tortue	Lièvre
						Nombre de 6	Nombre de 0	1675	3325
1	1	5	5	3	1	0	1675		
3	3	6	4	6	2	2			
2	2	6	5	3	6	2			
1	6	5	3	6	6	3			
1	6	5	2	6	1	2			
4	4	3	5	1	1	0			
…	…	…	…	…	…	…			

= NB.SI(A2:A5002 ; 6) = NB.SI(G2:G5002; 0) = H2 = 5000-H2

Figure 12 . Reconstitution d'extrait du tableur, Gr2, état 3

Conclusion sur la circulation du groupe Gr2

Le groupe présente deux types de démarches initiales, dont une avec des expériences réalisées à la main. L'enseignante questionne la fraction 5/6, puis fait dénombrer le nombre de sextuples existants, imposant au passage le modèle probabiliste de la loi

[11] Une manche est assimilée à un lancer de dé par l'enseignante.

binomiale. Elle suggère alors de ne pas rechercher manuellement les 46656 cas et fait renoncer à une démarche de preuve formelle. Elle insiste sur la dimension instrumentale (5e vignette, figure 10) en réactivant des connaissances antérieures des élèves sur des instructions tableur. Le groupe considère alors comme expérience aléatoire un seul lancer de dé pour une course (figure 11). Lucie impose alors six lancers par course au tableur (figure 12) et la relance de la simulation (dans [Ins-Dis]).

4.2.3 Groupe Gr3

Le groupe tente une simulation au tableur en lançant 5000 fois un seul dé dans la colonne A (état 1), puis utilise =NB.SI() afin de dénombrer les six obtenus (816).

> P : Pourquoi avez-vous compté les 6 ?
>
> E1 : Pour savoir, vu que pour le lièvre, il y a une chance sur six qu'il gagne.
>
> P (*balayant la colonne A du doigt*) : Vous avez directement la première partie, vous avez fait une manche ? Une manche, je lance le dé. Si le dé donne 6, le lièvre a gagné, mais si le dé ne donne pas 6, qu'est-ce qui se passe ?
>
> E1 : La tortue gagne.
>
> P (*montrant un premier lancer affichant 5*) : Est-ce que là la tortue gagne ?
>
> E1 : Non, mais elle a changé de case.
>
> P (*montrant la colonne A de haut en bas*) : Oui, mais elle n'a pas gagné, elle a avancé d'une case. Donc là en fait, j'ai une manche.

L'enseignante fait verbaliser le nombre nécessaire de manches pour que la tortue gagne (identiquement au Gr2) puis elle demande de modifier le fichier. Quand elle intervient de nouveau dans le groupe, le fichier a sept colonnes marquées Manche *i* avec à chaque fois six lancers de dés. L'enseignante relie cette structuration du fichier à une compréhension erronée des règles du jeu et imagine que le groupe considère qu'une course possède 7 manches (7 lancers) par lecture horizontale (figure 13).

A	B	C	D	E	F	G
Manche 1	Manche 2	Manche 3	Manche 4	Manche 5	Manche 6	Manche 7
1	1	2	5	5	6	1
4	3	4	2	4	2	2
4	5	6	5	5	2	2
2	5	1	1	6	6	3
6	2	3	3	1	5	6
2	3	6	6	6	1	2

Figure 13. Reconstitution d'extrait du tableur, Gr3, état 2

Une autre interprétation de cette feuille de calcul est possible en considérant que chaque course est lue verticalement et est appelée « Manche » par le groupe d'élèves.

Afin de faire comprendre au groupe quand une course s'arrête, l'enseignante introduit un dé à jouer et fait réaliser des parties manuelles. Elle réintroduit ainsi une phase d'exploration puis, une fois terminée, Lucie supprime elle-même la colonne « Manche 7 » du fichier tableur des élèves.

> P : En six manches, c'est sûr il y a un gagnant d'accord ? S'il y a un six, alors c'est le lièvre qui a gagné, mais s'il n'y a pas de six parmi les six manches, c'est la tortue. Donc on n'a pas besoin de faire la dernière manche ici, donc j'enlève la 7e manche.

Nous repérons un blocage après cette phase d'exploration par l'échange suivant :

> P (*montrant la colonne A*): Alors la première partie, elle se joue à chaque fois que j'ai joué une manche. Là, vous êtes en train de me jouer des manches. Vous avez joué six fois la manche une. Une partie se joue quand on a joué six manches, donc la partie, tu ne la lis pas ici (*avec un geste du doigt descendant de A2 à A7*) / la première partie, c'est la Manche 1, puis la Manche 2, puis la Manche 3, etc., jusqu'à la Manche 6 (*geste du doigt de Lucie qui souligne la deuxième ligne*).

Lucie sélectionne ensuite la ligne 2 (en bleu, figure 14) et interroge le groupe :

> P : Dans cette première partie, qui gagne ?
>
> E1 : La tortue .
>
> P : Tu es d'accord E3, c'est la tortue ?
>
> E1 : La tortue gagne, car elle gagne juste à la manche 6, le lièvre a fait 6.

A	B	C	D	E	F	G
Manche 1	Manche 2	Manche 3	Manche 4	Manche 5	Manche 6	
1	1	2	5	5	6	

Figure 14. Reconstitution d'extrait du fichier du groupe Gr3, état 3

Lucie utilise le parcours et fait avancer la tortue en interrogeant E1 :

> E1 (*s'agissant de la Manche 5)* : Elle a avancé et à la 6e.
>
> P (*coupe la parole à E1*) : A la 6e elle n'avance plus, par contre le lièvre, il n'avait pas avancé depuis le début, mais là, hop, il avance directement d'accord ?

E1 ajoute en colonne G « Gagnant », puis inscrit en cellule G2 « lièvre » (figure 15).

A	B	C	D	E	F	G
Manche 1	Manche 2	Manche 3	Manche 4	Manche 5	Manche 6	Gagnant
1	1	2	5	5	6	lièvre

Figure 15. Reconstitution d'extrait du fichier du groupe Gr3, état 4

Le groupe saisit ensuite à la main dans la colonne G les gagnants identifiés sans recherche d'automatisation et il s'arrête à la réalisation de six courses. (Un extrait de la circulation du travail dans ce groupe est présenté en figure 16.)

L'enseignante provoque alors un confinement, car cette saisie manuelle des gagnants empêche de faire un traitement automatisé pour un grand nombre de courses. Le groupe ne peut poursuivre une preuve de type Preuv.1, étant dans l'impossibilité d'utiliser la loi faible des grands nombres pour conclure. L'enseignante rappelle la notion de fréquence (travail situé dans [Dis-Ins]) après demande d'automatisation du gagnant de chaque course avec l'emploi de =NB.SI() (8e vignette, figure 16).

Conclusion sur la circulation dans le groupe Gr3

Face au blocage initial lié à l'expérience aléatoire assimilée à un lancer de dé, l'enseignante tente de lever l'ambiguïté entre une « manche » et une « partie » tout en s'appuyant sur le contenu du tableur (1ère ligne), convoquant le plan [Sem-Ins]. Elle réorganise la feuille de calcul du groupe en imposant le modèle de la loi binomiale et une lecture horizontale de courses (4e et 5e vignettes, figure 16). L'intervention de l'enseignante (sur la dimension instrumentale) consiste à réintroduire une phase d'exploration (avec des courses manuelles) lors de la simulation. Son intervention a pour effet de faire saisir manuellement le gagnant des six premières courses dans le tableur et induit de ce fait un confinement. Lucie demande une automatisation de l'affichage du résultat concernant le gagnant et rappelle la notion de fréquence (confondue avec l'effectif), se situant alors dans le plan [Ins-Dis] (8e vignette, figure 16). Dans ce groupe, la simulation reste inexploitée et la preuve expérimentale n'est pas aboutie.

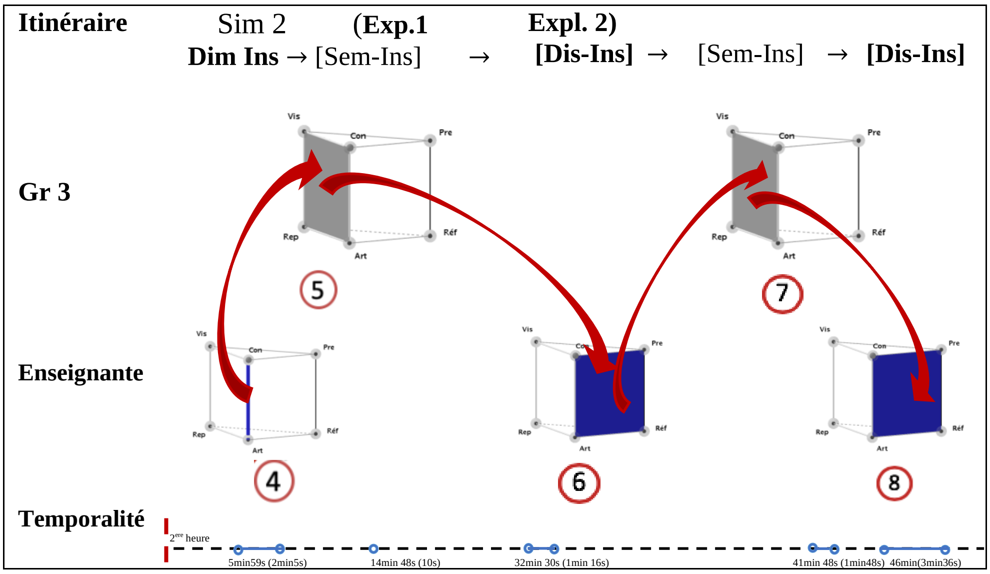


Figure 16. Extrait du début du diagramme de la circulation du groupe Gr3

4.2.4 Groupe Gr 4

Dans ce groupe, une question initiale est posée à l'enseignante :

> E1 : Est-ce que la tortue commence sur la première case ou est-ce qu'elle commence en dehors ?
>
> P : En dehors.

La question du lieu du départ est soulevée par E1. L'enseignante va alors imposer une position unique du départ dans le parcours à tous les groupes d'élèves de la classe. L'élève E2 calcule des probabilités de gagner qu'il inscrit directement dans les cases du parcours de son énoncé. Les deux approches, fréquentielle et laplacienne sont explorées au sein du groupe par les élèves E1 et E2 sans être partagées (1ère et 2e vignettes, figure 17).

Après avoir abordé rapidement l'équiprobabilité sans apporter de réponse au groupe (esquissant un travail sur la dimension discursive), l'enseignante intervient de nouveau :

> P : (…) visiblement, E1, son idée c'est de faire la méthode fréquentiste. Ça vous convient de partir sur cette idée-là, la méthode fréquentiste ? Je vous apporte un ordinateur, d'accord ? On le soutient dans cette idée-là, ça peut être une bonne idée. E1, c'est toi le chef de groupe.

L'élève E2 conserve son idée de calculer des probabilités et termine sa procédure sans la détailler. Malgré deux approches distinctes, dont celle de E2 dans le plan [Sem-Dis] amorçant une phase de preuve par calcul (2e vignette, figure 17), l'enseignante favorise l'approche fréquentielle en désignant un leader à suivre. Lucie déclarera *a posteriori* ne pas avoir vu les calculs de probabilités de E2.

Le groupe compare les valeurs estimées par le fichier de simulation élaboré par E1 et E3 et les probabilités calculées par E2. Cette phase de Preuv.3 restera confinée dans le groupe sans que l'enseignante exploite ces travaux en bilan dans la classe.

Conclusion sur la circulation du groupe Gr4

Ce groupe présente des travaux initiaux dans deux plans distincts [Sem-Dis] et [Sem-Ins]. Les élèves restent sans réponse de la part de l'enseignante sur l'affectation de l'équiprobabilité. Lucie favorise l'approche fréquentiste, avec un travail dans le plan [Sem-Ins], ignorant les calculs des probabilités réalisés par E2. Les élèves rapprochent les valeurs estimées et calculées des probabilités, mais cette phase (Preuv.3) reste confinée dans le groupe.

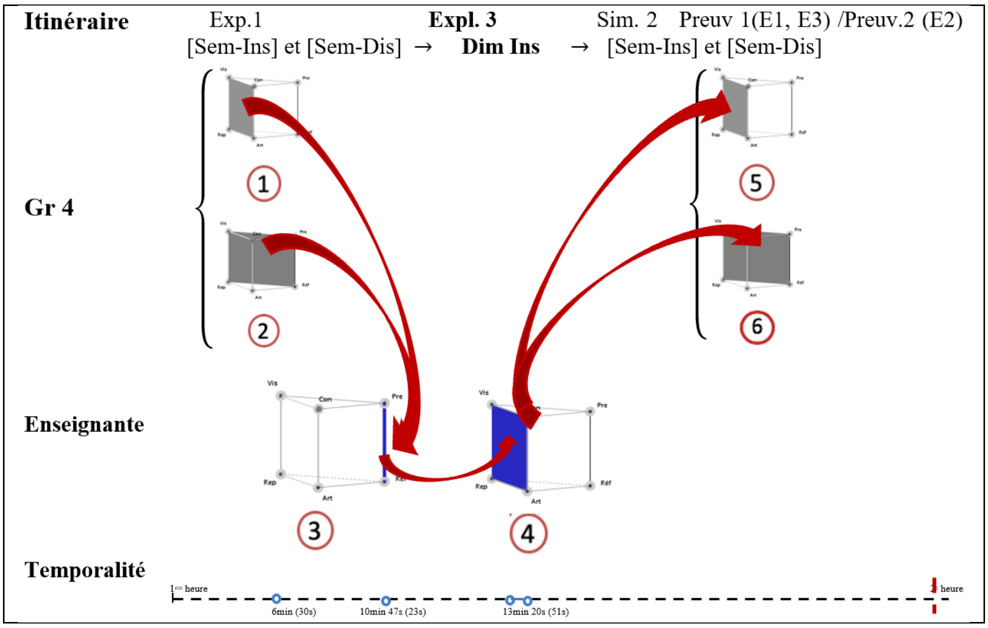


Figure 17 : Extrait du début du diagramme de la circulation du groupe Gr4

4.2.5 Groupe Gr1

Ce groupe tente initialement de calculer les probabilités que le lièvre et la tortue gagnent en se situant dans le plan [Sem-Ins].

> E1 : J'ai fait l'événement que le lièvre tombe sur le 6 et j'ai trouvé 1 sur 6, je l'ai fait fois 6 et j'ai trouvé 6/36.

L'enseignante répond ainsi :

> P : Là, vous n'êtes pas en train de me faire des mathématiques, vous êtes en train de me faire des tours de magie.

Durant la pause méridienne, Lucie avouera à propos de ce groupe ne pas avoir identifié un biais de linéarité.

Lucie poursuit en interrogeant le groupe sur les deux approches (fréquentielle et laplacienne) déjà rencontrées antérieurement par les élèves et intervient sur la dimension discursive.

> P : On doit utiliser des théorèmes ou des méthodes de troisième, quelles sont-elles ?
>
> E1 : La méthode fréquentiste, elle consiste à faire un grand nombre de fois l'événement et la méthode théorique, je ne me rappelle plus.
>
> P à E2 : La méthode théorique, c'est quoi ?

> E2 : C'est le nombre de cas que l'événement puisse se produire sur le nombre total de cas.
>
> P : Il va falloir trouver le nombre de cas, c'est-à-dire le nombre total de parties que l'on va pouvoir jouer. Il y aura combien de parties au total ?

Lucie oriente alors le groupe vers l'approche laplacienne, tout en imposant progressivement qu'une course soit associée à six lancers de dé.

Quand elle déclare aux élèves :

> P : Tout le monde est d'accord, pour que la tortue gagne, il faut forcément qu'il y ait six manches[12]. Pour chacune des manches, il y a combien de possibilités ?
>
> E2 : 5 sur 6.
>
> E3 : Non.

L'adverbe forcément employé par Lucie montre un coup de force (sans jeu de mots) implicite de l'enseignante, car il sous-entend le modèle binomial.

Les mots « manche », « partie » et « course » employés ne semblent pas clairement identifiés par les élèves et créent un blocage. L'enseignante poursuit :

> P : Au total, d'accord ? Chaque partie se joue avec un dé et pour chaque partie j'ai six issues possibles d'accord ? Donc première manche, six issues ; 2e manche ?
>
> E3 : Pareil
>
> P : Six issues, et pour chacune des six issues de la première manche j'aurais six issues pour la deuxième manche pour la deuxième manche. Donc en tout, il y aura combien de parties possibles si on joue en deux manches ?
>
> E2 : 12
>
> P : Alors pas 6 plus 6, mais ?
>
> E3 : 6 fois 6
>
> P : Oui, car 6 fois 6 (donne) 36. Si je fais trois manches, pour chacune de ces 36 parties possibles.
>
> E3 : C'est encore fois 6.

De proche en proche, les élèves trouvent 46 656 cas, puis Lucie interroge sur la signification de ce nombre :

> P : C'est quoi ce 46 656 ?
>
> E1 : Deux manches.
>
> E2 : Non, c'est le total des cas.

---

[12] Comprendre pour « manche » un lancer de dé, selon l'enseignante.

> E1 : Mais si on fait la probabilité que le lièvre gagne, c'est 1 sur 6.

Ici, l'enseignante n'a pas géré le blocage lié à la confusion entre l'événement « le lièvre gagne » et l'événement élémentaire « obtenir un six » chez E1.

> P : Ah alors ça, c'est pour si jamais on n'avait qu'une manche, si ta partie elle durait une manche, effectivement, parmi les six parties, on n'aurait que six parties possibles, et parmi ces six parties, le lièvre peut en gagner une seule. Mais moi je n'ai pas six parties, j'ai 46 656 parties parce qu'une partie, ça se joue en six manches, d'accord ? Maintenant, il faut effectivement créer les 46 656 parties et identifier parmi celles-ci celles qui sont gagnées par le lièvre et celles par la tortue. Vous essayez de m'inventer tous les cas possibles de parties en utilisant le tableur.

Lucie demande la création des sextuples au tableur. Dire qu'une partie se joue en six manches lui permet d'imposer la loi binomiale. Elle crée alors un blocage :

> E3 : On ne va pas aller jusque 46 000 .

> E2 : Comment on peut faire ?

> P : Alors vous êtes parti sur la méthode théorique, E3 tu ne veux pas le faire (…). Là le problème c'est qu'il y a eu trop d'hésitations, c'est dommage parce que vous êtes le seul groupe à vous être lancés dans cette méthode là et on va s'appuyer dessus. Mais au bout d'un moment, il y a eu un grain de sable, car il y a eu de l'hésitation et personne du groupe n'a pris le dessus pour dire « je m'y mets ». Elle était longue votre méthode c'est vrai, néanmoins elle marchait très bien.

En fin de 2e heure, ce groupe a réalisé 15 sextuples (sur les 46 656) avec le tableur.

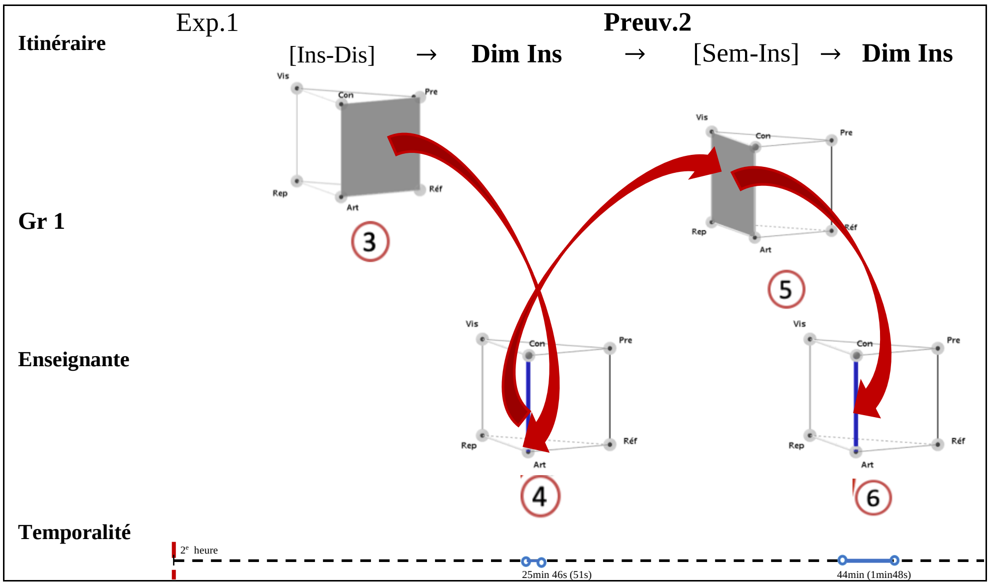


Figure 18 : Extrait du début du diagramme de la circulation du groupe Gr1

Conclusion sur la circulation du groupe Gr1

L'enseignante a créé un confinement lié au biais de linéarité initial (vignette, figure 18) qu'elle n'a pas reconnu. Après l'émergence d'un blocage chez E1 tentant de calculer des probabilités dans le plan [Sem-Dis], Lucie impose six lancers de dés pour chaque course et la création des 46 656 sextuples dans le fichier tableur. Cette tâche longue et fastidieuse fait émerger un confinement du travail des élèves dans le plan [Sem-Ins]. L'enseignante n'en est pas consciente. Elle, qui visait une preuve formelle pour l'exploiter en bilan de sa séance, accuse la non-cohésion du groupe d'élèves par rapport au non-achèvement du travail attendu.

4.3. Retour sur des données de l'ETM idoine potentiel de Lucie

Des éléments de l'ETM potentiel permettent de mieux caractériser le travail de l'enseignante sur la simulation et ses ajustements de modèles repérés dans l'ETM idoine effectif. La veille de sa séance de classe, l'enseignante a révélé ses intentions de mise en œuvre pour sa classe, ce qui éclaire sur ses agissements en classe relativement aux modèles mathématiques imposés ou détournés au cours de l'élaboration de la simulation. L'ETM idoine potentiel de Lucie ne contient pas de phase de mise au point sur les règles du jeu (Expl.2) ni d'explicitation des expériences aléatoires en jeu (Expl.3). Ce manque a induit des blocages de travail d'élèves quand ils confondaient les événements « obtenir un 6 » et « le lièvre gagne »[13].

Lucie, en préparant sa séance, a réalisé un fichier tableur avec trois feuilles et a recherché une certaine évolution. Y figurent des simulations de courses avec six lancers systématiques par course où l'enseignante présente des courses horizontalement en empruntant exclusivement la loi binomiale. Ce travail en amont est en partie commandée par ses connaissances du tableur (figure 19). Lucie écrit dans le courriel :

> Le premier je l'ai fait pour moi. Pour m'approprier l'activité, avec mes connaissances tableur. Puis, j'ai essayé progressivement de me mettre dans la tête de mes élèves, de n'utiliser que leurs connaissances en tableur. Je pense que la dernière version doit être proche de ce qu'ils vont essayer de faire, de ce qu'ils sont capables de faire avec la façon dont je les ai « formatés ».

Figure 19. Extrait courriel (veille de séance en classe), Lucie (Masselin, 2019)

Lucie ne mentionne pas de modèle probabiliste emprunté pour ses simulations.

[13] Ces deux événements coïncident uniquement pour un parcours sans case intermédiaire.

4.4. Itinéraires cognitifs de la tâche dans l'ETM idoine potentiel

Les données précédentes nous précisent les itinéraires cognitifs imaginés par l'enseignante Lucie dans son ETM idoine potentiel (figure 20).

Travail individuel		*Travail en groupe*					
Expl. 1 (DéMan)	→	Sim. 2 (E, au tableur)	→	Sim 3.E	→	Preuv.1
Dés en accès libre		ModLib				

Figure 20. Itinéraire cognitif de tâche prévue par Lucie, (Masselin, 2019)

Si l'enseignante a semblé initialement favoriser diverses approches avec une tâche ouverte, elle n'a retenu que l'approche fréquentiste avec des simulations ajustées pour qu'elles concordent avec son propre modèle probabiliste (loi binomiale) prévu avant la séance. Les valeurs des probabilités obtenues avec l'approche laplacienne par un groupe n'ont pas été exploitées alors qu'une phase de confrontation des preuves aurait pu exister dans l'ETM idoine. Lucie a rendu homogène le modèle probabiliste (loi binomiale) lors de la simulation dans la plupart des groupes au fil de sa séance alors que le choix de certains groupes s'était initialement porté sur la loi géométrique tronquée.

5. Conclusion et perspectives

5.1. Retour sur nos questions de recherche

- Dans sa gestion effective de l'ETM idoine, comment l'enseignante Lucie gère-t-elle des moments critiques du déroulement de séance comme des blocages, confinements et rebonds ?
- Quelle est l'influence de l'enseignante sur l'évolution de l'ETM idoine effectif ?

5.1.1 Les révélations du chronogramme sur les modèles probabilistes

L'élaboration du chronogramme a mis en lumière des ajustements de modèles, et ce, de manière répétée par l'enseignante dans plusieurs groupes. Le chronogramme des deux heures de séance met en évidence un effet de contamination dans le changement de modèle probabiliste imposé par Lucie dans six groupes sur les sept étudiés au fil de sa séance .

Afin de considérer le travail dans sa globalité (au-delà de la considération d'un groupe d'élèves), nous avons repéré (encerclement rouge, figures 21 et 22) ces changements de modèles probabilistes aux différents instants dans la classe. Cet outil méthodologique a montré un effet de contamination visible sur ce zoom (figure 21). Si nous avons repéré une stratégie identique d'intervention de l'enseignante concernant le fichier tableur des groupes Gr3 et Gr8, le chronogramme indique que la structuration horizontale d'une course dans le tableur par Lucie a eu lieu par deux interventions quasi successives de l'enseignante : au bout de 34min23s dans le Gr8, puis au bout de 39min30s dans le Gr3.

Le chronogramme nous a conduits à définir le monitorage didactique (Masselin, 2019) comme étant une action de contrôle par l'enseignant en classe, qui consiste à surveiller, en continu ou à intervalles rapprochés, par mesure d'indices, des procédures élèves ou des observations de phénomènes divers.

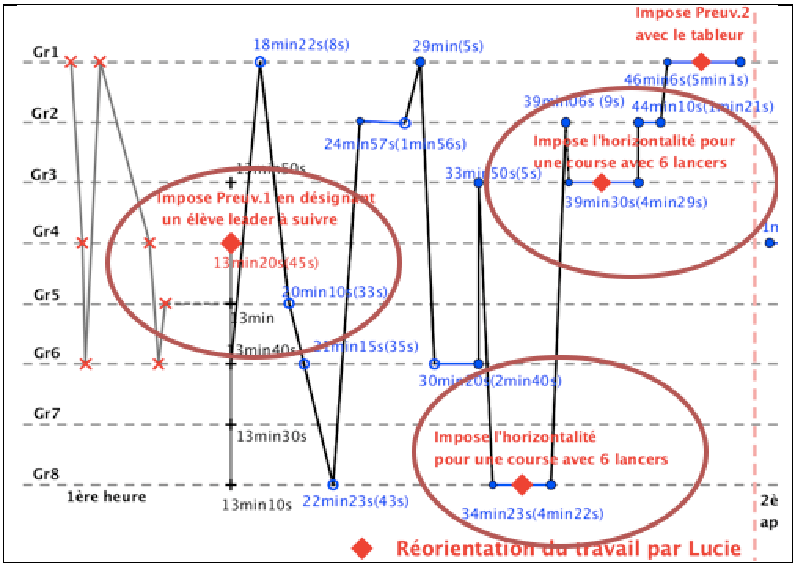


Figure 21. Zoom sur le chronogramme de la 1ère heure, Lucie.

En considérant le chronogramme dans son ensemble, nous avons ainsi mis en évidence un monitorage didactique indirect (Masselin, 2019) du modèle probabiliste implicite de l'enseignante qui modifie le travail de six groupes d'élèves sur huit (figure 22) dans l'ETM idoine.

Nous qualifions d'indirect le monitorage didactique du modèle en opposition à un monitorage didactique direct du modèle qui serait explicité dès le départ par l'enseignant (comme indiqué dans l'énoncé).

Si l'enseignante ne semble pas, *a priori*, imposer initialement un modèle probabiliste, c'est une réalité visible au fur et à mesure du temps comme en atteste le chronogramme. Ce contrôle du modèle par l'enseignante prend sa source dans la préparation de sa séance.

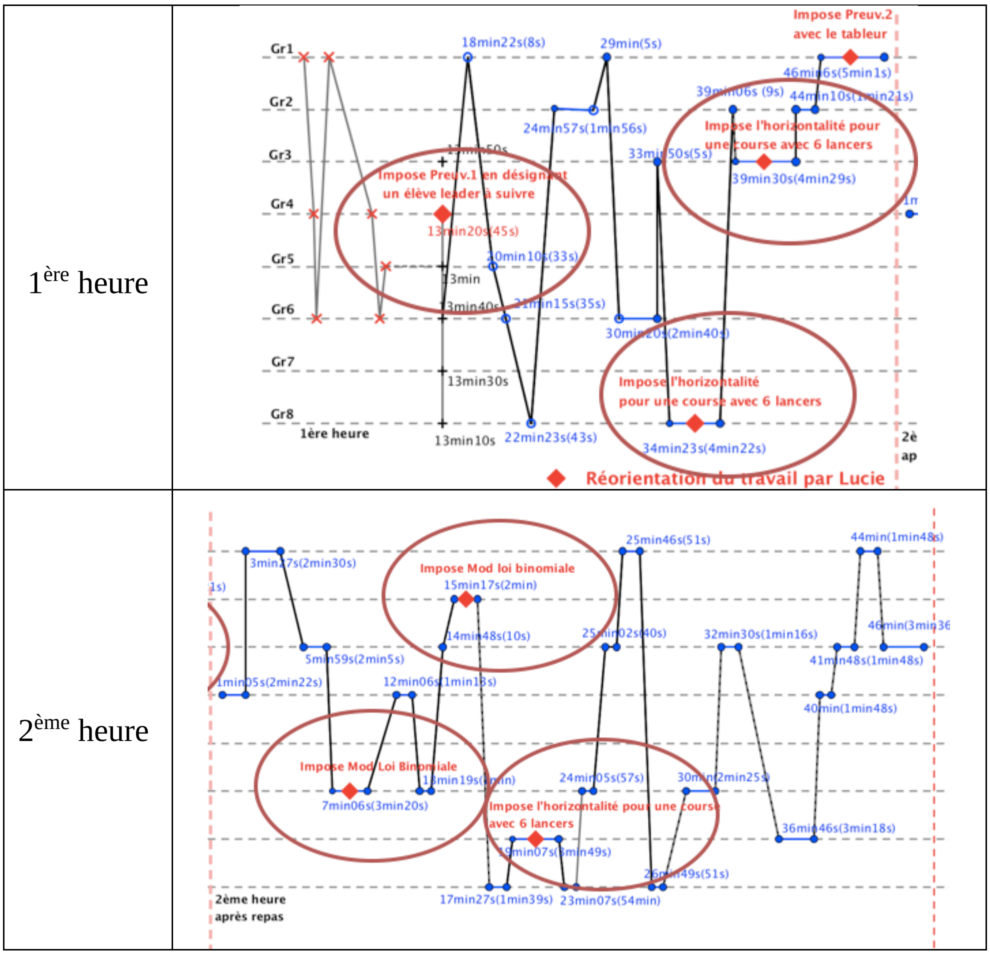


Figure 22. Chronogramme de la séance de Lucie (Masselin, 2019, p. 129 ; Masselin & Florez González, 2020, p. 93)

5.1.2 Résultats sur la question des modèles

La gestion de l'ETM idoine effectif par l'enseignante montre qu'il est rendu homogène du point de vue du modèle, quitte à créer des blocages dans le travail des élèves. Notre étude de cas montre que les relations entre expérience aléatoire et modèle mathématique s'apparentent plus à une rupture qu'à un lien. Des blocages sont apparus, dans l'ETM idoine effectif dont le plus prégnant concerne une interprétation erronée des règles du jeu de la part des élèves, assimilant un lancé de dé à une course.

Si Parzysz (2011) distingue trois types d'expériences aléatoires (réelle, modélisée et simulée), celle simulée est prépondérante dans la classe de Lucie. Sa place est induite par la circulation privilégiée par l'enseignante qui incite les groupes à utiliser un tableur pour élaborer un fichier de simulation. Les groupes, majoritairement, se heurtent à son élaboration au moment de la réalisation d'un deuxième lancer de dé conditionné au premier lancer. Son implémentation est contrainte par l'artefact numérique et par l'enseignante qui tente d'imposer un choix de modèle particulier avec le tableur, sous couvert d'une demande de réorganisation spatiale de la feuille de calcul. Si certains groupes ont réalisé des expériences à la main (Expl.2), Lucie n'a pas exploité les résultats de ces courses dans sa classe. Si elle a fait faire des courses manuelles lors de l'élaboration de la simulation (Sim.2) à certains groupes, cela lui a permis de réorganiser spatialement les courses du tableur, et d'ajuster leur travail à sa propre simulation.

Les mots « manche » et « partie » de l'énoncé ont amené des blocages liés au sens courant de ces mots, accentuant une rupture entre expérience aléatoire et simulation. Si *a priori* la présentation de la tâche et la gestion de l'ETM idoine semblaient favoriser l'émergence de divers modèles, nos travaux ont précisé des blocages et des confinements dans la circulation de l'ETM idoine effectif.

5.1.3 Résultats concernant les artefacts

Nous rendons compte de l'influence d'artefact(s) matériel(s) (tels que des dés ou le tableur) sur la circulation du travail. Lors de la phase d'exploration (Expl.), des élèves ont lancé des dés qui étaient en accès libre dans un pot situé sur le bureau de Lucie (comme E1 du Gr 2). Si des groupes ont effectué des manipulations, les fichiers tableurs produits ensuite dévoilent que ces expériences manuelles n'ont pas toujours permis de donner accès à l'identification des expériences aléatoires en jeu. Pendant sa phase d'élaboration, la simulation est un objet d'étude au sens de Douady (1984) pour le groupe d'élèves. Mise ensuite au profit d'une preuve expérimentale (Preuv.1), le fichier change de statut et devient un outil au service de la loi faible des grands nombres. Bien souvent, Lucie a été à l'initiative d'une relance de la simulation tableur, opérant elle-même une bascule de l'objet vers l'outil au profit de la phase Sim.3 conduisant vers une preuve expérimentale.

Lucie n'a envisagé pour sa classe qu'un seul artefact numérique pour la simulation (le tableur). Cela ne nous permet pas d'obtenir d'éléments de comparaison avec d'autres artefacts (comme le logiciel Scratch ou la calculatrice) et constitue une limite de notre étude de cas. Cependant, concernant le tableur, si le modèle probabiliste le plus congruent aux règles du jeu est majoritairement choisi par les groupes d'élèves, Lucie impose un changement de modèle, car elle a jugé en amont une plus grande facilité à élaborer la simulation avec la loi binomiale. Elle n'aidera aucun groupe à réaliser au tableur une simulation avec la loi géométrique tronquée, imposant son modèle, conforme à celui de son ETM idoine potentiel. Par diverses interventions, l'enseignante a exercé un contrôle et rendu homogène l'ETM idoine effectif concernant le modèle probabiliste lors de la simulation. L'enseignante a opéré des rétroactions identifiées (Masselin, 2018) dans le cycle de modélisation de Blum & Leiss (2007).

5.2. Perspectives

Notre étude de cas a donc permis une première caractérisation du travail de l'enseignant sur la gestion de la simulation dans l'ETM idoine. Si nous avons considéré une première enseignante (ce qui constitue une limite en soi), la poursuite de cette étude peut donner accès aux régularités ou variabilités interprofesseurs, ce qui a été réalisé dans la thèse de Masselin (2019) en considérant un échantillon plus grand d'enseignants. Elle intègre, de façon originale, le suivi de mises en œuvre successives de différentes versions du jeu du lièvre et de la tortue dans des classes et au fil d'une formation (*lesson study* adaptée, Masselin & Derouet (2019)), durant son déroulement, et chez des enseignants ayant suivi cette formation.

5.2.1 De nouveaux outils méthodologiques de recherche

Nous avons développé des outils de recherche permettant d'envisager un panel plus large d'enseignants, voir un collectif d'enseignants. L'ETM idoine attendu, grâce à la description de ses différentes phases, est un socle pour caractériser le travail de plusieurs enseignants autour d'une tâche dans l'ETM. Cet ETM permet d'apprécier, comme le montrent nos travaux de thèse (Masselin, 2019), de premiers effets d'une formation d'enseignants avec une méthodologie originale de recherche (Masselin & Derouet, 2019) associée.

Le chronogramme, s'il a été opérationnalisé sur la question des modèles dans notre étude, offre de nouvelles perspectives de recherche concernant un ETM idoine incluant du travail de groupe.

L'artefact numérique utilisé peut induire des blocages relatifs aux modèles mathématiques liés à ses potentialités couplées aux pratiques de l'enseignant. Interroger l'emploi d'un autre logiciel comme Scratch ou Python est à explorer.

5.2.2 Des concepts didactiques pour la formation fondés sur la dynamique de circulation dans l'ETM

Notre étude de cas a permis de repérer des moments critiques dans la circulation du travail que sont les blocages, confinements et rebonds. S'ils sont exposés en formation (via par exemple des extraits vidéo), ils peuvent permettre de développer des pratiques professionnelles à partir d'une tâche donnée. En effet, exposés à un collectif de formateurs, ces moments spécifiques d' ETM idoine effectif permettent de mieux cerner les enjeux de la tâche, le rôle de l'enseignant et celui des artefacts dans le développement du travail mathématique.

Enfin, la grille d'analyse *a priori* épistémologique d'une tâche dans l'ETM peut servir à identifier une multiplicité de choix qui s'offrent aux enseignants pour leur classe, et constitue un résultat de notre enquête pouvant être exploité pour la formation des enseignants en probabilités.

Bibliographie

BLUM, W. & LEISS, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. In G.-P. B. W. Haines & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics* (pp. 222–231). Chichester: Horwood Publishing.

DEROUET, C. (2019). Introduire la notion de fonction de densité de probabilité : dynamiques entre trois domaines mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, **39(2)**, 213–266.

DEROUET, C. & MASSELIN, B. (2019), Travail mathématique en contexte de modélisation. Le cas d'une tâche de modélisation probabiliste « Le jeu du lièvre et de la tortue ». In L. Vivier, E. Montoya Delgadillo, P.R. Richard, I. Gómez-Chacón, A. Kuzniak, M. Maschietto & D. Tanguay (Eds). *Actas del Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático (ETM6, 13-18 de diciembre 2018)* (pp. 651-666). Valparaíso, Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

GAYDIER, F. (2011). *Simulation informatique d'expérience aléatoire et acquisition de notion de probabilité au lycée*, Thèse de doctorat, Université Paris 5.

KIET, B.A. (2015). *Apports de la simulation et de l'utilisation de logiciels pour l'enseignement/apprentissage des probabilités et des statistiques en première année d'Université au Vietnam dans un cursus non mathématique*, Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

KUZNIAK, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **16**, 9-24.

KUZNIAK, A., PARZYSZ, B. & VIVIER, L. (2013). Trajectory of a problem: a study in Teacher Training. *The Mathematics Enthusiast*, **10(1),** 407-440.

KUZNIAK, A. & RICHARD, P.R. (2014). Espaces de Travail Mathématique. Points de vue et perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *Especial 2* (Tome I), 29-40.

KUZNIAK, A., NECHACHE, A. & DROUHARD, J.P. (2016). Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom. *ZDM – Mathematics Education*, **48(6),** 861-874.

KUZNIAK, A., TANGUAY, D. & ELIA, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: an introduction. *ZDM – Mathematics Education*, **48(6)**, 721-737.

LAVAL, D. (2018). *L'algorithmique au lycée entre développement de savoirs spécifiques et usage dans différents domaines mathématiques*, Thèse de doctorat, Université Paris Sorbonne.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE (MENESR) (2015). Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4). *Bulletin officiel*, **Spécial n°11** du 26 novembre 2015.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE ET DE LA JEUNESSE (MENJ) (2019). Programme d'enseignement de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique. *Bulletin officiel*, **Spécial n°1** du 22 janvier 2019.

MASSELIN, B. (2018). Comment interpréter le cycle de modélisation avec l'Espace de Travail Mathématique ? Étude de la trajectoire d'un problème. In *Quaderni di Ricerca in Didattica (Mathematics),* **27(2)**, Proceedings CIEAEM 69 – Berlin, Germany, July 15-19, 2017, 261-265.

MASSELIN, B. (2019), *Étude du travail de l'enseignant autour de la simulation en classe de troisième et seconde : métamorphoses d'un problème au fil d'une formation en probabilité,* Université Paris Sorbonne Cité, Université Paris Diderot.

MASSELIN, B. & DEROUET, C. (2019). Sur la mise en évidence des effets d'une formation courte sur les pratiques d'enseignants autour de la simulation en probabilité en classe de troisième. In M. Abboud (Ed.), *Actes du colloque EMF 2018 "Mathématiques en scène des ponts entre les disciplines"* (pp. 198-207). Paris : Université de Paris, Editions de l'IREM de Paris.

MASSELIN, B. & GONZALEZ-FLOREZ, M. (2020). Étude du travail idoine, le cas de la simulation en probabilité, In A. Kuzniak, M. Florez-González, A. Nechache & L. Vivier (Eds), *Regards croisés sur le travail mathématique, Cahier du LDAR n°21* (pp. 85-102), Paris : IREM Université de Paris.

PARZYSZ, B. (2009). De l'expérience aléatoire au modèle, via la simulation. *Repères-IREM*, **74**, 91-103.

PARZYSZ, B. (2011). Quelques questions didactiques de la statistique et des probabilités. *Annales de didactique et des sciences cognitives*, **16**, 127-147.

PARZYSZ, B. (2014). Espaces de travail en simulation d'expérience aléatoire au lycée : une étude de cas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, **17(4)**, 65-82.

SENSEVY, G., MERCIER, A. & SCHUBAUER-LEONI, M-L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20. *Recherches en didactique des mathématiques*, **20(3)**, 203-304.

SENSEVY, G. (2007) . Des catégories pour décrire et comprendre l'action didactique. In G. Sensevy, & A. Mercier (Eds.), *Agir ensemble. L'action didactique conjointe du professeur et des élèves dans la classe* (pp. 13-49). Rennes : Presses universitaires de Rennes.

VIVIER, L. (2020). Portée et usage du travail mathématique dans le cadre de la théorie des ETM, In A. Kuzniak, M. Florez-González, A. Nechache & L. Vivier (Eds), *Regards croisés sur le travail mathématique, Cahier du LDAR n°21* (pp. 55-70), Paris : IREM Université de Paris.

BLANDINE MASSELIN

LDAR, IREM de Rouen, Académie de Normandie

blandine.masselin@wanadoo.fr

Annexe 1 : Grille d'analyse épistémologique du jeu du lièvre et de la tortue (Masselin, 2019, pp. 58-59)

1. **Analyse *a priori* des solutions envisageables**
   Les variables didactiques
   Les règles du jeu
   La question posée
2. **Analyse *a priori* concernant la modélisation**
   Le modèle pseudo-réel et ses hypothèses
   Les modèles probabilistes et les traitements dans ces modèles
3. **Analyse *a priori relative* aux registres sémiotiques**
   Un parcours sans case intermédiaire
   Un parcours à une case intermédiaire
   Un parcours à deux cases intermédiaires
   Un parcours à n cases intermédiaires avec $n \geq 3$
4. **Analyse *a priori relative* aux artefacts**
   L'introduction d'un modèle numérique
   Étude avec le tableur
   Étude avec le logiciel Scratch

Annexe 2 : Valeurs des probabilités suivant le nombre de cases du parcours (Masselin, 2019)

Nombre *n* de cases intermédiaires	Valeur exacte de P(T)[14]	Valeur approchée de P(T) à 10^{-3}	Valeur exacte de P(L)	Valeur approchée de P(L) à 10^{-3}
0	$\frac{5}{6}$	0,833		0,167
1	$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$	0,694	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{11}{36}$	0,306
2	$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$	0,579	$1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$	0,421
3	$\frac{625}{1196}$	0,482	$\frac{671}{1196}$	0,518
4	$\frac{3125}{7776}$	0,402	$\frac{4651}{7776}$	0,598
5	$\frac{15625}{46656}$	0,335	$\frac{31031}{46656}$	0,665
n grand	$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$		$\lim_{n\to+\infty}(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n) = 0$	

[14] P(T) (et P(L)) désignent respectivement les probabilités que la tortue (et le lièvre) gagne.

VALÉRIE VINÉ VALLIN

MÉDIATION SUR LA NOTION D'ÂGE DESTINÉE À DES ÉLÈVES DÉFICIENTS INTELLECTUELS

Abstract. Temporal construction in students with an intellectual deficiency versus "ordinary" children. Which teacher did not have in his/her class a student who is anxious, because he does not master the notion of time? This is even more true for young children or children with cognitive disabilities. However, there is very little research in the field of mathematics or cognitive science for this population. However, at the time of inclusive school, this would have all its relevance. So how to propose a mediation that meets their needs? This study proposes a diagnostic evaluation in this area as well as a mediation meeting the needs of students enrolled in ULIS (local inclusive education unit). Thirty-six students with intellectual disabilities (ID) and two hundred "ordinary" students participated in this study. We observed that the notion of age is built more slowly in these ID subjects, with a gap of, around, 3 to 5 years with the ordinary students. This gap has diminished with an appropriate mediation.

Résumé. Quel enseignant n'a pas eu dans sa classe un élève qui s'angoisse, parce qu'il ne maîtrise pas la notion de temps ? Cela est encore plus vrai chez des jeunes enfants ou des enfants porteurs d'un handicap cognitif. Cependant, il existe très peu de recherche dans le domaine des mathématiques ou des sciences cognitives portant sur cette population. Cependant, à l'heure de l'école inclusive, cela aurait toute sa pertinence. Aussi comment proposer une médiation qui réponde à leurs besoins ? Cette étude propose une évaluation diagnostique dans ce domaine ainsi qu'une médiation répondant aux besoins d'élèves scolarisés en ULIS (Unité Locale d'Inclusion Scolaire). Trente-six élèves présentant une déficience intellectuelle (DI) et deux cent élèves « typiques » ont participé à cette étude. Nous avons observé que la notion d'âge se construit plus lentement chez les sujets DI, avec un écart pouvant aller de 3 à 5 ans avec les élèves ordinaires. Cet écart s'est amoindri avec une médiation appropriée.

Mots-clés. Médiation, enfant, déficience intellectuelle, construction temporelle, notion d'âge.

---

1. Pourquoi s'intéresser à la notion d'âge chez des élèves présentant une déficience intellectuelle ?

Au cours d'une carrière, quel enseignant, notamment en maternelle ou dans un dispositif d'enseignement spécialisé, n'a pas eu à gérer une crise d'angoisse chez l'un de ses élèves ? Ce malaise est consécutif à une maîtrise partielle de la notion de temporalité, parce que le temps est impalpable, invisible et souvent matérialisé

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 25, p. 89 – 120.

par des chiffres : il est 3 heures, j'ai 4 ans, nous sommes le 1/9/19, etc… Cette notion requiert également des compétences logico-mathématiques : la conservation de la vitesse, c'est-à-dire que le temps s'écoule toujours à la même vitesse ; la transitivité, par exemple j'ai une semaine si je compte sept jours du lundi au dimanche inclus, cela est aussi vrai si je commence mon décompte à partir du mardi jusqu'au lundi suivant, etc… ; l'emboîtement d'unités qui se répètent, par exemple sept jours pour une semaine, quatre semaines et quelques jours pour un mois, douze mois pour une année par exemple.

Pour pallier à la complexité de cette tâche, le corps professoral propose divers rituels qui rythment le quotidien comme celui de la date, de l'emploi du temps, ou encore des fêtes d'anniversaires. Cependant, cela s'avère insuffisant pour répondre aux besoins spécifiques d'enfants présentant une déficience intellectuelle (DI) parce qu'ils présentent une aptitude moindre à traiter une nouvelle donnée, qu'elle soit simple ou complexe. Ces personnes ont également des difficultés à les assimiler et les réinvestir ultérieurement. Les fonctions intellectuelles les plus touchées sont les capacités à organiser une pensée autour de la résolution d'une tâche ou d'un problème, c'est-à-dire raisonner, planifier ses actions ou encore accéder à une forme de pensée abstraite. Les formes d'apprentissages académiques ou par l'expérience sont également complexes. Or, résoudre un problème sur la notion d'âge fait appel à ces compétences. Des avancées ont été effectuées ces dernières années pour mieux appréhender les causes de cette déficience et le fonctionnement cognitif des personnes concernées (Inserm, 2016). Néanmoins, l'Inserm souligne, dans son rapport de 2016, que les connaissances du fonctionnement de ces individus ne sont pas aussi avancées dans le domaine des mathématiques que pour d'autres pathologies et sont insuffisament diffusées. De plus, peu d'études s'intéressent à mesurer les effets d'une médiation visant à développer les compétences autour de la numération tant autour du sens que de la compréhension. L'Inserm (2016) souligne l'importance « capitale » de ces notions ainsi que le lien entre les notions abstraites et concrètes. Que signifie avoir 3 ans ? Quelle signification donner au chiffre « 3 » ? Comment calculer son âge ? En effet, fournir cette information demeure une question récurrente de la vie quotidienne. Cette donnée chiffrée est un moyen pour l'administration de nous distinguer d'un tiers portant un même patronyme. C'est aussi, et surtout, accéder à la compréhension de concepts complexes et chiffrés qu'il est indispensable d'acquérir à travers un entraînement systématique (Inserm, 2016). Cependant ce même rapport de l'Inserm (2016) souligne que les personnes DI sont rarement incitées à acquérir des compétences autres que des connaissances basiques. A cet effet, cela les pénalisent pour s'insérer dans la société (Inserm, 2016).

La littérature est diserte sur la question de la place de la notion de temps et plus particulièrement le calcul de l'âge dans les apprentissages (Jamet, 2009 ; Jamet, Es-

Saïdi & Ducret, 2010 ; Laterasse et Lescarret, 1990). Il permet à l'enfant de planifier son quotidien, son projet de vie, d'élaborer par là même des relations interpersonnelles (Laterasse et Lescarret, 1990). Le temps agit également sur l'affect de l'enfant : la tristesse, le désir, etc... Grâce à une meilleure appréhension du temps, l'enfant va pouvoir se socialiser et ainsi mieux gérer ses émotions (Laterasse et Lescarret, 1990). Cependant nous n'avons pu recenser que deux études s'intéressant aux élèves DI sur ce sujet dans la littérature francophone, celle de Jamet (2006) sur une population de pré-adolescents et d'adolescents et celle de Viné Vallin, Jamet et Roumieux (2019), mettant en parallèle une population à développement typique et une population présentant une déficience intellectuelle.

L'objectif de cette étude est de proposer une médiation à destination d'élèves DI âgés de 6 à 11 ans. En préambule nous effectuerons un état de la littérature pour comprendre comment s'acquière cette notion d'âge, les compétences sous-jacentes à développer et des dispositifs déjà existants pour y palier. Le rapport de l'Inserm (2016) souligne l'importance d'une évaluation diagnostique. Aussi, dans ce cadre, nous effectuerons une comparaison entre deux populations, l'une dite « typique » et une seconde présentant une déficience intellectuelle légère à importante. Notre but premier est de vérifier si l'acquisition de la notion d'âge se construit de la même manière dans les deux populations. Dans un second temps, elle nous permettra de déterminer si les élèves DI présentent des besoins spécifiques particuliers pour acquérir cette notion d'âge et de les identifier. Au regard du rapport de l'Inserm (2016), leurs besoins semblent être similaires à ceux d'élèves en grande difficulté scolaire. Nous présenterons une médiation les prenant en compte. Enfin, il sera nécessaire de questionner la pertinence de ce protocole.

1.1. Comment se construit la notion d'âge chez l'enfant à développement typique ?

Le calcul de l'âge s'obtient en soustrayant la date de naissance à celle prise à un instant « t ». Un enfant « typique » est capable d'avoir un tel raisonnement à partir de 6 ans (Samartzi, 2008). Decroly (1932) et Piaget (1943, 1946) sont les premiers à s'y intéresser. Piaget (1946) met en évidence quatre stades de développement chez un enfant à développement typique en posant les questions suivantes :

- L'ordre de succession des membres d'une même famille : « Qui est né la première, ta sœur ou toi ? », « Qui est la plus jeune ? », « Tu vivais déjà quand ta petite sœur est née ? », « Et qui est né avant : ta maman ou toi ? », « Ta grand-mère ou ta maman ? », « Ton papa ou ta petite sœur ? », « Ton papa ou toi ? » ;
- Le calcul de l'âge : « Quand est ton anniversaire ? », « Quel âge a ta sœur ? » ;

- La comparaison de l'âge entre deux membres d'une famille : « Laquelle est la plus vieille de vous deux ? », « Et quand elle ira à l'école, laquelle sera la plus vieille de vous deux ? », « Et quand vous serez des demoiselles, une sera plus vieille que l'autre ? », « Ta maman est plus vieille que toi ? », « Ta grand-mère est plus vieille que ta maman ? », « Elles ont le même âge ? » ;

- La conservation de l'écart des durées : « *Tu as combien d'années de plus que ta sœur ?* », « *Et quand tu seras une dame, tu auras encore trois ans de plus qu'elle ?* » ;

- Le vieillissement s'arrête-t-il à l'âge adulte : « *Ta grand-mère devient plus vieille chaque année ?* », « *Et ta maman ?* », « *Et toi ?* », « *Et ta petite sœur ?* ».

Le premier stade est généralement atteint à l'âge de 4 à 5 ans (Piaget, 1943). Les enfants sont capables d'indiquer leur âge sans pour autant s'appuyer sur un calcul. Ils s'appuient sur les affirmations de leurs parents. L'enfant construit son point de vue à partir de ses propres souvenirs et des constats qu'il effectue par lui-même. Aussi personne n'existe avant sa venue au monde. Aucun argument ne peut déstabiliser ses croyances. Enfin, la taille est un indicateur pour déterminer l'âge de la personne jeune et cette dernière cesse de vieillir dès lors qu'elle a atteint l'âge adulte (Jamet, 2005 ; Jamet & Es-Saïdi, 2006 ; Jamet, Es-Saïdi & Ducret, 2010 ; Piaget, 1946).

Un second stade est observé entre 5;6 et 6;6 ans[1], notamment à travers les réponses fournies aux questions suivantes : « *Ton frère/ ta sœur, elle a quel âge ?* », « *Qui est le plus vieux ? Toi ou lui/elle ?* », « *Quand il/elle ira à l'école, qui sera le plus vieux de vous deux ?* », « *Quand vous serez de vieilles personnes, est-ce l'un de vous sera plus vieux ?* » (Jamet, 2005 ; Piaget, 1943). Deux catégories de réponses sont observables. Dans le premier cas, les enfants donnent des réponses correctes à l'ordre de succession. Par exemple, mon frère (resp. ma sœur), s'il (si elle) est plus âgé(e), il (elle) sera toujours l'ainé(e) de la fratrie mais l'écart d'âge entre les deux pourra varier dans le temps. Dans le second cas, l'écart se maintient, mais l'enfant est incapable de déterminer qui est l'ainé(e). Aussi le (la) plus jeune peut devenir l'aîné(e) en vieillissant. Les enfants ne font pas encore de lien entre l'ordre des naissances et la conservation de l'écart d'âge entre ces deux évènements dans la durée (Piaget, 1946). A ce stade, l'enfant associe toujours l'âge à la taille de l'individu.

---

[1] Cette notation usuelle décompose l'âge en années et mois : 5;6 ans désigne 5 ans et 6 mois.

Un stade intermédiaire nommé stade II bis peut être observé entre 6;6 et 7;6 ans (Jamet, 2005 ; Piaget, 1943). La plupart des enfants admettent alors que l'ordre des naissances et de la conservation de l'écart d'âge entre deux membres d'une même famille sont concomitants. Cependant très peu d'enfants sont capables d'expliquer leur raisonnement pour parvenir à cette conclusion. Seul un faible pourcentage y arrive par tâtonnement (Piaget, 1943).

Enfin au stade III les enfants sont capables de répondre à toutes les questions. Ils parviennent à coordonner l'ordre des naissances et l'emboîtement des âges. La conservation des écarts entre les naissances est déduite à partir des dates de naissance des individus. Chez Piaget (1943, 1946) ce stade apparait à partir de 7-8 ans. Pour Kamii et Russell (2010), ce stade débute vers 8-9 ans. L'écart de résultat est expliqué selon ces derniers par une acquisition plus tardive du temps opérationnel qui se caractérise par l'utilisation des compétences logico-mathématiques citées précédemment et d'un raisonnement déductif (Kamii et Rusell, 2010 ; Piaget, 1946).

Kamii et Russell (2010) et Piaget (1943) souhaitent alors comprendre par quel mécanisme la taille va se dissocier de l'âge. Ils utilisent les dessins d'un peuplier de 9 cm de haut, à tronc large et fort et celle d'un arbre de 6,5 cm de haut au tronc mince et tordu, à feuillage ramassé en boule. Sur la base d'un entretien piagétien, les enfants doivent déterminer l'âge de ces deux arbres. Cet échange porte également sur le vieillissement des animaux, des végétaux et des pierres. Les questions suivantes sont posées : « *Les petits chiens vieillissent ?* », « *Et les fleurs vieillissent ?* », « *Et les pierres vieillissent ?* », « *Et toi, tu vieillis ?* ». Il en résulte que les enfants confondent le vieillissement avec leur taille jusque vers 7-8 ans. Selon eux, les organismes cessent de vieillir dès lors qu'ils ont atteint leur taille adulte. Les enfants âgés entre 4;6 et 7;10 ans admettent une proportionnalité entre âge et taille (Kamii & Russell, 2010). A partir de 7;5 ans environ, des individus commencent à dissocier ces deux concepts. La vitesse de croissance des arbres est alors prise en compte (Kamii & Rusell, 2010).

Aussi, nous pouvons retenir les caractéristiques prototypiques suivantes pour chaque des stades :

– Les caractéristiques du stade I peuvent se résumer par l'identité entre grandir et vieillir. Cette identité est sous-tendue par l'observation empirique effectuée dans les premières années de la vie de l'enfant. Les variations ne sont pas suffisamment perceptibles par ce dernier pour qu'il puisse remettre en question ce « fait ». En somme, grandir se résume à vieillir dans les débuts de l'existence. Au terme de la croissance, la personne cesse de vieillir. Il n'y a pas de relation entre âge en tant que durée et ordre de succession. L'enfant présente un égocentrisme temporel, une incompréhension opératoire de la succession, de la durée et une absence de coordination entre l'intuition préopératoire de la succession et de la durée.

– Au stade II, dans un premier cas, la succession est correcte mais il y a non permanence des différences d'âges. Ils confondent toujours l'âge et la taille. Dans un second cas, les différences se conservent mais l'ordre de succession des naissances est incorrect. Le raisonnement s'appuie sur une intuition non opératoire.

– Au stade II bis, le raisonnement est basé sur le tâtonnement et permet à l'enfant de répondre correctement à l'ensemble des questions. Cependant, l'enfant échouera au test du dessin des deux arbres (Kamii & Russel, 2010 ; Piaget, 1943).

– Le stade III est caractérisé par la coordination entre l'ordre de succession des naissances et l'emboîtement des âges, avec une conservation exacte des différences. Le raisonnement est opératoire.

Les enfants avec un développement typique passent par l'ensemble de ces étapes pour acquérir la notion d'âge (Viné Vallin et al., 2019).

1.2. Comment évolue l'habilité à calculer un âge ?

A partir d'un protocole mené par Decroly (1932), Ziadé, Cronier et Zazzo (1981) et Jamet et Es-Saïdi (2006) tentent de mettre en évidence l'évolution du raisonnement chez des enfants âgés de 3 à 10 ans lorsqu'ils répondent aux questions suivantes :

– Q1 : « *Quel âge as-tu ?* » ;

– Q2 : « *L'année dernière, tu avais quel âge ?* » ;

– Q3 : « *L'année prochaine, tu auras quel âge ?* » ;

– Q4 : « *A ta naissance, tu avais quel âge ?* » ;

– Q5 : « *Depuis combien de temps tu es né ?* ».

Selon Jamet et Es-Saïdi (2006), l'ensemble des sujets est capable de fournir leur âge (Q1) dès 4 ans et 90 % à trois ans. Les justifications des réponses évoluent. Entre 3 et 5 ans, ils font référence aux parents. A 5 ans, seuls 13 % s'appuient encore sur ce raisonnement. Dès lors, ils prennent comme référence leur date d'anniversaire : 26 % à 4 ans et 34 % à 5 ans. Enfin, un raisonnement logico-mathématique apparaît entre 4 et 5 ans : *« j'ai quatre ans parce que l'année dernière j'avais trois ans* ». A partir de 5 ans, les enfants peuvent répondre aux deux suivantes : 64 % pour l'âge qu'ils avaient l'année dernière (Q2) et 82 % à l'âge qu'ils auront l'année prochaine (Q3). Vers 8-9 ans, ils répondent à la quatrième. Ce n'est qu'à partir de 10 ans que les enfants répondent à la dernière (Q5). Il apparait que la capacité des enfants à répondre si tôt à la première question ne résulte pas d'un raisonnement mathématique. Il s'agit plutôt d'un apprentissage effectué dans le cadre familial et scolaire (Jamet, 2009). Pour Jamet et Es-Saïdi (2006) et Jamet et al. (2010), l'horizon temporel se décompose en trois unités : l'âge actuel (n), l'âge à venir (n+1) et l'âge précédent (n–1). A 3-4 ans, l'âge se réduit à une unité, l'âge actuel, par une récupération en mémoire. A 4-5 ans, il acquiert une seconde unité, celle de l'âge suivant. A 7 ans, les enfants disposent d'une profondeur temporelle à trois unités. Il faut attendre l'âge de 9-10 ans pour que la profondeur temporelle soit vraiment opératoire. Pour Ziadé et al. (1981), la maîtrise de l'algorithme n'est opérante qu'à l'âge de 10 ans c'est-à-dire que l'enfant est capable de procéder à des inférences pour résoudre ces problèmes mathématiques. Long et Kamii (2001) soulignent par ailleurs que l'enfant va construire son raisonnement à travers ses propres actions. Enfin Viné Vallin et al. (2019) ont interrogé 144 élèves d'ULIS présentant une déficience intellectuelle. Ils ont suivi le protocole de Decroly (1932), Ziadé et al. (1981) et Jamet et Es-Saïdi (2006). Leurs résultats mettent en évidence que la notion d'âge résulte du même processus développemental que chez des enfants à développement typique.

1.3. Quelles caractéristiques pour une médiation ?

Buchel et Paour (2005) énumèrent les conditions nécessaires pour qu'une médiation cognitive apporte des progrès significatifs et durables chez des élèves présentant une déficience intellectuelle. Cette médiation a pour objectif de réduire les différences entre les performances des deux groupes. Le premier est constitué de personnes avec une déficience mentale, le second de personnes à développement typique. Il apparait que les personnes DI ne peuvent pas prendre assez de recul sur une tâche pour reconnaitre la nécessité d'utiliser une stratégie pour résoudre le problème. A cet égard, bien qu'entraînés, ils auront des difficultés à transférer une stratégie à une tâche relativement similaire alors qu'ils pourront le faire sur un exercice identique. Il est possible d'y remédier par un entraînement explicite des points suivants : l'anticipation, la sélection d'un but, la planification, l'organisation de la démarche, l'évaluation des résultats, l'auto-correction. L'entraînement doit être long et se dérouler sur 8 à 10 séances au minimum, avec une structuration précise des séances (Buchel et Paour, 2005).

Dans une autre étude des processus impliqués dans le raisonnement abstrait des personnes DI, Hessel-Schlatter (2006) souligne que les informations stockées dans la mémoire à long terme ne sont pas activées et rendent l'encodage des données dans la mémoire à court terme inopérant. Des principes pédagogiques permettent de corriger ou compenser ces éléments. Ces sujets peuvent être plus performants dès lors qu'ils sont amenés à manipuler les outils. Ainsi, ils n'ont pas besoin d'effectuer de représentation mentale de la tâche. Il est noté que ce dispositif n'est que temporaire et ne doit pas se substituer à l'exercice sur papier au risque d'enfermer la personne dans une *pensée concrète,* c'est-à-dire un objet d'une réalité qui peut être représentée. Ils doivent apprendre à passer par l'abstraction pour résoudre un problème ou une tâche, c'est-à-dire la résoudre mentalement (Hessel-Schlatter, 2006).

1.4. Une ingénierie à destination d'élèves en grande difficulté

Répondre aux questions relatives à la notion d'âge place l'élève en situation de résolution de problèmes. En effet, il ne dispose pas de procédure immédiate lui permettant de trouver la solution. Il est obligé d'inférer pour l'atteindre. Nous présenterons une ingénierie proposant un dispositif de médiation pour la résolution de problèmes. L'étude de Butlen (2007) est réalisée dans une classe de CE2 d'un quartier défavorisé, comprenant un nombre important d'élèves en difficulté. L'auteur prend en compte l'hétérogénéité d'une classe comme levier potentiel d'apprentissage pour amener les élèves à progresser. Il émet l'hypothèse qu'une explicitation orale des méthodes effectuées par les élèves à travers des *bilans de savoirs* lors des séances de mathématiques renforcerait les apports d'une pratique régulière du calcul mental sur la résolution de problèmes. Chaque semaine, deux élèves rédigent un bilan de savoirs, autrement dit, un résumé des notions abordées en mathématiques au cours de la semaine. Ce texte est ensuite inscrit au tableau. Cet écrit est alors la base d'un débat durant lequel les élèves sont invités à le modifier, le préciser. L'enseignant joue au cours de cette phase un rôle de régulateur des débats : il relance les débats, évalue l'accord des élèves pour une proposition de modification, demande des explications complémentaires. La nouvelle version de cet écrit est adoptée puis recopiée dans un cahier prévu à cet effet. Cette ingénierie a permis aux élèves de progresser de manière notable. Cependant cette étude concerne un public à développement typique. Qu'en est-il pour des enfants présentant une déficience intellectuelle ?

2. Méthodologie

Dans le cadre de cette étude, il s'agit de définir les besoins spécifiques d'élèves DI présentant un retard cognitif léger à important afin qu'ils puissent résoudre un problème portant sur la notion d'âge. Nous prévoyons :

- Une différence significative de performance entre les enfants à développement typique et atypique à l'issue de l'évaluation diagnostique.

– Une réduction notable de cet écart lors d'une évaluation finale et de stabilisation après une médiation prenant en comptes leurs besoins éducatifs particuliers (BEP).

2.1 Les participants

Ce groupe d'étude est composé d'élèves scolarisés dans des établissements du premier degré en région parisienne. Pour les deux populations, l'âge moyen est consécutif de la répartition des élèves dans les classes. Le premier se compose de 36 élèves. Ils bénéficient tous d'un dispositif ULIS (Unité Locale d'Inclusion Scolaire) et se répartissent dans trois structures de 12 élèves dans trois écoles distinctes. Ils sont âgés de sept à onze ans (Tableau 1). Ce groupe se compose de 9 filles et de 27 garçons. Tous présentent un retard cognitif léger à important associé à un retard de langage important pour 6 élèves et un retard de développement global pour 3 d'entre eux.

N	Age Mini	Age maxi	Age moyen
11	7 ans	7 ans 10 mois	7 ans 5 mois
4	8 ans	8 ans 11 mois	8 ans 6 mois
4	9 ans	9 ans 11 mois	9 ans 5 mois
17	10 ans	10 ans 11 mois	10 ans 4 mois

Tableau 1. Répartition par âge, enfants DI (ULIS 1), 27 garçons et 9 filles

Notre échantillon d'enfants à développement typique se compose de 200 enfants, soit 108 garçons et 92 filles. Ils sont âgés de sept à dix ans (Tableau 2). Ils sont respectivement scolarisés dans deux classes de CE1, deux classes de CE2, deux classes de CM1 et deux classes de CM2. Ils sont tous issus du même établissement scolaire.

N	Age Mini	Age maxi	Age moyen
50	7 ans	7 ans 11 mois	7 ans 4 mois
50	8 ans	8 ans 11 mois	8 ans 2 mois
50	9 ans	9 ans 10 mois	9 ans 4 mois
50	10 ans	10 ans 11 mois	10 ans 3 mois

Tableau 2. Répartition par âge, enfants à développement typique, 108 garçons et 92 filles

2.2 L'évaluation diagnostique

Pour l'évaluation diagnostique (annexe 1), les élèves ont répondu individuellement dans le cadre d'un entretien clinique piagétien à trois séries de questions. L'objectif de cette évaluation est de recueillir l'ensemble de leurs conceptions premières afin de pouvoir leur proposer, par la suite, des outils qui répondent à leurs besoins. La première reprend les cinq questions de Decroly (1932), Ziadé et al. (1981) et Jamet et Es-Saïdi (2006). Dans un second temps, nous avons repris le dispositif de Piaget (1946), avec les comparaisons des membres d'une même famille. Enfin, les enfants doivent estimer l'âge de deux espèces d'arbres différents à partir d'un dessin (Kamii & Russell, 2010 ; Piaget, 1943). Il leur est également demandé si un chien, une plante et une pierre peuvent vieillir et si nous pouvons leurs donner un âge. En fonction de la fatigabilité de l'élève, l'entretien clinique dure entre 5 et 20 minutes.

2.3. Modalité de répartition des élèves

Afin de répartir les élèves à l'issue de cette évaluation diagnostique, nous avons simulé les réponses attendues pour chaque stade (annexe 1). Nous avons fait le choix de nous baser sur l'ensemble des réponses pour déterminer un niveau d'acquisition et non pas nous restreindre au premier test qui ne comporte que cinq questions. L'objectif est d'avoir une évaluation la plus fine possible pour avoir une meilleure compréhension de chaque sujet en vue d'élaborer une séquence de remédiation qui puisse répondre individuellement à leurs besoins spécifiques. Afin de constituer les groupes, nous avons comptabilisé le nombre de réponses données par élève s'inscrivant dans un modèle. Si une réponse ne correspond pas exactement aux réponses attendues, nous nous sommes fondés sur les explications que l'enfant donnait afin de sélectionner le modèle de réponse qui s'en rapprochait le mieux.

2.4. La médiation

2.4.1. Le matériel

Seuls les élèves inscrits dans un dispositif ULIS participent à cet apprentissage. Trois élèves n'ont pas participé à l'ensemble des séances car ils étaient inclus sur ce temps d'apprentissage. Deux séquences sont menées en parallèle : l'une en découverte du monde, constituée de quatorze séances de quarante-cinq minutes et une en mathématiques sur la résolution de problème, constituée de dix séances de dix minutes (annexes 2 et 3).

Les séances 13 et 14 en découverte du monde portent respectivement sur l'évaluation diagnostique, finale et de stabilisation. Pour faciliter la construction d'un point de vue de l'élève, nous avons fait le choix d'une construction par l'élève de ses propres souvenirs (Piaget, 1946), en rendant le temps palpable par l'observation de l'évolution de plusieurs organismes. Pour simplifier leur reconnaissance, nous avons sélectionné trois espèces clairement identifiables : du cristal d'améthyste, des graines de lentille et des singes de mer. Ils se développent à partir d'un support neutre, d'une graine ou d'un œuf. Le développement du cristal, la germination et l'éclosion peuvent être assimilés à leur « naissance ». En outre, chacun de ces événements intervient au bout de quelques jours à une semaine. Ce sont des notions que de jeunes élèves maîtrisent en premier lieu (Jamet et al., 2010). Au cours de la seconde séance en découverte du monde, les cultures et élevages sont installés : améthyste, lentilles et singes de mer. Vingt graines de lentille sont déposées sur du coton, au bord des parois d'un récipient transparent. Un kit pour fabriquer du cristal d'améthyste synthétique est mis en place. Pour les singes de mer, l'aquarium a été préparé quarante-huit heures plus tôt pour pouvoir y introduire les œufs en même temps que les deux autres expérimentations. Enfin les élèves remplissent un tableau de suivi distribué par l'enseignant (annexe 4). Sont indiqués la date, le numéro de la séance, les observations faites qu'ils accompagnent d'un dessin, puis d'une colonne pour les prises de mesure et l'âge des organismes. Une dernière colonne sert à recopier le bilan de savoirs. Tout au long de la semaine, les élèves suivent l'évolution des spécimens et remplissent leur tableau. Les lentilles sont ensuite mises en terre au bout d'une à deux semaines selon leur développement. Une plantation de haricots sera effectuée en séance 6 pour introduire un élément de différenciation pour les élèves les plus avancés. Ces plantes ont été sélectionnées parce que leur croissance est plus rapide que celle des lentilles. Elles seront aussi « les plus jeunes » en âge.

2.4.1. L'entraînement

Les séances en découverte du monde se décomposent en quatre temps. Le premier temps (dix minutes) est consacré à un rappel de la séance précédente. Le bilan de savoirs de la séance précédente est copié au tableau par l'enseignant. Ce texte est lu collectivement. Il est ensuite soumis à débat pour être amendé et/ou précisé. L'enseignant joue un rôle de régulateur. En deuxième temps (dix minutes), les élèves observent les élevages et cultures en les faisant circuler. Ils commentent les évolutions. L'enseignant note les remarques au tableau. La troisième partie dure quinze minutes. Ce temps est dévolu au travail autour de l'objectif spécifique de la séance (annexe 2). Le quatrième temps (dix minutes) est consacré à une synthèse. Deux groupes travaillent en parallèle : dans le cadre d'un tutorat, deux élèves de stades différents désignés par l'enseignant élaborent un bilan de savoirs. Cet écrit est présenté en introduction de la séance suivante. Les autres élèves remplissent leurs fiches de suivi et copient dans leur cahier le bilan de la séance précédente (annexe 4).

Les séances de résolution de problèmes consistent à résoudre les situations suivantes : « *Combien de jours les améthystes ont de plus que les haricots ? Pourquoi ?* » ; « *Après les vacances de printemps, est-ce que les haricots seront plus vieux que l'améthyste ? Pourquoi ?* », etc. Puis, afin de leur permettre de transférer ces nouveaux acquis à l'humain, des situations-problèmes sont construites à partir des informations des élèves de la classe. « *Qui est le plus vieux, Paul ou Mohamed ? Pourquoi ?* » ; « *Qui est le plus jeune, Marie ou Alice ? Pourquoi ?* », etc. Les élèves sont invités dans ce contexte à inférer pour répondre à ces questions. Dans un premier temps, l'enseignant met en évidence les indices dans les questions, détermine l'âge puis justifie les réponses. L'étayage de l'enseignant diminue progressivement au cours des séances au profit des élèves qui prennent ensuite en charge cette activité. Puis un débat est mis en place pour expliquer comment chacun a trouvé la solution (annexe 3).

2.4.2. L'évaluation finale et de stabilisation

L'évaluation finale est menée à l'issue de l'entraînement (annexe 1). L'évaluation de stabilisation se déroule six mois plus tard, après les vacances estivales (annexe 1). Les deux évaluations se déroulent de manière identique. Le test se décompose en trois parties. Dans une première partie, le questionnaire de Decroly (1932), Ziadé et al. (1981) et Jamet et Es-Saïdi (2006) est repris. Cependant, les élèves sont questionnés sur l'âge de trois organismes distincts. Deux sont issues des expérimentations effectuées en classe, soit le cristal et les lentilles. Le dernier cas est prélevé dans la nature. Il est connu sous le nom de gendarmes ou punaises d'Europe. L'âge des insectes est fixé par l'enseignant. Il sera présenté comme étant plus âgé que les lentilles et l'améthyste. L'âge dans les autres tâches sont issus de leurs fiches de suivi. Dans le cadre des problèmes autour des deux organismes observés en classe, les élèves effectuent un transfert horizontal, c'est-à-dire qu'ils résolvent une tâche de même nature que leur entraînement. Les problèmes qui font intervenir des données autour du gendarme demandent aux élèves d'effectuer un transfert vertical. Le savoir visé reste le même, c'est la situation qui évolue en introduisant un nouvel insecte. Cette tâche demeure plus complexe pour les élèves car les punaises sont plus petites que les lentilles et le cristal mais sont présentées comme étant les plus âgées. Aussi, la taille de cet organisme ne peut être un indicateur de son âge. Pour chaque question, les élèves doivent justifier leurs réponses. Il est précisé en préambule de l'évaluation l'âge des organismes. Puis les élèves sont questionnés sur les points suivants : « *Quel âge ils auront dans une semaine ?* », « *La semaine dernière ?* », « *Depuis combien de temps ils sont nés ?* », « *Quel âge ils avaient à leur naissance ?* ». Dans un second temps, nous leur demandons de comparer ces organismes en répondant aux questions suivantes : « *Qui est le plus vieux, les lentilles ou les améthystes ?* », « *Qui est le plus jeune : les améthystes ou les lentilles ?* », « *Qui est né en premier : la* *lentille ou l'améthyste ?* », « *Combien de jours les lentilles ont de plus que les améthystes après les vacances ?* », « *Après les vacances de printemps, est-ce que la lentille sera plus vieille que l'améthyste ?* », « *Combien de jours les lentilles auront de plus que les améthystes après les vacances ?* ». Ces mêmes questions sont posées pour l'améthyste et le gendarme.

Les deux dernières parties sont identiques à l'évaluation diagnostique. Afin de suivre les progrès de chaque élève, leurs résultats sont inscrits dans leurs livrets d'acquistion des compétences.

3. Les résultats

Nous envisagions une différence significative de performance entre les enfants à développement typique et DI à l'issue de l'évaluation diagnostique. La répartition des élèves selon les stades piagétiens est présentée dans le tableau 3.

	Elèves DI			**Elèves à développement typique**		
Stade	I	II	II bis	II	II bis	III
Effectif	15	9	12	15	110	75
Age moyen (ans;mois)	8;2	10;8	11;4	6	7;9	8;9

Tableau 3. Répartitions des élèves selon les stades piagétiens à l'évaluation initiale

Aucun des 36 élèves DI n'est au stade III. La notion d'âge se construit donc plus lentement chez ces sujets. Nos résultats sont concordants avec ceux de Kamii et Russell (2010) pour les élèves à développement typique pour le troisième stade et avec ceux de Jamet (2005) et Piaget (1943) pour les stades précédents. Le tableau 4 présente l'âge moyen des élèves pour chacun des stades en fonction des travaux de Piaget (1943) et Kamii et Rusell (2010) et l'écart d'âge qu'il y a entre les deux populations à l'issu de cette même évaluation.

Nos sujets DI présentent un écart de 3;2 à 5;2 ans avec des enfants à développement typique sans pour autant maîtriser la notion. En prenant en compte ce résultat et en appliquant un modèle linéaire, un enfant présentant un retard cognitif de 3;2 ans au stade I serait, selon la fourchette d'âges définie par Piaget (1943), au stade III entre 10;2 et 11;2 et entre 12;2 et 13;2 si l'on considère un écart de 5;2 ans. Si l'on prend l'estimation de Kamii et Russell (2010), il serait au stade III entre 11;2 et 12;2 ans (avec un écart de 3;2 ans) et entre 13;2 et 14;2 ans (avec un écart de 5;2 ans).

	Stade I	**Stade II**	**Stade II bis**	**Stade III**
Intervalle de l'âge moyen (ans;mois) chez les enfants à développement typique	4;0 et 5;0 (Piaget, 1943)	5;6 et 6;6 (Piaget, 1943).	6;6 et 7;6 (Jamet, 2005 ; Piaget, 1943).	7;0 et 8;0 (Piaget, 1943) ; 8;0 et 9;0 (Kamii et Rusell, 2010)
Ecarts d'âge (ans;mois) min et max entre les enfants avec DI et les enfants à développement typique de l'étude	3;2 à 4;2	4;2 à 5;2	3;8 à 4;8	

Tableau 4. Age moyen selon les études pour les enfants à développement typique/écart d'âge entre les deux populations

Le tableau 5 présente la progression des élèves à l'issue de l'entraînement :

		Evaluation initiale				
		Stade I	Stade II	Stade II bis	Stade III	Total
Evaluation finale	Stade I					
	Stade II	15				15
	Stade II bis		9	6		15
	Stade III			6		6
	Total	15	9	12		36

Tableau 5. Répartition des élèves DI à l'issue de l'évaluation finale

Trente élèves ont progressé entre les deux évaluations, c'est-à-dire que chaque élève est passé au stade supérieur dans cet intervalle (cellules grisées du tableau 5). Six élèves n'ont pas évolué et sont demeurés au stade II bis. Il est à noter que ces élèves, initialement plus avancés, n'ont pas bénéficié d'un tutorat dans les groupes de travail par un élève d'un stade supérieur et que trois de ces élèves n'ont participé qu'à une partie de l'entraînement. Cela a sans doute eu une répercussion sur leur progression puisque tous les élèves ayant été accompagné par un élève ayant une plus grande expertise ont progressé, notamment les élèves du stade I à l'évaluation initiale. En outre la littérature souligne que les enfants au stade I demeurent imperméables à toute argumentation. Cependant, tous ces élèves ont progressé et sont passés au stade II. Nous pouvons poser comme hypothèse que le tutorat leur a été bénéfique au regard des éléments soulignés précédemment. En outre, les élèves du stade I ont pu s'appuyer sur des souvenirs et des expérimentations qu'ils ont construits individuellement et collectivement pour étayer leur argumentation. Enfin, nous pouvons supposer que proposer une séquence de remédiation à des périodes spécifiques du développement de l'enfant leur soit plus profitable qu'à d'autres. Cela nous permettrait d'expliquer pourquoi certains élèves au stade II bis n'ont pas progressé alors que tous les élèves du stade I ont évolué.

Le tableau 6 présente les résultats après que les élèves ont effectué une évaluation de stabilisation. Elle a pour objectif de vérifier la stabilité des acquisitions chez les élèves ayant suivi la séquence de remédiation.

		Evaluation finale				
		Stade I	Stade II	Stade II bis	Stade III	Total
Evaluation de stabilisation	Stade I					
	Stade II		6			6
	Stade II bis			12		12
	Stade III		9	3	6	18
	Total		15	15	6	36

Tableau 6. Répartition des élèves DI à l'évaluation de stabilisation

Six élèves qui se trouvaient au stade II à l'issue de l'évaluation finale ont conservé leurs acquis ainsi que douze élèves au stade II bis et six élèves au troisième stade. Des élèves ont continué à progresser au cours de cet intervalle, notamment trois élèves qui étaient au stade II bis et sont passés au stade supérieur. En outre, neuf élèves sont passés du stade II en passant directement au stade III. Sont-ils passés au stade intermédiaire sans que nous l'ayons observé ou sont-ils passés directement à ce dernier stade ? Il est difficile de le savoir. Les autres élèves présentant une déficience suivent la même progression que les enfants avec un développement typique.

Les élèves avec une déficience présentent des difficultés à traiter une nouvelle information, qu'elle soit simple ou complexe. Ainsi l'introduction d'un nouveau spécimen dans le cadre de l'évaluation risque de les mettre en difficulté. A cet effet, ils devraient être capables de traiter des problèmes abordés en classe et effectuer un transfert horizontal. En revanche, ils devraient être mis en échec lorsqu'ils auront à résoudre un problème comprenant des données autour du gendarme. En effet, cette tâche est plus complexe et demande à effectuer un transfert vertical de compétences. Ainsi convient-il d'analyser les résultats, tâche par tâche (tableau 7).

		Stade à l'évaluation initiale		
	Nombre d'élèves ayant fourni une réponse correcte/nombre d'élèves au stade X	Stade I N=15	Stade II N=9	Stade II bis N=12
Transfert horizontal	*Quel âge ont les lentilles ?*	12	8	11
	Quel âge ont les améthystes ?	14	9	12
	Après les vacances de printemps, est ce que la lentille sera plus vieille que l'améthyste ?	15	9	12
	Combien de jours les lentilles auront de plus que les améthystes après les vacances ?	15	9	12
	Qui est le plus vieux, les lentilles ou les améthystes ?	14	9	12
Transfert vertical	*Qui est le plus vieux, les gendarmes ou les améthystes ?*	0	6	0
	Après les vacances de printemps, est ce que les gendarmes seront plus vieux que l'améthyste ?	13	9	12
	Combien de jours les gendarmes auront de plus que les améthystes après les vacances ?	15	9	12

Tableau 7. Transfert horizontal/transfert vertical : nombre d'élèves DI ayant fourni une réponse correcte selon les tâches lors de l'évaluation finale

Cinq élèves ont éprouvé des difficultés pour résoudre le problème sur l'âge des lentilles, alors qu'ils n'ont eu aucune difficulté pour fournir cette indication pour l'améthyste à l'exception d'un élève au stade I. Il est important de souligner que 15 élèves sur les 36 estimaient qu'il était possible de donner un âge à une plante contre seulement 5 élèves sur les 36 pour une pierre. Dans ce contexte, cela laisse supposer un rapport entre l'intensité de leurs conceptions premières, le « choc » de leurs découvertes et la dynamique dans laquelle ils vont s'inscrire pour les corriger. Effectivement, les résultats obtenus à la résolution des problèmes comprenant les améthystes comme données sont résolus par l'ensemble des 36 élèves quels que soit leurs stades, dans le contexte d'un transfert horizontal, lorsqu'ils ont à effectuer des comparaisons avec les lentilles. Notons que l'élève de stade I qui ne parvient pas à fournir l'âge de l'améthyste (c'est également l'élève qui ne répond pas à la question « *Qui est le plus vieux, les lentilles ou les améthystes ?* ») parvient à effectuer les autres activités concernant ce minéral.

Dans le cadre d'un transfert vertical, les élèves qui sont aux stades II et II bis parviennent à répondre aux deux questions « *après les vacances de printemps, est-ce que les gendarmes seront plus vieux que l'améthyste ?* » et « *combien de jours les gendarmes auront de plus que les améthystes après les vacances ?* ». Cela met en évidence une très importante modification au niveau de leurs représentations consécutive à leur réaction face à cette information très déstabilisante. Par ailleurs, pour les lentilles, les conceptions premières des élèves étant nettement moins tranchées, les perturbations portées à leurs croyances sont de moindres importances, et leurs performances aux évaluations sont moins significatives.

De plus, les tâches autour des gendarmes peuvent être considérées comme très complexes car les élèves ne peuvent pas tirer de leurs expériences vécues des informations leur permettant de traiter les problèmes relatif à cet insecte. Cependant seuls deux élèves du stade I ne parviennent pas à répondre à la question « *après les vacances de printemps, est-ce que les gendarmes seront plus vieux que l'améthyste ?* ». En outre, seuls 6 élèves ont répondu correctement à la question « *qui est le plus vieux : les gendarmes ou les améthystes ?* ». Cette situation présente deux difficultés : ces insectes sont plus vieux et plus petits que l'améthyste étudiée en classe. Donc les élèves ne peuvent pas se fonder sur la taille de ces spécimens pour les comparer aux autres. Aussi les élèves qui s'appuient sur la taille d'un individu pour définir son âge seront induits en erreur. Cela peut expliquer pourquoi les élèves des stade I et II bis ne parviennent pas à répondre à cette question. Cependant, 6 élèves au stade II parviennent à répondre à ce problème. Il s'agit des 6 élèves qui sont passés au stade III à l'évaluation de stabilisation sans que nous ayons pu observer un passage par le stade II bis. Cela laisse suggérer qu'ils devaient commencer à maîtriser certaines compétences du stade supérieur.

Nous pouvons retenir de cette expérimentation que les élèves DI ont plus progressé dès lors que leurs convictions ont été fortement déstabilisées, et ce, quel que soit le contexte dans lequel ils étaient placés. Le tableau 8 présente une répartition des élèves DI en fonction des stades piagétiens entre l'évaluation initiale et finale et de l’écart d’âge avec la population à développement typique avant et après la médiation.

	Evaluation initiale			Evaluation finale		
Stade	I	II	II bis	II	II bis	III
Effectif	15	9	12	15	3	18
Age moyen (ans ; mois)	8;2	10;8	11;4	9;4	11	12;1
Ecarts d’âge (ans;mois) min et max avec les sujets à développement typique de l’expérimentation.	3;2 à 4;2	4;2 à 5;2	3;8 à 4;8	2;8 à 3;8	3;4 à 4;4	4;1 à 5;1 (Piaget, 1943) 3;1 à 4;1 (Kamii et Russell, 2010)

Tableau 8. Répartitions des élèves DI à l’issue de l’évaluation finale et écart d’âge avec la population typique.

Cette médiation a permis de réduire l’écart existant entre les deux populations. Cette différence d’âge est comprise, en moyenne, entre 3;2 et 3;4 ans, ce qui correspond à un gain d’une année dans le développement temporel chez les élèves présentant une DI. Cela laisse suggérer l’importance d’un entraînement autour de ces notions pour cette population comme le suggère l’Inserm (2016). Cependant cet apprentissage semble devoir être entrepris au cours de certaines périodes spécifiques du développement de l’enfant. Cela permettrait de comprendre pourquoi les élèves du stade II ont le plus profité de cette médiation.

4. Discussion

L’objectif de cette étude est d’évaluer les compétences d’élèves DI par rapport à des sujets à développement typique dans la résolution de problèmes sur la notion d’âge et de proposer une médiation afin d’acquérir des notions autour du concept d’âge. Nous allons dans un premier temps mettre en lumière les besoins spécifiques des élèves DI qui ont émergé au cours de l’évaluation diagnostique et de la médiation. Dans un second temps, nous tenterons d’expliquer pourquoi et comment une médiation a permis cette progression des élèves avant de conclure.

4.1. Les besoins spécifiques des élèves DI

L’évaluation initiale met en évidence un écart d’acquisition des compétences pour résoudre une tâche autour de la notion d’âge chez cette population DI. Aussi, il convient de dégager leurs besoins spécifiques. Nous avons retenu la position selon laquelle, pour répondre à ces problèmes, le sujet doit procéder par un raisonnement déductif (Brégeon, Dossat, Huguet & Vergnaud, 1997). Or la littérature a montré que les personnes présentant une déficience intellectuelle éprouvent des difficultés dans ces deux domaines que sont le traitement d'informations et la capacité à faire appel à des connaissances et compétences déjà acquises (Buchel et Paour, 2005 ; Hessel-Schlatter, 2006). Cela pourrait expliquer l'écart de performance entre les deux populations. En outre, l'analyse de leurs projets personnels de scolarisation met en évidence un stock lexical très limité, notamment pour les élèves du stade I. Les notions de « plus âgé que », « moins âgé que » ne sont pas acquises. La construction du nombre de 0 à 20, la comptine numérique et les ordinaux sont des compétences à construire ou à stabiliser. Enfin, ils n'accèdent pas directement à un raisonnement abstrait. Par conséquent, il est nécessaire de matérialiser toutes les notions abordées. Pour répondre à ces besoins, notamment pour les élèves au stade I, une bande numérique est systématiquement déposée sur la table au début des évaluations et des exercices. Il reste à établir une norme au sein de la classe pour représenter la vie. Dans le cadre d'une séance de géométrie sur les segments qui n'est pas comprise dans cette ingénierie, les élèves sont appelés à proposer une définition du segment. Un élève vient alors à le définir ainsi : « *la vie, c'est un segment* ». Au cours des séances suivantes en découverte du monde, les élèves ont repris cet exemple. Ils l'ont légendé en faisant correspondre le début du segment à la naissance d'un être vivant et la fin, soit à sa mort, soit à l'âge qu'il a actuellement. Parce qu'élaboré collectivement, tous les élèves ont fréquemment fait référence à ce savoir, en nommant l'élève qui avait énoncé cette règle. Il demeure de comprendre pourquoi et comment cette progression a permis cette réduction de l'écart entre les deux populations.

4.2. Pourquoi et comment cette progression ?

Cet entraînement s'organise autour de cinq axes :

- Une tâche répétitive qui aide l'élève à une automatisation des mécanismes. Ceci favorise également le transfert de connaissances ;
- L'enfant procède par une analyse externe d'une problématique pour corriger sa propre conception, les débats autour des bilans de savoirs ainsi que le tutorat vont y contribuer ;
- L'enfant construit sa logique à travers les actions qu'il produit sur un organisme, cela lui permet d'accélérer son développement psychologique et de résoudre donc plus tôt ce type de problèmes, c'est pourquoi la manipulation est privilégiée ;

- L’alternance des problèmes renforcée par l’automatisation des démarches en calcul mental est primordiale pour que les notions mathématiques ne soient pas écrasées par de nouvelles ;
- L’utilisation d’outils de médiation qui peuvent être manipulés, comme la mise à disposition des élevages, d’une bande numérique, etc.

Il a permis à l’ensemble des élèves de passer au stade supérieur, c'est-à-dire les élèves du stade I sont passés au stade II, ceux du stade II au stade II bis entre l’évaluation initiale et finale (Tableau 5). Enfin, nous pouvons supposer que le facteur temps est intervenu dans cette construction au regard de l’évolution des performances pour les élèves au stade II bis entre l’évaluation finale et de stabilisation.

Nous avions envisagé que cette ingénierie serait profitable pour l’ensemble des élèves à l’exception des élèves au stade I. En effet, la littérature a mis en évidence chez ces sujets une résistance à toute argumentation pouvant modifier leurs conceptions premières (Jamet, 2009). Cependant les débats hebdomadaires ont permis d’élaborer des bilans de savoirs (Butlen, 2007). Dès lors les élèves ont pu se rappeler aisément de leurs propres actions et confronter leurs conceptions à celles de leurs camarades en construisant un savoir collectif puis individuel. Par ailleurs, ces écrits ont mis en évidence une évolution au sein de leur raisonnement (annexe 4). En effet, pour la séance 2, les élèves décrivent les actions sans les lier : « *nous nous sommes mis d’accord pour dire que la vie commence quand ils naissent. Ils sont bébés. Ils deviennent jeunes en mangeant. Ils grandissent. Ils deviennent adultes. Ils vont pondre des œufs ou produire des graines. Ils vieillissent. Ils meurent* ». Au cours du bilan de la séance 3, ils décrivent toujours leurs actions : « *les lentilles ont deux jours, les lentilles sont nées le mercredi 2 mars 2017…* » mais, après avoir débattu, ils rajoutent la phrase suivante : « *on se sert de la date pour calculer l’âge* ». A la séance 5, ils commencent à transférer leurs connaissances à l’humain. En effet, ils édictent une règle pour les cultures faites en classe puis nomment cette même loi pour des élèves au sein de la classe. En séance 6, ils ne font plus état des cultures, mais s’appuient sur des cas d’enfants de la classe. En séance 9, ils dégagent en synthèse des outils heuristiques. Néanmoins, il est nécessaire de pondérer ces observations à l’évaluation finale. En effet, les élèves du stade II bis ont très sensiblement progressé sans pour autant passer au troisième stade.

Pourquoi ce groupe n’a-t-il pas autant profité de cette médiation que les autres élèves ? L’analyse du dispositif nous permet de tirer un certain nombre de conclusions. Il en ressort que ces élèves n’ont pas bénéficié du système de tutorat dans sa globalité. En effet, ils ont toujours été en position de tuteur, jamais dans celle d’élève tutoré parce qu’aucun des enfants ne se situait au stade III. Nous supposions un fort lien entre une construction externe du savoir avec des interactions entre pairs de différents niveaux et la correction de ses conceptions personnelles par le biais des bilans de savoirs et le tutorat. Les résultats observés concordent avec cette position.

En outre, ces élèves éprouvent des difficultés pour traiter des situations problèmes (Buchel et Paour, 2005 ; Hessel-Schlatter, 2006). Cependant tous les élèves, à l'exception d'un élève au stade I, ont réussi les tâches des lentilles comparées à l'améthyste lors de l'évaluation finale (*après les vacances de printemps, est-ce que la lentille sera plus vieille que l'améthyste ? Combien de jours les lentilles auront-elles de plus que les améthystes ? Après les vacances, qui est le plus vieux, les lentilles ou les améthystes ?*). A plusieurs reprises, au cours de l'entraînement, les élèves ont comparé l'âge de l'ensemble de ces organismes (lentilles, améthyste, singes de mer, haricot, humain), hormis le gendarme. Lors de l'évaluation, ces problèmes leur ont demandé de faire appel à leurs connaissances construites collectivement correspondant à deux spécimens, de se remémorer leurs stratégies pour les mettre en œuvre afin de parvenir à un résultat. Cela mettrait en évidence qu'un entraînement explicite des démarches leur serait profitable.

Pour des problèmes que l'on pourrait définir de complexe comme la comparaison des gendarmes et de l'améthyste (*après les vacances de printemps, est-ce que les gendarmes seront plus vieux que l'améthyste ? Combien de jours les gendarmes auront-ils de plus que les améthystes après les vacances ?*), nous obtenons des résultats identiques aux épreuves précédemment citées. Au-delà des explications que nous avons apportées, ces questions portent sur le cristal. Se sont-ils particulièrement intéressés à cet objet parce qu'il est venu ébranler leurs conceptions premières ? Cela demanderait à être confirmé.

En conséquence, nous pouvons nous interroger sur les facteurs ayant permis ces performances. Les tâches étaient-elles trop simples ? Est-ce le caractère massif du dispositif qui leur a été profitable ? D'après les travaux de Rattat et Droit-Volet (2002), des enfants à développement typique sont capables, à partir de cinq ans, de transférer une durée d'action apprise au cours d'un entraînement par « *transport-copie* », quel que soit le nombre d'actions dont ils ont fait l'expérience. Le cadre interdisciplinaire obligeait les élèves à transférer leurs connaissances à d'autres organismes que ceux abordés en découverte du monde. Les évaluations formatives effectuées à chaque fin de séance, à travers la rédaction du bilan de savoirs fournissent des outils précis à l'enseignant. Il peut alors reprendre le cas en résolution de problèmes pour automatiser les réponses, faire émerger une règle de calcul ou étendre cet entraînement à d'autres spécimens. Nous pouvons d'ailleurs suivre l'évolution de la structuration de la pensée de ces élèves en nous reportant à leurs bilans de savoirs. Ils passent d'une simple description de la séance à l'élaboration d'outils heuristiques, ce qui corrobore les résultats de Butlen (2007).

La progression des résultats démontre que cette ingénierie permet aux élèves de progresser (tableau 5, 6 et 7) et de stabiliser leurs compétences nouvellement acquises pour 83 % d'entre eux.

En outre, 25 % d'entre eux, après un temps de pause de six mois, ont construit de nouvelles habilités. Cela leur a permis de passer du stade II bis au stade III (tableau VI). Nous pouvons alors nous demander si cette progression est consécutive à cet entraînement ou si elle provient d'une évolution naturelle dans la construction temporelle ? Un élève qui était au stade I à l'évaluation initiale est passé au stade II à l'évaluation finale. Il s'est stabilisé à ce niveau à l'évaluation de stabilisation. Dans ce cadre, cet élève a clairement bénéficié de cette médiation. Un autre élève qui était au stade II bis à l'évaluation initiale n'évoluera au stade III qu'à l'évaluation de stabilisation, restant au stade II bis à l'évaluation finale. Ici, le facteur temps associé à la médiation semble être intervenu. Cela demanderait une nouvelle exploration.

Conclusion

Nous nous sommes intéressée dans le cadre de cette étude à la notion d'âge chez des élèves présentant un retard intellectuel et nous l'avons comparé à l'évolution de cette compétence chez des sujets avec un développement typique. Il s'est avéré que l'acquisition de cette compétence semble évoluer dans un cadre identique, qu'ils présentent ou non des besoins spécifiques. Néanmoins, nous avons constaté des élèves qui ont « sauté » un stade. Cela exigerait d'approfondir ce point. En outre, il a été nécessaire de proposer une médiation partant d'une analyse de leurs besoins afin de diminuer en partie l'écart observé par l'évaluation diagnostique. Devant l'absence de littérature sur ces sujets DI, nous sommes partis d'études faites sur des élèves en grande difficulté scolaire en prévoyant des aménagements afin de répondre aux besoins spécifiques d'enfants présentant une déficience intellectuelle. Ce dispositif, bien que long et contraignant, a permis à ces élèves de progresser et de réduire l'écart avec un public ordinaire. Par conséquent, nous aurions pu imaginer qu'ils ne veuillent s'inscrire de nouveau dans un entraînement aussi contraignant et exigeant. Cependant les propos des élèves sont révélateurs. En effet, ces mêmes enfants, après un vote effectué en classe, souhaitent à la majorité réitérer l'année suivante cette expérience. En général, les enfants qui se voient réussir et progresser dans un domaine donné souhaitent continuer à s'exercer dans ce même domaine. Ceci est d'autant plus vrai pour des élèves avec des besoins éducatifs particuliers car ces élèves mettent plus de temps pour acquérir une compétence et se voient régulièrement en échec. Pour de futurs développements, cela permet d'apporter des éléments congruents tels que la combinaison d'un cadre interdisciplinaire, le tutorat entre élèves où chacun se retrouve en position de tutoré, l'utilisation et la manipulation répétitive de plusieurs objets d'études pouvant ébranler leurs conceptions premières pour ces sujets à développement non typique. Cette recherche concorde avec l'ensemble des travaux sur la notion de la temporalité. Cependant, il a été montré que les personnes présentant une déficience intellectuelle légère à importante construisent plus lentement la notion de temporalité. En outre, nous ne disposions pas de sujets au stade III en préambule de notre étude. A l'issue de l'évaluation initiale, nos sujets DI présentent un écart de 3;2 à 5;2 ans avec des enfants à développement typique. Nos résultats mettent également en évidence que des élèves âgés entre 8 et 10 ans ont le plus bénéficié de cette médiation. Cela pourrait signifier qu'une médiation cognitive peut être apportée par le corps professoral à ce stade (Viné Vallin et al., 2019). Une déclaration d'un enfant, « *Quand je suis né, j'ai zéro an, ensuite un an, après deux ans, après trois ans, après quatre ans, après cinq ans, après six ans, là j'ai sept ans, et après c'est quoi le numéro* ? », illustre une autre perspective de recherche. En effet, l'utilisation d'une bande numérique a permis à cet enfant de répondre à son interrogation et de poursuivre son raisonnement. De plus, pour les questions se focalisant sur l'ordre sérial, il a été nécessaire d'illustrer notre discours par des images de personnes prises à différents stades de la vie. Sans cet étayage, nous n'aurions pu quantifier les progrès des élèves du stade I entre les différentes évaluations. La difficulté des enfants pour répondre à ces questions provient-elle de l'absence de maîtrise du vocabulaire spécifique à ce champ disciplinaire ou de la comptine numérique ? Cela laisse suggérer, d'une part, que certains enfants sont encore dans une pensée concrète et d'autre part, qu'il y a un lien entre la construction du nombre, du langage et celle du temps. Enfin, ce passage à l'abstraction du concept temporel se ferait-il grâce à la construction du nombre et plus spécifiquement par une synthèse entre les opérations de classification, les emboîtements de ces mêmes classes et les relations d'ordre ? En effet, aucun élève de ces groupes d'étude n'avait conscience au début de cette expérimentation que sept jours étaient l'équivalent d'une semaine, et douze mois l'équivalent d'une année. Au terme de l'étude, cette notion était acquise pour la moitié de l'effectif. Pour l'autre moitié, cette compétence était en cours d'acquisition. Ceci serait donc une autre piste à étudier.

Bibliographie

BREGEON, J.-L., DOSSAT, L., HUGUET, F. & VERGNAUD, G. (1997). *Le moniteur de mathématique, cycle 3 Résolution de problèmes*. Paris : Nathan.

BUTLEN, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique*. Besançon : Presse universitaire de Franche Comté.

BUCHEL, F-P. & PAOUR, J-L. (2005). Déficience intellectuelle : déficits et médiation cognitive, *Enfance*, **3**, 227-240.

DECROLY, O. (1932). *Etudes de psychogenèse*. Bruxelles : Lamertin.

HESSELS-SCHLATTER, C. (2006). Le développement des compétences dans le raisonnement abstrait chez les personnes présentant un retard mental modéré à sévère, *Pédagogie spécialisée*, **1**, 27-30.

INSERM (2016). *Déficience intellectuelle, Expertise collective, Synthèse et recommandation*. Paris : Inserm édition.

JAMET, F. (2005). Quel âge as-tu ? « Chai pas, faut que j'demande à ma mère ». *In Scolariser la petite enfance. Actes du deuxième colloque « Constructivisme et éducation »*, **vol 1**, 405-413. Genève : Switzerland.

JAMET, F. (2006). De la psychologie aux situations de handicap : première approche développementale et modélisation du temps chez l'enfant et l'adolescent présentant une déficience intellectuelle. *In Colloque Relativité et handicap,* 21-38. Bailly-Romainvilliers : France.

JAMET, F. (2009). Environnement temporel, enseignement et apprentissage du temps à l'école maternelle en France. *In Construction et Education III Colloque Construction intra intersubjective des connaissances et du sujet connaissant*, 139-145. Genève : Suisse.

JAMET, F. & ES-SAÏDI, M. (2006). « Quel âge as-tu ? » : étude développementale chez l'enfant de 3 à 10 ans. *Deuxième entretien de psychologie,* 2-4 novembre 2006, Paris.

JAMET, F., ES-SAÏDI, M. & DUCRET, J-J. (2010). « Quel âge as-tu ? » : Étude développementale chez l'enfant de 3 à 10 ans. *Revue Québécoise de Psychologie,* **31**, 171-191.

KAMII, C. & RUSELL, K.A. (2010). The older of two trees: young children's developpement of operational time. *Journal for research in mathematics education,* **41(1)**, 6-13.

LATERASSE, C. & LESCARRET, P. (1990). La construction de l'horizon temporel chez l'enfant. *Temporalistes,* **14**, 13-20.

LONG, K. & KAMII, C. (2001). The measurement of time: children's construction of transitivity, unit iteration, and conservation of speed. *School sciences and mathematics*, **101(3),** 125-131.

PIAGET, J. (1943). Une expérience sur le développement de la notion de temps. *Revue suisse de psychologie et de psychologie appliquée,* **3(1)**, 179-185.

PIAGET, J. (1946). La notion d'âge. *In Le développement de la notion de temps chez l'enfant*. Paris. PUF, chapitre IX, 210-238.

RATTAT, A-C & DROIT-VOLET, S. (2002). Le transfert de l'apprentissage de durée d'action chez le jeune enfant : l'effet facilitateur de la variété des actions ? *Presses universitaires de France, Enfance*, **54**, 141-153.

SAMARTZI, S. (2008). Etude développementale des notions de durée et d'âge : temps physique et temps biologique. *Bulletin de psychologie*, **498**, 551-560.

VINE VALLIN, V., JAMET, F. & ROUMIEUX, I. (2019). La notion d'âge chez des enfants présentant un trouble du développement intellectuel. *Carrefour de l'éducation*, **48**, 121-133.

ZIADE, M., CRONIER, F. & ZAZZO, R. (1981). « Quel âge as-tu ? » : une étude sur la notion d'âge chez les enfants de 6 à 10 ans. *Enfance*, **3**, 133-140.

VALERIE VINE VALLIN

Centre de Recherche Interuniversitaire

Expérience Ressources Culturelles Éducation (UR3971)

Université Sorbonne Paris Nord (UP13)

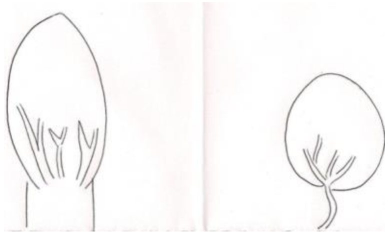
valerie.vine.vallin@gmail.fr

Annexe 1. Réponses attendues pour l'évaluation initiale, finale et de stabilisation

Questions	Stade I	Stade II Conservation de l'écart.	Stade II Conservation de l'ordre des naissances.	Stade II bis	Stade III
1/T'as quel âge ? Comment le sais-tu ?	7 ans, ma maman me l'a dit.	8 ans, j'ai eu mon anniversaire	8 ans, j'ai eu mon anniversaire	8 ans, j'ai eu mon anniversaire.	10 ans, parce que je suis né le …..
2/L'année dernière, t'avais quel âge ? Comment le sais-tu ?	6 ans, je ne sais pas.	7 ans, je ne sais pas.	7 ans, je ne sais pas.	7 ans, parce que j'ai 8 ans ou je ne sais pas.	9 ans parce que cette année j'ai 10 ans.
3/L'année prochaine, t'aura quel âge ? Comment le sais-tu ?	8 ans, je ne sais pas.	9 ans, je ne sais pas.	9 ans, je ne sais pas.	9 ans, parce que j'ai 8 ans ou je ne sais pas.	11 ans parce que cette année j'ai 10 ans.
4/A ta naissance, quand tu es né, tu avais quel âge ?	Je ne sais pas, maman ne me l'a pas dit.	50, 1 an, je ne sais pas ou 0 jour ou 0 mois.	Je ne sais, ou 0 jour, 0 mois.	Dessine un segment, place le 0 : donc j'avais 0 mois ou 0 jour.	0 jour ou 0 mois.
5/ Au fait, ça fait combien de temps que t'es né ?	Je ne sais pas, maman ne me l'a pas dit.	10, un jour, je ne sais pas, 8 ans.	Je ne sais pas, 8 ans.	Dessine un segment, place le 8 : donc 8 ans.	10 ans
6/ Tu as des frères et sœurs ? Ils s'appellent comment ?	Alex	Alex	Alex	Alex	Alex
7/ Alex, il a quel âge ?	4 ans	4 ans	4 ans	4 ans	4 ans
8/ Lequel est le plus vieux ?	Moi ou lui	Moi	Moi	Moi	Moi
9/ Quand Alex ira à l'école, lequel sera le plus vieux de vous deux ?	Moi ou lui	Moi	Moi	Moi	moi
10/ Quand vous serez de vieilles personnes, est-ce l'un de vous sera plus vieux ?	Non	Oui	Oui	Oui	Oui
11/ Lequel ?	Moi	Moi	Moi	Moi	Moi
12/ Ton papa, il est plus vieux ou pas plus vieux que toi ?	oui	Oui	Oui	Oui, il est plus grand.	Oui
13/ Ta grand-mère, elle est plus vieille que papa ?	Non	Oui	Oui	Oui, elle a des rides, pas mon papa.	Oui

14/ Ils ont le même âge ou pas le même âge ?	Oui	Non	Non	Non.	Non
15/Ton grand père, est-ce qu'il devient chaque année plus vieux ou pas ?	Non	Oui	Oui	On fête son anniversaire, donc, oui.	Oui
16/ Et ton papa, il devient chaque année plus vieux ou pas ?	Non	Oui	Oui	Pareil, oui.	Oui
17/ Et toi ?	Oui, je grandis.	Oui	Oui	Oui, parce que je grandis.	Oui
18/ Et ton frère ?	Oui ou non.	Oui	Oui	Oui, il grandit.	Oui
19/ Entre toi et ton frère, qui est né le premier ? Toi ou ton frère ?	Moi ou lui	Lui	Moi	Moi	Moi
20/ Qui est le plus jeune ? Toi ou ton frère ?	Moi ou lui	Moi	Lui	Lui	Lui
21/ Au fait, tu as combien d'année de plus que lui ?	30 jours, je ne sais pas, 30 ans	4 ans	30 jours, je ne sais pas, 30 ans	Alors moi, j'ai 8 ans, lui a 4 ans, alors je compte, 1, 2, 3, 4 : 4 ans.	10-4 =6
22/ Quand tu seras grand comme moi, tu auras encore combien d'année de plus que lui ?	Je ne sais pas	Toujours pareil : 4 ans	2 ans.	Toujours pareil, 4 ans	4 ans
23/ Quand ton frère est né, tu vivais déjà ou pas ?	Oui ou non, je ne sais pas	Oui	Oui	Oui	Oui
24/ Qui est né le premier toi ou ton frère ?	Moi ou lui	Moi ou lui	Moi	Moi	Moi
25/ Qui est né avant, ton père ou toi ?	Moi	Moi	Mon père	Mon père	Mon père
26/Qui est né avant, ton grand père ou ton père ?	Mon papa	Mon papa	Mon grand père	Mon grand père	Mon grand père
27/ Qui est né avant, ton père ou ton frère ?	Mon frère	Mon frère	Mon papa	Mon papa	Mon papa
28/ Qui est né avant, ton père ou toi ?	Moi	Moi	Mon papa	Mon papa	Mon papa

Question : rien qu'en regardant ces dessins, lequel de ces deux arbres est le plus âgé ? Peut-on être sûr, peut-on le savoir ? » (Kamii, 2010 ; Piaget, 1946).



Les réponses attendues :

- Pour le stade I, II et II bis : ils désigneront l'arbre le plus grand comme étant le plus âgé ;
- Pour le stade III : nous ne pouvons donner d'âge à moins de connaître la date de naissance des arbres ou leur âge respectif.

Annexe 2. Séquence d'apprentissage en découverte du monde

	OBJECTIFS SPECIFIQUES
1	Recueil des conceptions premières : évaluation initiale.
2	Déterminer l'âge des œufs des tryops, des lentilles et des futurs cristaux de roche. Emission d'hypothèses : que nous faut-il pour déterminer l'âge d'un organisme vivant ou non ?
3	Avoir une démarche scientifique et créer un outil pour suivre l'évolution des organismes. Mise en place des élevages : tryops, escargots et cristal. Que nous faut-il pour suivre le développement de nos élevages ?
4	Observation des éclosions. Déterminer l'âge de nos spécimens une fois qu'ils viennent d'éclore. Quel âge ont-ils à leur naissance ? Comment on le sait ? Elaboration de la fiche de suivie
5	Au fur et à mesures des éclosions, déterminer l'âge des organismes. Effectuer une sériation du plus jeune au plus vieux. Résoudre un problème pour déterminer l'âge de chaque spécimen aujourd'hui.
6	Une semaine plus tard : tous les « bébés » auront éclot et auront la taille « d'adolescents ». Déterminer l'âge des organismes. Effectuer une sériation du plus jeune au plus vieux.

	Résoudre un problème pour déterminer l'âge et l'âge qu'ils auront dans une semaine. Ordonner les images de la séance précédente sur un axe : 1 carreau = 1 jour. Mise en évidence de l'intervalle du temps écoulé pour les amener plus tard à constater de la conservation de l'écart dans le temps ainsi que la conservation de l'ordre des naissances.
7	Une semaine plus tard les tryops seront à la taille adulte. Déterminer l'âge des organismes. Effectuer une sériation du plus jeune au plus vieux. Résoudre un problème pour déterminer l'âge et l'âge qu'ils auront dans une semaine. Ordonner les images de la séance précédente sur un axe : 1 carreau = 1 jour.
8	Une semaine plus tard des tryops vont sans doute mourir. Est-ce qu'ils continuent de vieillir s'ils sont morts ? Pourquoi sont ils morts ?
9	Deux semaines plus tard, peut être éclosion d'une nouvelle génération de tryops. Comment vont-ils ordonner cette nouvelle génération ? Vont-ils garder en mémoire l'ordre initial ou vont ils prendre en compte leur date de naissance ? Ordonner les images de la séance précédente sur un axe : 1 carreau = 1 jour.
10	Vérification des hypothèses. Ordonner les images de la séance précédente sur un axe : 1 carreau = 1 jour. Effectuer une synthèse. Il faut une date de naissance pour déterminer un âge. Il faut effectuer une différence entre une date et la date de naissance pour connaitre l'âge. Conservation de l'écart entre les naissances et dans l'ordre des naissances. Définir la notion de jour et de semaine.
11	Transfert à l'être humain. Photo d'eux bébé : tu avais quel âge ? comment le sais-tu ? Photo d'eux aujourd'hui : quel âge as-tu ? comment le sais-tu ? Photo d'un parent : quel âge il a ? comment le sais-tu ? Photo d'un grand parent : quel âge il a ? comment le sais-tu ? Pour les élèves qui n'ont pas fourni de photo, donner des photos de personnes inconnues.
12	Bilan de la séquence. Qu'est ce qu'une année ? qu'est ce qu'un anniversaire ? Et les mois, alors, qu'est ce que c'est ? Est les jours et les semaines par rapport à une année ? S'appuyer sur les rituels du matin avec la date et le calendrier.
13	Evaluation finale
14	Evaluation de stabilisation

Annexe 3. Séquence en résolution de problème et rôle de chacun

Programmation	Tâche	Enseignant	Elève
Séance 1	- Evaluation diagnostique.		X
Séance 2 La lentille.	- Qui met en évidence les indices ? - Qui détermine l'âge ? - Qui justifie les réponses ?	X X X	
Séance 3 Lentille/Améthyste	- Qui met en évidence les indices ? - Qui ordonne les organismes du plus jeune au plus vieux ? - Qui justifie les réponses ?	X X	 X
Séance 4 L'améthyste	- Qui met en évidence les indices ? - Qui détermine l'âge des organismes ? - Qui justifie les réponses ?	 X X	X
Séance 5 Améthyste/Singe de mer	- Qui met en évidence les indices ? - Qui ordonne les organismes du plus jeune au plus vieux ? - Qui justifie les réponses ?	 X	X X
Séance 6 Le singe de mer	- Qui met en évidence les indices ? - Qui détermine l'âge des organismes? - Qui justifie les réponses ?		X X X
Séance 7 Singe de mer/Lentille	- Qui met en évidence les indices ? - Qui ordonne les organismes du plus jeune au plus vieux ? - Qui justifie les réponses ?		x X X
Séance 8 et 9	Evaluations finale et de stabilisation.		X

Annexe 4. Fiche de suivi

Date et séance	**Observations**	**Dessin en respectant les mesures**	**âge des organismes**	**Les bilans de savoir.**
1/3 **N° 2**	Nous avons installé l'aquarium il y a deux jours.On a planté les lentilles et le kit pour faire pousser un cristal et misles œufs dans l'aquarium.	Ils mesurent 0 cm.	Ils ne sont pas encore nés	Nous nous sommes mis d'accord pour dire que la vie commence quand ils naissent. Ils sont bébés. Ils deviennent jeunes en mangeant. Ils grandissent. Ils deviennent adultes. Ils vont pondre des œufs ou produire des graines. Ils vieillissent. Ils meurent.
2/3	Naissance des lentilles		0 jours	
3/3	Des petites pousses sont visibles au niveau des graines des lentilles. Elles sont nées hier.	Les lentilles mesurent 2 mm. Les autres, 0 cm.	Lentilles : 1 jour Les cristaux et les singes de mer ne sont pas nés.	
4/3 **N° 3**	Les cristaux ont poussé.	Les lentilles 4 mm et les cristaux 2 mm.	Les lentilles : 2 jours Les cristaux : 0 jour	« Les lentilles ont deux jours, les lentilles sont nées le mercredi 2 mars. On se sert de la date de naissance pour calculer l'âge.
7/3 **N° 4**	Les singes de mer sont nés.	Lentilles : 1 cm Cristaux : 5 mm Singes : 1 mm	Lentilles : 5 jours Cristaux : 3 jours Singes : 0 jour Haricot : pas nés.	Nous avons planté des haricots blancs dans un bac transparent. Les lentilles ont 5 jours et les cristaux, 3. Avant les lentilles avaient o jour parce qu'elles venaient de naître. Les lentilles sont nées le 2 mars et les cristaux le 4 mars. Les lentilles sont nées avant les cristaux. Nous pouvons le savoir en demandant l'âge ou demander leur date d'anniversaire.
10/3 **N°5**	Tous ont grandi. Nous avons sorti les cristaux du liquide violet.	Lentilles 2, 5 cm Cristaux : 6 mm	Lentilles : 8 jours Cristaux : 6 jours	Les haricots ont germé. Ils sont nés hier. Pour savoir qui est né en premier, nous regardons la date de naissance ou l'âge. Pour savoir

		Singe de mer : 3 mm Haricot : 2mm	Singes : 3 jours Haricots : 1 jour	depuis combien de temps on est né, on prend l'âge de la personne ou on dessine un segment car Will a dit que la vie c'est un segment. Pour savoir la différence d'âge entre deux personnes, on leur demande leur âge. Par exemple Bris a 9 ans et Chris a 7 ans. On fait 9-7=2. Ils ont toujours deux ans d'écart.
14/3 **N° 6**	Tous ont grandis. Les haricots sont plus grands que les cristaux.	Lentilles : 5 cm Cristaux 6 mm Singes : 3 mm Haricots : 1, 5 cm	Lentilles : 12 jours Cristaux : 10 jours Singes : 7 jours Haricots : 4 jours	Lorie est plus petit que Ralf en taille. Ralf a 10 ans et Lorie a 11 ans. Il ne faut pas regarder la taille mais leur âge pour savoir qui est le plus vieux. L'écart est d'un an. Il sera toujours le même. Je m'arrête de grandir à 19 ans mais je continue de vieillir.
31/3 **N°9**				On peut dessiner un segment (un trait avec un début et une fin) pour représenter la vie. Wolf a 7 ans : 0 : c'est l'âge qu'il a à sa naissance. C'est le début du segment. 7 ans : l'âge qu'il a et indique depuis combien de temps il est né. C'est la fin du segment. On regarde l'âge et non la taille de la personne pour savoir qui est né en premier. L'écart d'âge reste toujours pareil. On vieillit jusqu'à notre mort.

VIRGINIE HOULE, FABIENNE VENANT, RAQUEL ISABEL BARRERA-CURIN

ÉVOLUTION ET INTERINFLUENCE DES MODES D'AGIR, PARLER ET PENSER LES FRACTIONS DANS DEUX PROBLEMES MULTIPLICATIFS

Abstract. Based on studies focusing on the roles of language in the teaching and the learning of mathematics, three dimensions are distinguished - acting, talking and thinking - interrelated. In order to explore the interactions and progressive transformations of these dimensions during the teaching and the learning of fractions, a teaching sequence was experimented in a specialized class. The sequence is composed of a network of problem focusing on multiplicative relationships inherent in the concept of fraction. In this article, we present the *a priori* and *a posteriori* analyses of two of these problems. These analyses are carried out in a didactic framework enriched with a specific perspective on the modes of acting, speaking and thinking the multiplicative relationships in question.

Résumé. Des études s'intéressant aux rôles du langage dans l'enseignement-apprentissage des mathématiques distinguent trois dimensions – agir, parler et penser – qui s'interinfluencent. Afin d'explorer les interactions et les transformations progressives de ces dimensions lors de l'enseignement-apprentissage de la fraction, une séquence d'enseignement composée d'un maillage de problèmes a été expérimentée dans une classe spécialisée. La séquence vise plus particulièrement un travail sur des relations multiplicatives inhérentes au concept de fraction. Nous présentons, dans cet article, les analyses *a priori* et *a posteriori* de deux problèmes de la séquence en nous appuyant sur un cadre didactique enrichi d'un regard spécifique sur les modes d'agir, parler et penser les relations multiplicatives en question.

Mots-clés. Agir, parler et penser ; fractions ; langage ; résolution de problèmes ; enseignement-apprentissage des mathématiques.

Introduction

L'école a notamment comme mission d'amener les élèves à rencontrer certains savoirs savants. L'enseignement vise donc, en quelque sorte, à favoriser le passage de concepts spontanés, qui sont rencontrés dans le quotidien des élèves, aux concepts savants (Jaubert & Rebière, 2012). Dans le cas des fractions, les enfants, avant même d'entrer à l'école, ont certaines connaissances des mots « moitié », « demie » et « quart » qu'ils entendent dans la vie quotidienne. Ces connaissances peuvent cependant être en décalage avec les concepts savants correspondants. Prenons le cas d'une mère qui partage son biscuit avec son enfant en lui mentionnant qu'elle va lui en donner « la moitié ». Le partage en deux étant bien souvent inégal, cela peut conduire l'enfant à demander s'il peut avoir « la plus grosse moitié ». Cet exemple

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 25, p. 121 – 150.

montre que les modes d'agir, de parler et donc aussi de penser les objets mathématiques, se construisent d'abord dans le quotidien des enfants. L'enseignement permet de faire évoluer les modes d'agir, de parler et de penser les objets mathématiques de façon à ce qu'ils se rapprochent progressivement des concepts savants. Les interactions langagières entre les élèves et celles entre les élèves et l'enseignant jouent un rôle important dans la mise en place de la communauté discursive.

Le rôle du langage dans l'enseignement et l'apprentissage est l'objet d'étude de divers travaux articulant la linguistique et la didactique. Dans le cadre de notre recherche, le langage est considéré comme étant « une activité dialogique et située » (Bernié, 2002) et son rôle dépasse ainsi largement celui de média (Bronner et al., 2013). Il met en jeu la langue, c'est-à-dire les signes oraux et écrits partagés par une communauté (Hache, 2013), mais il englobe aussi tout ce qui permet de s'exprimer et de communiquer avec les autres. L'analyse des échanges verbaux ne suffit donc pas pour donner du sens aux objets de savoir. En conséquence, afin d'approfondir nos analyses sur le langage comme étant une activité complexe, nous nous intéressons à trois dimensions de l'activité langagière, soit agir, parler et penser, tel qu'exposé par Bernié (2002) et Jaubert et Rebière (2012). Ces trois dimensions sont traitées comme une entité dans la mesure où elles s'interinfluencent. On parle alors de « l'agir-parler-penser », qui permet d'articuler, à travers le langage, l'enseignement, l'apprentissage et les objets de savoirs.

Les trois dimensions du langage, agir-parler-penser, permettent notamment d'appréhender l'activité mathématique des élèves et de l'enseignant. Elles sont utiles pour procéder à une fine analyse des interactions didactiques, comme en témoignent des recherches récentes en didactique des mathématiques portant sur l'analyse des modes d'agir-parler-penser les objets de savoir dans le domaine de la géométrie (Barrera-Curin, Bulf & Venant, 2016 ; Barrier, Chesnais & Hache, 2014 ; Barrier, Hache & Mathé, 2013 ; Bulf, Mathé & Mithalal, 2014, 2015). Nous faisons l'hypothèse qu'une analyse de la relation entre enseignement, apprentissage et objets de savoir sous l'angle de l'agir-parler-penser est aussi pertinente pour d'autres domaines mathématiques que la géométrie. En conséquence, nous avons choisi d'explorer comment les modes d'agir-parler-penser interagissent et évoluent lors de l'enseignement-apprentissage des fractions, en nous intéressant plus particulièrement à la coordination progressive entre les connaissances sur les fractions et celles sur les structures multiplicatives (Houle & Giroux, 2018).

1. Concept de fraction

La fraction occupe une place importante dans le cursus scolaire québécois, en particulier dans la transition primaire/secondaire (Houle, 2016). Ce contenu mathématique est cependant reconnu difficile tant pour l'apprentissage que pour l'enseignement. Selon Rouche (1998), les fractions seraient même « un des premiers et principaux terrains où se développe le dégoût des mathématiques et la conviction, à peu près toujours fausse, que l'on est incapable de cette activité « réservée aux plus intelligents » » (p. 1). Cette difficulté s'explique notamment par le fait que plusieurs connaissances construites en travaillant sur les nombres naturels se révèlent fausses lorsque vient le temps de travailler avec les nombres rationnels, ce qui amène les élèves à se confronter à certains obstacles épistémologiques.

Contrairement aux nombres naturels, les nombres rationnels peuvent être représentés par différentes formes d'écriture. Les plus fréquentes sont sans doute l'écriture décimale (à virgule) et la fraction. La fraction est d'ailleurs généralement définie comme une des formes d'écriture du nombre rationnel. Elle consiste à exprimer un nombre rationnel sous la forme $\frac{a}{b}$, où a (appelé numérateur) et b (appelé dénominateur) sont des entiers relatifs et où b est différent de zéro. La fraction $\frac{a}{b}$ représente le quotient de a par b ($a \div b = \frac{a}{b}$). Cette forme d'écriture est cependant très différente de l'écriture décimale qui s'inscrit dans le prolongement de l'écriture des nombres entiers. En effet, l'écriture fractionnaire rompt davantage avec l'écriture des nombres entiers que l'écriture décimale, car elle ne repose pas exclusivement sur les groupements en base 10 et sur la valeur positionnelle (Houle, 2016).

L'écriture fractionnaire offre une entrée sur les nombres rationnels bien différente de l'écriture décimale. Elle nécessite de prendre en compte trois objets : le numérateur, le dénominateur et la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur. L'écriture fractionnaire est particulière dans la mesure où le nombre qu'elle exprime correspond à la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur. Il y a, par conséquent, une infinité de fractions qui expriment un même nombre. La relation d'équivalence entre les fractions est constitutive de la définition d'un nombre rationnel, qui consiste en un ensemble de couples ordonnés équivalents (a, a') de nombres entiers, avec $a' \neq 0$, dont l'équivalence est déterminée par la relation R suivante : $(a \div a')\ R\ (b \div b')$ si et seulement si $a \times b' = a' \times b$. Le couple (a, a') peut être symbolisé par l'expression $\frac{a}{a'}$ et la relation entre deux éléments de la même classe d'équivalence par l'expression $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ si et seulement si $a \times b' = a' \times b$.

Des chercheurs (Houle, 2016 ; Rosar, Van Nieuwenhoven & Jonnaert, 2001 ; Streefland, 1991) expliquent que les élèves, s'appuyant sur leurs connaissances sur les nombres naturels, interprètent la fraction comme deux nombres naturels, et ont alors de la difficulté à concevoir la fraction comme un seul nombre. Ainsi, le numérateur et le dénominateur sont traités de manière indépendante, comme une double cardinalité, sans que la relation multiplicative entre les deux termes ne soit établie. Les difficultés rencontrées dans l'apprentissage des fractions ne peuvent être traitées indépendamment de la manière dont ce contenu est enseigné. Dans les écoles primaires, la fraction est souvent enseignée et donc interprétée comme étant la partie d'un tout, et ce, jusqu'à la fin du primaire (Rioux, 2003 ; Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007). Dans la fraction $\frac{a}{b}$, a correspond alors à un nombre désigné de parties d'un tout partagé en b parties égales. Cette manière d'aborder la fraction ne favorise pas la coordination entre les connaissances sur la fraction et celles sur les structures multiplicatives, ce qui est pourtant au cœur même du concept de fraction (Desjardins & Hétu, 1974 ; Houle & Giroux, 2018 ; Kieren, 1989). Pour identifier $\frac{a}{b}$ d'un tout, il est effectivement possible de partager le tout en b parties égales et de prélever a de ces parties, sans établir la relation multiplicative entre la partie (le numérateur) et le tout (le dénominateur). Les fractions sont alors interprétées comme l'expression de grandeurs absolues plutôt qu'en termes de rapport.

En contexte, une fraction peut effectivement être utilisée pour exprimer le rapport entre deux grandeurs (ex. : la largeur d'un rectangle correspond aux $\frac{2}{3}$ de sa longueur) ou pour exprimer la mesure d'une grandeur (ex. : Léa a mangé $\frac{1}{6}$ d'une tarte). Une fraction est une relation qui peut exprimer une mesure lorsqu'elle est mise en rapport avec une unité donnée. Behr, Harel, Post et Lesh (1992) donnent à ce propos l'exemple d'une mère qui prépare une fête d'anniversaire et qui offre, à chacun des invités, quatre petits cadeaux qu'elle met dans une tasse. Elle demande à son assistant de donner à chaque invité une tasse. La tasse devient alors l'unité et les petits cadeaux perdent leur « identité » dans la mesure où un cadeau ne correspond alors plus à « 1 », mais à une sous-unité de l'unité « tasse », en l'occurrence à « $\frac{1}{4}$ » de tasse. Un invité qui, par mégarde, reçoit trois cadeaux dans sa tasse (au lieu de quatre) indique non pas qu'il lui manque un cadeau, mais que sa tasse n'est pas pleine. Ainsi, la tasse devient en quelque sorte l'unité utilisée pour « mesurer » le cadeau. Enfin, comme le mentionnent Behr et al. (1992), la construction de la complétude de la tasse est basée sur le type d'objets mentaux que l'on construit à partir des relations numériques que l'on voit entre les petits cadeaux et la tasse.

Des chercheurs (Desjardins et Hétu, 1974 ; Blouin, 1993 ; Brousseau & Brousseau, 1987) montrent que plusieurs élèves s'appuient à tort sur les structures additives pour interpréter la relation entre le numérateur et le dénominateur, ce qui s'explique sans doute en grande partie par le fait que les connaissances sur les structures additives sont mieux maîtrisées par ces élèves que celles sur les structures multiplicatives. En effet, les élèves apprennent à procéder à des comparaisons additives (qui impliquent les termes « de plus », « de moins ») avant d'apprendre à établir des comparaisons multiplicatives (qui impliquent des opérateurs scalaires c'est-à-dire les termes « fois plus », « fois moins »). Le développement des connaissances sur l'opérateur scalaire est cependant nécessaire pour établir la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur, ou encore, entre la fraction et l'unité à laquelle elle fait référence. Ainsi, $\frac{1}{b}$ d'une tarte correspond à ce qui entre exactement b fois dans l'unité « tarte », ce qui peut être modélisé par l'écriture suivante : $\frac{1}{b} \times b = 1$. Les études portant sur le développement de la fraction (Desjardins & Hétu, 1974 ; Kieren, 1989) montrent comment les connaissances sur la fraction et celles sur les structures multiplicatives se coordonnent progressivement au cours de l'apprentissage des nombres rationnels.

Par ailleurs, Vergnaud (1990) soulève l'importance du rôle du langage et du symbolisme dans la conceptualisation. Les langages oral et écrit utilisés pour représenter un concept mathématique contribuent inévitablement à la façon de penser ce concept. Il y a une forte relation entre l'évolution des idées et celle de leurs expressions, puisque l'évolution des idées conduit à de nouvelles expressions qui, en retour, ouvrent sur de nouvelles idées (Adjiage, 1999). Dans le cadre de cet article, nous analysons finement l'évolution et l'interinfluence des modes d'agir-parler-penser la fraction au cours de deux problèmes multiplicatifs, en prenant en compte les interactions entre les élèves et l'enseignante.

2. Agir-parler-penser les objets mathématiques

Jaubert et Rebière (2012) décomposent l'activité langagière en trois dimensions (agir-parler-penser) afin d'étudier les liens entre langage et construction des savoirs et le poids de la discipline dans les pratiques de construction des savoirs disciplinaires. L'agir-parler-penser prend sa source dans les recherches en sociolinguistique (Bernstein, 1971/75 ; Charlot, Beautier & Roche, 1992 ; Bautier, 1995) qui ont montré que la construction des savoirs est étroitement liée à des pratiques langagières déjà là. Elle repose sur une hypothèse forte concernant la nature des savoirs scolaires, considérés comme des savoirs savants pour l'enfant qui doit les apprendre, des savoirs stabilisés et déconnectés de leurs contextes d'élaboration, verbalisés dans des formes langagières travaillées (denses, elliptiques) sur lesquelles s'est accordée provisoirement la communauté savante, par opposition aux concepts quotidiens qui se construisent de façon inconsciente et ancrée dans le contexte dans lequel ils émergent. Les savoirs scolaires font ainsi l'objet d'une décontextualisation dont il faut rendre l'élève conscient, à travers, par exemple, un travail de verbalisation explicite portant sur les liens qu'ils entretiennent entre eux ainsi que sur les objets qu'ils désignent. Dès lors, chaque communauté, chaque sphère d'activité, développe des pratiques langagières qui lui sont propres et relativement stables. Les échanges au sein d'une communauté reposent sur la capacité de chaque interlocuteur à adopter une position énonciative pertinente, respectant « des cadres d'intelligibilité du monde, des formes de rationalité, des modes de relations aux autres, des contrats de communication spécifiques » (Jaubert & Rebière, 2012) qui constituent ce que l'on appelle des modes d'agir-parler-penser, eux-mêmes caractérisables et repérables à travers les discours produits.

La classe de mathématique se constitue en communauté discursive disciplinaire, au sein de laquelle l'élève doit se conformer à des modes d'agir-parler-penser généralement éloignés de ceux qui émergent naturellement dans le contexte familier. Pour apprendre et construire les concepts mathématiques scolaires, l'élève doit ainsi s'extraire du contexte familier pour s'inscrire dans celui proposé par l'enseignant. Le langage constitue alors le milieu de l'apprentissage, à la fois instrument de communication et outil (Vygotski, 1934/1997) de mise à distance, d'objectivation et de reconstruction. C'est dans et par le langage, à travers des processus de généralisation, de catégorisation et d'abstraction, que se joue la réorganisation des connaissances qui va permettre la transmutation progressive des concepts quotidiens vers des concepts savants. Ce processus s'accompagne d'une réorganisation des pratiques langagières, selon des formes sémiotiques conventionnelles et stabilisées qui témoignent de la capacité de l'élève à se détacher du contexte pour réinvestir des connaissances et à construire un monde conceptuel des objets scolaires, au sein duquel il s'autorise à exercer des activités de pensée et à faire des liens (Bautier & Goigoux, 2004). Ces formes de discours témoignent de l'appropriation des principes qui régissent l'activité au sein de la communauté discursive disciplinaire, et sont le signal de la mise en place de modes d'agir-parler-penser propre à la discipline, c'est-à-dire du processus d'apprentissage (Jaubert & Rebière, 2012).

Par exemple, au sein des travaux récents en didactique des mathématiques et plus particulièrement en géométrie, on considère qu'enseigner et apprendre la géométrie en contexte scolaire consiste à inscrire l'activité de l'élève dans un « ensemble social caractérisé par des modes d'agir-parler-penser » (Bernié, 2002, p. 81) « spécifiques d'un niveau donné, relativement à des objets de savoir donnés, dans un processus à la fois adaptationniste et social » (Bulf, Mathé & Mithalal, 2014, p. 32). Les résultats de travaux plus anciens en didactique de la géométrie offrent des éléments permettant de caractériser l'interinfluence entre l'agir, le parler et le penser en contexte scolaire et permettent ainsi d'approcher l'activité géométrique potentielle des élèves. Des recherches portant sur les modes d'agir, de parler et de penser différents objets géométriques (Barrera-Curin, Bulf & Venant, 2016 ; Barrier, Chesnais & Hache, 2014 ; Barrier, Hache & Mathé, 2013 ; Bulf, Mathé & Mithalal, 2014, 2015) rendent compte de la richesse et de la complexité des processus susceptibles de permettre aux élèves la rencontre avec des connaissances et savoirs géométriques, par confrontation à des situations et interactions langagières.

Dans la lignée de travaux précédents (Barrera-Curin, Bulf & Venant, 2016 ; Bernié, 2002 ; Bulf, Mathé & Mithalal, 2014), nous cherchons à approcher la dynamique d'évolution des modes d'agir-parler-penser le rapport fraction-unité (Behr et al., 1992) fondamental à l'interprétation en acte du concept de fraction. Nous faisons l'hypothèse que la mise au jour de cette dynamique permet d'accéder à la co-construction des rapports unités/sous-unités au cours des interactions entre les élèves et l'enseignante lorsqu'ils sont confrontés à la résolution de différents énoncés multiplicatifs.

Trois questions émergent alors, qui guident notre recherche et nos analyses :

- Comment évolue l'agir-parler-penser la fraction au cours de la séquence ?
- Comme se transforme l'agir-parler-penser selon les caractéristiques des problèmes ?
- Comment s'interinfluencent les modes d'agir, de parler et de penser la fraction ?

3. Méthodologie et cadre d'analyse

L'objectif de notre recherche consiste ainsi à analyser l'évolution et l'interinfluence des trois dimensions de l'agir-parler-penser la fraction en tenant compte des caractéristiques didactiques des problèmes posés. Pour ce faire, nous avons observé les interactions entre les élèves et l'enseignante autour d'un maillage de problèmes d'introduction à la fraction en tant que structure multiplicative. Les problèmes portent plus particulièrement sur la mise en relation des expressions suivantes : $a \div b = a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. Notre expérimentation a été réalisée au Québec dans une classe spécialisée composée d'élèves de 10 à 12 ans jugés en difficulté d'apprentissage (aucun d'entre eux ne présente de handicap particulier).

Notre recherche s'appuie sur un cadre d'analyse classique en didactique des mathématiques, soit l'ingénierie didactique d'Artigue (1990), qui consiste à comparer deux analyses, l'une menée *a priori* et l'autre *a posteriori*. Ces analyses sont ici orientées sur les modes d'agir-parler-penser et s'appuient sur une analyse logique préalable. Les analyses logiques et *a priori* nous permettent d'appréhender la complexité du concept de fraction et d'anticiper l'activité mathématique des élèves en termes d'agir-parler-penser, en prenant en compte les caractéristiques didactiques des tâches. L'analyse *a priori* s'attarde sur l'interinfluence des trois dimensions (l'agir, le parler et le penser) tout en mettant en évidence les mécanismes de leur évolution. Nous considérons en effet que la façon qu'ont les élèves de percevoir les fractions influence leur manière d'agir et de parler au moment de résoudre des tâches, et réciproquement. Pour mettre cette hypothèse à l'épreuve, nous avons choisi des problèmes portant sur le partage de l'unité et de la pluralité ainsi que sur le regroupement ou la reconstitution de quantités continues ou discrètes articulant des contextes intra et extramathématiques.

3.1 Analyse logique

L'analyse logique permet de formaliser des relations en termes de prédicats (au sens de la logique des prédicats) et met l'accent sur l'arité de ces prédicats, c'est-à-dire le nombre et la nature des éléments qui sont convoqués par les structures multiplicatives. Elle répond aux questions suivantes : quels sont les objets susceptibles d'être convoqués ? Quelles propriétés, quelles relations ? Pour quelles formulations ? (Barrier, Hache & Mathé, 2013). Par exemple, une fraction est une relation qui peut exprimer une quantité lorsqu'elle est mise en relation avec une unité donnée. Elle implique alors la prise en compte du rapport fraction-unité et passe par une mise en relation simultanée de différents ordres d'unités : des unités, des sous-unités voire des sous-sous-unités (Behr et al., 1992).

Dans le cadre de notre recherche, nous nous intéressons plus particulièrement à deux relations multiplicatives, soit $a \div b$ et $a \times \frac{1}{b}$, qui sont importantes dans la construction de la fraction en tant que structure multiplicative (Houle & Giroux, 2018). D'un point de vue mathématique, on peut considérer que $\frac{a}{b} = a \div b = a \times \frac{1}{b}$. Cependant, d'un point de vue conceptuel, ces trois écritures modélisent des situations très différentes. En effet, la fraction $\frac{a}{b}$ représente généralement, dans la pratique scolaire, le partage d'une unité en b sous-unités dans laquelle on prélève a sous-unités. En revanche, comme la division est fortement associée au sens partage au primaire, l'écriture $a \div b$ représente a unités qu'on partage entre b unités. Soulignons que contrairement à la fraction $\frac{a}{b}$, lorsque la division $(a \div b)$ est interprétée en termes de partage, a et b représentent des unités de différentes sortes, par exemple des tablettes de chocolat et des personnes. Quant à la multiplication, elle est habituellement enseignée au primaire comme une addition répétée. Par conséquent, l'écriture $a \times \frac{1}{b}$ est associée, du point de vue des élèves, à l'itération de $\frac{1}{b}$, a fois.

Les situations de partage, qui impliquent deux sortes de mesure (Vergnaud, 1981), apparaissent pertinentes pour travailler en articulation la fraction $\frac{a}{b}$ et les relations multiplicatives $a \times \frac{1}{b}$ et $a \div b$. Prenons par exemple le cas d'un partage de 3 unités tablettes de chocolat (Ut) entre 4 unités personnes (Up). L'interprétation de l'égalité $3 \div 4 = 3 \times \frac{1}{4}$ peut être modélisée par le partage de 3 Ut entre 4 Up, qui est équivalent à prendre 3 fois $\frac{1}{4}$ Ut. Nous pouvons effectivement diviser chacune des 3 Ut en 4 sous-unités (correspondant chacune à $\frac{1}{4}$ de l'Ut), de sorte que 3 (Ut) $\div$ 4 (Up) devienne $4 \times \frac{1}{4}$ (Ut) + $4 \times \frac{1}{4}$ (Ut) + $4 \times \frac{1}{4}$ (Ut) $\div$ 4 (Up) (figure 1).

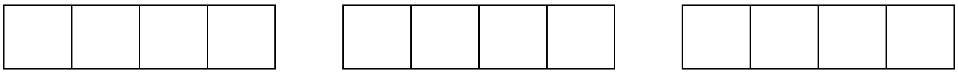


Figure 1. 3 unités tablettes de chocolat divisées chacune en 4 sous-unités

Il y a donc 3 × $\frac{1}{4}$ (Ut) pour chaque Up : 3 × $\frac{1}{4}$ (Ut)/1 (Up) (figure 2).

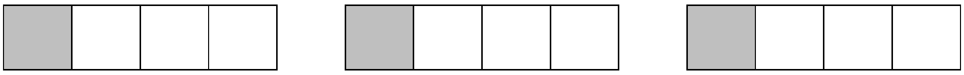


Figure 2. 3 sous-unités de $\frac{1}{4}$ issues chacune d'unité tablette de chocolat différente

Comme le montre la figure 2, l'opération 3 × $\frac{1}{4}$ suggère que les 3 sous-unités de $\frac{1}{4}$ de l'Ut appartiennent chacune à une Ut différente. La fraction $\frac{3}{4}$ suggère plutôt que chaque partie de $\frac{1}{4}$ appartient à une même Ut. Ainsi, il n'y a plus 3 × $\frac{1}{4}$ (Ut) / 1 (Up), mais plutôt 1 × $\frac{3}{4}$ (Ut) /1 (Up) (figure 3).

Figure 3. 3 sous-unités de $\frac{1}{4}$ issues d'une même unité tablette de chocolat

Finalement, les trois sous-unités (correspondant à $\frac{1}{4}$ de l'Ut) peuvent être interprétées comme une sous-unité composite (figure 4). La fraction $\frac{3}{4}$ est alors interprétée sans s'appuyer sur l'itération de $\frac{1}{4}$, 3 fois.

Figure 4. 1 sous-unité de $\frac{3}{4}$ issue d'une même unité tablette de chocolat

Cette analyse sert de point d'appui à l'analyse *a priori*, dont le but est de mettre en regard ces différentes conceptions de la fraction à travers les modes d'agir-parler-penser les fractions dans le cadre d'une séquence d'enseignement visant à favoriser la coordination entre les connaissances sur les structures multiplicatives et celles sur les fractions.

3.2 Analyses *a priori* et *a posteriori*

L'analyse *a priori* (cf. section 5) est organisée selon les possibilités des élèves d'articuler ou non la relation entre une unité et les sous-unités la constituant. Elle décrit les modes d'agir-parler-penser correspondants. Par exemple, l'absence d'articulation entre les unités de différents ordres (unité et sous-unités) se traduit par un plus grand appui sur le dessin et par la présence accrue de gestes dans la réalisation de la tâche. Cette analyse prend en compte les caractéristiques didactiques de la tâche, comme la présence d'une figure, la nature de la consigne de départ ou l'intention didactique, pour anticiper divers modes d'agir-parler-penser. Ainsi, l'intention didactique de construire la relation multiplicative entre l'unité et les sous-unités peut se traduire par un recours de plus en plus faible au dessin pour modéliser le déplacement des sous-unités dans la dimension agir. Cette analyse en termes d'agir-parler-penser fournit des balises pour structurer l'analyse *a posteriori*.

L'analyse *a posteriori* (cf. section 6) se veut épistémologiquement proche de celle menée dans le cadre strict de la TSD. Elle a pour but de décrire l'activité des élèves en résolution de problèmes, relativement à un objet de savoir, ici la relation multiplicative. Les modes d'agir–parler-penser, décrits dans l'analyse *a priori*, sont mis en jeu pour mettre au jour l'interinfluence des différentes dimensions de l'activité des élèves, sans lien de subordination entre ces dimensions. Nous nous intéressons plus particulièrement aux moteurs de leur évolution, notamment les interactions avec l'enseignante et avec les pairs. L'analyse repose sur les observables suivants :

– La nature du langage utilisé (lexique utilisé, recours à des métaphores, à des reformulations, au symbolisme…) et ses fonctions (articulation concept quotidien/concept savant, contextualisation, dévolution, institutionnalisation) ;
– Les gestes posés (recours au dessin, pointage, assemblage, écriture…) ;
– La nature des interactions (langagières, gestuelles, entre pairs, avec l'enseignant) et leurs rôles en termes d'évolution ou de coordination des agir-parler-penser ;
– Les caractéristiques didactiques du problème (présence de figures, de symboles, relation multiplicative en jeu) et leur influence sur les modes d'agir-parler-penser émergents.

4. Présentation de la séquence d'enseignement élaborée

Notre séquence présente un maillage de problèmes autour des relations multiplicatives $a \div b = a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$. Comme le mentionnent Giroux et Ste-Marie (2007), la reprise incessante d'un même type de tâches entraîne bien souvent « un rodage de techniques propres à la réussite de l'activité elle-même plutôt qu'un investissement du savoir en jeu » (p. 43). Autrement dit, lorsque les élèves reconnaissent ce qui est attendu par l'enseignant, ils peuvent fournir les réponses attendues sans qu'il y ait appropriation du savoir. Le maillage de problèmes proposé vise à amener les élèves à rencontrer une variété de problèmes les obligeant à adapter leurs stratégies en fonction des caractéristiques des problèmes posés (Vergnaud, 1981). Les problèmes sont variés, tant en ce qui concerne la structure des problèmes, leur habillage, le matériel disponible et le support visuel. Nous distinguons six groupes de problèmes. À l'intérieur de chacun des groupes, les variables numériques des problèmes évoluent de manière à favoriser un agir-parler-penser de plus en plus conforme à celui visé par l'enseignement. Le tableau 1 donne un aperçu des caractéristiques des problèmes posés dans chacun des groupes.

	Structures de problème	**Habillage du problème**	**Matériel disponible**	**Support visuel**
Groupe de problèmes 1	Division partage	Barres de chocolat	Cartons (pour représenter les barres de chocolat) Papier/crayon	Données compilées dans un tableau.
Groupe de problèmes 2	Division partage	Bouteilles d'eau (graduées)	Papier/crayon	Bouteilles d'eau graduées Opération mathématique ($a \div b$)
Groupe de problèmes 3	Multiplication Division regroupement	Verres d'eau	Papier/crayon	Énoncé de problème écrit (avec ou sans le dessin des verres)
Groupe de problèmes 4	Division partage	Bricolage	Cartons de différentes couleurs, ficelle	Tableau à compléter par les élèves
Groupe de problèmes 5	N/A	Contexte intramathématique	Cartons avec écriture mathématique	Écriture mathématique
Groupe de problèmes 6	Multiplication Division partage Division regroupement	Bouteilles d'eau à graduer	Bouteilles d'eau non graduées	Aucun

Tableau 1. Maillage de problèmes

La séquence prévoit un va-et-vient relativement rapide entre des phases de dévolution et d'institutionnalisation (Brousseau, 1998) de manière à ce que l'activité mathématique des élèves évolue vers des modes d'agir-parler-penser conformes aux objectifs d'apprentissage visés. La séquence vise ainsi à organiser la dévolution du problème aux élèves, c'est-à-dire à les amener à prendre en charge la résolution des problèmes à partir de leurs connaissances, mais aussi à participer à des phases d'institutionnalisation où est mis en évidence, dans ce qui a été dit et fait, ce qui relève du savoir mathématique. Il s'agit donc de partir des modes d'agir-parler-penser les fractions des élèves et de les faire progresser pour qu'ils se rapprochent des savoirs savants.

L'étude des différentes dimensions de l'activité mathématique (agir-parler-penser), de leur interinfluence et de leur évolution se fait en tenant compte des caractéristiques des problèmes, qui diffèrent considérablement les uns des autres. Dans le cadre de cet article, nous analysons deux problèmes tirés du groupe de problèmes 3, qui portent plus particulièrement sur la relation $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

5. Analyse *a priori* des modes d'agir-parler-penser les fractions de deux problèmes

Dans la suite de ce travail, nous nous concentrons sur deux problèmes de notre séquence qui permettent un travail autour de la relation multiplicative suivante : $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$ .Dans le problème 1, $a = b$, tandis que dans le problème 2, a est multiple de b. Voici plus précisément les relations multiplicatives que sous-tend chacun des problèmes.

Problème 1 : $3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

Problème 2 : $6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3}$.

Les analyses *a priori* présentées ci-dessous reposent sur l'hypothèse que la façon dont l'élève conceptualise le rapport unité/sous-unités se manifeste dans différents modes d'agir-parler-penser la relation multiplicative. Bien qu'on puisse raisonnablement supposer que les modes d'agir, de parler et de penser ces relations évoluent simultanément, ils sont présentés séparément pour des raisons méthodologiques.

5.1. Analyse *a priori* des modes d'agir-parler-penser les fractions du premier problème

L'énoncé du premier problème est le suivant : « Avec 3 verres remplis aux $\frac{1}{3}$ de leur capacité, combien de verres pleins obtient-on ? » Il est présenté à l'écrit aux élèves et il est accompagné du dessin en figure 5.

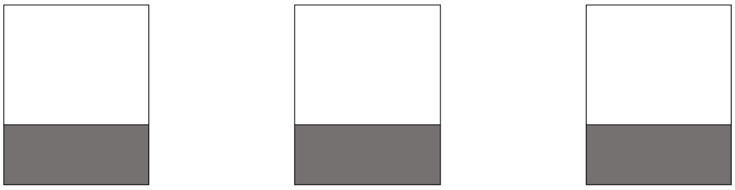


Figure 5. Dessin accompagnant le premier énoncé de problème

Le tableau 2 présente différents modes d'agir-parler-penser possibles pour la relation $3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$ qui permet de modéliser les relations entre les données de ce problème.

	Modes de penser	Modes d'agir	Modes de parler
Sans articulation entre des unités de différents ordres.	Assemblage approximatif des quantités (des parties d'unités différentes) pour **compléter** une unité.	Déplacer et assembler des quantités ($\frac{1}{3}$) de façon approximative en pointant les quantités ($\frac{1}{3}$) de 2 unités (2 verres) pour compléter une troisième unité.	(Déictiques fréquents) « D'ici vers là. » « Ça arriverait jusqu'ici. »
	Assemblage approximatif des quantités (des parties d'unités différentes) pour **constituer** une unité.	Déplacer et assembler des quantités ($\frac{1}{3}$) de façon approximative en pointant les quantités ($\frac{1}{3}$) des 3 unités (3 verres) de manière à constituer une nouvelle unité.	(Déictiques fréquents) « D'ici vers là. » « Ça arriverait jusqu'ici. »

Construction progressive de la relation entre l'unité et les sous-unités.	Ajout de $\frac{1}{3}$, 2 fois pour compléter l'unité : $\frac{1}{3} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{3}) = \frac{3}{3} = 1$	Déplacer et assembler des **sous-unités** ($\frac{1}{3}$) en pointant les sous-unités ($\frac{1}{3}$) de 2 unités (2 verres) pour compléter une troisième unité. Pas de gestes.	« À un tiers, il manque un tiers et (ou plus) un tiers » « À un tiers, j'ajoute un tiers et (ou plus) un tiers. »
	Itération des sous-unités $\frac{1}{3}$, 3 fois pour constituer l'unité : $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$	Déplacer et assembler des sous-unités ($\frac{1}{3}$) en pointant les sous-unités ($\frac{1}{3}$) des 3 unités (3 verres) de manière à constituer une nouvelle unité. Pas de gestes.	« Un tiers plus un tiers plus un tiers. » « Un tiers, un tiers, un tiers. »
	Multiplication d'une sous-unité $\frac{1}{3}$ par 2 et complétion d'une unité : $\frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$	Pas de gestes.	« À un tiers, il manque deux fois un tiers. » « À un tiers, j'ajoute deux fois un tiers. »
	Multiplication d'une sous-unité $\frac{1}{3}$ par 3 pour constituer l'unité : $3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$	Pas de gestes.	« Trois fois un tiers. » « Dans 1 il y a trois tiers. »

Tableau 2. Agir-parler-penser la relation multiplicative $3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

L'analyse *a priori* est organisée selon les possibilités des élèves d'articuler ou non la relation entre une unité et les sous-unités la constituant. Lorsqu'il n'y a pas encore d'articulation entre les unités de différents ordres (unité et sous-unités), les modes d'agir-parler-penser les relations en jeu dans la tâche se produisent à partir de l'assemblage approximatif des quantités. Le déplacement et l'assemblage de la quantité contenue dans chaque verre peuvent se faire soit de manière à compléter une unité, c'est-à-dire que la quantité de deux verres est ajoutée à l'un des verres, soit de manière à constituer une nouvelle unité, c'est-à-dire qu'un nouveau verre est constitué à partir des quantités contenues dans les trois verres. Dans ces deux cas, les modes d'agir (déplacer et assembler) et de parler (avec des déictiques fréquents) rendent compte d'une forte prise en compte des dessins disponibles dans cette tâche.

La construction progressive de la relation entre l'unité et les sous-unités qui la composent permet de se détacher d'un agir-parler-penser en termes d'assemblage. Cette relation peut être établie à partir d'un raisonnement additif ou multiplicatif. Dans le cas d'un raisonnement additif, les modes d'agir-parler-penser consistent soit à compléter une unité en ajoutant un tiers et un tiers au tiers déjà contenu dans un verre, soit à constituer une nouvelle unité en assemblant un tiers plus un tiers plus un tiers. Dans le cas d'un raisonnement multiplicatif, il s'agit plutôt d'ajouter deux fois une quantité correspondant à un tiers d'un verre au tiers déjà contenu dans un verre, soit d'établir spontanément qu'on obtient trois fois un tiers (donc un verre entier) avec trois verres remplis au tiers de leur capacité.

Enfin, l'unité est complétée ou constituée par des relations mathématiques qui se manifestent dans les modes de parler les relations en jeu dans le problème (recours à des déictiques, énonciation de la ou des fractions en jeu, présence des expressions « plus » et « fois ») ainsi que dans les modes d'agir. Plus la relation entre l'unité et les sous-unités la constituant est contrôlée, moins le recours au dessin pour modéliser le déplacement des sous-unités est nécessaire.

5.2. Analyse *a priori* des modes d'agir-parler-penser les fractions du deuxième problème

L'énoncé du deuxième problème est le suivant : « Avec 6 verres remplis au $\frac{1}{3}$ de leur capacité, combien de verres pleins obtient-on ? » (Le support visuel de la question précédente reste disponible).

Le tableau 3 présente différents modes d'agir-parler-penser possibles pour la relation $6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3}$, qui permet de modéliser ce problème.

	Modes de penser	**Modes d'agir**	**Modes de parler**
Sans articulation entre des unités de différents ordres.	Assemblage approximatif des quantités (des parties d'unités différentes) pour compléter/ constituer deux unités.	Dessiner 6 unités et colorier approximativement une partie de chacune (ou s'appuyer sur le dessin de la tâche 1 et ajouter 3 unités). Déplacer et assembler les quantités coloriées pour compléter/constiuer deux unités.	(Déictiques fréquents) « D'ici vers là. » « Ça fait deux. »
Construction progressive de la relation entre l'unité et les sous-unités.	Assemblage des sous-unités (constitutives d'unités différentes) pour compléter/constituer deux unités.	Dessiner 6 unités et colorier approximativement $\frac{1}{3}$ de chacune (ou s'appuyer sur le dessin de la tâche 1 et ajouter 3 unités). Déplacer et assembler les sous-unités ($\frac{1}{3}$) pour compléter/constiuer deux unités.	(Déictiques fréquents) « D'ici vers là. » « Ça fait deux. »
	Articulation entre les 3 sous-unités de $\frac{1}{3}$, 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$), et une unité composite de $\frac{3}{3}$, pour constituer deux unités. $3 \times \frac{1}{3} = 1 \times \frac{3}{3}$	S'appuyer sur le dessin de la tâche 1 pour contrôler la coordination entre l'unité et les sous-unités. Itérer 3 sous-unités d'une même unité jusqu'à l'obtention de 6, soit par comptage rythmé en pointant les sous-unités ($\frac{1}{3}$), soit par addition répétée de 3 en regardant le dessin. Pas de gestes.	« 1, 2, 3... 4, 5, 6. Ça fait 2. » « Trois plus trois, ça fait six, donc c'est deux. »

	Prise en compte de l'unité composite de 3/3, pour constituer deux unités. Articulation entre 6 sous-unités de $\frac{1}{3}$ et deux unités ($\frac{6}{3}$). $6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$ $6 \div 3 =$ ___ $3 \times$ ___ $= 6$	Pas de gestes.	« Ça en prend 3 pour en remplir 1 et 6 divisé par 3 ça fait 2. » « Ça en prend 3 pour en remplir 1 et 2 fois 3 ça fait 6. » « Ça fait 6 tiers donc c'est 2. »

Tableau 3. Agir-parler-penser la relation multiplicative $6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3}$

Ici encore, l'analyse *a priori* est organisée en tenant compte des possibilités des élèves d'articuler ou non la relation entre une unité et les sous-unités (unités de différents ordres) la constituant. Tout comme dans le problème précédent, un agir-parler-penser en termes d'assemblage est possible. Les élèves pourront, par exemple, dessiner 6 verres remplis approximativement au tiers de leur capacité, ou encore s'appuyer sur le dessin de l'énoncé précédent et ajouter 3 verres remplis au tiers de leur capacité. Le déplacement et l'assemblage peuvent ensuite être envisagés de manière à compléter des unités ou à constituer de nouvelles unités.

L'établissement de la relation entre 3 verres remplis au $\frac{1}{3}$ de leur capacité et un verre rempli au $\frac{3}{3}$ de sa capacité ($3 \times \frac{1}{3} = 1 \times \frac{3}{3}$) évite d'avoir à s'appuyer sur le dessin de 6 verres. Cela permet de compter, sur un même verre, les trois sous-unités ($\frac{1}{3}$) rendant ainsi compte d'une certaine coordination entre l'unité et les sous-unités qui la composent. Cette façon d'entrer dans le problème peut se manifester par des modes de parler telles que « Un, deux, trois… quatre, cinq, six. Ça fait deux. », ou encore « Trois plus trois ça fait six, donc c'est deux ». Le nombre 6 représente alors des sous-unités ($\frac{1}{3}$) alors que le nombre 2 représente des unités.

Par ailleurs, la prise en compte explicite de la relation multiplicative entre 6 sous-unités de $\frac{1}{3}$ et deux unités évite d'avoir à agir sur le dessin pour contrôler les relations en jeu. Elle peut conduire à des modes de parler du type : « Ça en prend 3 pour en remplir 1, et 6 divisé par 3 ça fait 2 ». Ce mode d'agir-parler-penser rend compte d'une construction de la relation multiplicative entre l'unité et ses sous-unités, même si une référence explicite à l'unité n'est pas évoquée.

Notons enfin qu'une autre stratégie possible consiste à s'appuyer sur le problème 1 qui, rappelons-le, implique 3 verres remplis au $\frac{1}{3}$ de leur capacité. L'élève peut effectivement remarquer qu'avec 6 verres remplis au $\frac{1}{3}$ de leur capacité, on double le nombre de verres. Il suffit donc de doubler le résultat du problème 1 pour trouver celui du problème 2. Cette stratégie permet d'éviter le traitement de la relation entre les unités et les sous-unités.

6. Analyse *a posteriori* des modes d'agir-parler-penser les fractions de deux problèmes

La séance en classe alterne des moments de travail en équipe et des retours en grand groupe. Nous présentons d'abord l'analyse *a posteriori* de la phase de recherche d'un sous-groupe de quatre élèves (Christophe, Vincent, Léo et Alexis[1]) confronté au premier problème ainsi que le retour auprès de la classe qui a suivi. Nous présentons ensuite l'analyse de la phase de recherche du même sous-groupe confronté au deuxième problème.

Nous cherchons ici à décrire l'activité mathématique des élèves en prenant en compte les caractéristiques spécifiques des problèmes en jeu. Le langage utilisé, les gestes posés et la nature des interactions nous permettent de mettre au jour les intentions didactiques de l'enseignante, la nature des interactions entre pairs ainsi que leur effet sur la dynamique d'évolution des modes d'agir-parler-penser des élèves, à travers lesquels nous appréhendons partiellement leur conceptualisation de la relation multiplicative et du rapport entre unités et sous-unités.

6.1. Analyse *a posteriori* des modes d'agir-parler-penser les fractions du premier problème

Dans un premier temps, rappelons l'énoncé du problème :

Avec 3 verres remplis au $\frac{1}{3}$ de leur capacité, combien de verres pleins obtient-on ? (Sous l'énoncé sont dessinés trois verres et $\frac{1}{3}$ de chacun est colorié)

6.1.2. Travail en équipe

Lors du travail en sous-groupe, l'énoncé du problème est lu par un élève du groupe, Christophe. Cependant, celui-ci s'arrête lorsqu'il arrive à $\frac{1}{3}$ et dit avec hésitation « un et trois quarts ». Notons que depuis la première séance, Christophe lit correctement la fraction $\frac{1}{2}$, mais lorsqu'il s'agit d'autres fractions, il utilise le terme « quarts ». On peut donc considérer que le mot « trois » est choisi en raison du dénominateur (3) et

[1] Des noms fictifs ont été attribués aux élèves afin d'assurer leur anonymat.

le mot « quart », pour exprimer qu'il s'agit d'une autre fraction que la demie. Un autre élève, Vincent, le reprend et dit « un tiers ». Les interactions entre élèves peuvent ainsi favoriser le passage d'une manière spontanée de parler la fraction vers une manière conforme à celle attendue. Nous observons effectivement à quelques reprises lors de la séquence, un effort chez les élèves pour lire les fractions correctement. Cet effort se manifeste par un moment d'arrêt où ils réfléchissent aux termes à utiliser lorsqu'ils doivent lire une fraction, ou encore par leur regard qui se dirige vers l'enseignante ou un autre élève pour obtenir de l'aide ou une rétroaction lorsqu'ils font une tentative pour lire une fraction.

Comme le montre l'extrait ci-dessous, l'enseignante reformule l'énoncé et Vincent répond rapidement « un ».

> Enseignante : On pourrait faire combien de verres pleins avec nos trois verres remplis au tiers de leur capacité ?
>
> Vincent : Un.
>
> Enseignante : Toi tu dis un, pourquoi tu penses que c'est un ?
>
> Vincent : Parce que dans un verre y'en a trois, pis là, un, deux, trois (en pointant le tiers colorié de chacun des verres).
>
> Enseignante : Parce que dans un verre, y a trois tiers.
>
> Vincent : Ouais !

Vincent semble reconnaître que l'itération de $\frac{1}{3}$, trois fois, permet de constituer une unité, ce qui peut reposer sur un raisonnement additif ($\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$) ou sur un raisonnement multiplicatif ($3 \times \frac{1}{3} = 1$). Les caractéristiques du problème l'amènent à s'appuyer sur le dessin pour justifier cette relation. Notons cependant que Vincent dit « il y en a trois » plutôt que « il y a trois tiers ». On peut faire différentes hypothèses sur les raisons qui expliquent ce choix. Ce pourrait être par économie de langage ou encore pour éviter le mot « tiers » qui est peu maîtrisé. Cette formulation peut aussi suggérer que Vincent considère la partie colorée comme étant une unité (1 partie) constituante d'une autre unité (le verre), sans toutefois lui associer une mesure. Comme nous l'avons vu lors de l'analyse *a priori*, il n'est effectivement pas nécessaire, étant donné la présence du dessin, de se référer aux fractions pour résoudre le problème. Il n'en demeure pas moins que lorsque l'enseignante reformule les propos de Vincent en précisant « Parce que dans un verre, il y a trois tiers », cette formulation est aussitôt acceptée par Vincent qui s'exclame avec assurance « Ouais ! ». Il est possible que cette relation ait déjà été construite par Vincent. Il est possible également que Vincent construise cette relation dans l'interaction avec l'enseignante. La partie coloriée de chaque verre ne correspond alors plus à une unité, mais à $\frac{1}{3}$ d'unité puisqu'elle est mesurée en prenant comme unité de référence, le verre.

L'enseignante questionne ensuite les trois autres élèves : « Qu'est-ce que vous en pensez les autres ? Si on prend ces trois verres-là, pis qu'on les met dans un verre, est-ce que ça va déborder, est-ce qu'il ne sera pas plein ou s'il va être plein ? » En ayant recours à une métaphore vers un contexte réel, l'enseignante simplifie le problème. Cette intervention vise à aider les élèves à se représenter le problème et à s'engager dans la tâche. De fait, Christophe et Léo (qui jusqu'à présent ne s'étaient pas prononcés) répondent que le verre sera plein. Cette métaphore permet également de revenir à des modes d'agir-parler-penser plus quotidien, qui permet d'éviter le traitement des fractions. L'enseignante prend alors appui sur le dessin et formule donc la question sans recourir aux fractions, ce qui favorise le déplacement et l'assemblage des quantités plutôt qu'un travail sur la relation $\frac{1}{3} \times 3 = \frac{3}{3} = 1$. Le passage à un langage plus courant se manifeste aussi par le recours à une métonymie, phénomène sémantique très courant consistant à remplacer un mot par un autre dont le sens lui est relié. Lorsque l'enseignante dit « Si on prend ces trois verres-là, pis qu'on les met dans un verre », il ne s'agit pas, en effet, de mettre trois verres dans un verre, mais plutôt de mettre le contenu des verres dans un verre. L'enseignante désigne le contenant en faisant référence au contenu. Cette métonymie, comme c'est souvent le cas dans le langage courant, ne semble pas ici créer de confusion dans l'échange, mais vient plutôt soutenir le processus de décontextualisation permettant à Christophe de justifier son choix : « Plein, ‹ à cause que › un et trois quarts (en pointant « $\frac{1}{3}$ » dans l'énoncé du problème) ça fait un, deux, trois (en pointant chaque partie « un tiers »). Pis admettons que j'enlève lui pis lui (il barre la partie d'un tiers du deuxième verre et celle du troisième verre), pis je les mets là et là (il sépare le premier verre en trois parties et pointe les deux parties non coloriées), ben là ça va faire un verre. » La présence du dessin et la question formulée par l'enseignante conduisent Christophe à déplacer et à assembler les quantités. Il cherche toutefois à utiliser une expression fractionnaire pour les désigner. Notons par ailleurs que, bien que la question formulée par l'enseignante suggère la constitution d'une nouvelle unité, Christophe choisit plutôt d'ajouter le $\frac{1}{3}$ du deuxième verre et le $\frac{1}{3}$ du troisième verre au premier verre pour le compléter. L'enseignante, reprenant les mots prononcés par Christophe et les actions qu'il a évoquées, inscrit $\frac{1}{3}$ à côté de chacune des parties du premier verre en mettant en évidence, à l'oral, la relation visée par l'enseignement : « Ça ici c'est un tiers (elle écrit $\frac{1}{3}$ à côté de la partie d'un tiers du premier verre) et un tiers c'est ce qui entre trois fois dans un (elle écrit $\frac{1}{3}$ à côté des deux autres parties d'un tiers du premier verre). »

L'analyse des interactions didactiques montre que l'enseignante prend en compte l'agir-parler-penser spontané des élèves de façon à les amener vers un agir-parler-penser plus évolué sur le plan mathématique. L'enseignante s'appuie d'abord sur le dessin, mais ses propos en fin d'échange sont décontextualisés : « un tiers c'est ce qui entre trois fois dans un ». De plus, non seulement le lexique attendu est institutionnalisé, mais l'écriture symbolique qui modélise les relations entre les données du problème est présentée : $1 = 3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$. Ainsi, pour aider les élèves à donner du sens à cette écriture, l'enseignante s'appuie à l'oral sur le problème. Il s'agit ici d'une institutionnalisation locale, c'est-à-dire que l'institutionnalisation est attachée au contexte (Douady, 1984). Même si le problème, tel qu'il est présenté, ne nécessite pas le recours à cette écriture, celle-ci semble accessible pour les élèves dans la mesure où l'enseignante s'appuie sur les modes d'agir-parler-penser spontanés des élèves pour introduire des modes d'agir-parler-penser les fractions qui correspondent aux objectifs d'apprentissage.

Notons, par ailleurs, qu'un élève, Alexis, répond « neuf ». Cette réponse a, sur le coup, été ignorée tant par l'enseignante que par les autres élèves. Comme le montre l'extrait suivant, l'enseignante revient néanmoins sur cette réponse erronée.

> Enseignante : Toi tu disais neuf. Pourquoi tu disais neuf ? Moi je sais d'où il vient ton neuf.
>
> Léo : Parce qu'il a compté ça : un, deux, trois (en pointant les trois parties du premier verre), quatre, cinq, six (en pointant les trois parties du deuxième verre), sept, huit, neuf (en pointant les trois parties du troisième verre).
>
> Enseignante : Exactement, on pourrait dire ça comme ça, dans trois verres, j'ai neuf tiers.

La réponse d'Alexis (neuf), qui n'était pas prévue à l'analyse *a priori*, conduit à introduire la relation multiplicative $9 \times \frac{1}{3} = \frac{9}{3} = 3$, puisque la réponse « neuf » consiste au nombre de tiers dans trois verres. Ainsi, l'agir-parler-penser de la relation $b \times \frac{1}{b} = 1$ glisse vers un agir-parler-penser de la relation : $a \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b} = x$ (où a est multiple de b). Cette relation est d'ailleurs celle visée dans le deuxième problème. En plus de mettre en évidence, à l'oral, cette relation, l'enseignante utilise des reformulations non verbales. En effet, l'enseignante « reformule » le geste de l'élève en matérialisant par des traits de crayons les trois tiers constituant chacun des verres pleins.

6.1.2. Retour en grand groupe

Au moment du retour en grand groupe, Christophe présente au tableau le premier problème. Après avoir lu l'énoncé, il le reformule dans ses mots et consulte ses camarades : « Ils veulent que je les mette ensemble pour que ça donne combien de verres ? ». L'expression « mettre ensemble » renvoie à l'idée d'assemblage qui est constitutive de son mode de penser la relation en jeu. Il dessine trois verres de taille similaire, mais sépare chacun d'eux en trois parties inégales. Il colorie ensuite une partie de chaque verre. Le fait de ne pas chercher à séparer les parties de façon égale pourrait être interprété comme une incompréhension de la nécessité d'un partage égal. Le travail réalisé par Christophe en sous-groupe nous donne plutôt à penser qu'il utilise ici le dessin comme un appui pour exprimer/soutenir son raisonnement, ce qui pourrait être le fruit d'une conceptualisation avancée de la fraction. Le raisonnement de l'élève semble être basé sur la relation sous-unités/unité, et ce, en faisant abstraction de leur valeur empirique. Dans cette perspective, il n'est alors pas nécessaire de dessiner avec justesse le verre séparé en trois parties égales. Comme le relève Steefland (1991), si les élèves dessinent d'abord de manière à représenter le plus fidèlement possible les problèmes (models of), peu à peu, le rôle du dessin change, étant plutôt utilisé comme outil de résolution (models for). Cela suggère qu'il anticipe que l'unité est constituée de trois sous-unités d'un tiers et donc, qu'en versant le contenu de deux verres remplis au tiers de leur capacité dans un autre verre aussi rempli au tiers de sa capacité, on obtiendra un verre plein. Ainsi, plus l'agir-parler-penser les fractions évolue, plus il est possible de se détacher du réel.

Le mode d'agir-parler-penser de Christophe se différencie de celui d'un autre élève dans la classe (Zachary), qui cherche non pas à compléter une unité, mais plutôt à constituer une nouvelle unité.

> Christophe : Est-ce qu'il y a quelqu'un qui peut me dire qu'est-ce qu'il faut faire ? (en s'adressant à tous les élèves de la classe)
>
> Zachary : On fait une ligne dessus.
>
> Christophe : Sur lui ? (en pointant une partie d'un tiers coloriée sur un des verres)
>
> Zachary : Non, toute ! Pis ça va faire un.
>
> Christophe : Mais où je les mets ces deux-là ? (en pointant deux parties d'un tiers coloriées)
>
> Zachary : Ces deux-là ?
>
> Christophe : Ouais.
>
> Zachary : Non, les trois.
>
> Christophe : Ces deux-là, où je les mets ? J'ai pas quatre verres, j'ai juste trois verres.

L'écart entre les modes d'agir-parler-penser de chacun des élèves provoque un malentendu. L'enseignante met en évidence la différence entre les interprétations de chacun des élèves :

> Enseignante : Parce que lui (Zachary), ce qu'il fait, il prend les trois (elle dessine un verre sous les trois verres dessinés par Christophe) et il se dit, on va toutes les vider

> dans celui-là (en pointant le verre qu'elle a dessiné). (...) Parce que toi (Christophe), tu prenais lui et lui (en pointant le 2e et 3e verre) et tu le vidais dans celui-là (en faisant le geste avec ses mains), mais lui il se disait, on va toutes les vider ici.

Cette intervention permet rapidement aux élèves d'établir la relation entre leur mode d'agir-parler-penser. En effet, par la suite, Christophe divise en trois parties inégales le verre dessiné par l'enseignante et colorie les trois parties. Il adapte ainsi son mode d'agir-parler-penser en constituant une nouvelle unité.

De plus, comme le montre l'extrait suivant, Christophe développe peu à peu un mode d'agir-parler-penser les fractions semblables à celui visé par l'enseignement.

> Christophe : Combien de tiers pour ce verre-là ? (en pointant le verre dessiné sous les trois verres)
>
> Un élève de la classe : Trois tiers.
>
> Christophe : Trois (il écrit $\frac{1}{3}$ à côté de chaque partie représentant un tiers)
>
> Enseignante : Wow ! Très très bien. Trois tiers, est-ce que tu aurais pu l'écrire autrement qu'en tout il y a trois tiers ?
>
> (Christophe écrit $\frac{3}{3}$).

Christophe dégage ainsi de façon explicite qu'une unité est constituée de l'itération d'un tiers, trois fois, et établit la relation d'équivalence entre *1* et $\frac{3}{3}$. L'écriture de la fraction $\frac{1}{3}$ émerge spontanément au moment du retour et on constate également une évolution dans l'utilisation de l'expression « un tiers ». L'adaptation de l'élève à son environnement – la tâche ainsi que les interactions avec les autres élèves et l'enseignante – lui permet de s'approprier progressivement un mode d'agir-parler-penser les fractions qui correspond à celui attendu.

6.2. Analyse *a posteriori* des modes d'agir-parler-penser les fractions du deuxième problème

Le deuxième problème est donné aux élèves sur la même feuille que le premier. L'énoncé est le suivant (sans représentation visuelle associée à l'énoncé) :

Avec 6 verres remplis au $\frac{1}{3}$ de leur capacité, combien de verres pleins obtient-on ?

Le fait de ne pas avoir un dessin associé directement à l'énoncé permet aux élèves de décider plus librement leur mode d'agir. Il est effectivement possible de s'appuyer sur le dessin du problème précédent, de faire un nouveau dessin ou encore de recourir à une stratégie numérique.

Après la lecture de l'énoncé, l'enseignante met l'accent sur la différence entre les deux problèmes : « Tantôt on avait trois verres, mais si on en avait six verres remplis au tiers de leur capacité, ça ferait combien de verres pleins ? », ce qui pourrait encourager les élèves à s'appuyer sur le dessin associé au problème précédent. Cependant, elle retourne ensuite la feuille de manière à ce que les élèves puissent faire un nouveau dessin. Christophe, qui préfère s'appuyer sur le dessin du premier problème, retourne la feuille et observe les trois verres. Il répond ensuite « trois » au problème posé, mais change rapidement d'avis et dit « deux, deux, deux ! » (il insiste sur deux). Quant à Vincent, il pose la question suivante : « On a six verres d'un tiers et on essaie d'en faire des pleins, c'est ça ? ». L'enseignante confirme cette interprétation. Vincent se dit alors en accord avec la solution apportée par Christophe, soit 2, et ajoute en guise de justification : « Parce qu'il en faut trois pour remplir un et on a six alors trois plus trois ça fait six ». Tout comme au problème précédent, cet élève semble chercher à éviter l'expression « tiers ». Les modes d'agir-parler-penser de Christophe et Vincent sont reportés dans le tableau 4.

	Modes de penser	**Modes d'agir**	**Modes de parler**
Christophe	Articulation entre les 3 sous-unités de $\frac{1}{3}$, 3 ($\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3}$), et une unité composite de $\frac{3}{3}$, pour constituer deux unités. $3 \times \frac{1}{3} = 1 \times \frac{3}{3}$	S'appuyer sur le dessin de la tâche 1 pour contrôler la coordination entre l'unité et les sous-unités. Itérer 3 sous-unités d'une même unité jusqu'à l'obtention de 6.	« Trois… deux, deux, deux »
Vincent	Prise en compte de l'unité composite de $\frac{3}{3}$, pour constituer deux unités. Articulation entre 6 sous-unités de $\frac{1}{3}$ et deux unités ($\frac{6}{3}$). $6 \times \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$ $6 \div 3 =$ ___ $3 \times$ ___ $= 6$	Pas de gestes.	« Parce qu'il en faut trois pour remplir un et on a six alors trois plus trois ça fait six ».

Tableau 4. Modes d'agir-parler-penser de Christophe et Vincent au problème 2

L'enseignante demande à Christophe et Vincent d'expliquer leur solution à un élève de l'équipe qui ne semble pas comprendre. Les explications respectives permettent, par exemple, d'apprécier le rôle du dessin en tant que support au raisonnement. De fait, des formes non verbales de langage (des gestes sur le dessin en question) se manifestent et viennent échafauder la construction de la relation unité/sous-unité.

L'explication de Vincent se différencie de celle de Christophe. Bien que l'enseignante ait, une fois de plus, retourné la feuille pour permettre aux élèves de dessiner, les explications de Vincent ne s'appuient pas sur le dessin : « parce que Marc, penses-y, il en faut trois pour en remplir un et on en a six, c'est évident ». Christophe utilise quant à lui le dessin pour justifier sa solution. Il dessine six verres dans lesquels une partie qui correspond à environ un sixième du verre, mais qui vise à représenter un tiers, est coloriée. Il barre le contenu des deuxième et troisième verres pour remplir le premier verre, puis barre le contenu des cinquième et sixième verres pour remplir le quatrième et dit : « Tu prends lui, tu le mets là ». Ainsi, il déplace et assemble les parties représentant un tiers pour compléter les verres.

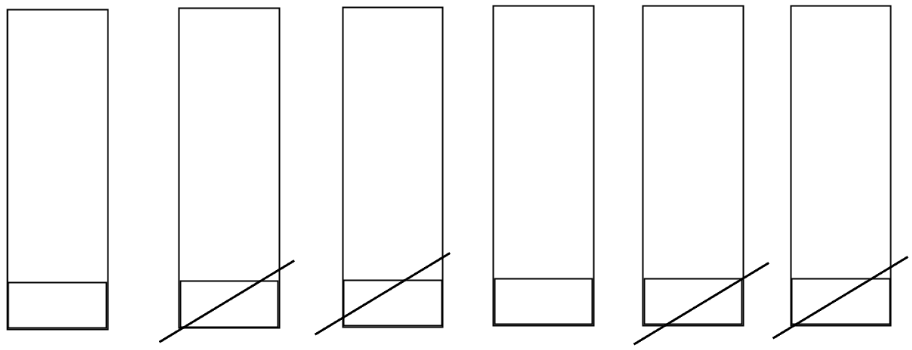


Figure 6. Illustration du dessin de Christophe pour justifier sa solution au problème 2

Tout comme dans le problème précédent, Christophe ne cherche pas à représenter avec précision un tiers de chacun des verres. Le dessin lui permet plutôt d'exprimer son raisonnement. Or, dans ce cas-ci, il explique sa solution pour aider un autre élève. Si cet élève s'appuie sur l'assemblage des quantités dessinées par Christophe pour compléter les verres, il pourra difficilement comprendre ses explications. En effet, en assemblant les quantités coloriées par Christophe dans chacun des trois verres, cela ne permet pas d'obtenir un verre plein. Le dessin peut ainsi avoir différents statuts. En l'occurrence, Christophe semble l'utiliser pour expliquer des relations théoriques déjà établies (l'articulation entre différents ordres d'unités, soit les sous-unités d'un tiers et une unité d'ordre supérieur, le verre). Le dessin peut ici contribuer à la consolidation de la notion de fraction pour celui qui le fait. Cependant, il pourrait également générer des incompréhensions entre les élèves si d'autres attribuent au dessin un statut différent.

Au cours de ce problème, l'évolution des modes d'agir-parler-penser de chacun des élèves se fait en parallèle, c'est-à-dire que la relation multiplicative en jeu évolue progressivement sans qu'il y ait interinfluence entre les modes d'agir-parler-penser de chacun des élèves. Il s'agit d'un agir-parler-penser différent, mais complémentaire. Christophe compte en pointant les sous-unités d'un tiers (en reprenant le dessin du premier problème) et Vincent évoque un calcul, « 3 plus 3 ça fait 6 donc c'est deux ». Conceptuellement, dans les deux cas, ils construisent la même relation :

– Etablissement de la relation $b \times \frac{1}{b} = 1$.
– Articulation entre des sous-unités $\frac{1}{b}$ et l'unité $\frac{b}{b}$ pour constituer des unités d'ordre supérieur $x \times \frac{b}{b}$.

Conclusion

L'analyse des interactions langagières en termes d'agir-parler-penser permet de réaliser un travail approfondi sur les plans théorique et expérimental autour du concept de fraction et de porter un regard fin sur le passage progressif des concepts spontanés aux concepts scientifiques. *A priori,* l'analyse logique des structures multiplicatives concernées dans les problèmes mathématiques proposés aux élèves permet un changement de regard sur la fraction qui se fonde sur le rapport fraction-unité mettant en relation de façon simultanée différents ordres d'unités. L'analyse logique, prenant appui sur les travaux de Behr et al. (1992), nous permet d'appréhender la fraction comme se constituant, en tant que relation multiplicative, à travers l'articulation d'unités et de sous-unités produisant des unités composites. L'analyse didactique des problèmes proposés aux élèves nous permet d'approcher, dans un sens causal et non prescriptif, les manières de rencontrer les relations multiplicatives inhérentes au concept fraction. L'analyse *a priori* que nous avons réalisée montre comment la gestion des unités composites nécessaire au traitement de la relation multiplicative passe par la capacité à traiter simultanément différents ordres d'unités. Par exemple, l'évolution de l'agir-parler-penser la relation fraction-unité traduit un changement de regard sur la fraction $\frac{6}{3}$, éventuellement reconnue comme deux unités composites, plutôt que comme 6 unités élémentaires, ce qui témoigne de la capacité à concevoir des fractions non unitaires comme des unités composites.

Les analyses *a posteriori* permettent d'étudier les échanges langagiers entre l'enseignante et les élèves autour de problèmes mathématiques présentant des caractéristiques différentes. L'évolution et l'interinfluence des modes d'agir-parler-penser les fractions se produit au cœur des interactions langagières entre les élèves et l'enseignante, mais aussi grâce aux interactions permanentes entre les élèves et le problème posé. Cela implique la prise en compte d'éléments constitutifs ou non de l'énoncé (énoncé écrit, dessin à réaliser ou déjà tracé, nombres écrits ou évoqués, schémas, modification des représentations visuelles données, etc.) à travers des manifestations plus ou moins visibles telles que l'agir sur les dessins. Au fur et à mesure que la relation entre l'unité et les sous-unités la constituant se construit, le rôle du dessin se modifie, c'est-à-dire qu'il agit éventuellement comme outil pour soutenir ou exprimer un raisonnement. Alors que les caractéristiques du premier problème (avec présence des verres dessinés) encouragent le déplacement et l'assemblage des quantités et donc aussi le recours à des déictiques au détriment d'expressions propres aux fractions, les caractéristiques du deuxième problème favorisent davantage la mise en place de stratégies numériques s'appuyant sur un raisonnement additif ou multiplicatif. La progression de ces deux problèmes et les interventions de l'enseignante visent à partir des modes d'agir-parler-penser spontanés des élèves pour les faire évoluer vers les savoirs mathématiques socialement reconnus. L'agir-parler-penser de l'enseignante encourage les élèves à se détacher du réel pour envisager les relations mathématiques en jeu dans les problèmes. Les pratiques langagières de l'enseignante participent effectivement au processus de décontextualisation, grâce à un travail permanent de reformulation, d'emploi systématique du vocabulaire et d'introduction du symbolisme, guidant ainsi les élèves vers des formes sémiotiques conventionnelles et stabilisées.

En somme, notre recherche suggère qu'une analyse de la relation entre l'enseignement, l'apprentissage et les objets de savoir sous l'angle de l'agir-parler-penser est pertinente non seulement pour des objets géométriques, mais aussi pour d'autres objets mathématiques tels que les fractions. Un tel travail permet effectivement de procéder à une analyse approfondie des interactions didactiques et d'interpréter finement les décalages et la synchronisation de l'activité mathématique entre différents élèves et entre les élèves et l'enseignant. La prise en compte des trois dimensions de l'activité mathématique (agir, parler et penser) est selon nous une avenue prometteuse pour enrichir les analyses *a priori* et l'analyse des interactions didactiques, et ce, bien au-delà du domaine de la géométrie.

Bibliographie

ADJIAGE, R. (1999), *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial.* Thèse de doctorat. Université Louis Pasteur, Strasbourg.

ARTIGUE, M. (1990), Ingénierie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **9(3)**, 281-308.

BARRERA-CURIN, R. I., BULF, C., & VENANT, F. (2016), Didactique, Sémantique et Métaphore : Analyses des langages en classe de géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **21**, 39-78.

BARRERA-CURIN, R. I., & CHESNAIS A. (2015), L'articulation de l'activité de l'enseignant avec l'activité mathématique de l'élève : la question de la participation de l'enseignant à l'apprentissage de l'élève en contexte d'orthopédagogie. In Theis, Laurent (Eds.), *Colloque de l'Espace mathématique francophone (EMF) : Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* (pp. 779-790), Alger : Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne, Société Mathématique d'Algérie.

BARRIER, T., HACHE, C., & MATHÉ A.-C. (2013), Seeing – acting – speaking in geometry: a case study. In B. Ubuz, C. Haser, et M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8* (pp. 1458- 1467), Ankara : Middle East Technical University.

BARRIER, T., CHESNAIS, A., & HACHE, C. (2014), Décrire les activités des élèves en géométrie et leur articulation avec celle de l'enseignant, *Spirale – Revue de Recherches en Education*, **54**, 175-193.

BAUTIER, E. (1995), *Pratiques langagières, pratiques sociales : de la socio-linguistique à la sociologie du langage*. Paris : L'Harmattan.

BAUTIER, E., & GOIGOUX, R. (2004), Difficultés d'apprentissage, processus de secondarisation et pratiques enseignantes : une hypothèse relationnelle. *Revue française de pédagogie*, **148**, 89-100.

BEHR, M., HAREL, G., POST, T., & LESH, R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). New-York: Macmillan Publishing.

BERNIE, J.-P. (2002), L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de « communauté discursive » : un apport à la didactique comparée ?, *Revue Française de Pédagogie*, **141**, 77-88.

BERNSTEIN, B. (1971/1975), *Langage et classes sociales, codes sociolinguistiques et contrôle social.* Paris : Minuit.

BLOUIN, P. (1993), *Enseignement de la notion de fraction à des élèves de 1ère secondaire en difficulté d'apprentissage*. Thèse de doctorat. Université de Montréal, Montréal.

BRONNER, A., BULF, C., CASTELA, C., GEORGET, J.-P, LARGUIE, M., PEDEMONTE, B., PRESSIAT, A., & RODITI, E. (Coord) (2013), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

BROUSSEAU, G., & BROUSSEAU, N. (1987), *Rationnels et Décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux : Université de Bordeaux 1.

BULF, C., MATHE, A.-C., & MITHALAL, J. (2014), Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. Langage et activité géométrique, *Spirale – Revue de Recherches en Education*, **54**, 29-48.

BULF, C., MATHE, A.-C., & MITHALAL, J. (2015), Langage et construction de connaissances dans une situation de résolution de problèmes en géométrie, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **35(1)**, 7-36.

CHARALAMBOUS, C.Y., & PITTA-PANTAZI, D. (2007), Drawing on a theoretical model to study students understandings of fractions, *Educational Studies in Mathematics*, **64(3)**, 293-316.

CHARLOT, B., BEAUTIER, E., & ROCHE, J.-Y. (1992), *École et savoirs dans les banlieux… et ailleurs*. Paris : Armand Colin.

DESJARDINS, M., & HETU, J.-C. (1974), *L'activité mathématique dans l'enseignement des fractions*. Montréal : Presses de l'Université de Montréal.

GIROUX, J., & STE-MARIE, A. (2007), Maillage de situations didactiques dans des classes d'adaptation scolaire. In J. Giroux et D. Gauthier (Eds.), *L'enseignement et l'apprentissage des mathématiques* (pp. 35-63), Montréal : Éditions Bande didactique.

HACHE, C. (2013), Langage mathématique à la transition primaire/collège. *Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève*, ARPEME, 452-463.

HOULE, V. (2016), *Fondements didactiques pour une intervention orthopédagogique sur la notion de fraction*. Thèse de doctorat. Université du Québec, Montréal.

HOULE, V., & GIROUX J. (2018), Interprétations de la fraction et enseignement/apprentissage des fractions équivalentes au primaire, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et de la technologie*, **18(1)**, 1-13.

JAUBERT, M., & REBIERE M. (2012), Communauté discursives disciplinaires scolaires et constructions de savoirs : l'hypothèse énonciative, dans forumlecture. ch, Plate-forme internet sur la littéracie.
http://www.leseforum.ch/myUploadData/files/2012_3_Jaubert_Rebiere_Bernier.pdf

KIEREN, T.E. (1989), Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In J. Hiebert et M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 162-181). Reston, Virginia: Editions Lawrence Erlbaum.

RIOUX, M. (2003), *Les pratiques sociales didactisées relatives aux fractions dans les manuels québécois utilisés pour l'enseignement des mathématiques en sixième année*. Mémoire de maîtrise. Université du Québec, Rimouski.

ROSAR, D., VAN NIEUWENHOVEN, C., & JONNAERT, P. (2001), Les fractions : comment mieux comprendre les difficultés rencontrées par les élèves ? *Instantanés mathématiques*, **37(2)**, 4-16.

ROUCHE, N. (1998), *Pourquoi ont-ils inventé les fractions* ? Paris : Ellipses.

STREEFLAND, L. (1991), *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

VERGNAUD, G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Peter Lang : Berne.

VERGNAUD, G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des Mathématiques,* **10(2-3)**, 133-170.

VYGOTSKI, L. (1934/1997), *Pensée et langage (3ème édition*). Paris : La Dispute.

WITTGENSTEIN L. (1953), *Philosophische Untersuchungen [Philosophical Investigations]*, translated by G.E.M. Anscombe. New York, Macmillan.

VIRGINIE HOULE
Université du Québec à Montréal
houle.virginie@uqam.ca

FABIENNE VENANT
Université du Québec à Montréal
venant.fabienne@uqam.ca

RAQUEL ISABEL BARRERA-CURIN
Université du Québec à Montréal
barrera.raquel@uqam.ca

NATACHA DUROISIN, ROMAIN BEAUSET, JESSICA LUCCHESE

FAVORISER LE PASSAGE À LA VISUALISATION NON ICONIQUE PAR LE RECOURS À UNE INGÉNIERIE DIDACTIQUE POUR FACILITER LA TRANSITION PRIMAIRE/SECONDAIRE EN GEOMETRIE

Abstract. Promoting the passage to non-iconic visualization by using didactic engineering to improve transition primary/secondary education in geometry. There is a rupture of didactic contract about the visualization learning during the transition from primary to secondary (Perrin-Glorian & Godin, 2018). If iconic visualization is exercised in primary education, the acquisition of non-iconic visualization – which is fundamental – is left to the learners at the beginning of secondary school. This article describes the results of a belgian study, based on quasi-experimentation plan in Belgium, which is part of the didactics of mathematics and cognitive sciences. The aim of the authors is to evaluate the implementation of a didactic engineering based on dimensional deconstruction allowing the progressive development of non-iconic type visualization in learners at the end of primary education. The results are used to guide the work of mathematics teachers.

Résumé. Il existe une rupture de contrat didactique lors de la transition primaire-secondaire concernant l'apprentissage de la visualisation (Perrin-Glorian & Godin, 2018). Si la visualisation iconique est exercée durant le primaire, l'acquisition de la visualisation non iconique – pourtant fondamentale – est laissée à la seule charge de l'élève dès le début du secondaire. Cet article présente les résultats d'une étude belge, menée selon un plan quasi expérimental, s'inscrivant dans les domaines de la didactique des mathématiques et des sciences cognitives. L'objectif des auteurs est d'évaluer une ingénierie didactique basée sur la déconstruction dimensionnelle pour permettre le développement progressif de la visualisation de type non iconique en fin de primaire. Les résultats orientent le travail des enseignants de mathématiques.

Mots-clés. Mathématiques, géométrie, déconstruction dimensionnelle, visualisation, ingénierie didactique, apprentissages, transition primaire-secondaire, groupe contrôle, pratiques enseignantes.

La géométrie est décrite, par Duval (2005), comme « le domaine le plus difficile à enseigner et l'un de ceux où, même lorsque les objectifs restent très modestes, les résultats atteints sont décevants » (p. 6). Duval (2005) et aussi Bulf (2019) l'expliquent notamment par le fait qu'elle exige une activité cognitive complète sollicitant simultanément la visualisation, mais aussi le geste (activité matérielle) et le langage : « là, il faut construire, raisonner et voir, indissociablement » (Duval, 2005, p. 6). D'ailleurs, des difficultés résistantes concernant l'usage des figures dans la résolution des problèmes de géométrie ont été repérées depuis longtemps chez les

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 25, p. 151 - 182.

élèves du collège[1]. C'est le cas par exemple dans la construction de figures mais aussi dans la démonstration de propriétés géométriques (Duval, Godin & Perrin-Glorian, 2005).

On peut définir la visualisation comme une habileté spatiale qui résulte d'un apprentissage conduisant le sujet à anticiper l'apparence d'objets complexes et à effectuer des opérations mentales (i.e. rotations, transformations, manipulations) sur des objets en deux ou trois dimensions lorsqu'ils sont visuellement perçus (Barisnikov & Pizzo, 2007).

Les recherches menées en didactique de la géométrie ces quinze dernières années, en relation avec les travaux de Duval (2005), ont permis de relever une rupture dans l'enseignement-apprentissage concernant la visualisation de figures. Elles ont également rendu possible le développement d'une mobilité du regard chez les élèves pour favoriser un passage progressif d'une visualisation iconique à une visualisation non iconique. L'enjeu premier pour entrer dans une démarche géométrique est, en effet, le passage du regard habituel et intuitif que les élèves portent sur un dessin (aussi appelé le mode de visualisation iconique) au regard géométrique (faisant référence au mode de visualisation non iconique) qu'il est essentiel de porter sur une figure (Duval, 2011). Le mode de visualisation non iconique apparaît donc comme la manière pertinente de voir. Ce mode est nécessaire à l'acquisition de propriétés géométriques comme les propriétés d'incidence, dont la maîtrise ne semble pas ou semble peu acquise (Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2014), mais également au développement des capacités à démontrer (Duval, 2005 ; Perrin-Glorian, 2012 ; Barrier, Hache & Mathé, 2014). Duval et Godin (2005) affirment, en ce sens que, sans ce changement de regard, « toutes les formulations de propriétés géométriques risquent d'être des formulations qui tournent à vide » (p. 8), ce qui constitue un obstacle à la poursuite de l'apprentissage.

Cette rupture au niveau de la visualisation de figures est également relevée dans le curriculum belge francophone (contexte dans lequel se déroule la présente étude). Alors que l'apprentissage explicite de la visualisation n'est objet d'étude qu'à de rares occasions et ne fait l'objet que de consignes floues aux enseignants (Duroisin & Demeuse, 2016), il est attendu des élèves de l'enseignement secondaire qu'ils se situent dans le mode de visualisation non iconique. Or, dans l'enseignement primaire, l'organisation des objectifs d'enseignement en géométrie plane amène d'abord les élèves à développer des connaissances sur les propriétés des objets à une dimension (droites, les relations qu'entretiennent les droites entre elles et leurs propriétés). Elle invite ensuite à travailler sur les formes familières à deux dimensions (carré, rectangle, triangle…), de manière assez scindée, sans établir

[1] Soit le début de l'enseignement secondaire en Belgique francophone.

suffisamment de liens entre les configurations à une dimension et celles à deux dimensions (Duroisin, 2015). Une telle organisation ne correspond pas au mode non iconique. Le changement de mode de visualisation est ainsi laissé à la charge des élèves alors qu'il ne se fait pas naturellement chez ces derniers et nécessite un travail de la part des enseignants (Duval & Godin, 2005 ; Mathé, 2008 ; Bulf & Celi, 2015). Alors que le développement de la visualisation non iconique lors de l'enseignement primaire apparaît indispensable pour organiser une progression cohérente vers le secondaire et, ainsi, éviter la rupture de contrat didactique existant actuellement entre ces deux niveaux (Mathé, 2012), il s'avère que les enseignants ont du mal à se constituer des outils qui peuvent leur permettre d'enrichir leurs pratiques en géométrie (Bulf & Mathé, 2018).

Sur la base de ces éléments contextuels, le but de cette étude est d'observer si des séquences d'apprentissage qui proposent des activités de type résolution de problèmes en géométrie nécessitant le recours à la déconstruction dimensionnelle permettent aux élèves de changer de regard pour effectuer l'analyse de figures. Autrement dit, il est question de mesurer les effets, sur quelques élèves, des suggestions d'enseignement proposées par Duval et Godin (2005) et enrichies par de nombreux auteurs à l'instar de Mathé (2008) ou de Perrin-Glorian et Godin (2014).

L'hypothèse posée est qu'une ingénierie didactique centrée sur le développement de la déconstruction dimensionnelle permettrait aux élèves de fin de l'enseignement primaire[2] d'entrer progressivement dans une visualisation de type non iconique. La variable indépendante de l'étude concerne donc le changement de regard des élèves dans l'analyse des figures au travers du suivi d'un parcours de formation développant la pratique de la déconstruction dimensionnelle. La variable dépendante, qui va faire l'objet d'observations, concerne les performances des élèves et en particulier l'enrichissement de la visualisation des figures.

Plusieurs questions sont ainsi à l'origine de la présente étude : comment assurer une transition plus efficace du primaire au secondaire en géométrie ? Quels types d'activités concrètes peut-on proposer en ce sens ? Comment permettre à l'élève de passer d'un regard centré sur les surfaces et les segments qui les composent (regard naturel que l'homme exerce en dehors des mathématiques) à un regard faisant apparaître des réseaux de droites et de points nécessaires à l'analyse des figures étudiées ? L'objectif poursuivi est donc de proposer et de valider des activités permettant de faire évoluer le regard que les élèves portent sur la figure et plus particulièrement de travailler la mobilité du regard pour favoriser un passage progressif d'une visualisation iconique à une visualisation non iconique.

[2] 5e et 6e grade (10-12 ans).

1. Eléments théoriques : de la perception spontanée à la déconstruction dimensionnelle

Selon Duval et Godin (2005), il existe au moins trois voies différentes pour analyser une figure. La première est naturelle : il s'agit de la perception. Celle-ci est prégnante et s'appuie sur la reconnaissance des formes (ou unités figurales) par les propriétés visuelles que celles-ci renvoient. La deuxième voie d'analyse est celle de l'utilisation des propriétés mobilisées en fonction d'hypothèses données. L'analyse instrumentale, correspondant à l'identification des procédures mises en place pour reproduire ou pour construire une figure avec des instruments variés, constitue la troisième voie d'analyse (Duval & Godin, 2005).

1.1. La perception spontanée

Il existe une prédominance très forte et durable de la première voie d'analyse. Au sein de celle-ci, il ressort une « priorité cognitive des figures 2D sur les figures 1D » (Duval & Godin, 2005, p. 7) puisque sur le plan perceptif, les formes à deux dimensions ne se décomposent pas naturellement en un réseau de droites ou encore en un réseau de points. Malgré la dominance de la perception, on cherche à développer les deuxième et troisième voies d'analyse, nécessaires en géométrie, puisqu'elles semblent permettre une transition progressive vers la visualisation non iconique.

1.2. La déconstruction dimensionnelle : déconstruire pour mieux appréhender les relations entre unités figurales

Pour arriver à dépasser la prédominance de la perception, Duval et Godin (2005) et Bulf et Celi (2015) précisent qu'il est nécessaire d'adapter l'analyse visuelle des figures utilisée par les apprenants. Il s'agit de faire passer les apprenants d'une analyse en termes d'assemblages de surfaces, que Mangiante-Orsola et Perrin-Glorian (2014) appellent vision « surfaces », à une analyse visuelle en termes d'assemblages de formes 1D et 0D, appelée respectivement visions « lignes » et « points ». C'est ce que Duval (2005) appelle la déconstruction dimensionnelle : elle consiste à décomposer une unité figurale 2D, en un assemblage d'unités figurales de dimensions inférieures, 1D (droites) et/ou 0D (points), afin de voir apparaître les relations existant entre ces unités figurales (Mithalal, 2010) (Figure 1). Comme l'indique Bulf (2009), la déconstruction dimensionnelle permet « de mettre en évidence des relations entre unités figurales de dimension inférieure et d'en déduire des propriétés géométriques associées à un raisonnement déductif relaté dans un discours axiomatique » (p. 55).

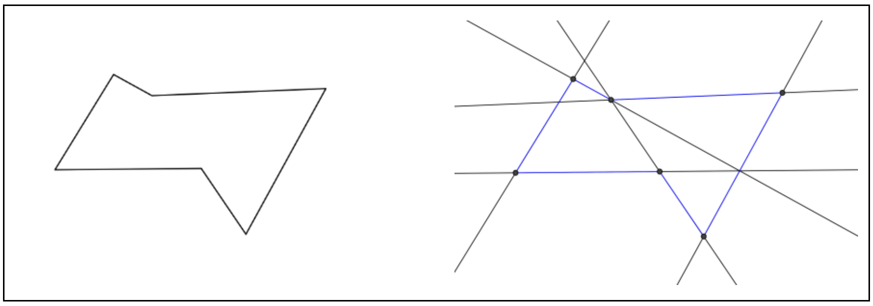


Figure 1. Déconstruction dimensionnelle en unités figurales 1D ou 0D

Ce geste de prolongement de segments a un intérêt primordial : celui de passer progressivement d'une vision d'unités figurales 2D à une vision d'unités figurales 1D. Cela favorise le passage de la vision « surfaces » à la vision « lignes » et ensuite de la vision « lignes » à la vision « points ». Ces différents regards comportant un grand intérêt pour accéder au processus de démonstration (Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2014).

1.3. La déconstruction dimensionnelle : déconstruire pour mieux appréhender les relations entre unités figurales

Pour visualiser une figure, deux modes distincts de fonctionnement cognitif peuvent donc être sollicités : la visualisation iconique et la visualisation non iconique. Le premier est plutôt de l'ordre du profil de l'objet réel (vision 2D) et semble se rapporter à la première voie d'analyse susmentionnée. Le second correspond plutôt à la mise en place d'une suite d'opérations qui vont conduire à reconnaître les propriétés géométriques, ce qui correspond davantage aux deux autres voies citées.

En ce qui concerne la visualisation, Duval (2005) précise qu'elle fonctionne selon « deux niveaux d'opérations » qui sont « la reconnaissance discriminative de formes et l'identification des objets correspondant aux formes reconnues » (p. 13). La visualisation iconique est celle qui est utilisée dans la vie quotidienne et qui repose sur un fort potentiel perceptif : on observe des formes, des dessins… et on essaie de les associer à un répertoire connu. Mithalal (2011) précise :

> Le sujet n'a accès qu'à la forme générale, et ne peut opérer dessus sous peine de la dénaturer […]. On le voit, cette limite est rédhibitoire en géométrie puisqu'elle interdit de modifier le dessin pour faire apparaître des propriétés. (p. 114)

La forme devient donc ainsi définitoire pour les objets (Mithalal, 2014) et dès lors, « le dessin est l'objet d'étude à part entière — ou une reproduction à l'identique de l'objet d'étude plutôt qu'une représentation —, et la figure n'est pas prise en compte » (p. 56).

En proposant le développement des gestes de prolongement des côtés, on favorise un passage au mode de visualisation non iconique puisqu'on dépasse la simple perception en mettant en place une série d'opérations qui sont l'ajout de tracés réorganisateurs. Ces opérations vont permettre l'apparition d'un réseau de droites et de points sur lequel des propriétés pourront être identifiées. Dès lors, ce n'est plus leur forme qui définit les objets, mais bien l'assemblage d'objets de dimension plus petite (Mithalal, 2014).

1.4. Dépasser la visualisation iconique pour ouvrir le champ des possibles

La visualisation iconique gêne l'appréhension de certaines propriétés géométriques et conduit parfois à des impasses. Selon Mithalal (2011), en premier lieu, le regard se focalise directement sur le contour, sur le profil des figures. De ce fait, tout ce qui se trouve en dehors de ce champ n'est pas, sans apprentissage, perçu comme mobilisable pour résoudre le problème posé. La prégnance de la visualisation iconique est aussi démontrée par différentes expériences mises au point par les gestaltistes prouvant que les stimuli mis en œuvre dans une situation d'apprentissage sont perçus globalement (Koffka, 1935 ; Köhler, 1929). Pour le gestaltisme, apprendre, c'est organiser et réorganiser différemment certains éléments ; c'est découvrir et établir des relations nouvelles entre des éléments qui jusqu'alors étaient vus comme isolés. Il s'agit alors de résoudre des problèmes et de découvrir une solution appropriée par restructuration des éléments de la situation. Pour expliquer comment se déroule l'apprentissage, les gestaltistes font appel au phénomène d' « insight » (Clément, 2009), qui désigne la prise de conscience permettant au sujet de sortir des limites imposées par la forme. Une deuxième impasse réside dans le fait que la seule visualisation iconique peut parfois être trompeuse et on ne peut, par conséquent, s'y fier : « il peut y avoir conflit entre la reconnaissance des formes par simple ressemblance à un exemple type et l'identification de l'objet auquel correspond la forme reconnue » (Duval, 2005, p. 15). A ce titre, nombreux sont les élèves qui voient un losange strict lorsqu'un carré est présenté sur sa pointe. Une troisième impasse réside dans le fait que « les formes apparaissent comme étant stables. Elles ne sont donc pas vues d'une manière qui permette de les transformer en d'autres formes semblables ou, surtout, différentes » (Duval, 2005, p. 15). Or, une figure donnée peut en générer une autre si l'on procède, par exemple, à la réorganisation visuelle des formes qui ont été reconnues et qui caractérisent la figure initiale.

1.5. Miser sur des activités spécifiques pour permettre le changement de regard

Mathé (2008) propose, comme l'avait déjà fait Grenier (1988) et Bouleau (2001), de faire varier les artefacts utilisés par l'élève lors de travaux de restauration[3] ou de reproduction de figures (matériels favorisant la vision 1D comme la règle ou l'équerre et matériels favorisant la vision 2D comme les gabarits ou pochoirs) afin d'amorcer le changement de regard attendu :

> C'est le jeu sur les instruments, via l'analyse des figures en termes d'unités de dimension un ou zéro que l'utilisation de ces instruments induisent, qui provoque le changement de rapport des élèves aux objets et pourrait leur permettre l'articulation entre l'analyse perceptive et l'analyse géométrique des figures. […] l'enseignant peut accompagner les élèves à exercer ces modifications de la manière de voir les objets par un travail sur les instruments dans des situations de restauration de figures. (Mathé, 2008, p. 5)

Duval et Godin (2005, p. 8) précisent que « c'est en effet en jouant sur la variable qu'offrent les instruments, dans une situation de reproduction [ou de restauration] que l'on inversera chez les élèves, la prédominance très forte et durable d'une analyse perceptive sur une analyse géométrique des figures ». Bulf et Celi (2015) confirment l'intérêt des activités de restauration et de reproduction de figures bien qu'elles soient souvent sous-estimées, notamment parce qu'elles sont utilisées uniquement dans l'optique d'apprendre le maniement des instruments. Pourtant, ces activités sont décrites comme ayant un réel intérêt pour le changement de regard (Delplace, Keskessa & Perrin-Glorian, 2007 ; Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2014…), à condition de faire un choix adéquat des variables didactiques.

2. Éléments méthodologiques, échantillon et présentation des séquences d'enseignement-apprentissage

La présente expérimentation porte sur le développement de la visualisation non iconique des élèves de sixième et dernière année de l'enseignement primaire[4] de Belgique francophone[5]. La recherche menée a conduit à la création de séquences

---

[3] Les tâches de restauration de figures consistent à demander à l'élève de « reproduire une figure […] mais avec des conditions spécifiques, soit on dispose déjà d'une partie de la figure, soit on dispose d'instruments qui permettent de transporter des informations 2D sur la figure […] » (Leclercq & Mangiante-Orsola, 2014).

[4] 6e grade (11-12 ans).

[5] Des informations complémentaires à propos du système éducatif belge francophone peuvent être trouvées via la page suivante du site Eurydice :

d'apprentissage de type résolution de problèmes, principalement de restauration et reproduction de figures, axée sur la déconstruction dimensionnelle.

Le module complet de formation a été élaboré en prenant appui sur différentes recherches en didactique issues notamment du groupe de recherche de l'IUFM Nord-Pas-de-Calais (i.e. Duval & Godin, 2005 ; Delplace, Keskessa & Perrin-Glorian, 2007 ; Mathé, 2008 ; Mangiante-Orsola & Perrin-Glorian, 2014). Lors des séquences proposées aux élèves, plusieurs variables didactiques ont été considérées dans la résolution des exercices de restauration et reproduction de figures demandés et dans leur mise en commun en classe (Tableau 1).

Les types d'instruments mis à disposition	Les instruments constituent une variable didactique importante notamment parce qu'ils sont porteurs de propriétés géométriques des dessins (Barrier, Hache & Mathé, 2014). Certains sont des instruments permettant de travailler sur des unités figurales 2D (gabarits…) alors que d'autres permettent de travailler sur des unités figurales 1D (la règle non graduée, le compas…). Comme suggéré par Duval et Godin (2005), une progression est proposée dans le choix des instruments mis à disposition pour résoudre les problèmes rencontrés au sein du dispositif pédagogique. Par ailleurs, les instruments permettant le recours à la prise de mesure ont été évités comme le suggéraient Perrin-Glorian et Godin (2014) ou encore Duval et Godin (2005). Ce choix est fait afin de focaliser l'attention des apprenants sur des propriétés géométriques, et non sur des nombres et des calculs.
L'introduction d'un coût à l'utilisation des instruments	Ce système est mis en place pour inciter à l'utilisation de certaines techniques de reproduction plutôt que d'autres (Mathé, 2008 ; Perrin-Glorian, Mathé & Leclercq, 2013 ; Barrier, Hache & Mathé, 2014).
Le type de figure et l'amorce proposée	Le choix des figures permet de faire varier les connaissances à mobiliser (figures complexes possédant des alignements et/ou nécessitant l'utilisation des milieux). « Certaines amorces favorisent a priori davantage un jeu de déconstruction et reconstruction de la figure modèle (2D ↔ 1D ↔ 0D) » (Bulf & Mathé, 2018, p. 44). L'agrandissement ou la réduction des figures à restaurer, mais également la différence d'orientation par rapport au modèle sont également pris en compte. Cela permet d'inciter davantage à dépasser la perception (Bulf & Celi, 2016). En effet, l'agrandissement des figures à restaurer invite au repérage de relations et à l'utilisation de tracés pour la reconstruction puisque la simple utilisation de mesure est rendue plus complexe.

---

https://webgate.ec.europa.eu/fpfis/mwikis/eurydice/index.php/BelgiqueCommunaute-francaise:Aper%C3%A7u_des_principaux_%C3%A9l%C3%A9ments.

L'utilisation facultative du logiciel GéoGébra® lors des mises en commun des résultats	Si l'environnement papier-crayon constitue une variable didactique des tâches de restauration proposées aux élèves, le dispositif de formation suggère une utilisation du logiciel de géométrie interactive GéoGébra®[6] en classe, sur le tableau blanc interactif (TBI) pour les temps de mises en commun. Le logiciel est donc intégré après le temps de résolution individuelle sur papier. Cette intégration offre plusieurs avantages. Elle permet de récupérer facilement les traces des séquences de cours précédentes (Duroisin, Temperman & De Lièvre, 2015). Elle permet d'ajouter des tracés et de les effacer aussitôt sans avoir à reconstruire la figure ou l'amorce de départ mais aussi de construire toutes les figures qui servent tantôt de modèle, tantôt d'amorce aux élèves. De plus, son intégration évite à l'enseignant de devoir tracer au tableau les figures et les lignes avec la perte de temps et le manque de précision que cela peut engendrer.

Tableau 1. Variables didactiques prises en compte dans le module de formation

Au total, le module de formation est composé de cinq séquences didactiques[7], dont la longueur de chacune d'elles varie de deux à six fois cinquante minutes. Ces séquences visent à développer la capacité des élèves à envisager des relations d'incidence (l'appartenance d'un point à un segment, l'appartenance d'un point à deux segments, les intersections, les alignements, etc.) comme outils de reproduction de dessin-figure.

- La première séquence porte sur la reproduction isométrique d'un réseau de droites uniquement à l'aide d'une règle non graduée et permet notamment d'introduire l'importance d'observer l'alignement des points.
- La deuxième propose une progression d'activités de restauration isométrique de figures simples puis complexes, en imposant l'usage des différents instruments (gabarits et pochoirs → gabarits et plusieurs règles non graduées → gabarit et une seule règle non graduée → …). La progression d'instrument a été proposée afin de relever différentes techniques de reproduction ou restauration (selon les instruments).
- Dans la troisième séquence, les élèves sont invités à restaurer de manière isométrique des figures complexes. Un système de coût est proposé sur

[6] Lien vers le logiciel de géométrie interactive : https://www.geogebra.org/

[7] Un descriptif de chacune des séquences (avec illustrations) est placé en annexe (Annexe 1) et les dispositifs sont également accessibles à partir du lien suivant : https://sharepoint1.umons.ac.be/FR/universite/facultes/fpse/serviceseetr/methodo/recherches/recherches_en_cours/Pages/FaciliterTransitionGeometrie.aspx.

l'utilisation des instruments afin d'inciter aux techniques utilisant les propriétés d'alignements.

– La quatrième séquence s'inscrit dans le prolongement de la précédente et instaure des reproductions qui ne sont plus isométriques, c'est-à-dire avec agrandissement ou réduction.

– La dernière séquence propose la restauration de figures nécessitant l'utilisation des milieux et un système de coût pour l'utilisation des instruments y est également instauré.

Enseigner autant de séquences de travail sur ce thème devrait permettre donc de voir apparaître une augmentation des gestes d'ajouts de tracés dans les tâches de restauration, permettant ainsi à l'apprenant d'entrer dans un mode de visualisation non iconique.

Le module de formation présenté a été testé au cours d'un plan quasi expérimental à observations pré- et post-expérimentales assorti d'un groupe contrôle, afin d'observer si le traitement expérimental a des effets sur l'acquisition de la visualisation non iconique.

L'échantillon expérimental, de type occasionnel, est constitué de quatre classes de sixième primaire, dernière année avant l'entrée en enseignement secondaire, provenant de deux écoles distinctes de la Fédération Wallonie-Bruxelles (Belgique). Les institutions scolaires dans lesquelles l'expérimentation a été menée sont deux écoles fondamentales communales belges francophones[8]. Celles-ci disposent d'un local équipé d'un TBI. Les indices socio-économiques de ces écoles (attribués par la Fédération Wallonie-Bruxelles par l'arrêté du Gouvernement de la Fédération Wallonie-Bruxelles du 24 mars 2011) sont respectivement de 5 et 4 sur 20. Ces indices étant assez proches, cela témoigne de l'homogénéité du public, en moyenne plutôt défavorisé. Les deux classes de la première école comptent chacune 20 élèves alors que dans la seconde école, elles en comptent 13 chacune. Notre échantillon comporte donc 66 élèves. Une classe de la première école et une classe de la seconde école ont constitué le groupe expérimental. Les deux autres classes forment le groupe contrôle. La procédure d'échantillonnage est non probabiliste ; les individus ont été sélectionnés en fonction de leur disponibilité et de la volonté des enseignants à participer à l'expérimentation. Le tableau 2 résume les informations importantes sur l'échantillon et les groupes constitués.

[8] Une demande d'autorisation a été introduite et acceptée par le collège communal afin que notre expérimentation puisse être menée dans ces écoles.

	Ecole A (indice socio-économique de 5/20)	Ecole B (indice socio-économique de 4/20)	Total
Groupe expérimental	1 classe de 6P (20 élèves)	1 classe de 6P (13 élèves)	2 classes (33 élèves)
Groupe contrôle	1 classe de 6P (20 élèves)	1 classe de 6P (13 élèves)	2 classes (33 élèves)

Tableau 2. Descriptif de l'échantillon et des groupes

Dans un premier temps, un prétest écrit a été soumis aux quatre classes sans donner d'information particulière sur le but de l'expérimentation. Les exercices proposés dans celui-ci ont été présenté au début du mois de novembre.

Ensuite, le traitement expérimental est mis en œuvre dans les deux classes du groupe expérimental. Muni du dispositif élaboré et de la méthodologie complète qui lui est associée, l'expérimentateur, ayant une formation initiale pédagogique, a proposé les différentes séquences du dispositif de formation aux deux classes. Comme suggéré, l'enseignant a utilisé le logiciel GéoGébra® pour la réalisation des mises en commun au cours du dispositif. Le dispositif a été dispensé du début novembre au début février, à raison de deux périodes de 50 minutes par semaine. En parallèle, le groupe contrôle a poursuivi son cursus habituel en géométrie, sans recours aux activités spécifiques de déconstruction dimensionnelle. Aucun traitement expérimental n'a été appliqué sur ce groupe entre les deux phases d'observations. La récolte d'informations auprès des enseignants titulaires des classes constituant le groupe contrôle a également permis de confirmer qu'aucune activité sur des tâches de restauration et de reproduction n'a été proposée aux élèves de ce groupe entre les deux épreuves.

Enfin, dans un troisième temps, un post-test a été réalisé mi-février par les quatre classes, en suivant le même déroulement et dans les mêmes conditions de passation que le prétest. En construisant les exercices du post-test de sorte qu'ils soient parallèles aux exercices du prétest, l'objectif est de mesurer l'évolution du changement de regard des élèves (passage du mode de visualisation iconique vers le mode de visualisation non iconique) lorsque ces derniers résolvent différents exercices (i.e. ajout de tracés auxiliaires).

Les épreuves pré- et post-expérimentales mises en place sont composées de cinq[9] questions pour lesquelles il faut décomposer la figure « modèle » en unités figurales 2D, 1D et/ou 0D pour être en mesure de la reproduire ou de la restaurer. Pour les réaliser, l'ensemble du matériel géométrique habituel (latte, équerre et compas) est laissé aux élèves. Lors de la passation des épreuves, il est par ailleurs demandé aux élèves de ne pas effacer les traces de construction. Certains de ces exercices sont tirés des épreuves certificatives externes passées à la fin de l'enseignement primaire.

Le parallélisme des deux questionnaires a été vérifié afin de s'assurer d'une bonne consistance interne entre les items des épreuves (α prétest = .858 ; α post-test = .857). Chaque exercice du prétest est associé à un exercice du post-test qui lui est proche et cinq paires de questions sont donc identifiées. Il a par ailleurs été vérifié auprès des enseignants qu'aucun des exercices des deux épreuves n'avait été proposé antérieurement aux élèves.

A titre d'illustration, la figure 2 est l'une des questions posées au prétest. On y observe que l'élève va devoir, poursuivre l'amorce imposée en identifiant le centre du cercle à l'aide des diagonales ou médianes du quadrilatère. Les pré- et post-tests sont placés en annexe 2.

Consigne : Voici un dessin composé d'un rectangle et d'un cercle. **REPRODUIS <u>exactement</u>** ce dessin qui est déjà commencé : une longueur et une largeur du rectangle sont déjà tracées. Laisse les traces de ta construction.

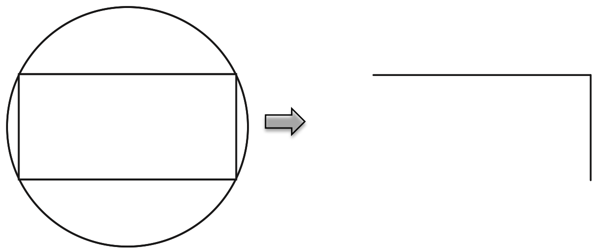


Figure 2. Illustration d'un exercice de l'épreuve prétest

Pour chacun des exercices des pré- et post-tests, six microvariables permettant le codage des productions des élèves ont été retenues. Elles ont notamment pour objectif d'identifier si les élèves ajoutent des tracés, ce qui permet d'obtenir des informations sur le mode de visualisation non iconique :

[9] Chacun des exercices ne se rapporte pas spécifiquement à une des séquences du dispositif de formation.

- L'élève a réussi la reproduction-restauration de la figure (microvariable 1) ;
- L'élève fait apparaitre des tracés sur le modèle (microvariable 2) ;
- L'élève fait apparaître quelques tracés auxiliaires utiles à la restauration-reproduction sur le modèle (microvariable 3) ;
- L'élève fait apparaître quelques tracés auxiliaires utiles à la restauration-reproduction sur l'amorce ou dans la zone de reproduction (microvariable 4) ;
- L'élève fait apparaître tous les tracés auxiliaires utiles à la restauration-reproduction sur le modèle (microvariable 5) ;
- L'élève fait apparaître tous les tracés auxiliaires utiles à la restauration-reproduction sur l'amorce ou dans la zone de reproduction (microvariable 6).

Les données recueillies sont de type dichotomique puisqu'il s'agit d'indiquer si le comportement se manifeste ou non. En cas de manifestation de la microvariable, un point est attribué par exercice. Ainsi, cette façon de noter permet le calcul de scores bruts à chaque épreuve (sur 30) et de gains relatifs[10] sur lesquels des statistiques descriptives et inférentielles vont être appliquées. Ces scores, au-delà d'évaluer la réussite aux tâches de restauration ou reproduction, prennent donc en considération la méthode utilisée pour résoudre ces exercices, en lien avec le mode de visualisation. En effet, la présence des tracés auxiliaires permet d'identifier que l'élève repère des relations au sein de la figure, ce qui permet de le situer dans le mode de visualisation non iconique. Le tableau 3 présente quelques exemples concrets de calculs des scores.

[10] Le gain relatif (exprimé en %) se calcule, quant à lui, par la formule suivante : (Score post-test - Score prétest)/(Score maximum - Score prétest) x 100. Il s'agit donc du « rapport de ce que l'élève a gagné à ce qu'il aurait pu gagner au maximum ». Comme le mentionne D'Hainaut (1985), cet indice est « indépendant du niveau de départ et comme, à niveau de départ égal, il est proportionnel à la performance, on peut considérer que le gain relatif est proportionnel à ce qu'il veut mesurer » (pp. 158-159).

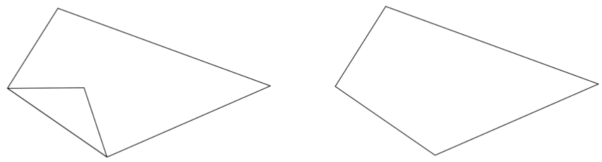
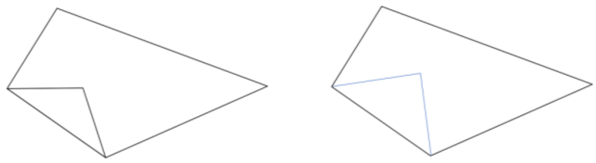
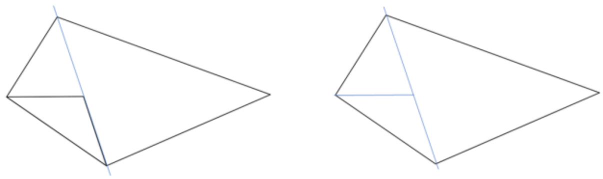
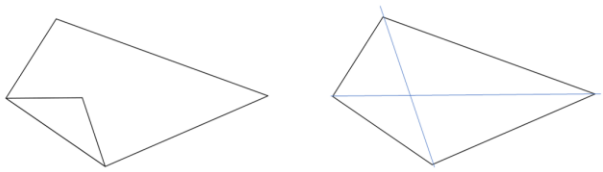
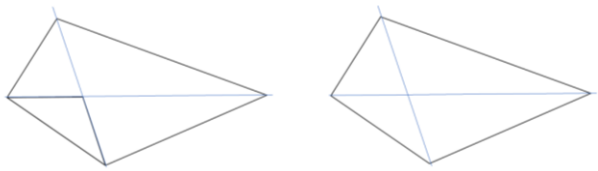
Exercice de départ		
Consigne : REPRODUIS <u>exactement</u> le même dessin en utilisant les instruments de ton choix. Laisse les traces de ta construction. 		
Exemples de productions	Microvariables validées	Scores obtenus (sur 6)
	/	0
	1, 2, 3, 4	4
	1, 4, 5, 6	4
	1, 2, 3, 4, 5, 6	6

Tableau 3. Illustrations du calcul des scores

3. Résultats

3.1. Analyse des résultats relatifs aux performances des apprenants

L'homogénéité des résultats des groupes expérimentaux et de contrôle au prétest a tout d'abord été analysée. Des scores bruts de performance globale au prétest ont ainsi été calculés afin de vérifier le niveau de départ des deux groupes. Le test de Mann-Whitney réalisé sur les deux groupes distincts a permis de s'assurer de cette homogénéité (p = 0,301). Il n'existe donc pas de différence entre les résultats des différents groupes qui composent l'échantillon.

En ce qui concerne les moyennes des gains relatifs portant sur les performances du groupe contrôle et du groupe expérimental aux deux épreuves, celles-ci sont présentées dans le tableau 4.

Groupe contrôle	N	33
	Moy. (%)	1,98
	Ecart-type	14,370
Groupe expérimental	N	33
	Moy. (%)	95,95
	Ecart-type	9,328

Tableau 4. Moyennes (en pourcentages) des gains relatifs de performances globales pour les deux groupes d'élèves

Comme l'indiquent les données du tableau 4, les deux groupes se distinguent de manière significative en matière de gains relatifs. Le groupe ayant bénéficié du traitement expérimental présente une moyenne largement supérieure à celle du groupe contrôle (p = .000[11]). En effet, un faible gain relatif moyen est constaté au sein du groupe contrôle ce qui permet de souligner, pour ce groupe, une évolution minime entre les deux épreuves. Le groupe expérimental présente quant à lui une évolution marquée. Concernant la dispersion de la valeur des gains relatifs, on remarque qu'elle est davantage marquée dans le groupe contrôle que dans le groupe expérimental.

Dans le but de tester l'évolution des performances des élèves, les moyennes des scores obtenus pour chacun des exercices des deux épreuves (prétest et post-test) ont été calculées pour les élèves des deux groupes. Un test de rang de Wilcoxon sur les résultats bruts obtenus par les groupes expérimental et contrôle à chacune des paires

[11] Test U de Mann-Whitney pour échantillons indépendants.

d'exercices (exercices du prétest et du post-test correspondants) a également été réalisé (Tableau 5*Erreur ! Source du renvoi introuvable.*). Il est à noter que les tests statistiques n'ont pas été effectués sur la base des moyennes présentées dans le tableau, mais sur les scores bruts obtenus par chaque élève à l'ensemble des exercices des deux épreuves. En ce qui concerne les résultats, on peut relever que l'évolution des scores obtenus au sein du groupe contrôle est variable pour chaque exercice, mais que dans tous les cas ces scores moyens restent faibles puisqu'ils n'excèdent pas 22%. Au sein du groupe expérimental, l'évolution des scores aux différentes paires d'exercices est, par contre, plus homogène puisqu'on observe une évolution marquée pour chaque paire.

Les résultats aux tests de Wilcoxon indiquent qu'il existe, en faveur du groupe expérimental, des différences de performances significatives entre le prétest et le post-test. En effet, les différences de performances sont très significatives dans le groupe expérimental pour tous les exercices du post-test (p = .000), contrairement aux différences de performances du groupe contrôle qui, elles, ne sont pas significatives (p allant de 0.087 à 0.774).

		Paires de questions				
		1	2	3	4	5
Groupe contrôle	Moy.(%) prétest	6,06	13,13	16,16	8,08	2,02
	Moy.(%) post-test	10,1	21,21	14,65	7,07	5,05
	Stat. Z	-1,713	-1,546	-2,287	-0,832	-1,508
	Significativité	.087	.122	.774	.405	.132
Groupe exp.	Moy.(%) prétest	9,09	17,68	18,69	8,08	3,54
	Moy.(%) post-test	100	94,95	95,45	95,96	94,95
	Stat. Z	-5,181	-4,936	-5,002	-5,117	-5,232
	Significativité	.000	.000	.000	.000	.000

Tableau 5. Tests de rang de Wilcoxon sur les épreuves prétest et post-test des groupes contrôle et expérimental

3.2. Illustration du processus à partir de quelques-unes des productions des apprenants

À titre d'illustration sont ici présentées trois des productions les plus couramment réalisées par les apprenants lors d'un exercice du post-test. La présentation de cette question a pour objectif de comparer les différences qui existent entre les productions des apprenants issus des deux groupes. Pour résoudre l'exercice demandé, les apprenants peuvent mettre en évidence des tracés auxiliaires (tels que des alignements, des diagonales, des médianes) sur le modèle et sur l'amorce. Cela sera vérifié au travers des microvariables évaluées et permettra, in fine, d'apporter la preuve que l'apprenant passe progressivement d'un mode de visualisation iconique à un mode de visualisation de type non iconique. La figure 3 illustre les différences de productions issues des apprenants des deux groupes au post-test.

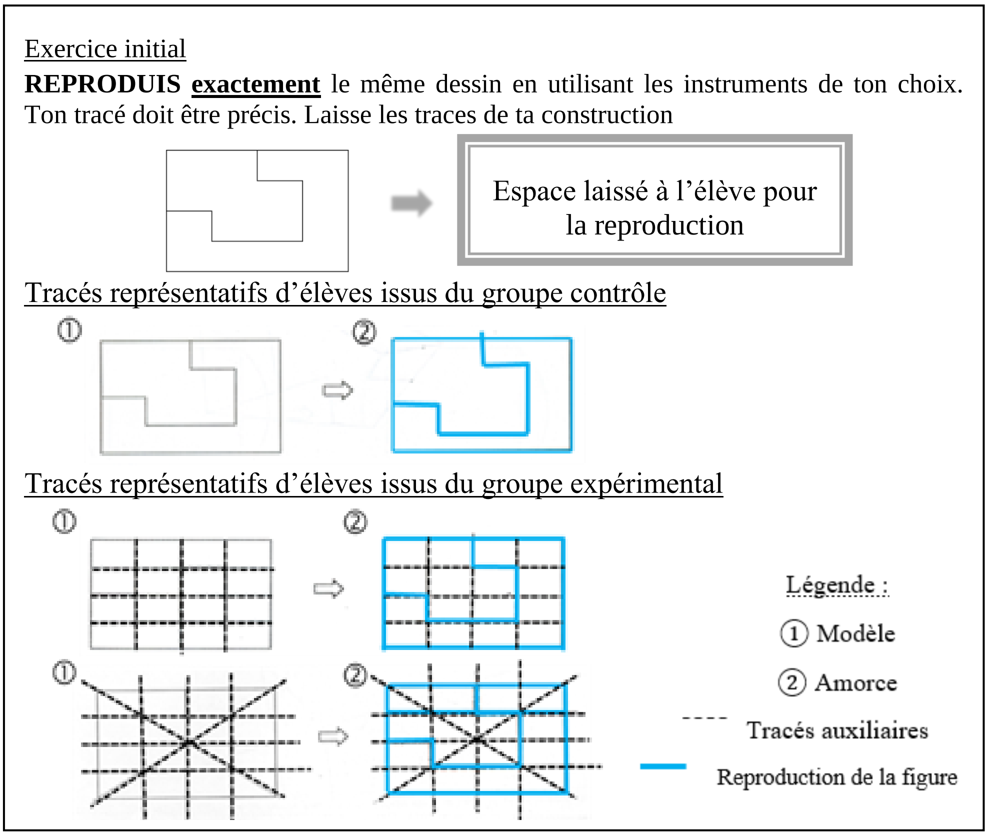


Figure 3. Productions des élèves pour une des questions du post-test

De l'analyse des productions réalisées, il ressort que les élèves du groupe contrôle ne travaillent pas sur le modèle proposé. Lorsqu'ils effectuent la reproduction, ils n'utilisent pas de tracé supplémentaire et les rapports de longueurs ne sont pas respectés. Dans les productions réalisées par le groupe expérimental, les élèves utilisent le modèle ① en y mettant en évidence des alignements et points utiles obtenus grâce aux alignements repérés (unités figurales 1D et 0D). On peut en effet remarquer la présence de tracés auxiliaires sur le modèle. Cela permet d'affirmer que les élèves du groupe expérimental ont commencé à développer le mode de visualisation non iconique puisqu'un travail de déconstruction de formes a été mené. Le graphique, présenté en figure 4, rend compte des différences de comportements observées pour cet exercice par les élèves formant les deux groupes. Pour rappel, chacune des productions est évaluée selon 6 microvariables.

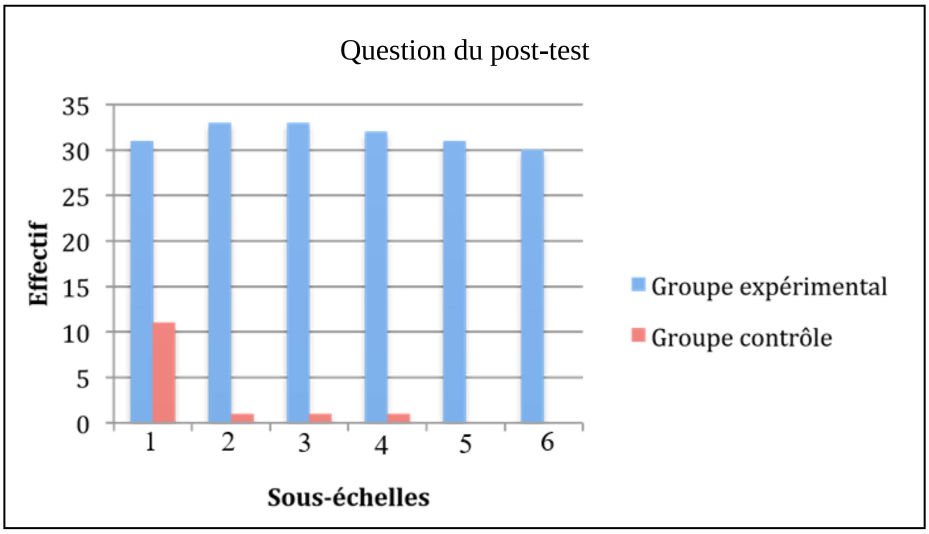


Figure 4. Comportements des élèves définis selon les microvariables à la question

Il apparaît que la quasi-totalité des élèves qui constituent le groupe expérimental (N=33) présente les comportements attendus pour la réalisation de cette question. En effet, au moins 29 élèves sur les 33 font apparaître l'ensemble des tracés auxiliaires utiles sur l'amorce ou dans la zone de reproduction (microvariable 6). Pour la microvariable 1, 10 élèves sur les 33 composant le groupe contrôle parviennent à réussir l'exercice alors qu'ils sont 30 sur 33 à le réussir dans le groupe expérimental. Il est à noter que les tracés auxiliaires sont peu présents, voire totalement absents, dans les copies des élèves du groupe contrôle, aussi bien sur le modèle que sur l'amorce.

4. Discussion et conclusion

Bien que l'intérêt de l'enseignement-apprentissage de la géométrie ne soit plus à démontrer (Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, 2002), les évaluations des contenus curriculaires réalisées sur des programmes d'études belges, français et québécois concluent que les contenus géométriques sont sous-représentés par rapport aux contenus algébriques et que l'apprentissage spécifique de la visualisation ne fait l'objet que de rares ou de floues prescriptions (Duroisin, 2015 ; Duroisin & Demeuse, 2015). Dans l'enseignement primaire, l'organisation des objectifs d'enseignement en géométrie plane amène les élèves à développer des connaissances sur les propriétés des objets à une dimension (droites et segments, les relations qu'entretiennent ces éléments entre eux et leurs propriétés) puis à travailler sur les formes familières à deux dimensions (carré, rectangle, triangle…). Ce travail est proposé de manière dissociée, sans tisser suffisamment de liens entre les configurations à une dimension et celles à deux dimensions. La visualisation non iconique (pourtant fondamentale) est, quant à elle, laissée à la seule charge de l'élève dès le début de l'enseignement secondaire.

L'hypothèse posée dans le cadre de cette étude est qu'une ingénierie didactique centrée sur l'apprentissage de la déconstruction dimensionnelle permet aux élèves du 4e cycle de l'enseignement primaire de passer progressivement d'une visualisation de type iconique à une visualisation de type non iconique. Ce passage requiert une mobilité du regard entre surfaces, lignes et points. Acquérir cette mobilité du regard est essentiel pour la discipline. D'une part pour construire les compétences et connaissances attendues dans l'enseignement primaire (i.e. la mise en évidence de propriétés géométriques telles que les propriétés d'incidence). D'autre part pour permettre une entrée facilitée dans la démarche géométrique théorique de l'enseignement secondaire (i.e. l'usage des différents regards permettrait d'accéder au processus de démonstration). Par cette étude, les auteurs cherchaient à savoir si des séquences d'apprentissage comportant des activités de type résolution de problèmes en géométrie et nécessitant le recours à la déconstruction dimensionnelle permettaient aux élèves de développer un changement de regard dans l'analyse des figures en ayant recours à un mode de visualisation non iconique. Pour ce faire, un plan quasi expérimental à observations pré- et post-expérimentales assorti d'un groupe de contrôle a été mis en œuvre. Ce plan a notamment permis de contrôler l'effet prétest.

Concernant les résultats du prétest, ceux-ci permettent d'abord de confirmer que la visualisation non iconique des apprenants en dernière année de l'enseignement primaire est peu développée, voire inexistante. En effet, la manière dont les élèves ont réalisé les exercices du prétest confirme que très peu d'entre eux ont recours aux tracés auxiliaires qui permettent de restaurer ou reproduire une figure. En outre, lors du prétest, on a pu observer que les élèves restent centrés sur les contours fermés des figures (Duval & Godin, 2005 ; Godin, 2005). L'observation des productions permet de conclure que les élèves ne travaillent pas de manière spontanée sur le modèle. En effet, les élèves n'ont pas conscience qu'ils peuvent mettre en évidence, sur le modèle, des tracés auxiliaires utiles à la restauration ou reproduction de figures. S'il est possible de suspecter l'existence d'un effet de contrat didactique, contre-productif pour cet apprentissage, amenant les élèves à considérer qu'ils ne sont pas autorisés à effectuer des tracés sur le modèle ; on peut cependant mettre en évidence que les élèves du groupe expérimental sont parvenus, par le suivi du dispositif, à résilier ce contrat puisqu'ils ont, pour une large majorité, réalisé des tracés sur le modèle.

Au terme de cette recherche, les analyses statistiques effectuées ont permis de constater l'influence favorable du traitement expérimental sur les performances des apprenants. Les élèves qui constituent le groupe contrôle n'ont pas augmenté leurs performances globales, ce qui n'est pas surprenant étant donné l'absence d'activités spécifiques visant le développement de la visualisation non iconique dans le cursus suivi entre les deux épreuves. A contrario, les performances des élèves du groupe expérimental varient de manière très significative entre les résultats au prétest et au post-test, et ce, pour chaque exercice réalisé. Si les améliorations du groupe expérimental sont, de facto, assez logiques, étant donné le plan quasi expérimental mis en œuvre, nous ne pouvons que mettre en exergue les différences de performance observées. De tels résultats montrent ainsi que le repérage de tracés de construction n'est pas spontané (au vu des scores des deux groupes au prétest et du groupe contrôle au post-test), mais que cela peut s'apprendre à la condition de suivre un enseignement basé sur la mise en œuvre d'activités spécifiques. Par ailleurs, les scores au post-test et plus particulièrement à la microvariable 1 montrent que les élèves du groupe contrôle sont nettement moins nombreux à réussir les restaurations et reproductions, en comparaison aux élèves du groupe expérimental. Entrainer les élèves à identifier les tracés auxiliaires les aide donc aussi à mieux réussir des tâches de restauration-reproduction. Le traitement expérimental dispensé a également permis aux élèves d'augmenter de manière considérable leurs performances dans la résolution des exercices des épreuves expérimentales issus des épreuves certificatives externes réalisées à la fin de l'enseignement primaire en Belgique. Cela plaide donc en faveur d'un développement de la visualisation non iconique chez les élèves et laisse à penser qu'un tel dispositif permet de progresser en géométrie, au-delà du développement de la visualisation.

Ceci étant dit, les résultats de cette étude doivent être nuancés puisque, dans le cadre d'expérimentations de courte durée, un biais de surévaluation des résultats a pu apparaître. De plus, un tel biais peut être présent également dans le cadre d'expérimentations pour lesquelles les épreuves ont été construites en fonction du dispositif d'apprentissage, comme c'est le cas ici (Cheung & Slavin, 2013). Par ailleurs, et ceci constitue une limite à cette étude, il s'avère que la réalisation du post-test, directement après le suivi des séquences, ne permet pas d'obtenir des informations sur la durabilité des acquisitions. Le fait que les scores calculés s'appuient uniquement sur les tracés réalisés par les élèves peut également constituer une autre limite. En effet, certains élèves peuvent avoir identifié des relations sur le dessin ou s'être servis de tracés auxiliaires sans pour autant les avoir tracés sur leur feuille. Ils peuvent s'être contentés de positionner leur instrument sur le modèle de départ, sans effectuer de tracé, afin, par exemple, d'y constater des alignements et de s'en servir pour la résolution de l'exercice. En agissant de la sorte, ces élèves font preuve de visualisation non iconique même si cela n'a pas d'impact sur l'augmentation de leur score à l'épreuve. Dans le même ordre d'idée, les élèves peuvent avoir en tête les tracés auxiliaires ; dès lors, les scores calculés peuvent sous-évaluer le niveau d'acquisition de la visualisation non iconique. Si la présence de tracés permet de statuer sur le développement de la visualisation non iconique, l'absence de tracé rend, quant à elle, plus délicate la conclusion sur l'utilisation d'un mode de visualisation spécifique. Dans le cas où aucun trait de construction n'apparaît, l'observation des élèves et la récolte d'informations sur la façon dont les instruments sont utilisés constituent une solution qui pourrait être envisagée dans le cadre de prochaines recherches. Quant à savoir si cet entraînement conduit à un accès plus facile à la démonstration, l'expérimentation menée ne peut répondre à cette question sans recherches additionnelles, susceptibles de tester les propositions de Duval et Godin (2005) à ce sujet.

Pour terminer, les résultats obtenus confirment donc qu'il est possible de développer la visualisation non iconique des élèves en fin de primaire sur la base d'un enseignement/apprentissage visant le développement de la déconstruction dimensionnelle par le recours à des activités de restauration et reproduction de figures. Comme Godin et Perrin-Glorian (2009) avaient pu le supposer, la production ou la reproduction de figures géométriques peuvent être utilisées « comme un milieu ou un domaine de travail où peuvent se construire les connaissances attendues à l'école élémentaire, mais aussi un rapport à la géométrie et à l'usage des instruments plus conforme à ce qui est attendu au collège » (p. 2). Après une période de trois mois de traitement expérimental, on remarque que les progrès des élèves sont considérables. Si de telles activités peuvent donc être implantées dans les classes, cela nécessite cependant des enseignants qu'ils soient conscients des enjeux et finalités de la géométrie (et de l'importance et de l'utilité de faire acquérir aux élèves une visualisation non iconique). Ceci n'est pas acquis puisque Bulf et Mathé (2018) ont montré que les enseignants de primaire perçoivent avec difficulté les enjeux et finalités de la géométrie et que ces derniers ne s'intéressent pas forcément au fonctionnement cognitif des apprenants impliqués dans des tâches géométriques. A l'heure de la réforme de la formation initiale des enseignants en Belgique francophone (Ministère de la Communauté française, 2019), une place plus importante pour la didactique des disciplines et la psychologie des apprentissages est prévue dans les cursus de formation. Il convient donc de se saisir de cette possibilité pour former les enseignants de mathématiques aux enjeux et finalités d'un des domaines les plus difficiles à enseigner aux élèves et pour lequel les prescrits curriculaires sont peu explicites. Il convient également de renforcer cette formation en suscitant (notamment chez les futurs enseignants) des réflexions plus approfondies sur la place du développement de la visualisation non iconique, habileté constituant un prérequis important pour de multiples apprentissages ultérieurs.

Bibliographie

BARISNIKOV, K. & PIZZO, R. (2007). L'examen des compétences visuo-spatiales. Dans M.-P. Noël (Eds.), *Bilan neuropsychologique de l'enfant* (pp. 139-170), Wavre : Mardaga.

BARRIER, T., HACHE, C. & MATHÉ, A.-C. (2014). Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves. *Grand N*, **93**, 13-37.

BOULEAU, N. (2001). Reproduction de figures et géométrie en cycle 1 et 2. *Grand N*, **67**, 15-32.

BULF, C. & CELI, V. (2015). Des problèmes de reproduction aux problèmes de restauration de figures plane : quelles adaptations pour la classe ? *Actes du 41e Colloque COPIRELEM, Mont-de-Marsan 2014*, 86-102.

BULF, C. & CELI, V. (2016). Essai d'une progression sur le cercle pour l'école primaire - une articulation clé : gabarit-compas. *Grand N*, **97**, 21-58.

BULF, C. & MATHE, A.-C. (2018). Agir-parler-penser en géométrie. Un point de vue sémiotique sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie à l'école primaire. *Actes du 44e Colloque COPIRELEM, Epinal 2017*, 29-56.

BULF, C. (2009). Analyses en termes d'espaces de travail géométrique sur l'enseignement français de la symétrie en début de collège. *Actes du Premier colloque franco-chypriote de Didactique des Mathématiques,* 51-70.

BULF, C. (2019). Professional actions of novice teachers in the context of teaching and learning geometry. *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME11).*

CHEUNG, A. & SLAVIN, R. (2013). The effectiveness of educational technology applications for enhancing mathematics achievement in K-12 classrooms : A meta-analysis. *Educational Research Review*, **9**, 88-113.

CLEMENT, E. (2009). *La résolution de problème*. Paris : Armand Colin.

COMMISSION DE REFLEXION SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES (2002). L'enseignement des sciences mathématiques. Dans J.P. KAHANE (dir.), *L'enseignement des sciences mathématiques : Rapport au Ministre de l'Education nationale*. Paris : Odile Jacob.

D'HAINAUT, L. (1985). *Des fins aux objectifs de l'éducation* (4è éd.). Bruxelles : Labor-Nathan.

DELPLACE, J.-R., KESKESSA, B. & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. *Grand N*, **79**, 33-60.

DUROISIN, N. (2015). *Quelle place pour les apprentissages spatiaux à l'école ? Etude expérimentale du développement des compétences spatiales des élèves âgés de 6 à 15 ans.* Thèse de doctorat, Université de Mons.

DUROISIN, N., & DEMEUSE, M. (2015). What role for developmental theories in mathematics study programmes in French-speaking Belgium? An analysis of the geometry curriculum's aspects, framed by van Hiele's model. *Cogent Education*, **2(1)**, 1-15.

DUROISIN, N. & DEMEUSE, M. (2016). Le développement de l'habileté de visualisation spatiale en mathématiques chez les élèves âgés de 8 à 14 ans. *Petit x*, **102**, 5-25.

DUROISIN, N., TEMPERMAN, G.& DE LIÈVRE, B. (2015). Restrict or Share the Use of the Interactive Whiteboard? The Consequences on the Perception, the Learning Processes and the Performance of Students within a Learning Sequence on Dynamic Geometry. *Turkish Online Journal of Educational Technology*, **14(2)**, 144-154.

DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **10**, 5-53.

DUVAL, R. (2011). Idées directrices pour analyser les problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, **11**, 149-161.

DUVAL, R. & GODIN, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, **76**, 7-27.

DUVAL, R., GODIN, M. & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2005). Reproduction de figures à l'école élémentaire. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2004*, 5-89.

GODIN, M. & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2009). De la restauration de figures à la rédaction d'un programme de construction. Le problème de l'élève, le problème du maître. *Actes du XXXVe Colloque COPIRELEM, Bombannes 2008*, 1-19.

GRENIER, D. (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble.

KOFFKA, K. (1935). *Principles of gestalt psychology*. N.Y. : Harcourt, Brace.

KÖHLER, W. (1929). *Gestalt psychology*. N.Y. : Liveright.

LECLERCQ, R. & MANGIANTE-ORSOLA, C. (2014). Etude d'un dipositif articulant production de ressources et formation continue en géométrie : quels effets sur les pratiques des enseignants ? *Actes du XLème colloque de la COPIRELEM, Nantes*, 108-116.

MANGIANTE-ORSOLA, C. & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2014). Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des maîtres. *Grand N*, **94**, 47-79.

MATHE, A.-C. (2008). Confrontation aux objets et processus de conceptualisation en géométrie plane à la fin de l'école primaire, rôle des interactions langagières. *Actes de la Conférence internationale « Efficacité et équité en éducation »*, 1-14.

MATHE, A.-C. (2012). Jeux et enjeux de langage dans la construction de références partagées en géométrie. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **32(2)**, 195-228.

Décret définissant la formation initiale des enseignants (07 février 2019). Administration Générale de l'Enseignement et de la Recherche scientifique, Service général des Affaires pédagogiques, de la Recherche en Pédagogie et du Pilotage de l'Enseignement organisé par la communauté française, 05 mars 2019, p.1-61. https://www.etaamb.be/fr/decret-du-07-fevrier-2019_n2019040573.html

MITHALAL, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble.

MITHALAL, J. (2011). Vers la mobilisation d'une géométrie axiomatique et de la déconstruction dimensionnelle : intérêt de la géométrie dynamique tridimensionnelle. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques,* 114-128.

MITHALAL, J. (2014). Voir dans l'espace: est-ce si simple ? *Petit x*, **96**, pp.51-73.

PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2012). La géométrie (plane) du CP à la 5ème. Quelques réflexions pour le comité scientifique des IREM. Communication présentée au comité scientifique des IREM.

PERRIN-GLORIAN, M.J. & GODIN, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école*, **222**, 26-36.

PERRIN-GLORIAN, M.J. & GODIN, M. (2018). Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. *Actes du Concertum de la CORFEM, 1-41*.

PERRIN-GLORIAN, M.-J., MATHE, A.-C. & LECLERCQ, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères IREM*, **90**, 5-41.

NATACHA DUROISIN

Ecole de Formation des Enseignants, Université de Mons

Natacha.Duroisin@umons.ac.be

ROMAIN BEAUSET

Institut d'Administration Scolaire, Université de Mons

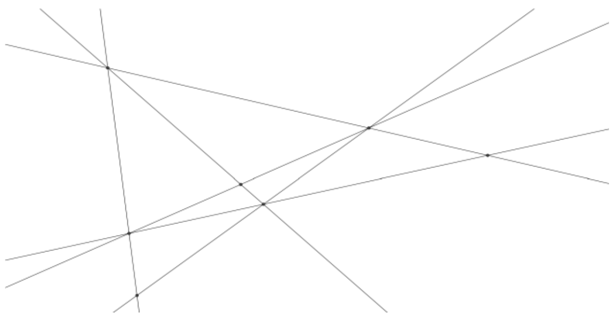
Romain.Beauset@umons.ac.be

JESSICA LUCCHESE

Université de Mons

Jessica.Lucchese@alumni.umons.ac.be

Annexe 1 : Description des séquences élaborées et dispensées dans le traitement expérimental

Séquence 1 : Faisceaux de traits (repérer des alignements)
3 périodes
Résumé : Activités de restauration à la droite non graduée consistant à reconstruire à la même échelle une configuration de traits sécants (figures modèles) à partir de certains points d'intersection des traits (amorces).
Illustration d'une des activités : - Observe la construction ci-dessous. Que peux-tu en dire ?  - Tente de la reproduire avec les points qui te sont donnés 

Séquence 2 : Initiation à l'utilisation de divers

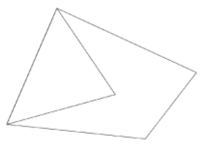
6 périodes

Résumé : Activités de reproduction ou restauration de figures simples puis complexes isométriques avec une progression dans les instruments imposés (Gabarits et pochoirs ➔ Gabarits et plusieurs règles non graduées ➔ Gabarit et une seule règle non graduée ➔ Surface quelconque et une règle non graduée ➔ Une règle non graduée et une équerre non graduée ➔ un compas et une règle non graduée) afin de relever différentes techniques (selon les instruments) pour reproduire ou restaurer des figures.

Illustration d'une des activités :

- Voici une construction. Reproduis-la avec les deux gabarits et le pochoir. Attention, tu ne peux utiliser que ces trois éléments pour reproduire la figure.

Matériels :



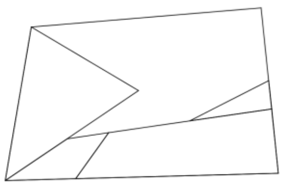
Séquence 3 : Notions d'alignement, droite et point

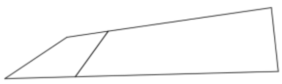
2 périodes

Résumé : Activités de restauration de figures complexes isométriques, avec système de coût pour l'utilisation des instruments

Illustration d'une des activités :

- Voici une construction. Reproduis-la à l'aide d'une règle informable et d'une règle plastifiée. Trace une barre verticale dans le tableau ci-dessous dès que tu traces une droite ou que tu repores une mesure. A la fin de la construction, calcule le coût de celle-ci. Tracer une droite coûte 1 point et reporter une longueur coute 5 points.





J'ai tracé des droites	
J'ai reporté une mesure	

Séquence 4 : Restauration de figures (la mobilité du regard pour résoudre le problème)

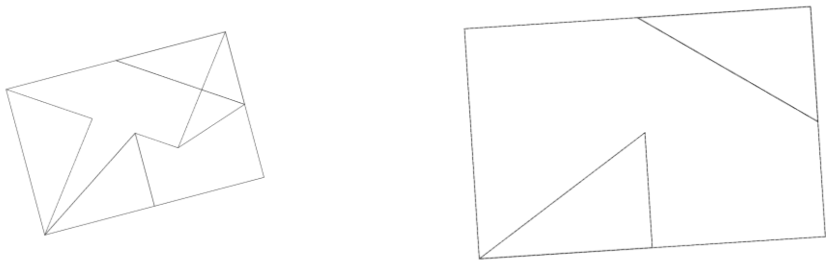
2 périodes

Résumé : Activités de restauration de figures complexes isométriques ou après agrandissement ou réduction, avec système de coût pour l'utilisation des instruments.

Illustration d'une des activités :

Le matériel mis à disposition est une règle non graduée et une règle plastifiée.

- Observe bien cette figure complexe.
- Quels points ste paraissent alignés ? Vérifie avec ta règle.
- Complète l'agrandissement pour qu'il soit semblable au modèle.



J'ai tracé des droites	
J'ai reporté une mesure	

Séquence 5 : Restauration, reproduction de figures

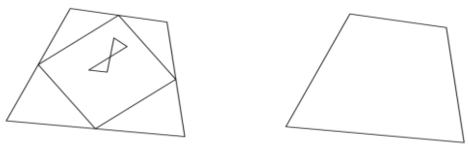
2 périodes

Résumé : Activités de restauration de figures complexes à l'identique avec agrandissement.

Si les figures à restaurer ou à reproduire jusqu'ici ne comportaient ni rapport particulier, ni angle droit, ni droites parallèles, les figures à restaurer ici demandent d'utiliser des alignements et des milieux.système de coût pour l'utilisation des instrumentss (les figures à restaurer ici demandent d'utiliser des alignements et des milieux).

Illustration d'une des activités :

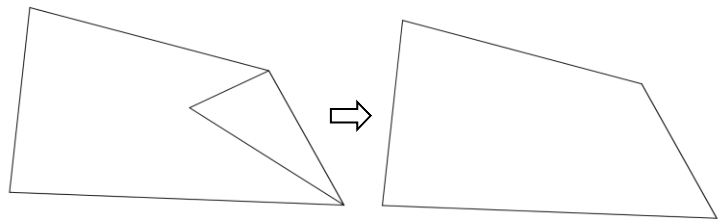
- Reproduis le modèle sur base de l'amorce. Calcule le coût de ta restauration.



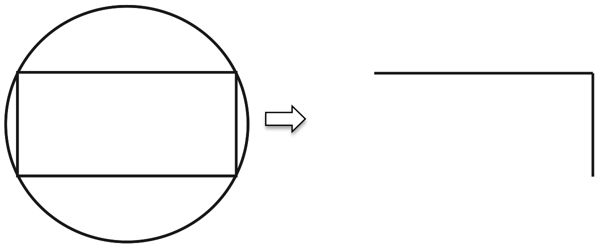
Annexe 2 : Description des séquences élaborées et dispensées dans le traitement expérimental

Prétest

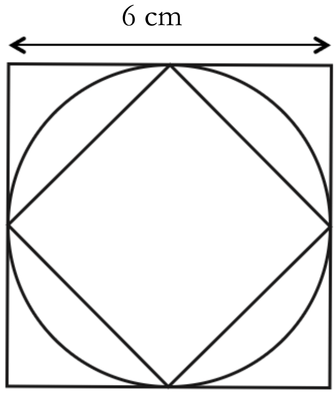
1) **REPRODUIS <u>exactement</u>** le même dessin en utilisant les instruments de ton choix. Ton tracé doit être précis. Laisse les traces de ta construction.



2) Voici un dessin composé d'un rectangle et d'un cercle. **REPRODUIS <u>exactement</u>** ce dessin qui est déjà commencé : une longueur et une largeur du rectangle sont déjà tracées. Laisse les traces de ta construction.

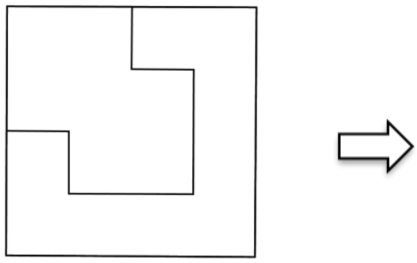


3) **REPRODUIS <u>exactement</u>** le même dessin en utilisant les instruments de ton choix. Ton tracé doit être précis. Laisse les traces de ta construction.



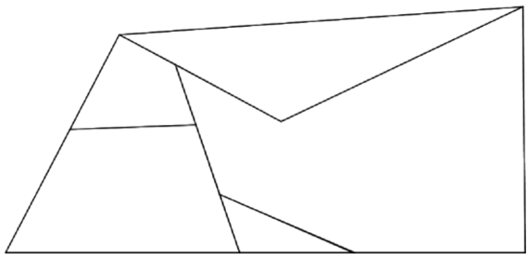
<u>Ton tracé :</u>

4) **REPRODUIS** **<u>exactement</u>** le même dessin en utilisant les instruments de ton choix. Le carré est déjà tracé. Laisse les traces de ta construction.

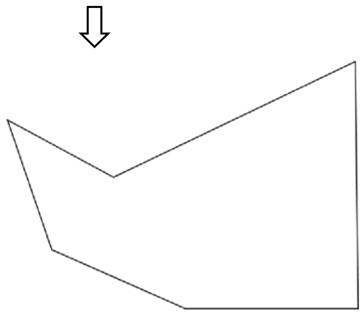


5) **REPRODUIS** **<u>exactement</u>** le dessin 1 en prenant le dessin 2 comme point de départ. Utilise les instruments de ton choix. Laisse les traces de ta construction.

①

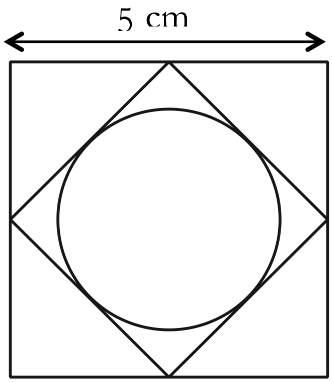


②



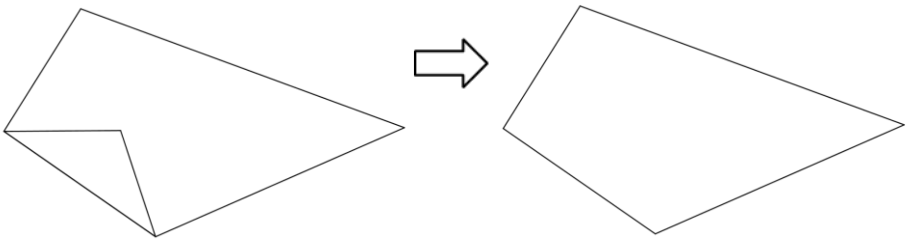
Post-test

1) **REPRODUIS <u>exactement</u>** le même dessin en utilisant les instruments de ton choix. Ton tracé doit être précis. Laisse les traces de ta construction.

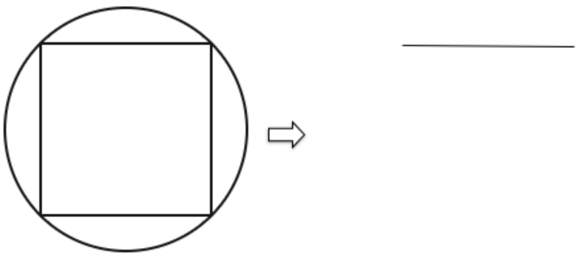


<u>Ton tracé :</u>

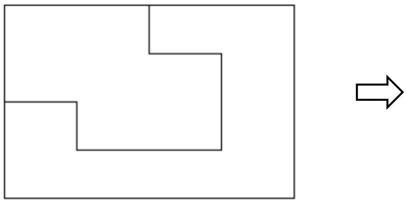
2) **REPRODUIS <u>exactement</u>** le même dessin en utilisant les instruments de ton choix. Ton tracé doit être précis. Laisse les traces de ta construction.



3) Voici un dessin composé d'un carré et d'un cercle. **REPRODUIS <u>exactement</u>** ce dessin qui est déjà commencé : deux côtés du carré sont déjà tracés. Laisse les traces de ta construction.

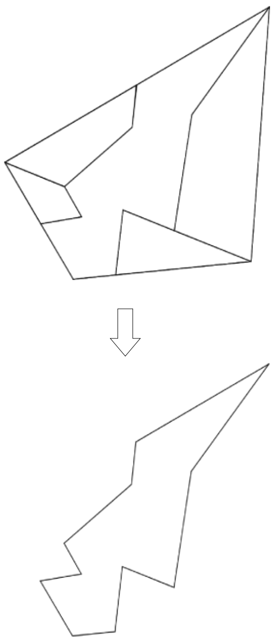


4) **REPRODUIS** **exactement** le même dessin en utilisant les instruments de ton choix. Le rectangle est déjà tracé. Laisse les traces de ta construction.



5) **REPRODUIS** **exactement** le dessin 1 en prenant le dessin 2 comme point de départ. Utilise les instruments de ton choix. Laisse les traces de ta construction.

① ②



GLORIANA GONZÁLEZ

VISUAL ARTS IN U.S. GEOMETRY TEXTBOOKS ALIGNED WITH THE COMMON CORE STANDARDS

Abstract. This study investigates visual arts references in five U.S. high school geometry textbooks aligned with the Common Core State Standards for Mathematics. In all of the textbooks, architecture is the most commonly used context. More than half of the visual arts references are in the exercises. Congruence is the domain most often used, followed by Similarity, Right Triangles & Trigonometry. The visual arts references support the four traditional arguments justifying the geometry course but mostly support the goal of teaching geometry in ways that allow students to draw upon their intuition.

Résumé. Les arts visuels ajustés aux standards dans les manuels de géométrie étatsuniens. Cette étude examine les références aux arts visuels dans cinq manuels de géométrie du secondaire en se référant aux normes du tronc commun de mathématiques. Dans tous les manuels, l'architecture est le contexte le plus couramment utilisé. Plus de la moitié des références aux arts visuels se trouvent dans les exercices. La congruence est le domaine le plus souvent utilisé, suivi par la similitude, les triangles rectangles et la trigonométrie. Les références aux arts visuels soutiennent les quatre arguments traditionnels justifiant le cours de géométrie, mais soutiennent surtout l'objectif d'enseigner la géométrie de manière à permettre aux étudiants de faire appel à leur intuition.

Keywords. Mathematics, curriculum, geometry, visual arts, standards.

Mathematics and art have been connected throughout history. Problems such as how to tile a flat surface intrigued the mathematician Roger Penrose, whose name is associated with Penrose tilings (Livio, 2002). The Dutch artist, Maurits Cornelis Escher, had communications with mathematicians, including George Pólya, Harold Coxeter, and Roger Penrose; used mathematics as an inspiration for his art; and used art to showcase important mathematical ideas (Schattschneider, 2010). There are many historical examples where mathematics and art converge, such as the development of projective geometry in relation to perspective drawing and the use of the golden ratio in architecture (Pedoe, 1976). Researchers on ethnomathematics have also unpacked the mathematical work involved in various practices such as weaving baskets and making pottery designs (Ascher, 1991). The connections between mathematics and art have the potential to provide a context for the study of mathematics in school. Most recently, the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) proposed that the high school mathematics curriculum should provide opportunities for students to appreciate mathematics: "High school

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 25, p. 183 – 210.

mathematics can potentially cultivate in students a sense of wonder, beauty, and joy—and doing so is an important but often neglected purpose for teaching mathematics" (NCTM, 2018). This call broadens prior perspectives regarding the goals for school mathematics stated in the *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000). At the same time, this new goal opens opportunities to integrate visual arts and the mathematics curriculum. Visual arts provide opportunities to develop an aesthetic sense that can be a source for appreciating mathematics. By visual arts, we refer to "a visual object or experience consciously created through an expression of skill or imagination" (Encyclopædia Brittannica, n.d.).

In this study, we aim to examine whether and how the current high school mathematics curriculum establishes connections with visual arts. We focus on the U.S. high school geometry curriculum. The high school geometry course has been constantly offered in the U.S. since the 1840s (Quast, 1968), despite various attempts at integrating the mathematics curriculum (Stanic & Kilpatrick, 1992). A historical analysis of the justifications given for the geometry course in the 20th century demonstrates the coexistence of various discourses supporting why students should have to learn geometry (González & Herbst, 2006). For example, advocates of the geometry course stated as reasons that the course could prepare students for the workforce, instill in students an appreciation for geometric patterns, teach students how to generate mathematical conjectures, and engage students in applying logical reasoning to ordinary situations. These curricular expectations are at times contradictory and create tensions when teachers are trying to fulfill various demands.

Through our analysis of references to visual arts contexts in geometry textbooks, we examine connections between the arguments justifying the geometry course in the 20th century and opportunities for achieving the new goal of appreciating mathematics proposed in recent NCTM documents. Mathematics education research has profited from textbook analyses to better understand students' learning opportunities (e.g., Dimmel & Herbst, 2015; Herbst, 2002; Hunte, 2018; Mesa, 2004; Otten, Gilbertson, Males, & Clark, 2014; Thompson, Senk, & Johnson, 2012). We study textbooks with the goal of understanding the transition between the intended curriculum in the standards and the written curriculum (Herbel-Eisenmann, 2007). Geometry teachers use textbooks as a resource in their classrooms in various ways, for example, emphasizing tasks that require explanation, avoiding challenging tasks, or supplementing the textbook with other resources (Sears & Chávez, 2014). Consequently, an examination of geometry textbooks can provide a starting point for understanding teachers' uses of curricular materials. To our knowledge, there has not been an analysis of visual art references in geometry textbooks. Our intention is to start a conversation about the possibility of implementing a mathematics curriculum that uses visual arts as a realistic context aligned with Freudenthal's goal of experiencing "mathematics as a human activity" (Gravemeijer & Terwel, 2000, p. 780). Visual arts can be an entry point to engaging in mathematical activity, thereby broadening students' appreciation for mathematics.

1. Theoretical Underpinnings

We draw upon two perspectives to guide this study. First, we review prior work on the geometry curriculum that establishes various discourses that justified the existence of the American geometry course in the 20th century (González & Herbst, 2006). We illustrate this framework with examples from policy documents that refer to visual arts when establishing the goals of teaching geometry and use the framework to examine textbooks aligned with the current Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM), which have been implemented in most states in the U.S. (National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers, 2010). Second, we discuss the Realistic Mathematics Education (RME) theory in relation to curriculum theory (Freudenthal, 1971, 1991; Gravemeijer & Doorman, 1999; Gravemeijer & Terwel, 2000; van Den Heuvel-Panhuizen, 2003, 2005). These two perspectives frame our examination of visual arts references in mainstream U.S. geometry textbooks as a case of how the curriculum sets expectations for mathematics students.

1.2. Justifications for the Geometry Course

The geometry course holds a special place in the U.S. mathematics curriculum. The geometry course has survived attempts to be dissolved and integrated with other mathematics courses (Stanic & Kilpatrick, 1992). An analysis of important texts discussing the geometry curriculum in the twentieth century yields the coexistence of four distinct discourses justifying the geometry course (González & Herbst, 2006). The term *discourse* refers to the following definition:

> We shall call discourse a group of statements in so far as they belong to the same discursive formation; it does not form a rhetorical or formal unity, endlessly repeatable, whose appearance or use in history might be indicated (and, if necessary, explained); it is made up of a limited number of statements for which a group of conditions of existence can be defined. (Foucault, 1972, p. 117)

The four discourses justifying the geometry course are a *mathematical argument*, an *intuitive argument*, a *formal argument*, and a *utilitarian argument*. The mathematical argument justifies the existence of the geometry course as an opportunity for students to engage in making and proving mathematical conjectures, analogous to mathematicians' work. Proponents of this argument establish that geometry is a domain where students can learn to appreciate an axiomatic system. As a result, geometry curricula that are aligned with this discourse support students in identifying differences between postulates, definitions, and theorems, as well as engaging students in crafting mathematical proofs. The intuitive argument builds on the idea that geometry is particularly connected with our experiences in the world. Students' opportunities to appreciate geometry through activities such as visualization can help them to use their intuition in developing mathematical knowledge. Proponents of this argument also state that geometric concepts can provide a context for applying the properties of algebra. Geometry curricula aligned with the intuitive argument make geometric knowledge accessible to students with various learning needs. One example of such a curriculum is the informal geometry course intended to increase opportunities for students to achieve geometric literacy (Cox, 1985). Another example is Serra's (1997) geometry textbook, which provides examples of geometric designs in various artifacts and hands-on activities such as paper folding and drawing. The formal argument stems from the notion that geometry students can study logical reasoning that is transferable to everyday situations. From this perspective, the geometry course can teach students about participating in a democratic society (Fawcett, 1935, 1938). The utilitarian argument emphasizes that the geometry course can prepare students for future jobs. In doing so, the geometry curriculum provides examples of ways in which geometry is applicable in the workforce. While some geometry curricula may be more or less aligned with one of the arguments, the arguments coexist within curricular materials. As a result, curricular materials reveal tensions in the justifications for the geometry course. In our analysis of the references to visual arts in the current geometry curriculum, we seek to understand the relationships among the four discourses that have justified the geometry course in the past.

1.1.1. Visual Arts in Reports by Curriculum Committees

Two committees established fundamental perspectives on the study of geometry. The report of the Committee of Ten addressed the high school curriculum (Eliot, 1893/1969), whereas the report of the Committee of Fifteen specifically addressed the geometry curriculum (Slaught et al., 1912). The justifications that these reports established for the study of geometry continue to be used today (González & Herbst, 2006). The report of the Committee of Ten, published in 1893 and led by Harvard University President Charles W. Eliot, promoted humanistic ideals and set high expectations for high school students (Kliebard, 1995). The report of the Committee of Ten included sections on two types of geometry: concrete geometry and formal geometry. Concrete geometry was intended for 10-year-old children and consisted of providing opportunities for students to develop an understanding of geometric figures through drawing and work with physical models. There are no references to visual arts in the concrete geometry section. The section on demonstrative geometry highlights the importance of using logical reasoning and engaging students in crafting mathematical proofs. There is only one mention of possible connections with visual arts: "A place should also be found either in the school or college course for at least the elements of the modern synthetic or projective geometry" (Eliot, 1893/1969, p. 116). Nevertheless, projective geometry has typically been excluded from the high school curriculum except for optional explorations.

The report of the Committee of Fifteen on the Geometry Syllabus (Slaught et al., 1912) provides more details about the geometry curriculum since it had a particular focus on geometry. The first reference to visual arts in relation to the high school geometry course concerns scale drawings: "The usefulness and the necessity of the operation should be emphasized, and such application as the drawing of house plans, the copying of patterns on a smaller scale, etc., should be given" (Slaught et al., 1912, p. 91). In a section of the report entitled, "sources of problems," the authors list "Architecture, Decoration, and Design" (Slaught et al., 1912, p. 96) and provide a classification of problems from this domain in relation to the construction of figures, proofs of geometric properties, and computations. The authors mention that architectural ornaments (e.g., tilings and windows) can provide sources for problems. They also include sample problems using these contexts, including an Arabic design for floors and a church window design. The authors reproduce the geometric constructions that produce the designs, identifying specific properties of the geometric figures (such as symmetry), making statements about the locus of particular points, and providing formulas describing the geometric figures constructed. The 2-page analysis of geometric designs in architecture and design showcases visual arts as a source for geometric problem-solving. The authors of the report include a bibliography of 26 books with sources for geometry problems. Nine of those books pertain to visual arts, including Mabel Sykes' (1912) book about geometry in art and decoration[1]. These examples have the dual purpose of preparing students for the workforce as designers and architects while also using architecture and design to teach properties of geometric objects. In these references, the authors of the Committee of Fifteen align the purpose of the geometry course with the utilitarian and mathematical arguments.

1.1.2. References to Visual Arts in the NCTM Standards

Most recently, two NCTM documents have made specific statements about the teaching of geometry. The 1989 Standards include two geometry-specific standards (7 and 8): "Geometry from a synthetic perspective" and "Geometry from an algebraic perspective" (NCTM, 1989, pp. 157–162). The references to visual arts are only in Standard 7. In the "focus" section, standard 7 mentions the arts when showing examples of various applications of geometry and gives the example of perspective drawing. In the discussion, there are two examples of visual arts. The

---

[1] Mabel Sykes was a member of the Committee of Fifteen.

authors state, “Geometry also provides an opportunity for students to experience the creative interplay between mathematics and art” (NCTM, 1989, p. 158). One example is tiling: finding regular polygons that can tile the plane to make regular and semiregular tiling patterns as well as irregular polygons that can tile the plane. The example ends with references to Escher’s work, stating, “The last activity is appealing to many high school students and provides an excellent setting for creative expression” (NCTM, 1989, p. 158). A sample Escher-like drawing is also included. These references are aligned with the mathematical and intuitive arguments. The question about what polygons can tile the plane is a mathematical one that requires students to make and test conjectures. In the discussion, the authors of the 1989 Standard identify various geometric concepts that can support students’ discovery, such as their knowledge about the “angle-sum property of a triangle” (NCTM, 1989, p. 158). At the same time, the notion that students can show creativity through the creation of Escher-like tessellations is aligned with the intuitive argument because it allows students to engage in mathematics through art. The second visual arts reference in the standard is in its mention of careers in which visualizing three-dimensional figures is important, such as architecture, thus aligning the references to the utilitarian argument.

The *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2000) refers to connections between the arts and geometry when discussing the Geometry Standard for Grades 9–12: “Geometric ideas can be useful both in other areas of mathematics and in applied settings. For example, symmetry can be useful in looking at functions; it also figures heavily in the arts, in design, and in the sciences” (NCTM, 2000, p. 309). The Standard includes an example of perspective drawing to illustrate how geometric ideas support the procedures that artists apply in representing equidistant parallel lines. Using the context of drawing three telephone poles in one-point perspective, the authors provide the step-by-step procedure for construction using mathematical terms to identify parts of the diagram (e.g., midpoint, diagonals, rectangle) and the term “vanishing point,” which is used in art and in mathematics. This example highlights a topic that historically has connected mathematics and art: perspective drawing. At the same time, the reference to perspective drawing is in the context of the work of artists. That is, students who learn how to apply geometric properties to perspective drawings could apply this knowledge to their work as artists. This example in the Principles and Standards illustrates how the study of geometric problems situated in a visual arts context can support the utilitarian argument.

1.2. Problem Contexts and the Realistic Mathematics Education Theory

The RME theory was originally proposed by the Dutch mathematician and mathematics educator Hans Freudenthal and further developed in mathematics education (Gravemeijer & Terwel, 2000). The theory is based upon the assumption that mathematics is a human activity and, therefore, that it is important for students to learn mathematics through guided reinvention. Freudenthal (1968) stated, “What humans have to learn is not mathematics as a closed system, but rather as an activity, the process of mathematizing reality and if possible even that of mathematizing mathematics” (p. 7). The process of guided reinvention enables students to discover mathematical ideas that are already known in society but that are new to them. Curricular materials should be designed so that students have an opportunity to develop an understanding of mathematical ideas through problem solving. The problems are meant to be realistic, which does not necessarily mean that they are based upon a real-world scenario but that they provide contexts that students can perceive as real. According to the theory, the problems can stem from mathematical contexts or even from the fantasy world, as long as students can use the context for guided reinvention (Freudenthal, 1971). In contrast with instruction in which students learn abstract mathematical ideas and then apply those ideas to problem solving, the RME approach situates problems at the forefront of the learning experience (Freudenthal, 1968). Van Den Heuvel-Panhuizen (2005) states,

> in RME tasks contexts are viewed in a broad sense. They may refer to everyday-life and fantasy situations in which the problems are situated, but also to the mathematical context of, for instance, a bare number problem. What is important is that the task context is suitable for mathematization—the students are able to imagine the situation or event so that they can make use of their own experiences and knowledge. (p. 3)

The activity of “mathematizing” is a key notion in RME. According to the theory, only through mathematizing are students able to learn mathematics because students are developing new mathematical knowledge through problem solving. That is, problem solving requires students to organize mathematical ideas, and in doing so, they are reinventing mathematics (Freudenthal, 1991). Gravemeijer and Doorman (1999) explain the relevance of selecting contexts so that students can apply their knowledge of the contexts and engage in mathematizing: “Well-chosen context problems offer opportunities for the students to develop informal, highly context-specific solution strategies. These informal solution procedures then, may function as foothold inventions, or as catalysts for curtailment, formalization or generalization” (p. 117). Gravemeijer and Doorman illustrate the theory with the design of a calculus course that draws upon historical perspectives and uses Galileo’s notion of velocity to introduce core concepts in calculus. The perspective offered by RME of using contexts for students to reinvent mathematics is consistent with constructivist approaches to mathematics instruction where students have opportunities to develop mathematical knowledge through problem-solving with others (Cobb, Yackel, & Wood, 1992) [2]. Gravemeijer and Terwel (2000) state, "In general, contextual problems that allow for a wide variety of solution procedures will be selected, preferably solution procedures that in themselves reflect a possible learning route" (p. 786). Lampert's (2001) case study of her experiences teaching fifth-grade mathematics exemplifies a problem-based approach for learning mathematics, where the sources of problems stem from curricular materials and, also, from issues specific to her classroom. Lampert (2001) states, "When students engage with mathematics in a problem, *the content is located in a mathematical territory where ideas are used and understood based on their relationships to one another within a field of study*" (p. 431). According to Lampert, teaching with problems requires making the connection explicit between the situation in a problem and the mathematical ideas that are used to address that situation. Teaching with problems means that teachers are actively connecting students' problem-solving approaches to the problem contexts and curricular learning goals.

The issue of selecting realistic problems that enable students to engage in guided reinvention is not trivial, and mathematics education researchers have cautioned that not all contexts are conducive to student learning. While problem contexts can increase students' access to mathematical ideas and enable students to propose various solution strategies based upon their knowledge of the context, students can also have difficulties because of their interpretation of the context. For instance, students may question solutions that are mathematically correct but do not appear to be realistic in the context, may disregard the context, or may be forced to disregard their prior knowledge of the situation because that knowledge would significantly change the mathematical solution desired in curricular materials (van Den Heuvel-Panhuizen, 2005). Students' ability to integrate their mathematical knowledge and other sources of knowledge is a sign of "mathematical power" (Kastberg, D'Ambrosio, McDermott, & Saada, 2005). However, when problem contexts are too contrived, students may not have an opportunity to integrate their knowledge. For example, Lubienski's (2000) study of the implementation of a problem-based middle school curriculum showed how students from families with low socio-economic status tended to draw upon their knowledge of the context to solve problems in ways that were not intended by the curricular developers. Boaler (2008) discusses "make-believe contexts" as a source for discouraging students from mathematics:

> One long-term effect of working on make-believe contexts is that such problems contribute to the mystery and other-worldliness of Mathland, which curtails people's interest in the subject. The other effect is that students learn to ignore contexts and

---

[2] Gravemeijer and Terwel (2000) address Freudenthal's perspective on constructivism and other educational theories.

> work only with the numbers, a strategy that would not apply to any real-world or professional situation. (p. 52)

By identifying long-term effects of choosing contexts where students cannot integrate their mathematical knowledge and other sources of knowledge, Boaler establishes how curricular decisions may prevent students from finding mathematics valuable. Other studies have also identified how the selection of contexts in mathematics textbooks may perpetuate some views about mathematics. Dowling's (1998) sociological analysis of textbooks in England illustrates that the choice of contexts for mathematical problems supports what he calls "myths" about school mathematics, such as the notions that mathematics is applicable to everyday situations and that people participate in activities that require mathematical knowledge. On the other hand, the result of an exploratory study in California suggests that mathematics teachers rely on their own experiences to find real world contexts for mathematics problems since they view the contexts of textbook problems irrelevant or outdated (Gainsburg, 2008). These perspectives call into question the selection of contexts in school mathematics and lead to a critical view about how visual arts contexts in textbooks convey a sense of who is supposed to study geometry and for what purposes. The analysis of how the choice of visual arts contexts is aligned (or not) with the various discourses justifying the existence of the geometry course supports the examination of the use of contexts in the mathematics curriculum.

2. Research Questions

The four research questions guiding this study are as follows:

– What visual arts contexts are used in five mainstream geometry textbooks?

– Where are these contexts used in the textbooks (i.e., expositions, exercises, extensions, or motivations)?

– What geometry concepts are taught through a visual arts context?

– How do the visual arts contexts align with the four justifications for the geometry course?

All of these questions address whether and how geometry textbooks achieve the goals of the intended curriculum (Herbel-Eisenmann, 2007). The first two questions are descriptive and aim at identifying visual arts references and their placement in the geometry textbook. With the third research question, we attempt to list geometry concepts that have been connected to visual arts contexts, with the aim of identifying typical content areas for making these connections. With the fourth question, our goal is to see whether and how visual arts contexts are aligned with the arguments justifying the geometry course. It is possible that one textbook is more or less aligned with a particular argument. In addition, it is possible that the same visual arts context supports the achievement of various curricular goals, thus illustrating tensions in the geometry curriculum when adopting visual arts contexts. Overall, the questions use the geometry course as a basis for studying possible ways of teaching mathematics through the selection of visual arts contexts.

3. Materials and Methods

We analyzed five mainstream geometry textbooks that are aligned with the CCSSM (Table 1). The textbooks include model curricular approaches developed through funding from the National Science Foundation (Center for Mathematics Education Project, 2013), textbooks published by the major publishing companies (Dossey, Halverson, & McCrone, 2008), and a problem-based textbook written by mathematics teachers in California (Dietiker & Kassarjian, 2014).

Title	Publisher	Authors	Year
Geometry (Holt)	Holt McDougal	Larson, Boswell, Kanold, & Stiff	2012
CME Geometry Common Core (CME)	Pearson	Center for Mathematics Education Project	2013
Core connections Geometry, 2nd edition (CPM)	College Preparatory Mathematics	Dietiker, L. & Kassarjian	2014
Geometry Common Core (Pearson)	Pearson	Charles, Hall, Kennedy, Bass, Johnson, Murphy, & Wiggins	2015
Glencoe Geometry (Glencoe)	McGraw-Hill	Carter, Cuevas, Day, Malloy, & Cummins	2018

Note. The acronym in parentheses is used throughout the manuscript.

Table 1. Geometry Textbooks Analyzed

The first step of the coding process involved identifying all of the references to visual art contexts in the textbooks according to the following categories: (1) *architecture,* (2) *calligraphy,* (3) *crafts,* (4) *drawing,* (5) *film,* (6) *painting,* (7) *photography,* (8) *pottery,* (9) *sculpture,* and (10) *tiling*.[3] We identified these categories in an initial inspection of the visual arts contexts used in the textbooks, using Honour and Fleming's 1982 history of visual arts as a reference.[4] The visual arts references could appear in four different sections in a textbook: (1) *exposition,* (2) *exercises*, (3) *extensions,* and (4) *motivation*. Typically, the expositions are the narrative sections where the authors introduce the main concepts and procedures in the section. The exercises are problems with opportunities for students to apply the concepts and procedures introduced. By "extensions," we refer to additional opportunities for students to apply their knowledge of concepts and procedures that go beyond the problem sets. At times, the extensions are labelled in textbooks as "explorations" and teachers interpret these as additional curricular materials that are not required in the curriculum. Finally, a reference could be in a "motivation" section if it supports the exposition without being central to the discussion in the exposition. The motivations appear at times in the margins of a page or in the introductory section of a unit. One caveat is that the College Preparatory Mathematics (CPM) curriculum uses a problem-based approach. Consequently, there is not an exposition section as in other textbooks. Instead, the introduction of mathematical concepts and procedures appears in the exercises. Prior research on mathematics textbooks has typically focused on expositions and exercises, excluding additional resources such as the extensions and motivation sections (e.g., Otten, Gilbertson, Males, Thompson, Senk, & Johnson, 2014). We included extensions and motivations in this study to examine whether the visual arts contexts were substantially or peripherally connected to the curricular content. Finally, a reference to the visual arts context could be *inscribed* or *invoked* (Martin & White, 2005). An inscribed reference is one in which there is an explicit reference to the visual arts context. In contrast, an invoked reference is implicit, such as when a photo of a sculpture or an origami piece is included without being named as such. In addition, the reference could be to a *process* that involves visual arts (e.g., how to take a photo or make a drawing) or to a *product* (e.g., a photograph or drawing). In some contexts, there were subcategories in the coding process. These subcategories included *bridges* and *buildings* under *architecture*; *jewelry, quilting,* and *knitting* under *crafts*; and *one-point perspective* and *optical illusions* under *drawing*.

[3] In contrast to visual arts, some problems used applied arts contexts: namely, graphic, industrial, or interior design. These references tend to be aligned with the utilitarian argument and constitute a different data set, excluded from this study.

[4] Although tiling can be a subset of architecture, references to tiling were coded separately because this is a typical topic in geometry instruction.

In the first stage of the analysis, two coders, the author and a graduate student with more than 5 years of experience teaching high school geometry who was knowledgeable about the CCSSM, independently coded the five textbooks to identify items with visual arts references. We held regular meetings to discuss the coding. At the end of the process, we reached the reliability of 42%. This value was calculated by dividing the number of agreements with the total number of references coded. We discussed our disagreements and found patterns. For example, one coder had included references to carpentry, but after discussion, we decided to exclude these references because they were not particular to visual arts. Another challenge was that some of the references were in narrative form and a coder had missed the problem when examining the textbook. References to photography were also challenging because it was unclear whether a photograph represented an example of visual art. We decided to include photographs since these showcase visual art products. Finally, we decided to include bridges as a subcategory of architecture, since architects such as Santiago Calatrava are famous for designing bridges. After these revisions, we had the reliability of 98% and reached agreement about the coding of the remaining items by consensus.

In a second layer of coding, we identified the specific content standard that the reference addressed and the domain of the CCSSM. This coding was important to answering the third research question. The two coders made an initial sorting according to CCSSM domain: (1) *Congruence*, (2) *Similarity, Right Triangles, and Trigonometry*, (3) *Circles*, (4) *Expressing Geometric Properties with Equations*, (5) *Geometric Measurement and Dimension*, and (6) *Modelling with Geometry*. Since modelling is an approach more than a specific mathematical content area, items were coded for this strand only they were identified in the textbook as addressing a learning goal pertaining to modelling. If the textbook identified the standard for the item, we took the most conservative approach and used the standard cited in the textbook in order to follow the authors' intentions. The two coders independently revised the initial sorting and identified the specific content standard addressed in a random sample of 20% of the items. We agreed on 67% of the selected items. After discussing the coding and resolving disagreements, we coded a new random sample of 20% of the items. To address previous issues with our coding, we decided that material concerning the area of 2D figures and the surface area of 3D figures pertain to the modelling domain (Standard HSG.MG. A.1), and special right triangles pertain to the similarity, right triangles, and trigonometry domain (Standard HSG.SRT. C.8). Additionally, problems that refer to applications of triangle congruence address a standard in the similarity, right triangles, and trigonometry domain.[5] We reached the

[5] Specifically, standard HSG.SRT.B.5 states, «Use congruence and similarity criteria for triangles to solve problems and to prove relationships in geometric figures.»

reliability of 81% after coding 60% of the data. After resolving disagreements, the author independently coded the remaining 40% of the items.

The next step of the analysis was to code each item according to the justification of the geometry course that is represented in the item: *formal, intuitive, mathematical,* or *utilitarian.* It is possible that an item could have more than one justification. For example, some exercises have multiple parts, and the first part could invite students to appreciate geometric patterns in an object and thus be aligned with the intuitive argument; then, in the second part, the exercise could ask students to construct a proof of geometric properties of the pattern, thus aligning the item with the mathematical argument. To account for this possibility, each item was coded as having (1) or not having (0) evidence that supports each one of the arguments. Agreements were counted per item as to whether the two coders had assigned the same code or codes to that item. The two coders coded a random sample of 20% of the items, reaching agreement on 49% of the sample. We discussed the coding and resolved disagreements before coding a new random sample of 20% of the items. We repeated the process twice, each time with a new random set of 20% of the items, reaching reliability of 67% in round 2 and 61% in round 3. One issue was that we missed statements in some exercises requiring students to "explain" or "justify" their answers, which we coded as aligned with the mathematical argument. We also decided that statements where the students were positioned as "doer" in a job-related scenario (paid or unpaid) or illustrations requiring technical knowledge (e.g., reading a floorplan) were coded as representing the utilitarian argument. We reached the reliability of 81% in our fourth round of coding a random sample of 20% of the data. I independently coded all the remaining items.

Table 2 illustrates an example of the coding sheet. In Item No. 1 there was an illustration showing a two-point perspective drawing of a house with a superimposed geometric diagram extending the sides of the house until they meet in the respective vanishing point. The diagram had labels for the vertices as it is typical in geometry diagrams. The item included three separate questions, asking students to add new line segments, write labels for the new intersection points, and draw the edges of the house that were not visible when showing the front view. The context used in this item was perspective drawing defining the terms "perspective drawing" and "vanishing point." We coded this item as aligned with the intuitive argument because it requires students to use math to appreciate a two-point perspective diagram and makes geometric knowledge accessible to students by having them identify elements in a diagram. Item No. 142, targets the same standard about the definitions of geometric terms such as "angle" and "line segment." The exercise is framed in the context of architecture by including tree diagram of two congruent trapezoidal pyramids with the labels for various angles and length measures, for students to find the measure of other congruent parts. We coded this item as aligned with the intuitive argument because it invites students' appreciation for what the authors call an archeological site." At the same time, the students are required to apply the definition of congruent figures to find the measures of lengths of segments and angles. This second goal is aligned with the mathematical argument, so this item is a case where the item assumed more than one justification for learning geometry. The reference to an archeological site suggests that mathematics is visible in the world and the work of applying to the definition of congruent figures to study the façade of the pyramids requires students to engage in mathematical reasoning. Item No. 104 provides the context of redesigning a kitchen following the guidelines of the "National Kitchen and Bath Association" by applying trigonometry. The exercise states, "Lashayia is planning to renovate her kitchen and has chosen the design at the right. Does her design conform to the National Kitchen and Bath Association's guidelines?" By positioning Lashayia in the situation of solving a problem that one may solve in a job, the item is aligned with the utilitarian argument. Item No. 120 was coded as aligned with the formal argument because it showed a photo of an outdoor theatre and students had to prove that various pairs of triangles created by the roof trusses were congruent. The architectural context provided the opportunity for students to write a proof applying triangle congruence theorems. Overall, the items in Table 2 exemplify items targeting the same standard or the same context that vary in terms of the underlying justifications for why students should study geometry represented by the four discourses.

Item No.	Textbook	Page No.	Chapter	Section No.	Section	Problem No.	Context	Strand	Standard	Justification			
										Mathematical	Formal	Utilitarian	Intuitive
1	Holt	8	1	2	Exercises	45	drawing	1	HSG.CO.A.1	0	0	0	1
90	CPM	436	7	2.4	Exercises	7.84	architecture	2	HSG.SRT.B.5	0	0	1	0
104	Glencoe	142	2	4	Exposition	1	architecture	1	HSG.CO.A.1	1	0	0	1
120	Glencoe	316	4	4	Exercises	16	architecture	2	HSG.SRT. B.5	0	1	0	0

Table 2. Example of the coding template

4. Results

The five mainstream geometry textbooks have a total of 345 items with references to visual arts contexts. Holt has the most references to visual arts with 115 items (33% of the items in all the textbooks), followed by Glencoe (79 items) and Pearson (73 items)[6]. CPM has 50 items referring to visual arts contexts. CME has the fewest references to visual arts with 28 items[7].

---

[6] The Holt textbook included 37 items that repeated the same context within the same chapter; 17 of those items pertained to architecture.

7 A caveat is that the textbooks vary in the length of the text included in the exposition and motivation sections, as well as in the total number of exercises.

In answer to the first research question, Table 3 shows the number of visual arts contexts used per textbook. The context most often used in all the textbooks is architecture (43%), followed by crafts (19%), photography (14%), and drawing (11%).

Figure 1 illustrates that more than 40% of the items coded in each textbook concern architecture. More than 30% of the items in Pearson's concern drawing, but the other textbooks do not have a similar proportion of items about drawing. CPM has the most items of crafts, followed by Glencoe and Holt. In addition, Figure 1 shows that Glencoe has proportionally more items on photography than those of other textbooks. In contrast, the CPM textbook has the smallest proportion of items using photography. Most of the illustrations in CPM are drawings, unlike the illustrations in other textbooks, which include many photos. Six visual arts contexts have a proportion of less than 10% of the items in every textbook: calligraphy, film, painting, pottery, sculpture, and tiling. There was only one item for calligraphy or for pottery, showing that these two contexts are atypical in the mainstream geometry textbooks examined.

	No. of Items per Textbook (%)					
Context	*CME*	*CPM*	*Glencoe*	*Holt*	*Pearson*	Total
architecture	13 (46)	24 (48)	33 (42)	50 (43)	30 (41)	**150 (43)**
calligraphy	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (1)	1 (0)
crafts	4 (14)	14 (28)	18 (23)	20 (17)	10 (14)	66 (19)
drawing	4 (14)	1 (2)	6 (8)	5 (4)	23 (32)	39 (11)
film	1 (4)	0 (0)	1 (1)	1 (1)	2 (3)	5 (1)
painting	2 (7)	3 (6)	3 (4)	3 (3)	2 (3)	13 (4)
photography	4 (14)	2 (4)	16 (20)	21 (18)	5 (7)	48 (14)
pottery	0 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (1)	0 (0)	1(0)
sculpture	0 (0)	3 (6)	1 (1)	7 (6)	0 (0)	11 (3)
tiling	0 (0)	3 (6)	1 (1)	7 (6)	0 (0)	11 (3)
Total	28 (8)	50 (14)	79 (23)	**115 (33)**	73 (21)	345

Note. Some percentages do not add to 100 because of rounding

Table 3. Items with visual arts contexts per textbook

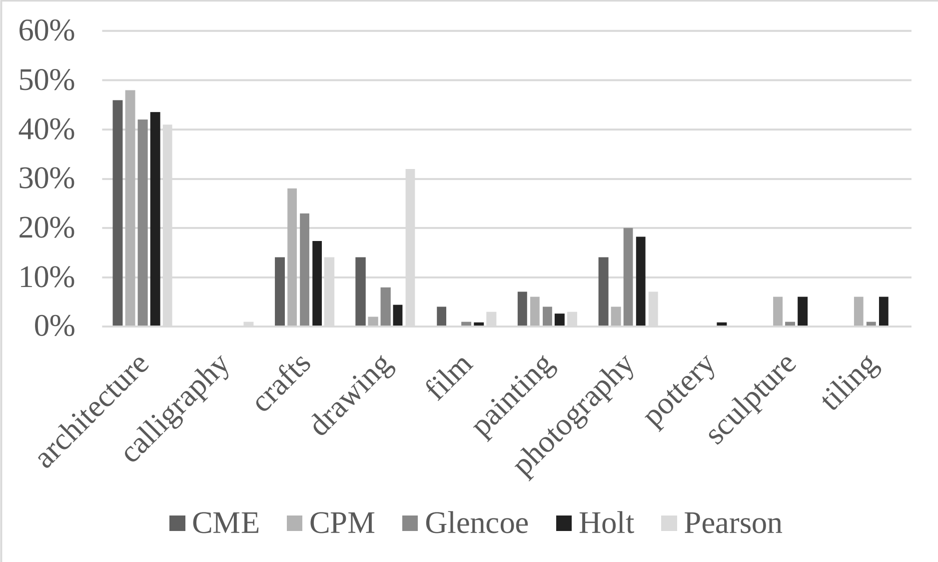


Figure 1. Percentage of items per visual arts context per textbook.

In answer to the second research question, 72% of the visual arts references appear in the exercises (see Table 4). There are 250 exercises using visual arts contexts in all the textbooks. The finding that the majority of the items were in the exercises is unsurprising since exercises typically constitute the majority of the content of a typical mathemcal textbook. Nevertheless, Pearson and Glencoe include 23% and 22%, respectively, of their visual arts references in the expositions. That is, these textbooks use visual arts contexts to introduce new geometry content. CPM, following a problem-based approach, limits the expositions to a brief paragraph, possibly explaining the low percentage of visual arts references in the expositions. CME has the highest percentage of references in motivation (36%) among all the textbooks. This result could be explained by the organization of the chapters, which include illustrations with applications of the mathematical content of the section, sometimes elaborating on or exemplifying that content. In addition, CME’s introduction to similarity (chapter 4) includes 4 items referring to visual arts contexts: photography (2 items), architecture (1 item), and painting (1 item). Pearson includes 21% of its visual arts references in the extensions, being the highest among all the textbooks examined. This result is relevant because the authors included visual arts references as optional curricular topics. However, the other textbooks do not include as many visual arts references in extensions as Pearson. Pearson’s high frequency of items in the explorations can be explained because 13 of the 15 items coded as extensions pertained to one exploration about one-point perspective drawings.

Section	No. of Items per Textbook (%) CME	CPM	Glencoe	Holt	Pearson	Total
Exercises	**14 (50)**	**45 (90)**	**53 (67)**	**98 (85)**	**40 (55)**	**250 (72)**
Exposition	1 (4)	2 (4)	17 (22)	14 (12)	17 (23)	51 (15)
Extensions	3 (11)	2 (4)	2 (3)	0 (0)	15 (21)	22 (6)
Motivation	10 (36)	1 (2)	7 (9)	3 (3)	1 (1)	22 (6)
Total	28	50	79	115	73	345

Note. Some percentages do not add to 100 because of rounding.

Table 4. Items with visual arts contexts per textbook section

Figure 2 shows that, for all textbooks, 50% or more of the items with visual arts references are in the exercises. CPM and Holt have the highest percentage of items with visual arts references in the exercises (90% and 86%, respectively). In addition, all the textbooks include references to visual arts in their motivation.

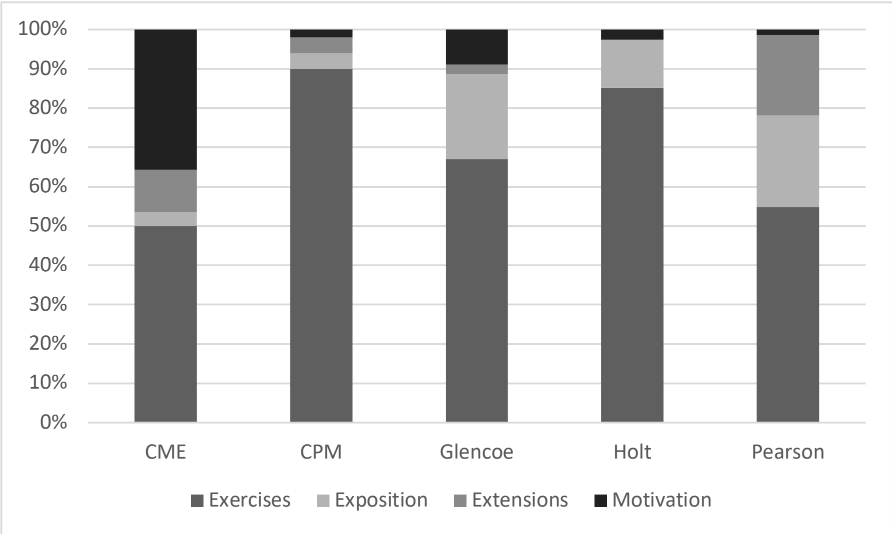


Figure 2. Percentage of items with visual arts references per textbook section per textbook.

The third research question inquires about the connections between the items with visual arts references and the mathematical content. Table 5 shows the classification of items with visual arts references by CCSSM strands. Overall, the “congruence” strand includes standards that are frequently taught through a visual arts context, with 39% of the items from all the textbooks. Two textbooks (CPM and Holt) have most of their references to visual arts contexts in the congruence strand. Across all the textbooks, the "similarity, right triangles, and trigonometry" strand is the second most targeted in the items with visual arts contexts, for a total of 34% of the items. Three textbooks have most of their items targeting this strand (CME, Glencoe, and Pearson). The standard most frequently targeted is HSG.SRT. B.5: "Use congruence and similarity criteria for triangles to solve problems and to prove relationships in geometric figures." This standard is targeted at 47 items (14% of the total items). Notably, this standard includes topics that could also be addressed within the congruence strand but emphasizes problem solving.

Strand	No. of Items per Textbook (%)					Total
	CME	CPM	Glencoe	Holt	Pearson	
1. Congruence	4 (14)	**17 (34)**	24 (30)	**75 (65)**	15 (21)	**135 (39)**
2. Similarity, Right Triangles, & Trigonometry	**17 (61)**	14 (30)	**29 (37)**	22 (19)	**36 (49)**	119 (34)
3. Circles	0 (0)	0 (0)	13 (15)	5 (4)	4 (5)	21 (6)
4. Geometric properties with equations	0 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (1)	0 (0)	1 (0)
5. Measurement & Dimension	2 (7)	6 (12)	10 (13)	6 (4)	17 (23)	41 (12)
6. Modelling	4 (14)	12 (24)	5 (6)	4 (3)	2 (3)	27 (8)
7. None	1 (4)	1 (2)	0 (0)	2 (2)	0 (0)	4 (1)
Total No. of Items in Standards	28	51	80	115	74	348
Total No. of Items	28	50	79	115	73	345

Note. An item could cover more than one Standard.

Table 5. Items with visual arts contexts per strand in the Common Core State Standards for Mathematics

Some textbooks emphasize the use of visual arts contexts in relation to other strands. For example, CPM has a relatively high percentage of items targeting the "modelling" strand (24%), in contrast with the other textbooks. Pearson has a relatively high percentage of items targeting the "measurement and dimension" strand (23%). It is possible that items coded as targeting other strands included a modelling approach since all the items support the examination of a context with mathematics. However, these items may not address definitions of modelling that require making assumptions and constructing a model of a situation using some parameters (Garfunkel & Montgomery, 2016). A total of 4 items did not target any specific standard, appearing in the motivation (2), exposition (1), or extensions (1). None of these items are in the exercises. This finding suggests that the visual references are mostly connected to specific geometry content to be taught by the standards.

Figure 3 shows that most of the items target strands 1 and 2. Strand 4, geometric properties with equations, is rarely represented in the items. Nevertheless, this topic is traditionally limited in the curriculum of the geometry course. Holt has the highest percentage of items in one strand (strand 1). CME and Pearson follow the second and third highest percentages of items, both in strand 2.

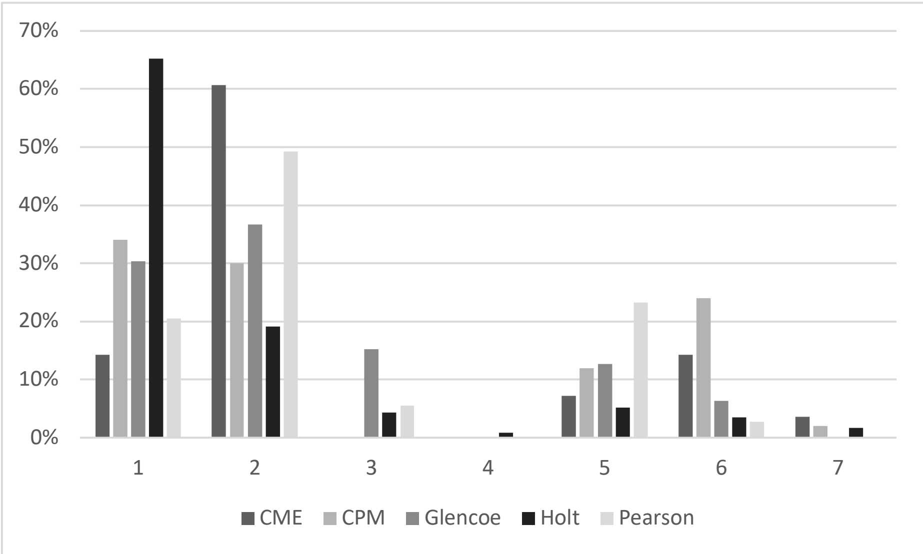


Figure 3. Percentage of items with visual arts references per strand per textbook. Strands: 1. Congruence; 2. Similarity, Right Triangles, & Trigonometry; 3. Circles; 4. Expressing Geometric Properties with Equations; 5. Geometric Measurement & Dimension; 6. Modelling with Geometry; 7. None.

In the last research question, we inquire about alignments between the four arguments supporting the geometry course and the visual arts references. Table 6 shows the results per textbook. The intuitive argument is the justification most often represented, with a total of 212 items (61% of the total items). The visual arts references in all the textbooks except CPM are more aligned with the intuitive argument than with the other arguments. Specifically, more than 40% of the items per textbook are in alignment with the intuitive argument. CPM's items are mostly aligned with the utilitarian argument (46%), followed by the intuitive argument (44%). Holt has the highest percentage of items supporting the mathematical argument (34%). The formal argument has the fewest items across all the textbooks, with no items showcasing this argument in CPM and the most items in Glencoe.

Argument	No. of Items per Textbook (%) CME	CPM	Glencoe	Holt	Pearson	Total
Formal	1 (4)	0 (0)	8 (10)	4 (3)	2 (3)	15 (4)
Intuitive	**19 (68)**	22 (44)	**45 (57)**	**82 (71)**	**44 (60)**	**212 (61)**
Mathematical	2 (7)	14 (28)	13 (16)	39 (34)	9 (12)	77 (22)
Utilitarian	8 (29)	**23 (46)**	30 (38)	23 (20)	22 (30)	106 (31)
Total Items Coded	30	59	96	148	77	410
Total No. of Items	28	50	79	115	73	345

Table 6. Items with visual arts contexts per argument (*Note*. Some items represent more than one argument).

Figure 4 illustrates that the intuitive argument was represented in many of the arguments across all the textbooks. The utilitarian argument is evident in more than 20% of the items in individual textbooks. The proportion of items aligned with the mathematical argument varies across textbooks, with Holt being the only one where it appears as the second most frequently illustrated. In contrast, the formal argument is mostly absent from the items analyzed. CPM seems to have a more balanced distribution of items among the three arguments it showcases (intuitive, utilitarian, and mathematical). CME, Holt, and Pearson emphasize the intuitive argument more than other arguments in their visual arts references.

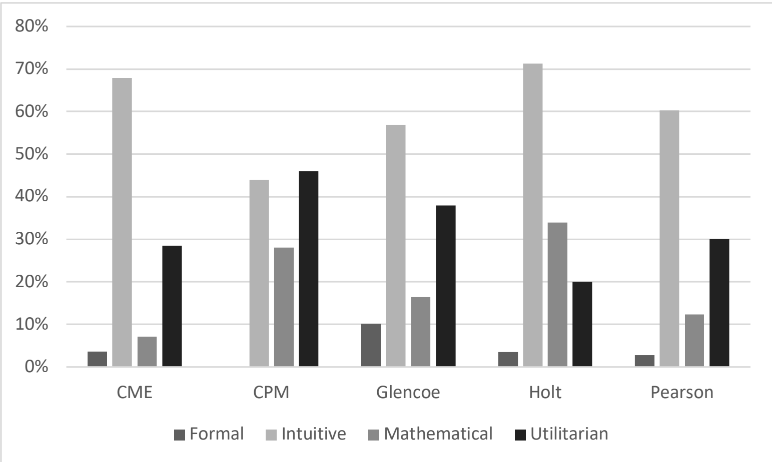


Figure 4. Percentage of items aligned with the arguments justifying the geometry course per textbook.

To illustrate the various arguments, Table 7 shows three exercises with references to the context of architecture targeting standard HSG.SRT. B.5, “Use congruence and similarity criteria for triangles to solve problems and to prove relationships in geometric figures.” Example A shows an example in which students would need to apply geometry to solve a design problem by using the guidelines established by the National Kitchen and Bath Association. This exercise models the type of problems that students would need to solve as part of the workforce, thus aligned with the utilitarian argument. Example B shows an exercise aligned with the intuitive and mathematical arguments. Example C exemplifies the formal argument since the configuration of the building’s roof provides an opportunity for students to construct a proof. The notation and the terms used in this exercise are typical of this textbook when requiring a two-column proof (Herbst, 2002). The identification of geometric properties in the triangles shown in the Chrysler Building reflects the goal of teaching students to appreciate geometry in the world. At the same time, the request for students to explain their reasoning requires students to make references to geometric concepts, thus aligning this goal with the mathematical argument. While the three exercises target the same standard, they vary in the way they imply reasons for learning geometry in schools.

	Example A	Example B	Example C
Text	“The guidelines set forth by the National Kitchen & Bath Association recommends that the perimeter of the triangle connecting the refrigerator (F), stove, and sink of a kitchen be 26 feet or less. Lashayia is planning to renovate her kitchen and has chosen the design at right. Does her design conform to the National Kitchen and Bath Association’s guidelines? Show how you got your answer.”	“In the photo of New York City’s Chrysler Building on the right, $\overline{TS} \cong \overline{ZY}$, $\overline{XY} \cong \overline{RS}$, $\overline{TR} \cong \overline{ZX}$, $\angle X \cong \angle R$, $\angle T \cong \angle Z$, $\angle Y \cong \angle S$, and $\Delta HGF \cong \Delta LKJ$. a. Which triangle, if any, is congruent to ΔYXZ? Explain your reasoning. b. Which side(s) are congruent to $\overline{JL}$? Explain your reasoning. c. Which angle(s) are congruent to $\angle G$? Explain your reasoning.”	“The trusses of the roof of the outdoor theatre shown below appear to have several different pairs of congruent triangles. Assume that trusses that appear to lie on the same line actually lie on the same line. a. If $\overline{AB}$ bisects $\angle CBD$ and $\angle CAD$, prove that $\triangle ABC \cong \triangle ABD$. b. If $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ and $\angle FCA \cong \angle EDA$ prove that $\triangle CAF \cong \triangle DAE$. c. If $\overline{HB} \cong \overline{EB}$, $\angle BHG \cong \angle BEA$, $\angle HGJ \cong \angle EAD$, $\angle JGB \cong \angle DAB$, prove that $\triangle BHG \cong \triangle BEA$.”
Argument	Utilitarian	Intuitive & Mathematical	Formal
Reference	(Dietiker & Kassarjian, 2014, page 436)	(Carter et al., 2018, page 297)	(Carter et al., 2018, page 316)

Table 7. Items using architecture to address the same standard with various arguments

5. Discussion

The geometry textbooks examined use visual arts contexts to teach geometry content aligned with the Common Core State Standards for Mathematics. Most of the references to visual arts are in the exercises. The appearance of visual arts references in the exposition sections, while not prominent across the textbooks, is an important finding that shows that authors use these references to introduce the study of geometry concepts. The finding that motivation and extension sections include few references to visual arts contexts demonstrates that such references are mostly connected to the core content to be taught rather than to curricular materials that teachers may deem optional. One textbook, CME, has the highest proportion of references in the motivation sections, despite having the smallest total number of items. This finding suggests that the visual arts references in CME were mostly used as an entry point to the geometric content. Further analysis is needed to examine the cohesiveness between references in various sections. For example, if a visual arts reference in the motivation section is further developed in the exercises.

The frequent use of architecture as a context throughout the five geometry textbooks is consistent with the recommendations established by the Committee of Fifteen identifying architecture as a source for geometry problems. Architecture is also a useful context for conveying all of the arguments justifying the geometry course, with an emphasis on appreciating math in the world (the intuitive argument) and preparing students for the workforce (the utilitarian argument). Crafts and photography are the second- and third-most chosen visual arts contexts. Crafts include various types of activities such as quilting, jewelry making, and origami. The aggregation of various activities under the same code may have affected the results. The references to crafts are aligned with the intuitive argument (for students to appreciate the world around them) and at times refer to cultural practices such as origami and quilting. Crafts are also aligned with the utilitarian argument, exemplifying how the study of geometry can be useful in making crafts. Photography is another context in which the duality between the utilitarian and the intuitive arguments surfaced: students working as photographers could use geometry principles as part of their job, and students viewing photographs would better appreciate their composition because of their knowledge of geometry. In that sense, photography is a good example of visual arts being used both as a process, in which students apply geometric principles to create a photo, and also as a product, in which students learn how to read an art piece.

The prevalence of strands 1 and 2 in the visual arts references can be explained because these strands include the most standards. For example, strand 1 includes many standards about isometries (i.e., translations, rotations, and reflections), which are fundamental ideas for creating visual arts designs. In addition, problems in which students apply properties of congruence and similarity can be situated within visual arts contexts. At the same time, the limited connections with other strands deserve further attention. For example, some textbooks use jewelry making as a context for applying properties of circles, providing insights into the connections between crafts and geometry. “Measurement and dimension” is another strand where visual arts contexts can enrich the geometry curriculum. The limited connections with visual arts contexts in some strands open opportunities for investigating new connections in future geometry curriculum development.

The result that most of the items are aligned with the intuitive argument is unsurprising for various reasons. First, the proponents of the intuitive argument intended that students learn to appreciate geometry in the world. A geometry curriculum that is situated in visual arts contexts would exemplify how geometric knowledge helps students "read" the world. Second, this argument involves the use of geometry as a context for students to learn algebraic skills. The textbooks examined include exercises where students perform algebraic calculations based on examples from visual arts. Third, the proponents of the intuitive argument intended to broaden students' access to mathematical knowledge by lessening the emphasis on proofs. The visual arts contexts were not used in alignment with the formal argument, which could reflect the limited reasoning-and-proving opportunities in U.S. geometry textbooks (Otten et al., 2014). Finally, it is possible that an emphasis on the utilitarian argument (the second-most frequent argument in the items analyzed) is insufficient for enabling students to appreciate mathematics. A school mathematics curriculum that integrates various goals can broaden students' opportunities to appreciate mathematics beyond an emphasis on preparing for the workforce (Lyakhova, Joubert, Capraro, & Capraro, 2019). Therefore, using visual arts contexts to promote students' connections with their experiences and to solidify their mathematical reasoning would extend students' learning opportunities.

Conclusion

According to Stanic and Kilpatrick (1992) "The essence of curriculum is the struggle to answer the question of what we should teach" (p. 415). The selection of visual arts contexts in geometry textbooks illustrates this struggle. There are multiple reasons for students to study geometry through visual arts contexts: learning how to appreciate geometry in an origami piece, learning how to use geometric properties to design a building, applying logic to establish relationships between geometric figures in a building, or explaining the mathematical reasoning involved when studying the geometric figures in a quilt pattern. Visual arts contexts can provide an entry point for geometry students to learn mathematics. In doing so, visual arts can be a realistic context that engages students in guided reinvention. These contexts can also allow students to draw upon their knowledge bases by using their intuition about objects that they see in the world (Land, Bartell, Drake, Foote, Roth McDuffie, Turner, & Aguirre, 2018). Finding relevant contexts for students to engage in mathematics is a challenging task for teachers (González, 2017). To open up opportunities for students to engage in mathematics and to promote equitable instruction, there need to be curricular options related to students' interests and experiences. Like the interactions between artists and mathematicians that have led to both the discovery of novel mathematical ideas and to interesting mathematical illustrations, visual arts contexts in the geometry curriculum can broaden students' engagement and appreciation of mathematics.

Acknowledgements

This study was supported by a Campus Research Board from the University of Illinois at Urbana-Champaign to Gloriana González for the project *Geometry and Design in Classrooms* (GeoDesiC). A previous version of this work was presented at the 2019 Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences conference at McGill University, Montreal, Canada. The author thanks Christine Rinkenberger for assistance coding.

Bibliography

ADAM, J.-M. (2011). *Les textes : types et prototypes : récit, description, argumentation, explication et dialogue,* Paris : A. Colin.

ASSUDE, T., KOUDOGBO, J., MILLON-FAURE, K., MORIN, M.-P., TAMBONE, J. & THEIS, L. (2016). Mise à l'épreuve des fonctions d'un dispositif d'aide aux élèves en difficulté en mathématiques. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* **16(1)**, 1-35.

ASCHER, M. (1991). *Ethnomathematics.* Pacific Grove, CA: Brooks/Cole.

BOALER, J. (2008). *What's math got to do with it?* New York: Penguin Books.

CARTER, J. A., CUEVAS, G. J., DAY, R., & MALLORY, C. (2018). *Glencoe Geometry.* Columbus, OH: McGraw-Hill.

CHARLES, R. I., HALL, B., KENNEDY, D., BASS, L., JOHNSON, A., MURPHY, S. J., & WIGGINS, G. (2015). *Geometry Common Core.* Hoboken, New Jersey: Pearson.

CENTER FOR MATHEMATICS EDUCATION PROJECT. (2013). *Geometry.* Boston, MA: Pearson.

COBB, P., YACKEL, E., & WOOD, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education,* **23**, 2–33.

COX, P. L. (1985). Informal geometry—more is needed. *Mathematics Teacher,* **88(6)**, 404–405, 435.

DIETIKER, L. & KASSARJIAN, M. (2014). *Core Connections Geometry* (Second Edition, Version 5.0). Elk Grove, CA: CPM Educational Program.

DIMMEL, J. K., & HERBST, P. G. (2015). The semiotic structure of geometry diagrams: How textbook diagrams convey meaning. *Journal for Research in Mathematics Education,* **46(2)**, 147–195.

DOSSEY, J., HALVORSEN, K., & MCCRONE, S. (2008). *Mathematics education in the United States 2008: A capsule summary fact book written for the eleventh*

International Congress on Mathematical Education (ICME-11). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

DOWLING, P. (1998). *The sociology of mathematics education: Mathematical myths/pedagogic texts*. London: The Falmer Press.

ELIOT, C., HARRIS, W. T., ANGELL, J. B., TETLOW, J., TAYOR, J. M., ROBINSON, O. D. ET AL. (1969). Report of the Committee of Ten to the National Education Association. In National Education Association, *Report of the Committee on secondary school studies* (pp. 3–5). New York: Arno Press. (Original work published in 1893).

FAWCETT, H.P. (1935). Teaching for transfer. *Mathematics Teacher,* **28(8)**, 465–472.

FAWCETT, H.P. (1938). *The Nature of Proof. Thirteenth Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics.* New York: Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University.

FOUCAULT, M. (1972). *The archaeology of knowledge & the discourse on language*. New York, NY: Pantheon.

FREUDENTHAL, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics,* **1**, 3–8.

FREUDENTHAL, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics,* **3**, 413–435.

FREUDENTHAL, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

GAINSBURG, J. (2008). Real-world connections in secondary mathematics teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, **11**, 199–219.

GARFUNKEL, S., & MONTGOMERY, M. (Eds.). (2016). *Guidelines for assessment & instruction in mathematical modeling education (GAIMME) report*. Boston/Philadelphia: COMAP and SIAM.

GONZÁLEZ, G., & HERBST, P. (2006). Competing arguments for the geometry course: Why were American high school students to study geometry in the twentieth century? *International Journal for the History of Mathematics Education*, **1(1)**, 7–33.

GONZÁLEZ, G. (2017). Teachers' understanding of realistic contexts for capitalizing on students' prior knowledge. *School Science and Mathematics*, **117 (7–8)**, 285–352.

GRAVEMEIJER, K., & DOORMAN, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, **39 (1/3)**, 111–129.

GRAVEMEIJER, K., & TERWEL, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, **32(6)**, 777–796.

HERBEL-EISENMANN, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, **38(4)**, 344–369.

HERBST, P. (2002). Establishing a custom of proving in American school geometry: Evolution of the two-column proof in the early twentieth century. *Educational Studies in Mathematics*, **49(3)**, 283–312.

HONOUR, H., & FLEMING, J. (1982). *The visual arts: A history*, 2nd ed. New Jersey: Prentice-Hall.

HUNTE, A. A. (2018). Opportunities for Reasoning and Proving in Geometry in Secondary School Textbooks from Trinidad and Tobago. Herbst, P., Cheah U.H., Richard, P. R., & K. Jones (Eds.), *International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools* (p. 39–58). Springer.

KASTBERG, S. E., D'AMBROSISO, B., MCDERMOTT, G., & SAADA, N. (2005). Context matters in assessing students' mathematical power. *For the Learning of Mathematics*, **25(2)**, 10–15.

KLIEBARD, H. (1995). *The struggle for the American curriculum 1893–1958*. (2nd Ed.). Boston: Routledge & Kegan Paul.

LAMPERT, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, CT: Yale.

LAND, T. J., BARTELL, T. G., DRAKE, C., FOOTE, M. Q., ROTH MCDUFFIE, A., TURNER, E. E., & AGUIRRE, J. M. (2018). Curriculum spaces for connecting to children's multiple mathematical knowledge bases. *Journal of Curriculum Studies*, **51(4)**, 471–493.

LARSON, R., BOSWELL, L., KANOLD, T. D., & STIFF, L. (2012). *Geometry*. Orlando, FL: Holt McDougal/Houghton Mifflin Harcourt.

LIVIO, M. (2002). *The golden ratio*. New York: Broadway Books.

LUBIENSKI, S. T. (2000). Problem solving as a means toward mathematics for all: An exploratory look through a class lens. *Journal for Research in Mathematics Education*, **31**, 454–482.

LYAKHOVA, S., JOUBERT, M., CAPRARO, M. M., & CAPRARO, R. M. (2019). Designing a curriculum based on four purposes: let mathematics speak for itself. *Journal of Curriculum Studies*, **51(4)**, 513–529.

MARTIN, J. R., & WHITE, P. R. R. (2005). *The language of evaluation: Appraisal in English*. New York: Palgrave Macmillan.

MESA, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics*, **56 (2–3)**, 255–286.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). (2018). *Catalyzing change in high school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

NATIONAL GOVERNORS ASSOCIATION CENTER FOR BEST PRACTICES & COUNCIL OF CHIEF STATE SCHOOL OFFICERS. (2010). *Common core state standards for mathematics*. http://www.corestandards.org/Math/

OTTEN, S., GILBERTSON, N. J., MALES, L. M., & CLARK, D. L. (2014). The mathematical nature of reasoning-and-proving opportunities in geometry textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, **16(1)**, 51–79.

PEDOE, D. (1976). *Geometry and the visual arts.* New York: Dover.

QUAST, W. G. (1968). Geometry in the high schools of the United States: An historical analysis from 1890 to 1966. Unpublished doctoral dissertation. Rutgers—The State University of New Jersey, New Brunswick.

SCHATTSCHNEIDER, D. (2010). The mathematical side of M. C. Escher. *Notices of the AMSS*, **57(6)**, 706–718.

SEARS, R., & CHÁVEZ, O. (2014). Opportunities to engage with proof: the nature of proof tasks in two geometry textbooks and its influence on enacted lessons. *ZDM Mathematics Education*, **46**, 767–780.

SERRA, M. (1997). *Discovering Geometry: An inductive approach* (2nd ed.). Berkeley, CA: Key Curriculum.

SLAUGHT, H.E., BETZ, W., BROWN, E.L., BOUTON, C.L., CAJORI, F., FULLER, W., HART, W.W., HAWKES, H.E., HEDRICK, E.R., NEWTON, F. E., RIETZ, H.L., SHORT, R.L., SMITH., D. E, SMITH, E.R., & SYKES, M. (1912). Final report of the National Committee of Fifteen on geometry syllabus. *The Mathematics Teacher*, **5**, 46–131.

STANIC, G. M., & KILPATRICK, J. (1992). Mathematics curriculum reform in the United States: A historical perspective. *International Journal of Educational Research*, **17(5)**, 407–417.

SYKES, M. (1912). A source book of problems for Geometry. Boston: Allyn and Bacon.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, **54**, 9–35.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, **25(2)**, 2–9, 23.

VISUAL ARTS. (n.d.). In Encyclopædia Brittannica's online dictionary. Retrieved March 4, 2020, from https://www.britannica.com/art/visual-arts.

GLORIANA GONZÁLEZ

University of Illinois at Urbana-Champaign

ggonzlz@illinois.edu

NATHALIE ANWANDTER CUELLAR, STEVE TREMBLAY

SAVOIRS VÉHICULÉS PAR LES MANUELS SCOLAIRES FRANÇAIS ET QUÉBÉCOIS À PROPOS DE L'AIRE. UNE ÉTUDE COMPARATIVE

Abstract. This article presents a comparative study of French and Quebec textbooks on the notion of area. Several research studies have raised students' difficulties in understanding the concept of area, and recent work suggests studying these difficulties in connection with the learning opportunities offered by textbooks, which are a tool widely used by teachers. In order to highlight the similarities and differences in the knowledge set out in the textbooks of two territories and to interpret them according to the learning of the pupils, we have built a praxeological reference model using the Anthropological Theory of Didactics (TAD). Our results show similar limitations in French and Quebec textbooks, in particular the strong focus on the numerical dimension of the area to the detriment of the elements contributing to a conceptualization of this notion.

Résumé. Cet article présente une étude comparative de manuels scolaires français et québécois à propos de la notion d'aire. Plusieurs recherches ont soulevé les difficultés des élèves à comprendre la notion d'aire et des travaux récents proposent d'étudier ces difficultés à l'égard des occasions d'apprentissage qu'offrent les manuels scolaires, ceux-ci étant un outil très utilisé par les enseignantes et enseignants. Afin de mettre en évidence les similitudes et différences relativement aux savoirs exposés dans les manuels scolaires de deux territoires et les interpréter en fonction des apprentissages des élèves, nous avons construit un modèle praxéologique de référence à l'aide de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD). Nos résultats montrent des limites similaires dans les manuels français et québécois, en particulier la forte focalisation sur la dimension numérique de l'aire au détriment des éléments contribuant à une conceptualisation de cette notion.

Mots-clés. Manuel scolaire, étude comparative, aire, Théorie Anthropologique du Didactique.

Introduction

Cette recherche s'inscrit en prolongation de nos travaux portant sur l'enseignement des grandeurs et mesures au secondaire en France (Anwandter Cuellar, 2012, 2016, 2017), en particulier sur la grandeur « aire ». Ces travaux ont révélé que la nature des savoirs mathématiques relatifs à l'aire est difficile à appréhender, comme sa définition en tant que grandeur, celle de mesure et l'utilisation des unités dans les calculs (Anwandter Cuellar, 2016 ; Pressiat, 2009). En effet, les résultats de nos recherches en France et ceux de Daina (2013) en Suisse, nous ont amenés à faire l'hypothèse que la complexité des concepts traitant l'aire ainsi que l'introduction précipitée des aspects numériques pourraient faire obstacle à un enseignement et à

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 25, p. 211 - 242.

un apprentissage adéquat, et ceci indépendamment de la prescription des savoirs à enseigner dans un pays donné et dans un niveau particulier (Anwandter Cuellar, 2016). Dans ce sens, nous avons élargi ce questionnement au contexte de l'enseignement secondaire au Québec, où l'objet mathématique aire est très peu étudié par les recherches.

Une partie de notre recherche comportait une étude comparative des manuels scolaires français et québécois à propos de la notion d'aire des surfaces planes[1] au début de l'enseignement secondaire (6e et 5e au collège en France et 1re et 2e années du secondaire au Québec). Étant donné que les manuels scolaires sont des éléments intermédiaires entre les prescriptions ministérielles et les pratiques d'enseignement influençant aussi les apprentissages des élèves (Assude & Margolinas, 2005 ; Margolinas & Wozniak, 2009), ils représentent une bonne entrée pour comparer différentes institutions (Gueudet, Pepin & Trouche, 2015). Ainsi, nos objectifs étaient de : 1) déterminer et comparer la place et le rôle de la notion d'aire dans quelques manuels scolaires français et québécois, et 2) décrire et comparer les savoirs mathématiques relatifs à la notion d'aire présents dans les manuels scolaires français et québécois.

Le plan de l'article suit une structure classique : présentation d'une problématique pour soutenir notre étude comparative, suivie d'une exposition de concepts théoriques sur lesquels s'appuient notre méthode, notre analyse et nos résultats, provenant de la comparaison des savoirs mathématiques relatifs à la notion d'aire dans les manuels scolaires français et québécois. Enfin, dans la dernière partie, nous concluons par une discussion autour de « lacunes » des manuels scolaires et de leur possible impact sur les apprentissages des élèves, ainsi que des limites de notre étude.

1. La problématique

1.1. Les difficultés associées à l'enseignement et l'apprentissage de la notion d'aire

L'aire joue un rôle important dans la construction de plusieurs concepts mathématiques et dans le développement des compétences mathématiques (Marmolejo & Gonzalez, 2015). Cependant, même si plusieurs recherches ont abordé l'enseignement et l'apprentissage de la notion d'aire depuis des années, des difficultés demeurent persistantes (De Araújo & Dos Santos, 2009 ; Zacharos, 2006).

L'une des raisons pouvant expliquer ces difficultés est qu'en tant que grandeur, l'aire se construit dans un système faisant appel aux grandeurs, mesures et objets. Ainsi son enseignement et son apprentissage nécessitent une coordination entre la géométrie, les grandeurs et le numérique. Mais les différences et interrelations entre

[1] Dans ce qui suit du texte, nous parlerons seulement d'aire.

ces aspects ne sont pas évidentes chez les élèves ni chez les enseignantes et enseignants (Anwandter Cuellar, 2012, 2016 ; Daina, 2013).

En outre, les élèves du primaire rencontrent des difficultés avec les procédures de mesure et des changements d'unité, où l'unité occupe une place fondamentale (Battista, 2004). Une compréhension inadéquate de l'unité peut amener les élèves à utiliser les formules d'aire de manière incorrecte, à ne pas considérer, par exemple, l'unité carrée comme étant l'unité d'aire, à ne pas être en mesure de relier le nombre de carrés d'un recouvrement à la mesure de l'aire (Zacharos, 2006) et à avoir des difficultés à réaliser des changements d'unités (Chambris, 2010).

En conséquence, la littérature scientifique actuelle continue à s'intéresser à la notion d'aire (Anwandter Cuellar, 2016 ; Daina, 2013 ; Zacharos, 2006). Plus particulièrement plusieurs travaux récents proposent d'analyser la manière dont ce concept est traité dans les manuels scolaires de différents pays (Hong, Choi, Runnalls & Hwang, 2018 ; Marmolejo, 2014 ; Smith, Males & Gonulates, 2016) afin de comprendre (au moins partiellement) certaines difficultés des élèves.

1.2. Pourquoi une comparaison des manuels scolaires ?

Les manuels scolaires constituent un support essentiel à l'enseignement et ils jouent un rôle important sur les apprentissages des élèves (Remillard, Harris & Agodini, 2014). Comme plusieurs manuels scolaires sont produits dans le monde, ils représentent une bonne porte d'entrée pour appréhender les mathématiques à enseigner et celles qui sont effectivement enseignées dans les différents pays (Gueudet et al., 2015). Toutefois, même si les manuels scolaires exercent une forte influence sur les cours de mathématiques dispensés, il est également vrai qu'ils sont lus, interprétés et mis en œuvre différemment par les enseignantes et enseignants avec des élèves dont les caractéristiques et les types de compréhension diffèrent également (Daina, 2013 ; Smith et al., 2016). Par conséquent, nous ne pouvons pas affirmer que le contenu des manuels scolaires constitue la seule raison valable pour laquelle les élèves ont du mal à conceptualiser la notion d'aire. Cependant, puisque les manuels constituent des ressources importantes pour les enseignantes et enseignants dans la planification de leur enseignement et qu'ils représentent des occasions d'apprentissage pour les élèves (Hong et al., 2018), il est pertinent d'analyser la manière dont les manuels traitent les sujets mathématiques, en particulier l'aire (Smith et al., 2016). En effet, si les manuels scolaires montrent des limites dans le traitement de la notion d'aire, ceci peut être une explication des difficultés des élèves à apprendre les sujets mathématiques en lien avec cette notion mathématique (Hong et al., 2018).

2. Cadre théorique

2.1. Les manuels scolaires comme étape de la transposition didactique

Notre étude se situe dans la ligne des travaux comparatistes en didactique positionnant les manuels scolaires comme étape de la transposition didactique (Assude & Margolinas, 2005 ; Chevallard, 1985). Cette perspective comparatiste des savoirs présents dans les manuels scolaires en France et au Québec prend appui sur la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) (Chevallard, 1999) et elle vise « à dégager des spécificités dans le traitement des savoirs mathématiques dans différents pays, révélant ainsi le poids que la société ou les cultures mathématiques – souvent distinctes d'un pays à l'autre – font peser sur les savoirs enseignés » (Margolinas & Wokniak, 2009). En étant le résultat d'une transposition didactique (Chevallard, 1992), les manuels scolaires sont une forme de traduction des savoirs exposés dans les programmes scolaires selon l'interprétation des auteurs. Ils nous renseignent sur un élément qui est intermédiaire entre le savoir à enseigner (généralement décrit dans les programmes officiels) et le savoir enseigné dans les pratiques effectives des enseignantes et enseignants (Assude & Margolinas, 2005).

2.2. Un modèle praxéologique de référence (MPR) pour étudier la notion d'aire

Dans le processus de transposition didactique (Bosch & Gascón, 2014 ; Chevallard, 1985), le savoir savant apparaît comme source de légitimation du savoir enseigné (Bosch & Gascón, 2014). De ce fait, pour étudier les savoirs exposés dans les manuels scolaires, il est nécessaire de construire des modèles épistémologiques et didactiques de référence indépendants des institutions permettant de les décrire et de les interpréter (Chaachoua & Bittar, 2019). Dans nos recherches précédentes (Anwandter Cuellar, 2012, 2016), nous avons construit un modèle praxéologique de référence (MPR) pour le concept d'aire à partir d'une étude épistémologique et des recherches antérieures en didactique des mathématiques (Brousseau, 2002 ; Chambris, 2010 ; Chevallard & Bosch, 2001 ; Moreira-Baltar, 1995, 1997, 1999 ; Rouche 1992). Nous l'avons dénommé « le filtre de grandeurs » (cf. annexe 1) et il s'inspire des travaux de Bronner sur le numérique (Bronner, 2007). Pour cet article, nous n'en présenterons qu'une partie au regard de nos objectifs.

2.2.1. L'aire en tant que grandeur

Afin de définir l'aire, nous caractérisons trois non ostensifs principaux (Bosch & Chevallard, 1999) : les objets géométriques qui sont les surfaces (comme une partie du plan), (l'espèce de) grandeur aire et les mesures d'aire. Il existe ainsi un lien entre le cadre géométrique, celui des grandeurs et les nombres. L'étude de l'aire en tant que grandeur revient à considérer l'aire d'une surface comme une propriété invariante pour certaines opérations, telles que les isométries. Du point de vue numérique, on choisit une unité d'aire pour mesurer les aires des surfaces. L'idée est donc de définir une fonction mesure μ sur un certain ensemble de surfaces dans $\mathbb{R}^+$, qui est positive et vérifie les propriétés d'additivité et d'invariance par isométrie. Nous avons choisi l'approche présentée par Perrin-Glorian (1999) pour définir l'aire : « l'aire d'une surface sera la classe d'équivalence de cette surface pour la relation "avoir même mesure" » (p. 3). Il s'agit de définir cette grandeur indépendamment de l'unité :

> « Si on choisit une surface unité A et défini l'application [mesure] μ_A correspondante, on peut définir une relation d'équivalence $\Re_A$ par $S\Re_A S'$ si seulement si $\mu_A(S) = \mu_A(S')$. Les classes d'équivalences obtenues ne dépendent pas du choix de A. On peut alors appeler aire β de B la classe d'équivalence de B pour n'importe laquelle de relations $\Re_A$ et définir la mesure de l'aire β comme la mesure de n'importe laquelle des surfaces de β » (Perrin-Glorian, 1990, p. 10).

Comme l'indique Perrin-Glorian (1990), il ne s'agit pas de définir l'aire en tant que grandeur d'une manière mathématiquement rigoureuse. « L'important est d'avoir une notion indépendante à la fois de la forme et de quelque unité de mesure que ce soit » (p.12). Ce qui nous intéresse du point de vue de l'enseignement est l'expression « avoir même aire », ce que nous appelons l'aire en tant que grandeur.

2.2.2 Les organisations mathématiques et didactiques

Dans le cadre de la TAD, l'étude des savoirs peut se faire à l'aide d'une unité d'analyse dénommée organisation mathématique (OM) (Bosch & Gascón, 2004). Elle est définie comme un quadruplet T, τ, θ, Θ ; où T désigne un type de tâches (formé d'un ensemble de tâches spécifiques) ; τ désignant une technique que l'on peut appliquer pour la réalisation de ces types de tâches, θ une technologie, un discours qui justifie l'adéquation de la technique ou à la produire. Enfin Θ désigne une théorie servant à justifier le discours technologique ou à l'élaborer (Chevallard, 1999). Selon Bosch et Gascón (2004), on ne peut comprendre ni expliquer l'OM apprise sans comprendre et expliquer les OM des étapes antérieures, et il est aussi nécessaire d'étudier comment ces organisations mathématiques sont mises en place. Ce dernier aspect nous renvoie à ce que Chevallard appelle organisation didactique (OD). À son tour, une OD peut se caractériser à l'aide des différents moments d'étude : moment de la première rencontre avec un type de tâches ; moment de l'exploration du type de tâches et de l'émergence de la technique ; moment de la construction du bloc technologico-théorique ; moment de l'institutionnalisation ; moment du travail de l'organisation mathématique (en particulier de la technique) et moment de l'évaluation (Chevallard, 1999).

2.2.3 Les organisations mathématiques relatives à l'aire

En nous basant sur les travaux de Anwandter Cuellar (2012, 2016) et de Daina (2013), nous proposons une typologie (non exhaustive) des types de tâches, techniques et technologies relative à l'aire. Nous exposerons (cf. tableau 1) seulement les types de tâches présentes dans un plus grand nombre dans les manuels scolaires[2] :

<table>
<tr><th>TECHNIQUE</th><th>PRÉCISIONS SUR LES TECHNIQUES ET LES TECHNOLOGIES</th></tr>
<tr><td colspan="2">Type de tâche T_1 : Comparer des aires</td></tr>
<tr><td>τ_{CIS} : inclusion et superposition</td><td rowspan="2">- Soit $A(S)$ l'aire d'une surface S, on a $A(f(S)) = A(S)$, pour une isométrie f (invariance par isométrie);
- Si $S \subseteq S'$ alors $A(S) \leq A(S')$;
- Soient S et S'deux surfaces. On dit qu'elles sont équivalentes par découpage et recollement s'il existe une partition de S (resp. de S'), telle que $S = S_1 \cup S_2 \cup, \ldots, \cup S_n$ (resp. $S' = S'_1 \cup S'_2, \ldots, \cup S'_n$) et, pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$, une isométrie g_i de S_i sur S'_i;
- Si S et S ' sont disjointes $A(S \cup S') = A(S) + A(S')$ (additivité)</td></tr>
<tr><td>τ_{CDR} : comparaison par découpage-recollement</td></tr>
<tr><td>Techniques relatives aux calculs des aires
Et à leurs mesures des aires</td><td>Voir T_2

Voir T_7</td></tr>
<tr><td colspan="2">Type de tâche T_2 : Calculer l'aire d'une surface</td></tr>
<tr><td>τ_{CF} : utilisation d'une formule.</td><td>Formules d'aire de surfaces usuelles.</td></tr>
<tr><td>τ_{CD} : calcul après une décomposition</td><td>Additivité</td></tr>
<tr><td colspan="2">Type de tâches T_4: Produire une surface d'une aire donnée</td></tr>
<tr><td>τ_{PDR} : production par découpage-recollement</td><td>Si on veut produire une surface S' d'aire égale (ou plus petite ou plus grande) à celle de la surface S, une technique consiste à découper la surface S et à recomposer une surface S' avec l'ensemble des morceaux (ou une partie des morceaux ou avec l'ajout de morceaux)
Voir technologies du τ_{CDR} associées au T_1</td></tr>
<tr><td>τ_{PDU} : production par dénombrement d'unités ou sous-unités fractionnaires</td><td>Cette technique consiste à produire une surface S' qui contient le même nombre (ou plus ou moins) de « pavés » (usuellement des carreaux) que la surface S.
Voir technologies du τ_{DU} associées au T_7</td></tr>
<tr><td>τ_{NU} : production selon une manipulation numérique</td><td>Les technologies sont associées aux formules d'aires et aux manipulations numériques et algébriques. Par exemple, si la formule d'aire d'une surface donnée est $a \cdot b$, et si on connaît la mesure de l'aire et a ou b, il suffit de calculer le terme manquant et construire la figure selon les mesures des longueurs trouvées.</td></tr>
</table>

[2] Pour les autres types de tâches, nous n'avons repéré que trois tâches ou moins dans l'ensemble des manuels scolaires qui relèvent de chacune de ce type de tâches. Nous considérons que la présentation des techniques et technologies relatives à ces types de tâches n'est pas nécessaire vu le peu d'éléments à ce sujet. Voir la liste complète de types de tâches dans l'annexe 1.

<table>
<tr><th colspan="2">Type de tâche T_6 : Changer d'unité d'aire</th></tr>
<tr><td>τ_{UC} : utilisation d'un tableau à colonnes doubles</td><td>Propriétés de la proportionnalité et système décimal de numération écrit chiffré.</td></tr>
<tr><td>τ_{UX} : multiplication (ou division) par 100, 10 000, etc.</td><td rowspan="3">Multiplication et équivalences des unités, système décimal de numération écrit chiffré.</td></tr>
<tr><td>τ_{UD} : déplacement de la virgule</td></tr>
<tr><td>τ_{UE} : utilisation directe des équivalences</td></tr>
<tr><td>τ_{UQP} : utilisation de la quatrième proportionnelle</td><td>Propriétés de la proportionnalité.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Type de tâches T_7 : Mesurer des aires</th></tr>
<tr><td>τ_{DU} : dénombrement d'unités ou sous-unités fractionnaires.</td><td>Si la surface S peut se paver avec une surface s, et si on considère l'aire de s comme l'unité d'aire u, l'aire de S est un nombre entier positif trouvé après le dénombrement des unités u. Si S ne peut pas être pavé avec la surface s, on considère des subdivisions de s, c'est-à-dire, des sous-unités fractionnaires relatives à l'unité u.</td></tr>
</table>

Tableau 1. Types de tâches, techniques et technologies repérés dans les manuels scolaires

3. La méthodologie

3.1. Le type de recherche et le choix des manuels

Notre étude qualitative répond à une question du type descriptif (Fortin, 2010), où il s'agit fondamentalement de décrire et caractériser le savoir présent dans les manuels scolaires à l'aide de notre MPR. Nous avons comparé les savoirs mathématiques relatifs à la notion d'aire dans les manuels scolaires utilisés par les élèves des deux premières années du secondaire au Québec (12 à 13 ans) et en France (11 à 12 ans)[3]. Même si ces niveaux scolaires ne se correspondent pas sur l'âge des élèves, ils représentent pour chaque territoire, l'entrée au secondaire et les programmes relatifs à ces niveaux regroupent la plupart des contenus relatifs à l'aire (cf. annexe 2). En outre, en France, il existe un programme scolaire officiel (Ministère de l'Éducation Nationale et de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, [MENESR], 2015), mais il n'existe pas de manuels scolaires officiels. Au Québec, il existe aussi un programme officiel depuis 2006 (Ministère de l'Éducation, 2006a) et c'est le ministère de l'Éducation et de l'Enseignement supérieur (MÉES) qui donne son accord à l'utilisation de manuels scolaires (parmi les trois manuels approuvés par le MÉES, deux ont été analysés dans cette étude). Toutefois, en l'absence d'études quantitatives sur l'utilisation des manuels par les enseignantes et enseignants ou le nombre de ventes en France et au Québec, nous nous sommes basés sur nos expériences en recherche et enseignement sans que d'autres critères spécifiques soient appliqués. Le tableau 2 présente les manuels analysés :

[3] Les manuels scolaires québécois ont été publiés entre 2005 et 2006 et les manuels français en 2016.

Territoire	Éditeur-Collection	Niveau	Code
Québec	CEC-Panoram@th	1re sec., vol. 1A	Pa1[4]
		1re sec., vol. 2A	Pa1
		2e sec., vol. 1B	Pa2
		2e sec., vol. 2B	Pa2
	Grand Duc-Perspectives	1re sec., vol. 1A	Pe1
		1re sec., vol. 2A	Pe1
		2e sec., vol. 1B	Pe2
		2e sec., vol. 2B	Pe2
France	Nathan-Transmath	6e collège	Tr6
		5e collège	Tr5
	Bordas-Myriade	6e collège	My6
		5e collège	My5

Tableau 2. Manuels scolaires analysés

3.2. L'analyse praxéologique

Nous nous sommes basés sur l'approche praxéologique utilisée dans plusieurs recherches en didactique pour l'analyse des manuels scolaires (Chaachoua & Comiti, 2010) :

a) Nous avons repéré la place de la notion d'aire dans les manuels scolaires en utilisant une recherche par mots-clés (aire, superficie). Ceci nous a permis d'identifier plusieurs chapitres où l'aire est étudiée et de différencier le rôle de la notion d'aire en tant qu'objet (étude des définitions, propriétés, etc., relatives à l'aire) ou outil (étude d'autres notions où l'aire sert comme outil à leur apprentissage) (Douady, 1984).

b) Pour les parties des manuels scolaires où l'aire est traitée plutôt comme un objet, nous avons mis en place l'analyse praxéologique de la manière suivante (Chaachoua & Comiti, 2010) :

   – Repérage des tâches et regroupements selon notre typologie de type de tâches ;

   – Comptage simple de ces différents types de tâches afin d'avoir un portrait quantitatif de la situation. Ce premier portrait ainsi que la littérature

[4] Il est important de signaler qu'au Québec, il existe deux volumes d'un manuel scolaire d'une même collection pour un même niveau d'enseignement, alors qu'en France, c'est un manuel par niveau ou un manuel par cycle. Alors, nous avons nommé deux volumes de la même collection pour un même niveau avec le même code afin de les regrouper.

scientifique ont servi de guide pour choisir les types de tâches à étudier qualitativement ;

– Analyse qualitative des extraits des manuels scolaires caractérisant les savoirs associés à ces types de tâches à l'aide de notre MPR.

4. Résultats : place et rôle de l'aire dans les manuels scolaires

4.1. Description générale

Pour étudier la place de l'aire comme objet, nous avons répertorié toutes les activités (une même activité peut comporter plusieurs tâches) et les chapitres en lien avec cette notion dans les manuels scolaires (cf. tableau 3). Il est important de noter que les manuels scolaires ne présentent pas le même type de structure. Les manuels français My6 et My5 divisent le manuel en « chapitres » ; et les manuels Tr6 et Tr5 en thématiques selon les domaines mathématiques du programme français et en « chapitres ». Les manuels québécois Pa1 et Pa2 présentent des thématiques selon les contenus (que nous considérons comme des chapitres) et ensuite des « unités ». Finalement, les manuels Pr1 et Pr2 présentent de grandes « parties » (que nous considérons comme des chapitres) et ensuite des sections dénommées « dossiers ».

Collection	Chapitres ou parties (nombre d'activités)	Total
Pa1	- - - -	0
Pa2	Chap10 / Aires des polygones usuels (40) Chap12 / Aires des polygones réguliers et système d'unités d'aire (18) Chap14/Aire d'un disque et d'un secteur de disque (17)	75
Pe1	Chap2 / Aire des triangles et des quadrilatères (12) Chap4 / Aire des polygones (3)	15
Pe2	Chap6 / Dossier/Faire plus, situations problèmes (6) Chap6 / Zoom/Calcul d'aires de figures planes (27) Chap6 / Situations problèmes (2) Chap7 / Zoom/Mesures manquantes (8)	43
My6	Chap11 / Périmètre et aire (14)	14
My5	Chap10 / Aires et périmètres (52)	52
Tr6	Chap8 / Longueurs, aires, durées (38)	38
Tr5	Chap11 / Calculer des longueurs et des aires (60)	60

Tableau 3. Répartition dans les chapitres du nombre d'activités en lien avec l'aire en tant qu'objet dans les manuels scolaires

À partir du tableau 3, on observe que dans les manuels français, il y a un seul chapitre pour les périmètres et aires par niveau et par manuel, et l'aire est ainsi toujours étudiée avec le périmètre. Par contre au Québec, dans la collection Panoramath, il y a 3 chapitres en 2e secondaire (10, 12, 14) et dans la collection Perspective mathématique, il y a 2 sections (« dossiers ») dans deux chapitres différents en 2e secondaire et il y a deux chapitres (6 et 7) où il y a un dossier et plusieurs sous-sections des dossiers (« zoom », « situations problèmes ») en 1re secondaire. Ainsi, nous constatons que la place de l'aire en tant qu'objet est plus fragmentée dans les manuels québécois. En outre, on peut aussi remarquer que le nombre d'activités est très variable d'un territoire à l'autre et d'une collection à l'autre.

En ce qui concerne les savoirs mathématiques de manière générale, au Québec, en 1re secondaire, l'aire en tant qu'objet n'est pas abordée dans le manuel Pa1. Dans cette collection de 1re secondaire, la notion de périmètre est abordée, en 2e secondaire, les aires et en 3e secondaire, les volumes. C'est un choix éditorial qui nous semble assez cohérent avec l'absence de directives claires dans le programme québécois. Pour Pa2, ce sont les formules d'aires des figures planes (carré, rectangle, parallélogramme, triangle, losange et trapèze) et les mesures manquantes ainsi que l'aire du disque et des secteurs du disque qui sont abordés. En ce qui concerne les manuels Perspectives, dans le manuel Pe1, les savoirs sont centrés sur l'aire des triangles, des quadrilatères, des polygones et du disque. Dans le manuel Pe2, on étudie le calcul des aires de polygones de manière générale ainsi que la détermination de mesures manquantes des figures planes dont l'aire des figures planes est donnée.

En France, en 6e, le manuel My6 aborde les formules d'aires des surfaces usuelles (carré, rectangle, triangle, disque) et donne les équivalences d'unités d'aire. Le manuel Tr6 donne une définition d'aire et les formules d'aire des surfaces usuelles (carré, rectangle, triangle, disque), ainsi que les équivalences et une technique de conversion d'unités d'aire. En 5e, dans les deux manuels My5 et Tr5, les formules d'aire vues en 6e sont reprises. Le manuel My5 ajoute à celles-ci l'étude de la formule d'aire d'un parallélogramme. De plus, ce manuel propose une technique pour la conversion d'unités et le manuel Tr5 fait un rappel des équivalences existantes entre les unités d'aire du système international d'unités.

Ainsi, les manuels français et québécois proposent d'étudier les formules de calcul d'aire des mêmes figures planes. Cependant, il existe trois différences majeures entre les manuels de ces deux territoires. Premièrement, l'étude de l'aire apparaît comme plus fragmentée dans les manuels scolaires québécois où il s'agit de réaliser des va-et-vient entre les anciens et nouveaux savoirs dans différents contextes. De manière générale, le programme québécois ne met pas en avant de façon explicite ce type d'enseignement que nous pouvons qualifier de « spiralaire » (type de progression qui permet à l'élève de revenir plusieurs fois sur la même notion), toutefois il invite à faire des liens entre les connaissances et les compétences et à décloisonner les apprentissages afin d'amener les élèves à découvrir des relations pour construire des savoirs de plus en plus complexes (Ministère de l'Éducation, 2006a). Pour le cas particulier de la géométrie, il est indiqué que sa richesse « réside dans le fait qu'elle est réinvestie dans l'appropriation des concepts tant à l'intérieur qu'à l'extérieur de la discipline » (p. 260). Ces éléments pourraient expliquer les choix de la progression des savoirs proposés par les manuels de ce territoire. Dans le programme français, nous n'avons pas trouvé d'indications pour comprendre les choix des auteurs de manuels de présenter un seul chapitre sur l'aire et le périmètre. Cependant, le document d'accompagnement sur les grandeurs et mesures indique :

> Il est donc nécessaire, après les avoir introduites, de confronter les notions de périmètre et d'aire, afin de permettre aux élèves de bien les différencier, de voir à quoi elles correspondent pour une même figure et de comprendre à travers les exemples rencontrés qu'elles ne sont pas liées, mais au contraire que des figures peuvent avoir même périmètre sans que l'on puisse en déduire de liens concernant leurs aires. (Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, [MENESR], 2016b, p. 9)

Ainsi, il s'agirait donc de suivre les directives de ce document en ce qui concerne les liens entre les périmètres et les aires.

Deuxièmement, dans les manuels québécois, les auteurs proposent des activités en lien avec la détermination des mesures manquantes à l'aide de lettres représentant des inconnues – dans des situations mobilisant l'aire (MÉES, 2016). Cet aspect algébrique de l'utilisation des lettres est presque absent des manuels scolaires français étudiés. Il semblerait que ce lien entre les mesures manquantes et l'aire représente une intention institutionnelle du programme du Québec de vouloir détacher l'aire du cadre géométrique pour l'amener aux cadres numérique et algébrique. En effet, selon le programme du Québec (Ministère de l'Éducation, 2006a), « l'élève s'appuie sur des définitions et des concepts plutôt que sur le mesurage. Il met à profit des concepts et des processus liés à l'arithmétique, à l'algèbre et à la proportionnalité » (p. 260). De plus, il s'agirait d'avoir une continuité avec les contenus du primaire où les élèves font la recherche de termes manquants en s'appuyant sur les propriétés et opérations arithmétiques (Ministère de l'Éducation, 2006b). À l'opposé, dans le programme français, on ne trouve qu'une phrase en lien avec l'utilisation des lettres : « ce travail autour des formules s'inscrit dans l'introduction du calcul littéral » (MENESR, 2015, p. 375). Ainsi, les manuels scolaires québécois et français de notre étude respectent les prescriptions institutionnelles de chaque territoire.

Troisièmement, on trouve dans les manuels français des activités et des contenus en lien avec la conversion d'unités d'aire qui sont (presque) absents des manuels québécois. Si l'on regarde les savoirs prescrits par les programmes de deux territoires (cf. annexe 2), on remarque que ces contenus font partie des prescriptions françaises.

Dans le programme québécois, même si elles sont moins explicites qu'en France, elles apparaissent sous la forme « relations entre les unités d'aire du SI » dans le programme du secondaire. À notre avis, dans les manuels québécois analysés, les unités d'aire sont considérées plutôt comme un objet à enseigner au primaire où les savoirs se centrent sur les unités non conventionnelles et conventionnelles (Ministère de l'Éducation, 2006b). Or, dans ces manuels scolaires, les savoirs prescrits pour le secondaire sont ignorés. En France, les unités apparaissent comme un objet d'étude principal dans le contexte général de l'enseignement des grandeurs et mesures au primaire et au secondaire, tel qu'en témoigne la place importante que les unités usuelles ont dans les programmes et les documents d'accompagnement (MENESR, 2015, 2016a, 2016b).

4.2. La répartition des types de tâches dans les manuels scolaires

Afin d'avoir une vision globale des types de tâches (T_1 - Comparer des aires ; T_2 - Calculer des aires ; T_4 - Produire une surface d'une aire donnée ; T_6 - Changer d'unité d'aire ; T_7 - Mesurer des aires) dans les manuels scolaires québécois et français, nous présentons une comparaison de leur répartition (cf. tableau 4).

Territoire	Collection	T1	T2	T4	T6	T7
Québec	**Pa1**	0	0	0	0	0
	Pa2	4	49	0	1	0
	Pe1	4	7	2	0	0
	Pe2	2	65	3	0	0
Sous-total		*10*	*121*	*5*	*1*	*0*
France	**My6**	2	10	1	0	1
	My5	3	36	3	4	4
	Tr6	3	27	1	6	2
	Tr5	5	46	1	3	5
Sous-total		*13*	*119*	*6*	*13*	*12*

Tableau 4. Répartition des types de tâches en lien avec l'aire en tant qu'objet dans les manuels scolaires

Premièrement, dans les manuels scolaires québécois, nous avons répertorié au total 139 tâches et dans les manuels français 166 tâches en lien avec l'aire comme objet. Parmi celles-ci, la tâche « T_2 - calculer l'aire d'une surface » est majoritaire tant au Québec qu'en France dans les manuels étudiés. En effet, elle représente 87,05% des tâches au Québec et 71,68% en France.

Le deuxième type de tâches le plus présent dans les manuels scolaires québécois de l'étude est « T_1 - Comparer des aires » (7,19%), et en France, ce sont « T_1 - Comparer des aires » (7,8%), « T_6 - Changer d'unités » (7,8%) et « T_7 - Mesurer des aires » (7,2%) avec des pourcentages semblables. Cependant, ces résultats sont faibles comparativement à T_2. Ainsi, on peut dire que les autres types de tâches sont presque absents des manuels scolaires. En plus, la présence minime d'autres types de tâches tels que « T_8 - Déduire la formule d'aire d'une surface » ou « T_9 - Estimer l'aire d'une surface », nous révèle aussi une emphase sur les aspects numériques de l'aire dans les manuels scolaires. Est-ce que cette grande concentration sur l'approche numérique de l'aire pourrait s'expliquer par les prescriptions ministérielles ?

Au Québec, dans la « Progression des apprentissages au secondaire » (MÉES, 2016)[5], les types de tâches mis en avant sont le calcul des aires et la recherche des mesures manquantes (cf. annexe 3). Au primaire, le travail sur l'aire se centre sur l'estimation et la mesure des aires (Ministère de l'Éducation, 2006b), sans référence explicite à l'utilisation de formules. L'enseignement de l'aire chercherait ainsi à amener les élèves de la mesure (primaire) à l'algèbre (secondaire). De plus, l'absence de types de tâches de nature géométrique comme la comparaison (T_1) et la production des figures (T_4) dans les programmes ferait en sorte que l'enseignement véhiculé par les manuels scolaires québécois soit davantage numérique.

Dans le cas français, les programmes indiquent qu'on doit étudier des tâches en lien avec la comparaison (T_1), la mesure (T_7) et les calculs des aires (T_2) afin de poursuivre le travail commencé au primaire. Dans ce sens, les manuels français respectent d'une certaine manière les programmes scolaires, puisqu'ils proposent ces types de tâches, même s'ils ne sont présents qu'en petite proportion. De plus, d'autres types de tâches comme estimer la mesure (T_9) et étudier les effets de déformations et transformations (T_3) sont presque absents dans les manuels, alors qu'ils sont prescrits par le programme français.

En outre, comme nous l'avons montré dans la partie 4.1., dans les manuels québécois du secondaire, on n'aborde que très peu les unités. De plus, les types de tâches concernant les changements d'unités (T_6) et la mesure des aires (T_7) sont absents. L'étude des unités ne serait donc qu'un sujet abordé au primaire, contrairement à la France, où comme nous l'avions fait remarquer, elles prennent une place très importante dans l'étude des grandeurs et mesures. Les manuels scolaires français respectent ainsi avec les prescriptions institutionnelles en proposant un certain nombre de tâches en lien avec les unités.

[5] Au Québec, le document « Progression des apprentissages » est un document qui constitue un complément à chaque programme disciplinaire.

5. Résultats : les organisations mathématiques relatives à l'aire

Nous venons de montrer la place dominante qu'occupe « T_2 - Calculer des aires » dans les manuels scolaires du secondaire au détriment d'autres types de tâches. Toutefois, certains travaux indiquent que la comparaison des aires (Douady & Perrin-Glorian, 1989 ; De Araújo & Dos Santos, 2009) est un type de tâches fondamental et préliminaire pour la compréhension de la notion d'aire et des formules. Il permet de conceptualiser l'aire en tenant compte de la dynamique grandeur-nombre-objet inhérente au concept d'aire (Douady & Perrin-Glorian, 1989). D'autre part, plusieurs recherches ont souligné l'importance des unités pour conceptualiser l'aire et la complexité pour les élèves de comprendre les liens entre celles-ci et les formules d'aire (Zacharos, 2006). Compte tenu de nos premiers résultats et de la littérature scientifique, nous avons décidé de nous concentrer sur ces deux aspects en analysant les savoirs mathématiques en lien avec les types de tâches « T_1 - Comparer des aires » et « T_6 - Changer d'unités d'aire » dans les manuels québécois et français malgré leurs faibles occurrences.

5.1. L'aire, la surface et le nombre. L'exemple du type de tâches « T_1 - Comparer des aires »

5.1.1 La place et le rôle de T1 selon l'organisation didactique des manuels

Dans les manuels scolaires québécois, la place et le rôle de T_1 sont très différents selon les collections. Dans la collection Panoramath (Pa1 et Pa2), T_1 apparaît seulement en 2e secondaire et dans la partie dédiée aux exercices, après l'institutionnalisation des savoirs comme la définition d'aire, les unités d'aire et les formules d'aires. Par contre, dans la collection Perspective en 1re secondaire (Pe1), T_1 apparaît dans deux activités d'introduction et puis on institutionnalise les savoirs en lien avec les formules d'aire (parallélogramme, triangle, trapèze et cerf-volant). Finalement, deux situations d'application sont proposées. Ainsi, dans la collection Panoramath, il s'agirait plutôt d'utiliser les savoirs relatifs à la définition d'aire et les formules pour réaliser les tâches du type T_1 et dans la collection Perspective, le rôle de T_1 est de préparer le terrain pour la formalisation des formules.

Dans les manuels français, la situation est différente. La structure du manuel Tr6 est semblable à celle de la collection québécoise Panoramath. Au contraire, dans Tr5, trois activités sont dédiées à la déduction ou justification des formules d'aire et à la démonstration mettant en jeu les aires. Dans les manuels de la collection Myriade, My6 et My5, T_1 est aussi en lien avec la déduction et justification des formules qui sont ensuite formalisées et avec le travail sur l'utilisation des formules.

De cette façon, nous avons distingué quatre rôles pour T_1 dans les manuels scolaires ; il sert à : construire un bloc technologique théorique pour établir les formules d'aire, conceptualiser l'aire et ses propriétés, travailler la technique d'utilisation de formules d'aire et prouver une propriété.

5.1.2 Les techniques et technologies relatives à T_1

Le tableau 5 présente le nombre de tâches et leurs techniques selon le rôle de T_1 dans les manuels scolaires. Ces techniques ont été définies après une analyse *a priori* des tâches et selon les contenus exposés par les manuels scolaires.

Territoire	**Québec**			**France**			
Manuel	Pa2	Pe1	Pe2	My6	My5	Tr6	Tr5
Rôle	**Nombre de tâches (techniques)**						
Conceptualiser aire	2(τ_{DU}, τ_{CIS})			1(τ_{DU})		3(τ_{DU}; τ_{CDR})	1(τ_{DU})
Construire bloc [$\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\Phi}$] pour formules		2(τ_{DU}; τ_{CDR}; τ_{CF}.		1(τ_{CF}; τ_{CIS})	2(τ_{CDR}; τ_{CF})		1(τ_{DU}; τ_{CDR})
Travail $\boldsymbol{\tau}_{CF}$	2(τ_{CF})	2(τ_{CF})	2(τ_{CF})		1(τ_{CF})		1(τ_{CF})
Prouver une propriété[6]							2(τ_{CF}) (algèbre)

Tableau 5. Répartition du nombre de tâches et de leurs techniques selon le rôle de T_1 dans les manuels scolaires

T_1 comme type de tâches pour conceptualiser la notion d'aire

Dans le tableau 5, on observe que sept tâches au total du type T_1 sont proposées par les manuels scolaires québécois (Pa2) et français (My6, Tr6 et Tr5) relativement à la définition d'aire et de ses propriétés. Plus particulièrement, dans toutes les tâches répertoriées dans les manuels scolaires, le concept d'aire est lié à celui d'unité, qui à la fois est associée à l'ostensif « □ » ou représentée par un quadrillage. De façon générale, il s'agit de dénombrer des unités ($\boldsymbol{\tau_{DU}}$) qui se justifient à l'aide de l'élément technologique : « l'aire d'une surface est égale au nombre d'unités carrées qui la composent ». Prenons, par exemple, l'exercice 9 de la figure 1.

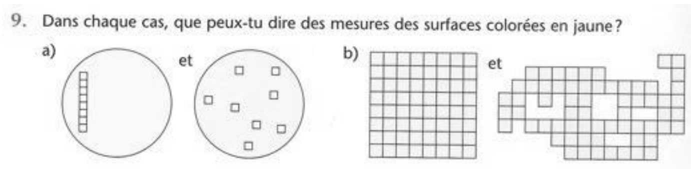


Figure 1. Extrait du manuel Pa2, p. 57

[6] Comme seulement 2 tâches concernent cet item, il ne sera pas traité dans les analyses.

Tout d'abord, on remarque l'utilisation de « mesures des surfaces » au lieu des « aires ». Pourtant, l'aire avait déjà été définie dans le manuel comme « la mesure de la surface ». Peut-être, il s'agit de maintenir le lien avec les apprentissages du primaire ou de faire référence plus tard à l'étude des mesures manquantes.

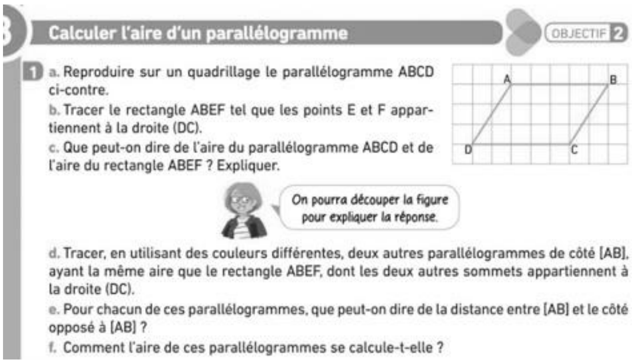
En ce qui concerne les techniques, dans le premier cas (item a, figure 1), les élèves peuvent observer qu'il s'agit de deux disques isométriques dans lesquels on a découpé 8 carreaux (□) de même taille en les dénombrant ($\boldsymbol{\tau_{DU}}$). Pour arriver à la conclusion que les aires sont équivalentes, ils devraient s'appuyer sur l'élément technologique qui établit que « les aires de deux surfaces isométriques sont équivalentes » ($\boldsymbol{\tau_{CIS}}$). De plus, ils devraient comprendre que la forme ne modifie pas l'aire (8 carreaux en ligne droite ou 8 carreaux dispersés) et que « si l'on enlève deux surfaces de même aire à deux autres surfaces de même aire, les aires des surfaces obtenues sont toujours équivalentes ».

Dans le deuxième cas (item b, figure 1), l'ostensif associé à l'unité est aussi un « □ », la technique à utiliser est aussi $\boldsymbol{\tau_{DU}}$, pouvant être justifiée par la technologie qui indique que « l'aire d'une surface est égale au nombre d'unités carrées qui la composent ». Il s'agit donc de mettre en avant une conceptualisation de l'aire liée au dénombrement plutôt que comme produit de deux dimensions.

T_1 comme type de tâches pour la construction d'un bloc théorique technologique ($[\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\Phi}]$) autour des formules d'aire.

Au total, les manuels analysés proposent six tâches du type T_1 qui amènent les élèves à déduire les formules d'aire et faire des liens entre les aires de différentes surfaces (p. ex. l'aire d'un triangle rectangle et l'aire d'un rectangle). Cependant, les technologies (p. ex. propriété d'invariance par isométrie) déployées dans ces processus ne sont pas exposées dans les manuels scolaires. Parmi les tâches, quatre sont présentées à l'aide d'un quadrillage (Pe1, Tr5, My5), une à l'aide des mesures des côtés des surfaces (My6) et une sans quadrillage ni mesures explicites où les élèves doivent mesurer les longueurs à l'aide des instruments (Pe1). De plus, cinq tâches demandent explicitement aux élèves de déduire la formule de l'aire de la surface étudiée. En outre, les surfaces étudiées sont très différentes. Il s'agit du triangle, losange, cerf-volant, trapèze et parallélogramme dans le manuel québécois Pe1, du losange dans le manuel Tr5, du triangle dans My6 et du parallélogramme dans My5.

Par rapport aux techniques, comme la plupart des tâches sont présentées à l'aide d'un quadrillage, les élèves vont s'appuyer sur le dénombrement d'unités ($\boldsymbol{\tau_{DU}}$). De plus, les manuels Tr5 et My5 suggèrent la procédure de découpage-recollement dans les activités ($\boldsymbol{\tau_{CDR}}$). Finalement, pour déduire la formule de l'aire de la surface en jeu, il est nécessaire d'utiliser des formules d'aire d'autres surfaces ($\boldsymbol{\tau_{CF}}$). La question c de la figure 2 représente un bon exemple d'activité du type T_1 proposée par les manuels scolaires.



Calculer l'aire d'un parallélogramme

OBJECTIF 2

1 a. Reproduire sur un quadrillage le parallélogramme ABCD ci-contre.

b. Tracer le rectangle ABEF tel que les points E et F appartiennent à la droite (DC).

c. Que peut-on dire de l'aire du parallélogramme ABCD et de l'aire du rectangle ABEF ? Expliquer.

On pourra découper la figure pour expliquer la réponse.

d. Tracer, en utilisant des couleurs différentes, deux autres parallélogrammes de côté [AB], ayant la même aire que le rectangle ABEF, dont les deux autres sommets appartiennent à la droite (DC).

e. Pour chacun de ces parallélogrammes, que peut-on dire de la distance entre [AB] et le côté opposé à [AB] ?

f. Comment l'aire de ces parallélogrammes se calcule-t-elle ?

Figure 2. Extrait du manuel My5, p. 223

Après avoir reproduit le parallélogramme ABCD sur un quadrillage (item a), les élèves doivent tracer le rectangle ABEF tel que les points E et F appartiennent à la droite (DC). Ainsi, ils peuvent observer que les triangles AED et BFC sont isométriques en les comparant par découpage-recollement ($\tau_{\boldsymbol{CDR}}$) ou à l'aide des propriétés des figures isométriques. Ils doivent donc en déduire que l'aire du parallélogramme est égale à celle du rectangle. À l'aide des items d, e et f, les élèves sont amenés à déduire la formule d'aire du parallélogramme.

T_1 comme type de tâches pour travailler la technique d'application d'une formule d'aire ($\boldsymbol{\tau_{CF}}$)

Au total, huit tâches du type T_1 sont proposées par les manuels scolaires et nécessitent l'application des formules d'aire. Cependant, ce type de tâche est plus fréquent dans les manuels québécois que dans les manuels français (cf. tableau 5). De plus, le type d'exercice proposé n'est pas de même nature dans les manuels des deux territoires. Au Québec, il s'agit plutôt de « situations d'application » et en France d'exercices d'application directe. Par exemple, la figure 3 montre un problème du manuel québécois Pr1.

Dans l'item c) de la figure 3, les élèves doivent comparer les aires des triangles afin de déterminer l'aire la plus grande. Comme il est indiqué qu'il faut réaliser « des calculs », les élèves doivent obtenir les mesures des côtés des bases et des hauteurs des triangles en mesurant avec la règle. Ensuite, ils pourront utiliser ces mesures pour calculer les aires des triangles à l'aide de la formule ($\boldsymbol{\tau_{CF}}$) et les comparer de façon numérique.

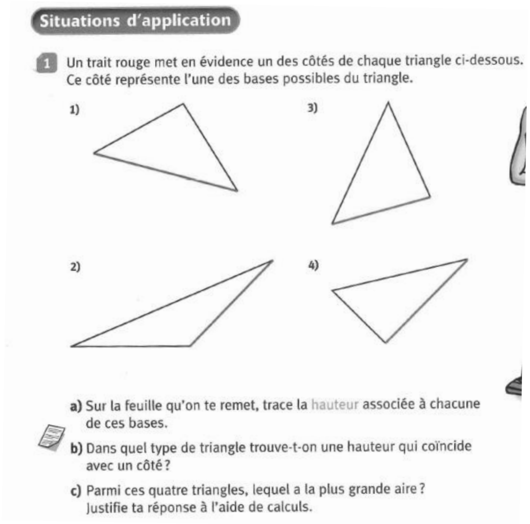


Figure 3. Extrait du manuel Pr1

Dans le cas des deux tâches des manuels français, il est demandé aux élèves d'appliquer directement les formules dans des tâches non contextualisées. Par exemple, dans le manuel My5, il s'agit de « trouver la plus grande aire entre un carré de côté 5 m et un cercle de rayon 3 m ». Ainsi, les élèves peuvent appliquer les formules d'aire à chaque surface ($\boldsymbol{\tau_{CF}}$) et les comparer numériquement.

Comme toutes les tâches sont proposées sous forme de problèmes ou exercices d'application après la présentation des contenus liés aux formules dans les manuels des deux territoires, nous pouvons affirmer qu'il s'agit plutôt d'un travail des techniques liées aux formules que d'un objectif visant la conceptualisation de la notion d'aire.

5.2. Les unités. L'institutionnalisation du type de tâches « T_6 - changer d'unités d'aire »

Comme nous l'avons vu, le type de tâches T_6 est presque absent des manuels québécois, alors qu'il est présent dans toutes les collections françaises. En ce qui concerne les seize tâches proposées dans les manuels français et québécois, elles apparaissent après l'institutionnalisation de techniques sur les conversions d'unités. En plus, nous pouvons qualifier ces tâches de même nature puisqu'il s'agit, la plupart du temps, de faire des conversions d'unités du système international sans contexte (un exemple est présenté à la figure 4). Parfois, ce type de tâche apparaît comme nécessaire pour pouvoir comparer les mesures des aires exprimées en unités différentes.

42 Convertir en m².

a. 54 dm²	**b.** 75 cm²	**c.** 250 dam²
d. 0,25 km²	**e.** 7 hm²	**f.** 2 750 mm²

Figure 4. Extrait du manuel Tr6, p. 136

Les techniques exposées dans les manuels scolaires pour traiter le type de tâches T_6 sont aussi assez semblables, sauf pour le manuel My5. En effet, dans les trois manuels (Pa2, Tr6, Tr5), les éléments technologiques s'appuient sur les équivalences entre les unités et proposent à l'élève de réaliser des multiplications ou divisions par 100 ($\boldsymbol{\tau_{UX}}$). Dans le cas du manuel My5, ils proposent d'utiliser le tableau de conversion d'unités d'aire à doubles colonnes ($\boldsymbol{\tau_{UC}}$).

Par exemple, dans le manuel Pa2, on institutionnalise, tout d'abord, les équivalences entre l'unité m² et les autres unités selon le système international d'unités (p. ex. 1 km² = 1 000 000 m²). Ensuite, on indique que la valeur des unités est 100 fois plus grande que la valeur à droite et 100 fois plus petite que la valeur à gauche à l'aide d'un schéma ($\boldsymbol{\tau_{UX}}$) sans autre justification (cf. figure 5). Dans ce cas, ce sont les nombres qui expriment les mesures qui seront multipliés.

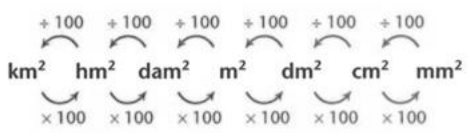


Figure 5. Extrait du manuel Pa2, p. 173

Par la suite, on expose des exemples pour la conversion des unités en s'appuyant sur les équivalences. Par exemple, il est écrit : « 12 m² = 1200 dm², car il y a 100 dm² dans 1 m² ».

Dans la partie dédiée à l'institutionnalisation des savoirs, du manuel Tr6, on commence par donner l'équivalence entre les unités m² et dm² (1 m² = 100 dm²) à l'aide d'un carré de 1 m² de côté composé de 100 petits carrés 1 dm² d'aire. Ensuite, on présente un schéma ressemblant à celui de la figure 5. Cependant, la division par 100 n'est pas représentée et on ne trouve que la multiplication par 100 vers la gauche.

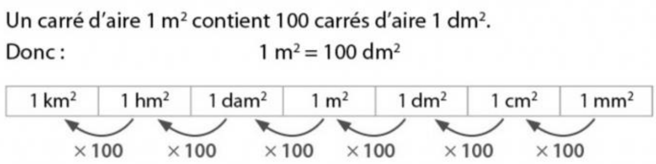


Figure 6. Extrait du manuel Tr6

Dans ce schéma (figure 6), il faut comprendre que si on a 1 dm^2 et on le multiplie par 100, on obtient 100 dm^2 qui est égal à 1 m^2. En dépit des ressemblances, le schéma de la figure 6 est différent de celui de la figure 5, où l'objectif de ce dernier est d'exposer l'idée que si on convertit des dm^2 en m^2, il est nécessaire de diviser le nombre qui exprime la mesure par 100. Ainsi, dans la figure 5, on met l'accent sur les opérations en multipliant sur les nombres et dans la figure 6 sur les équivalences en opérant sur les mesures avec les unités. Ces différents choix d'ostensifs ne sont pas anodins, ils peuvent avoir des conséquences importantes sur les praxéologies mathématiques. Comme Bosch et Chevallard (1999) le disent : « […] le simple remplacement d'un ostensif par un autre, sans modification apparente de la praxéologie initiale qui l'intégrait, [peut] bouleverser complètement l'évolution de l'activité, aussi bien au niveau technique que sur le plan des technologies et des théories justificatives, voire des types de tâches mêmes » (p. 28).

Dans le manuel Tr5, on utilise la même représentation que Tr6, mais sans les flèches et on explique que chaque unité est 100 fois plus grande que celle à droite ($\boldsymbol{\tau_{UX}}$). De plus, on expose les équivalences entre plusieurs unités (p. ex. 1 km^2=100 hm^2).

Ainsi, tous ces manuels scolaires proposent la même technique ($\boldsymbol{\tau_{UX}}$) en s'appuyant sur des ostensifs très semblables, mais qui n'ont pas le même sens mathématique. De plus, le lien entre les opérations à réaliser et les équivalences n'est pas explicité. De notre point de vue, il existe un effort de la part des auteurs des manuels scolaires de mettre en avant les équivalences pour les conversions d'unités et donc de donner du sens aux techniques, cependant les schémas exposés sont encore attachés au tableau de conversion (en mettant de l'avant la multiplication ou division par 100) et peuvent devenir des calculs automatisés sans que les élèves puissent en comprendre le sens.

D'autre part, dans le manuel My5, on explique qu'on doit utiliser un tableau de conversion d'unités d'aire ($\boldsymbol{\tau_{UC}}$) et on donne un exemple sur comment placer les valeurs de mesures d'aire sur le tableau. Cependant, les auteurs du manuel n'expliquent pas comment se servir du tableau et ne donnent aucun exemple. On pourrait penser qu'ici on fait un rappel des conversions d'unités, mais ce contenu n'a pas été exposé dans le manuel de 6^e de la même collection.

6. Discussion et conclusion

Depuis des années, plusieurs recherches montrent un faible apprentissage de l'aire chez les élèves dans de nombreux pays (Battista, 2004 ; De Araújo & Dos Santos, 2009 ; Zacharos, 2006). Malgré cela, les facteurs responsables restent flous, ce qui rend difficile de savoir où concentrer les efforts d'intervention (Smith et al., 2016). À cet égard, de récentes études ont révélé les limites conceptuelles dans les savoirs véhiculés par les manuels scolaires de plusieurs pays à propos de la notion d'aire (De Carvalho, 2013 ; Hong et al., 2018 ; Santos & Câmara dos Santos, 2015 ; Smith et al., 2016). Dans notre cas, nous avons voulu continuer cette ligne de recherche en proposant une étude comparative de manuels scolaires français et québécois sur la notion d'aire.

Premièrement, à propos de la place et du rôle de l'aire dans les manuels scolaires, notre étude révèle, d'une part, que la place de l'aire en tant qu'objet est plus fragmentée dans les manuels québécois que dans les manuels français. D'autre part, par rapport aux contenus, pour les deux territoires, les surfaces étudiées sont sensiblement les mêmes (carré, rectangle, parallélogramme, trapèze, triangle, losange, disque). Toutefois, les manuels québécois se centrent davantage sur le calcul des mesures manquantes dans des situations d'aire à l'aide de lettres, tâches qui sont absentes des manuels français. À l'opposé, dans les manuels français, on aborde la conversion d'unités, quand ce type de tâches est presque absent au Québec. Ces différences peuvent s'expliquer par les directives des programmes dans les deux territoires qui présentent des approches différentes pour l'enseignement de l'aire. Ainsi, notre étude comparative a mis en évidence le fait que les manuels scolaires véhiculent des savoirs différents à propos de l'aire à cause des prescriptions institutionnelles de programmes scolaires.

Deuxièmement, en lien avec l'objectif 2, nous avons étudié la répartition des types de tâches dans les collections de deux territoires (cf. tableau 4) et leurs organisations mathématiques correspondantes (cf. section 5). Nos résultats révèlent la place dominante de « T_2 - calculer l'aire » par rapport aux autres types de tâches. En général, dans les manuels analysés, l'enseignement de l'aire est plutôt en lien avec son calcul, l'utilisation et la mémorisation des formules. Pourtant, des recherches (Douady & Perrin-Glorian, 1989) ont montré depuis plusieurs années que les difficultés observées autour du concept d'aire sont liées à l'introduction précoce d'une approche numérique par l'utilisation de formules, sans tenir compte de l'approche géométrique. Est-ce que cette approche géométrique est plutôt associée aux contenus du primaire ? Si nous nous basons sur des travaux internationaux (Daina, 2013 ; Hong et al., 2018 ; Smith et al., 2016), la même problématique existe au primaire dans plusieurs pays. Au Québec, le programme du primaire met l'accent sur la mesure en négligeant les aspects géométriques, alors qu'en France, au contraire, le travail sur l'aire sans faire appel à la mesure et aux nombres prend une place très importante au primaire. Ainsi, nous pouvons faire l'hypothèse qu'au Québec, les élèves expérimentent rarement des situations d'apprentissage non numériques tout au long de leur scolarité. Ce qui leur donne peu d'outils nécessaires à la compréhension de l'aire, des unités et des formules. En France, il est important de réaliser d'autres études sur les manuels scolaires du primaire pour établir si les directives institutionnelles sont respectées.

Dans le même sens, plusieurs travaux ont signalé l'importance d'un travail géométrique sur la notion d'aire pour la conceptualiser (Douady & Perrin-Glorian, 1989 ; Outhred & Mitchelmore, 1996). Il s'agit de proposer aux élèves des problèmes géométriques sur la conservation d'aire, par exemple, des problèmes de comparaison. Ce type de tâches soutient la construction de la notion d'aire comme objet mental (Marmolejo & Gonzalez, 2015) où la technique du découpage-recollement prend une place essentielle dans l'intégration de la conservation d'aire par les élèves (Kordaki, 2003). Cependant, nous avons constaté que les manuels scolaires du secondaire étudiés offrent de rares occasions pour travailler ce type de tâches et cette technique (cf. tableau 5). En particulier, « T_1 - comparer des aires » est traité dans la majorité des manuels scolaires, mais le nombre de tâches du type T_1 est très réduit (cf. tableau 4) en étant limité au travail numérique/algébrique sur les formules. Ceci aurait plusieurs conséquences sur les apprentissages des élèves, surtout que plusieurs travaux montrent que les difficultés des élèves qui se manifestent au primaire persistent au secondaire (Kospentaris, Spirou & Lappas, 2011, dans Marmolejo & Gonzalez, 2015). Par exemple, si au primaire, les élèves ont des difficultés à accepter que deux surfaces différentes puissent avoir la même aire ou à comprendre l'aire comme la somme des aires des surfaces qui la composent, ceci peut entraîner des obstacles à l'apprentissage conceptuel des formules d'aire au secondaire.

D'autre part, même si l'enseignement de la mesure et des unités d'aire fait plutôt partie des contenus étudiés au primaire dans les deux territoires, nous considérons qu'un travail important devrait se poursuivre au secondaire puisque d'un côté, il y a de nombreuses recherches qui les identifient comme un enjeu essentiel pour l'apprentissage des aires (Battista, 2004 ; Chevallard & Bosch, 2001), et d'un autre côté, il y a la complexité du processus de mesure (Kordaki, 2003). Cependant, en ce qui concerne les types de tâches traitant directement les unités, comme « T_6 - changer d'unités de mesure » et « T_7 - mesurer des aires », nos résultats montrent qu'ils sont presque absents des manuels québécois. De plus, même s'il existe un nombre plus élevé des tâches de type T_6 (cf. tableau 4) dans les manuels français étudiés, les organisations mathématiques autour de T_6 sont très semblables (exercices du même type, une seule technique de conversion par manuel) en donnant des contextes d'apprentissage très pauvres en diversité. Effectivement, le type de tâches concernant les conversions d'unités est traité discrètement et de manière assez uniforme dans les manuels français où il s'agit, en général, de présenter les équivalences entre les unités et de multiplier ou de diviser pour faire les changements d'unités. Après la réforme des mathématiques modernes en 1970, plusieurs travaux ont signalé l'utilisation du tableau de conversion comme une technique axée sur les calculs qui ne permettait pas de conceptualiser adéquatement les unités. Cette idée a été transposée dans les programmes français et québécois. En effet, les documents d'accompagnement français mettent en garde contre l'utilisation mécanique des tableaux de conversion et les programmes québécois prescrivent d'établir des relations entre les unités. Ainsi, nos résultats montrent la mise en avant des techniques s'appuyant sur les équivalences dans les manuels scolaires. Cependant, le traditionnel tableau de conversion a laissé des traces dans les ostensifs représentant ces techniques. Selon Chevallard et Bosch (2001), c'est une technologie adéquate qui justifie une technique simple, fiable, intelligible des changements d'unités qui fait défaut à l'école.

Somme toute, bien qu'il existe des différences entre les manuels scolaires français et québécois étudiés, les activités proposées mettent fortement de l'avant des types de tâches numériques, spécialement le calcul d'aires à l'aide des formules. Des organisations mathématiques mettant en valeur l'aire en tant que grandeur ou les surfaces ont été presque ignorées. De plus, comme les travaux de De Araújo et Dos Santos (2009) l'ont déjà montré, dans les manuels, on n'explique pas suffisamment les savoirs permettant aux élèves de conceptualiser la notion d'aire, de comprendre la mesure et les unités et de donner du sens aux formules et la plupart des techniques et technologies pertinentes pour étudier ces concepts apparaissent généralement dans les exercices d'application. En conséquence, nous pensons que les savoirs mathématiques véhiculés par les manuels scolaires français et québécois étudiés entretiennent probablement les difficultés des élèves du secondaire en lien avec la notion d'aire. Cette hypothèse concorde avec plusieurs études réalisées au primaire (Hong et al., 2018 ; Smith et al., 2016). Avec ces résultats, nous venons donc enrichir les recherches traitant la notion d'aire dans les manuels scolaires de différents pays, celles-ci en étant signalées comme fondamentales par les travaux portant sur l'enseignement et l'apprentissage de cet objet (Smith et al., 2016). Surtout, notre MPR nous a permis d'analyser le traitement de la notion d'aire dans les manuels scolaires et de montrer les limites de ces documents, ce qui, selon Fan (2013), est l'objectif le plus important pour la recherche sur les manuels scolaires.

Bien que plusieurs résultats intéressants soient ressortis de cette recherche, nous ne pouvons pas ignorer les limites de notre étude. Premièrement, l'une de ces limites est la représentativité des manuels analysés pour chaque territoire. Même s'il existe des similitudes entre les manuels scolaires, il existe aussi des différences au niveau des territoires, des niveaux scolaires et des collections. Ainsi, il est primordial d'examiner à une plus grande échelle les manuels scolaires pour pouvoir élargir les premiers résultats de cette recherche. Deuxièmement, il est important de rappeler que les analyses des programmes et des manuels scolaires ne peuvent pas remplacer les études sur la manière dont elles sont mises en pratique par les enseignantes et enseignants et sur l'apprentissage des élèves dans ce contexte (voir par exemple les travaux de Margolinas & Wozniak, 2009). En effet, cette recherche est associée à un regard de la transposition didactique externe sans considérer la manière dont les enseignantes et enseignants traitent les savoirs mathématiques présents dans les manuels scolaires. D'autre part, comme l'indiquent Smith et al. (2016), bien que nous ayons réalisé des analyses des tâches, il est difficile de savoir si elles représentent de réelles difficultés pour les élèves et quels sont les apprentissages pouvant ressortir d'un tel enseignement. Bref, d'autres recherches sur l'utilisation par les enseignants et les enseignantes des manuels scolaires et les effets de ces derniers sur l'apprentissage des élèves sont aussi nécessaires.

Références

ANWANDTER CUELLAR, N. S. (2012). *Place et rôle des grandeurs dans la construction des domaines mathématiques numérique, fonctions et géométrie et de leurs interrelations dans l'enseignement au collège*. Thèse de doctorat. Université Montpellier 2, Montpellier.

ANWANDTER CUELLAR, N. S. (2016). Conditions et contraintes relatives à l'enseignement des grandeurs au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **36(3),** 307-345.

ANWANDTER CUELLAR, N. S. (2017). Les grandeurs et les mesures: un problème de la profession d'enseignant des mathématiques. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática,* **10(1)**, 50-59.

ASSUDE, T., & MARGOLINAS, C. (2005). Aperçu sur les rôles des manuels dans les recherches en didactique des mathématiques. In E. Bruillard (Ed.), *Manuels scolaires, regards croisés* (pp. 231-241). Caen : CRDP Basse-Normandie.

BATTISTA, M. (2004). Applying cognition-based assessment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning*, **6(2)**, 185-204.

BOSCH, M., & CHEVALLARD, Y. (1999). Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **19(1)**, 77-124.

BOSCH, M., & GASCÓN, J. (2004). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. *Boletín del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, **16**. Repéré dans http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/welcome.htm

BOSCH, M., & GASCÓN, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 67-83). New York : Springer.

BRONNER, A. (2007). *La question du numérique : le numérique en question ?* Habilitation à diriger des recherches. Université Montpellier 2, Montpellier.

BROUSSEAU, G. (2002). Les grandeurs dans la scolarité obligatoire. In J.-L. Dorier et al. (Eds.), *Actes de la XIe Ecole d'été de didactique des mathématiques*, *Corps, 21-30 Août 2001*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHAACHOUA, H., & BITTAR, M. (2019). La théorie anthropologique du didactique : paradigme, avancées et perspectives. *Caminhos da Educação Matemática em Revista/Online*, **9(1),** 29-43.

CHAACHOUA, H., & COMITI, C. (2010). L'analyse du rôle des manuels scolaires dans l'approche anthropologique. In A. Bronner et al. (Eds.), *Actes du deuxième Colloque de la Théorie Anthropologique du Didactique*. Uzès : IUFM de Montpellier.

CHAMBRIS, C. (2010). Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **30(3)**, 317-366.

CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **12(1)**, 83-121.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19(2)**, 221-265.

CHEVALLARD, Y., & BOSCH, M. (2001). Les grandeurs mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x*, **55**, 5-32.

DAINA, A. (2013). *Utilisation des ressources : de la préparation d'une séquence à sa réalisation dans la classe de mathématiques / cinq études de cas sur la notion d'aire dans l'enseignement primaire genevois*. Thèse de doctorat. Université de Genève, Suisse.

DE ARAÚJO, A.J., & DOS SANTOS, M.C. (2009). Avaliação Externa do Projovem: o caso de áreas e volumes. *Boletim de Educação Matemática*, **22(33)**, 23-49.

DE CARVALHO, D.G. (2013, junio). Analise praxeologica da área de figuras geométricas planas no guía de estudo do Projevem Urbano. Dans Actes du IX Encontro Nacional de Educação Matemática du 18 au 21 juillet 2013, Curitiba, Brésil.
http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/2434_1940_ID.pdf

DOUADY, R. (1984). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7(2),** 5-32.

DOUADY, R., & PERRIN-GLORIAN, M. J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, **20**, 387-424.

FAN, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM* , **45,** 765–777.

FORTIN, M. F. (2010). *Fondements et étapes du processus de recherche.* Montréal : Chenelière Éducation.

GUEUDET, G., PEPIN, B., & TROUCHE, L. (2015). Manuels scolaires et ressources numériques : vers de nouvelles conceptualisations. *Revista de Educaçao Matematica e Tecnologica Iberoamericana,* **6(3)**, 1-23.

HONG, D.S., CHOI, K.M., RUNNALLS, C., & HWANG, J. (2018). Do textbooks address known learning challenges in area measurement? A comparative analysis. *Mathematics Education Research Journal*, **30(3)**, 325-354.

KORDAKI, M. (2003). The effect of tools of a computer microworld on students' strategies regarding concept of conservation of area. *Educational Studies in Mathematics*, **52(2)**, 177-209.

MARGOLINAS, C., & WOZNIAK, F. (2009). Usage des manuels dans le travail de l'enseignant : l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. *Revue des Sciences de l'Éducation,* **352**, 59-82.

MARMOLEJO, G. A. (2014). *Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles.* Thèse de doctorat, Universidad de Salamanca, Espagne. https://gredos.usal.es/bitstream/handle/10366/125728/DDMCE_MarmolejoAveniaGA_Desarrollodelavisualizaci%c3%b3n.pdf?sequence=1&isAllowed=y

MARMOLEJO, G. A., & GONZÁLEZ, M. (2015). El área de superficies planas en el campo de la educación matemática. Estado de la cuestión. *Revista Electrónica de Investigación en Ciencias,* **10(1)**, 45-57.

MOREIRA-BALTAR, P. (1995). Etude des situations autour du concept d'aire de surface planes. In D. Grenier (Ed.), *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaires 1994-1995* (pp. 189-218). Grenoble : Université Joseph Fourier.

MOREIRA-BALTAR, P. (1997). À propos de l'apprentissage du concept d'aire, *Petit x*, **43**, 43-68.

MOREIRA-BALTAR, P. (1999). Une étude de situations et d'invariants : outil pour l'analyse de la construction du concept d'aire au collège, *Petit x*, **49**, 45-78.

OUTHRED, L., & MITCHELMORE, M. (1996). Children's intuitive understanding of area measurement. In L. Puig et A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20*

Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education, PME 20 (Vol 4, pp. 91-98). Valencia, España : Universidad de Valencia.

PERRIN-GLORIAN, M.J. (1990). L'aire et la mesure. *Petit x*, **24**, 5-36.

PERRIN-GLORIAN, M.J. (1999). *Le problème de l'enseignement des mesures des grandeurs géométriques à partir de l'exemple des aires*. Retrouvé dans https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01385025/document.

PRESSIAT, A. (2009). La place des grandeurs dans la construction des mathématiques, *Bulletin de l'APMEP*, **483**, 467-500.

REMILLARD, J. T., HARRIS, B., & AGODINI, R. (2014). The influence of curriculum material design on opportunities for student learning. *ZDM*, **46(5)**, 735-749.

ROUCHE, N. (1992). *Le sens de la mesure : des grandeurs aux nombres rationnels*. Bruxelles : Didier-Hatier.

SANTOS, M.R. & CÂMARA DOS SANTOS, M. (2015). O conceito de área de figuras geométricas planas no livro didático de matemática do 6º ano do ensino fundamental: um olhar sob a ótica da teoria antropológica do didático. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, **6(2)**, 1-22.

SMITH, J. P., MALES, L. M., & GONULATES, F. (2016). Conceptual limitations in curricular presentations of area measurement: one Nation's challenges. *Mathematical Thinking and Learning*, **18(4)**, 239-270.

ZACHAROS, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *Journal of Mathematical Behavior*, **25(3)**, 224-239.

Programmes et manuels scolaires

BOUILLIS, M., ET AL. (2016). *Myriade 6^e^. Manuel de l'élève.* Paris : Bordas.

BOUILLIS, M., ET AL. (2016). *Myriade 5^e^. Manuel de l'élève.* Paris : Bordas.

CADIEUX, R., GENDRON, I., & LEDOUX, A. (2005a). *Panoramath. Mathématique : 1^er^ cycle du secondaire. Manuel de l'élève. Volume 1 : 1^re^ année du 1^er^ cycle.* Anjou, QC : CEC.

CADIEUX, R., GENDRON, I., & LEDOUX, A. (2005b). *Panoramath. Mathématique : 1^er^ cycle du secondaire. Manuel de l'élève. Volume 2 : 1^re^ année du 1^er^ cycle.* Anjou, QC : CEC.

CADIEUX, R., GENDRON, I., & LEDOUX, A. (2006a). *Panoramath. Mathématique : 1^er^ cycle du secondaire. Manuel de l'élève. Volume 3 : 2^e^ année du 1^er^ cycle.* Anjou, QC : CEC.

CADIEUX, R., GENDRON, I., & LEDOUX, A. (2006b). *Panoramath. Mathématique : 1er cycle du secondaire. Manuel de l'élève. Volume 4. 2e année du 1er cycle*. Anjou, QC : CEC.

GUAY, S., HAMEL, J.-C., & LEMAY, S. (2005a). *Perspective mathématique : 1er cycle du secondaire : manuel de l'élève. Volume 1 : 1re année du 1er cycle.* Laval, QC : Éditions Grand Duc.

GUAY, S., HAMEL, J.-C., & LEMAY, S. (2005b). *Perspective mathématique : 1er cycle du secondaire : manuel de l'élève. Volume 2 : 1re année du 1er cycle.* Laval, QC : Éditions Grand Duc.

GUAY, S., HAMEL, J.-C., & LEMAY, S. (2006a). *Perspective mathématique : 1er cycle du secondaire : manuel de l'élève. Volume 1 : 2e année du 1er cycle.* Laval, QC : Éditions Grand Duc.

GUAY, S., HAMEL, J.-C., & LEMAY, S. (2006b). *Perspective mathématique : 1er cycle du secondaire : manuel de l'élève. Volume 2 : 2e année du 1er cycle.* Laval, QC : Éditions Grand Duc.

MALAVAL, J., ET AL. (2016). *Transmath 6e. Manuel de l'élève.* Paris : Nathan.

MALAVAL, J., ET AL. (2016). *Transmath 5e. Manuel de l'élève.* Paris : Nathan.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION (2006a). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle*. Québec, QC : Gouvernement du Québec.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION (2006b). *Programme de formation de l'école québécoise. Éducation préscolaire, enseignement primaire*. Québec, QC : Gouvernement du Québec.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ET DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR (2016). *Progression des apprentissages au secondaire. Mathématique.* Québec, QC : Gouvernement du Québec.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE [MENESR] (2015). *Programmes pour les cycles 2, 3 et 4. Repéré dans* https://euler.ac-versailles.fr/IMG/pdf/collegeprogramme-24-12-2015_517627.pdf

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE [MENESR] (2016a). *Cycle 4. Mathématiques. Grandeurs et mesures. Eduscol.* Repéré dans https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Grandeurs_et_mesures/52/7/RA16_MATH_C4_doc_maitre_grand_mesu_610527.pdf

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE [MENESR] (2016b). *Cycle 3. Mathématiques. Grandeurs et mesures. Eduscol.* Repéré dans https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/16/8/RA16_C3_MATH_grand_mesur_N.D_609168.pdf

NATHALIE SILVIA ANWANDTER CUELLAR

Université du Québec en Outaouais

nathalie.anwandter@uqo.ca

STEVE TREMBLAY

Université du Québec à Montréal

tremblay.steve.3@courrier.uqam.ca

Annexe 1. Le filtre des grandeurs

Figure A1. Filtre de grandeurs appliqué à l'aire

Annexe 2. Contenu relatifs à l'aire (programmes français et québécois)

Niveau	Programme québécois (2006)	Niveau	Programme français (2015)
6e primaire	***Géométrie: figures géométriques et sens spatial / mesure/estimation mesurage*** Unités conventionnelles (m^2,dm^2,cm^2), relations entre les unités de mesure.	**Cycle 3 (CM1, CM2 et 6e collège)**	***Grandeurs et mesures/Connaissances et compétences associées*** -Comparer, classer et ranger des surfaces selon leurs aires sans avoir recours à la mesure. -Différencier aire et périmètre d'une surface. -Déterminer la mesure de l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple ou en utilisant une formule. -Estimer la mesure d'une aire par différentes procédures. - Unités usuelles d'aire : multiples et sous-multiples du m^2 et leurs relations, are et hectare. -Formules de l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle, d'un disque.
1er et 2e secondaire	***Géométrie/figures planes et sens spatial/mesure*** **Concepts** : aire, aire latérale, aire totale; Choix de l'unité de mesure pour les aires; relations entre les unités d'aire du SI **Processus** :–Aire de polygones décomposables en triangles et en quadrilatères – Aire de disques et de secteurs –Aire de figures décomposables en disques, en triangles ou en quadrilatères	**5e et 4e collège**	***Grandeurs et mesures/Connaissances et compétences associées/Comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques*** -Comprendre l'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les aires. -Notion de dimension et rapport avec les unités de mesure (m, m^2 et m^3)

Tableau A2. Contenus relatifs à l'aire dans les programmes québécois et français

Annexe 3. La progression des apprentissages (aires) (MÉES, 2016)

→	L'élève apprend à le faire avec l'intervention de l'enseignante ou de l'enseignant.
★	L'élève le fait par lui-même à la fin de l'année scolaire.
	L'élève réutilise cette connaissance.

E. Aires	6e	1re	2e	3e	4e	5e	
1. Choisir l'unité de mesure d'aire appropriée au contexte							
2. Estimer et mesurer l'aire de surfaces à l'aide d'unités conventionnelles : centimètre carré, décimètre carré, mètre carré	★						
3. Établir des relations entre les unités d'aire du système international (SI)		→	★				
4. Construire les relations permettant de calculer l'aire de figures planes : quadrilatère, triangle, disque (secteurs) **Note** : À partir des relations établies pour l'aire des figures planes et du développement des solides, l'élève dégage des relations pour calculer l'aire latérale ou totale de prismes droits, de cylindres droits et de pyramides droites.		→	★				
5. Utiliser les relations permettant de calculer l'aire d'un cône droit et d'une sphère				★			
6. Rechercher des mesures manquantes à partir des propriétés des figures et des relations							
a. aire de disques et de secteurs		→	★				
b. aire de figures décomposables en disques (secteurs), en triangles ou en quadrilatères		→	★				
c. aire latérale ou totale de prismes droits, de cylindres droits ou de pyramides droites		→	★				
d. aire latérale ou totale de solides décomposables en prismes droits, en cylindres droits ou en pyramides droites		→	★				
e. aire de figures issues d'une isométrie		→	★				
f. aire de figures issues d'une similitude **Note** : Dans les figures planes semblables, le rapport entre les aires est égal au carré du rapport de similitude.			→	★			
g. aire de la sphère, aire latérale ou totale de cônes droits et de solides décomposables				★			
h. aire de figures équivalentes						★	CST
						★	TS
					★		SN
7. Justifier des affirmations relatives à des mesures d'aire		→	★				

Figure A3. Contenus relatifs à l'aire dans la progression des apprentissages au Québec

DANIELLY KASPARY, HAMID CHAACHOUA, ANNIE BESSOT

QU'APPORTE LA NOTION DE PORTÉE D'UNE TECHNIQUE À L'ÉTUDE DE LA DYNAMIQUE PRAXÉOLOGIQUE ?

Abstract. What does the notion of technique reach bring to the study of praxeological dynamics? We look at educational institutions as dynamic systems where praxeologies exist only as a result of a praxeological dynamic. In this article, we study some aspects of praxeological dynamics using, in particular, the notion of technique reach (theoretical, pragmatic and institutional) and competition between techniques. Two case studies illustrate praxeological dynamics concerning the study of the resolution of second-degree equations in the French educational system. One of the contributions of this article is to provide tools for curriculum analysis and textbooks.

Résumé. Nous regardons les institutions d'enseignement comme des systèmes dynamiques où les praxéologies n'existent que comme résultantes d'une dynamique praxéologique. Dans cet article, nous étudions quelques aspects de la dynamique praxéologique en utilisant en particulier les notions de portée des techniques (théorique, pragmatique et institutionnelle) et de concurrence entre techniques. Deux études de cas illustrent différentes dynamiques praxéologiques concernant l'étude de la résolution des équations du second degré dans le système d'enseignement français. Une des contributions de cet article est de fournir des outils d'analyse du curriculum et des manuels.

Mots-clés. Dynamique praxéologique, portée des techniques, concurrence des techniques, curriculum.

La diffusion et la non-diffusion des objets du savoir apparaissent, de façon explicite, comme objet premier dans quelques définitions données à la didactique des mathématiques (Brousseau, 1994, 1998 ; Chevallard, 2011). Ce champ de recherche se caractérise tout d'abord par un postulat bien connu par sa communauté : « le « mystère » est dans les mathématiques, et non pas dans les sujets qui ont à apprendre et enseigner les mathématiques » (Bosch et Chevallard, 1999, p. 79). C'est là que se situe la première rupture avec les approches classiques qui s'intéressent à l'activité d'étude.

Cette rupture a conduit à porter l'attention sur les objets à enseigner, à être appris et à être étudiés dans les sociétés. La question de leurs modélisations en a découlé.

> Notons que ce principe méthodologique, qui met au premier plan la question de la modélisation de l'activité mathématique, a représenté une véritable innovation dans

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 25, p. 243 – 269.

> la recherche en didactique des mathématiques. L'approche classique, en effet, étudiait les problèmes de transmission et d'acquisition de notions mathématiques supposées données, c'est-à-dire transparentes, non thématisées par le chercheur. En outre, même les travaux qui, d'une manière ou d'une autre, problématisaient les notions mathématiques à étudier, ne soumettaient pas les modèles adoptés à la mise à l'épreuve caractéristique du travail scientifique. Ou bien la question du savoir mathématique était tenue pour non problématique, ou bien la réponse apportée était prise comme inquestionnable. Tout se passait comme si la problématicité se situait essentiellement du côté des sujets apprenants ou enseignants, dans leurs capacités cognitives, leurs conceptions et préconceptions. Le mathématique et le cognitif étaient clairement distingués, selon le même tracé qui distinguerait un extérieur et un intérieur du sujet : le premier étant alors supposé aller de soi, c'est le second que l'on devait seul tenter d'expliquer. (Bosch et Chevallard, 1999, p. 80)

La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), dans ce contexte, propose de modéliser toute activité humaine, et en particulier l'activité mathématique, par un système de quatre éléments interdépendants : les types de tâches T, les techniques τ, les technologies θ et les théories Θ. Une organisation praxéologique ponctuelle [T, τ, θ,Θ], ainsi baptisée par Chevallard (2002), regroupe le type de tâches pouvant être accomplies par une technique, justifiée par une technologie, elle-même légitimée par une théorie. Ce quadruplet marque une étape importante dans le développement de ce cadre théorique.

De ce point de vue, la discipline « mathématiques » peut être considérée comme une amalgamation de diverses praxéologies autour de différentes technologies et théories (Chevallard, 2002). Cependant, l'activité mathématique ne se fait pas par la simple rencontre de ces praxéologies stables. Elle est bien plus complexe et résulte des déséquilibres constants de cet arrangement au sein d'une institution.

> On peut imaginer un monde institutionnel dans lequel les activités humaines seraient régies par des praxéologies bien adaptées permettant d'accomplir toutes les tâches voulues d'une manière à la fois efficace, sûre et intelligible. Mais un tel monde n'existe pas : comme on l'a suggéré, les institutions sont parcourues par toute une dynamique praxéologique […]. (Chevallard, 1999, p. 230)

Dans cet article notre ambition est justement d'avancer sur la prise en compte de la dynamique praxéologique, qui a déjà été objet de discussion dans d'autres travaux, tels que celui d'Artaud (1998) et celui de Bosch et Gascón (2002). Cette dynamique fait nécessairement intervenir des types de tâches mathématiques provisoires qui disparaitront lors de la chronogenèse de l'étude d'un sujet, ou des praxéologies qui s'adaptent/évoluent au fil du temps impactées par l'intégration de nouvelles praxéologies.

Notre objectif ici est de présenter des outils issus de la TAD permettant d'analyser un curriculum offert par une institution d'un point de vue dynamique. Comprendre la dynamique d'un curriculum permet de comprendre les difficultés et certaines erreurs dans les activités des élèves aussi bien que dans les pratiques des enseignants soumis à ce curriculum.

Pour mener cette étude, nous nous plaçons dans le cadre de la TAD et plus particulièrement nous utilisons certaines notions introduites dans T4TEL[1] (Chaachoua, 2018). Les premières notions, liées à la description d'une technique propre à T4TEL (section 1), introduiront un premier aspect de la dynamique praxéologique. Puis, les portées d'une technique permettront d'aborder d'autres aspects de cette dynamique (section 2 et 3).

Nous nous sommes restreints dans cet article à l'étude de curriculums attachés au type de tâches $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ (Résoudre algébriquement dans **R** une équation de degré 2)[2] et aux sous-types de tâches associés. Nous illustrons la dynamique praxéologique de ce curriculum à partir des programmes et manuels français à des époques différentes (sections 4 et 5). Soulignons que le domaine de l'algèbre n'est pas notre objet d'étude mais sert de terrain pour illustrer des dynamiques praxéologiques.

1. Description d'une technique dans T4TEL

Dans T4TEL une technique est décrite par un *ensemble de types de tâches*, chaque type de tâches étant appelé *ingrédient* de la technique. Soulignons d'abord que toute technique peut avoir plusieurs descriptions possibles, avec des niveaux de granularités différents, à l'aide de types de tâches. Ces types de tâches peuvent avoir des statuts différents : on peut se référer à ce sujet à Chaachoua (2018).

Cette description ouvre une première piste pour discuter de la dynamique praxéologique d'une institution. À titre d'illustration, imaginons une institution fictive[3] I_{im} où existe le type de tâches $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ définie par : « Résoudre une équation de degré 2 ». Dans cette institution une technique pour accomplir ce type de tâches consiste à se ramener au type de tâches $T_{\text{carré}}$ suivant : « Résoudre une équation de la forme $(P_1(x))^2 = k$ où $P_1(x)$ est un polynôme de degré 1 et k un réel quelconque ». On note cette technique $\tau_{\text{racine\_carrée}}$ qui peut être décrite, par exemple, de la manière suivante (tableau 1) :

---

[1] *T4* renvoie au quadruplet praxéologique (Type de tâches, Technique, Technologie, Théorie) et *TEL* pour *Technology Enhanced Learning*.

[2] Dans tout l'article nous nous plaçons pour $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ dans **R** sans toujours le préciser et nous considérons que la résolution est algébrique. Ainsi, pour ne pas alourdir le texte (Résoudre une équation) signifie (Résoudre algébriquement dans **R** une équation).

[3] Qui pourrait correspondre à une institution de fin du cycle 4 (grade 9) en France.

- Se ramener à l'équation équivalente P(x) = 0, P(x) étant un polynôme de degré 2 ;
- $T_{Transformer}$ « Factoriser P(x) en $(P_1(x))^2 - k$, où $P_1(x)$ est un polynôme de degré 1[4] » ;
- Réécrire en une équation équivalente : $(P_1(x))^2 = k$ où $P_1(x)$ est un polynôme de degré 1 et k étant un réel quelconque ;
- $T_{carré}$ « Résoudre algébriquement une équation de la forme $(P_1(x))^2 = k$ où $P_1(x)$ est un polynôme de degré 1 et k étant un réel quelconque ».

Tableau 1. Une description possible de $\tau_{racine\_carrée}$

Dans I_{im} les types de tâches $T_{Transformer}$[5] et $T_{carré}$ existent comme objet d'étude en soi hors de cette technique. Cependant, pour que ces types de tâches puissent devenir un ingrédient opératoire d'une technique, leurs propres praxéologies doivent avoir une certaine stabilité tendant à la routinisation de ces types de tâches. Dans le cas contraire, la mise en œuvre de $\tau_{racine\_carrée}$ risque de mener à l'échec par la non-maîtrise d'un ingrédient de la technique.

La modélisation des techniques comme un ensemble de types de tâches et la prise en compte du changement de statut possible de leurs ingrédients dévoilent déjà un premier mouvement entre les praxéologies ponctuelles. Cette description révèle une dialectique objet et outil des types de tâches[6].

Ce premier mouvement nous incite à considérer une autre notion cruciale pour l'étude de la dynamique institutionnelle, celle de *temps institutionnel*. Normalement un type de tâches n'assume pas un double statut au même moment institutionnel et le changement de statut, ainsi objectivé, demande une durée plus ou moins longue.

Pour aller plus loin, c'est-à-dire pour rendre visible d'autres aspects de la dynamique, intéressons-nous maintenant à la notion de portée d'une technique.

2. Portées d'une technique

---

[4] Dans la suite de l'article nous utiliserons la notation $P_i(x)$ pour désigner un polynôme de degré i.

[5] $T_{transformer}$ est un type de tâches qui consiste à transformer un polynôme P(x) de degré 2, en $(P_1(x))^2 - k$ par une factorisation partielle.

[6] A ne pas confondre avec la dialectique outil/objet de Douady (1986). En effet, Douady considère les statuts outil/objet pour les concepts alors que nous l'adaptons au niveau des types de tâches, tout en restant dans le même esprit.

> Tout d'abord, une technique – une « manière de faire » – ne réussit que sur une partie P(τ) des tâches du type T auquel elle est relative, partie qu'on nomme portée de la technique : elle tend à échouer sur T\P(τ), de sorte qu'on peut dire que « l'on ne sait pas, en général, accomplir les tâches du type T ». (Chevallard, 1999, p. 225)

Dans cette définition, il est dit que hors de sa portée une technique tend à échouer. Nous interprétons ce « tend à échouer » comme suit :

1) une technique peut ne pas s'appliquer hors de sa portée ;
2) une technique peut s'appliquer hors de sa portée, mais avec un risque élevé d'échec.

Ces deux possibilités d'interprétation nous ont conduit dans T4TEL à définir deux portées d'une technique : les portées théorique et pragmatique. Nous avons complété par une autre portée, la portée institutionnelle, pour rendre compte des limitations propres à une institution.

Définitions. Portées théorique, pragmatique et institutionnelle

– La portée théorique d'une technique est l'ensemble des tâches où la technique permet d'accomplir une tâche quelconque de cet ensemble en dehors de toute considération des conditions de son exécution, c'est-à-dire qu'on examine cette technique d'un point de vue épistémologique sans prendre en compte le cognitif et donc la maîtrise de sa réalisation par un sujet. Elle sera notée $P_{Th}(\tau)$.
– La portée pragmatique d'une technique est l'ensemble des tâches où la technique est fiable dans le sens où elle permet d'accomplir ces tâches avec peu de risque d'échec et à un coût raisonnable. La technique tend à réussir sur cette portée et tend à échouer en dehors. Elle sera notée P(τ).
– La portée institutionnelle d'une technique relative à un type de tâches T est l'ensemble des tâches où cette technique est attendue par une institution. Cette portée est une conséquence des conditions et des contraintes de la vie de τ dans une institution. Elle sera notée $P_I(\tau)$.

La notion de portée pragmatique correspond à la définition de Chevallard (1999). Et c'est bien cette portée qui est pertinente pour la vie des praxéologies et qui est au cœur des questions didactiques.

Pour nous, le cognitif est pris en compte par une autre portée que nous appelons *portée personnelle*, dépendante à la fois des portées pragmatique et institutionnelle. Ce n'est pas l'objet premier de cet article.

Exemple. Dans l'exemple précédent, on suppose que dans I_{im} il n'existe que $\tau_{racine\_carrée}$ pour accomplir les tâches de $T_{équation\_degré\_2}$. Explicitons les portées de $\tau_{racine\_carrée}$.

– Théoriquement, nous pouvons accomplir toutes les tâches de $T_{équation\_degré\_2}$ avec $\tau_{racine\_carrée}$. On a : $P_{Th}(\tau_{racine\_carrée}) = T_{équation\_degré\_2}$.

– Pragmatiquement, comme souligné par Chevallard (1999), la technique tend à échouer (au moins) pour des nombres de « grande » taille. Mais, elle peut échouer aussi par un rapport défectueux à la factorisation.

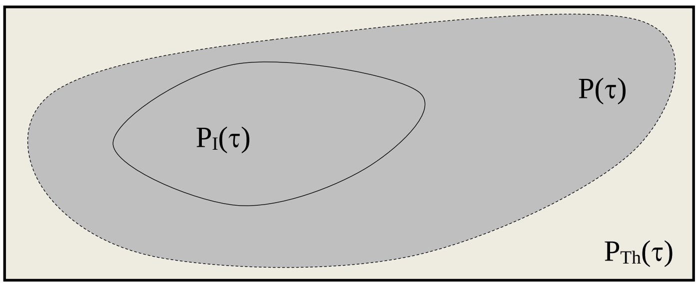
> La chose est évidente, mais très souvent oubliée, en mathématiques. Ainsi toute technique de calcul sur **N** échoue-t-elle à partir d'une certaine taille de nombres. Le fait qu'on ne sache pas en général factoriser un entier donné est notamment à la base de certaines techniques de cryptographie. (Chevallard, 1999, p. 225)

La portée pragmatique de $\tau_{racine\_carrée}$ est donc contenue dans sa portée théorique.

– Du point de vue institutionnel, soit I_{im} attend que la technique soit appliquée sur toute la portée pragmatique, soit pour diverses raisons, I_{im} limite son usage sur une partie de la portée pragmatique. Généralement, la portée institutionnelle est contenue dans la portée pragmatique.

Les relations entre les différentes portées pour $\tau_{racine\_carrée}$, stables durant un temps institutionnel, sont schématisées par la figure 1[7].

La portée théorique ne peut être remise en cause que par un savoir de référence considéré par le chercheur, que nous supposons momentanément fixé, donc statique. Notons que cette portée ne dépend ni de l'institution étudiée, ni de l'existence d'autres techniques alternatives. Par contre, les deux autres portées, pragmatique et institutionnelle, sont soumises potentiellement à des dynamiques diverses, comme nous allons le développer ci-dessous.



$T_{équation\_degré\_2}$

[7] Ne pas tenir compte des dimensions de la représentation des ensembles.

Figure 1. Portées théorique, pragmatique et institutionnelle de $\tau_{racine\_carrée}$. Le rectangle représente l'ensemble des tâches d'un type de tâches donné (ici, $T_{équation\_degré\_2}$). Le pointillé délimitant la portée pragmatique est là pour indiquer la difficulté d'en préciser la frontière, comme nous le verrons plus loin.

Dans le cas où il n'y a qu'une seule technique pour un type de tâches, la portée pragmatique reste aussi invariante. Cependant, la portée institutionnelle d'une technique peut évoluer car elle est subordonnée aux conditions et contraintes de l'institution. C'est le cas, par exemple, quand les sujets de I_{im} commencent par l'étude de la résolution des équations du second degré à coefficients entiers, puis continuent par celle des équations du second degré à coefficients rationnels. On retrouve ici le fait que la dimension temporelle affecte la portée institutionnelle.

Dans le cas où d'autres techniques alternatives existent, que se passe-t-il pour les portées pragmatique et institutionnelle ?

Regardons dans notre institution fictive l'effet de l'introduction de la technique suivante pour $T_{équation\_degré\_2}$: $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$ (tableau 2).

– Se ramener à l'équation équivalente $P(x) = 0$, $P(x)$ étant un polynôme de degré 2 ; – $T_{factoriser\_s}$ « Factoriser par x l'expression $P(x)$ » ; – Résoudre une équation de la forme $x(ax + b) = 0$.

Tableau 2. Description de la technique $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$

Soulignons que le type de tâches $T_{factoriser\_s}$ n'a de sens que pour certaines expressions $P(x)$. C'est un sous-type de tâches de $T_{factoriser}$ « Factoriser un polynôme ».

Commençons par une analyse des portées de $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$. Théoriquement nous ne pouvons accomplir avec cette technique qu'une partie de $T_{équation\_degré\_2}$. Par exemple, on ne peut pas résoudre avec cette technique l'équation « $2x^2 + 4x = -4$ ». Comme dans l'analyse de la première technique, nous avons (figure 2) :

$$P_I(\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}) \subseteq P(\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}) \subset P_{Th}(\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}) \subset T_{équation\_degré\_2}$$

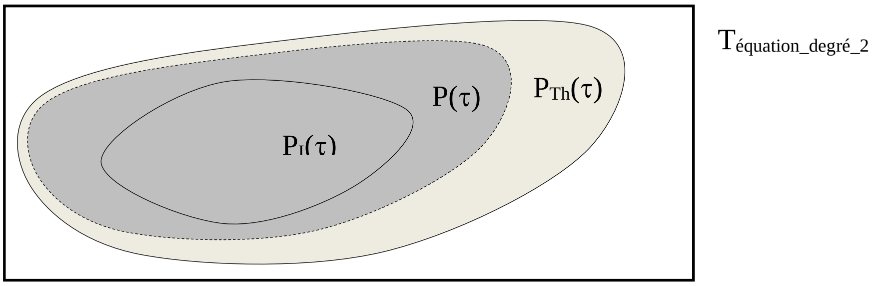


Figure 2. Portées théorique, pragmatique et institutionnelle de $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$

Examinons maintenant le moment où ces deux techniques coexistent dans l'institution I_{im}.

Supposons que dans cette institution les portées institutionnelles de ces deux techniques correspondent à leurs portées pragmatiques, et intéressons-nous uniquement à celles-ci. Il est clair que $P(\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}) \subset P(\tau_{racine\_carrée})$. Par exemple, la tâche t_1 « résoudre $x^2 + 4x = 0$ »[8] appartient aux deux portées, ce qui n'est pas le cas de la tâche t_2 « résoudre $x^2 + 5x + 4 = 0$ ». En effet, on a : $t_2 \in P(\tau_{racine\_carrée})$ et $t_2 \notin P(\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul})$ (voir figure 3).

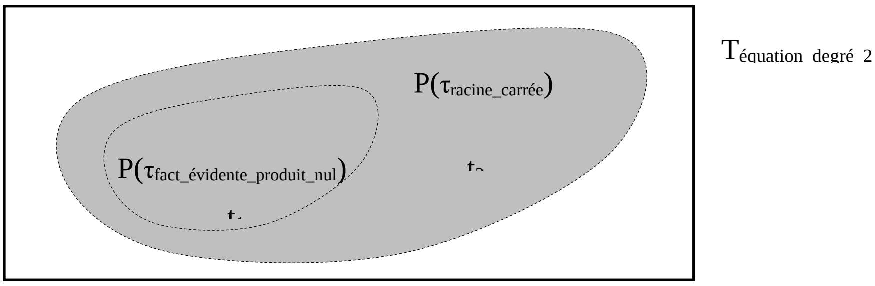


Figure 3. Portées pragmatiques $P(\tau_{racine\_carrée})$ et $P(\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul})$

Remarquons que la caractérisation de la portée pragmatique n'est pas simple : sa frontière est fluctuante car dépendante de plusieurs facteurs dont l'existence ou non d'autres techniques.

Pour comprendre ce qui peut se produire dans la partie commune des deux portées $P(\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul})$ nous allons introduire la notion de concurrence entre deux techniques.

---

[8] Il serait plus correct d'écrire la tâche « résoudre algébriquement l'équation $x^2 + 4x = 0$ ». Pour ne pas alourdir le texte nous utiliserons par la suite le raccourci « résoudre $x^2 + 4x = 0$ ».

3. Concurrence entre techniques

Définition. Concurrence de deux techniques τ_i et τ_j

> Si $P(\tau_i) \cap P(\tau_j)$ est non vide, les deux techniques τ_i et τ_j sont dites en concurrence sur le type de tâches $P(\tau_i) \cap P(\tau_j)$ appelé domaine de concurrence des deux techniques τ_i et τ_j.

Soulignons que cette concurrence n'a de sens que si les deux techniques coexistent dans une institution donnée. Cependant, on peut étudier les effets de cette concurrence d'un point de vue épistémologique indépendamment des conditions institutionnelles qui permettent ou non à ces deux techniques d'exister.

> Enfin, en une institution I donnée, à propos d'un type de tâches T donné, il existe en général une seule technique, ou du moins un petit nombre de techniques institutionnellement reconnues, à l'exclusion des techniques alternatives possibles — qui peuvent exister effectivement, mais alors en d'autres institutions. Une telle exclusion est corrélative, chez les acteurs de I, d'une illusion de « naturalité » des techniques institutionnelles dans I — faire ainsi, c'est naturel... —, par contraste avec l'ensemble des techniques alternatives possibles, que les sujets de I ignoreront, ou, s'ils y sont confrontés, qu'ils regarderont spontanément comme artificielles, et (donc) « contestables », « inacceptables », etc. À cet égard, on observe assez fréquemment, chez les sujets de I, de véritables passions institutionnelles pour les techniques naturalisées dans l'institution. (Chevallard, 1999, p. 225)

Accepter ce postulat, de la tendance des institutions à faire vivre une unique technique pour accomplir un même type de tâches T, ne signifie pas que dans une institution ne s'étudie qu'une seule technique. La question que nous posons est la suivante : par quelle dynamique praxéologique une institution met-elle en place une préférence pour une technique ? Ou encore, que peut-il se passer sur le domaine de concurrence de deux techniques ? Ce que nous pouvons déjà avancer est ceci : quand deux techniques existent et partagent un domaine de concurrence, une relation peut s'établir entre ces deux techniques, *être plus efficace.*

Revenons à notre institution fictive I_{im} et comparons la mise en œuvre de ces deux techniques sur une tâche appartenant à leur domaine de concurrence.

t_1 « résoudre $x^2 + 4x = 0$ »	
$\tau_{racine\_carrée}$[9]	$\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$
$x^2 + 4x = 0$	$x^2 + 4x = 0$
$x^2 + 2.2x + 2^2 - 2^2 = 0$	$x\ (x + 4) = 0$
$(x + 2)^2 - 4 = 0$	$x = 0$ *ou* $x + 4 = 0$
$(x + 2)^2 = 4$	$x = 0$ *ou* $x = -4$
$x + 2 = 2$ *ou* $x + 2 = -2$	
$x = 0$ *ou* $x = -4$	

Tableau 3. Mise en œuvre de $\tau_{racine\_carrée}$ et $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$ sur une tâche de leur domaine de concurrence

Le tableau 3 montre une première différence dans la mise en œuvre des deux techniques : $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$ nécessite moins d'actions que $\tau_{racine\_carrée}$ pour accomplir t_1 mais ce n'est pas l'essentiel car il nous faut regarder du côté de la technologie. En effet, $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$ se justifie principalement par deux éléments technologiques, une factorisation simple et la propriété du produit nul ; alors que $\tau_{racine\_carrée}$ doit utiliser une transformation complexe s'appuyant sur l'équivalence des équations, puis sur la reconnaissance d'une identité remarquable et enfin sur une racine carrée. Du point pragmatique, nous dirons que $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$ est plus efficace que $\tau_{racine\_carrée}$ sur leur domaine de concurrence. Cette efficacité est encore plus perceptible pour la tâche « $x^2 + 7x = 0$ », par exemple. En fait, pour les équations du type « $x^2 + kx = 0$ » la technique $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$ ne requiert aucune transformation de « k », contrairement à la technique $\tau_{racine\_carrée}$.

Dans cet exemple, la relation « être plus efficace » a été examiné par rapport au coût de l'exécution de la technique (nombre d'étapes). Mais, d'autres critères peuvent être considérés par le chercheur dans la caractérisation de l'efficacité, que nous n'examinerons pas dans cet article.

Dans le cas où plusieurs techniques sont en concurrence sur un domaine, si l'une des techniques est plus efficace que les autres, elle sera dite *optimale* sur ce domaine.

En résumé, la concurrence entre techniques au sein d'une même institution introduit un autre aspect de la dynamique praxéologique. Cette concurrence peut entrainer la réduction de la portée pragmatique de l'une des techniques si celle-ci se révèle

[9] Le passage de la première ligne à la deuxième ligne repose sur un geste de réécriture de « $x^2 + bx$ » vers « $x^2 + 2.\frac{b}{2}x + (\frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2$.

comme non optimale sur le domaine de concurrence. Par exemple dans I_{im}, cette réduction aboutit à la séparation d'une partie de la portée $P(\tau_{racine\_carrée})$ en faveur de la portée $P(\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul})$ sur laquelle $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$ est optimale. C'est une dynamique possible illustrée par la figure 4. Nous identifierons d'autres types de dynamique dans les études de cas des sections 3 et 4.

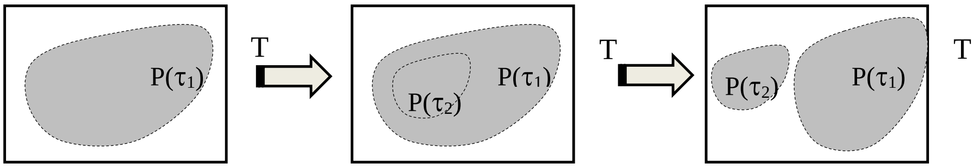


Figure 4. Une dynamique possible des portées comme conséquence de la concurrence de deux techniques

Nous faisons l'hypothèse que ces notions de concurrence, d'efficacité et d'optimalité, découlant de la notion de portée, permettent de décrire et de comprendre les dynamiques praxéologiques dans un curriculum donné. Pour l'illustrer nous allons présenter deux études de cas. La première étude compare deux dynamiques praxéologiques dans l'enseignement secondaire français au début de l'introduction de $T_{équation\_degré\_2}$ (Résoudre algébriquement une équation de degré 2) mais à deux périodes différentes (2003 et 2008). La deuxième concerne l'évolution praxéologique du même objet $T_{équation\_degré\_2}$ sur l'ensemble de sa vie officielle dans l'enseignement secondaire français actuel (2016 – 2019).

4. Etude de cas 1 : Comparaison de deux dynamiques praxéologiques

Dans un premier temps, nous distinguons deux techniques :

– La première technique $\tau_{produit\_nul}$ consiste à factoriser pour se ramener au type de tâches $T_{produit\_nul}$ « Résoudre une équation de la forme $P_1(x)Q_1(x) = 0$ » puis à instancier la propriété du produit nul. Remarquons que si la factorisation concerne le type de tâches « Résoudre une équation de la forme $ax^2 + bx = 0$, $a \neq 0$ », $\tau_{produit\_nul}$ se restreint à $\tau_{fact\_évidente\_produit\_nul}$.

– La deuxième technique $\tau_{racine\_carré}$ consiste à factoriser pour se ramener au type de tâches $T_{carré\_constant}$ « Résoudre une équation de la forme $(P_1(x))^2 = k$ » puis à instancier la propriété de racine carrée.

Il est bien entendu que ces techniques peuvent faire appel à d'autres types de tâches comme « Regrouper les termes dans un membre ». Soulignons que pour les deux premiers cas les techniques de factorisation peuvent nécessiter des gestes spécifiques aux équations étudiées.

La coexistence dans l'institution considérée de ces deux techniques modifie leur efficacité relative comme nous allons le montrer brièvement sur des exemples.

Considérons la tâche t « Résoudre $x^2 - 7 = 0$ » qui appartient aux portées théoriques des deux techniques[10] (tableau 4).

$\tau_{\text{produit\_nul}}$	$\tau_{\text{racine\_carrée}}$
$x^2 - 7 = 0$ $x^2 - \sqrt{7}^2 = 0$ $(x - \sqrt{7})(x + \sqrt{7}) = 0$ $(x - \sqrt{7}) = 0\ ou\ (x + \sqrt{7}) = 0$ $x = \sqrt{7}\ ou\ x = -\sqrt{7}$	$x^2 - 7 = 0$ $x^2 = 7$ $x = \sqrt{7}\ ou\ x = -\sqrt{7}$

Tableau 4. Mise en œuvre de deux techniques sur une tâche appartenant à leur domaine de concurrence

Cette mise en œuvre des techniques montre que la technique optimale pour cette tâche est $\tau_{\text{racine\_carrée}}$. On peut généraliser aux tâches du type (Résoudre une équation de la forme $ax^2 + c = 0$, $a \neq 0$). Cependant, par exemple pour la tâche « Résoudre $(2x - 1)^2 - (x + 2)^2 = 0$ » la technique optimale est $\tau_{\text{produit\_nul}}$.

Dans la prochaine section, nous allons étudier cette concurrence dans des conditions institutionnelles qui permettent à ces techniques d'exister.

4.1 La première rencontre avec les équations du second degré attendues dans les programmes 1998, 2005 et 2008.

En France, dans les programmes des années 2000 la notion d'équation du second degré est présente pour la première fois dans le curriculum – toutefois sans le libellé « second degré » – dans le domaine « Nombres et calcul ». Ci-après des extraits des programmes de 2008 pour la classe de troisième sachant qu'ils sont très proches des programmes de 1998 et 2005 (figure 5 et figure 6).

[10] Ce qui n'est pas le cas, par exemple, pour la tâche « Résoudre $x^2 + 7 = 0$ » qui est hors de la portée théorique de la technique $\tau_{\text{produit\_nul}}$.

2.2. Calculs élémentaires sur les radicaux Racine carrée d'un nombre positif.	- Savoir que, si a désigne un nombre positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a et utiliser les égalités : $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $\sqrt{a^2} = a$. - *Déterminer, sur des exemples numériques, les nombres x tels que $x^2 = a$, où a est un nombre positif.*	Dans le cadre du socle commun, la seule capacité exigible, relative à la racine carrée, concerne le calcul à la calculatrice de la valeur exacte ou approchée de la racine carrée d'un nombre positif.

Figure 5. Extrait des programmes, 3ème, 2008

2.4. Équations et inéquations du premier degré *Problèmes du premier degré : inéquation du premier degré à une inconnue, système de deux équations à deux inconnues.*	*- Mettre en équation un problème.* *- Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques ; représenter ses solutions sur une droite graduée.* *- Résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admettant une solution et une seule ; en donner une interprétation graphique.*	La notion d'équation ne fait pas partie du socle commun. Néanmoins, les élèves peuvent être amenés à résoudre des problèmes du premier degré (méthode arithmétique, méthode par essais successifs, …).
Problèmes se ramenant au premier degré : équations produits.	*- Résoudre une équation mise sous la forme A(x).B(x) =0, où A(x) et B(x) sont deux expressions du premier degré de la même variable x.*	*L'étude du signe d'un produit ou d'un quotient de deux expressions du premier degré de la même variable est hors programme.*

Figure 6. Extrait des programmes, 3ème, 2008

Dans le secteur « Calculs élémentaires sur les radicaux » on trouve un passage sur la détermination de nombres connaissant leurs carrés (figure 5) mais sans mentionner la notion d'équation.

Dans le thème « Équations et inéquations du premier degré » (figure 6), on fait référence aux équations produits, et donc à la technique $\tau_{produit\_nul}$. Mais, qu'en est-il pour les équations qui relèvent du type de tâches $T_{carré\_constant}$ « Résoudre une équation de la forme $(P_1(x))^2 = k$ » ? Et plus précisément, quelle est la place de la technique $\tau_{racine\_carrée}$?

Ce flou repéré dans l'explicitation des programmes peut donner lieu à des interprétations différentes. C'est ce que nous proposons d'illustrer à partir de deux manuels de la classe de troisième soumis à la même recommandation des programmes concernant les équations et la racine carrée mais à deux moments différents, 2003 et 2008. Ce sont :

– le manuel Hatier, classe de 3ème, 2003 noté M_{2003} ;

– le manuel Phare, classe de 3ème, 2008 noté M_{2008}.

4.2 Etude du manuel M_{2003}

Ce manuel organise une première rencontre avec les équations du second degré avec des tâches du type $T_{carré\_simple}$ « Résoudre une équation de la forme $ax^2 + c = k$ » ; la technique attendue est $\tau_{racine\_carrée}$ comme le montre l'extrait suivant de M_{2003} (figure 7).

1 Racine carrée

a. Définition

Pour tout nombre positif a, la racine carrée de a est le nombre positif dont le carré est égal à a.

Exemple. La racine carrée de 64 est 8 parce que $8^2 = 64$ et $8 \geqslant 0$.

La racine carrée de a se note $\sqrt{a}$. Le symbole $\sqrt{}$ est appelé **radical**.

b. Conséquences

- **Pour tout nombre positif a : $\sqrt{a^2} = a$ et $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.**

Exemples. $\sqrt{5^2} = 5$ et $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$.

- **Pour tout nombre positif a : $\sqrt{a^{2n}} = \sqrt{\left(a^n\right)^2} = a^n$.**

Exemple. $\sqrt{2^6} = 2^3$.

2 Résolution de l'équation $x^2 = a$

- Si $a < 0$, il n'existe aucun nombre x tel que $x^2 = a$. L'équation n'a pas de solution.
- Si $a = 0$, le seul nombre tel que $x^2 = 0$ est 0, la solution est 0.
- Si $a > 0$, il existe deux nombres tels que $x^2 = a$, l'équation a deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exemples

Les deux nombres tels que $x^2 = 81$ sont 9 et -9.

Les deux nombres tels que $x^2 = 13$ sont $\sqrt{13}$ et $-\sqrt{13}$.

Figure 7. Extrait de M_{2003} (page 30)

Quand on consulte la liste des exercices relevant de ce chapitre, on observe que le travail de la technique $\tau_{\text{racine\_carrée}}$ porte sur un ensemble institutionnel plus restreint que sa portée pragmatique. Seule le type de tâches « Résoudre $x^2 = k$, où k est un réel » est considéré à ce moment de l'étude.

La première rencontre avec les tâches du type « Résoudre $(px + q)^2 = k$ » a lieu lors du deuxième temps d'étude des équations du second degré. Lors de ce deuxième temps, la nouvelle technique $\tau_{\text{produit\_nul}}$ mise en place permet d'accomplir d'autres tâches non prises en compte auparavant, comme celles du type « Résoudre $(ax + b)(cx + d) = 0$ », mais aussi « Résoudre $(px + q)^2 = k$ »[11].

Dans la liste des exercices intitulés « Équations de la forme $A \times B = 0$ » nous retrouvons six tâches de résolution d'équations du type « $ax^2 = k$ ». Une concurrence des techniques ($\tau_{\text{racine\_carrée}}$ et $\tau_{\text{produit\_nul}}$) est alors établie sur un domaine déjà travaillé et où $\tau_{\text{racine\_carrée}}$ est optimale : ce domaine de concurrence est $P_I(\tau_{\text{racine\_carrée}})$, ce que nous avons représenté dans la figure 8.

[11] Par exemple, nous trouvons les tâches « $(x + 8)^2 = 81$ » et « $(3x - 2)^2 - 16 = 0$ » dans la liste d'activités intitulée « Équations de la forme $A \times B = 0$ » (M_{2003}, page 46).

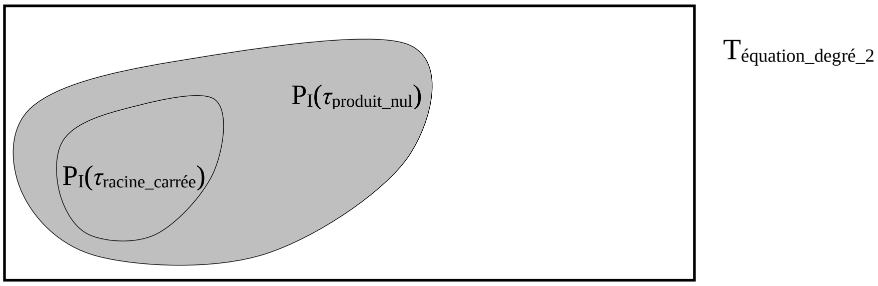


Figure 8. Relation entre les deux portées institutionnelles $P_I(\tau_{racine\_carrée})$ et $P_I(\tau_{produit\_nul})$

Or, le domaine commun des portées pragmatiques de ces deux techniques est bien plus large que la portée $P_I(\tau_{racine\_carrée})$. L'institution caractérisée par M_{2003} évite l'élargissement du domaine de concurrence, alors que des tâches strictement dans $P_I(\tau_{produit\_nul})$ ont pour technique optimale $\tau_{racine\_carrée}$, comme le montre le tableau 5 ci-après.

$\tau_{factoriser\_produit\_nul}$	$\tau_{racine\_carrée}$
$(px + q)^2 = k$ $(px + q)^2 - k = 0$ $(px + q)^2 - (\sqrt{k}\,)^2 = 0$ $((px + q) - (\sqrt{k}\,))\,((px + q) + (\sqrt{k}\,)) = 0$ $(px + q) - (\sqrt{k}\,) = 0$ *ou* $(px + q) + (\sqrt{k}\,) = 0$ $(px + q) = \sqrt{k}$ *ou* $(px + q) = -\sqrt{k}$ …	$(px + q)^2 = k$ $(px + q) = \sqrt{k}$ *ou* $(px + q) = -\sqrt{k}$ …

Tableau 5. Coût de $\tau_{produit\_nul}$ et $\tau_{racine\_carrée}$ sur le type de tâches « Résoudre $(px + q)^2 = k$ » où k est positif et p est non nul

La raison institutionnelle de cette valorisation du produit nul semble se trouver dans le futur de cette dynamique praxéologique autour de la résolution des équations du second degré, c'est-à-dire dans la mise en place d'un environnement technologique propice à la technique du discriminant en classe de première. Remarquons de plus que cette technique, qui repose sur la factorisation, se généralise à des équations de degré supérieur à 2.

4.3. Etude du manuel M_{2008}

Dans le manuel M_{2008} existe une autre dynamique au début du parcours d'étude des équations du second degré.

Contrairement au manuel précèdent et dans l'esprit des programmes, le chapitre « Racine carré » n'aborde pas la notion d'équation. La première rencontre avec des équations du second degré a lieu dans le chapitre « équations et équations produit nul ». Les tâches à accomplir sont du type « Résoudre une équation de la forme $x^2 = k$ » et « Résoudre une équation de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ ». Dans ces deux cas la technique attendue est celle du produit nul. L'extrait ci-après (figure 9) atteste de la force de cette attente. Cet extrait se place après deux paragraphes intitulés respectivement « Je découvre des propriétés des produits » et « Je résous une équation produit nul » :

6 Je résous des équations du type $x^2 = a$

1) Expliquer pourquoi l'équation $x^2 = -3$ n'admet pas de solution.

2) On veut résoudre l'équation $x^2 = 3$.

a Recopier et compléter :

$$x^2 = 3$$
$$x^2 - \ldots = 0$$
$$x^2 - (\ldots)^2 = 0$$
$$(x + \ldots)(x - \ldots) = 0.$$

b Terminer la résolution de cette équation.

Figure 9. Extrait de M_{2008} (page 89)

Rappelons que pour les tâches du type « Résoudre l'équation de la forme $x^2 = k$ » la technique optimale est l'instanciation de la propriété de la racine carrée. La mise en œuvre de la technique du produit nul sur la portée pragmatique de $\tau_{racine\_carrée}$ témoigne clairement de la suprématie attendue de $\tau_{produit\_nul}$ dans M_{2008} : le théorème « produit nul » génère la technique $\tau_{racine\_carrée}$, pour la résolution d'équation de la forme $x^2 = a$ comme le montrent les extraits suivants (figure 10 et figure 11).

2 Équation produit nul

a Définition

a, *b*, *c* et *d* désignent des nombres relatifs.
Une équation de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ est une **équation produit nul d'inconnue x**.

EXEMPLE : $(3x + 4)(2x - 5) = 0$ est une équation produit nul d'inconnue x.

Remarque : $(3x + 4)(2x - 5) = 6x^2 - 7x - 20$. Le plus grand exposant de l'inconnue x est 2. Cette équation est une équation de degré 2.

b Propriété

Si un produit est nul, alors l'un, au moins, de ses facteurs est nul.	a et b désignent des nombres relatifs. Si $a \times b = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Remarques : • Les nombres a et b peuvent être tous les deux égaux à zéro.
• Si dans un produit un facteur est nul, alors ce produit est nul.

Figure 10. Extrait de M_{2008} (page 91)

c Résolution d'une équation produit nul

EXEMPLE : On considère l'équation $(x - 1)(x + 2) = 0$.

Résolution	Objectifs
$(x - 1)(x + 2) = 0$. Or, si un produit est nul, alors l'un, au moins, de ses facteurs est nul. $(x - 1) = 0$ ou $(x + 2) = 0$	Se ramener à deux équations de degré 1.
$x - 1 + 1 = 0 + 1$ ou $x + 2 - 2 = 0 - 2$ $x = 1$ ou $x = -2$.	Pour chaque équation de degré 1, obtenir les valeurs possibles de x.
Vérification : • pour $x = 1$: $(x - 1)(x + 2) = (1 - 1)(1 + 2) = 0 \times (1 + 2) = \mathbf{0}$. • pour $x = -2$: $(x - 1)(x + 2) = (-2 - 1)(-2 + 2) = (-2 - 1) \times 0 = \mathbf{0}$.	Vérifier que ces valeurs sont solutions de l'équation initiale.
L'équation $(x - 1)(x + 2) = 0$ admet deux solutions 1 et -2.	Conclure.

d Résolution d'une équation du type $x^2 = a$, où a est un nombre relatif

a désigne un nombre relatif.
Lorsque $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solution.
Lorsque $a = 0$, l'équation $x^2 = a$ admet une solution unique 0.
Lorsque $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ admet deux solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Figure 11. Extrait de M_{2008} (page 91)

Le paragraphe « d » énonce une règle qui permet de s'affranchir du coût de la mise en œuvre de la technique du produit nul : face aux équations de la forme $x^2 = a$, il est attendu la technique d'instanciation de cette règle qui ressemble fort à la règle de la racine carrée identifiée dans M_{2003}. Mais la dynamique y ayant abouti est bien plus tortueuse et de fait cette règle se trouve isolée de la notion de racine carrée !

4.4. Synthèse

L'analyse de ces deux manuels de la classe de troisième montre deux dynamiques praxéologiques s'appuyant sur deux évolutions temporelles différentes de la configuration des portées institutionnelles des deux techniques $\tau_{\text{racine\_carrée}}$ et $\tau_{\text{produit\_nul}}$: nous schématisons ces évolutions temporelles dans la figure 12 ci-après.

Ces deux dynamiques séparent trois épisodes (∂t_1), (∂t_2) et (∂t_3) dans le processus d'étude de la résolution de certains types d'équations du second degré en troisième. Elles semblent aboutir à un état commun (∂t_3) où les deux techniques $\tau_{\text{racine\_carrée}}$ et $\tau_{\text{produit\_nul}}$ ont des portées institutionnelles disjointes sur lesquelles elles sont optimales.

Cependant, dans M_{2003}, $\tau_{\text{racine\_carrée}}$ est produite dans l'environnement technologique de la racine carrée lors d'un premier temps institutionnel (∂t_1), alors que dans M_{2008} elle est produite lors d'un deuxième temps institutionnel (∂t_2) comme conséquence du théorème « produit nul ».

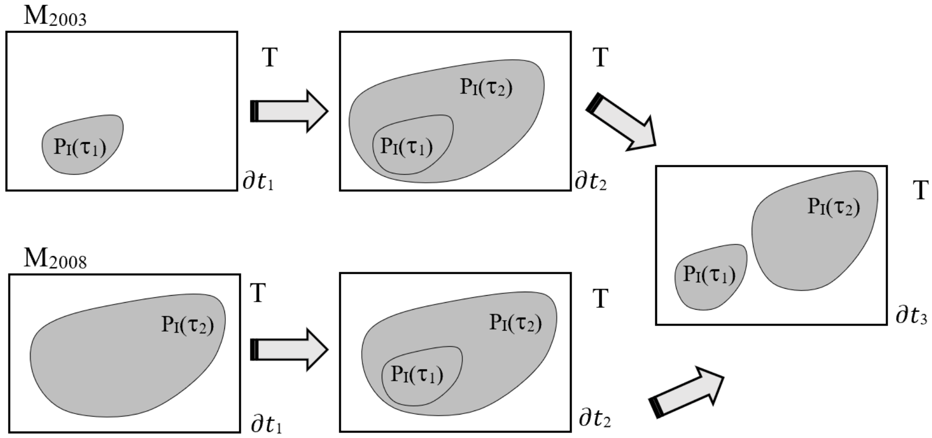


Figure 12. Deux évolutions temporelles des portées institutionnelles dans M_{2003} et M_{2008} : deux dynamiques praxéologiques. Dans ce schéma τ_1 représente $\tau_{racine\_carrée}$ et τ_2 représente $\tau_{produit\_nul}$

On peut avancer qu'à la fin des deux processus (∂t_3) la technologie de $\tau_{\text{racine\_carrée}}$ dans les deux institutions se ramènera à une même règle d'action avec un oubli institutionnel des origines de cette technique.

5. Etude de cas 2 : Évolution de la dynamique praxéologique dans la période 2016 – 2019

La vie de l'objet $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ dans le système français actuel débute en fin de collège en classe de troisième (13-14 ans) et se termine en classe de première (16-17 ans). Pour cette période scolaire, nous avons choisi une même collection de manuels, conformes aux programmes (2016 – 2019), la collection Transmath, bien diffusée dans l'enseignement français :

– Manuel Transmath, classe de 3ème, 2016, noté M3 ;

– Manuel Transmath, classe de 2de, 2019, noté M2 ;

– Manuel Transmath, classe de 1ère, 2019, noté M1.

5.1. Le début de l'évolution praxéologique : analyse de M3

Le cours commence par l'étude des équations du premier degré pour se poursuivre par celle des problèmes se ramenant au premier degré, habitat des équations du second degré sans que ces dernières soient nommées ainsi. A l'occasion d'un exercice résolu, la technique $\tau_{\text{produit\_nul}}$ est introduite pour résoudre une équation de la forme[12] $(ax+b)^2 - [k^2] = 0$. Elle est transformée en l'équation dite « équation produit nul ».

Ce processus sera attendu pour tous les exercices proposés par la suite : si nécessaire l'expression proposée doit d'abord être factorisée à l'aide d'un élément du complexe technologique « identités remarquables », objet central en fin de collège ; elle se ramène alors à la résolution d'une équation produit nul.

Dans M3, la forme des équations proposées évite l'émergence de la technique $\tau_{\text{racine\_carrée}}$: les équations de la forme $[a^2]x^2 = [k^2]$ ou de la forme $\mathrm{P}(x)^2 = [k^2]$ ne sont jamais proposées. Il n'y a donc à ce niveau scolaire aucune mise en concurrence de techniques de résolution.

5.2. L'étape intermédiaire de l'évolution praxéologique : analyse de M2

En classe de seconde, la première équation proposée en exercice résolu est de la forme $(ax + b)^2 = [k^2]$, forme absente en troisième. Le premier geste de la technique proposée est de ramener cette équation à la forme travaillée en classe de troisième, soit : $(ax + b)^2 - [k^2] = 0$ qui permet ainsi un premier élargissement de la portée institutionnelle de la technique $\tau_{\text{produit\_nul}}$ (figure 13).

Cet élargissement se poursuit par la résolution d'équations de formes nouvelles comme $k(ax + b)(cx + d) = l(ax + b)(ex + f)$. On trouvera en annexe un tableau montrant la variété des formes présentes dans les 29 exercices proposés par ce manuel.

L'environnement technologique reste le même que celui de la classe de troisième, mais la complexification du type de tâches (factoriser une expression) élargit considérablement la portée institutionnelle de la technique $\tau_{\text{produit\_nul}}$, par rapport à ce qu'elle était en classe de troisième. Ainsi la praxéologie de factorisation abordée en troisième et reprise dans le manuel M2 juste avant le paragraphe sur la résolution des équations s'en trouve renforcée, de même que le complexe technologique « identités remarquables » (comme préconisé dans le programme) et l'élément technologique produit nul.

[12] Dans cet article, toutes les variables à l'intérieur de « [...] » sont des entiers positifs non nul. Cette notation indique également le résultat de l'expression. Par exemple « $(ax + b)^2 = [k^2]$ » permet d'exprimer les équations avec un second membre étant un carré parfait.

Résoudre dans ℝ les équations suivantes :
a. $(5x+3)^2=4$ **(E₁)**
b. $3(2x+7)(2x-4)=4(x+4)(2x+7)$ **(E₂)**

Solution

a. Résolvons (E_1)

■ $(5x+3)^2=4$ équivaut à $(5x+3)^2-4=0$.
L'équation est équivalente à $(5x+3)^2-2^2=0$.

■ On factorise :
$[(5x+3)+2][(5x+3)-2]=0$
$[5x+3+2][5x+3-2]=0$
$[5x+5][5x+1]=0$

■ Ainsi $5x+5=0$ ou $5x+1=0$
$5x+5-5=0-5$ ou $5x+1-1=0-1$
$5x=-5$ ou $5x=-1$
$x=-\frac{5}{5}$ ou $x=-\frac{1}{5}$
$x=-1$ ou $x=-\frac{1}{5}$

L'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est :
$S=\left\{-1;-\frac{1}{5}\right\}$.

Méthode

→ **Étape n° 1**
On se ramène à une équation équivalente du type $A(x)=0$.

→ **Étape n° 2**
On factorise $A(x)$.
On reconnaît l'identité remarquable ❸
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
avec $a=5x+3$ et $b=2$.

→ **Étape n° 3**
Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un des facteurs est nul.

Figure 13. Exercices résolus (M2, page 71)

La dynamique praxéologique, à ce niveau, ne résulte donc pas de la mise en concurrence de deux techniques mais de l'élargissement de la portée de la seule technique institutionnelle $\tau_{\text{produit\_nul}}$.

Remarquons que ni dans M3 ni dans M2 on ne parle d'équation du second degré : en classe de troisième on introduit l'équation produit nul et en classe de seconde on distingue équations du premier degré et « équations autre que du premier degré » (figure 14).

✓ **Pour résoudre une équation (autre que du premier degré) on utilise le théorème :**
$A\times B=0$ si et seulement si $A=0$ ou $B=0$.

Figure 14. « Une équation autre que du premier degré » (M2, page 74).

Une autre remarque porte sur la résolution elle-même : une équation a (presque) toujours une ou deux solutions réelles ! Seulement deux exercices en seconde proposent des équations sans solution, mais jamais en troisième.

5.3. L' étape finale de l'évolution praxéologique : analyse de M1

En accord avec le programme, le manuel de la classe de première consacre un paragraphe entier au sujet « Résolution des équations du second degré ». La notion de *forme factorisée* introduite par la suite permet de reconnaître l'équation produit nul comme une forme de l'équation du second degré. Pour cela, comme le montre la figure 15, le manuel donne une réécriture d'une forme appelée *trinôme* (indiquée par la lettre A dans la figure 15), par la *forme canonique* (indiquée par la lettre B dans la figure 15).

Considérons le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$). Posons $\Delta = b^2 - 4ac$, alors :

$$\underbrace{ax^2 + bx + c}_{A} = \underbrace{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}_{B}$$

Figure 15. Forme canonique (M1, page 67)

Pour le type de tâches $T_{\text{équation\_degré\_2}}$, le manuel M1 commence par introduire un environnement technologique permettant de produire deux nouvelles techniques de factorisation. A leur tour, ces deux nouvelles techniques de factorisation fournissent un environnement technologique pour deux nouvelles techniques pour accomplir $T_{\text{équation\_degré\_2}}$. Encore une fois le travail sur $T_{\text{factoriser}}$ précède le travail sur $T_{\text{équation\_degré\_2}}$.

Ces deux nouvelles techniques sont $\tau_{\text{racine\_évidente}}$ et $\tau_{\text{discriminant}}$ décrites ci-après :

- La technique $\tau_{\text{racine\_évidente}}$ consiste à développer et réduire une expression algébrique pour se ramener au type de tâches $T_{\text{trinôme}}$ « Résoudre une équation trinôme[13] », à chercher une éventuelle racine évidente, et à déterminer la deuxième comme solution d'une équation du premier degré (équation du premier degré produite par le théorème sur la relation entre les coefficients et les racines du trinôme).

- La technique $\tau_{\text{discriminant}}$ consiste à développer et réduire une expression algébrique pour se ramener au type de tâches $T_{\text{trinôme}}$ « Résoudre une équation trinôme » puis à utiliser les formules donnant les racines à l'aide du discriminant.

Il y a donc trois techniques de résolution algébrique d'une équation du second degré si on ajoute à ces deux nouvelles techniques celle mise en place dans M3 et M2, à savoir $\tau_{\text{produit\_nul}}$. Sont-elles mises en concurrence ? Une remarque du manuel nous alerte (figure 16).

✔ Essayer de résoudre une équation du second degré sans utiliser la méthode générale de résolution :
- reconnaître une identité remarquable,
- une racine évidente,
- etc.

[13] Une équation trinôme est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.

Figure 16. Mise en garde sur la concurrence des techniques. (M1, page 73)

Dans cet extrait, l'usage du terme méthode générale, qui renvoie à la technique $\tau_{\text{discriminant}}$, signifie pour nous que les auteurs de M1 considèrent que cette technique a une portée pragmatique plus large que celles de $\tau_{\text{produit\_nul}}$ ou $\tau_{\text{racine\_évidente}}$ mais qu'elle n'est pas optimale sur les portées pragmatiques de ces deux techniques.

L'organisation des exercices s'inscrit dans cette logique comme l'atteste le regroupement des exercices en trois phases que nous donnons ci-après dans l'ordre chronologique.

– La première phase comporte 12 exercices mettant en concurrence, de façon implicite, les deux nouvelles techniques : en effet la technique optimale pour 3 exercices est $\tau_{\text{racine\_évidente}}$ et pour 9 exercices $\tau_{\text{discriminant}}$.

– La deuxième phase comporte 14 exercices. La consigne « résoudre l'équation, sans utiliser les formules générales de résolution » (M1, page 77) interdit explicitement $\tau_{\text{discriminant}}$ et implicitement $\tau_{\text{racine\_évidente}}$. La technique optimale est pour tous les exercices $\tau_{\text{produit\_nul}}$. La variation des différentes formes des expressions à factoriser est une reprise de celle déjà observée dans M2. Dans cette phase, il n'y a donc pas de mise en concurrence.

– La troisième phase comporte seulement 4 exercices, la consigne demandant explicitement une résolution par $\tau_{\text{produit\_nul}}$ et $\tau_{\text{discriminant}}$.

Pour les exercices 81 à 84 résoudre chaque équation de deux façons :
• en factorisant le premier membre ;
• en développant et en utilisant les formules de résolution.

81 $4x^2 - (x-2)^2 = 0.$

82 $(x+3) - x(x+3) = 0.$

83 $50 - 2(2-3x)^2 = 0.$

84 $x^2 - x - 3(x-1) = 0.$

Figure 17. Mise en concurrence de $\tau_{\text{produit\_nul}}$ et $\tau_{\text{discriminant}}$ (M1, page 77)

La double résolution exigée dans la troisième phase montre l'optimalité de $\tau_{\text{produit\_nul}}$ pour l'ensemble des tâches proposées. De fait, cette mise en concurrence organisée par M1 vise à limiter la portée institutionnelle de $\tau_{\text{discriminant}}$ en réduisant sa portée pragmatique au profit de $\tau_{\text{produit\_nul}}$.

Notons que ces trois phases contribuent au quatrième moment didactique, celui du travail des techniques au sens de Chevallard (1999, p. 253) :

> Le *quatrième moment* est celui du *travail de la technique*, qui doit à la fois améliorer la technique en la rendant plus efficace et plus fiable (ce qui exige généralement de retoucher la technologie élaborée jusque-là), et accroître la maîtrise que l'on en a : ce moment de mise à l'épreuve de la technique suppose en particulier un ou des corpus de tâches adéquats qualitativement aussi bien que quantitativement.

5.4. Synthèse

Tout au long du curriculum, trois techniques ont émergé plus ou moins tardivement : d'abord $\tau_{produit\_nul}$ (M3, M2) puis $\tau_{racine\_évidente}$ et $\tau_{discriminant}$ (M1). Soulignons que contrairement à l'étude de cas de la section 4, à aucun moment n'apparaît $\tau_{racine\_carrée}$. Donc, durant une longue période, il n'y a pas de concurrence pour $\tau_{produit\_nul}$.

L'élargissement de la portée de la technique de $\tau_{produit\_nul}$ se fait par l'enrichissement des praxéologies de factorisation tout au long du curriculum offert par les trois manuels M3, M2 et M1. Cet élargissement progressif atteste d'une continuité dans la dynamique praxéologique concernant la technique $\tau_{produit\_nul}$. Elle a aussi comme fonction en M1 de produire $\tau_{discriminant}$ et contribue donc à son environnement technologique.

Mais, il y a aussi une accélération considérable de la dynamique praxéologique, si l'on prend en compte le temps institutionnel, dans le passage de la période 1 (niveaux troisième-seconde) à la période 2 (niveau première) dans ce curriculum. Cette accélération se traduit par :

– La mise en concurrence avec d'autres techniques en période 2 contre l'absence de toute concurrence en période 1.

– La complexification de l'environnement technologique aussi bien pour la factorisation que pour la résolution des équations du second degré en période 2 contre la complexification uniquement de la factorisation de la période 1.

– Le changement de relation entre les deux types de tâches $T_{factoriser}$ et $T_{équation\_degré\_2}$ qui relève de la dialectique outil/objet présentée dans le paragraphe 1. Lors de la période 1 le type de tâches $T_{factoriser}$ est un ingrédient de la technique $\tau_{produit\_nul}$, alors que lors de la période 2 $T_{équation\_degré\_2}$ devient un ingrédient possible de $T_{factoriser}$.

Conclusion

L'*évolution* praxéologique se nourrit de *dynamiques* praxéologiques variées. Ces dynamiques sont propres à toute activité d'étude. L'étude des évolutions praxéologiques suppose la prise en compte d'un temps institutionnel plus ou moins long. Ce temps révèle des praxéologies plus ou moins pérennes pour des raisons souvent liées aux organisations didactiques de l'étude et qui, de ce fait, ne sont pas nécessairement apparentes dans les programmes.

Nous avons montré, dans la chronogenèse des portées institutionnelles, que les organisations praxéologiques s'adaptent à l'émergence de nouvelles techniques. Il s'agit d'un phénomène écologique d'amélioration de la praxis et de transformation de l'environnement praxéologique. À cet égard, les nouvelles techniques peuvent ou non émerger pour contourner ou combler une carence institutionnelle, soit liée au haut coût de la mise en œuvre des techniques existantes, soit par l'incapacité d'accomplir un ensemble de tâches. Si oui, cette émergence peut apporter des raisons d'être à de nouvelles praxéologies. La concurrence des techniques, la maturation de l'environnement technologique et les choix institutionnels conditionnent l'avenir de ces praxéologies dont certaines vont disparaître et d'autres connaître une stabilité provisoire. L'analyse en termes de dynamique praxéologique donne donc des outils pour questionner ces phénomènes écologiques mais aussi pour étudier les moments didactiques et en particulier celui du travail de la technique.

Pour le chercheur, dans un premier moment, la caractérisation des portées des techniques institutionnelles est un instrument pour décrire les parcours d'étude choisis au sein des institutions. Face à cette description, la confrontation des portées institutionnelles aux portées pragmatiques est un outil pour interroger et comprendre les choix institutionnels – ce que nous avons essayé de montrer dans les études de cas.

Dans la première étude de cas, nous avons comparé deux curriculums d'un même niveau scolaire à deux époques différentes (M_{2003} et M_{2008}). Si nous avions modélisé seulement les praxéologies stables finales, nous aurions eu l'impression qu'il s'agissait d'une organisation praxéologique identique dans les deux manuels, sans prendre en compte les organisations didactiques qui ont conduit à cette configuration. Or, notre analyse, en termes de portées, montre que cette organisation praxéologique est l'aboutissement de deux dynamiques praxéologiques différentes par l'évolution des techniques et de l'environnement technologique. En faisant l'hypothèse qu'une dynamique praxéologique impacte les praxéologies personnelles des élèves (Croset & Chaachoua, 2016), les dynamiques mises en place institutionnellement pourraient être aussi un moyen de les comprendre et de les expliquer.

Dans la deuxième étude de cas, nous avons analysé une évolution praxéologique sur un temps institutionnel long : celui de la vie officielle du type de tâches $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ depuis la classe de troisième jusqu'à la classe de première du système français actuel (2016 – 2019). Nous avons montré que deux dynamiques praxéologiques peuvent se nourrir l'une de l'autre. L'étude dans un temps institutionnel long permet aussi de repérer des périodes contrastées avec des ralentissements et des accélérations de la dynamique et d'en chercher les raisons.

S'il est vrai que les portées des techniques nous aident à déchiffrer le réel d'une institution d'enseignement, elles peuvent également nous aider à concevoir des parcours d'étude non considérés par les modèles dominants en vigueur.

Bibliographie

ARTAUD, M. (1998). Les nombres relatifs. Étude d'un compte-rendu d'observation d'une classe de cinquième. In R. Noirfalise (Ed.), *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, Actes de l'Université d'Eté* (pp. 183-198). IREM de Clermont-Ferrand. doi: http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/analyse_des_pratiques_univ_d_ete_la_rochelle.pdf.

BOSCH, M., & CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19(1)**, 77-124.

BOSCH, M., & GASCÓN, J. (2002). Organiser l'étude 2. Théories & empiries. In J-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris, *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 23-40). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. (1994) Problèmes et résultats de didactique des mathématiques. Notes pour une présentation au groupe d'étude ICMI Study 94 : Washington. doi: http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2011/11/WASH8c.pdf.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHAACHOUA, H. (2018). T4TEL un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. In J. Pilet et C. Vendeira (Eds.), *Actes du Séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM, 2018* (pp. 8-25). Paris : IREM de Paris.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique de mathématiques*, **19 (2)**, 221-265.

CHEVALLARD, Y. (2011). Les problématiques de la recherche en didactique à la lumière de la TAD. Séminaire de l'ACADIS (ADEF, Marseille). DOI : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=208

CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude – Ecologie & Regulation. In J.-L. Dorier et al. (Eds), *Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56)). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CROSET, M.-C., & CHAACHOUA, H. (2016). Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD : la praxéologie personnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **36(2)**, 161-196.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7 (2)**, 5-31.

Référence des Manuels

Manuel Triangle, classe de 3ème, Edition Hatier, 2003.

Manuel Phare, classe de 3ème, Edition Hachette, 2008.

Manuel Transmath, classe de 3ème, Edition Nathan, 2016

Manuel Transmath, classe de 2de, Edition Nathan, 2019

Manuel Transmath, classe de 1ère, Edition Nathan, 2019

Programmes, 3ème : Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008.

DANIELLY KASPARY

Univ. Grenoble Alpes, LIG et Univ. Fédérale du Mato Grosso do Sul, Capes

Kaspary.d@gmail.com

HAMID CHAACHOUA

Univ. Grenoble Alpes, LIG

Hamid.Chaachoua@imag.fr

ANNIE BESSOT

Univ. Grenoble Alpes, LIG

annie.bessot@gmail.com

Annexe

Recueil des types de tâches dans trois manuels, période 2016 -2019 (collection Transmath)			
	Technique	Ordre chronologique des types tâches présentés dans le cours	Ordre chronologique d'apparition des types tâches présents dans les exercices. Le nombre d'occurrence est représenté entre parenthèses
3ème	$\tau_{produit\_nul}$	$(ax + b)^2 – [k^2] = 0$ $x^2 + [2c]x + [c^2] = 0$ $ax^2 + bx = 0$	$(ax + b)(cx + d) = 0$ (8) $k(ax+b)(cx+d) = 0$ (1) $ax^2 + bx = 0$ (2) $[a^2]x^2 – [k^2] = 0$ (2) $x^2 + [2c]x + [c^2] = 0$ (1) $(ax + b)^2 – [k^2] = 0$ (1)
2de	$\tau_{produit\_nul}$	$[a^2]x^2 - [k^2] = 0$ $k(ax + b)(cx + d) = k'(ax + b)(ex + f)$	$(ax + b)(cx + d) = 0$ (6) $[a^2]x^2 – [k^2] = 0$ (2) $(ax + b)^2 = [k^2]$ (3) $x^2 + [k^2] = 0$ (1) $x^2 = k$ (1) $[a^2]x^2 \pm [2ac]x + [c^2] = [k^2]$ (1) $(ax + b)(cx + d) + (ax + b)(ex + f) = 0$ (1) $(ax + b)(cx + d) – k(ax + b)(ex + f) = 0$ (2) $[k^2]\ (ax + b)^2 = [l^2]\ (cx + d)^2$ (3) $(ax + b)2 = –[k^2]$ (1) $k(ax + b)(cx + d) = k'(ax + b)(ex + f)$ (2) $k([na]x+[nb])(cx+d) = l([ma]x+[mb])(ex+f)$ (2) $(ax + b)(cx + d) = [c^2]x – [d^2]$ (1) $[a^2]x^2\pm[2ac]x+[c^2] = [b^2]x^2\pm[2bf]x+[f^2]$ (1) $[a^2]x^2–[c^2]+k([a^2]x^2\pm[2ac]x+[c^2]) = ax–c$ (1) $([na]x + [nb])^2 = ax + b$ (1) $k(ax + b)^2 = l(cx + d)^2$ (1)
1ère	$\tau_{produit\_nul}$ $\tau_{racine\_évidente}$ $\tau_{discriminant}$	$ax^2 + bx + c = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$ (avec les variantes sur la position des termes) (12) Les différentes formes de la classe de 2de (18)

Légende pour la formalisation des types de tâches :

- […] : entre crochet figure la valeur du résultat de l'opération.
- Sauf x, les autres lettres représentent des nombres entiers.

ALAIN KUZNIAK, JEAN-CLAUDE RAUSCHER

IMPLICATION DANS UN ENSEIGNEMENT RENOUVELÉ ET RECHERCHES EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

HOMMAGE À FRANÇOIS PLUVINAGE ET À LA PENSÉE VAGABONDE ET ACTIVE D'UN CHERCHEUR ET HOMME RARE

Abstract. Involvement in a renewed teaching and research in the mathematics didactics. Tribute to François Pluvinage and the active and vagabond thinking of a researcher and a rare man. François Pluvinage did not associate his name with a didactic theory, but more profoundly he animated with his powerful and friendly breath a school of thought, a way of doing and acting always open to the world and the future. Through this article, which is very incomplete, we would like to specify his originality as a researcher particularly involved in the community. Throughout this evocation of his scientific career in phase with the evolution of educational practices, the reader will be invited to rediscover some of the traits of his rich and endearing personality.

Résumé. François Pluvinage n'a pas associé son nom à une théorie didactique, mais plus profondément il a animé de son souffle puissant et amical une école de pensée, une manière de faire et d'agir toujours ouverte sur le monde et l'avenir. A travers cet article, bien incomplet, nous souhaitons préciser son originalité en tant que chercheur particulièrement impliqué dans la cité. Tout au long de cette évocation de son parcours scientifique en phase avec l'évolution des pratiques éducatives, le lecteur pourra retrouver certains traits de sa personnalité riche et attachante.

Mots-clés. Didactique, Enseignement des mathématiques, Hommage.

Ainsi François Pluvinage n'est plus, lui que l'on pensait pour toujours à nos côtés, nous accompagnant de sa tranquille assurance et de sa forte et belle voix. Il a disparu dans la froide cohorte des malades emportés par la pandémie associée à la Covid-19. Qu'est-ce qui fait que sa mort touche au plus profond toutes les personnes qui l'ont connu ? Et pourquoi tant de tristesse et de peine chez tous les chercheurs et étudiants de son équipe à Strasbourg, à Mexico, et bien au-delà chez les chercheurs et enseignants qui ont croisé sa route ? Pourquoi ce sentiment de perte chez ses anciens doctorants aujourd'hui devenus chercheurs reconnus et réputés au Canada, au Chili, au Mexique, en Grèce, à Chypre ou encore au Maroc et au Brésil ?

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 25, p. 271 – 290.

François Pluvinage n'a pas associé son nom à une théorie didactique, mais plus profondément il a animé de son souffle puissant et amical une école de pensée, une manière de faire et d'agir toujours ouverte sur le monde et l'avenir. A travers cet article, bien incomplet, nous souhaitons ici préciser son originalité comme chercheur particulièrement investi dans la cité. Tout au long de cette évocation de son parcours scientifique, le lecteur pourra retrouver quelques traits de sa personnalité si riche et si attachante.

1. Une vision de la didactique des mathématiques pour les enseignants et avec les élèves

François Pluvinage appartient à la génération des chercheurs et enseignants qui ont fondé, au début des années 70, la didactique des mathématiques en France. Il y occupe cependant une place originale de par sa volonté, partagée par toute l'équipe de Strasbourg, de privilégier en tout premier lieu l'évolution réelle de l'enseignement dit ordinaire dans les classes. Membre, dès sa création en 1968 de l'IREM de Strasbourg (alors dirigé par Jean Frenkel), en tant que maître-assistant, il a pu suivre l'évolution de l'enseignement et de la recherche en didactique tout au long de cinquante années. Il y est resté constamment engagé, à la fois dans la recherche et l'enseignement, tant en France comme professeur d'Université qu'au Mexique où, après son départ à la retraite, il a été chercheur associé au très réputé Cinvestav de Mexico, pendant près de vingt années.

1.1 Sur la didactique des mathématiques

François Pluvinage a peu écrit sur les aspects purement théoriques de la didactique et pour décrire sa pensée et ses partis-pris, nous nous appuierons sur un article paru dans les Annales (Pluvinage, 2004). Cet article, intitulé *Sur les méthodes et les résultats de la didactique des mathématiques*, prolonge une communication au colloque Argentoratum organisé en 2002 à Strasbourg. François Pluvinage s'y livre avec modestie et, semble-t-il, quelques réticences à un exercice de généralisation et de présentation globale sur la portée de la didactique des mathématiques.

> J'ai relativisé sa portée, pour que le lecteur ne confère pas à cet article un caractère trop fondamental ou généralisant, qui n'était pas recherché. (Ibid., p. 7)

L'ensemble constitue un témoignage précieux, car il émane d'une personnalité qui a participé à la mise en place de la didactique des mathématiques en tant que domaine autonome de recherches avec ses propres méthodes et développements théoriques. Pour introduire son propos et comme il le faisait souvent, François Pluvinage utilise des sources allemandes pour montrer l'ancienneté de la didactique hors des murs de la francophonie :

> Ainsi en langue allemande, le Meyers Konversations-Lexikon, dont nous avons consulté la sixième édition en vingt volumes, datée de 1908, indique pour didactique (nous traduisons ; le texte original allemand est en note) : discipline ou science de l'enseignement, constituant la partie majeure de la pédagogie, laquelle englobe de plus la formation en science de l'éducation. La didactique apparaît pour partie comme didactique générale, qui développe les principes de base de l'enseignement à partir de fondements psychologiques, et pour partie comme didactique spécialisée ou méthodologie particulière, qui exploite ces principes de base dans les différentes disciplines d'enseignement. (Ibid., p. 9)

Il tient à inscrire la didactique dans une histoire et fait notamment référence à Raymond Buyse qui, en 1935 dans un ouvrage intitulé *L'expérimentation en pédagogie*, avait proposé une introduction à la didactique expérimentale en pastichant le livre de Claude Bernard, *Introduction à l'étude de la médecine expérimentale*. Il note que dans son ouvrage Raymond Buyse développe une pédagogie scientifique dont les trois piliers sont la biologie, la psychologie et la didactique. Cette dernière est plus vue comme une méthodologie.

Le développement de la didactique épouse alors l'évolution des mathématiques savantes marquées par le triomphe d'une approche structuraliste et François Pluvinage indique :

> Il y eut donc une convergence remarquable d'opinions favorables à la présentation, dès l'enseignement élémentaire, des mathématiques à partir des idées de structures. L'ouvrage, Learning and the nature of mathematics, réunit les signatures, entre autres, de Jean Dieudonné, Zoltan Dienes, Hans Freudenthal, Robert Gagné, Jean Piaget. Aux deux extrémités de cette liste figurent deux éminentes personnalités qui ont soumis leurs vues de spécialistes (respectivement mathématicien et psychologue clinicien) aux pédagogues, sans s'avancer directement sur le terrain de l'enseignement. Au contraire, Zoltan Dienes, Hans Freudenthal et Robert Gagné sont intervenus sur ce terrain, en envisageant explicitement des problèmes signalés dans le système éducatif et en avançant des hypothèses ou des propositions. (Ibid, p. 13)

Il souligne avec regret que les linguistes sont absents de l'ouvrage cité et il rend compte de l'état d'esprit qui régnait alors vis-à-vis de la mise en œuvre de ces mathématiques modernes dans l'enseignement :

> Il y avait évidemment des sceptiques, souvent peu concernés eux-mêmes directement, qui contemplaient ce mouvement dans l'enseignement mathématique avec une certaine condescendance.
>
> De l'autre côté, c'est-à-dire parmi ceux qui se déclaraient partisans de changements, il n'y avait pas unanimité d'opinions.
>
> Les enthousiastes étaient persuadés que la Mathématique dans l'enseignement allait provoquer des changements bénéfiques […] devant aussi porter sur les méthodes

> d'enseignement, désormais moins dirigées vers l'acquisition de recettes que de méthodes de travail et de recherche. [...]
>
> Au contraire, les prudents estimaient que de réels changements de méthode ne peuvent pas résulter de changements de contenus d'enseignement, en l'absence d'études spécifiques. (Ibid., p. 14)

Avec le recul, on le sent proche de la position d'Hans Freudenthal dont il rapporte l'irritation contre la mode de l'époque à faire des programmes sans étude précise de leur effet et de leur mise en œuvre :

> Dans ces dernières années, l'accent s'est porté sur les programmes. C'est inquiétant cette activité des programmeurs. A maintes reprises, j'ai insisté sur les recherches franchement didactiques. [...] Si l'on adopte l'idée de l'apprentissage de l'invention, la matière qui doit être analysée, avant qu'on ne construise un système d'enseignement, n'est plus la matière à enseigner, mais le processus d'invention de cette matière. (Ibid., p. 16)

Dès cette époque, François Pluvinage dit avoir soutenu la possibilité d'une didactique basée sur les situations pour le second degré et il semble avoir beaucoup attendu de Brousseau, bien que les recherches de cet auteur ne portaient que sur le premier degré et les apprentissages fondamentaux. Avec une ironie un rien désabusée, il note sa désillusion de l'époque :

> C'est ainsi que le premier fascicule de formation des maîtres rédigé par Guy Brousseau sous le titre de *Mathématiques pour l'enseignement élémentaire (1970)* comporte dans sa table des matières un chapitre 21 à l'intitulé prometteur, Didactique et pédagogie des mathématiques, mais la rédaction du-dit fascicule s'achève à la fin du chapitre 20. (Ibid, p. 16)

Il conclut son parcours historique sur l'émergence de la didactique des mathématiques sur les ruines d'un enseignement basé sur une approche structuraliste par ces propos optimistes :

> Aujourd'hui en tout cas, il y a eu suffisamment de travaux en didactique des mathématiques pour qu'une définition très simple suffise
>
> Définition. La didactique des mathématiques est la discipline qui étudie l'enseignement des mathématiques. (Ibid, p. 18)

1.2 Questions sur la méthode

Dans son article de 2004, François Pluvinage s'interroge sur les questions de méthodes en didactique des mathématiques et il propose un lot de questions qui selon lui valent la peine pour un didacticien ou une équipe de se poser, afin de faciliter l'élaboration de son agenda et la sélection de ses routines de travail. Nous les parcourons ici sans les détailler et pour rendre compte de son exigence méthodologique. Cette liste de questions guidait profondément son travail de recherche au niveau des classes, mais aussi sa direction exigeante et méticuleuse de travaux de thèses.

1. *Domaines connexes.* Rencontre-t-on dans d'autres disciplines des concepts ou des résultats dont une réflexion que l'on engage pourrait profiter ?

2. *Importations.* Comment s'adresserait-on aux auteurs ou aux spécialistes d'une discipline pour justifier l'utilisation en didactique des mathématiques d'un de leurs concepts ou résultats ?

3. *Consommation de didactique des mathématiques.* Quelles sont les contraintes, les conditions d'emploi, d'une méthode ou d'un résultat de didactique des mathématiques que l'on souhaite utiliser ?

4. *Ingénierie.* Quelles phases distinguer et quels moyens envisager pour un projet d'expérimentation, de recherche ? Penser l'ingénierie de bout en bout dès le départ permet d'éviter bien des impasses ou des travaux inachevés.

5. *Intérêt des participants.* Pour chacune des personnes (élèves et/ou professeurs) impliquées dans un projet de recherche, a-t-on veillé à l'intérêt qu'elle peut y trouver ?

1.3 Un regard didactique sur les contenus mathématiques : importance et nécessité des registres de représentation sémiotique

François Pluvinage est un didacticien avec une forte formation en mathématiques et il accorde une importance essentielle aux contenus mathématiques en disciple de Glaeser et en relation avec son grand ami Jean Martinet (fondateur de la Commission permanente de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, décédé en 1990 à l'âge de 52 ans). Il s'interroge sur ce que peut et doit être un regard didactique sur la présentation de contenus mathématiques. Ce point est développé en détail dans son article de 2004 à partir d'un exemple extrêmement précis et détaillé qui fait référence à des discussions avec Duval, l'autre figure emblématique de l'équipe doctorale strasbourgeoise. Il y est donc beaucoup question de registres de représentation, de fonctions de traitement et de conversion. Assez typique de la manière de penser de François Pluvinage, le texte devient très précis et s'appuie sur des exemples qui le préoccupaient au moment de sa présentation : la droite numérique et les nombres décimaux, mais aussi la notation d'une partie d'échecs.

L'approche en termes de registres lui apparaît comme un pendant indispensable à l'étude épistémologique des contenus mathématiques. Elle éclaire les difficultés des élèves et peut guider vers des solutions contournant ces difficultés. Il restera fidèle à cette approche jusqu'à la fin de son activité de chercheur. En travaillant avec

Adjiage, bien sûr, sur les nombres rationnels et la proportionnalité (Adjiage & Pluvinage, 2000, 2007). On retrouve cette importance à ses yeux de la prise en compte des registres et de l'étude épistémologique dans un article écrit avec Raymond Duval (Duval & Pluvinage, 2016) à propos des apprentissages en jeu qui permettent aux élèves d'accéder à l'algèbre au collège. Et encore, tout récemment, il utilise l'apport des registres (Páez-Murillo & Pluvinage, 2019) pour donner une analyse fine des questions de visualisation en relation avec l'étude des asymptotes en contexte technologique.

Son poste de chercheur à Mexico, à partir de 2002, l'a conduit en effet à explorer davantage les contenus mathématiques enseignés au lycée ou à l'université comme l'analyse. Il intégrera dans ses recherches les apports de Dubinsky et de la théorie APOS. Il utilisera aussi certains aspects de la théorie des ETM dont il suivait attentivement l'évolution depuis son émergence. Les ETM lui ont permis d'articuler les domaines mathématiques ainsi que des disciplines différentes comme la physique et les mathématiques sur des travaux de cinématique (Uribe-Martinez, Pluvinage & Montaño Zetina, 2019). Ils lui donnent aussi l'occasion de s'assurer de l'impact des outils technologiques dont on peut souligner la très grande importance que François Pluvinage leur accordait, depuis leur première apparition dans l'enseignement des mathématiques (Carion-Miranda, Pluvinage & Adjiage, 2016, Páez-Murillo & Pluvinage, 2019). Il avait ainsi été très tôt impliqué dans les études internationales sur l'usage des technologies nouvelles, notamment en tant qu'organisateur la première étude ICMI, à Strasbourg en 1985, sur l'informatique et les ordinateurs.

Quant à l'exigence d'un regard précis et approfondi sur les contenus mathématiques, elle se retrouve dans tous les textes qu'il a écrits. En complément des textes déjà cités, on pourra lire la remarquable analyse du problème de la ruine d'un joueur dans Zaki et Pluvinage (1991). Cette interrogation sur le savoir nourrissait toutes les longues conversations qu'on pouvait avoir avec lui et qui passaient toujours par un moment d'étude d'un exemple, d'un exercice, d'une idée mathématique…

1.4 De l'évaluation des élèves comme un instrument essentiel dans la recherche en didactique des mathématiques

Mais toute méthodologie de recherches suppose des techniques de recueil et d'analyse de données. Dans son article bilan de 2004, mais ses recherches allaient encore continuer pendant plus de quinze ans, François Pluvinage décrit la méthode suivie à Strasbourg pour développer ses recherches en didactique en observant des classes ordinaires qui se déroulaient en conformité avec les programmes de mathématiques en vigueur.

> Non sans tourner à l'occasion les regards en amont (l'école) ou en aval (le lycée), l'équipe strasbourgeoise avait donc décidé d'entreprendre des recherches sur l'enseignement des mathématiques au collège. Le programme de travail était très standard : -des séances régulières de séminaire, -des observations empiriques dans des classes, -une investigation plus contrôlée, avec un appui sur des questionnaires d'évaluation. (Ibid., p. 19)

François Pluvinage précise l'importance qu'il accorde à l'évaluation des élèves dans les études en didactique et développe l'idée d'une *évaluation descriptiv*e.

> Quant aux évaluations, je me rends compte aujourd'hui, avec le recul, […] qu'il ne s'agissait ni d'évaluation formative, ni d'évaluation sommative, mais d'une évaluation qui peut être qualifiée de descriptive. A l'époque, nous parlions d'enquête ; le terme est parfaitement approprié, mais il recouvre un éventail de pratiques très diverses, dont certaines, sans rapport avec nos centres d'intérêt. (Ibid., p. 20)

Pour faire comprendre ce terme d'évaluation descriptive, il fait référence aux statistiques descriptives :

> En songeant aux statistiques descriptives, nous estimons justifié de parler d'évaluation descriptive. De même que les premières se proposent de dégager les grandes tendances observables dans un corpus et au contraire les cas qui semblent singuliers, de même les évaluations que nous élaborions et analysions étaient destinées à permettre de repérer les démarches de réponse mises en œuvre pour certains traitements mathématiques, autant les démarches communes à beaucoup d'élèves que celles qui peuvent présenter des singularités. (Ibid., p. 20)

Cette importance de l'évaluation est cruciale dans le développement de la recherche de François Pluvinage et nous le verrons aussi plus loin dans son mode de relation avec les classes. Son premier article dans une revue internationale est paru dans *Educational Studies in Mathematics* (1973) sous le titre : *Sur l'assimilation des programmes de 6ème-5ème.*

La présentation de ses auteurs a un parfum suranné à l'urbanité oubliée : Mademoiselle Anne Scherpereel, Messieurs Pierre Buisson, Bernard Kittel, François Pluvinage, Mademoiselle Catherine Bloch et Monsieur Raymond Duval.

Nous laissons le lecteur seul avec sa perplexité en découvrant les notions évaluées à l'époque :

> Nous avons choisi les connaissances qui d'une part ont fait l'objet d'un apprentissage que nous pensions suffisant et qui d'autre part sont nécessaires à la compréhension des programmes de quatrième.
>
> En fonction de ces critères, nous avons retenu :
>
> - la manipulation des symboles ensemblistes : $\in$, $\subset$, $\cap$, $\cup$.

- les notions d'application et de bijection.

- les propriétés des relations dans un ensemble.

Nous avons exclu $\mathbb{Z}$ parce que des notations multiples sont utilisées suivant les classes.

Cette centration sur l'évaluation va au-delà des contenus mathématiques, car il s'agit de repérer les apprentissages sous-jacents pour en faciliter et orienter l'enseignement. Sa thèse d'État (Pluvinage, 1977) porte sur les difficultés des exercices en mathématiques et elle ouvre un champ d'observation crucial pour guider le travail des enseignants.

Dans ce travail, François Pluvinage prend comme point de départ une classification des énoncés d'exercices mathématiques en fonction de la complexité cognitive des connaissances nécessaires à leur résolution (Wilson, 1971). A partir de la notion de *faits spécifiques* (connaissances isolément mémorisées et formulées) et de *concepts* (ensemble de faits spécifiques), cette taxinomie distingue quatre niveaux de difficulté allant de la connaissance de faits spécifiques puis de concepts ; à leur utilisation dans des exercices d'application puis dans des problèmes de découverte.

L'apport original que François Pluvinage accorde à cette classification est de constituer un pas important vers l'idée « d'un espace de difficulté », un espace qui est son objet de travail. Mais, différence fondamentale avec l'approche de Bloom et de Wilson, le repérage des difficultés ne va pas en rester à des définitions a priori. Il va être affiné et développé par des « enquêtes multifactorielles se basant sur des questionnaires à plusieurs modalités » où, sur une population d'élèves donnée, sont observées « les variations de réactions entrainées par des variations d'exercices ». La prise en compte et la conception d'outils statistiques pour concevoir et exploiter ces enquêtes est une dimension essentielle du travail de recherche de François Pluvinage (Duval & Pluvinage, 1976). On la retrouve aussi à propos d'une étude sur la question de l'enseignement de la proportionnalité (Dupuis & Pluvinage, 1981). Il suit alors avec intérêt les travaux de Régis Gras qui contribuèrent à la mise au point du logiciel de traitement d'évaluations CHIC.

Il met aussi en évidence l'importance des formulations de tâche pour évaluer précisément une compétence. Ainsi pour évaluer la compétence « savoir construire la bissectrice d'un angle donné », l'analyse des résultats montre qu'il n'est pas du tout équivalent de demander cela pour un angle représenté isolément ou un angle dans un triangle ABC. Dans ces deux versions se pose la question de la désignation, de la visualisation et du repérage d'objets géométriques. Ce genre d'observations et de prises de conscience permet alors de dépasser la notion de « remédiation » alors à la mode, pour se poser la question des apprentissages à envisager et de leurs enchaînements (Pluvinage, 1989).

Repérer les compétences mises en jeu en mathématiques restera un objet de travail jusqu'à la fin de son activité de chercheur. Ainsi avec Robert Adjiage (Adjiage & Pluvinage, 2012), il a retravaillé la notion de compétences pour :

> présenter, justifier et développer l'idée que les savoirs mathématiques relevant du domaine numérique, allant des entiers naturels munis des quatre opérations arithmétiques aux réels utilisés en analyse, relèvent de compétences nettement séparées et proposer une organisation en strates de compétence caractérisées par des modes de pensée et des formes d'expression qui les distinguent nettement les unes des autres. (Ibid., p. 48)

1.5 Sur la nécessaire observation des classes : Mais non, Marina !

L'observation des classes faisait partie de la méthode de recherche mise en œuvre par François Pluvinage dès les années 70 à Strasbourg. Il s'y ajoute aussi une mise à distance de la didactique de la formation et de l'enseignement des maîtres, car il avait comme idée que l'observation des classes était prioritairement nécessaire à la formation des enseignants.

> Une formule qui s'avère sans conteste la plus féconde n'est pas celle d'un enseignement de la didactique, mais celle de la recherche-action telle qu'elle peut être pratiquée dans les IREM, avec un esprit d'égal niveau de contribution des participants. S'agit-il d'une méthode ? Probablement pas, mais bien plutôt d'un état esprit (Pluvinage, 2004, p. 38).

Dans cette optique, il a multiplié les observations de classes mises au cœur d'un dispositif de formation d'enseignant au Mexique. Ces enseignants s'engageaient dans des recherches conduisant à un master ou à un doctorat en didactique des mathématiques. Pour qui souhaite saisir la pensée et le style de François Pluvinage, on ne peut ici qu'inciter à lire l'article paru dans les Annales (Pluvinage & Rigo-Lemini, 2008).

Ce texte est intitulé *Mais non, Marina !* dans une allusion pleine de malices à une de ses phrases les plus utilisées en contexte familial. François Pluvinage reprend, dans un contexte contemporain, l'approche maïeutique dont il essaie de montrer la richesse, l'intérêt et les limites dans l'enseignement.

> Plusieurs des courants actuels de l'enseignement des mathématiques peuvent nous amener à accorder à la maïeutique socratique une place dans la réflexion didactique d'aujourd'hui : l'enseignement dialogué bien sûr, mais aussi l'enseignement fondé sur la résolution de problèmes, ainsi que la RME (*Realistic Mathematics Education*) et l'usage de la modélisation. Dans tous ces cas, le présupposé pédagogique est qu'une partie importante des acquisitions mathématiques de l'élève ne lui est pas donnée de l'extérieur, mais au contraire résulte de son activité intellectuelle propre. (Ibid., p. 41)

Il narre avec brio et humour une séance de classe sur la proportionnalité. D'entrée le ton est donné, nous sommes au théâtre avec d'une part le « chœur des élèves » et de l'autre « la maîtresse » :

> Maîtresse. – Voyons. Quelle est la première question ?
>
> Chœur des élèves. – Lequel des quatre a nagé la plus grande distance ? Dario.
>
> Maîtresse. – Dario.
>
> Chœur des élèves. – Qui a nagé le moins longtemps ? Beto. Qui a nagé le plus vite ?
>
> *Une majorité avance sans trop de conviction la réponse* Catalina.
>
> Maîtresse. – Qui a nagé le plus vite ? Chœur des élèves. – Beto. (Ibid., p. 47)

Par la suite, les élèves éprouvent des difficultés à résoudre le problème. Cependant, une élève propose une solution au tableau qui aurait pu débloquer la situation :

> Une élève douée, nommée Marina, fit une proposition de table de proportionnalité. La maîtresse l'avait tout d'abord crue fausse et l'avait donc rejetée, avant de reconnaître son exactitude sans pour autant lui donner droit de cité. (Ibid., p. 49)

François Pluvinage pointe alors l'errance pédagogique de la maîtresse qui a rejeté sans la comprendre la proposition de Marina. Mais, il ne la stigmatise pas, bien au contraire.

> A tête reposée, on en prend très vite conscience, mais cela échappe facilement lorsque l'on est en train de diriger une classe. De plus, seule la première intervention de Marina a indiqué, et encore de manière allusive, qu'elle prenait pour référence le temps de Beto. Quel lecteur peut certifier que dans les mêmes circonstances il aurait saisi la proposition de Marina, s'il n'y avait pas réfléchi au préalable ? (Ibid., p. 49)

Par la suite, il reprend en la comparant à la séance de classe le dialogue de Menon. Il utilise notamment pour son analyse, les idées de décomposition dimensionnelle et de recomposition de figures développées par Duval. Au passage, il s'interroge :

> Peut-on dans ce cas dire de Ménon que c'est un élève au second degré, ou un élève-maître ? (Ibid., p. 46)

Et il conclut son étude, en dégageant deux idées intéressantes sur l'art pédagogique : la patience pédagogique versus l'impatience pédagogique ainsi que « le manque à apprendre ».

> Le dialogue du Ménon, pour sa part, est une illustration de patience pédagogique, mais on peut aussi y pointer certain « manque à apprendre ». En ce qui concerne la terminologie, tout ce qui eut pu être dit de relatif aux triangles, en particulier le triangle rectangle isocèle et son hypoténuse, est totalement absent. Pour ce qui est de la

> géométrie, tout son aspect dynamique, à commencer par la considération de déplacements de figures, reste ignoré. (Ibid., p. 57)

Mais là encore, il vient au secours du professeur Socrate :

> Et reconnaissons aussi que, contrairement aux élèves d'une classe, l'esclave du dialogue n'est pour Socrate qu'un élève de circonstance, pour lequel il n'y a pas un projet de formation. (Ibid., p. 57)

Toute la manière de François Pluvinage est là, il dit les choses avec nuance et sans être péremptoire, il essaie de comprendre les points de vue et les difficultés qui font partie du jeu. Il pointe cependant ce qui pourrait être un point de relance et de changement des règles si on y portait plus d'attention.

1.6 Diffuser et discuter les recherches : les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives

Le séminaire de l'école doctorale de Strasbourg a été créé pour favoriser les échanges entre chercheurs et enseignants strasbourgeois à propos des recherches en cours. Cependant, la nécessité de sa publication dans une revue s'est vite imposée pour assurer la diffusion, la discussion et la pérennité des idées présentées ainsi que des développements nouveaux qui émergeaient au sein de l'équipe. C'est ainsi qu'en 1988, les *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* sont fondées par Raymond Duval et François Pluvinage.

Après un départ dynamique et des publications annuelles qui respectent la fréquence indiquée par son titre, la revue souffre ensuite des problèmes institutionnels qui touchent la recherche en didactique à Strasbourg à la suite de la disparition de l'école doctorale. Cependant relancée par le colloque Argentoratum en 2002, la revue adopte sa présentation actuelle et reprend un rythme annuel de publication, rythme qu'elle a pu tenir jusqu'à aujourd'hui avec 18 numéros parus depuis 2003. Accompagné successivement par Alain Kuzniak, Eric Roditi, Philippe Richard et Laurent Vivier, François Pluvinage reste à la manœuvre en maintenant l'orientation et l'ouverture souhaitées par ses fondateurs. Dès le départ, les principes de la revue sont affirmés et continuent de nourrir la ligne éditoriale.

> La revue est ouverte à tout type de recherche. Les articles peuvent être de nature théorique, en relation étroite avec une expérimentation dans le cadre d'un enseignement, ou constituer des comptes rendus d'expériences d'enseignement appuyées sur un cadre théorique explicite.
>
> Les articles peuvent concerner tous les cadres d'enseignement dans des contextes socioculturels variés et aussi s'intéresser à la formation, initiale et continue, des enseignants.

Depuis la création de la revue, les *Annales* souhaitent ainsi témoigner d'une ouverture non dogmatique sur tous les courants de la recherche en didactique tant au niveau français qu'au niveau international. Les fondateurs souhaitaient se différencier de la ligne éditoriale de la revue française phare de l'époque, *Recherches en didactique des mathématiques,* qui privilégiait alors nettement un certain mode de pensée et de recherche dans lequel François Pluvinage et Raymond Duval ne se retrouvaient pas toujours.

Il est certain que les *Annales* ne seront plus tout à fait les mêmes dans l'avenir, mais tout porte à croire qu'elles resteront fidèles à cet esprit d'ouverture bienveillant sur toutes les approches fondées sur une réelle expérimentation en relation avec la vie des classes.

2. Le chercheur dans la cité

La dynamique de la recherche impulsée par les évaluations des élèves a d'entrée été associée à un fort engagement de François Pluvinage dans la vie des classes en collaboration avec les enseignants. C'est ainsi que ces recherches, entamées avec un groupe IREM dès 1970, ont été poursuivies en s'appuyant sur les résultats et méthodes dégagés dans sa thèse d'état. Dans le cadre de l'IREM de Strasbourg, sous sa direction ainsi que celle de Raymond Duval, des groupes de recherches se sont mis à dégager l'aspect multidimensionnel des compétences mises en jeu dans un domaine et à élaborer et à expérimenter non seulement des activités propices au développement des apprentissages, mais aussi leurs enchaînements. Ces travaux ont toujours été communiqués et diffusés dans le cadre des commissions Inter-IREM en particulier dans le cadre national du « Suivi scientifique des nouveaux programmes » (1986-1989).

Parallèlement, en relation avec Régis Gras, François Pluvinage a pu influencer des opérations comme l'opération EVAPM (Évaluation des programmes de mathématiques) dirigée par un de ses étudiants en école doctorale, Antoine Bodin, dans le cadre de l'Association des Professeurs de Mathématiques. Il s'est aussi impliqué dans le domaine des évaluations au niveau national à la Direction de l'Évaluation et de la Prospection (Pluvinage et Rauscher, 1990).

Cela a mobilisé une part croissante de son temps, mais lui a aussi permis d'agir, comme nous le verrons plus tard, sur la composition des programmes scolaires de l'époque.

2.1 Comment impliquer les élèves dans des activités mathématiques ?

Dans les cours de didactique et dans la filiation de Georges Glaeser, François Pluvinage soulignait l'importance de voir les mathématiques non pas comme une discipline morte, mais comme un terrain de découvertes et d'étonnements. Mais se posait la question pour les enseignants de savoir comment impliquer les élèves dans de véritables activités mathématiques. Paradoxalement, la réforme dite des « mathématiques modernes », instaurée dans l'enthousiasme de cette époque, ne facilitait pas la tâche des enseignants. Malgré ses intentions affichées de renouveler non seulement les contenus, mais aussi les façons d'enseigner pour dépasser une pédagogie de l'exposition, les enseignants étaient concrètement mis dans l'embarras.

En collège, les programmes nouveaux insistaient surtout sur la mise en place d'un langage ensembliste et relationnel et sur des définitions d'objets mathématiques au sein de rigoureuses théories axiomatiques. Ces instructions privaient de véritables supports d'activités et d'étonnements à offrir aux élèves. Ces derniers manifestaient ennui et incompréhension.

De même, dans la conduite des classes de fin de lycée, la volonté de donner aux élèves l'occasion de développer de véritables démarches de découverte et de réflexion ne rencontrait pas de succès non plus. Pressé par l'obligation de « terminer le programme » en vue du baccalauréat, les quelques tentatives de sortir du cadre de problèmes d'applications classiques pour confronter les élèves à des « problèmes de recherche » restaient inabouties faute de temps bien sûr, mais surtout parce que mal choisis, trop difficiles, et obligeant en fin de compte à donner les solutions.

Le chemin restait à trouver… A l'IREM de Strasbourg sous la direction de Georges Glaeser, une équipe conduite par François Pluvinage s'est mise en place pour produire des fiches mathématiques destinées aux professeurs et aux élèves de collège pour prôner une méthode qui tournerait le dos à « la pédagogie de l'exposition » au profit d'une « pédagogie dynamique » !

Le fichier comportait des « feuilles d'instructions » perforées pour être insérées dans un classeur personnel feuilles à mettre en regard avec des feuilles quadrillées destinées à recueillir les productions des élèves. Les contenus étaient ceux dictés par les programmes et mettaient donc l'accent sur les ensembles, les relations et la logique. Dans ce cadre contraint et abstrait, les fiches étaient conçues dans l'intention de susciter chez les élèves sous la conduite du professeur, initiative, réflexions et curiosité. Un exemple :

> Un ensemble Z possède 10 éléments. Combien d'éléments possède le carré cartésien $Z \times Z$? Le produit cartésien $X \times Y$ de deux ensembles possède un élément de moins que $Z \times Z$. Que peut-on dire du nombre d'éléments de X et de Y ?

La préface des fiches d'instruction rédigée par François Pluvinage montre combien il était soucieux d'établir une interaction de l'ouvrage avec les lecteurs. Il incite les élèves et les professeurs à être en éveil dès la lecture des instructions et pour cela il est précisé :

> Nous avons volontairement glissé quelques erreurs dans les feuilles d'instructions.

Et d'un trait d'humour caractéristique, il leur signale :

> Il est cependant possible que s'ajoutent à cette gamme d'erreurs sélectionnées avec soin, d'autres erreurs, involontaires celles-ci, malgré l'attention portée à la confection de l'ouvrage.

Dès 1972, il proposait de réfléchir à la notion d'exercice dans un texte intitulé *Exercices de mathématique* (Pluvinage, 1972). Il y évoque la notion traditionnelle d'exercice « constitué d'un énoncé conduisant à la rédaction d'une réponse juste ou fausse », non pas pour la bannir, mais pour dire que « ce n'est de loin pas la seule activité possible permettant un entraînement intellectuel ». Par cette formulation subtile, il tente d'amener ses interlocuteurs à réfléchir à leurs pratiques et à s'ouvrir à de nouvelles perspectives.

Il propose ainsi ce qu'il appelle des *formules* qu'il a essayées en sixième comme le « jeu de la boîte noire » qui consiste à chercher l'opération inconnue qui à plusieurs couples d'entiers associe chaque fois un troisième entier (résultat de l'opération). Il complète sa proposition par la description de différentes procédures possibles en classe. Par exemple, dans l'une, seul le professeur connaît l'opération et les élèves doivent la trouver à partir d'une liste de couples et de résultats associés à chaque couple. Dans une variante, un élève est seul au tableau et l'opération mystérieuse est indiquée aux autres élèves qui lui donnent les résultats pour les couples qu'il choisit au fur et à mesure. C'est donc là l'exemple d'une « formule », ces *formules* qui, dit-il, peuvent être essayées dans d'autres classes et sur d'autres sujets. Une *formule* qui permet de passer concrètement sans risque d'une « pédagogie de l'exposition » à « une pédagogie dynamique » qui « privilégie l'activité de chaque élève ».

2.2 Comment présenter les apprentissages à mettre en place ?

Un autre domaine, où François Pluvinage fut pionnier par ses réflexions et où il contribua aux évolutions, se trouve dans un texte intitulé *Sur la présentation des programmes scolaires* et adressé aux enseignants de mathématiques (Pluvinage, 1975). Il y constate que les instructions accompagnant les contenus à enseigner sont intéressantes, mais ne sont pas faciles à lire. Leurs adaptations à la classe ne sont pas évidentes et elles ne sont donc pas connues par les enseignants, à « supposer que quelqu'un ait l'idée (saugrenue) de poser aux professeurs des questions sur le contenu des instructions d'accompagnement des programmes » (Ibid., p. 435)

Il relève ainsi avec humour ce point aveugle des outils de travail mis à la disposition des professeurs pour élaborer leur enseignement… Il propose alors une présentation des programmes qui viserait à faire apparaître « les impératifs et les choix des enseignants » et en donne un exemple dans le cadre des programmes en vigueur alors en 6ème.

Dans son exemple, il se base sur les contenus de l'époque et distingue le noyau des aptitudes que l'on suppose acquises pour être utilisées, comme « savoir utiliser des tableaux de correspondance et des schémas à flèches » ; le programme minimum des activités accomplies par tous les élèves d'un niveau donné comme par exemple la description de relations et de leurs propriétés ; et enfin les thèmes constitués par les objets d'études et les centres d'intérêt parmi lesquels un choix permet de satisfaire au programme minimum, par exemple « lecture et interprétation de banc d'essai, d'emplois du temps ».

Au-delà du contexte d'alors on voit ici encore la volonté de François Pluvinage d'accompagner les programmes par des outils au service des pratiques des enseignants et ceci en cheville avec l'institution de l'Éducation Nationale.

2.3 Un exemple d'action sur le terrain : l'expérimentation *Pédagogie différenciée* conduite en mathématiques au collège d'Ostwald de 1983 à 1986

Repérer le plus finement possible de manière scientifique les apprentissages en jeu et proposer et expérimenter des activités qui impliquent les élèves dans de véritables activités mathématiques leur permettant de les développer sont donc les deux axes majeurs qui ont guidé l'action de François Pluvinage au service des enseignants.

L'expérimentation « Pédagogie différenciée » qu'il a conduite au collège d'Ostwald de 1983 à 1986 avec une équipe composée de chercheurs de l'IREM et des professeurs du collège (dont Jean-Claude Rauscher) est à cet égard exemplaire. Cette expérimentation entrait dans le cadre d'un vaste projet sur la pédagogie différenciée initié par Louis Legrand. Celui-ci est l'auteur (1983) d'un rapport novateur aujourd'hui bien injustement oublié *Pour un collège démocratique*. Pour lui, l'idée d'une « nécessaire différenciation de la pédagogie pour faire face à la diversité des publics en collèges » devait se développer sous le sceau de la rationalité scientifique. Ce souci de rigueur rejoignait celui de François Pluvinage qui prit ainsi les rênes de l'expérimentation en mathématiques. Dans cette équipe composite qu'il fédéra, il fit fructifier les initiatives, les suggestions et les observations. Une expérience qu'il a lui-même décrite ainsi : « Même si Wenger n'était pas encore à la mode à l'époque, on peut avancer qu'un fonctionnement en communauté de pratique s'était établi dans l'équipe ».

La démarche de différenciation s'est dégagée du classique schéma de groupes issu de la réforme Haby : trois heures de cours et une heure de soutien ou approfondissement. Ce schéma était basé sur l'idée d'un renforcement pour les uns et d'un rattrapage de savoirs non intégrés pour les autres. Il n'avait jamais donné de grandes satisfactions et l'équipe a préféré insister sur une différenciation des démarches d'approche des notions enseignées. Pour cela, un nouveau schéma fut mis en place : deux heures de cours dispensées dans trois classes et deux heures de travaux proposés dans quatre groupes constitués avec les élèves des trois classes. En fonction des domaines abordés, les compositions des groupes pouvaient beaucoup changer.

Du point de vue des contenus, l'expérimentation portait alors en priorité sur « l'acquisition d'un savoir-faire géométrique » et « des appropriations en rapport avec la proportionnalité ». S'appuyant sur l'observation des réactions des élèves, des outils d'enseignement ont pu être dégagés à partir de l'analyse des compétences mises en jeu, puis de l'élaboration et de la mise à l'épreuve d'activités. En géométrie par exemple, se sont ainsi dégagés les ingrédients d'une géométrie de traitement, proposée comme transitionnelle entre une géométrie de l'observation et une géométrie de la déduction (Pluvinage et Rauscher, 1984). Des activités ont pu être développées qui généraient des conjectures ou des avancées dans la compréhension de la définition de certains objets géométrique. Un cercle pouvait ainsi apparaître comme un ensemble de points à la suite d'une construction point par point.

Les effets, largement positifs, pour les élèves de ce dispositif sont rapportés dans le rapport sur l'expérimentation (Pluvinage, Rauscher & Soumoy, 1985). Il est à noter que dans l'ensemble, après coup, les élèves savaient bien préciser les points sur lesquels ils avaient progressé.

2.4 Appliquer les programmes pour mieux les influencer

Les recherches en didactique de François Pluvinage se développaient au sein de l'institution scolaire. Il avait critiqué ces auteurs de programme qui ignoraient tout de leur mise en œuvre et de leurs difficultés. Cohérent avec cette approche, il a œuvré à donner le maximum de retentissement à ses recherches en n'hésitant pas à s'impliquer dans les commissions de réforme des programmes qui à cette époque n'ignoraient pas le travail des didacticiens et ne se référaient pas à quelques modes pédagogiques venues d'Asie. Ainsi dans le volet mathématique de l'expérimentation sur la pédagogie différenciée évoquée précédemment, François Pluvinage mit en avant une visée précise en accord avec sa responsabilité du groupe collège de la Commission permanente de Réflexion sur l'Enseignement des mathématiques (COPREM) qu'il assumait alors :

> Comment aménager les programmes de mathématiques au bénéfice de (presque) tous les élèves, voilà une question à laquelle une expérimentation pouvait permettre de fournir des éléments de réponse (Pluvinage, 2019, p. 84).

Cette approche méthodologique, combinée avec les recherches de Raymond Duval, eût donc une résonance et une influence importantes non seulement dans le domaine de la didactique des mathématiques, mais aussi dans les instances de l'Éducation Nationale et au-delà.

Cette préoccupation de François Pluvinage d'accompagner par des analyses et des propositions, les évolutions, ou les méandres des directives institutionnelles est restée encore la sienne en 2012 (Adjiage & Pluvinage, 2012), même si, depuis longtemps, il n'était plus impliqué comme conseiller dans les instances décisionnaires. A cette occasion, il met en question le point de vue atomisant qu'implique la notion de « compétences exigibles », mise en avant dans les programmes et il développe l'idée de « strate de compétence en mathématiques ».

3. Travailler avec François Pluvinage, une bonne école !

En guise d'au revoir, nous terminerons cet hommage en nous attardant sur quelques traits caractéristiques de *l'école* de François Pluvinage dans laquelle nous avons tous les deux eu la chance de travailler.

Une école de rigueur qui oblige à s'approprier, de façon non superficielle, les concepts des théories. Il rejetait l'emploi de syntagmes bouchons, censés recouvrir des faits, sans qu'on sache exactement ce qu'ils veulent dire. Il refusait les enchaînements de métaphores qui font illusion.

Une école de liberté avec des apports d'idées, d'exercices et une ouverture sur les idées nouvelles associée avec des interventions pleines de tact dans les groupes. Dans les groupes IREM et les séminaires, il savait tenir compte des apports, il laissait beaucoup de liberté, mais il apportait des suggestions fertiles et il savait aussi susciter des prises de conscience.

Une école de mise en confiance pour accompagner un doctorant lors de son premier exposé à l'occasion d'une grande conférence, pour encourager un chercheur hésitant à développer ses idées nouvelles, pour soutenir un étudiant étranger dans la rédaction de sa thèse et lui donner confiance en ses capacités d'écriture. De même, il savait motiver et préparer les professeurs des groupes IREM à présenter leurs travaux et leur métier dans les commissions, les colloques, les stages.

Une école de pensée en mouvement et une école de patience. Comment oublier son attitude quand on travaillait avec lui ? Debout, toujours en marche. Parfois multi-tâche en luttant en même temps avec un ordinateur. On avait parfois l'impression qu'il soliloquait, surtout lorsqu'il paraissait ne pas répondre aux questions en évoquant des points qui n'avait apparemment pas de rapport avec la question posée. En fait, le plus souvent et pas tout de suite, on réalisait que ces détours sur des chemins de traverse avaient bien un rapport avec la question initiale et qu'ils avaient contribué à approfondir de manière originale cette question. Il continuait à réfléchir, même quand les ordinateurs, qui le fascinaient avec leur personnalité indépendante, ne lui obéissaient pas et c'était souvent le cas…

François Pluvinage prisait la pensée vagabonde qui fait, comme il le disait, que « quand on ne travaille pas on travaille quand même ».

Bibliographie

ADJIAGE, R., & PLUVINAGE, F. (2000). Un registre géométrique unidimensionnel pour l'expression des rationnels. *Recherches en didactique des mathématiques,* **20(1)**, 41-88.

ADJIAGE, R., & PLUVINAGE, F. (2007). An Experiment in Teaching Ratio and Proportion. *Educational Studies in Mathematics,* **65**, 149–175.

ADJIAGE, R., & PLUVINAGE, F. (2012). Strates de compétence en mathématiques. *Repères-Irem,* **88**, 43-72.

CARRION-MIRANDA, V., PLUVINAGE, F. & ADJIAGE, R. (2016). Facilitating the genesis of functional working spaces in guided explorations. *ZDM – Mathematics education,* **48(6)**, 809–826

DUPUIS, C., & PLUVINAGE, F. (1981). La proportionnalité et son utilisation. *Recherches en didactique des Mathématiques,* **2(2)**, 165–212.

DUVAL, R., & PLUVINAGE, F. (1977). Démarches de réponse en mathématique - Résultat d'une enquête à trois modalités auprès d'élèves de 5e d'âge moyen : 13 ans. *Educational Studies in Mathematics*, **8(1)**, 51–116.

DUVAL, R., & PLUVINAGE, F. (2016). Apprentissages algébriques. I. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. *Annales de Didactique et de sciences cognitives,* **21**, 117-152.

PAEZ-MURILLO, R. & PLUVINAGE, F. (2019). Estudio de las asíntotas de una función en un entorno de software dinámico. *Recherches en didactique des mathématiques,* **39(3)**, 331-369.

PLUVINAGE, F. (1972). Exercices de mathématiques. *Bulletin de l'APMEP,* **284**, 517-518.

PLUVINAGE, F. (1975). Sur la présentation des programmes scolaires. *Bulletin de l'APMEP,* **300**, 435-438.

PLUVINAGE, F. (1977). *Difficultés des exercices en mathématiques (Étude des comportements de réponse par enquêtes à plusieurs modalités)*. Thèse d'état. Université Louis Pasteur. Strasbourg.

PLUVINAGE, F. (1989). Étapes dans l'apprentissage du raisonnement en géométrie. In G. Audibert (Ed.). *Actes du colloque Inter-IREM Géométrie 1989* (pp. 159-163), Montpellier : Irem de Montpellier.

PLUVINAGE, F. (2004). Sur les méthodes et les résultats de la didactique des mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **9**, 7-43.

PLUVINAGE, F. (2019*). Pédagogie différenciée, une expérimentation promue par Louis Legrand.* In L. Chalmel (Ed.), *Louis Legrand (1921-2016) Pédagogie et Politique* (pp. 83-85). Paris : L'Harmattan.

PLUVINAGE, F, SCHERPEREEL, A., BUISSON, P., KITTEL, B. BLOCH. C. & DUVAL, R. (1973). Sur l'assimilation des programmes de 6ème-5ème. *Educational Studies in Mathematics,* **5(2)**, 207-242.

PLUVINAGE, F. & RAUSCHER, J.-C. (1986). La géométrie construite mise à l'essai. *Petit x,* **11**, 5-36.

PLUVINAGE, F., & RAUSCHER, J.-C. (1990). *Les mathématiques en 6ème. Analyse des résultats d'un échantillon d'élèves de 6ème.* Document de travail *389* (pp. 5-72), Ministère de l'Éducation Nationale, Direction de l'Évaluation et de la Prospection.

PLUVINAGE, F., RAUSCHER, J.-C., & SOUMOY, C. (1985) *Rapport sur l'expérimentation « Pédagogie différenciée » conduite en mathématiques au collège d'Ostwald en 1983-1985.* Strasbourg : IREM de Strasbourg.

PLUVINAGE, F. ET RIGO-LEMINI, M. (2008). Mais non, Marina ! *Annales de didactique et de sciences cognitives,* **13**, 41-61.

URIBE-MARTINEZ, A., PLUVINAGE, F. & MONTAÑO ZETINA, L. (2019). Una propuesta de esquema de espacios de trabajo fisicomatemático: aplicación al contexto de la dinámica. In E. Montoya-Delgadillo & L. Vivier (Eds.). *Actas del Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático,* (pp. 589–602), Valparaiso : PUCV.

WILSON (1971). N.L.S.M.A., National Longitudinal Study of Mathematical Abilities. In B.S. Bloom, J. T. Hasting & G. F. Madaus (Eds). *Handbook of formative and summative evaluation of student learning*, New York: Mc Graw Hill.

ZAKI, M., & PLUVINAGE, F. (1991). Démarches de résolution et de simulation face au problème de la ruine d'un joueur. *Educational Studies in Mathematics*, **22**, 149-181.

ALAIN KUZNIAK

Université de Paris, Paris, France

alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr

JEAN-CLAUDE RAUSCHER

IREM de Strasbourg, Strasbourg, France

jc.rauscher@wanadoo.fr

INFORMATIONS POUR LES AUTEURS

Présentation de la revue

Les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives est une revue annuelle fondée en 1988 par Raymond Duval et François Pluvinage, actuellement sous la responsabilité de Philippe R. Richard et Laurent Vivier.

Cette revue internationale est dédiée à la diffusion de la recherche en didactique des mathématiques et des domaines connexes. Il s'agit d'une revue francophone de référence sur les recherches portant sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Les articles sont principalement écrits en français, mais peuvent également être publiés en espagnol ou en anglais.

La revue fait l'objet d'un classement scientifique par l'organisme européen ERIH et par l'HCERES en France. Elle est également répertoriée dans des bases de données de référence comme MathEducDataBase ou Googlescholar. Ces différents référencements ajoutent une valorisation des publications dans les Annales pour les auteurs. Les articles sont en accès libre sur le site au bout d'un an.

La revue est ouverte à tout type de recherche. Les articles peuvent être de nature théorique, en relation étroite avec une expérimentation dans le cadre d'un enseignement, ou constituer des comptes rendus d'expériences d'enseignement appuyées sur un cadre théorique explicite. Il est également possible de présenter une synthèse de recherches menées dans un domaine particulier de la didactique des mathématiques, ou de proposer des notes de lectures d'ouvrages scientifiques du domaine. Les articles peuvent concerner tous les cadres d'enseignement dans des contextes socioculturels variés et aussi s'intéresser à la formation, initiale et continue, des enseignants.

Outre la publication du numéro annuel, la revue offre la possibilité d'éditer un numéro spécial sur la base d'un projet clairement formulé.

Cette revue s'adresse principalement aux chercheurs en didactique. Elle intéressera également les formateurs d'enseignants soucieux d'appuyer leurs formations sur la recherche en didactique des mathématiques.

Site internet de la revue : http://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/adsc.

Instructions aux auteurs

La revue est ouverte à tout type de recherche, que ce soit un essai didactique ou un rapport d'étude impliquant de la recherche empirique. Il est également possible de présenter une synthèse des recherches menées dans un domaine particulier de l'enseignement des mathématiques ou d'un domaine connexe (physique, algorithmique, etc.), ou de proposer des notes de lectures d'ouvrages scientifiques. Les domaines théoriques de références sont issus de la didactique des mathématiques. Lorsqu'ils s'insèrent dans une problématique d'enseignement des mathématiques, les travaux peuvent aussi prendre appui sur la psychologie cognitive ou sur la linguistique.

Les articles ne dépassent généralement pas une vingtaine de pages, mais exceptionnellement, ils peuvent être plus longs et permettre ainsi à l'auteur de développer un point de vue original qui émerge dans le champ de la recherche.

Les articles peuvent être écrits en français, en espagnol ou en anglais. Lorsque l'article est écrit en espagnol ou en anglais, il est attendu que les auteurs proposent également un résumé en français. Si l'une des trois langues de la revue n'est pas comprise par les auteurs, merci de le préciser lors de la soumission.

Les articles sont à soumettre par courrier électronique à mai-adsc@unistra.fr.

Avant tout envoi, nous vous prions de vérifier que votre article respecte bien les consignes éditoriales suivantes :

- Le format de la revue est respecté : voir le fichier de styles[1] pour les auteurs ;
- Le niveau de langue utilisé est soigné et bien travaillé.
- L'article proposé est original. Il n'a ni déjà été publié ailleurs ni envoyé à une autre revue pour publication. Il ne s'agit pas non plus d'une simple traduction d'un article déjà publié.
- L'article ne contient aucun plagiat et il est dûment référencé.
- En décidant d'envoyer un article à la revue des Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vous autorisez la mise en ligne de votre article sur le site de la revue, un an après sa publication.

Pour composer un article sans utiliser le modèle, par exemple en recourant à LaTeX, voici des précisions sur le format des pages et les caractères utilisés.

[1] Disponible à l'adresse : https://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/adsc/#c6853

Feuille A4 portrait, avec les marges suivantes :

- Haut : 3 cm Bas : 8 cm
- Gauche : 4 cm Droite : 4 cm
- En tête : 2 cm Pied de page : 7 cm
- Reliure : 0 cm

Caractères :

- Auteur(s) en première page : Arial 12 points, gras, petite capitale, Centré ;
- Titre en première page : Arial 14 points, petite capitale, Centré ;
- Abstract – Résumé – Mots clés : Times New Roman 10 points ;
- En-tête : Arial 9 points ;
- Corps de texte : Times New Roman 11 points.

Pour la pagination d'un article proposé, commencer par le numéro 1.

Procédures de sélection des textes

Les articles proposés sont soumis à un arbitrage, en double aveugle, par trois évaluateurs avant publication. Une synthèse sera envoyée aux auteurs par les rédacteurs en chef. Le cas échéant, des demandes de modifications, aménagements ou compléments des textes présentés seront adressées aux auteurs.

Les articles sont reçus par les rédacteurs en chef de la revue. Ils sont emmagasinés sur une plateforme de partage privée uniquement accessible aux rédacteurs en chef, aux conseillers scientifiques et à la conseillère éditoriale.

Une première appréciation de l'adéquation de l'article avec les objectifs de la revue est faite par les rédacteurs en chef. Cette première évaluation peut aboutir à un refus de l'article s'il ne correspond pas à la ligne éditoriale de la revue ou s'il pose un problème éthique. Il peut également être renvoyé aux auteurs pour effectuer des modifications avant l'envoi aux évaluateurs, par exemple, pour une remise en forme ou une correction linguistique. En cas de nécessité, les conseillers scientifiques peuvent être consultés.

Les rédacteurs en chef se consultent pour le choix et la sollicitation des évaluateurs qui ont, au plus, deux mois pour renvoyer leur évaluation. Ils suivent le bon déroulement du processus d'évaluation et ils sont attentifs aux dates de retour afin de prévoir la publication. Un fichier privé aux fonctions de partage et de synthèse est tenu à jour.

Une fiche d'évaluation est proposée aux trois évaluateurs. Selon le retour de ces derniers, une synthèse est envoyée aux auteurs incluant leurs évaluations. Quatre cas de figure sont envisagés : (A) publication acceptée en l'état ; (B) publication acceptée avec des modifications mineures à effectuer, sans nécessité d'une nouvelle évaluation ; (C) Publication possible sous réserve de modifications majeures à effectuer et nécessitant une nouvelle évaluation ; (D) refus de l'article. Selon l'éventualité, le traitement est le suivant :

- Cas A, l'article est transféré à la conseillère éditoriale et au secrétaire d'édition pour préparer la publication.
- Cas B, les rédacteurs en chef demandent le retour des modifications par les auteurs dans un délai maximum d'un mois.
- Cas C, les auteurs ont deux mois pour renvoyer leur nouvelle version. Par la suite, les trois relecteurs initiaux sont sollicités avec un délai de 2 mois pour faire la relecture (délai pouvant être ramené à 1 mois si cela permet de publier l'article dans le numéro de l'année).
- Cas D, un retour circonstancié est envoyé aux auteurs par les rédacteurs en chef. Si nécessaire, les conseillers scientifiques peuvent être sollicités.

Généralement, les articles envoyés l'année *n* et acceptés sont publiés dans le numéro de l'année *n* + 1.

Imprimerie et reprographie
Directions des affaires logistiques intérieures
Université de Strasbourg

Dépôt légal 4ème trimestre 2020