ANNALES de DIDACTIQUE
et de SCIENCES COGNITIVES

Revue internationale de didactique des mathématiques

Rédacteurs en chef :
FRANCOIS PLUVINAGE, PHILIPPE R. RICHARD, LAURENT VIVIER

Volume 24 - 2019

IREM de Strasbourg

Université de Strasbourg

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
ISSN 0987 – 7576

Éditeur
IREM de Strasbourg – Université de Strasbourg
7, rue René Descartes 67084 Strasbourg CEDEX
Tél. : +33 (0)3 68 85 01 30
Fax. : +33 (0)3 68 85 01 65
irem@math.unistra.fr

Bibliothèque
Christine CARABIN
Tél : +33 (0)3 68 85 01 61
http://irem.unistra.fr

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
VOLUME 24 – 2019

SOMMAIRE

EDITORIAL

Les dispositions arrêtées pour le volume paru en 2018 des Annales de Didactique et de Sciences Cognitives (ADSC) ont été reconduites cette année : consultation d'un volume en ligne possible un an après sa sortie imprimée, arbitrage de chaque manuscrit en double aveugle par trois arbitres. Rappelons qu'il s'agit ainsi d'obtenir pour les ADSC le plus haut niveau dans le classement des revues scientifiques, afin qu'une publication dans la revue soit valorisée au mieux pour ses auteurs. Outre les conditions énoncées ci-dessus, la diversité des origines des manuscrits retenus pour publication est un facteur qui compte pour le classement des revues.

Or, depuis l'envoi aux ADSC d'un manuscrit, la qualité des traitements effectués pour son édition et le respect des délais de publication, entre moins d'un an et deux ans pour la grande majorité des manuscrits reçus, sont connus des auteurs potentiels. Nous tenons à remercier au passage l'exemplarité du travail des nombreux rapporteurs qui nous éclaire dans l'ombre discrète de leur bienveillance, tout comme celui de notre comité de rédaction et des autres responsables. Il n'est donc pas besoin de sollicitations particulières d'envois de manuscrits pour que nous recevions régulièrement des propositions d'articles en provenance de bien des endroits de la planète. Dans ce volume 24, les auteurs des articles représentent les pays suivants : Belgique, Canada, France, Indonésie, Maroc, Mexique. Et les écoles de pensée dont les auteurs se réclament sont également variées, comme en témoignent les listes des références bibliographiques figurant en fin des articles publiés. La diversité des méthodes employées pour les recherches ayant conduit aux articles publiés mérite également d'être signalée : recherche sur documents accompagnée d'observations de terrain, étude de cas, observations de classes, expérimentation.

Le volume 24 offre un regard croisé plutôt riche entre un contenu mathématique varié (géométrie, courbes paramétriques, arithmétique, calculs algébriques et analyse fonctionnelle, covariation, équations différentielles, tests statistiques et logique dialogique) et de nombreux processus transversaux (pratique discursive et langagière, systèmes de signes, raisonnement et démonstration, conceptions et représentation des connaissances, communication, validation et médiation) qui concernent la didactique des mathématiques. Ce regard est déjà bien visible avec la recherche amorcée par Millon-Fauré, Roubaud et Assude qui nous montre dans quelle mesure des élèves du primaire s'approprient le protocole de construction géométrique, ce que les auteurs associent volontiers à un genre discursif. Il se poursuit avec le texte de Barrier et Hajji qui modélise le processus de démonstration en arithmétique et en géométrie plane dans une dialectique proposant-opposant, non pas du point de vue de l'élève ou de l'enseignant, mais en se centrant sur le jeu même de la démonstration. Avec l'étude de Hitt et Quiroz-Rivera, nous entrons dans le travail de collaboration entre pairs afin d'examiner les représentations qui se forment d'emblée et qui évoluent chez des élèves de l'école secondaire. L'analyse comparative de Wijayanti dans des manuels de géométrie plane montre comment on y exploite la notion similitude, et elle touche au rapprochement entre le traitement offert dans les manuels et dans les évaluations officielles à la fin du collège. L'article d'Elm'hamedi nous amène à constater l'incidence du vocabulaire, de l'ambiguïté linguistique et de l'interprétation qui découle de tests statistiques auprès d'étudiants universitaires, mettant en valeur l'expression verbale de la pensée dans l'activité mathématique et son importance dans la formation scientifique. Enfin la contribution de Bloch et Gibel, qui revisite un modèle pour l'analyse de connaissances au début des études universitaires, s'intéresse à l'abstraction, la spécificité du fonctionnement des signes et du raisonnement en calcul différentiel et intégral, de même qu'à l'effet du milieu et à la nécessité des situations qui sous-tendent l'apprentissage.

L'équipe de direction scientifique des ADSC :
François Pluvinage, Philippe R. Richard, Laurent Vivier

KARINE MILLON-FAURE, MARIE-NOËLLE ROUBAUD, TERESA ASSUDE

ENTRER DANS UN GENRE PROCEDURAL : L'ECRITURE D'UN PROGRAMME DE CONSTRUCTION EN GEOMETRIE

Abstract. The discovery of a procedural genre: the writing of a program of construction in geometry. The writing of a program of geometrical construction is a particular kind of task in so far as it requires the respect of some strict expectations in addition to mathematical work. Thanks to analysis of in-class sessions in primary school, we wonder how three pupils with difficulties appropriate these expectations and succeed in (or do not succeed in) overcoming various obstacles in order to enter in this specific genre.

Résumé. L'écriture d'un programme de construction géométrique constitue un type de tâche particulier dans la mesure où, en plus du travail mathématique, il nécessite le respect de certaines attentes formelles. À partir de l'analyse de séances dans une classe de CM2, nous regardons comment trois élèves souvent en difficulté en mathématiques s'approprient toutes ces contraintes et parviennent (ou ne parviennent pas) à surmonter les différents obstacles pour pouvoir entrer dans ce genre discursif procédural.

Mots-clés. Genre discursif, mathématiques, programmes de construction.

Introduction

Lors d'une recherche portant sur la mise en œuvre de séances de géométrie dans une classe de CM2 (élèves de 10-11 ans) d'une école marseillaise (Millon-Fauré et al., 2018), nous avons été amenées à observer une séquence d'introduction à l'écriture de programmes de construction géométrique[1]. Nous avons alors pu remarquer qu'outre les attentes d'ordre mathématique qui accompagnaient ce type de tâches (au sens de Chevallard, 1999), les élèves devaient également respecter d'autres contraintes purement linguistiques. C'est la raison pour laquelle nous nous sommes demandé si la difficulté à entrer dans l'écriture d'un programme de construction ne relevait pas également d'une méconnaissance de ce genre discursif.

Pour tenter de répondre à cette question, nous allons tout d'abord clarifier les notions de « programme de construction » et de « genre », tout en analysant les instructions officielles qui en font mention. Puis nous observerons la façon dont les élèves satisfont aux attentes d'ordre mathématique et linguistique que ce genre occasionne. S'approprient-ils certaines contraintes plus rapidement que d'autres ? La progression est-elle la même pour chacun ? Où se situent les obstacles à l'écriture et à la réalisation d'un programme de construction ?

[1] Par la suite, nous nous limiterons à parler de programme de construction.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 24, p. 9 - 45.

Dans les séances analysées, nous avons focalisé notre attention sur quelques élèves de la classe, dont nous avons suivi l'entrée dans ce genre procédural, que ce soit à travers leurs productions écrites ou leurs échanges oraux. Nous verrons qu'au-delà de la connaissance du genre, ce sont certains savoirs mathématiques qui vont créer des obstacles pour ces élèves.

1. Le programme de construction vu comme un genre discursif

1.1. Le programme de construction du point de vue mathématique

On peut définir un programme de construction comme un ensemble d'instructions permettant de construire une figure déterminée. Ce type de texte ne comporte pas en soi de preuve de l'existence et de la constructibilité des objets géométriques décrits. Toutefois, chaque étape doit pouvoir être justifiée soit en s'appuyant sur un raisonnement mathématique soit éventuellement en recourant à une construction pratique : « un procédé de tracé approché est donc acceptable à partir du moment où il donne une solution graphique avec une précision suffisante » (Celi & Bessot, 2008, p. 25).

Il convient également de s'entendre sur les critères qui permettent de considérer la figure construite comme conforme à celle de départ. On admet habituellement que deux figures superposables sont identiques — l'une étant l'image de l'autre par une isométrie (rotation, translation, symétrie axiale ou symétrie glissée) ; c'est-à-dire qu'il ne sera pas nécessaire d'indiquer dans un programme de construction des informations sur l'orientation de la figure ou sur sa position par rapport aux bords de la feuille sur laquelle elle est tracée. Il est également possible d'accepter qu'une des figures soit un agrandissement ou une réduction de l'autre, ce qui rend inutile la donnée des longueurs (la donnée de certains rapports de longueur, par contre, peut s'avérer indispensable comme, dans un rectangle, le rapport entre la longueur et la largeur). Ainsi parmi les six figures suivantes (fig. 1), seule la dernière est considérée comme différente des autres.

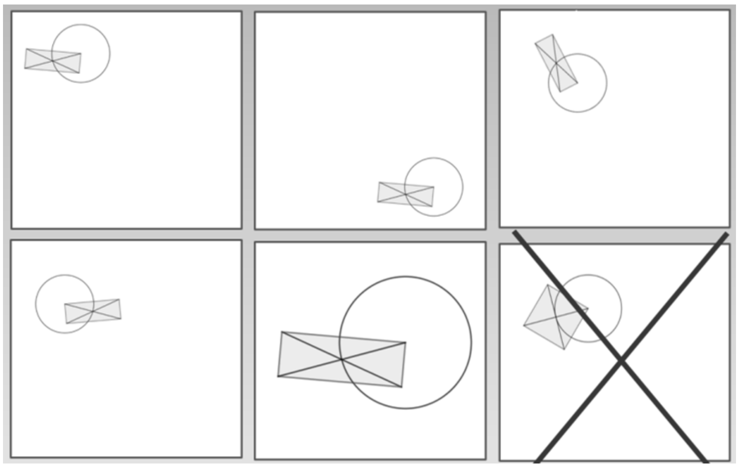


Figure 1. Exemple de cinq figures habituellement considérées comme semblables

L'élaboration d'un programme de construction peut être décomposée en plusieurs phases, comme l'indiquent Celi et Perrin-Glorian (2014) en s'appuyant sur les travaux de Duval (1994, 2005) et Duval & Godin (2005) :

> Pour écrire un programme de construction, il faut soi-même être capable de construire la figure et donc transformer cette appréhension perceptive en appréhension séquentielle de la figure (mettre un ordre sur les unités figurales qui la composent), en relation avec les propriétés géométriques que permettent de réaliser les instruments dont on dispose. (Celi & Perrin-Glorian, 2014, p. 156)

Ces auteures précisent qu'il faut non seulement identifier les différentes unités figurales[2] qui composent la figure, mais également les relations entre ces unités figurales.

Chez Lahanier-Reuter (1999), la description en géométrie peut être de deux types : le premier permet de voir la globalité de l'objet ou de la figure géométrique, le deuxième permet de la construire, ce qui correspond au programme de construction. Cette chercheuse utilise les travaux du linguiste Apothéloz (1998) sur les textes descriptifs pour qui « décrire est une production discursive organisée, puisqu'elle est une transcription dans un discours linéaire de la globalité d'un objet ou d'une image » (Lahanier-Reuter, 1999, p. 32). Elle décompose ce passage d'une vision globale à la linéarité du discours en trois types d'opérations :

---

[2] A la suite de Duval, on appelle ainsi les figures élémentaires (surfaces, lignes ou points) qui constituent la figure complexe.

> – des opérations de découpage de l'objet. Ces opérations de découpage reposent particulièrement sur l'identification d'un tout et de ses sous-parties et sur leur désignation ;
> – des opérations de sélection des informations relatives à cet objet global et à ses sous-parties. Les informations relevées sont des propriétés qualificatives ou de localisation ;
> – enfin, une opération d'ordonnancement de ces informations. (Lahanier-Reuter, 1999, p. 32)

A l'aide de ces apports théoriques, une synthèse est possible relativement à l'élaboration d'un programme de construction d'une figure donnée. Pour cela, plusieurs phases sont à prendre en compte :

- la vision globale de la figure (le tout) ;
- la décomposition de la figure en ses unités figurales (les figures élémentaires qui la composent) ;
- la sélection des informations pertinentes à prendre en compte (par exemple, les relations entre les différentes unités figurales, les propriétés, les données connues) ;
- l'ordonnancement des informations (par exemple, la chronologie des étapes de la construction de la figure).

Précisons que la chronologie proposée ici est purement indicative. Lors de l'écriture d'un programme de construction, ces différentes phases sont susceptibles d'apparaître à plusieurs reprises, dans un ordre différent, voire de s'entremêler : l'ordonnancement des informations, par exemple, peut nécessiter une reprise de la sélection des informations concernant la position relative des unités figurales.

Une fois ces phases réalisées, il reste encore une dernière étape : celle de la rédaction du texte proprement dit.

1.2. La rédaction d'un genre discursif procédural

La notion de « genre », issue des « genres du discours » de Bakhtine (1984), est reprise en linguistique à partir des années 1990, lors de l'établissement de grands corpus oraux (Malrieu & Rastier, 2001 ; Blanche-Benveniste, 2005 ; Elalouf & Boré, 2007)[3].

Le genre correspond à « un ensemble de productions langagières orales ou écrites qui, dans une culture donnée, possèdent des caractéristiques communes d'ordre communicationnel, textuel, sémantique, grammatical, graphique, visuel ou d'oralité, qui sont souples, mais relativement stables dans le temps. » (Chartrand,

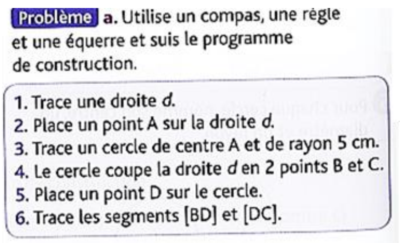
---

[3] Pour un bref éclairage historique, voir entre autres Canvat (2003), Reuter (2007), Dolz & Gagnon (2008), Denizot (2016).

Emery-Bruneau & Sénéchal, 2015, p. 3). Pour définir un genre, il faut étudier les corrélations entre les caractéristiques internes (l'analyse du système linguistique) et les caractéristiques externes des textes, « au niveau cognitif, pragmatique et épilinguistique » (Deulofeu, 2000, p. 275). Selon les genres, les ressources grammaticales ne sont pas distribuées de la même façon (Biber, Johansson, Leech, Conrad & Finegan, 1999 ; Lee, 2001 ; Biber & Conrad, 2010 ; Roubaud & Romain, 2018).

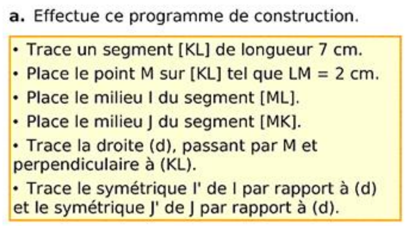
L'intérêt de travailler les genres de textes à l'école est reconnu de nos jours dans l'espace francophone (De Pietro & Schneuwly, 2003 ; Boré, 2007 ; Dolz & Gagnon, 2008 ; Denizot, 2010 ; Chartrand, 2016 ; Brunel, 2016). Les nouveaux programmes ministériels de 2015 (MEN, 2015) pour l'école primaire en France vont dans ce sens et remplacent l'expression « types d'écrits » (ou « types de textes ») des programmes de 2008 (MEN, 2008) par le mot « genres »[4]. Un enseignement explicite et réflexif des genres doit conduire l'élève à développer ses compétences cognitives et langagières ainsi que ses conduites discursives (Dolz & Gagnon, 2008 ; Chartrand, 2016), en lui permettant d'identifier les situations langagières et de pouvoir ainsi interagir en société, à l'oral comme à l'écrit.

Lorsque l'on observe les programmes de construction écrits ou utilisés dans les classes du primaire ou du collège (cf. les trois exemples ci-dessous ; figures 2, 3 et 4), on repère des similitudes au niveau externe (numérotation chronologique) et interne (verbes à l'infinitif ou au présent de l'impératif, vocabulaire relatif à la géométrie, énoncés concis le plus souvent) :


Problème a. Utilise un compas, une règle et une équerre et suis le programme de construction.

1. Trace une droite *d*.
2. Place un point A sur la droite *d*.
3. Trace un cercle de centre A et de rayon 5 cm.
4. Le cercle coupe la droite *d* en 2 points B et C.
5. Place un point D sur le cercle.
6. Trace les segments [BD] et [DC].

Figure 2. *Tous en maths CM1*, 2014, Nathan, p. 142.


a. Effectue ce programme de construction.

- Trace un segment [KL] de longueur 7 cm.
- Place le point M sur [KL] tel que LM = 2 cm.
- Place le milieu I du segment [ML].
- Place le milieu J du segment [MK].
- Trace la droite (d), passant par M et perpendiculaire à (KL).
- Trace le symétrique I' de I par rapport à (d) et le symétrique J' de J par rapport à (d).

Figure 3. *Sésamath 6ème Génération 5*, 2016, p. 171.

---

[4] Les genres discursifs reposent sur plusieurs critères, à la différence des types de textes qui ne reposent que sur un seul critère « qui dépend de l'analyste » (Rastier, 2001).

Voici le programme de construction ;

1. **Tracer un cercle de centre O et de rayon 9 cm.**
2. **Placer un point A_1 sur le cercle et reporter 6 fois le rayon : on obtient 6 points sur le cercle, qui forment un hexagone $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$. Les longueurs A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1F_1 et F_1A_1 sont toutes égales au rayon du cercle 9 cm.**
3. **Tracer 8 autres cercles de même centre O et de rayon 1cm, 2cm, 3cm, 4cm, 5cm, 6cm, 7cm et 8cm.**

Figure 4. Extrait du site du collège Charles Doche[5], activité pour les 6ème

Certains manuels scolaires pour le cours moyen (cf. les trois extraits ci-dessous) donnent une définition du programme de construction ou des conseils pour sa rédaction. Nous y retrouvons des noms (*étape*, *suite d'instructions*), des verbes qui caractérisent le programme (*décrire*, *tracer*, *construire*) ou les étapes (*suivre*). Le lexique est mis en gras dans les extraits :

> Un programme de construction est une **suite d'instructions**. Chaque instruction permet de réaliser une **étape** de la construction (*Graine des maths CM2, Mémo*, Nathan, 2017, p. 184)

> Un programme de construction est un énoncé, avec des **étapes**, qui permet de construire une figure géométrique (*Les nouveaux outils pour les maths CM1*, Magnard, 2016, p. 176)

> Un programme de construction **décrit** comment **tracer** une figure **étape par étape**. (*Tous en maths CM1*, Nathan, 2014, p. 142)

Gaud (1987) insiste par ailleurs sur certains aspects formels des instructions proposées : « Il s'agit […] de faire prendre conscience qu'un programme de construction doit être rédigé dans un langage précis, à l'aide d'instructions non ambigües » (Gaud, 1987, p. 43). Les documents d'accompagnement des programmes scolaires de 2016 l'indiquent également très clairement :

> Il [le programme de construction] est décrit sous forme de phrases courtes, le plus souvent à l'impératif ou à l'infinitif, une liste d'actions mathématiques à suivre dans l'ordre chronologique. Les actions décrites et les objets énoncés sont mathématiques et non techniques (par exemple, on dira « Construire le cercle de centre O et qui passe par le point A », mais pas « Prendre le compas, placer la pointe sèche sur le point O et la mine sur A puis tourner » et inversement). (MEN, 2016, p. 1)

Nous sommes bien en présence d'un genre discursif particulier. L'écriture d'un programme de construction s'apparente au genre « marche à suivre » (Buléa, 2013) dans lequel entrent la recette, la fabrication d'un objet. Cette analogie avec la recette est mentionnée dans les documents d'accompagnement des programmes scolaires de 2016 (à la rubrique « Espace et géométrie ») qui qualifient le programme de construction comme un « type de texte particulier qui s'apparente

---

[5] Source : http://www.clg-doche.ac-aix-marseille.fr/spip/spip.php?article865.

pour les élèves à une recette de cuisine » (MEN, 2016, p. 1). Si l'on suit la classification d'Adam (2001 ; 2011), cette écriture serait à ranger dans les 'genres de discours procéduraux'. En effet, on y retrouve des procédures à écrire avec une certaine syntaxe, une temporalité à respecter dans l'ordonnancement des actions qui sont présentes dans un programme de construction. C'est la raison pour laquelle nous introduisons le programme de construction (absent dans la typologie de Chartrand et al., 2015 ; Adam, 2011) dans le genre procédural.

Il est donc important, comme nous l'avons signalé plus haut, d'amener les élèves à rencontrer ce genre procédural afin d'en saisir les caractéristiques tant langagières que mathématiques. Les échanges verbaux entre élèves, lors de l'écriture d'un programme de construction, seront l'occasion d'en percevoir la spécificité : l'argumentation, qu'ils seront obligés de mettre en œuvre pour défendre leur position (Garcia-Debanc, 1996) et tenter d'être compris des autres, sera un bon levier pour intégrer ce genre procédural. Cette décentration et cette adaptation du discours à l'interlocuteur, cette capacité à réguler et à coopérer sont des « compétences fondamentales à développer » (Nonnon, 1999, p. 120).

1.3. La place des programmes de construction dans les programmes scolaires

Étudions à présent les instructions officielles afin de déterminer la place que ce type de tâches occupe dans les programmes. L'expression « programme de construction » existe dans les classes de mathématiques du collège depuis une trentaine d'années dans la mouvance de l'intégration de l'informatique dans l'enseignement, en particulier de l'usage du langage informatique Logo (Gaud, 1987 ; Laborde[6], 1982). A côté des tâches de description (jeu du portrait...), cette expression figure notamment dans les programmes scolaires de 2008 (MEN, 2008), qui étaient en vigueur au moment de notre expérimentation : « Tracer une figure simple à partir d'un programme de construction ou en suivant des consignes […] Tracer une figure (sur papier uni, quadrillé ou pointé), à partir d'un programme de construction ou d'un dessin à main levée ».

Ce point est d'ailleurs présent dans les documents d'accompagnement des programmes scolaires du cycle 3[7] pour les mathématiques, en vigueur en 2002, qui préconisent « l'élaboration d'un message contenant toutes les informations nécessaires à la reproduction de la figure » (MJENR, 2002, p. 33) et notamment « l'énoncé de la suite des étapes qui permettent de construire la figure (programme

[6] Laborde (1982) utilise l'expression « figures téléphonées » pour indiquer une situation de communication où les élèves doivent écrire un programme de construction.
[7] Le cycle 3 correspondait en 2002 et 2008 aux classes de CE2, CM1 et CM2 (élèves de 8 à 11 ans).

de construction) » (*ibid.*). Le travail sur ce type de tâche se poursuit au collège notamment parce que, comme le soulignent les instructions officielles, les programmes de construction légitiment un souci de rigueur, en ce qui concerne par exemple le lexique utilisé.

Cet intérêt pour les programmes de construction s'accentue encore dans les programmes de 2015. Ainsi cette expression apparaît-elle dès le cycle 2[8], même s'il ne s'agit encore que de suivre un programme de construction :

> Les notions de géométrie plane et les connaissances sur les figures usuelles s'acquièrent à partir de résolution de problèmes (reproduction de figures, activités de tri et de classement, description de figures, reconnaissance de figures à partir de leur description, tracées en suivant un programme de construction simple). (MEN, 2015, p. 82-83)

Et au cycle 3, non seulement l'élaboration d'un programme de construction entre dans les attendus (« réaliser, compléter et rédiger un programme de construction » (MEN, 2015, p. 211), mais cette activité est présentée comme un moyen de préparer les élèves à l'algorithmique :

> [Les activités spatiales et géométriques] constituent des moments privilégiés pour une première initiation à la programmation, notamment à travers la programmation de déplacements ou de construction de figures. (MEN, 2015, p. 210)

Un document d'accompagnement datant de 2016 est d'ailleurs entièrement consacré aux programmes de construction et dans la version de 2018 des programmes des cycles 2 et 3 (MEN, 2018), on retrouve toujours ces mêmes types de tâches : suivre et rédiger un programme de construction.

Ces extraits des instructions officielles nous montrent la place qu'occupent la compréhension et la rédaction de programmes de construction dans l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège. Mais ces instructions ne s'attardent pas, au niveau du secondaire, sur la justification d'un programme de construction. En outre, on ne relève pas non plus ce type d'objectifs dans les attentes des enseignants : en analysant des productions d'élèves de 3ème, à propos de la construction des tangentes à un cercle donné, Celi et Bessot (2008) montrent, que les programmes de construction ne comportent pas de justification.

1.4. Les programmes de construction dans les pratiques de classe

Afin d'étudier la manière dont les programmes de construction sont travaillés dans les classes, regardons un extrait d'un entretien mené auprès de l'enseignante de CM2 que nous avons suivie lors de cette expérimentation. Nous notons que dans

[8] En 2015, le cycle 2 comprend le CP, le CE1 et le CE2 (élèves de 6 à 9 ans) et le cycle 3 : le CM1, CM2 et la 6° du collège (élèves de 9 à 12 ans).

son discours, figurent à la fois des contraintes d'ordre mathématique (la chronologie des constructions) et d'ordre linguistique (utiliser des verbes tels que *tracer* et *placer*, employer un lexique géométrique, nommer éventuellement les figures, simplifier l'écriture…) ; nous mettons en gras ces éléments dans l'extrait :

> (1)[9] Enseignante : Des **termes mathématiques précis** et qu'il visualise un **ordre**, déjà, qu'il visualise un **ordre** puisque la prochaine séance […] se présentera sous la forme d'un programme de construction, mais qui sera découpé en **trois parties** : partie 1, partie 2, partie 3. Donc on leur met déjà **l'ordre** et il faudra qu'ils **rédigent** des instructions pour chaque partie. Donc **rédiger** une instruction, ça veut dire utiliser des **verbes**, ça veut dire utiliser des **termes précis** et ils n'ont pas encore le problème qui va se poser de **l'ordre** puisque je leur donne **l'ordre**, ils ont **l'ordre** des figures, donc il va falloir s'atteler à vraiment utiliser un **vocabulaire précis**, que ce soit les **verbes**, c'est-à-dire nommer, tracer, placer, rien que ces trois **verbes**, bien les employer et un rectangle qu'on va tracer et surtout le **nommer**, c'est-à-dire qu'à un moment donné, on leur donne sans qu'il soit nommé et j'aimerais qu'émerge bien sûr l'idée : est-ce que l'on peut le **nommer** pour se faciliter la tâche, ce serait bien. Justement apprendre que l'on peut **nommer** pour **simplifier** dans l'écriture, voilà […] (entretien ante, séance 2)[10]

Nous retrouvons ces mêmes contraintes formelles dans tous les programmes de construction rédigés par des élèves de 3ème observés par Celi et Bessot (2008) : phrases courtes et injonctives (avec des impératifs présents ou des infinitifs) pour exprimer des instructions, utilisation d'un lexique spécifique à la géométrie, retours à la ligne ou signes particuliers (tiret, puce) pour visualiser l'ordre. Ces spécificités qui semblent, de fait, faire consensus dans les classes respectent les principes de rigueur et de concision implicitement attendue dans les énoncés mathématiques : toutes les informations indispensables (et elles seules !) sont mentionnées ; les termes du lexique mathématique sont préférés aux termes de la langue usuelle, moins adaptés pour désigner les objets géométriques (comme *rond* à la place de *cercle*) ; les informations redondantes ou inutiles sont bannies ; les instruments ne sont pas indiqués; et le langage technique des actions n'est pas utilisé (par exemple : « je prends le compas, je place la pointe du compas sur le point, etc. »). Toutefois, ces règles qui paraissent incontournables dans les classes ne découlent d'aucune théorie mathématique proprement dite, mais bien de l'intégration dans l'espace scolaire d'un genre procédural transformé (Schneuwly & Dolz, 1997) par un processus de « scolarisation des genres » (Dolz & Gagnon, 2008, p. 185 ; Denizot, 2010, 2016), d'où cette référence partagée par les enseignants lorsqu'ils

---

[9] Tous les extraits dans l'article sont numérotés selon l'ordre chronologique de leur apparition dans le texte.

[10] Si la transcription de l'oral est ponctuée dans les exemples figurant dans cet article, c'est uniquement à des fins de lisibilité pour le lecteur. Par ailleurs, la description des séances sera présentée dans la partie suivante.

doivent faire écrire un programme de construction, référence qui nous semble faire partie à présent du contrat didactique (Brousseau, 1998) en vigueur dans les leçons de géométrie à propos des programmes de construction.

Nous voyons ainsi qu'outre les enjeux mathématiques de ce type de tâche, l'écriture d'un programme de construction nécessite l'entrée dans un genre bien particulier. On peut alors se demander si les élèves parviendront à fournir le travail mathématique demandé tout en s'appropriant les spécificités de ce genre discursif.

2. L'expérimentation

2.1. Constitution du corpus

Dans le cadre d'une recherche portant sur la mise en œuvre d'un dispositif d'aide (Assude et al., 2016 ; Millon-Fauré et al., 2018), nous avons analysé, en novembre 2015, sept séances consécutives dans une classe de CM2 de Marseille. Dans cet article, nous ne regarderons pas les effets de notre dispositif d'aide sur l'engagement et les apprentissages des élèves : nous avons déjà étudié ces problématiques précédemment. Nous nous concentrerons ici sur l'entrée des élèves dans ce nouveau type de tâches (au sens de Chevallard, 1999) que constitue l'écriture de programmes de construction. Pour cela, nous nous focaliserons uniquement sur les séances 3 et 4. Les élèves observés avaient déjà, en CM1 et début de CM2, rencontré des programmes de construction simples dont ils devaient suivre les instructions afin de construire une figure. Ils avaient également décrit des figures simples tels que des carrés ou des rectangles, mais cette classe n'avait jamais réfléchi à l'élaboration d'un programme de construction avant le début de cette séquence.

Lors de la séance 3, chaque binôme devait écrire un texte permettant à d'autres élèves de construire une des figures en figure 5 sans l'avoir vue, ce qui correspond à une situation de « figures téléphonées » (Laborde, 1982). Aucune contrainte n'avait été formulée concernant les outils de construction utilisables par les élèves et ces derniers disposaient donc des instruments de géométrie habituels, à savoir, règle graduée, équerre et compas.

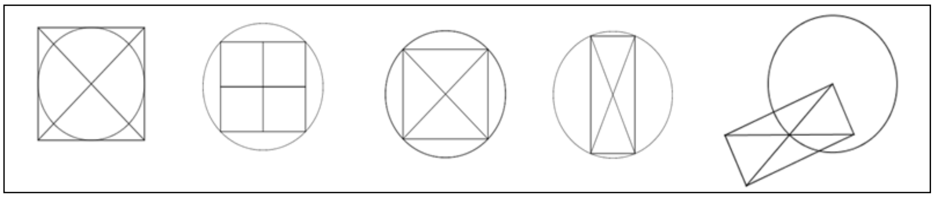


Figure 5. Figures proposées aux élèves en séance 3

Lors de la séance 4, les productions écrites étaient échangées et chacun devait essayer de construire la figure correspondant aux instructions reçues. Une discussion entre les deux binômes ayant permuté leur texte devait permettre aux élèves d'expliciter leurs choix d'écriture, de les argumenter et de revenir sur des erreurs éventuelles afin de les corriger. Enfin, lors d'une mise en commun en classe entière, les élèves et l'enseignante institutionnalisaient les contraintes à respecter pour écrire un programme de construction.

Pour toutes les séances, nous disposions de deux caméras et d'un enregistreur sonore, ce qui nous a permis de suivre simultanément trois groupes d'élèves. Par ailleurs, nous avons récupéré toutes les productions-élèves de l'ensemble de la classe et procédé à plusieurs entretiens semi-directifs avec l'enseignante.

2.2. Choix effectué pour notre recherche

Ici, nous avons choisi de nous focaliser sur le travail de deux binômes : Ode et Fabio d'une part, Arthur et Medhi d'autre part. Trois de ces élèves (Ode, Fabio et Arthur) sont décrits par l'enseignante comme étant en difficulté en mathématiques.

Nous allons étudier les interactions et les productions de ces élèves au cours de trois épisodes particulièrement significatifs des séances 3 et 4 (voir annexes 1 à 3). Dans chaque extrait, les interventions (indiquées par i.) seront numérotées selon leur ordre d'apparition. Certaines remarques de l'enseignante recueillies lors des entretiens viendront également éclairer nos analyses :

> **Épisode 1** (séance 3, durée 7 min 30 s) : Fabio et Ode doivent écrire un programme de construction correspondant à la figure que l'enseignante leur a donnée (un carré inscrit dans un cercle et ses diagonales) (27 interventions).
> **Épisode 2** (séance 4, durée 6 min) : Ode et Fabio exécutent le programme de construction de Medhi et Arthur (34 interventions).
> **Épisode 3** (séance 4, durée 10 min) : Ode et Fabio comparent leur figure avec celle du programme de construction de Medhi et Arthur et vice versa. Les quatre élèves échangent sur les éventuelles erreurs ou lacunes présentes dans les programmes de construction proposés (71 interventions).

Nous terminerons en regardant l'institutionnalisation produite par la classe à l'issue de ces deux séances.

2.3. Analyse a priori de la tâche proposée aux deux binômes observés

À la suite d'une erreur lors de la distribution des énoncés, les deux binômes que nous allons observer ont reçu la même figure (cf. Figure 6) mais cette erreur s'est révélée providentielle, dans la mesure où les deux binômes ont été amenés à confronter leurs programmes de construction qui correspondaient à la même figure.

Figure 6. Figure proposée aux deux binômes observés

Nous allons étudier les différentes tâches que les élèves doivent réaliser pour élaborer le programme de construction de cette figure.

Nous avons pu voir (cf 1.1) que ce type de tâches nécessitait le passage par différentes phases, qui peuvent éventuellement s'entremêler. Ainsi, au-delà de la vision globale de la figure (phase 1), les élèves doivent la décomposer en unités figurales (phase 2). Dans cette phase, plusieurs choix s'avèrent possibles :
- on peut concevoir cet assemblage comme une *juxtaposition* d'unités figurales (Duval & Godin, 2005) et y voir par exemple quatre triangles et quatre segments circulaires ;
- on peut également considérer cette figure comme une *superposition* d'unités figurales : par exemple, un disque - ou un cercle -, un quadrilatère et deux segments sécants, ou un disque, deux triangles et un segment (voir figure 7).

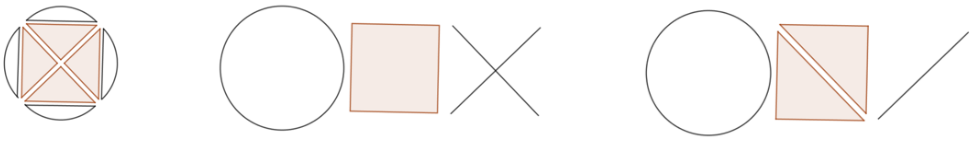


Figure 7. Trois décompositions différentes de la figure de départ

Concentrons-nous sur cette deuxième décomposition (un cercle, un quadrilatère et deux segments sécants). Dans la phase 3, il convient de prélever les informations pertinentes (propriétés qualificatives ou de localisation des positions relatives des sous-figures) concernant les unités figurales. Nous pouvons remarquer qu'ici aucun codage ne nous permet de nous prononcer sur la nature du quadrilatère. Toutefois, en cycle 3, les raisonnements géométriques reposent encore sur le paradigme de la géométrie perceptive ou de la géométrie instrumentée (Charnay, 1998) et les élèves s'assurent de la validité des propriétés ciblées (le quadrilatère peut être identifié comme étant un carré) soit de manière perceptive, soit après contrôle avec les instruments de géométrie.

Il leur faut également relever les informations concernant les positions des différentes unités figurales les unes par rapport aux autres. Notons que ces positions relatives peuvent s'avérer assez délicates à expliciter de manière rigoureuse : ainsi, il ne suffira pas d'indiquer que le carré se trouve à l'intérieur du cercle, mais bien qu'il est inscrit dans le cercle. En ce qui concerne les segments, il est possible d'indiquer leur localisation soit par rapport au carré (ce sont ses diagonales) soit par rapport au cercle (ce sont deux diamètres perpendiculaires du cercle).

La phase 4 correspond à l'ordonnancement de ces informations. Dans un programme de construction, l'ordre choisi doit correspondre à une chronologie possible pour la construction de la figure. Même en se cantonnant au cas de la deuxième décomposition (voir figure 7), plusieurs options s'offrent alors. Nous en citons quelques-unes sans chercher à établir une liste exhaustive :

> Option a). Il est possible de commencer par la construction de deux droites perpendiculaires. On peut alors tracer un cercle ayant pour centre le point d'intersection de ces droites, puis le carré ayant pour sommet les quatre points d'intersection des droites et du cercle. On peut également tracer tout d'abord les deux segments égaux portés par ces droites qui ont pour milieu leur point d'intersection. On construit alors le carré recherché en joignant convenablement les extrémités de ces segments, et enfin le cercle ayant pour diamètre l'un de ces segments (ce qui nécessite le repérage du centre du cercle et de son rayon).

> Option b). On peut également construire tout d'abord le carré, puis ses diagonales. Il faudra alors tracer un cercle ayant pour diamètre l'un de ces segments pour terminer la figure.

Notons que ces deux premières chronologies ne sont peut-être pas les plus naturelles au premier abord, car une vision globale de la figure amène souvent à appréhender tout d'abord le contour extérieur, c'est-à-dire le cercle. Or, dans ces deux chronologies, celui-ci n'est pas construit en premier.

> Option c). Enfin, on peut tout d'abord tracer le cercle. La suite s'avère plus délicate puisqu'il convient de construire un carré inscrit dans un cercle. Plusieurs techniques peuvent être utilisées : construire deux triangles rectangles isocèles ayant pour hypoténuse l'un des diamètres du cercle ou construire tout d'abord deux diamètres perpendiculaires du cercle qui seront les diagonales du carré. Même si ces deux techniques n'ont pas encore été travaillées en classe de CM2, il serait toutefois possible que les élèves choisissent cette chronologie sans prendre conscience de la difficulté que représente ce type de technique (Chevallard, 1999).

Cette analyse nous montre à quel point la décomposition de cette figure et le choix d'une chronologie de construction s'avèrent complexes, d'autant plus que certaines unités figurales en jeu ici occupent des « statuts » différents au cours de l'élaboration du programme de construction. Ainsi, dans l'option a), les points d'intersection des droites et du cercle sont considérés tantôt comme les extrémités des segments, tantôt comme les sommets du carré ; dans l'option b), les segments vont devenir des diagonales du carré puis des diamètres du cercle et le point de concours de ces deux diagonales peut être également perçu comme le milieu des segments ou le centre du cercle…

A ces difficultés d'ordre mathématique s'ajoute le travail de rédaction des instructions du programme de construction en respectant les contraintes spécifiques à ce genre (cf. 1.2.) afin d'être reconnu comme tel dans la classe.

3. Analyse des épisodes et résultats

Quels sont les indices et les difficultés de ces élèves à entrer dans ce genre de discours et dans le contrat didactique attendu à propos de ce type de tâches ? Plusieurs critères vont nous permettre d'analyser les productions et les échanges des élèves pour répondre à cette question.

Nous avons choisi d'analyser chacun des épisodes (cf. 2.2.) différemment[11]. L'épisode 1 (rédaction du programme de construction) va nous permettre d'observer le travail mathématique (la décomposition de la figure ; le choix de la chronologie) ainsi que l'aspect linguistique de la production (le vocabulaire utilisé ; la respect des contraintes formelles ; la présence d'informations non pertinentes). Avec l'épisode 2 (application du programme de construction), nous centrerons notre attention sur la position de lecteur-scripteur imposée par la situation. L'épisode 3 (mise en commun entre deux binômes) sera l'occasion de revenir sur les difficultés rencontrées par les binômes.

3.1. Épisode 1 (annexe 1) – Premiers pas et difficultés

Dans la séance 3 du dispositif (cf. Annexe 1), Fabio et Ode doivent élaborer un programme de construction d'abord individuellement et ensuite à deux. Nous allons analyser les productions et les échanges de Fabio et d'Ode au moment où ils doivent rédiger un programme de construction commun.

3.1.1. Analyse des critères

a) Décomposition et positions relatives des unités figurales

Fabio identifie les unités figurales qui composent la figure de départ**,** notamment le cercle et le carré et même s'il n'utilise pas le terme diagonale, il désigne chacun des deux segments qui doivent être tracés :

---

[11] Chaque épisode figure dans les annexes et chaque extrait relevé dans l'article renvoie au numéro de l'intervention (nommée : i) figurant dans la transcription (cf. annexes).

> (2) Fabio : […] on prend notre règle et on part du sommet A jusqu'au sommet C. Après on reprend notre règle on part du sommet B au sommet D *A, B, C et D étant le nom des sommets du carré*[12] (épisode 1, i. 11)

Il précise notamment la position relative du cercle et du carré :

> (3) Fabio : et dans le cercle on dessine un carré et dans le carré on prend notre règle (épisode 1, i. 11)

La reprise du syntagme « dans le carré » (extrait 3) et avant cela « dans le cercle » montre que Fabio veut préciser la position relative des figures, même si l'on peut noter que les informations données ne sont pas toujours suffisantes : il aurait théoriquement fallu indiquer que le carré était inscrit dans le cercle. Toutefois, Fabio nomme les sommets du carré, ce qui lui permet d'expliciter la position relative de chacun des segments par rapport au carré (cf. extrait 2).

Quant à Ode, elle décompose la figure complexe en cercle, carré et diagonales, et identifie la position relative des figures, même si cette indication n'est pas suffisamment précise :

> (4) Ode : Trace à l'aide de ton compas un cercle puis trace un carré à l'intérieur de ton cercle. (épisode 1, i. 6)

b) Prise en compte de la chronologie

Les deux élèves prennent en compte une chronologie dans leur programme de construction, en commençant par indiquer le tracé du cercle, puis du carré et finalement des diagonales. Dans leur texte respectif apparaissent des mots de liaison qui soulignent cette chronologie : *et*, *après* (extrait 2) pour Fabio, *puis* (extrait 4) pour Ode.

Tous deux choisissent de suivre les mêmes étapes : tracer le cercle puis le carré. Nous avons relevé plus haut les difficultés posées par le choix de cette chronologie : les élèves de CM2 ne disposent pas encore des connaissances nécessaires pour tracer un carré inscrit dans un cercle donné. Mais Fabio et Ode ne se posent pas de question concernant l'effectivité des constructions qu'ils proposent : aucun des deux d'ailleurs ne songera à essayer de suivre leur propre programme de construction pour tenter de tracer la figure.

c) Usage du vocabulaire géométrique

Les deux élèves utilisent des mots du lexique géométrique tels que *cercle*, *carré*. Fabio utilise aussi le mot *sommet* et Ode, le mot *diagonale* qui est plus précis que les périphrases utilisées par Fabio :

---

[12] Dans les interventions, les commentaires (indications des actions, des gestes, etc.) sont en italiques.

> (5) Fabio : […] on part du sommet A jusqu'au sommet C. Après on reprend notre règle on part du sommet B au sommet D. (épisode 1, i.11)

Ode le reprend en disant:

> (6) Ode : Une diagonale c'est toujours ça. *Elle montre la diagonale*. C'est jamais comme ça. *Elle montre un segment horizontal*. (épisode 1, i.12)

Précisons que cette intervention ne nous permet pas d'affirmer qu'Ode comprend réellement le terme *diagonale* : lorsqu'elle distingue cette diagonale du côté du carré, est-ce parce que ce segment relie deux sommets opposés du quadrilatère et non deux sommets consécutifs ? Ou s'appuie-t-elle sur la direction de ces deux segments, l'un étant en position oblique alors que l'autre se trouve en position horizontale ? En d'autres termes, aurait-elle reconnu les diagonales du carré si elles avaient été en position horizontale et verticale par rapport à elle ? C'est difficile à dire, mais on peut noter la volonté d'Ode d'utiliser, dans son programme de construction, ce terme peu courant pour ces élèves de CM2.

D'autres échanges entre ces deux élèves nous montrent l'acquisition instable des mots du lexique géométrique. Deux exemples dans l'épisode 2 (séance 4, annexe 2) nous le montrent : Fabio utilise le mot *rond* à la place de *cercle* (il est encore dans l'appréhension perceptive) et Ode emploie le verbe *rallonger* pour prolonger les côtés du carré afin d'en faire un rectangle :

> (7) Fabio : Ben non, dans le rond. (épisode 2, i. 7)
>
> (8) Ode : C'est pas grave, j'ai juste à les rallonger. (épisode 2, i. 16)

Toutefois ces approximations relevées à l'oral sont remplacées par les termes adéquats du lexique mathématique à l'écrit : ainsi *rond* devient *cercle* dans le texte de Fabio (cf. l'extrait 9 ci-dessous). Une part du contrat didactique lié à l'écriture de texte mathématique semble donc s'installer pour ces deux élèves.

d) Écriture d'un genre procédural

Lors de leurs productions individuelles, Fabio et Ode ne se positionnent pas de la même manière par rapport à ce nouveau genre. Fabio est plutôt dans un genre de récits (Adam, 2011) avec l'emploi du *on* (typique du compte-rendu), la présence de connecteurs chronologiques en chaîne *et*, *après* :

> (9) Fabio : On prend des outils de géométrie et une feuille que le maître ou la maîtresse donne, on trace un cercle et dans le cercle on dessine un carré et dans le carré on prend notre règle et on part du sommet A jusqu'au sommet C. Après on reprend notre règle on part du sommet B au sommet D. (épisode 1, i. 11)

Ode entre dans l'écriture du programme en employant un impératif *trace*. Le choix de ce mode la situe dans le genre attendu :

(10) Ode : Trace à l'aide de ton compas un cercle puis trace un carré à l'intérieur de ton cercle. […] Puis trace des diagonales à l'intérieur du carré et rajoute les codages. (épisode 1, i .6 et i. 8)

Elle respecte les règles de concision attendues par l'enseignante (et constitutives du genre à l'étude) : phrases courtes et précises. Elle peut ainsi donner des conseils à Fabio sur son écriture :

(11) Ode : Alors déjà, ça fait une phrase en moins. (épisode 1, i .12)

e) Présence d'informations inutiles

Dans leurs productions individuelles, les deux élèves évoquent certains instruments : le « compas » pour Ode, les « outils de géométrie » pour Fabio. Mais la position d'Ode relativement à l'indication des outils évolue lorsque les élèves doivent écrire leur programme commun. Dans leurs échanges, elle prend une position nette à ce propos :

(12) Ode : Ça sert à rien de le dire [prendre une règle pour tracer la diagonale] parce qu'ils le savent. (épisode 1, i. 12)

(13) Ode : On écrit quoi ? A l'aide du compas ça sert à rien. (épisode 1, i. 25)

Fabio tente au contraire de donner le maximum d'informations, notamment en ce qui concerne les aspects matériels des actions à réaliser (« On prend des outils de géométrie et une feuille que le maître ou la maîtresse donne ; on reprend notre règle »). Pour cet élève, indiquer les outils dont on se sert est nécessaire. À la suite de l'intervention d'Ode (extrait 13), il répond :

(14) Fabio : On est obligé. Un cercle, pour qu'il soit droit on est obligé de prendre un compas (épisode 1, i. 26)

C'est d'ailleurs ce qu'avait déjà remarqué l'enseignante dans l'entretien qui suit la séance 2 :

(15) Enseignante : Certains enfants sont restés vraiment sur les outils, n'ont pas dépassé les outils. (entretien post, séance 2)

Ode critique également le programme de Fabio en ce qui concerne la référence à la « feuille de papier » :

(16) Ode : Toi tu marques, il sait qu'on doit prendre une feuille de papier. On va pas le faire sur le mur. (épisode 1, i. 14)

Les deux élèves échangent à ce propos, mais Ode n'arrive pas à convaincre Fabio qui interroge alors l'enseignante. Cette dernière renvoie la question aux deux élèves :

(17) Enseignante : Est-ce que tu penses que c'est intéressant de dire [prendre une feuille] ? Est-ce que tu penses que ça en fait partie ? Qu'il serait intéressant de savoir

> où on va le faire ? Est-ce que tu penses que c'est une donnée intéressante que tu dois mettre ? (épisode 1, i. 18)

Les interventions de l'enseignante permettent à Fabio de répondre « qu'il ne faut pas le mettre » (épisode 1, i. 19) et ainsi d'adopter la position d'Ode et d'effacer la référence aux outils dans le programme de construction.

3.1.2. Bilan de l'épisode 1

Ce premier épisode montre qu'Ode et Fabio ont commencé à entrer dans ce genre procédural : les deux élèves tiennent compte de certaines contraintes géométriques, notamment l'identification des unités figurales qui composent la figure de départ. Quelques lacunes persistent toutefois : s'ils pensent à donner certaines informations sur la position relative de ces figures, des précisions manquent encore (inscription du carré dans le cercle) et la chronologie qu'ils proposent ne permet pas une construction effective pour des élèves de ce niveau.

Par ailleurs, en ce qui concerne la prise en compte des contraintes formelles, tous deux semblent avoir compris la nécessité d'utiliser autant que possible un lexique géométrique. Cependant des différences apparaissent à ce niveau-là entre les deux élèves. Ode tient compte de contraintes liées au genre procédural : usage de phrases courtes et concises, usage de l'impératif. Elle évolue aussi par rapport à l'indication des outils de tracé. En revanche, Fabio commence par raconter ce qu'on doit faire et, en conséquence, il a plus de difficultés à entrer dans l'écriture, notamment en donnant des informations non pertinentes. Mais à la fin de la séance, une évolution se dessine peut-être grâce à la médiation de l'enseignante qui aide Fabio à prendre position sur l'indication du support et des outils de tracé.

3.2. Épisode 2 (annexe 2) – La position de récepteur-lecteur : un indice de l'évolution des élèves

Cet épisode montre en quoi la position de récepteur-lecteur du programme de construction d'un autre binôme permet de voir les évolutions des deux élèves face à ce genre discursif.

3.2.1. Analyse de la position de récepteur-lecteur

Fabio et Ode se partagent les tâches de lecture et de construction effective de la figure à partir des instructions du programme de l'autre binôme (Medhi et Arthur). Après avoir lu la première instruction, Fabio a tracé un cercle. À son tour, Ode lit l'instruction (placée entre guillemets dans l'extrait ci-dessous) et réagit :

> (18) Ode : « Trace un carré avec une règle et une équerre ». Je le trace où je veux. (épisode 2, i. 6)

Fabio répond aussitôt :

> (19) Fabio : Ben non, dans le rond. (épisode 2, i. 7)

Ode se place dans une posture qui est celle attendue en tant que récepteur d'un programme de construction : elle fait ce qui est écrit sans pallier les manques ou les imprécisions du programme. C'est ainsi qu'elle répète plusieurs fois :

> (20) Ode : Ils disent pas. *(elle se réfère à la position du carré par rapport au cercle)* (épisode 2, i. 8)
>
> (21) Ode : Je fais ce qu'ils disent. (épisode 2, i. 10)
>
> (22) Ode : Ils disent ça, on fait ça. (épisode 2, i. 12)

Ce changement de posture l'amène même à essayer de mettre en évidence toutes les faiblesses du programme reçu, ce qui est surprenant, car cette consigne n'a pas été formulée par l'enseignante : il n'a pas été précisé que les récepteurs devaient appliquer les injonctions reçues sans chercher à les interpréter. Ode garde ce même esprit critique dans la suite de l'extrait, essayant toujours de mettre en défaut le programme de construction proposé par Arthur et Medhi :

> (23) Ode : Il y a pas les dimensions. *(elle doit exécuter l'instruction « Trace un carré »)* (épisode 2, i. 12)

Ode commence à dessiner un rectangle dont la longueur et la largeur sont différentes, ce qui fait réagir Fabio et l'amène à demander la définition du carré à ses camarades situés derrière lui :

> (24) Fabio : Voilà ! Un carré c'est les quatre côtés égaux. (épisode 2, i. 15)

Une autre critique sera formulée par Ode :

> (25) Ode : « Trace deux diagonales avec la règle » Pourquoi ? A l'intérieur ? Ils disent : « Trace deux diagonales », mais ils disent pas où. (épisode 2, i. 20).

Nous pouvons noter que la remarque d'Ode est ici inappropriée puisque par définition une diagonale est un segment qui joint deux sommets opposés d'un polygone et se situe donc à l'intérieur de ce dernier (si le polygone est convexe). Fabio hésite à répondre et demande confirmation à l'enseignante qui interroge alors les deux élèves sur la définition d'une diagonale :

> (26) Enseignante : Ah je ne sais pas. C'est quoi une diagonale ? (épisode 2, i. 26)

La réponse d'Ode prouve qu'elle connaît effectivement cette notion et qu'elle aurait pu correctement interpréter l'instruction donnée dans le programme :

> (27) Ode : Ben, d'un sommet à l'autre, à l'intérieur. (épisode 2, i. 27)

Par conséquent, on peut penser que sa remarque précédente (25) était peut-être motivée par le fait de chercher des failles dans le programme de l'autre binôme. Ainsi, tout au long de l'extrait analysé, Ode s'ingénie à opter pour la solution la moins probable. Elle construit par exemple le quadrilatère le plus loin possible du cercle qui vient d'être tracé. Notons que le choix d'Ode de tracer le carré à côté du cercle et non dans le cercle va empêcher ces deux élèves de réaliser le problème posé par la construction effective d'un carré inscrit dans un cercle.

Fabio désapprouve d'ailleurs ce choix, car il suppose que le carré est à l'intérieur du cercle comme dans la figure qu'ils avaient et il cherche, tout au moins au début de l'extrait, à obtenir une figure aussi proche que possible de celle de départ. C'est pourquoi il a encore besoin de l'enseignante pour prendre position, relativement à cette question :

> (28) Fabio : Il a écrit : « Trace un carré avec une règle et une équerre », on n'est pas obligé de le mettre dedans.
>
> Enseignante : Ah, je ne sais pas. Ah, ce n'est pas précisé. (épisode 2, i. 23 et i. 24)

L'enseignante essaie d'amener les élèves à pousser plus loin leur réflexion, à dépasser le stade de la critique et à revenir sur la position relative des figures :

> (29) Enseignante : Ah ! Alors qu'est-ce que tu en penses ? Ah ! Très bien. Alors qu'est-ce qui vous manquerait, qu'est-ce qui vous manquerait finalement, qu'est-ce qu'ils n'ont peut-être pas précisé eux ? (épisode 2, i. 28)

Chaque élève répond dans ce sens :

> (30) Fabio : Bien, trace un carré dans le cercle. (épisode 2, i. 29)
>
> (31) Ode : Nous on a précisé : trace un carré dans le cercle. (épisode 2, i. 31).

Dans cet épisode, la position de lecteur-récepteur amène les deux élèves à revenir sur leur propre programme de construction dans lequel ils avaient précisé la position relative du carré et du cercle (même s'il y a eu là aussi des imprécisions).

3.2.2. Bilan de l'épisode 2

Ode se situe dans un contrat didactique relatif à la contrainte d'indiquer les relations entre les figures. Cette position n'est pas souvent celle des élèves qui essaient de « deviner » les imprécisions de la description en prenant des figures prototypiques ou en pensant que la figure est la même que la leur[13].

Fabio se place dans une autre position et a encore besoin de la médiation de l'enseignante pour accepter le fait que le programme de construction de l'autre binôme puisse comporter des manques. Mais de par les échanges qu'il a avec Ode, il prend conscience des insuffisances du programme de l'autre binôme, en ce qui concerne un point essentiel de la description de la figure. De ce fait, Fabio entrevoit

---

[13] Cette prise de position est d'autant plus intéressante lorsqu'on sait qu'effectivement les deux binômes avaient la même figure de départ.

en quoi l'écriture d'un programme de construction se doit d'être précise et rigoureuse à chacune des étapes de construction.

3.3. Épisode 3 (annexe 3) – Malentendus[14] entre binômes : de la nécessité d'argumenter

Dans cet épisode, le binôme (Fabio, Ode) rejoint le binôme (Arthur, Medhi) pour comparer les figures tracées et échanger sur leurs programmes de construction.

3.3.1. Analyse des malentendus

Fabio et Ode prennent tout de suite la parole pour indiquer aux autres ce qui manquait à leur programme :

> (32) Fabio : Alors déjà là. Quand vous dites : « Trace un cercle avec ton compas. Trace un carré avec une règle et une équerre ». Ton carré tu peux le tracer là, mais fallait préciser où *(inaudible)*, mais fallait préciser trace un carré à l'intérieur du cercle. (épisode 3, i. 1)

Fabio prend en charge l'argument qui était celui d'Ode pendant l'épisode 2. On peut supposer qu'il a compris la nécessité de préciser les positions relatives des objets géométriques.

Ode insiste également sur ce manque qui est essentiel pour décrire la figure :

> (33) Ode : Tu peux tracer là, mais tu as pas précisé (épisode 3, i. 4)

> (34) Ode : Où tu l'aurais tracé le carré ? (épisode 3, i. 18)

Et Fabio surenchérit, ce qui fait réagir violemment Arthur :

> (35) Fabio : Tu savais pas que c'était cette figure, tu ne savais pas.
> Arthur : Va te rhabiller ! Si, c'était obligé ! (épisode 3, i. 19 et i. 20)

Dans la suite, probablement pour rétablir le calme, une séquence argumentative se met en place à l'initiative d'Ode, approuvée par Fabio. Ode donne un exemple qui met en défaut la position d'Arthur :

> (36) Ode : Arthur, Arthur, Arthur, je vais inventer une figure. Tu vas me dire. Trace un rectangle et trace un cercle : tu fais quoi ?
>
> Fabio : Tu traces quoi et tu traces quoi ?
>
> Ode : Tu traces un cercle au milieu de la feuille ; où tu traces le rectangle ?
>
> Arthur : Ben avec le cercle.

---

[14] Le mot « malentendu » est pris au sens de : « divergence d'interprétation sur la signification de propos ou d'actes entraînant un désaccord », tel qu'il est défini dans le *Trésor de La Langue française* (voir https://www.cnrtl.fr/definition/malentendu).

> Ode : Ben non.
>
> Fabio : C'est dans le cercle.
>
> Ode : Oui, mais moi je voulais pas que tu le traces dans le cercle je voulais que tu le traces à côté. Tu as vu, tu as pas compris ! (épisode 3, i. 22 à i. 28)

On notera la pertinence du raisonnement d'Ode : elle choisit une figure où le cercle et le rectangle ne sont pas superposés. Elle montre ainsi que les constructions les plus naturelles (placer le rectangle et le cercle l'un dans l'autre) ne conviennent pas toujours, ce qui met en évidence la nécessité d'expliciter la position relative des deux figures.

Mais Arthur n'est pas prêt à entendre cet argument, car dans son binôme, le questionnement portait sur la difficulté de construire un carré inscrit dans un cercle et sur la pertinence de la chronologie choisie pour la construction. D'ailleurs, Medhi avait justifié le fait qu'ils aient tracé un rectangle au lieu d'un carré demandé dans le programme de construction en évoquant la difficulté de la construction attendue : « c'est trop dur ! » s'était-il exclamé (épisode 3, i. 7). Arthur, lui aussi, insistera sur la difficulté de la constructibilité de la figure demandée :

> (37) Arthur : Vous allez voir comment c'est impossible. Impossible. (épisode 3, i. 50)
>
> (38) Arthur : Alors là, c'est pour vous montrer comment c'est dur. (épisode 3, i. 53)

Plus tard, Medhi reprend cet argument vis-à-vis du programme de Fabio et d'Ode :

> (39) Medhi : Trace un cercle, mais comment on va le tracer, tout petit heu, le carré ? (épisode 3, i. 43)

La question est d'autant plus pertinente qu'Ode lui a dit un peu plus tôt :

> (40) Ode : Tu peux même le faire tout petit [le carré], on n'a pas précisé la taille. (épisode 3, i. 8)

Medhi s'interroge ici sur la taille relative du carré par rapport au cercle, pointant ainsi une insuffisance du programme de construction de Fabio et d'Ode. En effet, le fait de savoir que le carré est situé dans le cercle ne suffit pas pour effectuer la construction : il aurait fallu préciser qu'il devait être inscrit dans le cercle. Fabio ne saisit pas la portée de la question de Medhi (exemple 39) et il se contente de rétorquer :

> (41) Fabio : la maîtresse elle a dit qu'on mettait pas les mesures. (épisode 3, i. 44)

Cet argument d'autorité, qui ne répond pourtant pas à la problématique de Medhi, suffit à clore le débat.

Lors de leur travail en binôme, Arthur, ne parvenant pas à tracer un carré inscrit dans un cercle, avait proposé d'inverser l'ordre de construction de ces deux figures, ce qui aurait effectivement simplifié le problème. Mais Medhi avait refusé, car le programme d'Ode et Fabio indiquait de commencer par le cercle. Ils n'ont pas pu résoudre ce problème. De leur côté, Ode et Fabio ne sont pas conscients de l'existence de cet obstacle, comme on l'a déjà vu dans l'épisode 2, et ils répondent donc à Medhi :

> (42) Ode : C'est pas dur, regarde tu fais : hop ! Hop ! Hop ! Tu peux même le faire tout petit, on n'a pas précisé la taille *(Ode trace au jugé un quadrilatère qui ressemble à un carré et qui est inscrit dans le cercle de départ)*. (épisode 3, i. 8)

Le malentendu entre les deux binômes demeure : si Ode arrive à tracer un carré inscrit dans un cercle, c'est par tâtonnement. Les deux binômes veulent avoir raison et ils ont raison tous les deux, mais sur des problèmes différents. Cela les empêche de se mettre complètement dans la position de l'autre.

Enfin nous pouvons noter que Fabio et Ode ne semblent pas gênés par les nombreuses allusions aux instruments de géométrie contenues dans le texte de leurs camarades alors que dans les épisodes précédents, ils avaient pris conscience de l'inutilité de cette précision. Fabio dira même en lisant le programme de Medhi et Arthur :

> (43) Fabio : Alors « Trace un cercle à l'aide de ton compas », ça c'est bon. (épisode 3, i. 34)

Ce n'est qu'à la fin de cet épisode, qu'Ode en fera finalement la remarque :

> (44) Ode : Tu as pas besoin d'écrire avec ton équerre, avec ta règle. (épisode 3, i. 67)

3.3.2. Bilan de l'épisode 3

Ode et Fabio se préoccupent du respect des unités figurales données dans le programme de construction (il était demandé de tracer un carré, et non un rectangle) et de la donnée de toutes les informations nécessaires pour les construire (notamment les positions relatives des objets géométriques). Ils sont donc amenés ici à retravailler sur les phases 2 et 3 de l'élaboration de leur programme de construction. Par contre, ils n'ont pas réellement senti l'importance de la chronologie choisie (phase 4) qui peut ou non permettre la construction effective de la figure.

A contrario, si Arthur et Medhi se réfèrent à l'effectivité de la construction (renvoyant ainsi à la chronologie de la phase 4), ils ne perçoivent pas la nécessité de préciser la position relative des figures.

Les malentendus demeurent tout au long de l'épisode, car les deux binômes ne se posent pas les mêmes questions et chacun a raison de se poser les questions qu'il se pose.

3.4. Bref retour sur l'expérimentation

Comme nous avons pu le voir, Ode a conçu dès le départ que ce nouveau genre avait des caractéristiques linguistiques bien à lui. Fabio a mis plus de temps à l'intégrer, mais il suffit de comparer l'écriture du premier programme de construction dans l'épisode 1 et celle qui termine l'épisode 3 pour constater le chemin parcouru par cet élève :

> (45) Fabio : On prend des outils de géométrie et une feuille que le maître ou la maîtresse donne. On trace un cercle et dans le cercle on dessine un carré et dans le carré on prend notre règle et on part du sommet A jusqu'au sommet C. Après, on reprend notre règle on part du sommet B au sommet D. (épisode 1, i. 11)
>
> (46) Fabio : Petit un, trace un cercle à l'aide de ton compas. Petit deux, trace un carré à l'intérieur du cercle. Petit trois, trace deux diagonales avec ta règle. (épisode 3, i. 64)

En ce qui concerne Arthur, ce n'est pas l'entrée dans un nouveau genre qui interpelle cet élève, mais l'effectivité de la construction : comment construire un carré inscrit dans un cercle ? La difficulté mathématique l'emporte sur l'écriture.

Or l'enseignante reprendra surtout dans son institutionnalisation les contraintes formelles liées à l'écriture du programme de construction. Se trouve en figure 8 d'ailleurs la trace écrite qu'elle proposera à ses élèves de recopier dans leurs cahiers.

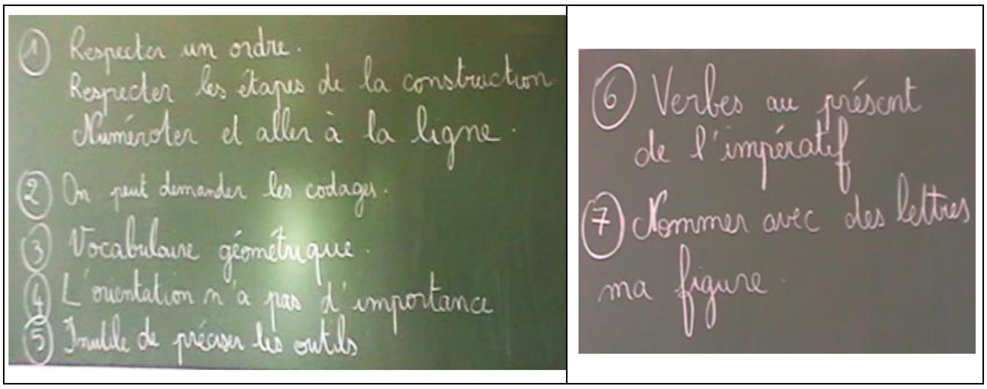


Figure 8. Photos du tableau prises lors de l'institutionnalisation à la fin de la séance 4

Nous pouvons remarquer que même si certaines difficultés liées aux mathématiques sont évoquées, c'est essentiellement sur l'aspect formel que l'accent est mis : « Respecter un ordre » ; « Respecter les étapes de la construction ». Ainsi ces deux points rassemblés dans le même petit 1) se termineront par une contrainte liée à la présentation du texte (la numérotation et les retours-lignes). Même lorsqu'Arthur soulèvera, lors de la mise en commun, le problème de l'ordre des constructions à réaliser, la question que l'enseignante renverra à la classe ne portera pas sur les raisons de l'importance de ce choix (ce qui aurait amené à des considérations mathématiques) mais sur la manière dont on peut indiquer ce choix, ce qui débouche naturellement sur des contraintes purement formelles. Aucune autre allusion au travail mathématique à effectuer (décomposition de la figure en unités figurales, extraction des informations pertinentes sur la dénomination et les positions relatives…) ne sera évoquée alors que certaines de ces problématiques ont bien été rencontrées dans les groupes.

Par contre, l'ensemble des contraintes formelles liées à l'écriture d'un programme de construction sont effectivement listées : les phrases injonctives (on notera que l'enseignante n'évoque que l'utilisation de l'impératif), l'utilisation du vocabulaire géométrique, le fait de ne pas mentionner les outils ou l'orientation de la figure. On peut remarquer que certains points de l'institutionnalisation ne sont pas des contraintes liées à l'écriture d'un programme de construction, ni sur le plan formel ni sur le plan mathématique. Ainsi, le fait de nommer les points de la figure constitue souvent une aide appréciable, mais en aucun cas une obligation. Quant au point numéro 2, s'il est effectivement possible dans un programme de construction de demander à faire apparaître sur la figure les codages, c'est une pratique peu usitée.

Conclusion

L'écriture d'un programme de construction se révèle être un type de tâches mathématiques assez particulier dans la mesure où il nécessite le respect d'un système relativement complexe de conventions linguistiques et de prise en compte d'un univers de référence commun au producteur et au lecteur.

Nous avons pu constater, en suivant les échanges d'Ode et de Fabio, que tout un cheminement s'avère nécessaire pour appréhender les contraintes formelles qu'impose ce genre et que tous les élèves ne se les approprient pas au même rythme. Notons toutefois que ces deux élèves, considérés comme en difficulté par l'enseignante, parviennent progressivement à entrer dans l'écriture de ce nouveau genre et à produire des textes proches de la forme attendue.

En revanche, les contraintes géométriques paraissent poser davantage de difficultés. Même si la décomposition en unités figurales et la reconnaissance de ces figures s'observent assez rapidement, la prise en compte de leur position relative et l'importance du choix d'une chronologie semblent plus difficiles à appréhender. Or, nous avons par ailleurs noté que l'enseignante ne revient pas sur ces questions (cf. 3.4.) et qu'elle s'attache lors de l'institutionnalisation à mettre en avant les contraintes formelles. Ainsi, les relations spatiales entre les unités figurales ne sont pas évoquées ou pas reprises par l'enseignante alors qu'elles ont été source d'ambiguïté pour les élèves. Cette orientation peut s'expliquer dans la mesure où l'exposé des conventions formelles à respecter s'avère plus accessible pour les élèves que les réflexions mathématiques citées. Toutefois, dans la mesure où ces dernières se révèlent indispensables à la réalisation de la tâche, on peut se demander comment les élèves pourront les appréhender si elles ne figurent pas dans le discours de l'enseignante.

Nous retrouvons ici les problèmes associés au caractère implicite de certaines attentes du contrat didactique qui peuvent conduire à se focaliser sur un seul type de contraintes (notamment les conventions formelles), occultant alors toute une partie du travail nécessaire pour réaliser ce type de tâche. Or pour appréhender l'écriture de programme de construction, il convient de travailler à la fois la dimension mathématique et la dimension linguistique. Entrer dans ce genre procédural demande une connaissance à la fois des mathématiques, du lexique géométrique, du scénario et d'une phraséologie partagée, comme l'indique Adam (2011).

Contrairement aux choix d'enseignement observés lors de cette recherche, une activité préparatoire (notamment en ce qui concerne les contraintes mathématiques) pourrait être menée avant de proposer ce type de situation. Ce travail préalable pourrait se focaliser sur une (et une seule) des difficultés identifiées (vision globale de la figure ; décomposition en unités figurales ; sélection des informations pertinentes pour les construire ou définir leurs positions relatives ; ordonnancement de ces informations). Il serait par exemple intéressant d'apprendre aux élèves à passer de la vision globale d'une figure à sa décomposition en unités figurales en s'aidant des instruments à leur disposition. D'autres pistes sont envisageables : ainsi Mithalal et Moulin (2015) proposent de donner aux élèves des programmes de construction lacunaires ou au contraire redondants afin de les amener à s'interroger sur le type d'informations nécessaires et indispensables. On pourrait également imaginer des programmes de construction spécifiquement conçus pour travailler sur d'autres aspects (textes présentant une décomposition peu pertinente, une chronologie rendant la construction difficile ou des indications sur les positions relatives insuffisantes…).

L'écriture d'un programme de construction est complexe, même pour des élèves de fin d'école primaire, si bien qu'un travail préalable pourrait effectivement les aider à appréhender chaque type de contraintes afin de leur permettre d'entrer dans ce genre bien particulier qu'est l'écriture d'un programme de construction.

Bibliographie

APOTHELOZ, D. (1998). Éléments pour une logique de la description et du raisonnement spatial. Dans Y. Reuter (dir.), *La description. Théories, recherches,* *formation, enseignement*, (p. 15-31), Villeneuve d'Ascq : Presses Universitaires du Septentrion.

ADAM, J.-M. (2001). Types de textes ou genres de discours ? Comment classer des textes qui disent de et comment faire ? *Langages*, **141**, 10-27.

ADAM, J.-M. (2011). *Les textes : types et prototypes : récit, description, argumentation, explication et dialogue*, Paris : A. Colin.

ASSUDE, T., KOUDOGBO, J., MILLON-FAURE, K., MORIN, M.-P., TAMBONE, J. & THEIS, L. (2016). Mise à l'épreuve des fonctions d'un dispositif d'aide aux élèves en difficulté en mathématiques. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, **16(1)**, 1-35.

BAKHTINE, M. (1984). *Esthétique de la création verbale* (traduit par A. Aucouturier). Paris : Gallimard.

BIBER, D., JOHANSSON, S., LEECH, G., CONRAD, S. & FINEGAN, E. (1999). *Longman Grammar of Spoken and Written English*. New-York: Longman.

BIBER, D. & CONRAD, S. (2010). *Register, Genre, and Style*. Cambridge: Cambridge University Press.

BLANCHE-BENVENISTE, C. (2005). Le corpus de français parlé du GARS. Dans E. Burr (dir.), *Tradizione e Innovazione. Il parlato : teoria, corpora, linguistica dei corpora* (p. 57-76), Florence : Franco Cesrai Editore.

BORE, C. (2007). Corpus et genres scolaires : affinités, difficultés. *Le français aujourd'hui*, **159(4)**, 19-28.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La pensée Sauvage.

BRUNEL, M. (2016). La maîtrise des genres, centre du curriculum scolaire en France de l'entrée à l'école au lycée. Dans G. Sales Cordeiro et D. Vrydaghs (dir.), *Statuts des genres en didactique du français : recherche, formation et pratiques enseignantes* (p. 109-128), Namur : Presses Universitaires de Namur.

BULEA, E. (2013). Retour sur un classement des genres à enseigner. État des lieux et tentative de clarification. *Pratiques*, **157/158**, 201-215.

CANVAT, K. (2003). L'écriture et son apprentissage : une question de genres ? État des lieux et perspectives. *Pratiques*, **117/118**, 171-180.

CELI, V. & BESSOT, A. (2008). Statut et rôle du dessin dans la formulation d'un programme de construction au Collège. *Petit x*, **77**, 23-46.

CELI, V. & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2014). Articulation entre langage et traitement des figures dans la résolution d'un problème de construction en géométrie. *Spirale-Revue de recherches en éducation,* **54**, 151-174.

CHARNAY, P. (1998). De l'école au collège - les élèves et les mathématiques. *Grand N* , **62**, 35-46.

CHARTRAND, S.-G., EMERY-BRUNEAU, J. & SENECHAL, K. (2015). *Caractéristiques de 50 genres pour développer les compétences langagières en français*. Québec : Didactica, c.é.f. En ligne : https://www.enseignementdufrancais.fse.ulaval.ca/

CHARTRAND, S.-G. (2016). Les genres du discours : point nodal de la discipline français. Dans G. Sales Cordeiro et D. Vrydaghs (dir.), *Statuts des genres en didactique du français : recherche, formation et pratiques enseignantes* (p. 52-81), Namur : Presses Universitaires de Namur.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques* **19(2)**, 221-266.

DENIZOT, N. (2010). Genres littéraires et genres textuels dans la discipline français. *Pratiques,* **145/146**, 211-230.

DENIZOT, N. (2016). La notion de genre dans les recherches en didactique du français entre 1990 et 2013. Dans G. Sales Cordeiro et D. Vrydaghs (dir.), *Statuts des genres en didactique du français : recherche, formation et pratiques enseignantes* (p. 29-51), Namur : Presses Universitaires de Namur.

DEULOFEU, J. (2000). Les commentaires sportifs télévisés sont-ils un genre au sens de la « grammaire des genres ? ». Dans M. Bilger (dir.), *Corpus. Méthodologie et applications linguistiques* (p. 271-295), Paris : Champion.

DE PIETRO, J.-F. & SCHNEUWLY, B. (2003). Le modèle didactique du genre : un concept de l'ingénierie didactique. *Les Cahiers Théodile,* **3**, 27-52.

DOLZ, J. & GAGNON, R. (2008). Le genre du texte, un outil didactique pour développer le langage oral et écrit. *Pratiques,* **137/138**, 179-198.

DUVAL, R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères IREM,* **17**, 121-138.

DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et sciences cognitives*, **10**, 5-53.

DUVAL, R. & GODIN, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, **76**, 7-27.

ÉLALOUF, M.-L. & BORE, C. (2007). Construction et exploitation de corpus d'écrits scolaires. *Revue française de linguistique appliquée,* **12(1)**, 53-70.

GARCIA-DEBANC, C. (1996). Quand des élèves de CM argumentent. *Langue française,* **112**, 50-66.

GAUD, D. (1987). Programmes de construction – Angles. *Petit x,* **13**, 43-53.

LABORDE, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbiolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique* (Thèse de doctorat). IMAG, Université de Grenoble.

LAHANIER-REUTER, D. (1999). Éléments d'analyse de descriptions en mathématiques. *Petit x,* **53**, 27-46.

LEE, D. (2001). Genres, registers, text types and styles: clarifying the concepts and navigating a path through the BNC Jungle. *Language Learning and Technology* **5(3)**, 37-72.

MALRIEU, D. & RASTIER, F. (2001). Genres et variations morphosyntaxiques. *Traitement Automatique des Langues,* **42(2)**, 547-577.

MILLON-FAURE, K., THEIS, L., ASSUDE, T., KOUDOGBO, J., TAMBONE, J. & MORIN, M.-P. (2018). Comparaison des mises en œuvre d'un même dispositif d'aide dans des contextes différents. *Education et didactique*, **12(3)**, 43-64.

MINISTÈRE DE LA JEUNESSE, DE L'ÉDUCATION NATIONALE ET DE LA RECHERCHE, DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SCOLAIRE (MJENR) (2002). *Documents d'application des programmes*. *Mathématiques cycle des approfondissements (cycle 3).* En ligne : http://www.arpeme.fr/documents/2D31B3482C42937996EF.pdf

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (MEN) (2016). *Document Ressources 'Espace et géométrie au cycle 3 : les programmes de construction'*. En ligne sur le site éduscol : https://eduscol.education.fr/cid101461/ressources-maths-cycle-3.html

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (MEN) (2008). Programme de l'école primaire. *Bulletin officiel n°3 du 19 juin 2008. Hors-série*.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (MEN) (2015). Programme d'enseignement des cycles 2 et 3. *Bulletin officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015*.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (MEN) (2018). Programme d'enseignement des cycles 2 et 3. *Bulletin officiel spécial n°30 du 26 juillet 2018*.

MITHALAL, J. & MOULIN, M. (2015). Le programme de construction comme un récit : réticence et prolifération. *Journées d'étude LEMME 2015* [Vidéo]. En ligne : https://www.youtube.com/watch?v=aaVgT_OAfwg

NONNON, É. (1999). L'enseignement de l'oral et les interactions verbales en classe : champs de référence et problématiques (Aperçu des ressources en langue française). *Revue Française de Pédagogie,* **129**, 87-131.

RASTIER, F. (2001). *Éléments de théorie des genres*. En ligne sur le site Texto ! : http://www.revue-texto.net/index.php?id=555.

REUTER, Y. (2007). Statut et usages de la notion de genre en didactique(s). *Le français aujourd'hui,* **159(4)**, 11-18.

ROUBAUD, M.-N. & ROMAIN, C. (2018). Question des genres à l'école : les compétences langagières à travers l'exemple de la narration et de l'argumentation. *Verbum,* **40(1)**, 103-131.

SCHNEUWLY, B. & DOLZ, J. (1997). Les genres scolaires : des pratiques langagières aux objets d'enseignement. *Repères,* **15**, 27-40.

KARINE MILLON-FAURE
Aix-Marseille Université, ADEF
karine.millon-faure@univ-amu.fr

MARIE-NOËLLE ROUBAUD
Aix-Marseille Université, CNRS, LPL
marie-noelle.roubaud@univ-amu.fr

TERESA ASSUDE
Aix-Marseille Université, ADEF
teresa.dos-reis-assude@univ-amu.fr

Annexe 1

N° des interventions	Épisode 1- Séance 3 Durée : 7 min 30 s (de t = 17 min 30 s à t = 25 min)	
1	Fabio	*Il lit ce qui est écrit sur sa feuille :* « on trace un cercle et dans le cercle on dessine un carré et dans le carré, on prend le sommet, on part du sommet A » par exemple « du sommet A ou du sommet C et après, du sommet B au sommet D. »
2	Ode	*Elle lit ce qui est écrit sur sa feuille :* « Trace à l'aide de ton compas. Trace un cercle, puis trace un carré à l'intérieur de ton... »
3	Fabio	Regarde : A, B, C, D. *Il identifie les sommets sur sa figure*.
4	Ode	Moi j'ai marqué… *Elle montre sa figur*e.
5	Fabio	Tu as mis deux fois le B.
6	Ode	Non, c'est A. Regarde, moi j'ai : « Trace à l'aide de ton compas un cercle puis trace un carré à l'intérieur de ton cercle. »
7	Fabio	moi je lis ce qui est écrit
8	Ode	*Elle corrige sa faute à cercle puis continue de lire* : « Puis trace des diagonales à l'intérieur du carré et rajoute les codages. »
9	Fabio	C-O-D-A-G-E. Les codages, avec un S. *Il fait corriger la faute à Ode qui a écrit bocage*
10	Ode	Merci. Et toi tu as marqué quoi? Vas-y.
11	Fabio	*Il lit :* « On prend les outils de géométrie et une feuille que le maître ou la maîtresse donne, on trace un cercle et dans le cercle on dessine un carré et dans le carré on prend notre règle et on part du sommet A jusqu'au sommet C. Après on reprend notre règle on part du sommet B au sommet D. »
12	Ode	Ça sert à rien de le dire parce qu'ils le savent. Une diagonale c'est toujours comme ça. *Elle montre la diagonale*. C'est jamais comme ça. *Elle montre un segment horizontal*. Alors déjà, ça fait une phrase en moins. Moi c'est bien ce que j'ai écrit.
13	Fabio	Oui.
14	Ode	Toi tu marques, il sait qu'on doit prendre une feuille de papier. On va pas le faire sur le mur.
15	Fabio	Si le maître dit : « faites-le au tableau », tu peux hein.
16	Ode	Oui, mais c'est si le maître qui le dit, alors.
17	Fabio	*A l'enseignante* : Maîtresse? Le maître il a le droit de dire à l'élève : « fais le dessin au tableau? » Ou c'est obligatoirement obligé qu'il le fasse sur une feuille ?
18	Enseignante	Est-ce que tu penses que c'est intéressant de dire ? Est-ce que tu penses que ça en fait partie ? Qu'il serait intéressant de savoir où on va le faire ? Est-ce que tu penses que c'est une donnée intéressante que tu dois mettre ?
19	Fabio	Non. Mais elle on va pas la mettre.

20	Enseignante	Je sais pas moi. Je sais pas. Par rapport à ce qu'on a dit tout à l'heure, qu'est-ce que vous en pensez ?
21	Ode	Qu'il faut pas le mettre.
22	Fabio	Oui.
23	Enseignante	Alors essayez de rectifier par rapport à ce que vous avez fait pour avoir (*inaudible*).
24	Fabio	*Il efface la phrase*. (*Inaudible*)
25	Ode	On écrit quoi ? (*inaudible*). À l'aide du compas ça sert à rien.
26	Fabio	On est obligé. Un cercle, pour qu'il soit droit on est obligé de prendre un compas sinon ça donne. Regarde pas de compas. *Il dessine un cercle à main levée sur la feuille d'Ode. Il y a quelques discussions entre eux. Puis il va l'effacer sur la feuille d'Ode.*
27	Ode	On marque : Trace un cercle…

Annexe 2

N° des inter-ventions	**Épisode 2- Séance 4** **Durée 6 min (de t = 6 min à t = 12 min)**	
1	Fabio	Je peux le faire.
2	Ode	Alors on le fait tous les deux. *Elle lit :* « Trace un cercle à l’aide de ton compas ». Tiens prends une règle. Ils ne disent rien des dimensions.
3	Fabio	*Il trace un cercle avec le compas.*
4	Ode	Après à moi.
5	Fabio	Attends. Attends. *Il gomme et trace de nouveau un cercle.* OK. À toi. *Il donne la feuille à Ode.*
6	Ode	*Elle lit* : « Trace un carré avec une règle et une équerre ». Je le trace où je veux.
7	Fabio	Ben non, dans le rond.
8	Ode	Ils disent pas.
9	Fabio	*Il relit :* « Trace un carré. Trace un carré avec une équerre ». Oui. Attends. *Il lève la main.*
10	Ode	Non, non, non. Je fais ce qu’ils disent. *Elle trace un carré à l’aide de son équerre.*
11	Fabio	Attends, attends, attends! *Il mesure un côté du carré tracé par Ode puis efface le tracé.*
12	Ode	Ils disent ça, on fait ça. Il y a pas les dimensions.
13	Fabio	Prends la règle.
14	Ode	Là je fais cinq. Trois. Cinq. *Ode trace un rectangle de 3 cm sur 5 cm.*
15	Fabio	*Il pose une question au groupe derrière lui.* Voilà! Un carré c’est les quatre côtés égaux.
16	Ode	Ah oui! Non, non. C’est pas grave, j’ai juste à les rallonger.
17	Fabio	Ouais.
18	Ode	Je suis bête! *Elle rallonge le côté de 3 cm à 5 cm pour que les côtés*
19	Ensei-gnante	*À la classe :* C’est bon, vous estimez que vous avez terminé. *Pendant ce temps, Fabio vérifie les mesures du carré avec sa règle.* Donc quand vous avez fini. Quand vous pensez avoir fini votre figure. Alors je vais, il y a un groupe qui a terminé là.
20	Ode	*Elle continue de lire :* « Trace deux diagonales avec la règle. » Pourquoi ? A l’intérieur ? Ils disent : Ttrace deux diagonales », mais ils disent pas où.
21	Fabio	Maîtresse.
22	Ensei-gnante	*À Fabio :* Oui.
23	Fabio	Il a écrit « Trace un carré avec une règle et une équerre », on n’est pas
24	Ensei-gnante	Ah, je ne sais pas. Ah, ce n’est pas précisé.

25	Fabio	« …et là trace deux diagonales avec ta règle ». Je peux la tracer là aussi
26	Ensei-gnante	Ah je ne sais pas. C'est quoi une diagonale ?
27	Ode	Ben, d'un sommet à un autre, à l'intérieur.
28	Ensei-gnante	Ah! alors qu'est-ce que tu en penses ? Ah! très bien alors qu'est-ce qui vous manquerait, qu'est-ce qui vous manquerait finalement, qu'est-ce qu'ils n'ont peut-être pas précisé eux ?
29	Fabio	Bien, trace un carré dans le cercle…
30	Ensei-gnante	Ah, il manquerait oui peut-être de précision. D'accord. Alors ça on y pense.
31	Ode	Nous on a précisé : trace un carré dans le cercle.
32	Fabio	*Il trace les diagonales dans le carré.*
33	Ensei-gnante	Alors, Fiona vous allez chercher votre figure dans la bonne enveloppe.
34	Fabio	Maîtresse, on a fini.

Annexe 3

N° des interventions	Épisode 3 - Séance 4 Durée 6 min (de t=26 min à t=32 min)	
1	Fabio	Alors déjà là. Quand vous dites : « Trace un cercle avec ton compas. Trace un carré avec une règle et une équerre ». Ton carré tu peux le tracer là, mais fallait préciser où *(inaudible)*, mais fallait préciser trace un carré à l'intérieur du cercle. Voilà, et après quand tu as dit « Trace une diagonale avec ton équerre ».
2	Ode	Il y a une phrase qui va pas.
3	Fabio	« Trace un carré avec une règle et une équerre ». C'est-à-dire le carré tu pouvais le tracer là, là, là.
4	Ode	Tu peux tracer là, mais tu as pas précisé. *Ode prend leur feuille de programme et lit :* « Trace un cercle puis trace un carré à l'intérieur du cercle ». Alors un cercle, un carré…
5	Fabio	Un carré. C'est ça un carré? *Arthur et Mehdi ont dessiné un rectangle.*
6	Ode	C'est un rectangle. Un carré c'est tous les côtés de même longueur.
7	Mehdi	*(inaudible)* …c'est trop dur!
8	Ode	C'est pas dur, regarde tu fais : hop! Hop! Hop! Tu peux même le faire tout petit, on n'a pas précisé la taille.
9	Fabio	« Trace un carré à l'intérieur du cercle », c'est-à-dire tu traces un cercle.
10	Ode	« Trace des diagonales à l'intérieur du carré et rajoute les codages. »
11	Fabio	Ils sont où les codages ?
12	Ode	Nulle part. Et il y a pas les diagonales.
13	Fabio	Attends, attends, montre-moi ils sont où les codages ?
14	Arthur	On les a pas mis.
15	Fabio	Voilà, d'accord. Et et quand il y a marqué : « Rajoute les codages », tu les mets pas les codages ?
16	Ode	Regarde, si on t'aurait passé la tienne, tu n'aurais pas réussi aussi parce que…
17	Fabio	*Fabio relit le programme de l'autre groupe :* « Trace un carré avec une règle et une équerre ».
18	Ode	Où tu l'aurais tracé le carré?
19	Fabio	Tu savais pas que c'était cette figure, tu ne savais pas. Tu fais ton cercle…
20	Arthur	Va te rhabiller! Si, c'était obligé!
21	Fabio	Ben non! C'était pas obligé.
22	Ode	Arthur, Arthur, Arthur, je vais inventer une figure. Tu vas me dire. Trace un rectangle et trace un cercle : tu fais quoi ?
23	Fabio	Tu traces quoi et tu traces quoi ?
24	Ode	Tu traces un cercle au milieu de la feuille ou tu traces un rectangle ?
25	Arthur	Ben avec le cercle.
26	Ode	Ben non.
27	Fabio	C'est dans le cercle.

28	Ode	Oui, mais moi je voulais pas que tu le traces dans le cercle je voulais que tu le traces à côté. Tu as vu, tu as pas compris!
29	Fabio	Ça fait ça, c'est un rectangle. Et avec tout ce que vous avez fait, tout le temps que vous aviez, vous avez fait un rectangle.
30	Ode	*Reproches d'Ode sur le programme de l'autre groupe*. Vous, vous avez pas donné beaucoup d'indications.
31	Mehdi	Lui il fait un carré, lui un rond et après un cercle. Je lui dis carré. D'abord carré comme ça. Et après le cercle. Moi j'ai dit mais non, ils ont déjà dit : « Trace un carré, heu trace un cercle en premier ». Mais lui il a dit : « non, non, non, on fait un (*inaudible)* ».
32	Fabio	*(inaudible)*
33	Ode	Le nôtre, il est tout indiqué. Vous, il manque une phrase. « Trace un cercle à l'aide de ton compas », après tu mets « Trace un carré à l'intérieur de ton cercle ».
34	Fabio	*Fabio claque des doigts pour attirer l'attention d'Arthur qui regarde autre part. Il reprend la feuille de l'autre groupe, relit et corrige :* Alors « Trace un cercle à l'aide de ton compas », ça c'est bon. « Trace un cercle à l'aide de ton compas », ça c'est bon. Ensuite « Trace un carré à l'aide d'une règle et d'une équerre ». Tu mets « Trace un carré à l'intérieur du cercle » et là…et là, on aurait fait un cercle et dans le cercle, on aurait tracé un carré
35	Ode	Et là, nous ça aurait donné ça. *Elle montre la forme qui était dans l'enveloppe*.
36	Mehdi	*(inaudible)*
37	Ensei-gnante	Heu, dans dix minutes. On écoute deux minutes. Dans dix minutes, j'aimerais que vos textes soient modifiés en fonction des remarques que les collègues vous ont faites ou que vous vous vous êtes faites. Dans dix minutes, on fait un petit point. D'accord ?
38	Ode	*Ode reprend son programme.* Faites-nous une remarque, s'il y en a une.
39	Fabio	Trouves-en une.
40	Ode	Trouves-en une.
41	Arthur	Alors. *Il lit :* « Trace un carré à l'intérieur du cercle. Trace les diagonales à l'intérieur du carré. Et rajoute les codages. »
42	Fabio	Alors tu as quelque chose à dire ?
43	Mehdi	Trace un cercle, mais comment on va le tracer, tout petit, heu le carré ?
44	Fabio	La maîtresse elle a dit qu'on mettait pas on mettait pas les mesures.
45	Ode	Ou sinon j'aurais mis : « Trace un cercle de cinq centimètres. »
46	Arthur	Et un carré de deux centimètres.
47	Ode	Et un carré de deux centimètres. D'un millimètre…
48	Arthur	On avait fait ça. On a démarré comme ça, n'est-ce pas Mehdi?
49	Ode	Et après, vous vous êtes ratés.
50	Arthur	Vous allez voir comment c'est impossible. Impossible.
51	Fabio	*Il essaie de tracer le carré.*
52	Ode	Tu sais, tu es pas obligé de commencer de là. Cela aurait quand même

		correspondu à la figure.
53	Arthur	Alors là, c'est pour vous montrer comment c'est dur.
54	Ode	*Elle prend la feuille de Fabio*. Mais non regarde. Vas-y. Efface. Non c'est pas grave. Passe.
55	Fabio	N'oublie pas qu'un carré ça a quatre côtés égaux.
56	Arthur	Ouais, rappelle-toi!
57	Ode	Oh! ça va toi, hein! Dix, dix, dix, dix.
58	Fabio	C'est un carré.
59	Arthur	Ça c'est un rectangle.
60	Fabio	*En tournant la forme :* Carré, carré, carré, tu vois.
61	Ode	Avec des angles droits.
62	Fabio	Ça c'est un carré, ça. Là tu as oublié de rajouter les diagonales.
63	Ode	Nous ce qu'on a à dire, nous c'est ce qui est en rouge. Et nous, on n'a rien à dire sur le nôtre.
64	Fabio	Et là on aurait compris, on aurait fait la même figure. Je vais te relire. *Il lit :* « Petit un, trace un cercle à l'aide de ton compas. Petit deux, trace un carré à l'intérieur du cercle. Petit trois, trace deux diagonales avec ta règle. »
65	Ode	C'est pareil que nous là.
66	Fabio	Voilà! Et tu as vu, c'est mieux.
67	Ode	Tu as pas besoin d'écrire avec ton équerre, avec ta règle.
68	Fabio	Et là, est-ce que tu trouves quelque chose sur nous à marquer ?
69	Arthur	Non.
70	Fabio	Voilà! Tu as compris? Et en plus, quand on dit : « Trace un cercle et trace un carré », un carré ce n'est pas, oublie pas qu'un carré ça a quatre côtés de la même longueur. Et là à l'intérieur du cercle. Pas avec l'équerre, pas avec l'équerre.
71	Ode	Ce n'est pas grave.

THOMAS BARRIER, AZZEDINE HAJJI

EXEMPLE, EXPLICATION ET PROCESSUS DE DEMONSTRATION

Abstract. Example, explanation and proving. The article looks at the proving process in mathematics from a didactic perspective. The study seeks to identify what metamathematics knowledge is at stake when mathematicians produce proof of implications with universal quantifiers. For this reason, we propose a modelling of the proof process – from the manipulation of examples to the finished product – based on dialogic logic tools. This modelling leads us to a characterization of the enunciative position which is needed to elaborate proofs. The results are derived from two cases: one in arithmetic integers, another in plane geometry. Their comparison allows us to discuss the limits of a transversal approach to this meta-mathematical knowledge without taking into account the specificity of mathematical fields.

Résumé. L'article s'intéresse au processus d'élaboration des démonstrations en mathématiques dans une perspective didactique. L'étude cherche à identifier les savoirs métamathématiques en jeu dans le cadre de la validation des énoncés qui s'expriment sous la forme d'implications universellement quantifiées. A cette fin, nous proposons une modélisation de ce processus – depuis la manipulation d'exemples jusqu'au produit fini – en appui sur des outils de logique dialogique. Cette modélisation nous conduit à une caractérisation de ces enjeux de savoir sur le plan de la position énonciative. Les résultats sont dégagés à partir de l'étude de deux cas : un en arithmétique des entiers, l'autre en géométrie plane. Leur comparaison nous permet de discuter des limites d'une approche transversale aux mathématiques de ces savoirs sur l'activité de démonstration.

Mots-clés. Démonstration, exemple, logique dialogique, position énonciative, géométrie, arithmétique.

Introduction

Cet article s'intéresse aux processus d'élaboration des démonstrations en mathématiques en tant que pratique langagière propre à cette discipline. Ces processus de validation sont familiers des mathématiciens et des enseignants de mathématiques. Pour autant, il n'y a que peu de consensus sur les caractéristiques de cette activité qui pourraient faire l'objet d'un enseignement explicite, d'une institutionnalisation, y compris dans le contexte de dispositifs spécifiquement conçus à cette fin[1]. L'enjeu de cet article est de contribuer à mieux identifier les savoirs métamathématiques qui sont en jeu dans les processus d'élaboration des démonstrations. La perspective est didactique : en proposant un éclairage épistémologique sur les savoirs qui y sont relatifs, notre objectif est d'alimenter la

---

[1] Problème ouvert, problème pour chercher, situation de recherche pour la classe, etc.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 24, p. 47 - 74.

réflexion sur son enseignement. Il faut souligner qu'en tant qu'objet d'enseignement et d'apprentissage, la démonstration se distingue d'autres contenus mathématiques. Son enseignement n'est en effet que rarement adossé à une théorie comme peut l'être celui des nombres, des fonctions ou encore de l'algèbre. Bien sûr, elle n'est pas seulement un objet logico-mathématique, c'est aussi une pratique discursive propre à la communauté mathématique, une forme particulière de preuve reposant sur les connaissances d'un sujet psychologique, etc., et il n'y a selon nous aujourd'hui pas de consensus sur le ou les points de vue à adopter dans le contexte de l'enseignement ordinaire des mathématiques. Dans cet article, nous proposons d'ancrer nos analyses didactiques pour l'essentiel dans le cadre général de la logique dialogique[2] avec également quelques emprunts du côté de la didactique du français (notion de position énonciative et de secondarisation). Sur le plan didactique, cette recherche relève de la perspective de la théorie des situations didactiques au sens où nous proposons une étude de la démonstration essentiellement centrée sur les situations (les jeux de validation) plutôt que sur les sujets psychologiques. « Ne peut-on pas étudier le jeu d'échecs indépendamment du joueur ? » nous interpelle Brousseau (1997, p. 4). L'originalité de cet article est de prolonger le travail de modélisation des situations, souvent centré sur les situations d'action (l'exemple paradigmatique étant celui de la course à 20), vers les situations de validation.

Une des principales problématiques concernant l'élaboration des démonstrations est celle de l'articulation du travail empirique sur les objets avec l'activité de manipulation des énoncés (Barrier, 2008). Afin d'avancer dans cette direction, Hersant (2010) prend appui d'une part sur les travaux de Bachelard (1938), à travers notamment la lecture qu'en fait le cadre didactique de la problématisation (Orange, 2005 ; Hersant & Orange, 2015), et d'autre part sur le point de vue d'un mathématicien sur la dimension expérimentale des mathématiques (Perrin, 2007). Notre recherche se distingue de ces travaux du point de vue des outils théoriques mobilisés. Si le cadre de la problématisation met bien au cœur de ses préoccupations la question de l'articulation entre le registre des faits (la validation empirique, les exemples) et le registre discursif des raisons, nous avons préféré retenir un outil de modélisation spécifiquement conçu pour modéliser le processus d'élaboration des démonstrations mathématiques (Barrier, 2016) dans le prolongement de la modélisation des situations de validation élaborée par Brousseau (1998). Nos travaux diffèrent aussi de ceux de Hersant du point de vue du niveau scolaire et du type de conjecture considéré[3] : nous nous intéressons à la validation des implications

[2] Par logique dialogique, nous désignons les approches pragmatiques de la logique reposant sur des notions de théorie des jeux (notamment celle de stratégie gagnante), les travaux de Rahman (par exemple Rahman & Keiff, 2005) notamment, mais aussi l'approche modèle-théorétique de Hintikka (par exemple Hintikka & Sandu, 1997).

[3] Ici nous considérerons les conjectures à valider comme étant déjà-là, plutôt qu'à construire ce qui constitue une nouvelle différence. Nous pourrions encore mentionner le niveau

universellement quantifiées – les énoncés de la forme $\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x)$ – et non à des problèmes de recherche de maximum dans le contexte des mathématiques discrètes et de l'enseignement primaire. Nous considérons donc nos travaux comme complémentaires à ceux de Hersant.

Au début de l'enseignement secondaire, la problématique de l'articulation de l'empirique et du déductif est souvent abordée dans une perspective négative où les exemples sont de mauvais objets. Il s'agit d'avertir les élèves de la rupture qu'il est nécessaire d'opérer pour accéder à la validation intellectuelle, sur l'écueil que constitue l'empirisme naïf (Balacheff, 1987). De fait, le contrat didactique usuel se caractérise par une focalisation sur la forme du produit fini, sur un jeu formel de manipulation d'énoncés à distinguer selon leur statut opératoire, le processus d'élaboration étant peu considéré (Gandit, 2008). Pourtant, les travaux de Balacheff l'ont mis en évidence, le travail sur les exemples peut s'inscrire dans une perspective de preuve intellectuelle dès lors que les exemples sont considérés non pour eux-mêmes, mais comme porteur d'une certaine généralité (les exemples génériques).

> C'est là, quelque part entre l'exemple générique et l'expérience mentale que s'opère le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles. Une marque de ce passage est une évolution des moyens langagiers mis en œuvre. (Balacheff, 1987, p. 165)[4]

Dans ce texte, nous cherchons à souligner le potentiel heuristique des exemples pour l'élaboration des démonstrations, leur potentielle contribution à l'activité mise en œuvre pour construire des raisonnements déductifs, et à caractériser les savoirs métamathématiques en jeu, c'est à dire à mieux saisir ce « quelque part » à l'articulation des preuves pragmatiques et des preuves intellectuelles. En cohérence avec la citation précédente, nous en proposerons une analyse en matière de pratiques langagières et plus particulièrement en termes de position énonciative (Bernié, 2002).

Nous commençons par présenter les outils théoriques que nous mobilisons pour modéliser les processus de démonstration, à savoir les approches dialogiques de la logique (Redmond & Fontaine, 2011) et pour penser l'inscription des élèves dans ces processus. Ajoutons pour éviter tout malentendu que ce texte ne s'intéresse pas à la question de la pertinence de ces outils en tant que potentiels objets d'enseignement, que ce soit dans le secondaire ou dans la formation des enseignants. Notre projet est plus modeste : s'appuyer en tant que chercheurs sur ces éléments théoriques pour contribuer à mieux caractériser un enjeu de savoir sur l'activité de

---

scolaire considéré (fin de l'enseignement primaire d'une part et enseignement secondaire de l'autre).

[4] Nous remercions Nicolas Balacheff pour sa lecture critique d'une précédente version de ce texte.

démonstration. Ces outils sont par la suite convoqués pour deux études de cas, la première en arithmétique et la seconde en géométrie. L'objectif est de caractériser le rapport aux énoncés et aux objets que ces processus des preuves supposent tout en profitant du contraste offert par les deux cas pour discuter de l'influence du domaine mathématique et plus particulièrement des registres de représentation des objets en jeu (Duval, 1995).

Une dernière précaution avant d'engager le travail de modélisation. En français, le terme de démonstration peut renvoyer aussi bien à l'activité mathématique ainsi désignée qu'au produit de cette activité c'est-à-dire le texte de démonstration. Dans cet article, nous nous intéressons à l'activité, au processus d'élaboration, et non au produit. Cette distinction est fondamentale dans la mesure où la fonction d'un tel texte n'est pas nécessairement de rendre compte de l'ensemble du processus d'élaboration de la preuve. Une focalisation sur le produit pourrait conduire à une minoration du rôle des exemples en tant qu'éléments susceptibles de contribuer au processus sous-jacent. Dans un article portant sur les schèmes de démonstration des étudiants, Recio et Godino (2001, p. 91) soulignent que même s'ils infèrent dans leur étude la nature de ces schèmes à partir de productions écrites d'étudiants, il n'y a pas nécessairement lieu d'opposer les schèmes empirico-inductifs des schèmes déductifs au niveau des processus d'élaboration des démonstrations. Evoquant une autre étude auprès d'étudiants à l'université autour du problème de la valeur de la somme des angles d'un triangle, ils écrivent avoir observé qu'un même étudiant pouvait commencer par une approche empirico-déductive pour ensuite terminer par une procédure relevant d'un schème déductif plus ou moins formel. Dans notre recherche, notre objectif est de parvenir à caractériser la position énonciative dans laquelle s'inscrire pour que le travail empirique puisse effectivement venir soutenir l'élaboration d'un argument déductif.

1. Modélisation du processus de démonstration : les outils

Le modèle dialogique proposé dans cette partie consiste en une adaptation à notre questionnement didactique des travaux en logique dialogique de Rahman et de ses collaborateurs situés pour leur part en philosophie de la logique et du langage. Le formalisme auquel nous recourons est inspiré de celui de Redmond et Fontaine (2011). Notons que cette piste est évoquée par Brousseau lorsque celui-ci fait référence aux travaux de Lorenzen (qu'il présente même comme fondateurs de son projet en didactique des mathématiques) :

> Sur la même représentation théorique, il met en scène la production de certains théorèmes et axiomes de logique comme moyen de régler des conflits entre un proposant et un opposant. C'est exactement ce ''jeu'' proposé par P. Lorenzen en 1967 dans son ouvrage Métamathématique qui est à l'origine de la théorie des situations. (Brousseau, 2002, p. 102)

La théorisation par Brousseau (1998) des situations de validation conserve d'ailleurs quelques traces de cette référence à travers les termes *opposant* et *proposant*. La modélisation qui sera proposée ci-dessous reprend et prolonge l'approche de Lorenzen (un jeu essentiellement « syntaxique » qui consiste en la manipulation d'énoncés, mais pas d'objet d'un domaine d'interprétation) : il s'agit d'une nécessité dès lors que l'on souhaite pouvoir rendre compte de la contribution des exemples à l'élaboration des démonstrations (Barrier, 2008). Nous y intégrons par ailleurs certains éléments d'une réflexion de Dowek (2013) sur les relations entre explication et démonstration que nous présentons maintenant.

1.1. Explication et démonstration

Hanna (2018) distingue deux manières de concevoir la problématique de l'explication mathématique dans sa relation avec les démonstrations. On peut tout d'abord s'intéresser à la démonstration pour elle-même, à la façon d'une théorie de logique mathématique, et à ses propriétés intrinsèques susceptibles de lui conférer une dimension explicative. Le lecteur ou scripteur, ses connaissances propres, ne sont pas particulièrement prises en considération. Il s'agit de l'entrée privilégiée dans les recherches en philosophie des mathématiques, y compris celles qui s'intéressent aux pratiques plutôt qu'aux questions de fondements. Par ailleurs, il est également possible d'entrer dans le questionnement dans une perspective de communication et d'apprentissage. Démonstrations et explications sont alors considérées comme des productions langagières au sein d'une communauté discursive donnée. Le questionnement porte alors sur leur élaboration et leur réception par les élèves à partir de leurs connaissances et de leur familiarité avec la forme des jeux de langage impliqués. C'est souvent cette entrée qui a été privilégiée dans les travaux en didactique des mathématiques, par exemple par Balacheff (2010).

Cependant, comme le signale Hanna (2018), les éclairages proposés par les analyses philosophiques sur la nature explicative d'une démonstration mathématique peuvent parfois être utiles aux recherches didactiques, quand bien même il n'existe pas aujourd'hui de consensus clair sur ce qui distingue les démonstrations qui expliquent de celles qui ne le font pas (ou moins). Nous commençons par nous situer dans une telle perspective en empruntant librement à Dowek (2013) des éléments de caractérisation de la notion d'explication reposant sur des caractéristiques logiques internes aux démonstrations. Nous reprenons ci-dessous son analyse.

Celui-ci s'appuie sur le fait mathématique suivant pour chercher à identifier ce qui caractérise une démonstration qui explique : $12\,345\,679 \times 36 = 444\,444\,444$. Pour démontrer ce fait, une méthode consiste à poser la multiplication en colonne. Mais un tel calcul, s'il permet de s'assurer du résultat et constitue bien une démonstration de la proposition ci-dessus, ne peut que difficilement être considéré comme une explication : chaque chiffre est déterminé de manière individuelle avec des procédures spécifiques sans lien apparent les unes avec les autres si bien que la régularité qui saute aux yeux dans l'énoncé apparaît comme un « accident ». Dowek (2013) commence par inviter à observer que l'énoncé en question peut se déduire d'un autre, plus général, et qui par ailleurs permet également d'établir d'autres résultats du même type : pour tout entier naturel n compris entre 1 et 9 on a 12 345 679 × 9 × n = 111 111 111 × n. Ce nouvel énoncé pourrait constituer une forme d'explication de l'énoncé initial précédent, mais il reste lui-même à expliquer. Un nouveau calcul (en figure 1) permet d'avancer dans cette direction :

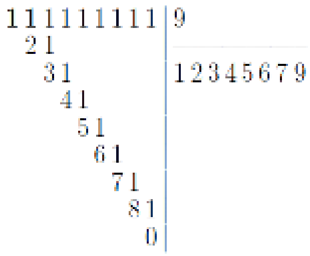


Figure 1. Calcul posé de 111 111 111 : 9 = 12 345 679

A la différence de la première situation, on voit ici apparaître des régularités dans la manière de procéder. Si l'on s'intéresse aux 7 premiers chiffres, le calcul du k-ième ($k < 8$) prend la forme de la division euclidienne générique suivante : $10k + 1 = 9k + k + 1$. On peut lire sur cette égalité que k est le chiffre du quotient et que $k + 1$ le reste ($k + 1 < 9$). Cette dernière formule peut se démontrer de manière générique par un calcul algébrique, autrement dit d'un seul mouvement. Cette possibilité de rendre compte d'un ensemble de faits par un même argument constitue un élément central des éléments de caractérisation d'une explication que nous utiliserons. Nous en rendons compte à partir des deux critères ci-dessous.

1.1.1. Critères n°1

Une démonstration générique est plus explicative qu'une autre qui procède cas par cas. Si l'on considère le cas d'un énoncé universellement quantifié sur un ensemble infini, cette idée peut se traduire par l'affirmation selon laquelle, si le recours à des évaluations empiriques sur certains objets de l'ensemble peut contribuer à faire avancer la conviction, des évaluations empiriques au cas par cas[5] ne relèvent pas d'un processus d'explication au sens où nous l'entendons ici.

---

[5] Nous traduirons plus bas cette idée de « cas par cas » par une position énonciative relevant du *niveau de la partie* pour le Proposant.

1.1.2. Critère n°2

Nous avons considéré que le fait d'obtenir 12 345 679 × 36 = 444 444 444 comme étant une conséquence d'un énoncé universellement quantifié (pour tout entier naturel n compris entre 1 et 9 on a 12 345 679 × 9 × n = 111 111 111 × n) était plus explicatif que de procéder par un simple calcul. 12 345 679 × 36 = 444 444 444 s'explique par le fait que 4 soit compris entre 1 et 9. De manière générale :

> Généraliser une proposition B qui porte sur un objet t, en une proposition ∀n ∈ E A(n), telle que B soit l'instance de A correspondant à l'objet t, et qui peut se démontrer de manière générique, c'est-à-dire sans énumérer les éléments de E, montre que c'est uniquement son appartenance à E qui est à l'origine du fait que l'objet t vérifie la propriété A. (Dowek, 2013)

Appliqué au contexte des implications qui est celui de cet article, cela donne l'idée suivante : une démonstration générique d'une implication universellement quantifiée $\forall x \in E\ P(x) \rightarrow Q(x)$ peut faire office d'explication pour toute implication matérielle $P(a) \rightarrow Q(a)$, ce qui peut encore se traduire par le fait que $Q(a)$ peut être expliqué par $P(a)$ et par une démonstration générique de l'implication universelle. Pour prendre un exemple qui nous sera utile pour la suite, on pourrait expliquer le fait que « 12^2 est pair » par le fait que « 12 est pair » et par une démonstration générique de l'implication universellement quantifiée correspondante.

Ces deux critères (désignés par la suite critère n°1 et critère n°2) nous seront utiles pour intégrer la question de l'explication dans la modélisation des situations de validation que nous développons ci-dessous.

Avant d'introduire nos outils, il nous a semblé intéressant d'établir un parallèle avec une recherche de Weber et Alcock (2005) portant sur l'interprétation des implications dans la lecture et l'évaluation des démonstrations. Voici la manière dont ils résument leur thèse :

> En résumé, lorsqu'un mathématicien lit une implication dans le contexte d'une démonstration, celui-ci ne s'intéresse pas seulement à la question de la valeur de vérité, mais aussi à la question de la justification – c.-à-d. l'existence ou non d'une raison mathématique légitime pour que l'assertion de la conclusion de l'implication soit bien une conséquence de son antécédent. (Weber & Alcock, 2005, p. 35, notre traduction)

Les auteurs prennent pour exemple l'implication « si 7 est un nombre premier, alors 1 007 est un nombre premier ». Confrontés à cet énoncé présent dans une démonstration qu'ils avaient à évaluer, deux mathématiciens interrogés font part de leur perplexité et la rejettent, bien qu'à l'évidence l'énoncé soit vrai (1 007 est bien un nombre premier). L'un des deux affirme qu'accepter cet énoncé dans la preuve revient à accepter un principe général du type « pour tout x, si x est un nombre premier, alors 1 000 + x est un nombre premier », et qu'il ne voit aucun principe général de ce type qui soit valide et qui puisse venir justifier l'énoncé. Formuler dans les termes de notre article nous interprétons cette exigence de justification comme une exigence d'explication. Qui énonce une telle implication devrait être en mesure d'expliquer par un argument général en quoi le fait que 7 soit premier pourrait venir fonder le fait que 1 007 le soit (critère 2).

Ce dernier exemple nous amène à une précision sur notre choix terminologique. Il met en effet en évidence une certaine proximité entre ce que nous avons appelé explication et ce que d'autres appellent une justification. Nous avons préféré utiliser le terme d'explication, suivant en cela Dowek, plutôt que celui de justification, car il nous semble que les usages de ce dernier terme ne coïncident que partiellement avec ce qui nous intéresse et que nous avons cherché à caractériser à travers les deux critères. Par exemple, dans le cas de la multiplication, le fait de la poser et de procéder à une vérification chiffre par chiffre pourrait constituer pour un mathématicien une justification acceptable, mais probablement pas une explication vraiment satisfaisante. Mais un élève du début de l'enseignement secondaire partagerait-il nécessairement ce point de vue sur ce qui peut ou non constituer une explication ? Cela ne va pas de soi. Comme nous le mentionnions, des auteurs comme Balacheff (2010) considèrent que l'analyse du caractère explicatif d'une démonstration doit prendre en considération le système de connaissance de celui qui élabore ou lit la démonstration. Dans cet article, le choix que nous avons fait de nous focaliser sur le jeu de la démonstration plutôt que sur les élèves ou l'enseignant nous amène à mettre temporairement de côté cette problématique du sujet psychologique. Nous faisons l'hypothèse que les éléments de caractérisation précédents sont suffisamment significatifs des usages de la communauté mathématique, c'est-à-dire des usages de référence, pour qu'ils nous soient utiles dans notre tentative d'identifier et de décrire certains savoirs relatifs à l'activité de démonstration, cette dernière étant également provisoirement analysée indépendamment des élèves et de leur système de connaissances.

1.2. Une modélisation dialogique de la validation mathématique

Dans ce paragraphe, nous présentons nos outils de modélisation. Une présentation plus détaillée peut se trouver dans Barrier (2016). Dans les approches dialogiques, la validation d'une proposition prend la forme d'un dialogue opposant deux joueurs organisé selon un ensemble de règles. Le joueur qui propose l'énoncé à valider est appelé *Proposant*, son adversaire est l'*Opposant*. Certaines règles sont associées aux constantes logiques (conjonction, disjonction, implication, etc.). Elles régissent le déroulement pas-à-pas du dialogue. Le cadre plus général du jeu (comment commencer, quand le dialogue est-il terminé, etc.) est organisé par d'autres règles appelées ci-dessous règles structurelles.

Chaque joueur réalise chacun à son tour une action : une assertion, une question, un choix de lettre (dans le cas d'un processus de validation exclusivement déductif – nous parlerons de jeu d'intérieur[6]) ou un choix d'objet dans le domaine sur lequel l'énoncé est interprété (dans le cas d'une preuve pragmatique – nous dirons un jeu d'extérieur). Le jeu commence par l'assertion de la proposition à évaluer, il se termine après un nombre fini de coups par la victoire de l'un des deux joueurs. Une proposition sera dite logiquement valide (jeu d'intérieur) ou vraie relativement à un domaine d'interprétation (jeu d'extérieur) s'il existe une stratégie gagnante, c'est-à-dire une manière de jouer qui assure la victoire, quelles que soient les décisions de son adversaire, pour le Proposant dans le dialogue qui l'oppose à l'Opposant. Nous présentons ci-dessous le cadre réglementaire de ces actions. Pour des raisons de place, mais aussi pour souligner les points communs et les différences entre les jeux d'extérieur et d'intérieur, nous le faisons d'un seul tenant en signalant les variations lorsqu'il y en a.

1.2.1. Règles pour les constantes logiques

R-ET : Lorsqu'un énoncé de la forme $A \wedge B$ est en jeu, une attaque consiste à choisir l'un des deux membres de la conjonction, une défense consiste à répliquer par l'assertion[7] du membre choisi par l'attaquant.

R-OU : Lorsqu'un énoncé de la forme $A \vee B$ est en jeu, une attaque consiste à demander à son adversaire de choisir l'un des deux membres de la disjonction, une défense consiste à choisir ce membre et à en faire l'assertion.

R-IMPLIQUE : Lorsqu'un énoncé de la forme $A \rightarrow B$ est en jeu, une attaque consiste à faire l'assertion A, une défense à faire l'assertion B. Dans le cas d'un jeu d'extérieur, faire l'assertion A conduit à l'ouverture d'un sous-jeu qui doit être gagné par celui qui fait l'assertion.

R-NON : Lorsqu'un énoncé de la forme $\neg A$ est en jeu, une attaque consiste à faire l'assertion de A, et il n'y a pas de défense possible.

R-UNIV : Lorsqu'un énoncé de la forme $\forall x\, P(x)$ est en jeu, une attaque consiste à choisir un symbole a (jeu d'intérieur) ou un objet noté a du domaine d'interprétation (jeu d'extérieur), une défense consiste à faire l'assertion $P(a)$.

---

[6] Cette terminologie est empruntée à Hintikka (2007, p. 67) : « Malgré ces liens, il est philosophiquement très important de les distinguer nettement l'un de l'autre. Les jeux sémantiques sont des jeux d'extérieur (*outdoor games*). On les joue sur les objets du langage que l'on parle, et ils consistent principalement pour les deux joueurs à choisir entre différents objets. A l'opposé, les jeux de preuve sont des jeux d'intérieur (*indoor games*). On les joue avec un crayon et du papier, avec une craie et un tableau, ou de nos jours avec un ordinateur. »

[7] En somme tout joueur qui affirme $A \wedge B$ est ensuite tenu d'affirmer A ou B au bon vouloir de son adversaire.

R-EXIST : Lorsqu'un énoncé de la forme $\exists x\, P(x)$ est en jeu, une attaque consiste à demander à son adversaire de choisir un symbole (jeu d'intérieur) ou un objet du domaine d'interprétation (jeu d'extérieur), une défense consiste à réaliser ce choix d'un certain a (symbole ou objet selon les cas) et à faire l'assertion de $P(a)$.

1.2.2. Règles structurelles

R-Lancement du jeu : Le jeu commence par l'assertion par le Proposant de la proposition qui fait l'objet de la validation. Les joueurs jouent ensuite chacun à leur tour.

R-Fin de partie :

- Cas des jeux d'intérieur : Le jeu se termine lorsqu'un joueur ne peut plus produire de coup, l'autre joueur a alors gagné la partie.

- Cas des jeux d'extérieur : Le jeu se termine lorsqu'un joueur fait l'assertion d'une proposition atomique $P(a)$ (c'est-à-dire élémentaire, ne comportant plus de constantes logiques)[8]. Cette proposition est conjointement évaluée. Si a satisfait P alors ce joueur gagne la partie.

R-Jeu formel (jeu d'intérieur – exclusivement discursif) : Pour que le Proposant puisse faire l'assertion d'une proposition atomique, il est nécessaire que celle-ci ait été préalablement avancée par l'Opposant.

R-Classique : Chaque joueur peut soit attaquer toute assertion (non élémentaire) faite par son adversaire, soit se défendre contre toute attaque de son adversaire.

1.2.3. Remarques

(1) Dans le cas des jeux d'extérieur (validation empirique), la version retenue pour la règle *R-Fin de partie* est empruntée à Vernant (2011). Cette règle donne la possibilité aux joueurs de prendre des informations sur les objets qu'ils manipulent en cours de partie ce qui ne peut être le cas dans une perspective fondationnelle en logique (le domaine d'interprétation est dans ce cas supposé déjà parfaitement connu des joueurs). Le point de vue pragmatique de Vernant est mieux adapté à nos préoccupations didactiques dans la mesure où il autorise l'enrichissement empirique du milieu en cours de validation.

(2) La règle *R-jeu formel* garantit le caractère exclusivement discursif et déductif des jeux d'intérieur. Pratiquement, cette règle signifie qu'il n'est pas possible d'affirmer un énoncé élémentaire à moins que celui-ci ne soit une hypothèse (on peut voir les assertions de l'Opposant comme des hypothèses à exploiter pour le Proposant).

---

[8] P peut tout aussi bien être une relation à n arguments. Dans ce cas a désigne un n-uplet.

(3) Cette modélisation opérationnalise l'idée de Brousseau d'une approche des situations de validation sous la forme dialogique d'une opposition entre un Opposant et un Proposant en remontant aux outils qu'il cite lui-même sans pour autant les mobiliser formellement. Dans un tel cadre, les aspects pragmatiques de la validation sont explicites : les pratiques langagières sont réglées, mais aussi finalisées, les énoncés relèvent de véritables coups dans des jeux de langage (Barrier, Durand-Guerrier & Mesnil, 2019). Il s'agit donc d'un bon candidat dans la perspective d'une étude des caractéristiques des positions énonciatives associées à l'élaboration des démonstrations.

(4) La modélisation par le jeu a divers avantages. Outre l'articulation des dimensions systémique et téléologique évoquée ci-dessus (Sensevy, 2012), ce type de modélisation permet de distinguer entre le niveau de la partie et celui de la stratégie (les notions de vérité et de validité logique sont définies par l'existence de stratégies). Cette distinction ouvre un espace pour analyser le processus d'élaboration des démonstrations et des explications : il est possible de s'engager dans une partie sans disposer à priori de stratégie gagnante. Elle permet aussi de penser la distinction entre suivre une partie coup par coup (s'accorder avec chaque usage d'une règle d'inférence) et la comprendre par l'accès à la dimension stratégique du jeu (comprendre la démonstration, accéder à l'explication). Ceci permet d'envisager des mouvements de positionnement des joueurs dans le jeu (des mouvements de position énonciative, cf. prochain paragraphe).

(5) Cette modélisation est adaptée au questionnement de ce texte dans la mesure où elle permet d'intégrer dans un même canevas les jeux d'extérieur pouvant rendre compte de la validation empirique (jeu sur les exemples) et les jeux d'intérieur ne mobilisant que les ressources propres au langage. La souplesse des approches dialogiques permet ce pluralisme (Rückert, 2011), par l'intermédiaire de variations sur les règles du jeu (notamment *R-Fin de partie* et *R-Jeu formel*).

1.3. Position énonciative

Dans une prochaine partie, nous allons exemplifier le fonctionnement de la modélisation pour analyser l'élaboration d'une démonstration en arithmétique et d'une autre en géométrie. Avant cela, revenons sur le concept de position énonciative qui nous sera utile pour caractériser l'attitude qu'il s'agit d'adopter dans les jeux d'élaboration de démonstration. Ce concept vise à rendre compte des spécificités disciplinaires des activités langagières. D'une manière générale, il s'agit de souligner le fait que si les différents locuteurs d'une même langue partagent quelques ressources transversales communes, les pratiques langagières sont spécifiques des contextes d'usage. Les apprentissages langagiers sont alors conçus comme des apprentissages disciplinaires (et réciproquement !), ce qui n'est pas sans questionner l'extension de la discipline scolaire « français » et ses relations avec les autres disciplines scolaires (Jaubert & Rebière, 2011). Elaborer des démonstrations suppose de s'inscrire dans des jeux de langage tout à fait spécifiques, de se positionner dans une communauté discursive scolaire en y pratiquant le genre de discours caractéristique de cette activité :

> Leur orchestration progressive, indissociable de la réitération et de la longueur des situations de débat oral et sensible à la progression de la cohérence des écrits, signifie la construction d'un positionnement énonciatif particulier, amenant l'élève à se constituer en sujet « scientifique scolaire » tout en « secondarisant » ses pratiques langagières – à s'instituer acteur dans une communauté transposée à l'école en s'appropriant ses pratiques à la fois technologiques et langagières, en changeant de contexte social, en déplaçant son point de vue à travers une recontextualisation et une reconfiguration de ses pratiques initiales, y compris langagières, à l'aide des genres discursifs reconnus dans la communauté de référence. (Bernié, 2002, pp. 82-83)

En somme la fonction théorique du concept de position énonciative est de se donner les moyens de penser ce qui caractérise les différentes activités langagières disciplinaires. Nous relevons notamment le fait que selon Bernié, la construction d'un positionnement énonciatif de sujet « scientifique scolaire » passe par un processus de secondarisation de ses pratiques langagières :

> La notion de « secondarisation » des discours réfère aux processus de transformation des usages langagiers initiaux des élèves, indissociable de la transformation de leurs modes d'agir et de penser dans une discipline. Elle cherche à rendre compte des mouvements de « saisie » (utilisation réfléchie) des outils culturels, via la construction de leurs schèmes d'utilisation. Le processus d'appropriation de ces outils génère des réorganisations ainsi que des transformations cognitives et langagières : réorganisation des systèmes lexicaux, des moyens discursifs du point de vue, des genres discursifs, etc., corrélés à des positionnements énonciatifs spécifiques, plus adéquats à la communauté discursive disciplinaire en voie d'institution dans la classe (Jaubert & Rebière, 2011, p. 123)

Il nous semble que cette idée de secondarisation rend bien compte de ce qui se joue dans la construction d'une position énonciative permettant une articulation entre le travail d'exploration empirique et la formulation d'une démonstration déductive. Le travail sur les exemples change de nature lorsqu'il s'inscrit dans une perspective de validation intellectuelle plutôt que pragmatique. Il s'agit pour les élèves de s'approprier les jeux de langage des démonstrations, d'élaborer des schèmes d'utilisation de ses règles du jeu, en particulier la règle R-Jeu formel, d'en faire un instrument de validation et d'explication.

Dans ce texte, les outils de modélisation qui précèdent ont pour finalité de se donner les moyens d'une caractérisation de la position énonciative à construire dans le contexte disciplinaire qui nous intéresse (les pratiques de démonstration en mathématiques), voire de telles caractérisations pour les différents domaines de ce contexte disciplinaire. La modélisation par le jeu paraît particulièrement adaptée à cette perspective : on peut jouer à un jeu (y compris des jeux de langage) dans différentes perspectives stratégiques (des positions énonciatives).

2. Modélisation du processus de démonstration : un premier exemple

Dans cette partie, nous détaillons l'analyse d'un processus d'élaboration d'une démonstration pour un énoncé d'arithmétique de la forme générique $\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$ dans la perspective de dégager les caractéristiques de la position énonciative associée. Cette étude de cas a selon nous une dimension générique sur laquelle nous reviendrons en fin d'analyse. La conjecture considérée est la suivante : *pour tout entier naturel, si cet entier est pair alors son carré l'est aussi* [$\forall n \in \boldsymbol{N}\,(\exists k \in \boldsymbol{N}\; n = 2k \rightarrow \exists k' \in \boldsymbol{N}\; n^2 = 2k')$].

2.1. Approche par un jeu d'extérieur

Le tableau 1 rend compte d'une approche par un jeu d'extérieur avec des choix arbitraires[9] pour les nombres considérés. D'une manière générale, les nombres figurant dans les colonnes extérieures du tableau (colonnes 1 et 6) servent à repérer l'ordre dans lequel les coups sont joués. Ils définissent donc un ordre possible de lecture. Une attaque fait avancer d'une ligne alors qu'une défense est représentée sur la même ligne que l'attaque correspondante. Le cas échéant, les numéros des assertions qui sont attaquées sont mentionnés dans les colonnes centrales (colonnes 3 et 4). Certaines défenses sont parfois laissées en attente ce qui explique que les nombres figurant dans les colonnes extérieures ne soient pas nécessairement rangés par ordre croissant[10].

	Opposant			Proposant	
				$\forall n \in \boldsymbol{N}\,(\exists k\; n = 2k \rightarrow \exists k'\; n^2 = 2k')$	0
1	$?-\forall\;[n = 12]$*	0		$\exists k\; 12 = 2k \rightarrow \exists k'\; 12^2 = 2k'$	2
3	$\exists k\; 12 = 2k$	2		$\exists k'\; 12^2 = 2k'$	6
5	$12 = 2 \times 6\;[k = 6]$**		3	$?-\exists$	4
7	$?-\exists$	6		$12^2 = 2 \times 72\;[k' = 72]$***	8

Tableau 1. Modélisation par un jeu d'extérieur

Commentaires : Le domaine d'interprétation pour les choix d'objet (R-UNIV et R-EXIST) est l'ensemble des entiers naturels. La partie commence par l'assertion de

[9] Mais qui conduisent le Proposant à gagner la partie.
[10] Le fait de mettre en attente une défense peut permettre de se donner l'occasion de collecter de nouvelles informations qui pourraient être utilisées pour la défense.

la conjecture par le Proposant (coup n°0 ; *R-Lancement du jeu*). Ce coup n°0 est attaqué par l'Opposant qui procède au choix d'un nombre entier (coup n°1 ; $n = 12$; R-UNIV). Le Proposant se défend par l'assertion d'une implication (coup n°2 ; R-UNIV). La partie se poursuit par une nouvelle attaque de l'Opposant qui fait l'assertion de l'antécédent de l'implication (coup n°3 ; R-IMPLIQUE) ce qui a pour effet d'ouvrir un sous-jeu (cas d'un jeu d'extérieur). Le Proposant s'engage dans ce sous-jeu en sollicitant le choix d'un entier de la part de l'Opposant (coup n°4 ; R-EXIST). L'Opposant fait un tel choix ($k = 6$) et avance une proposition atomique (coup n°5 ; R-EXIST ; cas des jeux d'extérieur). Cette proposition est conjointement évaluée (*R-fin de partie*, cas des jeux d'extérieur) : la relation $12 = 2 \times 6$ est bien vérifiée, l'Opposant gagne le sous-jeu. La partie se poursuit par le retour à une défense laissée en attente par le Proposant (coup n°6 ; R-IMPLIQUE). L'Opposant sollicite alors le choix d'un objet du domaine d'interprétation (coup n°7 ; R-EXIST ; cas des jeux d'extérieur). Le Proposant fait ce choix ($k' = 72$) et se défend par la proposition atomique $12^2 = 2 \times 72$ qui est évaluée conjointement par les joueurs (coup n°8 ; R-EXIST ; jeu d'extérieur). La relation a bien lieu, le Proposant gagne la partie (*R-Fin de partie*, jeu d'extérieur).

A un premier niveau d'analyse, on peut voir cette modélisation comme un moyen de rendre compte d'une phase d'exploration de la conjecture, qu'il s'agit dans un premier temps de mettre à l'épreuve de choix d'objets. Au coup n°1, l'Opposant choisit un nombre pair ($n = 12$) sans quoi la partie s'arrêterait dès le 5e coup (impossibilité de choisir un nombre permettant de gagner le sous-jeu). L'enjeu principal de la partie réside pour le Proposant dans la sélection d'un entier naturel qui lui permette de gagner au coup n°8. Ce type de partie peut être rejoué pour d'autres choix de l'Opposant ($n = 12$, $n = 2\,376$, etc.)[11], donnant lieu à de nouveaux calculs, tous indépendants les uns des autres si l'on en reste *au niveau de la partie*. Comme signalé plus haut, le gain de ces parties ne relève pas d'un processus d'explication (critère n°1). La conviction peut progresser, mais pas l'explication. Du point de vue du genre de discours, il faut signaler que le coup n°8 est joué pour lui-même, que le travail empirique mené par le Proposant pour cette partie est orienté vers le gain immédiat de la partie, sans considération pour les assertions en amont de l'attaque à laquelle le Proposant réagit (coup n°7).

Si l'on se place cette fois *au niveau stratégique* plutôt qu'au niveau des parties successives, la question devient : est-il nécessaire que le Proposant puisse trouver un entier k' (coup n°8) dès lors que l'Opposant a fait des choix (coups n°1 et n°5) lui ayant permis de gagner le sous-jeu ouvert par l'attaque de l'implication (coup n°3). Plus formellement, cette question peut se traduire par la question de l'existence d'une fonction $f_n : n \in \boldsymbol{N} \rightarrow k' \in \boldsymbol{N}$ telle que l'on ait $n^2 = 2 \times f_n(k)$ à chaque fois que l'on a $n = 2k$. La position énonciative des joueurs évolue à travers un processus de

[11] Empirisme naïf, expérience cruciale... (Balacheff, 1987)

secondarisation : mise à distance des coups qui ne sont plus joués seulement pour eux-mêmes, recherche de généralité, de nécessités, de relations entre les énoncés. Si l'on revient sur la partie décrite dans le tableau 1, il s'agit de porter un nouveau regard sur le calcul réalisé au coup n°8 en se demandant, au-delà des spécificités du nombre n en jeu, si le fait de pouvoir diviser n^2 par 2 dépend seulement ou non du seul fait que n le soit (coup n°5), autrement dit, si la réussite du coup n°8 peut s'expliquer par la réussite du coup n°5. Nous rejoignons ici – par une analyse de la dimension stratégique du jeu – l'idée selon laquelle une explication d'un énoncé portant sur un objet particulier peut trouver sa source dans l'explication d'un énoncé plus général dont cet énoncé serait un cas particulier (critère n°2). Le fait que 12^2 soit pair peut-il s'expliquer par le fait que 12 le soit ? L'objectif devient alors de construire une stratégie générique qui puisse être utilisée quel que soit le choix de n par l'Opposant (coup n°1). Il s'agit de dépasser les calculs au cas par cas, le besoin d'explication prenant alors le pas sur l'exploration de la conjecture ou le renforcement de la conviction.

Une telle stratégie peut se construire en cherchant à mettre en relation l'énoncé défendu par l'Opposant au coup n°5 avec celui défendu par le Proposant au coup n°8 comme ci-dessous :

$12 = 2 \times 6$ (coup n°5)

$12^2 = 2^2 \times 6^2$

$12^2 = 2 \times 2 \times 6^2$

$12^2 = 2 \times 72$ (coup n°8)

Cette mise en relation est indépendante du choix de $n = 12$, elle peut trouver un équivalent dans le langage d'un jeu d'intérieur (avec des lettres de variable plutôt qu'avec des noms d'objet) à partir duquel il devient possible de formuler une démonstration générique explicative (critère n°1)[12].

$n = 2 \times k$

$n^2 = 2^2 \times k^2$

$n^2 = 2 \times 2k^2$

d'où $f_n(k) = 2k^2$

[12] Dans tout ce paragraphe, nous avons fait le choix d'interpréter le prédicat « être pair » par un argument de divisibilité plutôt que par un critère de numération décimale (se terminer par 0, 2, 4, 6 ou 8). Dans ce dernier cas, il est possible de raisonner par disjonction de cas en travaillant sur le chiffre des unités de n plutôt qu'à travers un seul et même argument général. Cette dernière preuve est moins générale, car elle est dépendante du système d'un système de numération.

Il est important de relever le fait que dans le cadre de cette modélisation, nous faisons remonter l'amorce du processus de positionnement au niveau stratégique du jeu dans la recherche d'une explication d'un fait à travers un positionnement au niveau stratégique : le coup n°8 se trouve expliqué par le coup n°5 et la preuve générique de l'énoncé $\forall n \in \boldsymbol{N}\, \forall k \in \boldsymbol{N}\, (n = 2k \rightarrow n^2 = 2 \times 2k^2)$. De ce point de vue, le travail sur les exemples joue un rôle essentiel pour l'avancée du processus.

2.2. Approche par un jeu d'intérieur

Nous rendons compte dans le tableau 2 de la forme que pourrait prendre une démonstration de la conjecture.

	Opposant			Proposant	
-1	$\forall n\, \forall k\, (n = 2k \rightarrow n^2 = 2 \times 2k^2)$				
				$\forall n\, (\exists k\; n = 2k \rightarrow \exists k'\; n^2 = 2k')$	0
1	$? - \forall\, [n]$	0		$\exists k\; n = 2k \rightarrow \exists k'\; n^2 = 2k'$	2
3	$\exists k\; n = 2k$	2		$\exists k'\; n^2 = 2k'$	10
5	$n = 2k\; [k]$		3	$? - \exists$	4
7	$n = 2k \rightarrow n^2 = 2 \times 2k^2$		-1	$? - \forall\, [n, k]$	6
9	$n^2 = 2 \times 2k^2$		7	$n = 2k$	8
11	$? - \exists$	10		$n^2 = 2 \times 2k^2\; [k' = f_n(k)]$	12

Tableau 2. Modélisation par un jeu d'intérieur

Commentaires : Ce tableau doit se lire dans le cadre de la grammaire spécifique des jeux d'intérieur. Les choix à opérer en lien avec les règles R-UNIV et R-EXIST sont des choix de lettres de variable et non plus de noms d'objet. Il n'y a plus d'évaluation (empirique) conjointe envisageable. Une partie se termine lorsque l'un des deux joueurs ne peut plus jouer de nouveau coup (*R-fin de partie*) et une nouvelle règle vient contraindre les coups du Proposant qui ne peut avancer de propositions atomiques que si celles-ci ont préalablement été avancées par l'Opposant (*R-formel*). La partie commence par une concession de l'Opposant (coup n°-1) correspondant à l'énoncé « explicateur » qui a émergé du jeu d'extérieur. Cet énoncé pourra librement être attaqué par le Proposant dans la suite de la partie, on peut le considérer comme une « donnée ». Le Proposant lance à proprement parler la partie par l'assertion de la conjecture à évaluer (coup n°0 ; *R-Lancement du jeu*). Ce coup est attaqué par l'Opposant qui choisit la lettre de variable *n* (coup n°1 ; R-UNIV). Le Proposant se défend (coup n°2 ; R-UNIV). L'Opposant attaque ensuite l'implication en faisant l'assertion de l'antécédent (coup n°3 ; R-IMPLIQUE). Le Proposant remets à plus tard sa défense et réplique par la sollicitation d'un nouveau choix de lettre de variable (coup n°4 ; R-EXIST ; *R-Classique*). L'Opposant choisit la lettre *k* et se défend (coup n°5 ; R-EXIST). Le jeu se poursuit alors par l'exploitation par le Proposant de la concession faite en préambule par l'Opposant. Il reprend à son compte les choix faits par l'Opposant aux coups n°1 et n°5 pour attaquer cet énoncé universel (coup n°6 ; R-UNIV ; double application) et l'Opposant se défend (coup n°7 ; R-UNIV). Utilisant le coup n°5 de l'Opposant, le Proposant peut alors attaquer cette dernière implication en faisant l'assertion de l'antécédent (coup n°8 ; R-IMPLIQUE ; *R-formel*). L'Opposant se défend (coup n°9 ; R-IMPLIQUE) ce qui permet alors au Proposant de revenir à une défense laissée en suspens (coup n°10 ; R-IMPLIQUE ; *R-Classique*). L'Opposant attaque cette défense en sollicitant un choix de lettre de variable (coup n°11 ; R-EXIST). Le Proposant choisit $k' = f_n(k) = 2k^2$ ce qui lui permet de se défendre (coup n°12 ; R-EXIST ; *R-Jeu formel*). Il gagne la partie puisqu'il n'y a plus de coup à jouer pour son adversaire (*R-fin de partie* – jeu d'intérieur). Le canevas de cette partie constitue une stratégie gagnante puisque la manière de jouer du Proposant peut s'adapter aux ouvertures stratégiques de l'Opposant qui sont essentiellement réduites à des choix de lettre de variables *n* et *k* ($k' = f_n(k) = 2k^2$ est une fonction de *k*). La conjecture est démontrée, elle est valide. Le caractère explicatif de la démonstration tient dans l'usage au coup n°1 de la règle R-UNIV ce qui correspond à la production d'une démonstration générique dans une perspective monologique (critère n°1).

2.3. Dynamique de l'élaboration de la démonstration : synthèse

Il est intéressant de remarquer les ressemblances et différences entre cette modélisation par un jeu d'intérieur (ne mobilisant que les ressources propres au langage) et la précédente (jeu d'extérieur intégrant une dimension empirique, des choix d'objets). Au niveau de la structure, on remarque des éléments d'une dynamique commune : ce sont les « mêmes » règles qui ont été utilisées (moyennant quelques adaptations liées au contexte spécifique intérieur / extérieur). Dans les deux cas, la problématique pour le Proposant est de parvenir à se défendre d'une attaque de l'implication par l'assertion de son antécédent (coup n°3, R-UNIV). Cette similitude entre les structures rend possible l'articulation du travail sur les exemples dans le cadre d'un jeu d'extérieur avec le travail exclusivement déductif au sens du jeu d'intérieur. Du point de vue de la modélisation, l'articulation repose sur l'intégration dans le jeu d'intérieur d'une propriété (coup n°-1) qui a émergé d'un positionnement énonciatif relevant du niveau stratégique dans le jeu d'extérieur correspondant. En somme le travail sur les exemples peut s'avérer utile à l'avancée du processus de démonstration « pour peu » que l'on se positionne au niveau stratégique et non au niveau de la partie. Bien évidemment, ce positionnement ne va pas de soi, mais il nous semble essentiel de bien identifier ce phénomène et de ne pas réduire la problématique des relations entre exemple et démonstration à la seule rupture qu'il s'agit d'opérer avec l'empirisme naïf. D'autres auteurs mentionnent également la fécondité des procédures sémantiques de démonstration (c'est-à-dire reposant sur des instanciations d'objets), notamment Weber et Alcock (2004, p. 232, notre traduction)[13] :

> Tout comme en ville la plupart des rues croisent de nombreuses autres rues, à tout moment d'une preuve, il y a de nombreuses inférences pouvant être faites qui peuvent paraître utiles à un œil novice [...]. Par conséquent, écrire une preuve par les seuls moyens syntaxiques peut être une tâche redoutable. Cependant, lorsque l'on écrit une preuve par des moyens sémantiques, il est possible d'utiliser des instanciations pertinentes d'objets pour guider la conduite des inférences formelles, tout comme on peut utiliser une carte pour suggérer les directions qu'ils devraient emprunter.

Comme nous l'avons souligné en introduction, l'idée d'un rôle positif qui pourrait être joué par les exemples est déjà présente à travers la notion d'exemple générique. Les analyses qui précèdent permettent selon nous de préciser ces enjeux en caractérisant le positionnement énonciatif qu'il s'agit de construire avec les élèves. Dans le cas d'un travail autour d'une conjecture de la forme $\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x)$, le travail peut prendre appui sur une exploration de la conjecture, sur la construction d'une conviction, à travers des choix d'objets et des calculs ou autres procédures particulières (mesure, vérification instrumentée, etc.) : $P(a)$ est-il vrai ? Si oui qu'en est-il de $Q(a)$? Le basculement vers le niveau stratégique du jeu de langage, qui constitue l'enjeu principal, peut se penser comme l'inscription dans des pratiques langagières visant la construction d'une explication pour l'énoncé $Q(a)$ à partir de $P(a)$ au sens du critère n°2 dégagé plus haut. Ce processus de secondarisation se caractérise par une prise de distance vis-à-vis de l'action (la validation pragmatique au sens de Balacheff, 1987 ; les évaluations conjointes au sens de la règle R-*fin de partie* des jeux d'extérieur) et une montée en généralité à travers la recherche de relations génériques entre les énoncés $P(a)$ et $Q(a)$. L'énoncé $Q(a)$ n'est plus considéré pour lui-même, mais à travers des liens potentiels à construire avec les autres coups du jeu de langage. Ce processus passe par un travail sur les objets en jeu (les exemples), dans le cas particulier que nous avons étudié une décomposition en facteurs des entiers. Une fois dégagé, l'énoncé universel constitutif de l'explication de $Q(a)$ à partir de $P(a)$ (critère n°2) peut alors être intégré dans un processus déductif du fait de la proximité structurelle entre le jeu d'extérieur et le jeu d'intérieur correspondant. Nous obtenons alors une démonstration et une explication de l'implication universellement quantifiée $\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x)$ (critère n°1).

3.

[13] cf. Barrier (2016) pour une revue de littérature.

Une étude de cas en géométrie

Dans cette nouvelle partie, nous mettons notre modélisation à l'épreuve d'un nouveau cas relevant d'un autre domaine des mathématiques : la géométrie. En mettant en regard les analyses précédentes élaborées dans le contexte de l'arithmétique, il s'agit de chercher à dégager ce qu'il y a de spécifique et de générique dans les éléments de caractérisation des postures énonciatives qui s'inscrivent dans les jeux de langage des processus de démonstration.

3.1. Une nouvelle modélisation

Nous considérerons l'énoncé suivant (cf. figure 2) : « soit un triangle *ABC* et *O* son orthocentre. Soient d_1 la droite perpendiculaire à (*OA*) passant par *A*, d_2 la droite perpendiculaire à (*OB*) passant par *B* et d_3 la droite perpendiculaire à (*OC*) passant par *C*. On appelle *D* le point d'intersection de d_1 et d_2, *E* celui de d_1 et de d_3 et *F* celui de d_2 et de d_3. Démontrer que *O* est le centre du cercle circonscrit à *DEF* ».

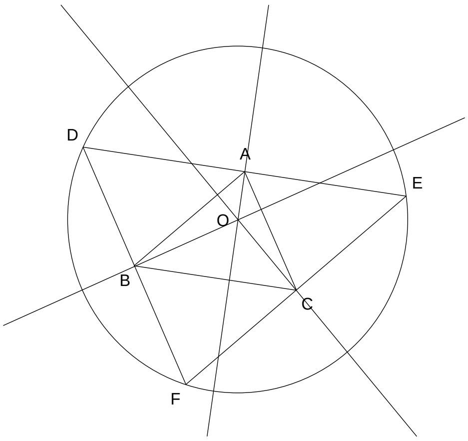


Figure 2. Figure associée à l'énoncé

Commençons par approcher ce problème de validation par un jeu d'extérieur (tableau 3).

	Opposant			Proposant	
				$\forall A \forall B \forall C \forall O$ $ortho_{ABC}(O) \rightarrow centre_{DEF}(O)$	0
1	$?-\forall\ [A, B, C, O]$	0		$ortho_{ABC}(O) \rightarrow centre_{DEF}(O)$	2
3	$ortho_{ABC}(O)$ [ok]	2		$centre_{DEF}(O)$ [ok]	4

Tableau 3. Modélisation par un jeu d'extérieur

Commentaires. Nous avons fait le choix de modéliser l'énoncé à valider par une implication universellement quantifiée comprenant quatre variables (*A*, *B*, *C* et *O*) sans préciser le statut des lettres *D*, *E* et *F*. Cette petite entorse à la rigueur mathématique nous permet de limiter la longueur de la modalisation. Elle est sans conséquence sur notre propos dans cet article. Le domaine d'interprétation pour ces variables est l'ensemble des points du plan. La partie commence par l'assertion de la thèse par le Proposant (coup n°0 ; *R-Lancement du jeu*). S'ensuit une attaque de cette thèse par l'Opposant et une défense du Proposant consistant en l'assertion d'une implication (coups n°1 et n°2 ; R-UNIV). Cette implication est attaquée ce qui ouvre un sous-jeu (coup n°3 ; R-IMPLIQUE ; cas d'un jeu d'extérieur) dont on peut émettre l'hypothèse qu'il est gagné par l'Opposant, sans quoi la partie s'arrête là (*R-fin de partie* ; cas des jeux d'extérieur). La partie se poursuit et se termine par l'assertion du conséquent de l'implication (coup n°3 ; R-IMPLIQUE) suivie d'une nouvelle évaluation empirique conjointe (perceptive, instrumentée, etc.) : le Proposant gagne la partie (*R-fin de partie*, cas des jeux d'extérieur). Si l'on se place cette fois au niveau stratégique, il s'agirait de chercher à expliquer le fait que *O* soit le centre de *DEF* par le fait que *O* soit l'orthocentre de *ABC* moyennant un argument universel (critère n°2). Comment construire une telle relation ?

Cette fois, le lien entre les deux énoncés paraît moins direct que dans le cas de l'énoncé sur la conservation de la parité par passage au carré d'un entier où il s'agissait pour l'essentiel de repérer des similarités entre des décompositions en facteur d'un nombre entier et de son carré. Il semble ici nécessaire de passer par des observations intermédiaires, par exemple le fait que les droites (*AE*) et (*BC*) sont parallèles, tout comme les droites (*AB*) et (*EC*), puis que le quadrilatère *AECB* est un parallélogramme, etc. Ces différentes observations (éventuellement instrumentées) peuvent être mises en relation, expliquées, via des énoncés universels, en l'occurrence des théorèmes ou des définitions[14]. Notons que ce processus de construction d'une explication complexe (au sens de la multiplicité des étapes) peut aussi procéder par chaînage arrière, c'est-à-dire en se demandant ce qu'il suffirait d'expliquer pour avoir une explication du fait que *O* soit le centre du cercle circonscrit à *DEF* (par exemple le fait que les droites (*AO*), (*BO*) et (*CO*) soient respectivement les médiatrices des segments [*DE*], [*DF*] et [*EF*]). Au final, au sens d'un jeu d'intérieur, l'explication complète peut être vue comme la collection de l'ensemble des explications intermédiaires $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ selon le tableau 4.

[14] Le théorème selon lequel deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles, la définition d'un parallélogramme…

	Opposant			Proposant	
-i	$(E_i)_{1\le i\le n}$				
				$\forall A\forall B\forall C\forall O$ $ortho_{ABC}(O) \rightarrow centre_{DEF}(O)$	0
1	$? -\forall\ [A, B, C, O]$	0		$ortho_{ABC}(O) \rightarrow centre_{DEF}(O)$	2
3	$ortho_{ABC}(O)$	2		$centre_{DEF}(O)$	$3+n+2$
	…		*-i*	$(A_i)_{1\le i\le n-1}$ (attaques des $(E_i)_{1\le i\le n-1}$)	$3+i$
$3+n+1$	$centre_{DEF}(O)$		*-n*	A_n	$3+n$

Tableau 4. Modélisation par un jeu d'intérieur

Ce travail d'élaboration est rendu possible par une posture énonciative déjà décrite plus haut concernant le cas étudié en arithmétique et consistant à se situer au niveau stratégique dans le jeu d'extérieur afin d'élaborer des explications (au sens du critère n°2) qui puissent être réinvesties au niveau d'un jeu d'intérieur en tant que concessions initiales de l'Opposant ($(E_i)_{1\le i\le n}$). Dans ce cas-ci l'explication à construire est plus complexe, mais le processus reste de même nature. Dans les deux cas, la dynamique décrite est celle d'un déplacement au niveau d'un jeu d'extérieur depuis le niveau de la partie vers le niveau de la stratégie dans lequel il s'agit de construire une explication (plus complexe dans ce cas-ci) permettant de tisser le lien entre deux faits. Nous voudrions maintenant insister sur un élément de variation qui nous semble significatif : s'il relève d'une même logique globale, le travail sur les objets en jeu est spécifique du domaine mathématique (géométrie, arithmétique, etc.).

3.2. Manipuler des figures, manipuler des nombres

Les objets mathématiques n'étant accessibles ni au sens ni aux instruments, la manipulation des exemples suppose le recours à des représentations sémiotiques. En complément du langage naturel, nous avons considéré dans ce texte deux registres de représentations (Duval 1995) : le registre des figures géométriques et le registre numérique de l'écriture décimale. Ces registres ne fonctionnent pas de la même manière, les traitements envisageables ne sont pas de même nature. Reprenons le cas de la démonstration de géométrie et considérons les différents points de vue sur la figure qu'il est nécessaire de porter dans le cadre de l'élaboration de la démonstration. Les faits considérés dans le premier temps du jeu d'extérieur (niveau de la partie) sont relatifs à l'orthocentre d'un triangle et au centre d'un cercle (figure 3).

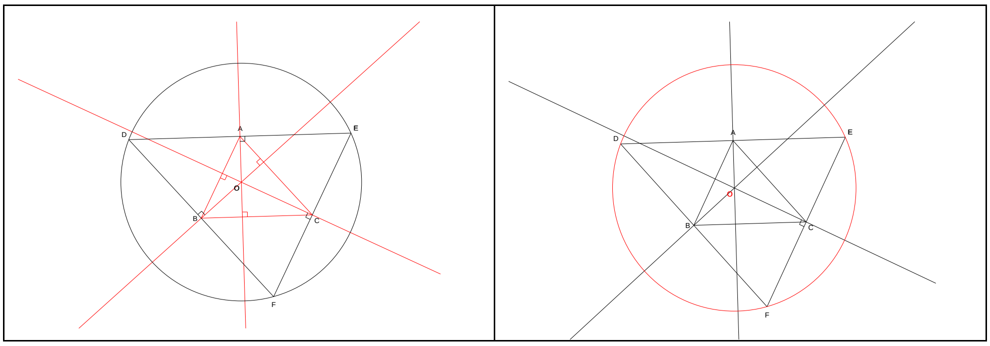


Figure 3. Deux points de vue à articuler[15]

S'il s'agit bien de travailler avec une même figure, ce ne sont pas à proprement parler les mêmes objets (un point, un triangle et des droites dans un cas, un point et un cercle dans l'autre) dont il est question même s'ils sont en relation (tout comme 12 et 12^2 étaient en relation dans le cas de l'arithmétique). Comme nous l'avons décrit, le processus de mise en relation des deux faits – $ortho_{ABC}(O)$ et $centre_{DEF}(O)$ – conduit à introduire dans le jeu d'autres observations. La collection de figures (figure 4) vise à en rendre compte.

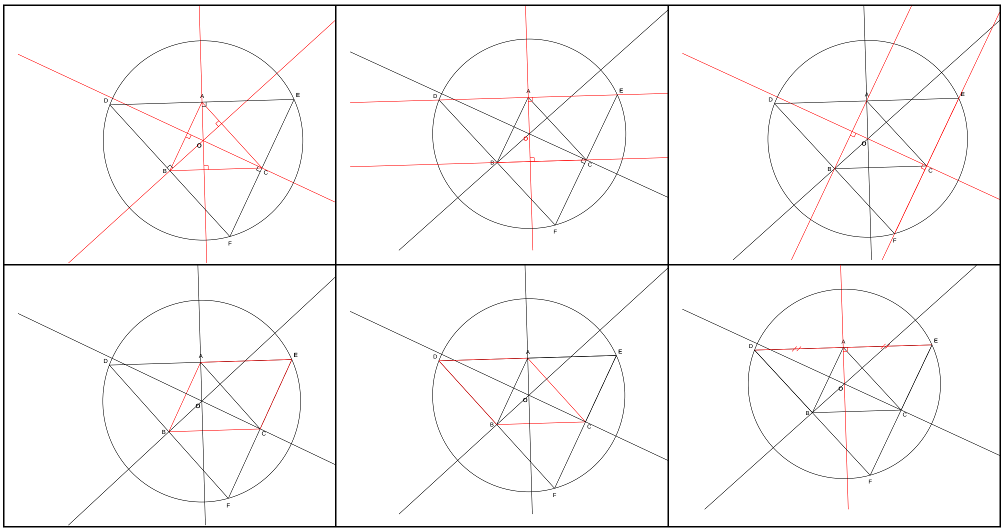


Figure 4. Ensemble de points de vue[16]

[15] Les traits en rouge sont ceux qui rendent compte des faits qui nous intéressent : dans cette figure $ortho_{ABC}(O)$ et $centre_{DEF}(O)$.

[16] Les différentes figures ne sont pas numérotées pour éviter d'induire un ordre de lecture dans la mise en relation entre $ortho_{ABC}(O)$ et $centre_{DEF}(O)$.

En géométrie plane, ce type de travail sur la représentation sémiotique est une composante essentielle de l'activité mathématique. Le processus de visualisation sous-jacent à l'élaboration des démonstrations est qualifié par Duval (2005, p. 26) de processus de déconstruction dimensionnelle :

> Avec la déconstruction dimensionnelle, la figure n'est plus qu'une configuration particulière et transitoire parce que contextuellement détachée d'un réseau ou d'une organisation plus complexe, le détachement d'une figure particulière étant commandé par l'énoncé du problème. Autrement dit toute figure, en géométrie plane, est une configuration transformable en d'autres, chacune se détachant d'une même trame, au gré des propriétés ou des objets que l'on nomme.

On voit bien dans l'exemple ci-dessus comment une même trame, peut donner lieu aux détachements de diverses sous-figures (que nous avons soulignées en rouge) dans le cadre de la recherche d'une explication permettant d'articuler les deux points de vue de la figure 3. Il faut insister sur l'idée de *processus* : à l'inverse du mode ordinaire de fonctionnement de la visualisation (celui qui nous permet par exemple d'identifier un cercle et des triangles superposés dans la figure et que Duval appelle la visualisation iconique), la déconstruction dimensionnelle relève d'une visualisation dynamique et intimement liée à un processus discursif, « on pourrait même dire qu'elle est essentiellement d'ordre discursif » (Duval, 2005, p. 23). Dès lors, il serait risqué de ne considérer la position énonciative pour l'élaboration des démonstrations mathématiques qu'au niveau indifférencié de la discipline mathématique. Le rapport aux exemples qu'il s'agit de construire avec les élèves est dépendant des moyens sémiotiques qui permettent au locuteur de manipuler lesdits exemples. Dans le cas de la géométrie, Duval (2005) considère d'ailleurs la bonne articulation entre les dimensions verbales et figurales de l'activité mathématique comme une condition de possibilité des apprentissages en géométrie.

Ces réflexions nous amènent à la question suivante concernant les savoirs métamathématiques sur le processus de démonstration qui pourraient faire l'objet d'un enseignement : dans quelle mesure est-il souhaitable d'aborder ces savoirs métamathématiques, de manière indépendante des spécificités des domaines mathématiques, dans lesquels ils fonctionnent ? Là encore, il nous semble important d'établir la distinction entre les domaines disciplinaires. Dans l'étude de cas en arithmétique, nous avons vu que la possibilité de mettre en relation les propositions $P(a)$ et $Q(a)$ reposait sur des décompositions en facteur des nombres en jeu. Une décomposition en facteurs premiers permet de faire « apparaître » les relations recherchées dans les deux conjectures considérées. Ce type de traitement dans le registre numérique de l'écriture décimale possède une certaine légitimité dans le cas de l'arithmétique des entiers puisqu'il repose sur le « théorème fondamental de l'arithmétique »[17]. Même si la perspective est plutôt mathématique (propriétés des nombres) plutôt que métamathématique (savoirs sur l'activité mathématique), on peut émettre l'hypothèse d'une prise en charge partielle des enjeux relatifs à la manipulation des écritures numériques (travail des techniques notamment). Dans le cas de la géométrie, le type de traitement des figures en jeu ne dispose pas d'une telle légitimation mathématique, encore moins d'une algorithmisation dans le traitement, mais il n'en est pas moins fondamental d'un point de vue cognitif. Si un nombre significatif de travaux de recherche se sont intéressés ces dernières années aux façons d'amener les élèves à s'approprier les modes de visualisation propres à la pratique géométrique (Mathé & Mithalal, à paraître), il n'en reste pas moins que la situation paraît moins favorable en géométrie. Ce savoir pourrait bien rester transparent au sein des classes, c'est-à-dire fonctionner comme outil de résolution de problèmes mais sans être à proprement parler enseigné ni institutionnalisé (Margolinas & Lappara, 2011 ; Barrier, 2016).

Conclusion

Cet article s'est intéressé à la démonstration, en tant que processus, et aux enjeux de savoir afférents. Nous nous sommes plus particulièrement focalisés sur le rôle des exemples pour des énoncés de la forme $\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x)$. Afin de dégager les savoirs métamathématiques en jeu, nous avons eu recours à une modélisation dialogique du processus que nous avons fait fonctionner sur un premier exemple en arithmétique des entiers. Dans le cadre de cette modélisation, le processus de démonstration est décrit comme une activité langagière impliquant deux protagonistes s'opposant dans un dialogue argumentatif. L'analyse de cette activité langagière nous a permis de dégager des éléments de caractérisation de la position énonciative à construire pour parvenir à mobiliser les exemples de manière efficiente. La dynamique du processus de preuve suppose un déplacement depuis un travail d'exploration de la conjecture visant la construction d'une conviction (a qui satisfait P satisfait-il aussi Q ?) vers un niveau stratégique dans lequel il s'agit de chercher à expliquer $Q(a)$ par $P(a)$. La validation pragmatique est mise à distance, il s'agit cette fois de chercher à mettre en relation les énoncés $P(a)$ et $Q(a)$ par l'intermédiaire d'un argument universel à construire via un travail générique autour l'exemple a. En bout de course, l'énoncé tissant le lien entre la vérité de $Q(a)$ et celle de $P(a)$ peut être mobilisé dans une démonstration de l'implication $\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x)$ constitutive d'une explication de l'énoncé $Q(a)$.

Afin de dégager précisément les apports de ce texte, nous revenons maintenant sur la notion d'exemple générique telle qu'elle a été introduite par Balacheff (1987, p. 166) :

[17] Ce théorème affirme l'existence et l'unicité des décompositions en facteurs premiers des entiers naturels non nuls.

> L'exemple générique consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe d'individus.

Commençons par une remarque. Dans l'expression *exemple générique*, la généricité est grammaticalement un attribut de l'exemple. On voit néanmoins que la citation fait référence à l'explicitation de raisons et à des opérations et des transformations dans la définition, introduisant par là une idée que nous avons développée dans cet article. Pour nous, tout exemple, en tant qu'objet mathématique, est particulier. La généricité est relative à la manière dont l'exemple est manipulé. Il s'agit dans les termes de notre modélisation de se situer au niveau stratégique et non plus au niveau de la partie dans le jeu d'extérieur. Dans le cadre d'une conjecture s'exprimant sous la forme d'une implication universellement quantifiée $\forall x\, P(x) \rightarrow Q(x)$, ce positionnement stratégique s'exprime au niveau des relations entre $P(a)$ et $Q(a)$. Dans le premier exemple il s'agit de mettre en relation les énoncés $12 = 2 \times 6$ et $12^2 = 2 \times 72$ de manière générique. Cette mise en relation fonctionne alors comme une explication dans un sens que nous avons précisé. Au regard de l'approche de Balacheff (1987), nos analyses déplacent la focale depuis les objets vers les propriétés des objets que sont P et Q. La parité d'un nombre a-t-elle un lien avec la parité de son carré ? Pour que la stratégie fonctionne comme une explication, il faut dépasser une construction au cas par cas. La fonction de stratégie de notre premier cas $f_n : k \rightarrow 2k^2$ ne constitue une explication que dans la mesure où nous disposons d'une expression algébrique. C'est d'ailleurs cette expression algébrique qui se trouve au cœur de l'énoncé $\forall n \in \boldsymbol{N}\, \forall k \in \boldsymbol{N}\, (n = 2k \rightarrow n^2 = 2 \times 2k^2)$ qui permet la construction d'une stratégie gagnante dans le jeu d'intérieur. Bien sûr, les opérations et transformations sur les *objets* ne sont pas absentes du processus. Nous avons mis en avant que cette mise en relation reposait sur une décomposition en facteurs des nombres en jeu et c'est bien parce que cette décomposition est toujours possible, indépendamment du choix d'un exemple particulier, qu'elle peut être associée à une stratégie gagnante.

Pour terminer, nous allons revenir sur un autre aspect de ce travail visant à identifier quelques limites à l'approche logique et langagière que nous avons proposée. Notre deuxième étude de cas a été réalisée en géométrie, un domaine des mathématiques dans lequel les outils sémiotiques utilisés pour manipuler les objets sont assez différents de ceux utilisés par exemple en arithmétique. L'objectif de cette deuxième étude était de dégager des similarités et des différences entre les pratiques langagières de démonstration dans les domaines de l'arithmétique et de la géométrie. Nous avons montré en nous appuyant sur les travaux de Duval notamment que certains enjeux de savoir étaient spécifiques des registres sémiotiques utilisés. Ceci nous a conduits à nuancer l'idée d'une position énonciative unique (même si elle comporte des invariants tels que la recherche de généralité, de nécessité et de relations entre les énoncés) pour les processus de démonstration en mathématiques. La nature des objets considérés, et plus particulièrement les registres de représentation sémiotique utilisés, donne une forme particulière à ces processus dont il s'agit de tenir compte si l'on souhaite dégager les savoirs en jeu.

Bibliographie

BACHELARD, G. (1938), *La formation de l'esprit scientifique. Contribution à une psychanalyse de la connaissance objective*, Paris, Vrin.

BALACHEFF, N. (1987), Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics*, **18(2)**, 147-176.

BALACHEFF, N. (2010), Bridging knowing and proving in mathematics. An essay from a didactical perspective. In G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics* (pp. 115-135). Heidelberg : Springer.

BARRIER, T. (2008), Sémantique selon la théorie des jeux et situations de validation en mathématiques, *Éducation et Didactique*, **2(3)**, 35-58.

BARRIER, T. (2016), Les exemples dans l'élaboration des démonstrations mathématiques : une approche sémantique et dialogique, *Recherches en Éducation*, **27**, 94-117.

BARRIER, T., MATHE, A.-C. & MITHALAL, J. (2016), Formation initiale des enseignants du premier degré en géométrie : quels savoirs ?, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **21**, 317-342.

BERNIE, J.-P. (2002), L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de « communauté discursive » : un apport à la didactique comparée ?, *Revue Française de Pédagogie*, **141**, 77-88.

BROUSSEAU, G. (1997), La théorie des situations didactiques, *Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de Docteur Honoris Causa de l'Université de Montréal*.

BROUSSEAU, G. (1998), *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. (2002), Les doubles jeux de l'enseignement des mathématiques, *Revue du Centre de Recherche en Éducation*, **22-23**, 83-155.

DOWEK, G. (2013), *Une démonstration est-elle une explication ?* En ligne http://www.lsv.fr/~dowek/Philo/rochebrune.pdf.

DUVAL, R. (1995), *Semiosis et pensée humaine : Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Berne.

DUVAL, R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 5-53.

GANDIT, M. (2008), *Étude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement. Une ingénierie de formation*, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

HANNA, G. (2018), Reflections on proof as explanation. In A. J. Stylianides & G. Harel (Eds.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving. An International Perspective* (pp. 3-18). Cham, Switzerland: Springer.

HERSANT, M. (2010), *Empirisme et rationalité au cycle 3, vers la preuve en mathématiques*, Mémoire complémentaire pour l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Nantes, Nantes.

HERSANT, M. & ORANGE-RAVACHOL, D. (2015), Démarche d'investigation et problématisation en mathématiques et en SVT : des problèmes de démarcation aux raisons d'une union, *Recherches en Éducation*, **21**, 94-107.

HINTIKKA, J. (2007), *Les principes des mathématiques revisités* (trad. française de M. Rebuschi, *The principles of mathematics revisited*, 1996, Cambridge University Press), Vrin, Paris.

HINTIKKA, J. & SANDU, G. (1997), Game-Theoretical Semantics. In J. Van Benthem & A. Ter Meulen, *Handbook of Logic and Language* (pp. 361-410), Amsterdam: Elsevier.

JAUBERT, M. & REBIERE, M. (2011), Positions énonciatives pour apprendre dans les différentes disciplines scolaires : une question pour la didactique du français ? *Pratiques*, **149-150**, 112-128.

LORENZEN, P. (1967), *Métamathématiques*. Paris : Gauthier-Villars.

ORANGE, C. (2005), Problématisation et conceptualisation en sciences et dans les apprentissages scientifiques, *Les sciences de l'éducation – Pour l'ère nouvelle*, **38(3)**, 69-94.

MARGOLINAS, C. & LAPARRA, M. (2011), Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. In J.-Y. Rochex & J. Crinon (Eds.), *La construction des inégalités scolaires* (pp. 19-32). Rennes : Presses universitaire de Rennes.

MATHE, A.-C. & MITHALAL, J. (à paraître), L'usage des dessins en géométrie : quelques enjeux pour l'enseignement. In *Actes de la 19e école d'été de didactique des mathématiques de l'ARDM*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

PERRIN, D. (2007), L'expérimentation en mathématiques, *Petit x*, **73**, 6-34.

RAHMAN, S. & KEIFF, L. (2005), On how to be a dialogician. In D. Vanderveken (Eds.), *Logic, Thought and Action* (pp. 359-408). Dordrecht: Springer.

RECIO, A. M. & GODINO, J. D. (2001), Institutional and personnal meanings of mathematical proof, *Educational Studies in Mathematics*, **48(1)**, 83-99.

REDMOND, J. & FONTAINE, M. (2011), *How to play dialogues. An introduction to dialogic logic*. Londres: College Publications.

RÜCKERT, H. (2011), Why dialogical logic. In *Dialogues as a dynamic framework for logic*. Chapter 1. College Publications, Londres.

SENSEVY, G. (2012), Le jeu comme modèle de l'activité humaine et comme modèle en théorie de l'action conjointe en didactique. Quelques remarques, *Nouvelles Perspectives en Sciences Sociales*, **7(2)**, 105-132.

VERNANT, D. (2011), The dialogical logic of veridicity. In A. Trognon, M. Batt, J. Caelen & D. Vernant (Eds.), *Logical properties of dialogues* (pp. 123-145). Nancy : Presses Universitaires de Nancy.

WEBER, K. & ALCOCK, L. (2004), Semantic and syntactic proof productions, *Educational Studies in Mathematics*, **56(2-3)**, 209-234.

WEBER, K. & ALCOCK, L. (2005), Using warranted implications to understand and validate proofs, *For the Learning of Mathematics*, **25(1)**, 34-38.

THOMAS BARRIER
Centre de recherche en sciences de l'éducation
Université libre de Bruxelles
thomas.barrier@ulb.ac.be

AZZEDINE HAJJI
Centre de recherche en sciences de l'éducation
Université libre de Bruxelles
azzedine.hajji@ulb.be

FERNANDO HITT, SAMANTHA QUIROZ RIVERA

FORMATION ET EVOLUTION DES REPRESENTATIONS FONCTIONNELLES-SPONTANEES A TRAVERS UN APPRENTISSAGE SOCIOCULTUREL

Abstract. Training and Evolution of Functional-Spontaneous Representations through Sociocultural Learning. The present research aims to understand the role of the students' functional-spontaneous representations through the study of the pupils' external spontaneous representations in the process of solving a problem research situation. Through a qualitative methodology, the spontaneous representations of secondary students in the learning of covariation between variables are analysed. A particular goal is to study how these representations are likely to evolve through internal communication of students and through communication and validation with their pairs. Hence the importance of having a method that promotes a social construction of learning. In our case, we have opted for a learning process in a sociocultural environment: ACODESA (Collaborative Learning, Scientific Debate, Self-reflection and Institutionalization). From this perspective, in this paper, we consider collaborative research that allows the researcher to acquire knowledge about the teacher's practice, and vice versa, the teacher acquiring research knowledge in the mathematics classroom through the evolution of pupils' representations. The results show that the functional-spontaneous representations are the engine of the learning process of mathematical concepts.

Résumé. Cette recherche vise à comprendre le rôle des représentations fonctionnelles-spontanées dans l'étude des représentations spontanées (externes) des élèves pendant le processus de résolution d'une situation d'investigation. Plus précisément, nous analysons, grâce à une méthode qualitative, les représentations spontanées des élèves du secondaire lors d'un apprentissage sur la covariation entre variables. Nous portons un intérêt particulier à la manière dont ces représentations sont susceptibles d'évoluer grâce à une réflexion personnelle des élèves suivie d'un travail de collaboration et validation par les pairs, d'où l'importance d'avoir une méthode qui favorise la construction sociale de l'apprentissage. Dans notre cas, nous avons opté pour un apprentissage dans un environnement d'enseignement socioculturel : l'ACODESA (apprentissage collaboratif, débat scientifique, autoréflexion et institutionnalisation). Dans cette perspective, nous avons choisi la recherche collaborative pour mener à bien notre expérimentation. En effet, celle-ci permet au chercheur d'acquérir des connaissances sur la pratique de l'enseignant et, réciproquement, l'enseignant acquiert des connaissances sur la recherche dans la classe de mathématiques sur l'évolution des représentations des élèves. Dans notre article, nous nous interrogeons sur le rôle des représentations fonctionnelles-spontanées comme moteur du processus d'apprentissage des concepts mathématiques.

Mots-clés. Représentation fonctionnelle-spontanée, représentation socialement construite, apprentissage dans un milieu socioculturel, ACODESA.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 24, p. 75 – 106.

1. Introduction

Avant 1980, Tall et Vinner (1981) et Vinner (1983) promouvaient les notions de *Concept image* et de *Concept definition*, dans lesquelles ils mettaient en avant les contradictions cognitives des élèves dans la construction des concepts mathématiques en essayant de connaître le type de construction mentale réalisée par les élèves. Des chercheurs qui s'intéressaient au rôle des représentations dans la construction des concepts mathématiques (Janvier, 1987 ; Duval, 1993, 1995) montrèrent le revers de la médaille. Le cadre théorique de Janvier fait référence à des systèmes de signes, aux opérations qui peuvent être effectuées au sein de ces systèmes et au processus de « traduction » entre les représentations (les éléments de ces systèmes). Celui de Duval fait référence à la formation d'un registre de représentations à l'intérieur d'un système de signes, à l'importance des processus de conversion entre les représentations et à l'articulation des registres pour la construction des concepts (Duval, 1993, 1995). Dans ces modèles, les représentations sont des éléments d'un sous-système symbolique (un registre) généralement culturellement établi. Les *représentations institutionnelles* ou *officielles* désignent les représentations que l'on trouve dans les programmes, les manuels scolaires, les écrans des ordinateurs, etc.

Quand les chercheurs se sont orientés vers l'analyse des processus de résolution de problèmes contextualisés, ils ont mis en évidence, une nouvelle problématique, d'ordre cognitif, sur le rôle des représentations *non institutionnelles* dans l'apprentissage des mathématiques. Dans cette approche, les processus de modélisation mathématique ont pris beaucoup d'importance (Blum, Galbraith, Henn & Niss, 2007 ; Gravemeijer, 2007) et les représentations *non institutionnelles* ont commencé à avoir de l'intérêt pour les chercheurs qui les ont associées à la créativité et à la construction des concepts mathématiques (diSessa, Hammer, Sherin & Kolpakowski, 1991 ; Duval, 2005, 2006 ; Hitt, 2003, 2004, 2006).

Précisément, sous cet angle, un cadre théorique centré sur les représentations institutionnelles ne permet pas d'analyser au complet le processus de la construction des connaissances chez les élèves (Arzarello, 2006 ; Bartolini & Mariotti, 2008 ; diSessa et al., 1991 ; Ernest, 2006 ; Hitt, 2003 ; Radford, 1998, 2003).

Dans une approche différente, nous trouvons aussi une définition de ce qu'est une représentation chez Davis, Young et McLoughlin (1982, p. 54). Pour eux, une représentation peut être une combinaison de quelque chose d'écrit sur papier, de quelque chose existant sous la forme d'objets physiques et d'un arrangement d'idées soigneusement construit dans la pensée. Cette définition, dans un contexte socioculturel, donne plus de force à la conception de Voloshinov (1973) : « […] la construction du signe est totalement une question déterminée par la communication. Après tout, l'existence du signe n'est que la matérialisation de cette communication. » (p. 13). Cela implique que la représentation est une unité qui a des composantes internes et externes liées par les schémas d'action. Ces schémas d'action comprennent des actes de médiation, de production, d'assimilation et de rééquilibration à travers la communication. En fait, le médium véritable de la communication, dans le contexte de l'apprentissage des mathématiques, n'est pas uniquement la langue, mais aussi les gestes et les représentations que nous utilisons dans cette communication.

Ainsi, nous nous intéresserons aux processus d'objectivation dans un milieu socioculturel pour regarder l'évolution des représentations dans la construction du signe. Arzarelo (2006), en prenant en considération le travail de Bartolini et Mariotti (2008) sur la médiation sémiotique dans la classe de mathématiques, analyse les gestes, le langage corporel et les représentations sur papier lors de la résolution d'une tâche dans un travail en collaboration :

> Observer les étudiants qui résolvent des problèmes en travaillant en groupe, leurs gestes, leurs regards et leur langage corporel en général se révèlent également des ressources sémiotiques cruciales. À savoir, les signes non écrits et les procédures non algorithmiques doivent également être pris en compte dans une approche sémiotique. (Arzarelo, 2006, pp. 74-75)

Étant donné que nous considérons la classe comme une microsociété tout comme Arzarello (2006) et Bartolini et Mariotti (2008), notre recherche aura une perspective vygotskienne.

Notre objectif est d'analyser le processus d'objectivation quand l'élève débute une activité mathématique seul et comment, à travers la communication avec ses pairs, ses représentations initiales (non nécessairement institutionnelles) se développent pour arriver à un type de représentations socialement construites, qui pourraient être des représentations non institutionnelles (Hitt, 2013). En d'autres termes, nous voulons analyser les processus d'objectivation des élèves dans un contexte de travail en collaboration, dans la classe de mathématiques.

2. L'organisation de la classe et les représentations dans une approche socioculturelle

2.1. Sur l'organisation de la classe

Nous allons considérer la classe de mathématiques comme une microsociété où nous voulons promouvoir la connaissance mathématique. Comment pouvons-nous, ou devons-nous, l'organiser à cette fin, dans un milieu socioculturel ? En d'autres termes, comment organiser la coconstruction des savoirs de façon dynamique dans un contexte socioculturel ?

Dans notre approche vygotskienne, étant donné que la construction du signe a un caractère social puisqu'il est construit dans un processus de communication

(Voloshinov, 1973), ce qui nous intéresse, c'est le processus d'objectivation lié à cette construction sociale dans la classe de mathématiques avant l'introduction du symbolisme officiel (dans l'étape d'institutionnalisation de la méthode utilisée). Nous empruntons l'approche de Radford (1998), qui souligne que les signes sont construits à partir d'un « système culturel sémiotique » (SCS) :

> les signes ne se trouvent pas au hasard dans l'espace culturel des individus. Étant donné que la culture n'est pas homogène, les signes ne sont ni distribués harmonieusement ni utilisés de manière indifférente. Au contraire, les signes sont culturellement adaptés et distribués socialement [...]. Ils sont incarnés par ce que nous voulons appeler différents systèmes sémiotiques culturels […]. (Radford, 1998, p. 11)

Radford (2003) insiste :

> Le fait est que les processus de production de connaissances sont enchâssés dans des systèmes d'activité qui incluent d'autres moyens d'objectivation physique et sensorielle que l'écriture (comme les outils et la parole) et qui donnent également une forme corporelle et tangible à la connaissance. (Radford, 2003, p. 41)

Dans cette perspective, l'individu lui-même joue un rôle au sein de cette microsociété :

- dans les interactions entre les membres d'une équipe ;
- dans les interactions entre toutes les personnes présentes dans la classe, y compris l'enseignant ;
- dans l'utilisation et la construction des normes sociomathématiques (Yackel & Coob, 1996) (qui passent par la répartition du travail, l'argumentation, le processus de validation, etc.) ;
- dans la médiation des artéfacts dans un processus dynamique de l'apprentissage (Arzarello, 2006 ; Bartolini & Mariotti, 2008 ; Radford, 1998, 2003).

Ces éléments appartiennent à l'activité de la classe. Quand il s'agira de réaliser une activité individuelle, la classe sera entourée par un réseau de différents types d'activités qui favoriseront l'apprentissage dans ce milieu socioculturel. Ainsi, la construction des significations et des concepts est le produit de l'interaction dynamique des éléments au cours d'une activité mathématique spécifique.

2.2. Les représentations fonctionnelles-spontanées et les représentations spontanées dans une approche socioculturelle

Selon les recherches que nous avons menées sur la résolution de tâches non routinières, l'émergence de représentations non institutionnelles est fréquente (Hitt, 2004, 2006). Comme nous l'avons dit antérieurement, nous entendons par *représentations institutionnelles* (RI) celles que l'on trouve dans les curriculums, les manuels, les écrans d'ordinateur, ainsi que celles que l'enseignant utilise en classe. Lors de la résolution d'une activité non routinière, les élèves mobilisent des *représentations fonctionnelles-spontanées* (RF-S), s'appuyant sur des *représentations mentales internes fonctionnelles* (RF). Ils sont amenés à produire des *représentations spontanées* (RS) lesquelles sont externes à l'individu.

Les élèves, face à une activité non routinière, produisent des représentations RF-S qui sont chargées du sens que les élèves eux-mêmes leur ont donné. Le caractère spontané de ces représentations demande habituellement un processus de raffinement pour évoluer vers les représentations officielles, dans lequel la communication joue un rôle important. Ainsi, dans la classe, l'évolution des RF-S par un *processus de communication et de validation* est très important, et demande l'implémentation d'une méthode d'enseignement *ad hoc*. Les élèves, dans la classe, doivent donc être organisés socialement pour travailler sur un objectif commun, le rôle de l'enseignant étant de les guider sans leur donner la réponse.

Les RF-S ont une structure cognitive qui régule, contrôle et organise les actions ultérieures comme un pont vers la compréhension, et ce, dans un processus de rétroaction. Lorsque la RF-S est externalisée (par écrit, oralement, de manière kinesthésique, etc.), une RS est produite (Hitt, 2004, 2006 ; Hitt & González-Martín, 2015 ; Hitt, Saboya & Cortés, 2017). Dans cet article, nous voulons approfondir le sens de ces représentations et les intégrer de manière plus cohérente dans une perspective d'enseignement.

Les RS permettent l'étude des RF-S puisque celles-ci, étant composées d'une partie mentale, ne sont pas directement accessibles au chercheur. Dans notre recherche, nous définirons les représentations RF-S de la façon suivante :

> **Définition.** Une RF-S est une représentation qui émerge chez les individus dans la pratique, face à une activité non routinière : les actions liées à l'interaction avec la situation ont des caractéristiques fonctionnelles (mentales, orales, kinesthésiques, schématiques) et sont liées à une représentation spontanée (externe). La représentation est fonctionnelle dans le sens où l'élève a besoin de donner un sens à la situation et elle est spontanée, car elle s'exprime naturellement dans l'action quand on essaye de comprendre et de résoudre la situation non routinière.

Notre but est d'analyser les RS (associées aux RF-S) et leur évolution vers les représentations institutionnelles (RI).

Question générale de recherche. Dans le contexte socioculturel qu'est la classe de mathématiques, avec une méthode d'enseignement liée à l'apprentissage en collaboration et des activités dont la construction a été guidée par cette méthode, le but est d'observer l'évolution des RS (associées à des RF-S) vers les représentations institutionnelles (RI). La question qui mobilise cette recherche est la suivante : comment les RS des élèves (associées à des RF-S) évoluent-elles dans un milieu socioculturel d'apprentissage des mathématiques ?

Questions spécifiques de recherche. En prenant en considération les éléments théoriques précédemment décrits, nous avons réalisé avec des élèves de troisième année du secondaire au Québec une expérimentation qui visait le concept de covariation entre variables comme prélude au concept de fonction, en ciblant les questions spécifiques suivantes :

1. Quelles caractéristiques pouvons-nous dégager des RS (associées à des RF-S) des élèves de troisième secondaire, quand ces derniers font face à une situation d'investigation concernant la covariation entre variables ?

2. Comment les premières RS (associées à des RF-S) évoluent-elles dans un apprentissage collaboratif en utilisant une méthode d'enseignement, de débat scientifique et d'autoréflexion ?

Pour répondre à la question générale de recherche et aux questions spécifiques, nous avons suivi le cadre méthodologique suivant.

3. Cadre méthodologique

3.1 Protocole

Pour cette expérimentation, la population étudiée était composée de deux groupes d'élèves de troisième année du secondaire[1] au Québec (l'un de 24 élèves et l'autre de 36). L'échantillon sélectionné pour cet article, est le groupe de 24 élèves (classé par l'enseignant comme un groupe faible). Nous avons choisi de suivre une équipe de ce groupe afin d'observer l'influence de la méthode sur son travail. Notre choix a été d'observer une équipe faible qui pourrait nous donner plus d'informations sur les caractéristiques des RS et leur évolution. La première activité que nous allons analyser dans cet article n'a été réalisée que par 22 des 24 élèves. Nous allons nous concentrer sur les productions d'une équipe de quatre élèves et sur l'évolution des représentations de ces élèves tout au long de la discussion en équipe et en grand groupe. Cela va permettre de comparer leurs productions individuelles et en équipe, et de constater l'influence des autres équipes dans la discussion en grand groupe.

Pour notre recherche, une série de cinq activités en lien avec le concept de variation et de covariation entre variables, comme prélude au concept de fonction, a été construite (voir Figure 1). Les échanges préliminaires que nous avons eus

[1] L'âge des élèves est de 14 à 15 ans.

avec l'enseignant ont été faits dans une approche de recherche collaborative, dans laquelle les chercheurs s'intéressent aux pratiques de l'enseignant et l'enseignant s'approprie l'approche théorique des chercheurs.

Il est important de signaler que, dans notre méthode, l'élaboration des activités qui s'enchaînent est un travail important. L'enseignant doit connaître les difficultés que les élèves sont susceptibles d'éprouver et il doit pouvoir les guider, sans leur donner la réponse, pendant les étapes de la méthode précédant l'étape d'institutionnalisation.

La durée totale de la mise en œuvre a été d'un mois et demi. À la suite d'une réflexion avec l'enseignant autour de la covariation entre variables et son enseignement, il a décidé de remplacer le chapitre de la modélisation en lien avec la covariation entre variables et les fonctions par les cinq activités proposées (Hitt & González-Martín, 2015). L'enseignant a participé à la rédaction de ces activités, ce qui lui a permis de mieux comprendre le rôle qu'il avait à jouer pendant l'expérimentation.

Nous avons suivi un protocole dans l'élaboration des activités, avec le propos d'analyser les production des RS des élèves (voir Figure 1) : schématiques, verbales, numériques, graphiques et algébriques.

Situation/représentation	Schématique	Verbale	Numérique	Graphique	Algébrique
Le photographe	√	√	X	X	X
Le randonneur	√	√	X	√	X
Le jacuzzi	√	√	√	√	√
Les carrés	√	√	√	√	√
Les ombres	√	√	√	√	√

Figure 1. Les cinq situations d'investigation et différentes représentations attendues

La conception des cinq situations d'investigation (voir Figure 1) visait à promouvoir la production des RS (schématique, verbale, graphique, numérique et algébrique). L'élaboration des situations d'investigation voulaient prioriser la construction des représentations selon un ordre établi (voir Figure 1). Ainsi, au début, nous avons demandé certains types de représentations et, à partir de la situation 3, nous avons demandé tous les types de représentations signalés dans la figure 1.

Dans cet article, nous restreignons l'analyse des productions des élèves (RS) aux représentations liées à la première situation d'investigation « Le photographe ».

3.2 La méthode d'enseignement (ACODESA)

Une méthodologie qualitative d'étude de cas multiples semble pertinente, car, face à des activités non routinières, nous voulons en premier lieu analyser les représentations individuelles des élèves à travers les différentes étapes (en équipe, puis en grand groupe). En second lieu, nous nous intéressons à l'évolution de ces représentations tout au long du processus, à ce qui a été retenu des échanges vécus en classe ainsi qu'à ce qui a été retenu après une étape de reconstruction individuelle de ce qui a été fait en classe autour de la situation d'investigation. Notre intérêt porte sur le produit obtenu après cette étape de reconstruction.

Dans cette étude, nous considérons ces représentations RF-S comme des entités qui seront analysées à travers les RS en utilisant la méthode d'enseignement ACODESA (Hitt, 2007 ; Hitt & González-Martín 2015 ; Hitt, Saboya & Cortés, 2017). Nous allons décrire ci-dessous les différentes étapes de la méthode d'enseignement suivie dans l'expérimentation.

3.2.1 Première étape : le travail individuel

Après avoir lu l'énoncé, les élèves ont été invités à illustrer la situation. Par la suite, il leur a été demandé d'expliquer en mots leur dessin. À ce stade, l'élève se fait une représentation interne de la situation et l'extériorise. En même temps, l'élève établit un dialogue intérieur dans le sens de Vygotsky (1973). Cette étape prépare l'élève à la deuxième étape, dans laquelle il devra confronter ses idées à celles de ses pairs, cela en vue de la co-construction d'une connaissance plus élaborée pour un raffinement des RF-S initiales.

3.2.2 Deuxième étape : le travail en équipe

Après la première approche individuelle décrite ci-dessus, les élèves ont donc débattu de leurs idées avec les membres de leur équipe. Plus précisément, ils ont été invités à échanger sur leurs productions sémiotiques (RS_1) produits dans la première étape et, éventuellement, à les modifier. Ces modifications ont été notées en rouge. Nous codons comme RS_2 ces nouvelles RS. Elles sont le produit de la *communication* et de la *validation* dans un processus d'objectivation (Radford, 1998, 2003).

3.2.3 Troisième étape : la discussion en grand groupe

Dans cette troisième étape, en suivant la même idée de développement du *processus de communication et validation*, nous avons demandé à chaque équipe de présenter ses productions sémiotiques RS_2 (celles sur lesquelles il y a consensus) et de les expliquer à toute la classe. Ainsi, chaque élève a eu la possibilité d'analyser les propositions de représentations des autres équipes et une nouvelle discussion (un débat) entre les élèves a pu s'établir. Il est important de noter que le rôle de l'enseignant consiste à orienter la discussion en créant une atmosphère de débat scientifique (Legrand, 1993) afin de faire évoluer ces représentations. Les RS_3 ainsi générées sont un produit de la *communication* et de la *validation* dans un milieu socioculturel plus large, dans un processus d'objectivation. À ce stade de l'expérimentation, toutes les productions des élèves ont été recueillies.

3.2.4 Quatrième étape : l'autoréflexion (retour au travail individuel)

Après la collecte des productions des élèves, l'enseignant doit fournir une version vierge de la situation-problème et demander aux élèves de reconstruire, individuellement à la maison, les résultats obtenus en classe. Nous pensons que la reconstruction permet une acquisition plus stable et plus durable des connaissances. C'est pour cette raison que la production des RS_4 dans cette étape est très importante dans notre méthode d'enseignement. Nous allons considérer la construction sociale effectuée pendant les quatre premières étapes comme une représentation socialement construite (RSC), voir Figure 2.

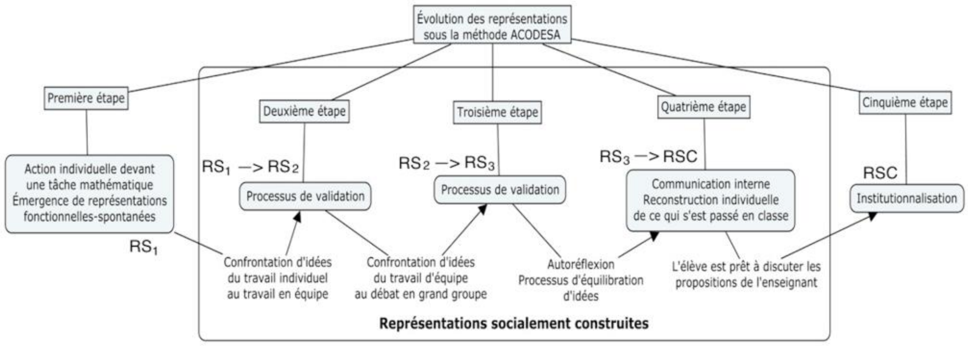


Figure 2. Étapes d'ACODESA et attentes

Représentation socialement construite (RSC). Dans un processus d'apprentissage en collaboration, face à une activité non routinière qui passe par le travail individuel, le travail en équipe, la discussion en grand groupe et un processus d'autoréflexion, les RF-S initiales se transforment et donnent lieu, à la fin des quatre premières étapes, à une représentation interne-externe que nous nommerons « représentation socialement construite ».

3.2.5 Cinquième étape : le processus d'institutionnalisation des connaissances

Dans cette étape, l'enseignant fait un résumé des productions générées par les élèves en discutant de la pertinence de chaque représentation, avant de procéder à l'introduction des représentations institutionnelles (RI). Les RSC des élèves peuvent être loin des RI, mais dans ce processus les élèves ont construit une structure cognitive qui, on l'espère, permet de faire face aux RI des enseignants avec une posture plus critique, que dans un enseignement traditionnel.

3.3 La situation d'investigation « Le photographe » et une analyse a priori

La modélisation est l'une des activités difficiles de l'apprentissage des mathématiques. En général, à l'école secondaire, elle est enseignée après les fonctions. Dans le cas présent, nous avons inversé le processus en considérant la modélisation comme le déclencheur d'idées intuitives autour de la variation et de la covariation entre variables, idées qui doivent s'harmoniser pour que l'élève arrive ultérieurement à un modèle mathématique, de type algébrique, de la fonction, selon notre modèle de construction de situations d'investigation (voir Figure 1).

Cet article porte sur la première activité : « Le photographe » (voir Figure 3). Celle-ci avait pour but d'introduire la méthode d'enseignement aux élèves, qui étaient habitués à une approche d'enseignement magistral. Nous avions l'intention d'initier les élèves à la méthode d'enseignement adoptée (ACODESA), qui aurait pu les troubler. Les caractéristiques suivantes ont été prises en compte dans l'élaboration des deux premières situations d'investigation :

a) Un énoncé ambigu a été formulé pour déclencher une pensée qui va vers plusieurs directions (appelée dans la littérature pensée divergente, voir par exemple, Guilford, 1967), et qui va promouvoir les représentations fonctionnelles-spontanées. En même temps, dans cette première situation d'investigation, nous avons voulu introduire la méthode d'enseignement ACODESA dans l'action.

b) Cet énoncé suggère une approche discrète de la situation et le passage à une approche continue (dynamique) au fur et à mesure que l'élève interagit avec le milieu.

c) L'enseignant, conscient de l'ambiguïté des deux premières situations, était prêt à répondre aux questions des élèves pour promouvoir l'évolution des représentations spontanées, et éventuellement, pour favoriser une pensée convergente (Guilford, 1967), surtout avec les situations 3, 4 et 5, vers les représentations demandées, selon la Figure 1.

d) Les deux premières situations d'investigation ont été conçues de façon à promouvoir une évolution dans les processus d'argumentation des élèves et dans les productions correspondantes de ces derniers.

Nous avons utilisé la situation d'investigation du photographe pour promouvoir la production de schémas et de représentations verbales selon l'organisation de la situation (voir Figure 1). L'ambiguïté de l'énoncé avait pour finalité de promouvoir une pensée divergente sans viser une solution déterminée et d'engendrer des représentations spontanées (institutionnelles ou non) autour de la covariation entre variables dans un processus de modélisation.

Individuellement, les élèves ont reçu un questionnaire (voir version résumé Figure 3) et du matériel (corde, compas, fil de fer, etc.). La première page comportait les consignes générales en plus de la partie à remplir par l'élève (nom, prénom, etc.) ; la deuxième page décrivait l'activité. Les deux autres pages contenaient les questions visant à faire représenter la situation de différentes façons.

Page 1	
CAHIER DE L'EQUIPE Nom de l'équipe : Noms des membres de l'équipe :	Directives : utiliser un stylo à l'encre noire, si vous avez changé d'avis dans la discussion en équipe, écrire avec un stylo à l'encre rouge. Après la discussion avec toute la classe, si vous avez changé d'opinion, utiliser un stylo à l'encre verte. ***Activité du photographe professionnel***

Résumé (pages 2-3-4-5-6)

Un photographe professionnel se promène sur le trottoir près de la statue de Jacques Cartier. Il souhaite la photographier et voudrait, pour cela, s'assurer qu'il choisit le meilleur angle (ou la meilleure position). Il doit donc calculer la distance entre lui et la statue. Pour cela, il doit vérifier cette distance à différents endroits sur le trottoir. Une fois que les photos seront développées dans son laboratoire, l'enregistrement lui permettra de savoir quels sont les endroits où il doit se placer pour obtenir les meilleures photos. Par exemple, voici deux positions possibles pour prendre une photo.

1) *Faire une description verbale du phénomène et faire un dessin de la situation.*
2) *Maintenant que nous avons obtenu l'information nécessaire (description en mots, dessin, enregistrement de l'information, etc.), nous voulons trouver différentes façons de transmettre cette information à d'autres photographes. Qu'est-ce que nous pouvons faire de différent de ce que nous avons déjà fait pour transmettre l'information de la situation ?*
3) *Après les présentations des réponses des autres équipes, vous pouvez choisir de garder votre réponse ou d'en adopter une autre qui vous semble plus efficace.*
4) *Si vous avez adopté une nouvelle réponse, réexpliquez le phénomène en utilisant votre nouveau choix.*

Figure 3. Situation-problème « Le photographe »

L’énoncé de la situation propose une variable (distance du photographe à la statue) et laisse ouvert le choix d’autres variables (comme l’angle qui est évoqué dans l’énoncé). Nos attentes étaient que la statue soit dessinée en 3D par quelques élèves et représentée par un point par d’autres. Nous nous attendions aussi à ce que le travail en équipe provoque des changements dans la représentation initiale, à ce que les élèves fixent une position pour la statue, à ce que, à partir de celle-ci, le photographe diminue ou augmente sa distance à la statue de façon régulière (un « triangle dynamique » en 2D ou 3D) et, enfin, à ce que cela entraîne l’émergence d’une relation entre les variables (relation de dépendance), soit de façon discrète, soit de façon continue. Parmi toutes les idées qui pouvaient émerger, nous nous attendions aussi à ce que les élèves s’aperçoivent de la présence de variables, sélection de deux variables, et des hypothèses entre deux d’entre elles.

La structure de la méthode ACODESA permet à l’élève de s’engager dans une *communication interne* dans la première étape et dans une *communication et validation externes* dans les deuxième et troisième étapes. La communication externe est aussi considérée dans la cinquième étape, dans le processus d’institutionnalisation. Cette dernière étape permet à l’enseignant de caractériser les représentations extériorisées par les élèves avant de fournir les représentations institutionnelles liées à l’activité proposée. Par exemple, dans le processus d’institutionnalisation, l’enseignant a mentionné l’importance de considérer dans la situation du photographe des triangles rectangles (comme ceux utilisés par les équipes dans la Figure 17b et 17c) qui permettre, éventuellement, l’utilisation de la relation de Pythagore, modélisation qui implique implicitement que la statue soit représentée par un point.

Pour la construction de nos situations d’investigation et les processus de résolution de problèmes en classe lié au « milieu », nous avons retenu l’approche de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998). La tâche devait donc être facile à comprendre et c’est dans l’interaction des élèves avec le milieu (dans un travail en collaboration) qu’allait émerger la mathématique sous-jacente. Dans l’élaboration de situations problèmes, nous avons aussi retenu la notion de débat scientifique de Legrand (1993).

En nous appuyant sur la méthode d’enseignement ACODESA, et sur les notions théoriques antérieurement exprimées, nous voulions caractériser la notion de représentation socialement construite dans la classe de mathématiques dans une approche socioculturelle. Dans la section qui suit, nous présenterons les résultats obtenus et une discussion théorique.

4. Analyse de résultats

Notre expérimentation nous a permis d’obtenir deux types de données : en premier lieu, les productions des élèves sur papier ou sur transparents (il ne faut pas oublier que, pour chacune des étapes de la méthode, des stylos de couleurs différentes ont été utilisés) ; en second lieu, les enregistrements vidéo (provenant de deux caméras) pour l'analyse des données.

Pour fournir une réponse à la première question de recherche, liée à la caractérisation des représentations RS (associées à des RF-S) nous analyserons les RS produites lors de la première étape de la résolution de la première situation d'investigation par les 22 élèves.

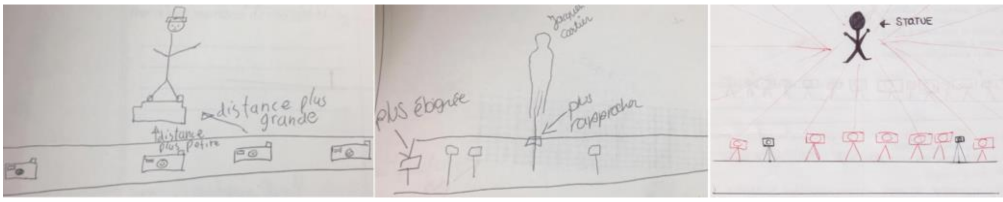
Pour répondre à la deuxième question de recherche, liée à l'évolution des RS produites dans un milieu d'apprentissage collaboratif en utilisant ACODESA, nous analyserons l'évolution des RS (RS_1, RS_2, RS_3, RS_4) d'une seule équipe de quatre élèves, en comparaison avec les productions initiales de toute la population et la production finale des autres équipes.

4.1 Caractéristiques des RS de toute la population

4.1.1 Représentations utilisées pour décrire les éléments impliqués dans la situation-problème

Pendant le travail individuel, l'enseignant demandait ici et là aux élèves si l'énoncé était clair (quelques-uns lui ont posé des questions spécifiques, par exemple, si le trottoir pouvait être exclusivement horizontal ou si le mouvement de l'appareil photo pouvait faire varier l'angle vers le haut ou vers le bas). Certains n'ont pas posé de questions et ont simplement fait ce qui était demandé.

Les RS produites par les 22 élèves montrent des représentations des différents éléments en jeu dans la situation-problème. Ils ont tous identifié les trois éléments importants de la situation : la statue, l'appareil photo et le trottoir. Cependant, la manière de représenter ces éléments n'a pas été la même chez tous les élèves. Ainsi, douze élèves ont utilisé des dessins proches de la réalité, comme le montre la figure 4. Ces dessins de la statue montrent les différentes parties du corps humain : les mains, les pieds, la tête et même le visage. Ces élèves représentent de plus certains détails de l'appareil photo, le trépied, des boutons ou le flash. La situation, les expériences antérieures des élèves avec les objets en jeu et la nécessité de faire une représentation ont déclenché des processus sémiotiques chez les élèves (médiation sémiotique dans le sens de Bartolini & Mariotti, 2008). Les productions des élèves représentent une réalité extérieure. Dans les différentes productions (par exemple, celles de la Figure 4), la notion de variation est présente (différentes positions de l'appareil photo). Dans la production 4a, 4b et 4c, de la même figure, une notion de covariation entre variables discrètes est présente. On relève les variables suivantes : distance parcourue par le photographe avec l'appareil photo et la distance de l'appareil photo à la statue.

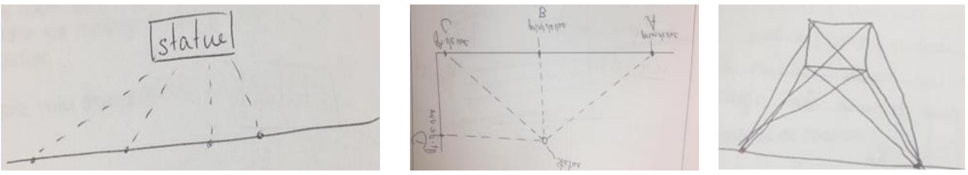


4a 4b 4c

Figure 4. Différentes RS qui montrent une statue complète

La deuxième façon de représenter les éléments de la situation-problème utilise des schémas composés de figures géométriques (voir Figure 5). Dans ces représentations, il est possible de remarquer plus de précision quant à l'emplacement de chacun des éléments. Dans certaines représentations, des mots ont été utilisés pour identifier les éléments, alors que, dans d'autres, leur sens reste implicite. Dans les schémas (voir Figure 5), on peut remarquer deux types de variables, à savoir les segments pour représenter la distance appareil photo–statue (explicite) et la distance repère–position de l'appareil photo (repère face à la statue et éloignement de l'appareil photo de cette position, implicite). Encore une fois, la médiation sémiotique a eu lieu et la réflexion pour représenter la réalité a commencé à être transformée au sein d'un processus d'objectivation. Chez ces élèves, les notions de variable et de covariation entre variables ont également émergé. Il est difficile de décider sur la nature de la variable (discrète ou continue) en analysant seulement les représentations figurales, il est absolument nécessaire d'analyser les représentations verbales (voir par exemple la représentation 6c de la Figure 6).

Remarquons que, dans cette situation, on parle de relation entre variables (discrètes ou continues) et non de fonction. Par exemple, dans la Figure 5a, on pourrait penser à une relation qui n'aboutira pas, dans la forme présentée, à une relation fonctionnelle (au sens $y = f(x)$ avec des grandeurs x et y).



5a 5b 5c

Figure 5. RS utilisant des formes géométriques

Six élèves ont fait deux dessins pour répondre à la consigne. Les différences entre les deux représentations proposées consistent dans le raffinement de certains éléments de la situation-problème. Dans les représentations 6a et 6b de la Figure 6, nous ne pouvons pas assurer qu'il s'agit d'une représentation discrète ou continue des variables, sauf quand on analyse la représentation 6c. La verbalisation fait référence a des variables continues.

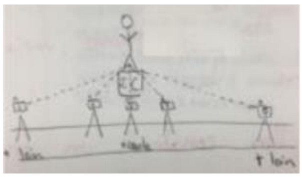
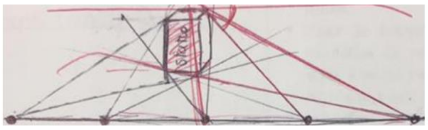
 6a	 6b	**AI** : Si on construit un triangle (ill 1) [première illustration, Figure 6a][2], on peut voir que plus il est éloigné de la statue, plus la cathète [côté] de la base est longue comme l'hypoténuse. Tout dépend de la prise de vue que le photographe souhaite avoir.

Figure 6. Travail individuel

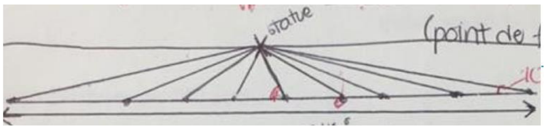
Un autre exemple de verbalisation est :

AJ : Plus l'angle qui est formé par notre trajectoire et la statue est petit, plus la distance entre l'appareil et la statue est petite.

Un procédé de modélisation 3D est présenté dans la Figure 7a, où l'élève, dans un premier temps (phase individuelle avec stylo à l'encre noire) a représenté par des points les emplacements possibles de l'appareil (plus ou moins à égale distance les uns des autres) et les a reliés à la statue représentée par un parallélépipède. Par contre dans la Figure 7b, la statue a été représentée par un point. La notion de covariation entre variables semble être présente dans ces types de représentation figurales, comme on a dit plus haut, il faut la représentation verbale pour confirmer s'il s'agit de variables discrètes ou continues.



7a



7b

Figure 7. Raffinement d'une RS initiale après discussion en équipe

4.1.2 Construction de relations entre les éléments de la situation d'investigation

Les RS des élèves ne montraient pas uniquement la statue, le trépied ou l'appareil photo : elles montraient aussi des lignes qui indiquaient visuellement une variation de la distance entre l'appareil photo et la statue (voir Figure 8). Pour ce faire, des flèches ou d'autres modes de relations possibles entre ces éléments ont été utilisés. Ainsi, nous avons constaté que 18 des 22 élèves avaient remplacé, dans un

[2] Ce qui est entre crochets sont des interprétations faites par les auteurs de ce document.

processus de communication, soit en équipe ou en grand groupe, le trottoir par une ligne droite. Dans certains cas, on ne sait pas, dans le processus de modélisation, si les élèves pensaient à une variable continue (sur le déplacement de la position de l'appareil photo) ou discrète.

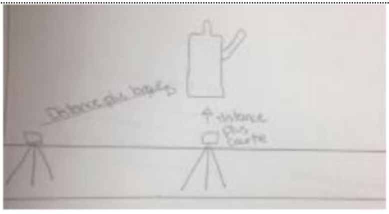
	L'élève avec les flèches parle de la distance plus large entre l'appareil photo et la statue, et la distance la plus courte.
8a	8b

Figure 8. Approche visuelle de la variation de la distance entre l'appareil photo et la statue

La variation de la variable position de l'appareil photo a entre autres été suggérée par des lignes figurant dans les RS, marquant la position de l'appareil photo par rapport à la statue. Cette relation a également été soulignée par des flèches (illustration de droite dans la Figure 9) indiquant possiblement, la distance entre deux emplacements possibles.

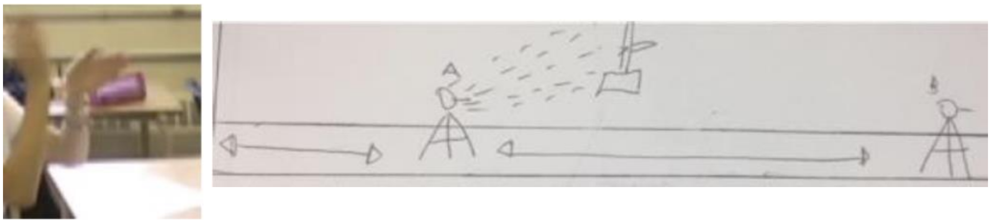
4.1.3 Identification de facteurs non mentionnés dans le problème et prise de décisions au sujet de leur implication dans la situation-problème

Dans les RS des élèves, on peut identifier certains facteurs qui pourraient avoir une influence sur le phénomène analysé, mais qui ne sont pas mentionnés dans l'énoncé de la situation-problème. Parmi ceux-ci figure le positionnement possible de l'appareil photo sur un trottoir non représenté par une ligne droite (voir figures 4a, 4b, 6b, 8a et 9b). Il y a d'autres positions où les élèves font la restriction de la position de l'appareil photo sur le trottoir en ligne droite (Figure 9b). L'élève mentionne :

AA : Il y a plusieurs autres façons de présenter la caméra, les deux qui sont par-dessus sont les deux principales. Il peut y en avoir d'autres. Mais elles doivent être sur le trottoir. Il y a plusieurs angles par endroit. Il peut aussi [y] avoir [une] autre longueur.

Cette affirmation a aussi été partagée par un autre élève qui a dit (voir le geste sur la photo 9a) :

AN : Donc juste à partir d'un point, il peut y avoir plusieurs possibilités, cela peut dépendre de la façon dont la caméra est placée. Il peut y avoir plusieurs angles sous lesquels on peut prendre la photo.



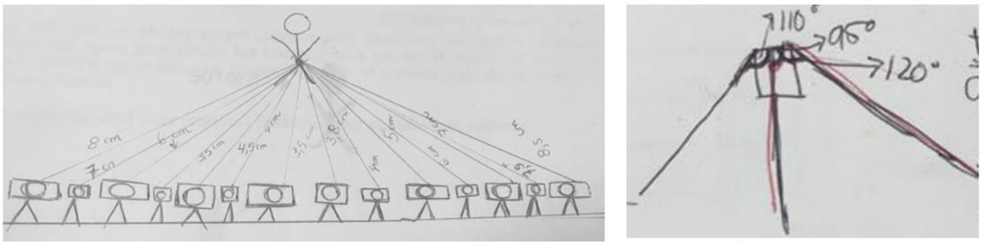
9a 9b

Figure 9. Autres facteurs montrés dans les RS

L'élève de la figure 9a a demandé à l'enseignant si l'on pouvait considérer un mouvement vertical de l'appareil photo (angle vertical). L'enseignant a dit qu'il pouvait accepter une telle interprétation.

4.1.4 Processus de modélisation mathématique à travers les éléments et les relations identifiés

La plupart des RS proposées par les élèves présentaient des éléments que l'enseignant et les chercheurs ont identifiés comme un processus de modélisation à travers la reconnaissance des variables et de leur covariation. Les segments, flèches, triangles et angles ont été utilisés pour montrer une variation (par exemple, celle de des figures 8a et 9b) dans certains cas, et une covariation dans d'autres (par exemple, celle décrite par l'élève en Figure 6c). On trouve même des mesures métriques (voir la Figure 10a). D'autres éléments possibles sont l'angle entre la statue et les différentes positions de l'appareil photo (Figure 10b). Seuls deux élèves introduisent dans leurs explications les propriétés des triangles (Figure 6c).

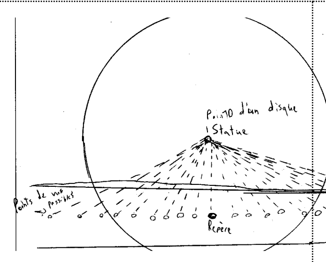


10a 10b

Figure 10. Mesures métriques et autre type d'interprétation de la situation

À travers cette activité d'introduction, nous pouvons voir apparaître des processus de modélisation qui permettent de comprendre la situation. On peut voir plus bas des manifestations écrites autour de la notion de variation et de covariation entre variables discrètes et variables continues qui émerge naturellement ce qui était le but principal de cette situation-problème.

Voyons de plus près une autre explication et le dessin correspondant, à la Figure 11. Dès le début, l'élève (AG) désigne dans sa RS la statue par un point et, pour montrer la variation de la position de l'appareil photo par rapport à la statue, dessine les différentes positions à l'aide de lignes pointillées. Il place un point de référence (repère) pour indiquer où se trouve le photographe (à droite ou à gauche du point de repère).



AG : Il faut établir un point qui servira de repère sur le trottoir [petit dessin face à la statue]. Il suffit de savoir la distance entre le repère et le point où on veut photographier et on obtient un triangle rectangle. En utilisant la relation de Pythagore, on peut déterminer la distance entre le photographe et la statue. Plus l'angle du coin caméra [petit triangle rectangle] est petit, plus la distance entre la statue et la caméra est grande.

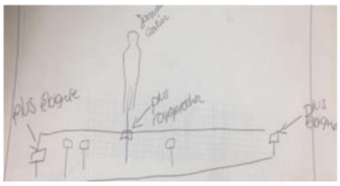
Figure 11. RS d'AG où dessin et texte font allusion à la covariation entre variables

Dans le texte de la Figure 11, l'élève AG fait explicitement mention de la covariation entre la variable angle (angle qui est formé par la statue, l'appareil photo et le point nommé « repère ») et la variable distance (celle entre la statue et l'appareil photo). Implicitement, dans le dessin d'AG, il y a aussi la représentation de la variable liée à la position de l'appareil photo. Comme prévu dans le scénario de l'activité, la notion de relation entre variables a été travaillée par cet élève. Même si celui-ci ne connaît pas les situations d'investigation qui suivent (voir Figure 1), il y a un raffinement des RS (médiation des représentations), qui devrait mener à la construction d'une structure cognitive proche de la covariation entre variables.

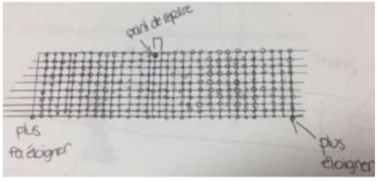
4.1.5 Soutien aux processus de compréhension de la situation et établissement de conjectures

Nous voyons aussi apparaître dans les RS des transformations qui vont engendrer des conjectures. Cela peut se voir dans les processus de raffinement des RS initiales de quelques élèves, ainsi que par les explications qu'ils ont données oralement ou par écrit. Un exemple clair est donné par l'élève AM, qui, dans sa première RS (Figure 12a), montre différents appareils photo situés sur le trottoir. Dans 12b, elle place la statue à côté d'un bord du trottoir pour analyser la situation de façon plus précise. Elle écrit :

AM : Il y a un million de possibilités. C'est simple [;] tu peux te mettre à un endroit et il y a différents endroits au cm^2. S'il reste sur le trottoir, il peut se placer n'importe où sur la longueur et la largeur du trottoir. Le plus rapproché[,] c'est directement en face et à la limite la plus proche de la statue[,] et le plus allongé[,] c'est en diagonale du côté le plus éloigné à l'extrême droite.



12a

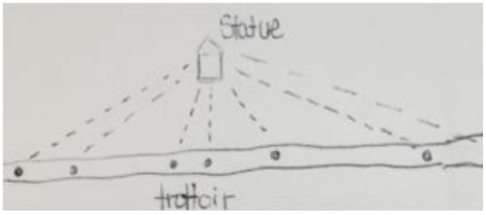


12b

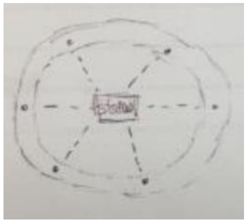
Figure 12. Un processus de compréhension à travers les RS

En fait, cette élève n'a pas représenté le trottoir par une ligne, comme d'autres élèves l'ont fait, mais par un plan cartésien (Figure 12b). A noter que d'autres élèves représentent le trottoir par une bande (4a, 6b, 8a, 9b et 13a).

Un second exemple qui illustre ce processus de raffinement de la première production est donné par AA. Sa première RS est montrée à la figure 13a. L'élève a bien repéré les différents éléments de la situation. Visuellement, on pourrait arriver à la covariation, mais, de façon surprenante, l'élève a imaginé une autre situation (Figure 13b) pour laquelle il a donné une explication tout à fait cohérente avec sa nouvelle représentation.



13a



13b

AA : Le trottoir n'est pas situé à une distance égale autour de la statue. Puisque le trottoir est droit, la distance varie. Si on se met plus proche de la statue, la distance est ouverte [angle entre statue et trottoir], et si on se met plus loin de la statue, la distance est plus longue.
Si le trottoir était autour de la statue afin qu'elle soit au centre, les distances seraient égales.

13c

Figure 13. Production de conjectures et raffinement de la RS initiale ; AA montre visuellement la variation d'une variable (distance statue-position du photographe)

Cette trajectoire du mouvement du photographe d'un trajet circulaire placé autour de la statue a été formulée par plusieurs élèves soit on peut la voir comme une interprétation des caractéristiques de la situation (étude d'un cas extrême), soit un souvenir (dans la ville de Québec, il y a une statue de Jacques Cartier avec ces caractéristiques). Il faut noter que la description verbale donnée par l'élève de la

Figure 13 fait seulement mention de « la distance entre l'appareil photo et la statue ». Un autre élève écrit :

> **AL** : Puisque le trottoir est en ligne droite et que la statue ne bouge pas, la distance varie. Mais si le trottoir était rond, autour de la statue, la distance ne varierait pas.

On peut observer que, dans certains cas, lors de l'extériorisation des RF-S, l'élève revient en arrière pour produire une nouvelle RS afin de mieux comprendre la situation à l'étude (voir Figure 13). Le rôle de la langue orale et écrite et des gestes est fondamental dans les processus de médiation sémiotique de ce processus d'extériorisation. Cela soutient, d'une part, l'importance de la *communication interne* et, d'autre part, les processus d'objectivation à travers la *communication avec un autre interlocuteur*, ce que Radford (1998, 2003) considère, précisément, comme une partie essentielle dans la construction de signes et de concepts.

En résumé, les caractéristiques des représentations RS des 22 élèves sont les suivantes :

a) Des schémas liés, du point de vue physique, au contexte (statue, corps humain, etc.) ;

b) Des schémas qui utilisent différents types d'éléments pour représenter la statue, la distance de l'appareil photo à la statue, la représentation de la statue par un point, etc. ;

c) Des représentations verbales et des gestes pour exprimer des variations (déplacement de l'appareil photo) et des covariations (entre la position de l'appareil photo et la distance de l'appareil photo à la statue, ou entre la position de l'appareil photo et l'angle formé par la statue, la position de l'appareil photo et sa position initiale). La variation et la covariation entre variables, exprimées par quelques élèves avec des variables discrètes et d'autres avec des variables continues. Des conjectures sur la forme du trottoir (horizontale, circulaire), qui entraînent une réflexion sur la relation entre les variables en jeu ;

d) Dans les schémas, l'importance du triangle comme figure saillante dans le processus de modélisation.

e) L'évolution des représentations est caractérisée par l'émergence de la mathématique sous-jacente à la situation. Comme dans le cas des situations de Brousseau (1998), la mathématique émerge dans l'interaction avec le milieu et dans l'interaction entre les élèves.

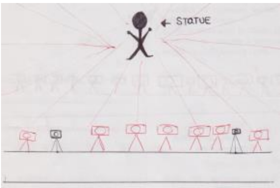
Nous essayerons maintenant de rendre compte de toute la richesse des processus de médiation sémiotique à travers l'analyse des productions d'une seule équipe.

4.2 Évolution des RF-S liées aux RS d'une équipe

Pour répondre à la deuxième question de recherche, nous analyserons le processus d'évolution des RF-S liées aux RS d'une équipe composée de quatre élèves que nous nommerons A_1, A_2, A_3 et A_4. Nous allons analyser leur production et leur évolution en contraste avec les productions finales d'autres équipes. Comme signalé dans les caractéristiques de la population, cette équipe a été choisie parce qu'il s'agit d'une « équipe faible [sic] », en espérant mieux identifier l'évolution des représentations qu'avec une équipe forte. Voici l'analyse des productions de ces quatre élèves pour chacune des étapes de la méthode ACODESA :

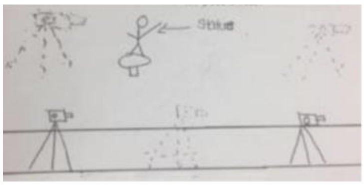
4.2.1 Première étape : le travail individuel des membres de l'équipe

Voici les RS des élèves de l'équipe considérée lors de la première étape (voir Figure 14).



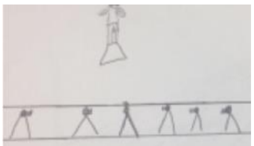
A1 : La distance change, car il change d'angle et de position pour prendre la photo. Il y a plusieurs possibilités.

14a (voir aussi 4c)



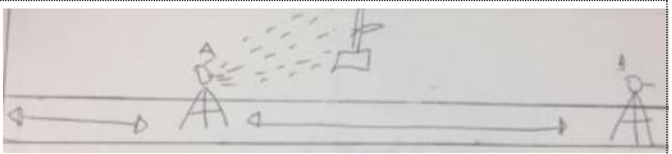
A2 : Il y a plusieurs autres façons de présenter la statue, les deux qui sont par-dessus sont les deux principales. Il peut [y] en avoir d'autres. Mais elles doivent être sur le trottoir. Il y a plusieurs angles par endroit. Il peut aussi [y] avoir plus [de] longueurs.

14b



A3 : La statue se situe à un point. Selon l'endroit où nous plaçons l'appareil photo, nous aurons différents angles de la statue et différentes longueurs de la statue jusqu'à la caméra.

14c



A4 : Le photographe peut prendre des photos à partir de A, cela peut-être plus à gauche, plus à droite ou au centre. Donc juste à partir d'un point, il peut y avoir plusieurs possibilités. Cela peut dépendre de la façon dont l'appareil photo est placé. Il peut y avoir plusieurs angles [des]quels on peut prendre la photo. C'est la même chose à partir de B. Par contre, on peut prendre la photo partout sur le trottoir [donc] ça peut vraiment varier.

14d

Figure 14. RS individuelle de chaque membre de l'équipe (sauf A1, qui a ajouté des appareils photo et des lignes après confrontation avec ses coéquipiers)

Dans l'analyse des représentations de toute la population (section 4.1) nous avons discuté quelques représentations des élèves. Nous allons les analyser à nouveau, mais cette fois-ci pour analyser leur évolution dans un travail collaboratif. Nous pouvons voir que, dans ces RS (voir Figure 14), les éléments en lien avec la situation sont présents (l'appareil photo, la statue et le trottoir). Les quatre élèves ont utilisé des dessins réalistes de la statue. Les représentations des élèves (A_1, A_2, A_3 et A_4) font appel à une variation explicite de l'angle (horizontale ou verticale) ; de la position de l'appareil photo et variation de la distance entre l'appareil photo et la statue. Les premiers schémas ont été élaborés pour mieux comprendre la situation (voir Figure 14) ; par exemple, A_1 considère la position de l'appareil photo comme une variable discrète (il a dessiné deux appareils photo et il en a ajouté d'autres après le travail en équipe) et A_4 considère la position de l'appareil photo comme une variable continue.

Une variable fréquemment présente, plus ou moins explicitement, dans les RS des quatre élèves (Figure 14) est la distance entre l'appareil photo et la statue. Deux variables sont considérées explicitement par A_1, A_2, et par A_3. La RS de A_4 décrit trois variables : la position de l'appareil photo, l'angle (variation verticale) de l'appareil photo et, de manière implicite, la distance de la statue. L'élève A_3 explicite une double covariation entre la variable position de l'appareil photo et l'angle avec la statue ainsi qu'avec la distance entre l'appareil photo et la statue.

4.2.2 Deuxième étape : le travail en équipe

Après la première étape de travail individuel avec possibilité de demander à l'enseignant des éclaircissements, les élèves passent au travail en équipe

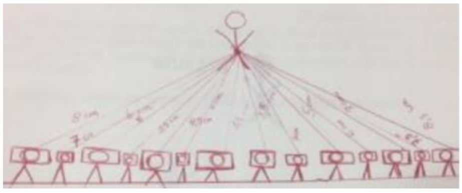
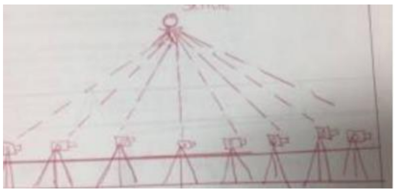
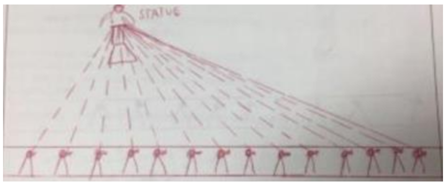
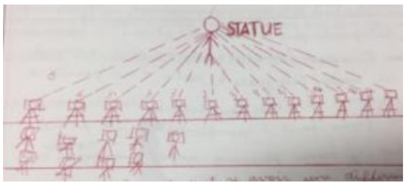
A_1  15a	**A_2**  15b
A_3  15c	**A_4**  15c

Figure 15. RS modifiées (représentation discrète et uniformisée) à la suite du travail en équipe

La Figure 15 nous montre les nouvelles productions RS de chaque membre, mais dans un travail d'équipe. Au cours de cette étape, les élèves doivent écrire en rouge. On peut y voir que, pendant ce travail en équipe, des changements ont eu lieu. Par exemple, dans les quatre nouvelles RS (Figure 15) quelques élèves ont ajouté, en pointillés, les lignes allant de l'appareil photo à la statue. On peut aussi remarquer que, bien que la représentation de la statue continue à avoir un aspect plus ou moins réaliste, les lignes de A_1 et A_2 ont une tendance à converger en un point, alors que celles de A_3 et A_4 semblent converger vers un élément de la statue (la taille et la tête) Il semble que les représentations des élèves dans la Figure 15 soient des représentations de transition pour le passage d'une idée de la statue en 3D à une représentation en 2D (A_4) ou 1D (A_3), puis finalement à une représentation de la statue par un simple point, 0D (A_1 et A_2). Un autre changement des RS réside dans l'emplacement des appareils photo de A_4, l'élève a mis deux rangées d'appareils photos sur le trottoir. Cette option a été éliminée lors de la présentation en grand groupe (voir Figure 16). Ces détails montrent un certain processus de modélisation et de traitement des RS lors du travail en équipe et/ou en grand groupe.

Le travail en équipe, la *communication entre pairs* et le *processus d'objectivation* (Radford, 1998, 2003) ont permis une amélioration des RF-S initiales. Cette communication a permis de donner des explications de la situation en termes de variation (les variables sont ambigües à cette étape) et de covariation entre variables. Voici l'exemple de l'élève A_1 lors du travail en équipe :

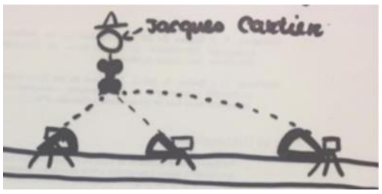
> **A_1** : Selon l'angle où est placée la caméra, la mesure varie. Plus la caméra est placée en dessous de la statue, plus la mesure est courte. Plus la mesure est placée sur les côtés de la statue, plus la mesure est longue.

4.2.3 Troisième étape : la discussion en grand groupe (présentation des résultats par équipe à toute la classe)

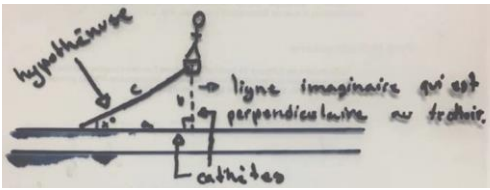
Dans une troisième étape, encore une fois dans un objectif de communication et de validation entre pairs, les équipes ont été invitées à présenter leurs résultats au groupe. Pour cette présentation, les équipes écrivent leurs représentations sur un transparent dans le but de le projeter. La Figure 16 montre la production de l'équipe 1 (A_1, A_2, A_3 et A_4). On peut y remarquer que l'équipe a résumé les idées exprimées au cours du travail en équipe. Pour la présentation en grand groupe, l'équipe n'a pas repris les appareils photo des deuxième et troisième rangées, comme les avait dessinées A_4 (Figure 16), pour ne laisser qu'une seule rangée.

Figure 16. Représentation de l’équipe formé par A1, A2, A3 et A4

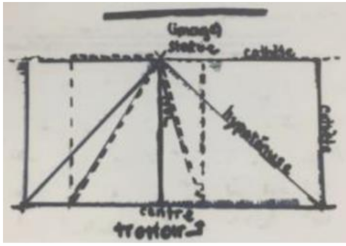
Dans la Figure 17, nous présentons les productions des équipes 2, 3 et 4 (élèves classés comme plus forts) afin que l’on puisse comprendre ultérieurement (étape 4, celle de l’autoréflexion) l’influence que celles-ci ont pu avoir sur chaque membre de l’équipe 1.



17a



17b



17c

Figure 17. RS des équipes 2, 3 et 4 présentées dans la discussion en grand groupe

L'équipe 2 (Figure 17a) montre trois variables :

- la position de l’appareil photo,
- l’angle entre la ligne horizontale et la ligne entre la statue et l’appareil photo,
- la distance entre l’appareil photo et la statue (plus implicitement).

Les équipes 3 et 4 (Figures 17b et 17c) montrent un schéma où on peut voir des triangles (des triangles rectangles, explicites dans l’équipe 3 et implicites dans l’équipe 4, ils font référence à l’hypoténuse lié à un triangle rectangle) :

- les deux équipes 3 (Figure 17b) et 4 (Figure 17c) prennent comme hypoténuse la distance entre l’appareil photo et la statue ;
- un côté semble *vertical* (triangle rectangle) ;
- les deux équipes prennent comme référence la ligne perpendiculaire au trottoir passant par le point qui représente la statue ;
- l'autre côté est formé par le segment entre la position de l’appareil photo et la statue ; c’est-à-dire l’hypoténuse.

Les deux équipes 3 et 4 expliquent dans leurs présentations écrites, de façon explicite, la relation de Pythagore (équipe 3, Figure 17b) :

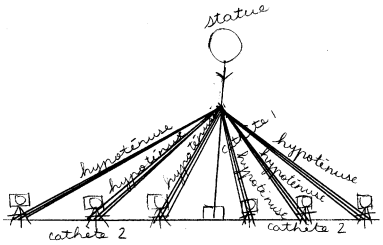
Équipe 3 : La statue ne se déplace pas, mais le photographe, lui, oui, donc il change son point de vue et transforme aussi sa perspective de la statue. Certaines variantes se présentent, comme la hauteur du trépied, l'angle, l'inclinaison du trottoir, etc. Si l'on construit un triangle, on peut trouver nos résultats. En utilisant la relation de Pythagore, on pourrait trouver les mesures. Exception : si le photographe est en ligne droite avec la statue.

Ces idées se rapportant à la relation de Pythagore ont été débattues en grand groupe à la demande de l'enseignant. D'autres idées ont été discutées sur le point de repère face à la statue. L'idée d'utiliser des angles, proposée par l'équipe 2, a également intéressé les élèves des autres équipes. L'idée principale que nous pouvons tirer de l'analyse de cette partie du travail des élèves est que l'organisation de la classe selon l'approche ACODESA a favorisé un riche processus d'objectivation, engendré par la communication entre les équipes.

L'enseignant a demandé aux élèves leur opinion sur les différentes présentations. Ceux-ci ont répondu que la construction de triangles était essentielle pour expliquer la situation. Ils ont aussi nommé plusieurs variables importantes : la variation de l'angle lié à la position de l'appareil photo, l'hypoténuse du triangle et le côté horizontal du triangle. L'enseignant a résumé ce que les élèves ont exprimé sur la covariation entre variables en utilisant un triangle rectangle dynamique. L'enseignant n'est pas revenu sur le trottoir circulaire. Il a donné la priorité aux variables hypoténuse et côté horizontal du triangle ainsi qu'à la variable angle qui avaient été mentionnées par les élèves.

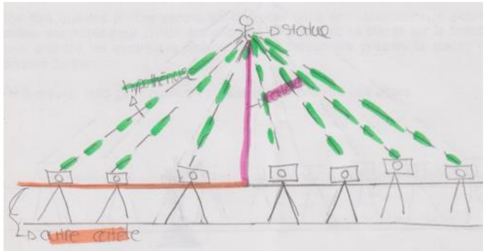
4.2.4 Quatrième étape : l'autoréflexion. Processus de reconstruction individuelle par chaque membre de l'équipe

Dans cette étape, l'enseignant demande aux élèves de refaire, seuls, l'activité, c'est-à-dire de résoudre seuls la situation-problème en prenant en considération ce qui a été discuté en classe. Les élèves doivent reconstruire les résultats obtenus à chacune des étapes. On peut voir ci-dessous (voir Figure 18) les productions (dessin et texte) de chaque élève de l'équipe 1 (A_1, A_2, A_3 et A_4) à l'issue de l'étape d'autoréflexion.



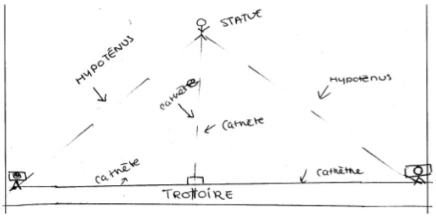
A₁ : Dans ce problème, on se sert des 2 cathèthes de chaque triangle[s] pour calculer la mesure de l'hypoténuse (pitagore) [Pythagore]. La caméra et la statue sont la mesure de Pitagore [Pythagore].

18a



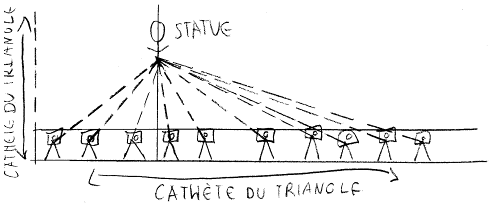
A₂ : Sur ce schéma[,] je présente que nous avons aussi plus[ieurs] mesures qui varient. Mais pour les trouver, nous pourrions [nous] servir de la relation de Pythagore. Nous nous servirons des deux cathètes et ensuite ça nous donnera l'hypoténuse qui sera la mesure de la distance de la caméra à la statue.

18b



A₃ : On s'imagine une ligne imaginaire sur le côté à gauche, selon la distance entre la caméra et la statue, on utilise la relation de Pyhtagore pour trouver l'hypoténuse.

18c



A₄ : Si l'on fait un triangle rectangle, on peut l'hypoténuse qui est la distance entre la caméra et la statue à l'aide de la relation de Pythagore. $(\text{cathète } 1)^2 + (\text{cathète } 2)^2 = \text{hypothénuse}^2$. Il peut y avoir plusieurs distances d'une certaine caméra à la statue, car la photo peut être prise de différentes angles et perspectives.

18d

Figure 18. RSC après un processus d'autoréflexion (quatrième étape, reconstruction individuelle)

Les dessins et les représentations verbales montrent des changements substantiels par rapport aux premiers **RS** du dessin initial des membres de l'équipe 1 (voir Figure 14). Les idées discutées en grand groupe ont été reprises (triangles rectangles et relation de Pythagore). Il est important de mentionner que les élèves reprennent certains éléments des RS qu'ils ont produites aux étapes précédentes (comparaison avec les productions des figures 14, 15, 16 et 17) : dessins de l'appareil photo et de la statue réalistes, alignement des positions de l'appareil photo. Le plus grand changement réside dans l'inclusion d'éléments non explicités par tous antérieurement (A_1, A_2, A_3, A_4) : un dessin 2D avec un point pour désigner les sommets des triangles (le dessin de la statue est toujours présente dans ses représentations). Les quatre élèves ont fait une reconstruction de ce qui a été fait en classe, dans laquelle ils ont incorporé les éléments qui avaient été discutés. À partir de cette activité, l'élève A_4 est devenue la leader de cette équipe dans la résolution des autres situations d'investigation (voir Figure 1).

Si nous analysons les caractéristiques de ce que l'ensemble des groupes a produit (voir résumé à la fin de la section 4.1), nous pouvons vérifier qu'à la fin des quatre étapes, cette équipe 1 a changé ses représentations initiales (RS) en ajoutant des caractéristiques que les autres équipes ont utilisées. Même s'ils ont retenu la possibilité d'utiliser la relation de Pythagore dans le processus de modélisation, ils ont conservé une représentation réaliste de la statue (Figure 18) ; représentations que nous avons nommées « représentations socialement construites » (RSC), selon notre approche théorique (voir section 2.2).

Cette étape est cruciale dans la méthode ACODESA, puisqu'elle demande une reconstruction individuelle à la toute fin d'un processus de coconstruction (travail en collaboration). L'autoréflexion autour de la reconstruction de ce qui a été discuté en classe est le summum de la construction des connaissances dans un processus de communication et de validation entre pairs. Nous pensons que ce que l'élève construit à la fin de la quatrième étape lui donne un support solide pour les nouvelles connaissances mathématiques que l'enseignant va institutionnaliser dans la cinquième étape.

Dans la dernière étape, celle du processus d'institutionnalisation, l'enseignant, après avoir analysé les productions des élèves, a souligné l'importance du choix des variables présentées. L'enseignant a donné une priorité aux représentations 2D, à la construction de triangles et à la relation de Pythagore, ainsi qu'à la représentation de la statue par un point. Il a parlé de la covariation entre variables en prenant en compte, comme première covariation entre variables, la position de l'appareil photo (distance de l'origine à l'appareil photo) et l'angle formé par l'hypoténuse et la cathète horizontale. Et comme deuxième covariation entre variables, la position de l'appareil photo (distance de l'origine à l'appareil photo) et la distance appareil–statue.

Conclusion

Cette recherche visait à comprendre plus en détail les caractéristiques des représentations notées RF-S, à travers les RS et leurs évolutions vers les représentations socialement construites (RSC) qui surgissent quand les élèves résolvent une situation-problème par un travail individuel, puis en collaboration. L'analyse du présent article, a été réalisée à l'aide des RS produites tout au long des quatre premières étapes de la méthode ACODESA, dans la résolution de la situation d'investigation : *le photographe*. Cette situation qui vise à initier l'élève à une méthode d'enseignement différente qui cherche à promouvoir la production des RS.

Notre analyse sur les RS a été centrée sur leurs apports à la compréhension de la situation et à la naissance de conjectures (par exemple, ce qui se passerait si le trottoir était circulaire). Cela a permis à certains élèves d'analyser un type particulier de covariation entre variables. Il est important de noter que l'extériorisation des RF-S à travers les RS a permis aux élèves d'expliquer la situation étudiée à travers différents types de représentations.

Parmi les 22 élèves qui ont participé à la première séance, seulement deux ont évoqué la relation pythagoricienne dans le travail individuel. Cela montre qu'une même situation-problème peut déclencher des idées complètement différentes (une pensée divergente) chez différents élèves et que la difficulté est d'amener ces élèves à une pensée convergente vers le concept de covariation entre variables. C'est pendant le travail en équipe que les élèves ont constaté la nécessité du passage de dessins représentant la statue en 3D à une représentation en 2D et finalement en un point. À la fin de la section 4.1, nous avons caractérisé les productions de toute la population, répondant ainsi à notre première question de recherche.

Pour répondre à la deuxième question de recherche, qui porte sur l'évolution des RS (associées aux RF-S), les résultats de l'expérimentation montrent que dans chacune des étapes de la méthode, les RS subissent des changements significatifs dans un processus d'acculturation vers une explication de la situation étudiée. En prenant une équipe faible, nous avons voulu montrer cette évolution, cette explicitation de la covariation entre variables dans les dernières productions RSC (voir Figure 18). C'est par le travail en équipe (communication et validation) que les élèves ont été amenés à réfléchir sur les éléments liés à la situation et à trouver des relations sur la variation et la covariation entre variables. Dans la discussion en grand groupe, les membres de cette équipe ont vu et entendu les présentations des autres équipes avec la mention explicite d'expressions telles que « triangles rectangles » et « relation de Pythagore ». La discussion qui a suivi, proposée par l'enseignant, a donné lieu à encore plus de raffinement des RS. Les élèves ont explicitement dit que l'utilisation des triangles était essentielle pour expliquer la situation. Les triangles dynamiques ont été adéquats pour expliquer la situation en termes de covariation entre variables. On peut constater cette affirmation dans les RSC que chaque membre de l'équipe a produite à l'étape d'autoréflexion (voir Figure 18).

Cette expérimentation nous montre bien que chacune des étapes de la méthode a été essentielle pour le développement des RF-S (selon l'analyse des productions des figures 14, 15, 16, 17 et 18). Ainsi, avant le travail d'équipe, la production des RS soutient individuellement une première approche de la situation et favorise le processus d'identification des éléments-clés de la situation-problème et des relations possibles entre eux. Ainsi, lorsqu'il est temps de faire le travail en équipe, chacun des membres a déjà une idée de base qui lui permet de faire valoir ses points de vue et donc de proposer une RS plus raffinée aux autres membres de l'équipe. À l'étape suivante, on observe qu'une discussion de groupe amène les équipes à un échange des idées qui leur ont permis d'introduire plus de relations mathématiques dans leur propre RS.

La quatrième étape de la méthode permet de montrer comment les idées échangées entre les différentes équipes ont été intériorisées par les élèves de l'équipe 1. La méthode ACODESA nous permet de créer une approche dynamique dans la classe de mathématiques pour la co-construction des premiers éléments de la covariation entre variables comme prélude au concept de fonction. Dans cette approche socioculturelle, les élèves ont besoin d'interagir entre eux et avec le groupe dans un milieu propice à l'argumentation et à la communication externe et interne.

Étant donné que les RF-S sont les premières représentations face à une situation non routinière et que les RS associées sont confrontées dans les processus de réflexion individuelle, discussion et validation en équipe, discussion et validation en grand groupe et autoréflexion, il est impératif de les analyser pour savoir à ce stade ce que l'élève a retenu du processus d'apprentissage et comment expliquer avec les nouvelles représentations socialement construites (RSC) la situation étudiée ; et tout cela avant le processus d'institutionnalisation.

Nous avons discuté de l'importance du concept de covariation entre variables comme prélude au concept de fonction et de situations d'investigation pour développer ce concept important. Une piste de réflexion importante pour l'organisation d'un cours complet à l'école secondaire est le rôle des exercices, problèmes et situations d'investigation.

Remerciements. Nous remercions tout particulièrement le XVIe Groupe de travail Québec-Mexique 2017-2019, qui permet une communication plus étroite entre les chercheurs du Mexique et du Québec.

Bibliographie

ARZARELLO, F. (2006). Semiosis as a Multimodal Process, *Relime*, **numéro spécial**, p. 267-299.

BARTOLINI BUSSI, M.G. & M. A. MARIOTTI (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective. In L. ENGLISH et al. (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 746-783). Londres: Routledge.

BLUM, W., P. GALBRAITH, H. HENN & M. NISS (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*, New York: Springer.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

DAVIS, R., S. YOUNG & P. MCLOUGHLIN (1982). *The Roles of "Understanding" in the Learning of Mathematics* [Rapport n° NSF/SED-82008]. En ligne : http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED220279.pdf .

DISESSA, A., D. HAMMER, B. SHERIN & T. KOLPALOWSKI (1991). Inventing Graphing: Meta-Representational Expertise in Children, *Journal of Mathematical Behavior*, **10**, 117-160.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **5**, 37-65.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*, Berne : Peter Lang.

DUVAL, R. (2005). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes du XXXIIe Colloque COPIRELEM (*pp. 67-89). Strasbourg.

DUVAL, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, **61**, 103-131.

ERNEST, P. (2006). A Semiotic Perspective of Mathematical Activity: The Case of Number, *Educational Studies in Mathematics*, **61**, 67-101.

GRAVEMEIJER, K. (2007). Emergent Modelling as a Precursor to Mathematical Modelling. In W. BLUM, P. GALBRAITH, H. HENN & M. NISS (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 137-144). New York: Springer.

GUILFORD J.P. (1967). *The Nature of Human Intelligence*. New York: McGraw-Hill.

HITT, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **8**, 255-271.

HITT, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique, *Revue des Sciences de l'Éducation*, **30(2)**, 329-354.

HITT, F. (2006). Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example: The concept of limit, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **11**, 253-268.

HITT, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'autoréflexion. In M. BARON, D. GUIN & L. TROUCHE (Eds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage : conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Paris : Hermès.

HITT, F. (2013). Théorie de l'activité, interactionnisme et socioconstructivisme. Quel cadre théorique autour des représentations dans la construction des connaissances mathématiques ?, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **18**, 9-27.

HITT, F. & GONZÁLEZ-MARTÍN A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method, *Educational Studies in Mathematics*, **88(2)**, 201-219.

HITT, F., SABOYA, M. & CORTÉS C. (2017). Rupture or continuity: The arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment, *Educational Studies in Mathematics*, **94(1)**, 97-116.

JANVIER, C. (1987). Translation Processes in Mathematics Education. In D. JANVIER (Eds.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

LEGRAND, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, *Repères IREM*, **10**, 123-159.

RADFORD, L. (1998). *On Culture and Mind: a post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought*. Article présenté à la 23e rencontre annuelle de la Semiotic Society of America, En ligne à : http://www.luisradford.ca/pub/102_On_culture_mind2.pdf

RADFORD, L. (2003). Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization, *Mathematical Thinking and Learning*, **5(1)**, 37-70.

TALL, D. & VINNER S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics With Particular Reference to Limits and Continuity, *Educational Studies in Mathematics*, **12(2)**, 151-169.

VINNER, S. (1983). Concept Definition, concept image and the notion of function, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **14(3)**, 293-305.

VOLOSHINOV, V.N. (1973). *Marxism and the philosophy of language*, traduction du russe par L. MATEJKA et I. R. TITUNIK. Cambridge, MA: Harvard University Press.

VYGOTSKY, L. S. (1973). *Pensamiento y lenguaje*, Buenos Aires: La pléyade.

YACKEL, E. & P. COOB (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education*, **27(4)**, 458-477.

FERNANDO HITT
Université du Québec à Montréal
hitt.fernando@uqam.ca

SAMANTHA QUIROZ RIVERA
Universidad Autónoma de Coahuila
samantha.quiroz@uadec.edu.mx

DYANA WIJAYANTI

ANALYSING TEXTBOOK TREATMENT OF SIMILARITY IN PLANE GEOMETRY

Abstract. This study presents a specific analysis of the treatment of the topic "similarity" by several college textbooks, in this case six Indonesian textbooks. The choice of this mathematical topic is justified by the fact that it requires in the activity of the pupils an implementation of both the geometric register and a numerical register, that of ratios and proportions. Thus, it is appropriate for the development of a general validity reference model, which will require further studies. The two points of theoretical support in the present study were the epistemology of the mathematical topic under consideration and the notion of praxeology, pertaining to the anthropological theory of the didactic. In addition to the meticulous review of textbook contents, the sketched model allowed us to evaluate the proximity of similarity treatments in a textbook and in the formal assessments of students at the end of college.

Keywords. Textbooks analysis, epistemological reference model, similar figures, proportionality.

Résumé. Analyse du traitement de la similitude dans les manuels. Cet article présente une analyse spécifique du traitement de la similitude par plusieurs manuels du collège, dans le cas présent six manuels indonésiens. Le choix de ce thème mathématique est motivé par le fait qu'il exige de l'activité des élèves une mise en œuvre à la fois du registre géométrique et d'un registre numérique, celui de la proportionnalité. Ainsi, il est approprié à l'élaboration d'un modèle de référence de validité générale, lequel supposera des études complémentaires. Les deux points d'appuis théoriques dans la présente étude ont été l'épistémologie du sujet mathématique considéré et la notion de praxéologie, relevant de la théorie anthropologique du didactique. En plus de l'examen méticuleux des activités proposées par les manuels, le modèle ébauché a permis d'évaluer la proximité entre les traitements de la similitude dans un manuel et dans les évaluations officielles des élèves à la fin du collège.

Mots-clés. Analyse de manuels, modèle praxéologique de référence, figures semblables, proportionnalité.

1. Introduction

Mathematics textbooks do not only present *knowledge* or "general facts", but are also important tools for teachers to engage students in mathematical activities or *practice*; mathematics textbooks always include worked examples and exercises. They are an essential component for the teachers' daily work with the textbook and so, in principle, for their choice of using it. To provide a useful and complete analysis of a mathematics textbook, the consideration of examples and exercises is therefore crucial. The precise analysis of practices is especially relevant when the textbook is used in contexts preparing for a centralized, high stakes examination. In such contexts, it is common that teachers concentrate students' work on types of tasks which appear in the examination. One can then ask: to what extent does the textbook present a similar concentration? Does it explicitly emphasize examples and exercises which are closely related to the examination? To what extent does it enable student work on types of tasks which are not frequently appearing at the examination? To choose a textbook, teachers may rely on rather informal answers to these questions; a more precise tool is presented in this paper, for a specific topic (similarity in plane geometry).

At the same time, more global features and connections within the textbook are important and should be related to the more local analysis of the practices which the textbook proposes to students. For instance, a central result on similarity of polygons concern the proportional relationship of corresponding sides; this could be explained with more or less explicit mention of the relation to the work done on ratio and proportion in arithmetic (usually in earlier grade). Explicit connections between different mathematical domains (here, geometry and arithmetic) are considered important to teach students that mathematics is a connected body of knowledge, and to avoid the tendency of "thematic autism" – that is, mathematics teaching that makes students visit one theme after the other, with no connection between them (Chevallard, 2006, 2015). We can make such a connection with the analysis of proportion in arithmetic in textbooks, already presented by Wijayanti and Winsløw (2015). As noted in that paper, textbooks at lower secondary level do not present much explicit theory; still, relations between the two domains may be identified both at the level of practice (e.g., exercises and techniques to solve them, cf. Wijayanti, 2015) and at the level of more informal, expository discourse in the textbook. In this paper, we investigate the relations between similarity and proportion, as presented in the textbooks at both levels.

Concretely, in this study, we construct a "sketch" of reference model to analyse the treatment of similarity in Indonesian lower secondary school textbook. This reference model is justified solely on the basis of a review of some textbooks in a topic. Thus, what we present in this study is not a general validity of reference model which will require a further study. However, we believe that our 'sketch' of reference model can be used to analyse all the theory and practice of textbooks we chose. For further discussion, we will use a "sketch" of reference model as reference model. We show that this reference model can also be used to consider the extent to which the practice on similarity, proposed by the textbook, aligns with the items on similarity which appear at the national examinations of Indonesian lower secondary school. Finally, we discuss explicit and implicit relations, established in the textbooks, between similarity of plane figures on the one hand, and ratio and proportion on the other. In Indonesia, the last topic is treated in 7th grade and the first topic in 9th grade. So, we look for these relations in the 9th grade textbooks' chapters on geometry.

This paper consists of seven sections. First, we present the necessary literature background on textbook analysis, especially studies of texts on geometry. Then, we also provide a short introduction to the anthropological theory of the didactic (ATD) as an approach in textbook analysis, and formulate our precise research questions. In section 3, we explain the context and methodology of the study. In section 4, we present the reference model on similarity, as a main result of this study. Then, we apply the model to produce a quantitative comparison of types of tasks in the textbooks analysed, and the Indonesian national examination (section 5). In section 6, we analyse the connections in the textbooks between similarity and proportion. In the final section, we present conclusive remarks related to the research questions, as well as perspectives for other applications of reference models of the type produced in this paper.

2. Background from Textbooks Analysis

Recently, the use of praxeological reference model has appeared as a new method to analyse mathematics textbook. For example, González-Martín, Giraldo and Souto (2013) developed such a model to study the treatment of the real number system in Brazilian textbooks. A more fine-grained analysis can be found in Hersant (2005), to study techniques for certain "missing value tasks" related to ratio and proportion, as they appear in textbooks for France lower secondary school. Hersant's reference model was developed by Wijayanti and Winsløw (2015) who focused on broader range of proportion tasks in the domain of arithmetic. As a result, they developed a larger reference model, consisting of seven types of tasks that can be applied to analyse the whole theme of "proportion" in Indonesian lower secondary textbooks (where the word theme is used in the sense of Chevallard, 2002b). They also noticed that some types of tasks are common and numerous in all the analysed textbooks, while others are rarer and appear just in a few of the textbooks. In this paper, we examine how this method can be used for a related theme (similarity) in a different domain (geometry) and to what extent the textbooks analysed provide explicit links between the two themes (proportion and similarity).

Miyakawa (2012) presented a textbook study in the domain of geometry, which is also to some extent based on ATD. This study focuses on how lower secondary textbooks in Japan and France exhibit specific differences in the meaning, form and function of proofs in geometry. It is interesting that clear differences may appear between textbooks from different countries and be explained in terms of wider differences between them. A similar comparative study was done by Jones and Fujita (2013), on proof between British and Japanese textbooks.

Sears and Chávez (2014) studied the factors which seem to influence teachers' use of textbooks for geometry teaching in the US, for instance, what make them assign or not assign a given exercise as homework for students. Among the influential factors we find the teachers' perception of

- their students' competences for the given task, and

- the importance of the given exercise to prepare for high stakes assessments.

For instance, tasks involving proofs are rarely assigned because they are considered too difficult for most students and they are considered less important for external assessment purposes. This observation is related to one point in the present paper, namely the closeness of tasks in textbooks to tasks appearing in high stakes examination.

The often-cited risk of school mathematics being disconnected (visit of different "monuments", cf. Chevallard, 2012) encourages many authors to investigate ways to strengthen the relations between different domains of school mathematics. For instance, García (2005) investigated the possibilities to establish relations between two themes in lower secondary school in Spain, namely ratio and proportion in the domain of arithmetic and linearity on the domain of algebra. In the domain of arithmetic, proportion involves ideas like ratio and scale, which are also relevant for the context of linear functions. For example, students are given a proportion task for four relationship numbers, e.g. a_1, b_1, a_2, b_2 so that $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$. Then, students are asked to find *c*. Students can solve such task by using "cross product technique": $a_1 \times b_2 = b_1 \times a_2$. This technique can also be expressed based on linear functions $f(a_n) = b_1.a_n$. For example, students are given 2 kg orange for Rp[1]. 20.000, then students are asked to find the price for 4 kg orange. By using relationship numbers $\frac{2}{20.000} = \frac{4}{d}$, students can find 4 kg orange (d) which is $2 \times d = 4 \times 20.000 \Leftrightarrow d = 40.000$. Additionally, students also can solve this problem by finding the price of 1 kg orange which is Rp. 10.000. Then, students can apply linear function formula $f(4)=10.000\times4 \Leftrightarrow f(4)=40.000$. However, García found that there is a poor connection between the two domains in textbooks for this level. This research inspired another point in the present paper, namely the use of praxeological reference models to investigate explicit or implicit connections in textbooks which go across domains.

[1] The official currency of Indonesia is the rupiah (Rp).

At the end of this paper we consider, specifically, how textbooks relate the theme of proportion (in arithmetic, calculations involving scale and ratio) with the theme of similarity (in geometry). We consider both the extent to which explicit relations appear, and also the extent to which the geometrical theme of similarity goes beyond simply arithmetic computations. As pointed out by Cox (2013), many school exercises on similarity of geometrical figures can be done by doing routine computations with given dimensions, without much consideration of the geometrical configurations at hand. She stresses that the tasks given to students play an important role for the extent to which they develop a "truly geometrical" knowledge of similarity and investigates the use of tasks designed with this in mind. Cox's study further motivated our systematic study of the types of tasks on similarity that appear in (a selection of) mathematics textbooks.

Theoretical Framework and Research Questions

Our approach to textbook analysis is founded on the notion of didactic transposition from ATD, the anthropological theory of the didactic (Barbé, Bosch, Espinoza & Gascón, 2005; Chevallard, 1985, 1988; Chevallard & Bosch, 2014; Winsløw, 2011). This notion explains the exchange of knowledge between three institutional levels: the scholarly communities of mathematics (developing and maintaining scholarly mathematics), the level of "official school mathematics" (like ministerial committees, textbook publishers), and school mathematics in ordinary classrooms. We consider only the first two levels (and thus what is normally called external didactic transposition), but use a slightly more detailed model of "official school mathematics", as we distinguish three components that contribute to define it: the official curriculum, given some form of law or decree; the way school mathematics is presented in textbooks; and the official rules and practices for summative assessment (in our context, we have a national written examination in mathematics), see Figure 1. In the figure, we mean to indicate that textbooks are in principal designed to "deliver" the official curriculum, and the national examination is designed to assess the students' achievement of the curricular goals. At the same time, we want to study (in fact measure) the extent to which the exercise material in textbooks align with the assessment practices (concretely, actual exercises appearing in the national examination), suggesting a more direct relation between official assessment practices and textbook design.

To analyse the transposition of specific knowledge and practice between these different institutional levels, we need an epistemological reference model, i.e. an explicit and independent model of the knowledge at stake, to avoid taking the viewpoint of some particular level and also to make our analysis completely explicit. We present such a model for the basic (practice oriented) components of similarity in section 4.

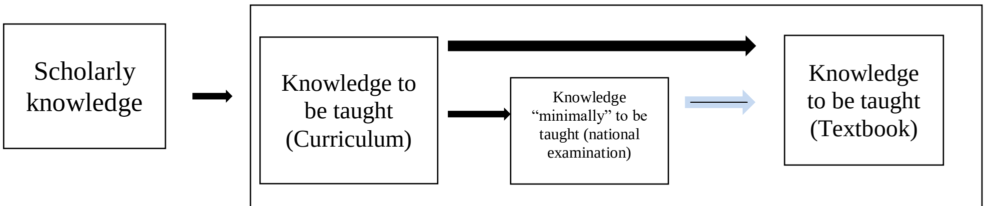


Figure 1. A detailed model of external didactic transposition

We use the notion of praxeology (Chevallard, 1999, 2002a; Chevallard & Sensevy, 2014; Winsløw, 2011) to describe mathematical practice and knowledge as our epistemological reference model. More details on this are available in the references just given, so we simply recall that a praxeology consists of four components: 1. a type of task (T); 2. a technique (τ); 3. a technology (θ); 4. a theory (Θ); thus a praxeology is a four-tuples (T/τ/θ/Θ), and be considered as a pair with two elements: praxis (T/τ), the practical block; and logos (θ/Θ), the theory block. We will use this notion to analyse the practice (examples, exercises) and the theory concerning similarity, as they appear in Indonesian lower secondary school textbooks.

Mathematical praxeologies in school do not only appear as isolated 4-tuples of the above kind. They are connected at different levels which ATD describe as discipline, domain, sector, theme, and subject (cf. the references above and Table 1). Here, the discipline is mathematics (as school subject), it consists of various areas of practice and knowledge like geometry and algebra (the domains); both disciplines and domains are, naturally, determined by the institution, although mathematics and its domain appear in very similar forms at schools across the world. The remaining levels are determined by praxeological levels: a sector is a collection of praxeologies unified by a common theory, etc (see Table 1).

Discipline: Mathematics			
Domain		Arithmetic	Geometry
Sector	Theory	Proportions	Plane Geometry
Theme	Technology	Direct proportion: Ratio and scale	Similarity of polygons
Subject	Technique	$r=x_2/x_1$	$\alpha = dist(Mx,My)/dist(x,y)$
	Type of task	Given x_1 and x_2, find r so that (x_1, x_2) and $(1, r)$ are in proportion "$(x_1, x_2) \sim (1, r)$".	Given two points and their images, find scale of magnification α.

Table 1. Two related examples of sub disciplinary levels.

In this study, the relation between proportion and similarity goes across domains, as it concerns themes from the arithmetic domain and the geometry domain. It may, for this reason, be harder to establish than two themes within the same domain. In general, there is a tendency that theme, even within the same domain, remain relatively isolated and unconnected in school mathematics Chevallard (2015). Connections across domains could be even rarer, even if they are natural from a scholarly point of view. With this background, we can now formulate our research questions for this study:

RQ1. What reference model can describe the theme of similarity in textbooks?

RQ2. What can be said based on the reference model, on the extent to which the similarity theme in textbooks aligns with the national examination in Indonesia? (Here, types of tasks are the main unit of analysis).

RQ3. What connections between the themes of similarity (in geometry) and proportion (in arithmetic and geometry) are explicitly established in the textbooks?

3. Context and Methodology

Formal education in Indonesia is divided into three levels: primary school (grade 1-6), lower secondary school (grade 7-9), and upper secondary school (grade10-12). Students normally start in primary school at age 7. Mathematics is one of four subjects (with Indonesian Language, English, and Social/science subject) that Indonesian students have to pass with certain minimum marks at the final national examination of lower secondary school. This makes some schools offer additional hours for these four subjects, but also the regular teaching could be expected to focus rather much on the final exams towards the end of lower secondary school. We examine this hypothesis concretely by comparing the types of tasks appearing in textbooks with those appearing in the national exam.

The Indonesian government provides an online resource for teachers and students (the website of BSE: http://bse.kemdikbud.go.id/). On this website, one can download certain textbooks which have been authorized by the government for free. There are also textbooks published by private companies which are authorized for use in schools. But as these are not free as the texts on the BSE website, so the online textbooks are widely used.

In this study, we analyse relevant parts of the online textbooks for mathematics in grade 7 (a total of three textbook: Nuharini and Wahyuni (2008), Wagiyo, Surati and Supradiarini (2008), and Wintarti et al. (2008)) and grade 9 (a total of six textbooks: Wagiyo, Mulyono and Susanto (2008), Agus (2007), Dris and Tasari (2011), Marsigit, Susanti, Mahmudi and Dhoruri (2011), Masduki and Budi Utomo (2007), Djumanta and Susanti (2008). To answer RQ2, we also analyse the national examination tasks in mathematics for the final exam in lower secondary school, in the period 2007-2015.

The first step in this textbook analysis is to identify chapters that treat similarity theme (typically, there is a chapter on "congruence and similarity"). Then, we analyse all textbook's discussion, examples and exercises on this theme. Concretely, we first review discussion part and analyse it epistemologically to find technology and theory of similarity (see section 4.1). Then, we consider examples and elaborate it using epistemological analysis to identify types of tasks and corresponding techniques which they present (see section 4.2), and then identify types of tasks found in the exercise sections (assuming that techniques presented in examples are to be used when possible). We simply classify examples and exercises in types of task: whenever we meet a new one, the model is extended with that type of task. Thus, the model is fitted to the data (here, examples and exercises).

The resulting analysis gives a kind of profile of textbook, as one can expect that much of students' practice in actual teaching will be built around these types of tasks and techniques, along with elements of technology and theory provided in the main text of textbooks. Naturally, at this school level, theory is often "informal", so that even key notions like similarity may not be given a completely explicit definition. Even so, we try to describe technology and theory that is located in the reference epistemological model section. Additionally, the resulting analysis can be used to capture the national examination task related to similarity theme.

Pertaining to connection analysis, we firstly analyse a potential connection by observing the commonality of praxis level in both proportionality and similarity theme. Then, we consider an 'explicit' theory level by noticing the assertion of a 'closeness' of the two sectors and the use of 'proportionality' term in similarity. In the 'explicit' praxis level, we examine the direct explanation of an arithmetic technique in similarity. In this case, we focus more on similarity theme in 9th grade because it is natural to recall knowledge from lower grade in higher grade.

Finally, we use the categorization of types of tasks to make a quantitative analysis of "mathematical praxis" proposed by different textbooks (to investigate RQ1), and mathematical praxis required by the national examination (to investigate RQ2). Finally, we analyse the explicit connections which the analysed textbook chapters point out between similarity and proportion (to investigate RQ3).

4. Reference Epistemological model for similarity

4.1. Elements of the theory of similarity

In scholarly mathematics, similarity may be defined in different theories and levels of generality. Concerning similarity of any two subsets in the plane, one precise definition could be given based on transformations with specific properties. In school mathematics, however, similarity is usually defined more directly in terms of the figures and their properties, and only for special cases like triangles and other polygons.

Here is a very common definition of similarity of polygons in secondary and even college level textbook s (Alexander & Koeberlein, 2014, p. 218): Two polygons are similar if and only if the two following conditions S1 and S2 are satisfied.

S1. All pairs of corresponding angles are congruent
S2. All pairs of corresponding sides are proportional

For triangles, S1 and S2 are equivalent, and so similarity in this special case could be defined using any of them. One can also treat similarity of polygons in general through the special case of triangles, by dividing the given polygons into triangles ("triangulation"), and then similarity of the polygons depends on whether they can be triangulated into similar "systems of triangles" (a very difficult notion to make precise). We do not go further into this as triangulation techniques do not appear in the textbooks (See Euclid's elements of geometry in Fitzpatrick, 2008, p. 176). On the other hand, we will notice what relations the textbooks explicate between triangle similarity and the general case, and in what order they are presented.

A main challenge with the above definition is the meaning of "corresponding"; it could be formalized in terms of existence of a bijection between the sides in the two polygons, satisfying that neighbouring sides are mapped to neighbouring sides etc.; it is an interesting task for undergraduate students to develop the details, which can also be found with various degrees of formalization in some textbooks (Lee, 2013, p. 213).

However, from a didactic point of view, such formalizations may not be relevant in lower secondary school. Here, the notion of "corresponding" will often appear as transparent, for instance when it is obvious from given figures how sides and angles in two polygons correspond to each other. But, this apparent transparency is somewhat problematic: the "obvious" correspondence *requires* that the polygons are similar (so that we can pair congruent angles, and then the sides); but if similarity is to be checked by deciding if the S1 and S2 are satisfied, there is evidently a vicious circle (we can only use the conditions if the answer is yes).

In lower secondary school, even more informal definitions are common, involving visual ideas like "same shape" and carried by a large range of examples. If a semi-formal definition involving "corresponding" sides or angles is given, examples are also likely to be the only explanation of "corresponding". The problem is that in these examples, one never sees "corresponding" angles that are not congruent, or "corresponding" sides that are not in equal ratio.

Corresponding angles can be described by ordering angles in both polygons and observe if the same angles appear. Then, corresponding sides can be paired by applying those sides that located between corresponding angles. Then, students can observe if the corresponding sides have equal ratios.

As we describe in the data analysis section, we analyse six Indonesian lower secondary textbooks. All textbooks give definition of similarity by using two components S1 and S2. To explain definition, the authors of five textbooks start with example of similarity in daily life situation, e.g. augmented photograph. Then, students are given two polygons and are asked to observe and/or to measure angles and sides in two given polygons. Then, students lead to the similarity definition. First, we can notice that students are taken for granted to understand the word ‘corresponding’. Second, students miss an opportunity to think about the meaning of similarity by themselves.

We also noticed that all of textbooks treat similarity into two parts; polygon similarity and triangle similarity. Furthermore, polygon similarity always appears first. To connect similar polygon and similar triangle, the authors remain students about definition of polygon similarity: S1 and S2. For example, Dris and Tasari (2011) wrote that “Triangle is also a polygon, and then the definition of polygon similarity is also valid for triangle similarity”. The authors also point out that similar triangle is a special case, because they only need to apply either S1 or S2. Additionally, similarity of triangles can be proved by finding two proportional pairs of sides and two equal angles (S3).

We now proceed to build the reference model for types of tasks occurring the textbooks and at the national examination. The construction of types of tasks are based on epistemological analysis, as explained in the methodology section.

4.2. Practice blocks related to polygon similarity as it commonly appears in Indonesian textbooks

We found four types of tasks in the textbooks, concerning polygon similarity. The description of each type of task is followed by the technique, and an example that is translated in English. Furthermore, there will be a discussion after each example is presented. Type of task 1 (T_1) is to decide if two given polygons are similar (Table 2). In the discussion we will also present some variations of T_1.

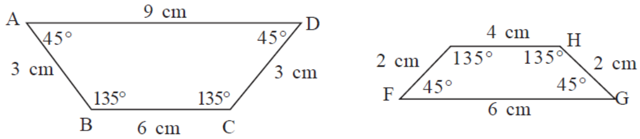

For the pair of figures above, determine if they are similar or not? (Masduki & Budi Utomo, 2007, p. 7)

Table 2. Task related to T_1.

This type of tasks may be generalised, with some caveats:

T_1: given two figures of polygons P and Q, with given side lengths and given angles, determine if the two polygons are similar.

τ_1: order the angles in P and Q from small to large (visual inspection), and see if the same angles appear. If so, verify S2 while regarding "sides between corresponding angles" as corresponding sides.

There are many variations of this type of task. "Variations"/special cases (e.g. where the "geometry" makes some of the definition superfluous). Some examples are given in Table 3.

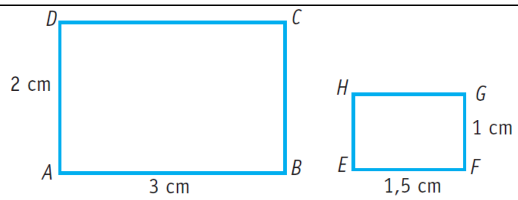
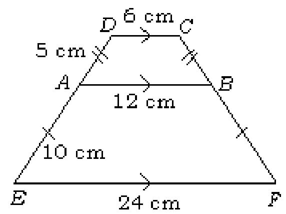
	
Determine if rectangle ABCD and rectangle EFGH above are similar or not? (Marsigit, Susanti, Mahmudi, & Dhoruri, 2011, p. 28)	Are ABCD and ABFE in the picture similar? (Wagiyo, Mulyono, Susanto, 2008, p. 4)

Table 3. Variations of T_1.

In the first task in Table 3, students are given two rectangles, with measures of the sides. In this case, it is trivially true that all angles are congruent. To decide on S2, students can order the side lengths in (smaller, larger) for the two rectangles and compute the ratios of smaller sides and of larger sides. They are equal, the rectangles are similar. While students determine congruent angles, using properties of rectangle (all angles are right angles) in the first task, students in the second task can determine congruent angles, using similar symbols that are given in each side.

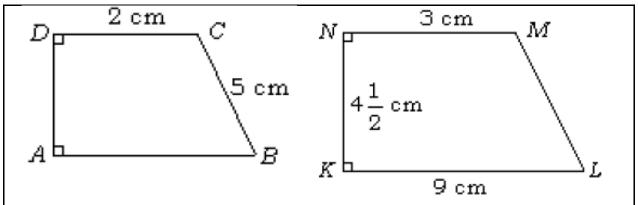
Tasks on two triangles with only angles or only side lengths given, do not belong to T_1. Thus, almost all tasks concerning similarity of triangles will not be of type T_1. In fact, the textbooks we consider all treat triangles apart from "general" polygons, which then have at least four sides.

Different from T_1 in which students are asked to decide on similarity, students in T_2 are given similar polygons with given angles. Then, they are asked to identify equal angles and corresponding sides. We can see the formulation of T_2 bellow.

T_2: given two similar polygons P and Q with given angles and given sides. Identify what angles and sides correspond to each other.

τ_2: identify the corresponding angles by ordering them. Identify the corresponding sides as sides between corresponding angles.

In fact, the technique for T_2 given in most textbooks is less precise or explicit. Mostly, the authors just give the answer without any explanation to solve the task. In this type of task, we will also include triangles under polygons because the same technique applies to find equal angles and proportional sides. An example of T_2 can be found in Table 4.



Observe trapezoid ABCD and trapezoid KLMN.
Given ABCD and KLMN are similar.
a) Determine a pair of equal angles
b) Determine a pair of proportional sides
(Wagiyo, Mulyono, Susanto, 2008, p. 8)

Table 4. Example of T_2.

Often, T_2 is followed by T_3 (see below) where students need some numbers to do calculation. T_2 is solved based on a visual representation. To solve T_3, students not only need a visual representation, but also a calculation technique (Table 5).

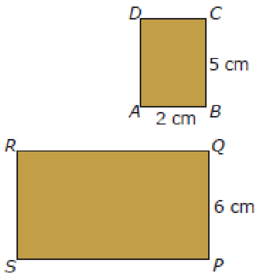
	If rectangle ABCD is similar to rectangle PQRS, determine the length of QR. answer: One condition of two similar figures is to have proportional corresponding sides. So, $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}, \frac{2}{6} = \frac{5}{QR}, 2QR = 30, QR = 15$ Thus, the length side of QR is 15 cm. (Djumanta & Susanti, 2008, p. 6)

Table 5. Examples of T_3.

The task in Table 5 asked students to find a missing side in one of two similar rectangles. Thus, it is guaranteed that the two rectangles have proportional corresponding sides. Firstly, students can use technique τ_2 to identify corresponding sides. Secondly, students can compare the lengths of corresponding sides, using the formula $\frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2}{q_2}$. Then, students can calculate the missing side by using the cross-product technique from proportion in arithmetic: $p_2 = \frac{p_1}{q_1}.q_2$. The task in Table 5 belongs to the following type of task:

T_3: given two similar polygons P and Q as well as the length p_1 of one side in P and the lengths q_1, q_2 of two sides in Q with p_1 and q_1 being corresponding, find the length p_2 of side in P that corresponds to q_2.

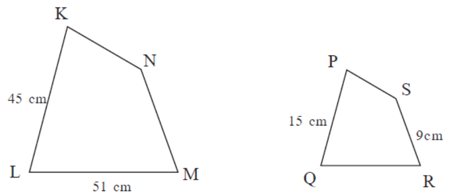
τ_3 : calculate the missing side using $p_2 = \frac{p_1}{q_1}.q_2$.

When two similar polygons are given, the authors also ask students to find a scale factor, as can be seen in Table 6.

T_4: given two similar polygons P and Q as well as lengths of sides $p_1, \ldots, p_n$ in P and lengths of sides $q_1, \ldots, q_n$ in Q. Determine the scale factor between P and Q.

τ_4: k is scale factor if $k = \frac{q_i}{p_i}$ for any corresponding lengths of sides q_i and p_i.

In T_4, Students are given two similar n-gons, where only two sides are known. The authors ask students to find the scale factor. First, students required to identify corresponding sides by using τ_2 (or it can be seen from a figure visually correspond, as in Table 6). In order to get the scale factor, students need to compute $\frac{q}{p}$for the pair (p, q) of corresponding sides. By observing the figure in the Table 6, we agree that the scale factor of KLMN and PQRS is at least 1, so the technique also requires to take p to be the larger of the two sides.



Two similar quadrilaterals KLMN and PQRS are given. Determine the scale factor between KLMN and PQRS.
Answer:
Because KLMN ~ PQRS, the ratio of corresponding sides is equal. It means that$\frac{KL}{PQ} = k$, with k the scale factor. Given KL=45 cm and PQ=15 cm.
So,$\frac{KL}{PQ} = \frac{45cm}{15cm} = 3$. The, the scale factor is $k = 3$.
(Masduki & Budi Utomo, 2007, p. 12)

Table 6. Example of T_4.

4.3. Practice blocks related to triangles similarity as it commonly appears in Indonesian textbooks

The similarity of triangles involves a number of special techniques, and we found three types of tasks for this case. We now present them as above. In tasks of type T_5, students are given two triangles with given angles and are asked to decide if the triangles are similar; this is solved by verifying the pairwise equality of the given angles (possibly computing one or two angles using that the sum of angles in a triangle is 180^0):

T_5**:** given two triangles S and T as well as their angles $\angle a_1, \angle a_2$ or $\angle a_1, \angle a_2, \angle a_3$ in S and $\angle b_1, \angle b_2$ or $\angle b_1, \angle b_2, \angle b_3$ in T, determine if S and T are similar.

τ_5**:** Under the hypothesis that the angles of each triangle are ordered from the smaller to the larger, check if $\angle a_1 = \angle b_1$, $\angle a_2 = \angle b_2$ and $\angle a_3 = \angle b_3$.

An example can be seen in Table 7.

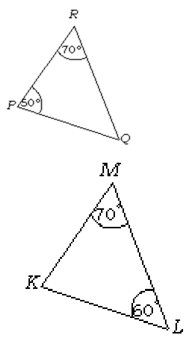
	Consider triangle PQR and triangle KLM from the figure above! Are ΔPQR ~ ΔKLM? answer: $\angle Q = 180^0 - (50^0 + 70^0) = 60^0$ $\angle K = 180^0 - (60^0 + 70^0) = 50^0$ Thus, ΔPQR ~ ΔKLM because the corresponding angles are equal (Wagiyo, Mulyono, Susanto, 2008, p. 13)

Table 7. Example of T_5

In T_6, students are also asked to decide on similarity. However, in this type of task, students are given the sides of two triangles. Students can order the sides from the shortest one to the longest one. Then, they can check if the corresponding sides of the two triangles have proportional ratio:

T_6: given two triangles S and T as well as sides s_1, s_2, s_3 in S and t_1, t_2, t_3 in T, determine if they are similar.

τ_6: order the sides in the two triangles ($t_1 \leq t_2 \leq t_3$etc.) and check if $\frac{t_1}{s_1} = \frac{t_2}{s_2} = \frac{t_3}{s_3}$. An example of T_6 can be found in Table 8.

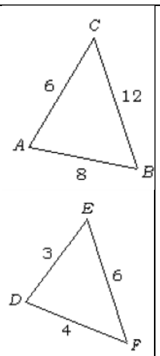
	Consider ΔABC and ΔDEFon the picture beside the text! Are ΔABC ~ ΔDEF? Answer: Proportion of the shortest lengths from two triangles is $\frac{AC}{DE} = \frac{6}{3} = \frac{2}{1}$. Proportion of the longest lengths from two triangles is $\frac{BC}{EF} = \frac{12}{6} = \frac{2}{1}$. Proportion of the third length from two triangles is $\frac{AB}{DF} = \frac{8}{4} = \frac{2}{1}$.Then, $\frac{AC}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DF} = \frac{2}{1}$. Thus, ΔABC ~ ΔDEF . (Wagiyo, Mulyono & Susanto 2008, p. 12, with voluntarily incorrect shapes of triangles)

Table 8. Examples of T_6

We also found type of task that asks students to decide on similarity for two triangles. Students are given two corresponding sides and one corresponding angle that is located between these sides. To decide similarity of triangles, students can compare the corresponding angles. Additionally, students need to compare the ratios of the pairs of corresponding sides.

T_7: given two triangles S and T as well as sides s_1, s_2, and $\angle a_1$ that is located between s_1 and s_2 in S and sides t_1, t_2, and $\angle b_1$ that is located between t_1 and t_2 in T. Determine if they are similar.

τ_7: check $\angle a_1 = \angle b_{1}$1 and $\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2}$.

An example of T_7 can be seen in the Table 9.

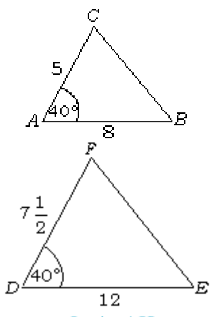
	Consider figure ΔABC and ΔDEF. Is $\Delta ABC \sim \Delta DEF$? answer: $\angle A = \angle D$ $\left.\begin{array}{l}\frac{AC}{DF} = \frac{5}{7\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \\ \frac{AB}{DE} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}\end{array}\right\}$ two sides that enclose the same angle. Thus, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (Wagiyo, Mulyono, Susanto, 2008, p. 13)

Table 9. Example of T_7

Finally, the last task requires τ_3 and some additional algebraic reasoning to identify a missing side in two similar triangles (Table 10).

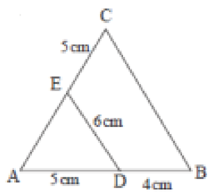
Given Δ ABC~ Δ ADE with DE//BC. Calculate the length of AE. 	Answer: we can use proportion of two intersecting lines segments that are intercepted by a pair of parallels DE//BC in Δ ABC: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ $\frac{5}{4} = \frac{AE}{5}$ $4 \times AE = 5 \times 5$ Thus, the length of AE is 6,25 cm Masduki and Budi Utomo (2007, p. 27)

Table 10. Example of T_8

The technique applied for the question in Table 10 gives rise to

T_8: given the figure 2 as shown with ΔADE~ΔABC, DE//BC, and given the length of three of four sides AE, AC, AD, AB. Find the remaining length.

τ_8: use $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{BD}$ and isolate unknown side.

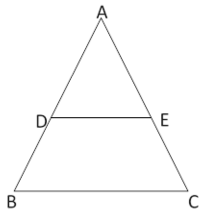


Figure 2. Figure of T_8

4.4. Methodological remarks

In this section, we will discuss practice block of similarity that is rarely occurred in Indonesian textbooks. Thus, it is not significant for quantitative analysis. Normally, this practice block appears as a few tasks from the textbooks which are not easy to categorize into the above types of task. In Table 11, students are given a pair of polygons without specific angles and sides and are asked to decide if they are always similar, maybe similar, or never similar. For example, an equilateral triangle always has sides of the same length. Since equal sides are enough to prove that two triangles are similar, two equilateral triangles are always similar. Additionally, students can also consider that equilateral triangle always has the same angles. This fact is also enough to prove that two triangles are similar Students need to produce 'cases' and use more theoretical knowledge on polygons to solve this task which is difficult to formulate into explicit technique. Thus, we decide to eliminate this task.

Consider the statements below. Write B if the statement is always true, K if the statement is sometimes true and S if the statement is always wrong. Two parallelograms are similar Two equilateral triangles are similar Two rhombuses are similar Two pentagons are similar Sulaiman et al. (2008, p. 7)

Table 11. A task without numbers

In Table 12, students are given only one polygon. Then, they are asked to find another polygon which is similar to the given polygon. We consider leaving this isolated task because this task does not appear in the five others. The task can be formulated as followed and the example can be seen in Table 12.

T: given a polygon P as well as $\angle a_1, \ldots, \angle a_n$ in P and sides p_1, …, p_n in P. Construct another polygon Q which is similar to P.

τ : choose a scale factor k to find the sides $q_1 = k.p_1, \dots, q_n = k.p_n$ if $\angle b_1, \dots, \angle b_n$ in Q are the same angle as $\angle a_1, \dots, \angle a_n$ in P.

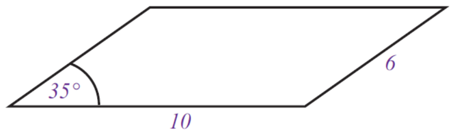
	Construct two other parallelograms that are similar to the given parallelogram. (Agus, 2007, p. 7)

Table 12. A task that is only found in one textbook.

The next example of unclassified task is when students need more than one prior knowledge that is found in only one textbook (Table 13).

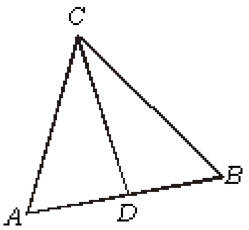
	Consider Δ ABC. CD is a bisector line, prove that $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DB}$. Wagiyo, Mulyono, Susanto (2008, p. 19)

Table 13. A task that needs more than one prior knowledge.

To solve the task in Table 13, students need to know what a bisector line is, and a visual imaginary to construct two similar triangles. Students also need a parallel line concept (Thales theorem) to prove similarity. In this case, similarity is not only connected to other topic, but also as a way to make a new theory $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{DB}$. However, we leave this task unidentified as it is only found in one textbook. Thus, this task is not very representative of public textbooks.

5. Quantitative survey of types of task in textbooks and in the national examination.

We want to emphasize that Table 14 shows only the numbers of task related to similarity. For each of the six textbooks, we classified all tasks related to similarity into the eight types of tasks (T_1, …, T_8) that we discussed above. In total, we analysed 422 tasks. In six textbooks, some of the tasks do not belong to these eight main types ('unidentified' in Table 14). These 'unidentified' tasks are typically more theoretical (cf. section 5.3).

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	Unidentified task
Wagiyo et al., grade 9 (2008)	10,4	16,5	49,6	0,9	7,8	4,3	3,5	3,5	5,2
Agus (2007)	11,7	8,8	41,1	0	0	0	17,6	0	20,6
Marsigit et al. (2011)	8,6	10,0	48,6	1,4	15,7	10,0	4,3	0	1,4
Dris, Tasari (2011)	13,8	7,5	65,0	1,25	5,0	1,25	0	0	6,25
Masduki, Budi Utomo (2007)	1,7	8,5	49,0	5,0	13,5	12,0	1,7	1,7	5,0
Djumanta, Susanti (2008)	3,1	14,0	53,1	7,8	6,3	3,1	3,1	0	9,4
	49,3	65,3	306,4	16,35	48,3	30,65	30,2	5,2	47,85

Table 14. A quantitative survey of textbooks analysis (percentage of all tasks).

As we can see in Table 14, there is a considerable variation in how frequently the types of task appear in each textbook. Having such a picture may orient teachers in their choice of textbook. For example, teachers who focus on students' getting a broad knowledge of the theme can choose a textbook that has all types of tasks. Teachers who focus more on advanced tasks can consider textbooks that have more theoretical tasks (unidentified task).

We also notice that in both examples and exercises, there are a few dominant types of task, namely T_3 and T_2. This observation aligns with the national examination tasks in which only T_3 and T_2 appear (Table 15). It is interesting to note that even though the curriculum does not prescribe specific types of task, textbooks seem to align with the national examination to some extent when it comes to the types of tasks they give priority. So, students (and teachers) can rely on the textbook to emphasize preparation for the national examination. At the same time, most of the textbooks cover a broader range of techniques than required at the examination.

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
2008			2					
2009			2					
2010			1					
2011		1	1					
2012			2					
2013		1	1					
2014		1	1					
2015		1	1					

Table 15. A quantitative survey of national examination.

6. Connections in the textbooks between similarity and proportion.

The analysis and comparison of textbooks obviously cannot limit itself to the analysis of practices in independent sectors and domains. Connections between domains are crucial for the students to learn mathematics as a coherent discipline. If we compare the practice blocks of proportion in arithmetic (Wijayanti & Winsløw, 2015) with the practice blocks of similarity in geometry (section 5.2), we notice that proportion and similarity share similar techniques:

T_3: Given two similar n-gons P and Q as well as one side p_1 in P and two sides q_1, q_2 in Q with p_1 and q_1 being corresponding, find the side p_2 in P that corresponds to q_2.
τ_3: calculate the missing side using $p_2 = \frac{p_1}{q_1}.q_2$.

This "missing side (T_3)" practice is very similar to a practice block which Wijayanti & Winslow (2017) found to be dominant in Indonesian textbooks' treatment of ratio and proportion in arithmetic (7^{th} grade), namely the following:

T: given a pair of numbers (x_1, x_2) and a third number y_1 find y_2 so that $(x_1, x_2)\sim(y_1, y_2)$
τ : calculate $y_2 = \frac{x_2.y_1}{x_1}$.

The two types of tasks have almost the same technique. The difference is that in the tasks of the similarity sector, figures are used to present the numbers coming from dimensions in figures, while in the proportion tasks; students are given numbers using quantities like price, weight, length and so on. In both cases, students often have to infer from the situation - geometrical or quantitative - that similarity, respectively proportionality, can be assumed.

The treatment of arithmetic in 7^{th} grade also includes a type of task which is very similar to T_4 above, namely the following (Wijayanti & Winsløw, 2015):

T: given x_1 and x_2, find r so that $(x_1, x_2)\sim(1, r)$.
τ : $r = x_2/x_1$ (finding the ratio).

The closeness of techniques from proportion and similarity suggest that it is didactically useful to build connections between them. However, we suppose that these potential connections might not be established for students, unless textbooks point them out explicitly, either by the text declaring a 'closeness' of the two sectors in general, by the use of specialized terms like 'proportion' in geometry, or directly at the time of explaining techniques such as the above.

As regards connection at the level of sectors, we focus on statements in the chapter on similarity that refer explicitly to the sector of proportion in 7^{th} grade arithmetic.

There is such an explicit statement in three textbooks (Djumanta & Susanti, 2008; Dris & Tasari, 2011; Marsigit et al., 2011). One example is in Figure 3:

Masih ingatkah kalian tentang konsep perbandingan yang telah dipelajari di kelas VII? Konsep perbandingan ini harus kalian pahami terlebih dahulu sebelum mempelajari konsep kesebangunan bangun datar, karena pada pembahasan konsep kesebangunan akan berhubungan dengan perbandingan.

Figure 3. One example of explicit statement (Dris and Tasari, 2011, p. 1)

'Do you still remember about the proportion concept that you have learnt in the 7th grade? The proportion concept is needed before we learn about polygon similarity, because similarity relates to proportion' (translated in English).

Declarations such as above merely indicate the existence of some connections between sectors. However, it says nothing about what this connection means. To clarify this situation, we will also elaborate more on the sector level. Proportion as a sector can be divided into two themes, namely ratio (scale) and proportion (Wijayanti & Winsløw, 2015). The appearance of these themes in similarity would mean that part of the technology of these themes is invested in the textbooks' discussion (technology) of similarity techniques. Concretely, we have looked for the use of specialized terms like 'scale' and 'proportion'. We found that all of the textbooks use the term of 'proportion' in defining similarity (an example in Figure 4).

Dua segitiga dikatakan sebangun jika sisi-sisi yang bersesuaian sebanding atau sudut-sudut yang bersesuaian sama besar.

Figure 4. One example of definition of similarity (Djumanta and Susanti, 2008)

'Two triangles are similar if the corresponding sides are proportional or the corresponding angles are equal' (translated in English).

Secondly, we found the term 'scale' in five textbooks (Djumanta & Susanti, 2008; Dris & Tasari, 2011; Marsigit et al., 2011; Masduki & Budi Utomo, 2007; Wagiyo et al., 2008). In the example, scale is used to relate proportion and similarity:

> '*Different sizes of a picture* can be obtained by enlarging or reducing the original picture by a certain factor. Thus, *pictures of different size* have the same shape and proportional sides. The numbers of proportional sides is often found using a scale. In other words, *the enlarged (or reduced) picture* and the original picture are similar'. (Translated in English, Wagiyo et al., 2008, p. 1)

Of course, the most concrete and direct connection between the sectors occur at the level of practice, that is when techniques from proportion are used for solving tasks on similarity. However, no textbooks explicitly point out such a connection e.g. in examples of how to solve task on similarity. But two textbooks (Djumanta & Susanti, 2008; Dris & Tasari, 2011) suggest such connection by investing a section called ‘prerequisite competences’ before treating examples of similarity task; this extra section simply shows some examples of proportion task of the types treated in grade 7. This way the authors suggest (without further explanation) that certain ‘familiar’ tasks and techniques are useful to recall before approaching the new types of task.

7. Conclusion

This study shows one way in which the anthropological theory of the didactic can be applied to analyse textbooks. As the theory part in the lower secondary textbooks is limited, we can mainly observe how the notion of similarity is introduced and then worked within tasks. We found that the authors focus more on how to use similarity to solve tasks than on treating in the notion itself.

The chapter on similarity always start with an informal definition of what it means for two (general) polygons to be similar. This reflects, in fact, the order suggested by the curriculum. We constructed a reference model based on the most common task on similarity found in the textbooks. We found a few tasks that cannot be categorized using these eight types of tasks but these are only found in a few textbooks. Thus, our reference model captures essentially the practical blocks found in the analysed texts. The eight types of task fall in two parts: polygon similarity and triangle similarity. We also found that the same types of tasks dominate in the textbooks and appear as dominative types of tasks in the national examination. Finally, we conclude that on the reference model can help us to see a potential connection between proportion and similarity. A few books explicitly establish connection at the level of the sectors and at the level of subjects (individual technique), while all have at least some explicit connection at the level of themes (use of terms). As we observed in the introduction section, connections in the textbooks maybe important to help students to see mathematics as connected body of knowledge.

Above all, this study wants to show how the ATD framework can be used to do comparative textbooks analysis. In fact, this framework allows us to compare the student’s activity proposed by textbooks in a somewhat neutral way based on epistemological analysis. In other words, the epistemological analysis is insufficient for an educational purpose. As a result, teachers can also apply the results of this study to choose what textbook to use for students to relate to the praxeologies of similarity.

After analysing the organization of the practice blocks, the analysis of themes becomes possible. Again, the ATD approach helps the researchers to see the connection or disconnections in a more objective way. Finally, the reference epistemological model was used to analyse the textbooks in relating to official documents such as the national examination and curriculum. This shows the role the national examination plays supplementary guideline for textbook authors and teachers when it comes to the types of task that they give priority.

Acknowledgements
This research was supported by the Ministry of Research, Technology and Higher Education of the Republic of Indonesia under Overseas Postgraduate Scholarships (BPP-LN).

Bibliography

AGUS, N. A. (2007), *Mudah belajar matematika 3: untuk kelas IX SMP/MTs* [Easy way to learn mathematics 3: for grade IX SMP/MTs], Retrieved from http://bse.invir.com/bse-smp9.html

ALEXANDER, D. C., KOEBERLEIN, G. M. (2014), *Elementary geometry for college students*. Independence (KY): Cengage Learning.

BARBÉ, J., BOSCH, M., ESPINOZA, L., GASCÓN, J. (2005), Didactic restrictions on the teacher's practice: The case of limits of functions in Spanish high schools, *Educational Studies in Mathematics*. Volume 59, Issue 1–3, p. 235-268.

CHEVALLARD, Y. (1985), *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble, La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1989). On didactic transposition theory: some introductory notes. In *Proceedings of International Symposium on Selected Domains of Research and Development in Mathematics Education, 1989* (pp. 51-62). Bratislava.

CHEVALLARD, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **19(2),** 221-265.

CHEVALLARD, Y. (2002a), Organiser l'étude 1. Structures et fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e École d'été de Didactique des Mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (2002b), Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e École d'été de Didactique des Mathématiques* (pp. 41-56), Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (2006), Steps towards a new epistemology in mathematics education. In *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30).

CHEVALLARD, Y. (2015), Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: a Case for an Oncoming Counter Paradigm. *In Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical* Education, 173-187, Springer, Cham.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. (2014), Didactic transposition in mathematics education, *Encyclopedia of Mathematics Education*, 170-174, Springer Netherlands.

CHEVALLARD, Y., SENSEVY, G. (2014), Anthropological approaches in mathematics education, French perspectives. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, 38-43, Springer Netherlands.

COX, D. C. (2013), Similarity in middle school mathematics: at the crossroads of geometry and number, *Mathematical Thinking and Learning*, **15(1)**, 3-23.

DJUMANTA, W., & SUSANTI, D. (2008), *Belajar aktif dan menyenangkan untuk SMP/MTs kelas IX* [Active and joyful learning for lower secondary school grade IX]. Retrieved from http://bse.invir.com/bse-smp9.html

DRIS, J., & TASARI. (2011), *Matematika untuk SMP dan MTs kelas IX* [Mathematics for lower secondary school grade IX], Retrieved from http://bse.kemdikbud.go.id/.

FITZPATRICK, R. (2008), *Euclid's elements of geometry*, Retrieved from http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Elements.pdf.

GARCÍA, F. J. (2005), *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Doctoral dissertation), Universidad de Jaén.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S., GIRALDO, V., SOUTO, A. M. (2013), The introduction of real numbers in secondary education: an institutional analysis of textbooks, *Research in Mathematics Education*, **15(3)**, 230-248.

HERSANT, M. (2005), La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui, *Repères IREM*, **59**, 5-41.

JONES, K., & FUJITA, T. (2013), Interpretations of national curricula: the case of geometry in textbooks from England and Japan, *ZDM*, **45(5)**, 671-683.

LEE, J. M. (2013), *Axiomatic Geometry*. Washington: American Mathematical Society.

MARSIGIT, M., SUSANTI, M., MAHMUDI, A., DHORURI, A. (2011), *Matematika 3 untuk SMP/MTs kelas IX* [Mathematics 3 for lower secondary school grade IX]. Retrieved from http://bse.invir.com/bse-smp9.html.

MASDUKI, & BUDI UTOMO, I. (2007). *Matematika: untuk SMP & MTs kelas IX* [Mathematics: for lower secondary school grade IX], Retrieved from http://bse.invir.com/bse-smp9.html/.

MIYAKAWA, T. (2012). Proof in geometry: a comparative analysis of French and Japanese textbooks. In Tso, T. Y. (Ed.). *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, pp. 225-232. Taipei, Taiwan: PME.

NUHARINI, D., & WAHYUNI, T. (2008). *Matematika 1: konsep dan aplikasinya: untuk kelas VII ,SMP/MTs I* [Mathematics 1: concept and application for grade 7, lower secondary school I], Retrieved from http://bse.invir.com/bse-smp9.html.

SEARS, R., & CHÁVEZ, Ó. (2014), Opportunities to engage with proof: the nature of proof tasks in two geometry textbooks and its influence on enacted lessons, *ZDM*, **46(5)**, 767-780.

WAGIYO, A., MULYONO, S., SUSANTO, S. (2008), *Pegangan belajar matematika 3: untuk SMP/MTs kelas IX* [Book for studying mathematics 3: for grade 9], Retrieved from http://bse.invir.com/bse-smp9.html.

WAGIYO, A., SURATI, S., SUPRADIARINI, I. (2008), Pegangan belajar matematika 1 : untuk SMP/MTs kelas VII [*Book for studying mathematics 1 : for lower secondary school VII*], Retrieved from http://bse.invir.com/bse-smp9.html.

WIJAYANTI, D. (2015), Relating arithmetical techniques of proportion to geometry: The case of Indonesian textbooks, in K. Krainer, M. Lokar (Eds.) *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 9) (p. 3157-3163). Prague : Charles University. On line at https://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/index.php?slab=proceedings

WIJAYANTI, D., & WINSLØW, C. (2017). Mathematical practice in textbooks analysis: Praxeological reference models, the case of proportion. *REDIMAT*, *6*(3), 307-330.

WINSLØW, C. (2011), Anthropological theory of didactic phenomena: Some examples and principles of its use in the study of mathematics education, In M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage & M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD, An overview* *of ATD, CRM Documents, vol. 10* (pp. 533-551). Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.

WINTARTI, A., HARTA, I., RAHAJU, E. B., WIJAYANTI, P., SULAIMAN, R., MAESURI, S., BUDIARTO, M. T. (2008), *Contextual teaching and learning matematika: sekolah menengah pertama/ madrasah tsanawiyah Kelas VII* [Contextual teaching and learning mathematics: lower secondary school grade 7]. Retrieved from http://bse.invir.com/bse-smp9.html.

DYANA WIJAYANTI
University of Copenhagen
dyana.wijayanti@ind.ku.dk

Sultan Agung Islamic University
dyana.wijayanti@unissula.ac.id

ZAHID **ELM'HAMEDI**

EFFETS DU VOCABULAIRE ET DE L'AMBIGUÏTE LINGUISTIQUE SUR LA COMPREHENSION DES TESTS STATISTIQUES

Abstract. Effects of vocabulary and linguistic ambiguity on the understanding of statistical tests. It is widely recognized, at least in the university medium, that the teaching of statistical tests is difficult for the teacher as well as for the learner. Indeed, the literature of educational research on this tool has revealed that there are various difficulties, often associated to some misconceptions, which are encountered at every age and level of expertise. The research findings show that a student cannot generally understand and describe the fundamental ideas underlying the practice of statistical tests. Instead, students generally rely on mechanical calculus, which is based much more on memorization and computation, than on reflection and interpretation. The aim of this paper is to present some factors that bring difficulties in apprehension to this practice and that must be considered in its teaching. Very specifically, we focused in this paper on the effect that the *vocabulary and linguistic ambiguity factors,* used in statistical tests, could have on the interpretation by our students of the notions and expressions conveyed during the teaching of this practice.
Keywords: Statistical tests – Misconceptions – Frequentist approach – Bayesian approach – Linguistic ambiguity.

Résumé. Il est largement reconnu, du moins dans le milieu universitaire, que l'enseignement des tests statistiques exige de relever de grands défis, aussi bien pour l'enseignant que pour l'apprenant. En effet, une littérature abondante de travaux de recherches en didactique sur ce sujet indique diverses difficultés, souvent en rapport avec des conceptions erronées, que l'on peut rencontrer à tous les âges et à tous les niveaux d'expertise. Les conclusions de ces recherches s'accordent sur le fait qu'en général, un étudiant ne peut pas expliciter les fondements de la pratique de cet outil statistique, et que seul un calcul machinal est souvent restitué, résultant beaucoup plus de mémorisation que de réflexion et d'interprétation. L'objectif de cet article est de présenter un ensemble de facteurs qui sont susceptibles de contribuer aux difficultés d'appréhension de ce sujet et qui doivent être pris en considération lors de son enseignement. En particulier, nous nous sommes focalisés dans cet article sur l'effet que pourraient avoir *les facteurs liés au vocabulaire* et à *l'ambiguïté linguistique*, présents dans la pratique des tests statistiques, sur l'interprétation par nos étudiants des notions et des expressions véhiculées lors de l'enseignement de cette pratique.
Mots-clés : Tests statistiques – Conceptions erronées – Approche fréquentiste – Approche bayésienne – Ambiguïtés linguistiques.

1. Introduction

Il y a principalement deux cadres scientifiques dans lesquels la pratique des tests statistiques joue un rôle très important. Le premier, désigné comme la « *statistique de production* » ou « *statistique industrielle* », inclut le domaine du « *contrôle de qualité* » et, ce qui est pareil, vise l'aide à la prise de décision. Le deuxième est celui de la « *recherche scientifique* »; il a pour objectif une production de connaissance.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 24, p. 133 - 181.

Etablir une distinction entre ces deux axes demeure une tâche délicate et prêtant à discussion. Grosso modo, ces deux axes se basent respectivement sur la théorie des « *tests d'hypothèses* (ou *de décision*) » de Neyman[1]-Pearson[2] et sur la théorie des « *tests de signification* » de Fisher[3]. Malheureusement, ce qui est généralement présenté aujourd'hui dans l'enseignement de la pratique des tests statistiques et ce dont traitent la plupart des ouvrages, même spécialisés en statistique, est un amalgame d'idées dérivant de ces deux théories considérées comme s'excluant mutuellement, sous la dénomination de « *logique hybride de l'inférence scientifique* » ou « *tests de signification de l'hypothèse nulle* » (Gigerenzer, 1993; Zaki, Elm'hamedi, 2009; Elm'hamedi, 2010). Cet amalgame est, en quelque sorte, un assemblage qui cache toujours son origine hybride et qui se présente souvent comme la logique monolithique et la recette unique de l'inférence scientifique toute entière (Gigerenzer, 2004), considérée comme un rituel.

Néanmoins, la pratique des tests statistiques[4] est devenue indispensable, et sur elle repose largement l'analyse statistique des données dans plusieurs champs disciplinaires comme la psychologie, la sociologie, l'économie, la médecine, l'écologie, le droit, etc. Malgré cela, il est largement reconnu, par comparaison avec les différents concepts de la boîte à outils statistiques, que cette pratique est source de conceptions erronées diverses, constituant un sujet difficile aussi bien pour l'enseignant que pour l'apprenant (Oakes, 1986; Falk, Greenbaum, 1995; Haller, Krauss, 2002). La littérature statistique montre de manière évidente l'existence de conceptions erronées chez les utilisateurs des tests statistiques, à tous les âges et à tous les niveaux d'expertise (Gigerenzer, 1993; Vallecillos, 1995; Poitevineau, Lecoutre, 2001; Haller, Krauss, 2002; Zendrera, 2004; Batanero, Diaz, 2006; Elm'hamedi, 2010; …). De plus, il existe de nombreux travaux qui se sont focalisés sur les difficultés d'application des tests statistiques en recherche expérimentale et particulièrement en sciences de l'éducation, découlant de leur utilisation incorrecte ou d'une interprétation fautive des résultats obtenus. Nous pouvons, à titre d'exemples, citer les travaux effectués par Morrison et Henkel (1970), Thompson(1996), Poitevineau(1998), Zendrera(2003), Zaki et Elm'hamedi (2009, 2013).

Évidemment, plusieurs facteurs sont générateurs d'une telle difficulté concernant les tests statistiques. Ainsi, nous sommes convaincus que l'obstacle de leur enseignement ne sera surmonté qu'à l'issue d'une étude approfondie des causes

---

[1] Jerzy Neyman: (1894 - 1981), statisticien et mathématicien polonais.
[2] Egon Pearson: (1895 - 1980), statisticien anglais, fils de Karl Pearson.
[3] Sir Ronald Aylmer Fisher: (1890 - 1962), statisticien anglais.
[4] Tout au long de cet article, l'expression « tests statistiques » se rapporte à la fois au test de signification de Fisher et au test d'hypothèses de Neyman-Pearson.

sous-jacentes. Il nous apparaît que les facteurs de difficultés sont pour la plupart d'entre eux raisonnablement repérés et bien compris, ou pour le moins reconnus. Mais quelques facteurs restent méconnus, voire ignorés. Cet article est focalisé sur l'exploration de l'effet chez des étudiants en dernière année de licences scientifiques, relevant d'universités du Maroc, de deux facteurs particuliers, souvent déconsidérés et négligés dans les études exploratoires publiées sur les éventuelles incompréhensions relativement à la statistique en général et de concepts associés aux tests statistiques en particulier. Depuis plusieurs années, ces deux facteurs ont suscité notre curiosité, ainsi qu'une préoccupation et un intérêt particuliers. Il s'agit spécifiquement du « *vocabulaire* » en usage dans la pratique des tests statistiques et de « *l'ambiguïté linguistique* » que les expressions habituellement utilisées lors de la mise en œuvre des procédures peuvent véhiculer.

Remarquons que le développement des concepts est intimement dépendant du vocabulaire qui est utilisé afin de les mobiliser dans les procédures sous-jacentes. Nous ne pouvons rien savoir des concepts sans les mots qui les désignent. Et ceux-ci peuvent être chargés de sens dans le langage courant. Pointons au passage le cas de l'étudiant qui lie toujours le mot « *population* » à un ensemble *d'êtres humains* seulement. De plus, les étudiants ont des difficultés notoires à appréhender les concepts statistiques, ne comprenant pas bien les concepts de base, que nous indiquerons plus avant dans cet article. D'une manière équivalente, ceci peut être exprimé de la façon suivante : « *Les étudiants ne maîtrisent pas bien le vocabulaire de base, et de ce fait éprouvent des troubles au contact de concepts plus complexes* ». Dans la plupart des cas, le vocabulaire statistique (de base) utilise des mots de tous les jours, mais souvent avec des significations spécialisées. Les étudiants devront alors accomplir deux opérations intellectuelles : connaître la signification spécialisée et se représenter la signification courante. Plus encore, beaucoup de ces concepts de base sont superficiellement simples, mais ils sont en réalité beaucoup plus complexes ou subtils. Par exemple, le terme « *population* », que nous avons déjà évoqué, peut signifier, dans le langage de tous les jours, soit l'ensemble des gens qui vivent dans un pays, soit leur effectif. En statistique, dans le cadre d'une étude donnée, la population désigne un ensemble (Mclean, 2002), celui des éléments considérés, nommés alors les individus de l'étude.

Ainsi, le caractère facilement trompeur du vocabulaire utilisé dans les tests statistiques constitue l'un des principaux facteurs induisant des difficultés de compréhension de ce concept. Ainsi, les deux mots « *Prouver* » et « *Vrai* », habituellement employés dans la pratique de tests statistiques, constituent à eux seuls des facteurs susceptibles de contribuer à une mauvaise appréhension de cette pratique (Mclean, 2002). On affirme familièrement : « *Vous pouvez prouver quelque chose à l'aide de la statistique inférentielle !* ». Mais la réalité est autre : « *Vous ne* *pouvez rien prouver*[5] *à l'aide de cette discipline !* ». Il s'agit d'un problème sémantique. En effet, pour les mathématiciens (incluant beaucoup de statisticiens), prouver une assertion, signifie justifier sa véracité par une démonstration rigoureuse. Pour les autres chercheurs, notamment en sciences humaines, qui utilisent habituellement les tests statistiques dans leurs recherches, cela signifie plutôt : « *l'étude faite va à l'appui de l'assertion !* ». Notons au passage que même la démonstration mathématique qu'on croyait être une preuve universelle et indiscutable, ne l'est pas ainsi parmi les mathématiciens. Dans ce sens, Lamrabet (2001) a pu établir une liste non exhaustive d'expressions mettant en évidence le caractère relatif des démonstrations mathématiques. On peut citer comme exemple le caractère relatif « *à une époque donnée* », « *au courant de pensée mathématique adopté (formalisme, constructivisme, ...)* », « *aux moyens utilisés pour produire la démonstration (automatique, expérimental, ...)* », « *au degré d'exigence du lecteur* », ...

Pareillement, la notion de preuve, utilisée dans des domaines où les tests statistiques jouent un rôle très important (le domaine de droit, par exemple) n'est pas absolue. Une déclaration peut être considérée comme prouvée si l'argumentation avancée en sa faveur semble être « *assez solide* » et est une base satisfaisante pour une prise de décision. Ainsi, si on « *prouve* » qu'une personne est coupable d'un acte criminel, cela signifie que la « *preuve* » avancée contre cette personne est assez solide, allant au-delà du doute raisonnable, et qu'il apparaît donc justifié de prononcer une condamnation. « *Preuve* » dans ce cas signifie donc « *preuve au-delà du doute raisonnable* » et non pas « *au-delà du doute* ».

La tendance à concevoir un test statistique de façon mécanique est accentuée dans l'esprit de plusieurs étudiants et professionnels. Il est clair que des outils mathématiques, souvent complexes, sont utilisés dans la pratique des tests statistiques, mais la situation reste la même que dans le domaine de l'architecture, par exemple, où les calculs mathématiques sont seulement des aides à la réalisation du design d'un bâtiment. Le vocabulaire généralement utilisé, à savoir l'utilisation des mots « *prouver* » et « *vrai* » peut tromper. Le fait de parler de valeurs vraies d'un paramètre, de preuve, de règles de décision et de niveaux de signification 1%, 5%, est aussi trompeur. Un test statistique n'est pas directement concerné par la valeur d'un paramètre, mais par les modèles probabilistes qui traduisent au mieux la situation étudiée (Mclean, 2000). Accepter un modèle associé à une valeur spécifique d'un paramètre, signifie seulement qu'il est raisonnable de fonder nos prédictions sur un tel modèle ; le rejeter signifie qu'il est préférable d'utiliser un autre modèle, associé à une valeur différente de ce paramètre.

[5]Dans cette phrase, le mot « *prouver* » est utilisé dans le sens strict qu'il a en mathématiques.

D'un autre côté, l'ambiguïté linguistique constitue aussi un facteur majeur contribuant aux conceptions erronées relatives aux tests statistiques, en particulier dans l'utilisation des probabilités conditionnelles. Falk et Greenbaum (1995) ont signalé que ce facteur a été noté comme problématique pour comprendre de manière générale des relations à caractère probable (Bar-Hillel, Falk, 1982; Falk, 1992; Gillman, 1992; Margolis, 1987; Nickerson, 1996). De manière particulière, la distinction entre les deux probabilités conditionnelles[6] $P(\mathcal{D}|H)$ et $P(H|\mathcal{D})$ devient assez compliquée à cause du langage utilisé par les tests statistiques.

Considérons, par exemple, les deux expressions suivantes : « *La probabilité d'obtenir les données* $\mathcal{D}$ *par hasard* » et « *La probabilité que les données* $\mathcal{D}$ *soient obtenues par hasard* ». Il n'est pas surprenant que ces expressions soient considérées par beaucoup de gens comme traduisant une même signification. Pourtant, la première expression signifie : « *la probabilité qu'un processus considéré comme aléatoire, appelé H, peut produire* $\mathcal{D}$ », alors que la seconde signifie : « *la probabilité qu'un événement connu* $\mathcal{D}$*, soit produit par un processus aléatoire H* ». La première expression fait alors référence à $P(\mathcal{D}|H)$, et la seconde à $P(H|\mathcal{D})$.

Il est aussi facile de trouver des expressions relatives à des relations à caractère probabiliste qui peuvent conduire à plus d'une seule interprétation. Par exemple, l'expression : « *la probabilité que le hasard produise les données* $\mathcal{D}$ », peut être considérée comme étant équivalente à : « *sachant qu'un processus est aléatoire, la probabilité que les données* $\mathcal{D}$ *soient produites* ». Mais, il peut aussi signifier : « *la probabilité qu'un processus aléatoire puisse produire les données* $\mathcal{D}$ ». Soit H désignant le processus aléatoire, la première expression peut être représentée par $P(\mathcal{D}|H)$, et la seconde peut être représentée par $P(H\cap\mathcal{D})$ (ou $P(H).P(\mathcal{D}|H)$). Cette erreur est souvent commise en matière de tests statistiques. Par exemple, la définition de la puissance est : « *la probabilité de rejeter avec raison l'hypothèse nulle* ». Elle signifie donc la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle, sachant qu'elle est fausse. Cependant, cette dernière interprétation n'est pas la seule, la puissance pourrait aussi être interprétée comme étant « *la probabilité de rejeter avec raison l'hypothèse nulle* », qui est, en fait, la probabilité conjointe des deux événements : « *l'hypothèse nulle est fausse* » *et* « *on rejette l'hypothèse nulle* ».

Pareillement, l'ambiguïté linguistique associée à l'expression « *erreur de 1ère espèce* » contribue aussi à la tendance à interpréter le niveau de signification, souvent

[6] $\mathfrak{D}$ désigne un événement déterminé en fonction des données construites ou non construites (exemples: les données construites ou les valeurs plus fortes dans le cas des tests de signification, et la région critique (RC) ou éventuellement la région d'acceptation de H_0 (RA) dans le cas des tests d'hypothèses), et H désigne l'événement « l'hypothèse nulle H_0 est vraie » ou bien l'événement « l'hypothèse alternative H_1 est vraie ».

noté α, qui est égal à la probabilité de la région critique RC sachant que l'hypothèse H_0 est vraie ($P(RC \mid H_0)$), comme étant (*erronément*) égal à la probabilité $P(H_0 \mid RC)$. Cette erreur vient du fait que le concept de niveau de signification est souvent présenté aux étudiants et aussi introduit dans la plupart des ouvrages, même spécialisés en statistique comme étant égal à la probabilité de l'erreur de 1ère espèce. Cette interprétation (ou cette présentation) se forme facilement dans les esprits des étudiants et semble être la racine de la confusion subséquente, étant donné que α est une probabilité conditionnelle bien définie, alors que l'expression « *erreur de 1ère espèce* » n'est pas conditionnellement formulée. De même, les étudiants savent que rejeter H_0 et commettre une erreur sont usuellement associés. Cette ambiguïté linguistique permet à la combinaison exacte des deux événements : « *rejet de H_0* » et « *commettre une erreur* » d'être ouverte à différentes interprétations : s'agit-il de leur conjonction ou d'un événement sachant le second ? Maintenant, quand H_0 est rejetée et que nous voulons vérifier la probabilité de l'erreur commise, nous nous demandons de quel type d'erreur il s'agit. Naturellement, le concept lâche « *erreur de 1ère espèce* » vient immédiatement à l'esprit. Ainsi, la distinction cruciale entre les deux directions opposées des probabilités conditionnelles devient floue via la médiation de l'expression mal définie « *erreur de 1ère espèce* ». L'emploi de cette expression de médiation devrait être accompagné de sa probabilité, sinon il est préférable d'invoquer le risque de première espèce. Comme des manuels scolaires, ouvrages et enseignants le signalent souvent, « *l'événement conditionnel* » $(A \mid B)$ n'est pas à proprement parler un concept légitime. Ce sont les probabilités de cet événement (c'est-à-dire, les probabilités conditionnelles) qui lui donnent une valeur convenable et sa légitimité, et permettent de le définir sans équivoque comme un rapport de probabilités d'événements. « *L'erreur de 1ère espèce* » est ainsi une expression malheureuse en tests statistiques (Falk, 1986).

Nous procéderons tout au long de cet article à une étude exploratoire sur l'effet que pourraient impliquer *le vocabulaire* et *l'ambiguïté linguistique* sur la compréhension des concepts qui fondent les tests statistiques chez les étudiants susmentionnés. Mais auparavant, nous allons, dans un premier temps, partager avec le lecteur les autres facteurs, que nous estimons générateurs de difficultés d'appréhension. Signalons que nous avons pu déduire ces facteurs, qui se présentent souvent de manière assez subtile, d'une réflexion approfondie et de longue haleine, ainsi que d'une revue de littérature très diverse en rapport avec les tests statistiques. Cela a constitué pour nous un défi à surmonter un problème didactique qui n'a jamais cessé de nous préoccuper et avec lequel nous avons vécu depuis plusieurs années. Signalons qu'il existe des détracteurs qui critiquent l'usage des tests statistiques en recherche expérimentale, en proposant sa pure et simple exclusion de l'enseignement ou au moins son accompagnement par d'autres méthodes statistiques telles que les intervalles de confiance, la taille de l'effet, etc. Mais on doit prendre en considération, d'une part, que la pratique des tests statistiques a eu cours dans le passé, continue d'être utilisée aujourd'hui et restera certainement en usage pour plusieurs années encore, et d'autre part, que cet outil est théoriquement solide, historiquement enraciné et qu'il est utilisé très généralement comme il devrait effectivement l'être (Mclean, 2002 ; Zaki, Elm'hamedi, 2013). Plusieurs alternatives aux tests statistiques ont été proposées. Cependant, chacune peut être évaluée pour sa capacité à remplacer ou compléter la procédure des tests statistiques d'aujourd'hui. Pareillement, il est à signaler qu'une théorie pourrait être considérée favorable jusqu'à ce qu'une autre théorie prouve elle-même être plus désirable scientifiquement et méthodologiquement. Cet article s'inscrit donc dans le cadre de l'idée réaliste suivante : « *sachant que les tests statistiques continueront d'être utilisés dans le futur, qu'est-ce qui peut être fait pour améliorer leur utilisation ?* ». Il est ainsi écrit avec l'idée que les tests statistiques constituent « *les meilleures* » alternatives disponibles dans la boîte à outils de l'inférence statistique.

2. Autres facteurs susceptibles d'avoir des effets sur la compréhension des tests statistiques

Les facteurs contribuant aux difficultés de compréhension des tests statistiques sont multi-dimensionnelles et assez nombreux. Ils reflètent la multitude de difficultés et de conceptions erronées détectées chez les apprenants et les utilisateurs à tout niveau d'expertise. Comme nous l'avons signalé dans l'introduction de ce travail, nous allons présenter dans cette section des facteurs autres que *le vocabulaire* et *l'ambiguïté linguistique* sur lesquels repose la présente étude. Nous avons répertorié ces autres facteurs en cinq classes essentielles, que nous présenterons dans ce qui suit, à savoir : « *la complexité de la nature de l'inférence statistique* », « *la complexité de la nature de l'outil des tests statistiques* », « *les pratiques usuelles d'enseignement de l'outil des tests statistiques* », « *l'usage aveugle des logiciels spécialisés en statistique* » et enfin « *les facteurs psychanalytiques* ».

2.1. La nature complexe de l'inférence statistique

Contrairement à la statistique descriptive, la statistique inférentielle sert, d'une part, à évaluer des hypothèses statistiques, et d'autre part, à estimer des paramètres de populations, et ce sur la base d'un ensemble de caractéristiques très spécifiques (Elm'hamedi, 2010). Elle est ainsi caractérisée par un ensemble de propriétés essentielles. Nous citerons, à titre d'exemples, les trois éléments suivants : « *la multitude d'écoles* » (ou de théories) pour traiter une situation-problème donnée, « *la non-unicité* » du résultat fourni par l'ensemble de ces écoles, et l'obligation d'utilisation d'une notion très complexe appelée « *jugement* » pour tirer une conclusion, quelle que soit la théorie utilisée.

2.1.1. La multitude d'écoles

Actuellement, nous avons *au moins* quatre écoles différentes de pensée de référence concernant la statistique inférentielle. Il y a « *l'approche fishérienne* », « *l'école de*

Neyman-Pearson », « *la théorie bayésienne* » et celle de « *vraisemblance* ». Une description assez détaillée et une évaluation entière de chacune d'elles sont présentées dans Oakes (1986). Il faut noter qu'aucune de ces approches statistiques n'est sans controverses et ni sans critiques. Toutefois, chaque école est un paradigme à part ayant son propre raisonnement, sa propre logique, sa propre force de preuve, ses concepts spécifiques, sous-jacents aux résultats auxquels il peut aboutir. Plus encore, dans une situation donnée d'inférence statistique, les résultats auxquels on pourrait aboutir pourraient éventuellement varier d'une école à l'autre, étant donné qu'elles se basent toutes sur un élément fondamental caractérisant la statistique inférentielle qui est « *le jugement argumenté* ».

2.1.2. La non-unicité du résultat fourni

Le caractère de non-unicité relatif au résultat fourni par application des outils de l'inférence statistique est un obstacle pour les étudiants, voire même les professionnels de la statistique. Ces derniers continuent à croire que la statistique inférentielle est semblable à la statistique descriptive ; de ce fait, ils considèrent que les résultats de cette discipline devraient *a priori* revêtir un caractère absolu. Cela est sans doute à l'origine de certaines conceptions erronées chez les différents utilisateurs. En fait, la statistique inférentielle utilise la notion de probabilités, et en particulier celle des probabilités conditionnelles : la probabilité des hypothèses H sachant des données $\mathfrak{D}$ ($P(H|\mathfrak{D})$) dans le cas de la statistique bayésienne et la probabilité des données sachant les hypothèses ($P(\mathfrak{D}|H)$) dans le cas des théories de Fisher et de Neyman-Pearson. Ces nuances introduites dans les paradigmes de base de ces différentes théories contribuent largement à la non-unicité du résultat fourni face à une situation donnée.

2.1.3. La complexité de la tâche de formulation de l'élément de jugement

Outre la non-unicité du résultat fourni par les différentes théories de la statistique inférentielle, *le jugement* du statisticien, qui s'appuie sur sa connaissance du domaine de recherche travaillé, reste prépondérant pour la détermination d'un résultat. Du point de vue de l'enseignement, les étudiants sont souvent en attente de règles de décision rigides et habillées de fer, telles par exemple : « *si la taille n de l'échantillon est supérieure ou égale à 30 alors la loi de la distribution dans l'échantillon sera normale, et si n est inférieur à 30 alors elle ne le sera pas* », ou encore « *si la p-valeur p est inférieure à 0,05 alors on rejettera H_0, sinon on échouera à rejeter H_0* », etc. Cependant, ils ont souvent des difficultés avec une approche qui dit : « *utilisez votre jugement pour conclure* ». Il faut dire que l'instauration de la valeur du jugement dans une situation d'inférence statistique, est assez complexe car elle dépend de la théorie adoptée : de Fisher, de Neyman-Pearson, de Bayes, … D'ailleurs, la détermination de la valeur seuil (α) prise pour le niveau de signification et de la probabilité *a priori* de H_0 ($P(H_0)$), utilisées respectivement comme éléments de jugements dans le cas des tests statistiques et celui de la statistique bayésienne, est une tâche qui exige une réflexion approfondie sur plusieurs paramètres directement reliés aux contraintes du problème posé (Labovitz, 1970; Elm'hamedi, 2010; Zaki, Elm'hamedi, 2013).

2.2. La nature complexe des tests statistiques

La nature même des tests statistiques leur confère un caractère subtil, car leurs concepts de base sont à la fois abstraits et ouverts à plusieurs interprétations (Watts, 1991). Les fondements mathématiques et la terminologie véhiculés par les procédures sous-jacentes aux tests statistiques sont à l'origine de difficultés et de conceptions erronées chez les étudiants, voire même chez les utilisateurs professionnels (Oakes, 1986 ; Poitevineau, 1998 ; Haller, Krauss, 2002). Les notions de *vocabulaire* et d*'ambiguïté linguistique*, faisant l'objet du travail d'expérimentation rapporté dans cet article, relèvent toutes deux de cette catégorie importante et de la nature complexe de l'outil des tests statistiques.

2.2.1. Le caractère difficile du fondement mathématique

Le fondement mathématique, en particulier probabiliste, justifiant la construction des tests statistiques dépasse généralement les connaissances des programmes d'enseignement dans lesquels ces tests sont présentés. Ce n'est qu'au niveau d'un Master de mathématiques que l'on peut *a priori* établir en toute rigueur la théorie de cet outil (Zaki, Elm'hamedi, 2009, 2013). Par ailleurs, la notion de probabilités conditionnelles, considérée comme la pierre angulaire sur laquelle reposent les procédures sous-jacentes aux tests statistiques, est un exemple significatif de notion qui engendre beaucoup de difficultés chez les étudiants et les utilisateurs à tout niveau d'expertise. Par exemple, beaucoup d'étudiants utilisent les relations probabilistes erronées suivantes : $P(\mathcal{D} \mid H) = P(H \mid \mathcal{D})$, $P(\mathcal{D} \mid H) = P(H \cap \mathcal{D})$, … (Falk, 1986; Falk, Greenbaum, 1995; Nickerson, 2000).

De plus, il est probable que ce soit la complexité de ce fondement mathématique qui amène souvent les enseignants à ne pas présenter à leurs étudiants les tests d'hypothèses (surtout paramétriques) à partir d'un modèle statistique $(\Omega, \Gamma, P_\theta)_{\theta\in\Theta}$, en ne leur faisant pas connaitre, par exemple, que la région critique est non seulement un élément de la tribu Γ mais aussi que sa détermination nécessite, *sous certaines conditions*, la résolution d'un *problème d'optimisation* (probabiliste) induisant la minimisation simultanée de deux types de risques d'erreurs définis à partir d'une « *fonction coût* » et d'un « *espace d'actions* » fixés *a priori*.

2.2.2. La multitude de terminologies et de définitions

Une étude de la littérature de concepts particuliers impliqués dans les tests statistiques démontre l'existence de plusieurs inconsistances qui sont associées aux définitions et à la terminologie habituellement utilisées. Truran (1998), par exemple, a observé un manque de consistance et de compréhensibilité dans une étude qu'il a menée sur les différentes définitions de l'hypothèse nulle H_0 qui existent dans les ouvrages et manuels de statistique. De leur côté, Freund et Perles (1993) ont aussi trouvé quatre définitions différentes du concept de p-valeur. Le niveau de signification a été nommé aussi alpha, et il est représenté par le symbole α ou (peu couramment) par le symbole $P_{critique}$ (Thompson, 1994). La p-valeur a été référée à « *la probabilité de signification* », « *le niveau de probabilité* » (Huberty, 1985), « *p* » (Carver, 1978), « $P_{calculée}$ » (Thompson, 1994), « *prob-value* », « *probabilité queue* », « *P* », « *P-value* » et « *niveau de signification descriptif* » (Freund, Perles, 1993). On comprend que de toutes ces différences peuvent résulter des troubles.

2.3. Les pratiques usuelles d'enseignement des tests statistiques

La difficulté de l'enseignement et aussi de l'apprentissage du sujet des tests statistiques est largement reconnue (Garfield, Ahlgren, 1988 ; Hawkins, 1991). Les travaux antérieurs remettent surtout en cause les pratiques usuelles d'enseignement de cet outil, car celles-ci restent essentiellement ancrées sur des formules et des techniques routinières (Ehrenberg, 1990), encourageant l'apprentissage par cœur et le calcul machinal, plutôt que la réflexion et l'interprétation des résultats (Hawkins, Jolliffe, Glickman, 1992). Malheureusement, ces pratiques d'enseignement présentent souvent les tests statistiques non seulement comme « *un amalgame entre les tests de signification et ceux d'hypothèses* », mais aussi « *de façon isolée, sans leur intégration dans un modèle plus général de l'inférence scientifique* », et enfin comme « *seul outil de la statistique inférentielle, qui sert à évaluer la discordance qui pourrait exister entre des données construites et des hypothèses scientifiques* ».

2.3.1. La présentation des tests statistiques comme amalgame entre les tests de signification et ceux d'hypothèses

Plusieurs auteurs ont déclaré que la base théorique des tests statistiques est largement mal comprise (e.g. Oakes, 1986 ; Gigerenzer, Murray, 1987 ; Pollard, Richardson, 1987 ; Lunt, Livingstone, 1989 ; Cohen, 1994 ; Dracup, 1995). Gigerenzer (1993) a argumenté que les conceptions de la plupart des étudiants de psychologie relatives à l'inférence statistique sont incohérentes parce qu'elles dérivent de deux théories mutuellement incompatibles, d'une part, celle de Fisher, et de l'autre, celle de Neyman-Pearson (Gigerenzer, Murray, 1987 ; Sedlmeier, Gigerenzer, 1989 ; Gigerenzer, 1993). Bien que la théorie de Neyman-Pearson se soit développée en dehors de celle de Fisher, il n'en reste pas moins qu'il y a eu beaucoup de débats entre ceux qui appuient la théorie de Fisher et ceux qui appuient celle de Neyman-Pearson, autour de la nature même de l'inférence statistique (Box, 1978; Kruskal, 1980). Dans le domaine de la psychologie, par exemple, où les tests statistiques jouent un rôle très important, Gigerenzer (1993) a étudié trente ouvrages de statistique destinés aux étudiants de cette discipline, sans relever aucune discussion sur les deux approches de Fisher et de Neyman-Pearson. Ses conclusions étaient que ce qui est devenu institutionnel en psychologie et même en d'autres branches des sciences sociales n'était plus la statistique *fishérienne* ou *neyman-pearsonienne*, mais un *amalgame* incohérent d'idées incompatibles de Fisher et de Neyman-Pearson. Selon lui, cet amalgame est, en quelque sorte, la progéniture résultant d'un mariage forcé entre ces deux théories.

2.3.2. La présentation de façon isolée d'une procédure de tests statistiques

Il est important de rappeler qu'une procédure de tests statistiques n'est qu'une partie d'un processus plus global d'inférence scientifique. Une telle procédure ne doit donc pas être mise en œuvre sans être intégrée à une approche méthodologique de recherche plus générale et à un plan expérimental adéquat.

Malheureusement, une telle procédure est souvent présentée aux étudiants de la manière mécanique suivante : *a)* on se donne deux hypothèses statistiques H_0 et H_1, et des données D_0, *b)* on effectue un calcul probabiliste, et enfin *c)* on tire une conclusion de type : « *Rejeter* H_0 », « *Accepter* H_0 » (ou éventuellement : « *Echouer à rejeter* H_0 »). De cette façon de faire peuvent résulter plusieurs difficultés d'appréhension relatives aux tests statistiques. Notamment, peuvent être occultées les propriétés fondamentales suivantes :

- Les procédures sous-jacentes aux tests statistiques ne doivent pas être mises en œuvre comme une recette qui donne automatiquement et commodément l'une des réponses : « *Rejeter* H_0 », « *Accepter* H_0 » ou « *Echouer à rejeter* H_0 », à n'importe quel problème posé.
- Le rôle effectif d'un test statistique est d'une manière générale la mise en évidence des fluctuations d'échantillonnages et des erreurs de mesures expérimentales commises lors de la construction des données D_0.
  Cela ne sera pas garanti par cette façon de présenter les tests statistiques, puisque les données D_0 sont éventuellement imaginées par l'enseignant et non construites par l'étudiant.
- Les hypothèses statistiques H_0 et H_1 sont seulement deux modèles représentant chacun une hypothèse ou une action scientifique. En outre, les scientifiques ne sont intéressés ni par les tests statistiques, ni par les hypothèses testées par ces tests, mais plutôt par des hypothèses (d'étendue plus large) qui réfèrent à un phénomène scientifique, c'est-à-dire, à des hypothèses scientifiques. Ces dernières sont différentes des hypothèses testées par les tests statistiques. D'où l'importance de l'interprétation qui s'inscrit dans une connaissance du champ de recherche.
- Le résultat fourni par un test statistique, à savoir : « *Rejeter* H_0 », « *Accepter* H_0 » ou « *Echouer à rejeter* H_0 » n'est pas l'objectif ultime du chercheur. En pratique, il faut poursuivre la recherche en optant pour d'autres plans

expérimentaux bien construits, et en utilisant éventuellement des outils de l'inférence statistique autres que les tests statistiques, afin de mettre en évidence la signification pratique qui intéresse avant tout le chercheur.

2.3.3. La présentation des tests statistiques comme seul outil pour évaluer des hypothèses scientifiques (l'anti-pluralisme)

Les pratiques usuelles d'enseignement de l'inférence statistique présentent de manière générale les tests statistiques comme étant le seul outil existant pour évaluer des hypothèses scientifiques, inférer des connaissances nouvelles, ou prendre des décisions. La boîte à outils de l'inférence statistique contient plusieurs autres outils très pertinents qui peuvent aider à atteindre ces objectifs. Nous pouvons citer, entre autres exemples : *la statistique bayésienne*[7], *la réplication*, *la taille de l'effet*, *les intervalles de confiances*, … Hormis les tests statistiques et la statistique bayésienne, la plupart de ces outils peuvent être enseignés avec peu d'effort et sont faciles à appréhender. Il est vrai que des enseignants fournissent beaucoup d'efforts pour accompagner, dans leurs cours, les tests statistiques des intervalles de confiance, surtout dans le cas de statistiques paramétriques. Mais cet accompagnement risque de rester insuffisant, voire trompeur et pathogène, si ces enseignants :

- ne présentent pas à leurs étudiants la correspondance qui existe entre les tests d'hypothèses et les intervalles de confiances (i.e., comment peut-on construire à partir de la région critique d'un test d'hypothèses de taille α, un intervalle de confiance $(1-\alpha)$, et vice versa ?)[8],
- interprètent les intervalles de confiance comme étant des intervalles de *crédibilité* selon la statistique bayésienne (Lecoutre, 2006), en déclarant erronément que: « *[a,b] est un intervalle de confiance $(1-\alpha)$ du paramètre θ signifie que la probabilité $P(\theta\in[a,b])$ est égale à $(1-\alpha)$* ».

Aussi, une présentation diversifiée d'outils d'inférence statistique peut permettre aux étudiants non seulement de savoir que l'outil des tests statistiques n'est pas un générateur des probabilités conditionnelles $P(H|\mathfrak{D})$ propres à la statistique bayésienne, mais aussi de pouvoir « *appliquer une étendue variée de stratégies* » et de « *sélectionner et utiliser différents types de raisonnements et de preuves appropriés* ». Cependant, il est important de noter que *la pensée statistique* n'est pas fondée sur *la* méthode statistique que l'on doit appliquer. Bien entendu, toutes les

[7] L'enseignement de cette statistique est toujours réduit à la présentation de la fameuse règle de Bayes : $P(A|B) = P(A).\dfrac{P(B|A)}{P(B)}$, sans rendre compte que derrière cette règle il y a une théorie solide d'inférence statistique, avec un raisonnement propre, des concepts spécifiques, des résultats particuliers.

[8] Pour en savoir plus sur cette correspondance, consulter Dacunha-Castelle et Duflo (1990).

méthodes statistiques déjà mentionnées peuvent donner lieu à des recettes spécifiques appliquées de manière routinière. Or, une pensée statistique solide va au-delà de cette capacité, elle s'intéresse d'abord et avant tout à la justification de la procédure qui sera retenue. Effectuer des calculs statistiques suivant une procédure n'est pas ce que nous comprenons par pensée statistique. Pour ce faire, nous avons des logiciels. La pensée statistique est nécessaire au début - c'est-à-dire, le choix de la méthode inférentielle appropriée - et à la fin - c'est-à-dire, l'interprétation du résultat de tout processus inférentiel statistique.

Cependant, en enseignant des approches inférentielles variées, il est important de ne pas tomber dans le piège du dogmatisme et de ne pas se contenter de remplacer les tests statistiques par une autre méthode. Il n'y a pas de meilleure méthode inférentielle. Gigerenzer (1993) signale qu'il est notre devoir d'informer nos étudiants de l'existence de plusieurs chemins en inférence statistique, et de leur enseigner à utiliser le jugement qui conduit au choix de celui qui convient pour un problème particulier. De son côté, Iseler (1997) propose la métaphore qu'un couteau n'est pas approprié pour manger de la soupe, et qu'une cuillère ne permet pas facilement de couper ; il est heureux que nous ayons les deux, et nous ne devons pas jouer l'un contre l'autre.

Une analogie avec le domaine de l'art plastique peut clarifier la distinction entre connaître l'outil des tests statistiques et comprendre comment l'utiliser (Gall, 1995; Elm'hamedi, 2014). Penser à un pinceau parmi d'autres que le peintre utilise souvent. Au-delà des propriétés physiques (par exemple : la forme, la taille, …), qu'est ce que les peintres ont besoin de savoir à propos de leurs pinceaux ? La réponse est : « *probablement pas beaucoup* ». En effet, ce qui est plus important pour le peintre est de savoir les utilités des différents pinceaux. Par exemple, comment les utiliser pour obtenir des effets de surfaces désirés ou des peintures variées, ou bien savoir quand le pinceau n'est pas le meilleur outil pour exécuter une certaine tâche.

De même, nous pensons que les étudiants, d'une manière générale, doivent savoir qu'un test statistique est un outil mathématique utile dans certaines situations. De la même façon que le savoir-faire en art plastique va au-delà des aptitudes à tout simplement étaler la peinture sur des surfaces, les connaissances de procédures de tests statistiques par les étudiants doivent être situées dans un environnement. Elles nécessitent, en effet, plus que d'énoncer les propriétés mathématiques mobilisées ou d'utiliser une procédure comme une recette, et pour l'enseignant l'objectif ne se réduit pas à former des étudiants capables de traiter n'importe quelle série de nombres sans tenir compte de leur origine ou de leur nature. Comme pour les peintres qui utilisent les pinceaux, les besoins de base pour l'usage futur de tests statistiques sont que les étudiants sachent répondre aux questions suivantes.

- A quoi les tests statistiques sont-ils utiles ?

- Sous quelles conditions l'utilisation d'un test statistique donné est-elle justifiée, et pourquoi ?
- Que peut-il arriver si une procédure de tests statistiques est utilisée là où elle ne devrait pas l'être ?
- Quel est le rôle de l'outil tests statistiques en comparaison des autres outils de la boîte à outils de l'inférence statistique ? Les étudiants doivent savoir dans quelles situations les tests statistiques sont différents des autres outils ou similaires, et reconnaître que le test statistique peut ne pas nécessairement être le premier outil à utiliser, ni le seul outil dont on a besoin, ni le plus approprié.

L'analogie avec le domaine de l'art plastique pourrait ne pas être complète sans considérer qu'en plus des peintres qui créent l'art, il existe des amateurs d'art qui ont besoin de le comprendre. L'appréciation d'un tableau ne dépend pas de la connaissance générale des techniques de l'art plastique et n'oblige pas à savoir comment les peintres essayent de communiquer certaines impressions. De même existe, pour s'informer ou décider, le besoin d'information sur l'application de tests statistiques. Face à des tests statistiques, le lecteur n'a pas nécessairement besoin de savoir comment effectuer une recherche ou comment utiliser des techniques statistiques, mais il a besoin de savoir quoi penser de déclarations qui sont formulées à partir de l'application de tests statistiques.

Il est important de développer les capacités des apprenants à maîtriser les tests statistiques dans chacun des deux contextes, la production de tests et l'interprétation de tests. Malheureusement, bien que l'enseignement de la statistique soit souvent justifié en se référant à la nécessité de préparer les étudiants aux demandes d'une société d'information, les efforts d'enseignement pour satisfaire de telles demandes ne sont pas forcément à la hauteur souhaitable, d'une manière répandue. Bien des enseignants introduisent dans leurs cours des tâches qui ne demandent aux étudiants que d'effectuer des calculs. Ceci peut ne pas suffire à développer leur savoir-faire en statistique. Par exemple, il n'est pas sûr qu'ils soient en mesure de critiquer d'une façon pertinente des résultats de tests statistiques présentés dans des articles de revues, des informations radio-télévisées, des publicités, le monde du travail ou les publications de recherche

2.4. L'usage aveugle des logiciels spécialisés

L'usage aveugle des logiciels spécialisés n'est pas neutre dans les difficultés à appréhender les tests statistiques. En effet, des logiciels comme sphinx, R, Statistica, SPAD, SPSS, etc., destinés pour un large public, embraquent des procédures de tests statistiques de tout type et permettent de les appliquer à ce que l'utilisateur demande. En entrant un tableau de données, le logiciel donne automatiquement et commodément un résultat ; sans pour autant savoir si cela aura une valeur. Leur usage donne accès à une réponse même si l'on ne connait pas les fondements des tests statistiques que l'on utilise.

2.5. Les facteurs psychanalytiques

Falk et Greenbaum (1995) déclarent que quelqu'un d'intelligence simplement moyenne pourrait facilement comprendre que les deux probabilités conditionnelles $P(A|B)$ et $P(B|A)$ sont différentes. Cependant, la confusion entre le niveau de signification faisant référence à $P(\mathfrak{D}|H)$ et la probabilité d'une hypothèse égale à $P(H|\mathfrak{D})$, reste une erreur fréquente chez les étudiants et les utilisateurs de statistiques. Ils ont ainsi conclu qu'il existe un mécanisme psychanalytique profond conduisant à commettre cette erreur et à croire, d'une part, qu'on élimine le facteur de chance, et d'autre part, qu'on minimise l'incertitude, lorsqu'on obtient un résultat statistiquement significatif par application d'une procédure de tests statistiques. Ils ont introduit, dans ce sens, la notion « *d'illusion de preuve par probable contradiction* », ou « *l'illusion d'atteindre l'improbabilité* », qui consiste en la croyance erronée que l'hypothèse nulle H_0 est improbable lorsqu'on aboutit à un résultat statistiquement significatif. Ce genre de preuve, se basant éventuellement sur une généralisation trompeuse du raisonnement déductif (Birnbaum, 1982; Lindley, 1993), est difficile à éradiquer dans les esprits, étant couramment présent dans plusieurs ouvrages de statistique (Falk, Greenbaum, 1995).

De plus, Acree (1978), Gigerenzer et *al*. (1989), Gigerenzer (1993) et Batanero (2000) ont tous considéré que, dans l'utilisation des tests statistiques, on a souvent recours à des *rituels*, marqués par une logique hybride, une procédure routinière ou un amalgame, engagés avant toute pensée statistique proprement dite. Ils ont expliqué cette conduite en établissant une analogie entre ce que Freud déclare des conflits inconscients et les comportements individuels dans la situation d'appliquer de tests statistiques. Le développement de cette analogie dépasserait le cadre de cet article, aussi nous nous en tiendrons là à son propos.

3. Etude exploratoire auprès des étudiants

Nous détaillons, dans ce qui suit, les étapes fondamentales de la mise en place de la partie expérimentale de cette étude.

3.1. Objectif de l'étude et expérimentation

Les conclusions dégagées à la lumière de l'analyse précédente concernant les facteurs contribuant aux difficultés qui concernent les tests statistiques, bien qu'elles soient fondées sur la revue de plusieurs travaux didactiques antérieurs, ne peuvent que gagner à être accompagnées d'observations effectives auprès des étudiants. Nous avons donc conduit à la fin du deuxième semestre de l'année scolaire 2017/2018 une expérimentation auprès de 195 étudiants de huit universités du Maroc, poursuivant leurs études en année de licence scientifique de l'une des spécialités: Mathématiques, Physique, Chimie, Génie électrique, Informatique, Enseignement, et en Economie. Parmi ces sujets, âgés de 22 à 25 ans, 95 sont de sexe féminin et 100 de sexe masculin. Ils ont des baccalauréats de cinq types, à savoir: les Mathématiques, la Physique-Chimie, la Vie et Terre, les Sciences Techniques et l'Economie. A cela s'ajoute le fait que tous avaient déjà suivi au moins une fois un cours sur la probabilité globalement et sur la probabilité conditionnelle d'une manière particulière, étant donné que ce type de cours est indispensable pour passer l'examen du baccalauréat scientifique ou économique. De plus, 57% de ces sujets avaient déjà suivi un cours sur les tests statistiques pendant leurs séjours à l'université.

A ces sujets, nous avons administré un questionnaire de durée une heure, composé de cinq questions. Chaque question traite des significations susceptibles d'être données à un terme ou à des expressions usuellement utilisées dans les tests statistiques. Les quatre premières questions concernent le facteur *vocabulaire* et la cinquième le facteur *ambiguïté linguistique*. Chaque question est composée d'un ensemble d'items à choix multiple (double ou triple). Les items de chaque question tournent autour des différentes significations des termes ou des expressions en relation avec la question. Les modalités de chaque item sont quelques significations possibles (*justes ou fausses*) qu'on pourrait imaginer. Ces modalités sont éventuellement de trois types: juste, induisant implicitement ou explicitement l'erreur commise en tests statistiques, induisant un autre type d'erreur.

Nous avons recommandé aux sujets de lire attentivement chaque item avant de choisir la modalité qui leur semblait la plus convenable, puis de justifier brièvement, sans faire de calcul, chacune des réponses. Enfin, nous leur avons aussi indiqué qu'ils peuvent répondre de *manière indépendante* aux différents items de chaque question.

Il est important d'insister sur le fait que nous n'avons pas communiqué aux sujets l'objectif du questionnaire. D'ailleurs, ce dernier est construit de telle sorte que les termes dont nous demandons la signification et les expressions dont nous mettons en question leurs équivalents ne semblent pas relever du vocabulaire et du langage utilisés en tests statistiques.

3.2. Présentation et analyse *a priori* du questionnaire

Avant de procéder à l'analyse proprement dite des productions des étudiants, nous allons consacrer la prochaine section à l'analyse *a priori* du questionnaire, afin de mieux cerner l'interprétation (statistique) des réponses des étudiants. Pour chaque item des différentes questions, la modalité correcte (*selon la logique habituelle ou le contexte des tests statistiques*) est celle présentée cochée. Vu la nature de l'objectif fixé par la présente recherche, qui vise, en quelque sorte, l'exploration de l'effet impliqué par le *vocabulaire* et *l'ambiguïté linguistique* sur la signification qu'on pourrait éventuellement donner aux concepts utilisés en terme de procédures des tests statistiques, notre analyse se focalisera surtout sur les deux éléments essentiels suivants: *a)* la justification *scientifique* proprement dite de la fausseté ou de la véracité de chaque modalité, en la liant éventuellement aux conceptions erronées usuelles relativement aux tests statistiques, et ce étant donné que ce présent travail s'adresse aux utilisateurs expérimentés et potentiels de cet outil statistique; *b)* la justification de la formulation par laquelle l'item d'une question donnée est construit et le terme (ou les termes) trompeur utilisé dans cette construction forçant un sujet qui n'a jamais suivi de cours sur les tests statistiques (ou même celui qui en a déjà suivi) à établir une correspondance erronée avec le terme ou l'expression objet de la question.

Question 1 : *Si l'on vous demande d'imaginer ce que vous comprenez par (ou ce que signifie pour vous) l'expression « Hypothèse Nulle », il survient à votre esprit :*

A. Une hypothèse dont sa véracité sera sans valeur et n'aura aucune importance dans la vie sociétale.	**O Oui**	**⊗ Non**
B. Une hypothèse dont sa véracité ne conduira à l'adoption d'aucune action nouvelle.	**O Oui**	**⊗ Non**
C. Une hypothèse prévue pour être falsifiée ou rejetée, afin de gagner un support susceptible de permettre un progrès scientifique.	**⊗ Oui**	**O Non**
D. Une hypothèse déjà connue d'être fausse avant même sa mise à l'épreuve.	**O Oui**	**⊗ Non**
E. Une hypothèse exprimée sous forme d'une égalité ou d'une différence nulle.	**O Oui**	**⊗ Non**

--

Items de la question 1 et réponses attendues

L'« *hypothèse nulle* » est spécialement réquisitionnée dans la théorie des tests de signification de Fisher. Dans cette théorie, une telle hypothèse est avancée pour être rejetée, afin d'acquérir un support d'acceptabilité de l'hypothèse scientifique (ou de recherche) qui intéresse le chercheur. Une telle hypothèse est souvent considérée par erreur comme une hypothèse dont la véracité ne conduit à l'adoption d'aucune action nouvelle, en la confondant ainsi avec l'hypothèse H_0 de la théorie de Neyman-Pearson, incompatible avec la théorie de Fisher. Notons au passage que l'hypothèse nulle est appelée ainsi, dans le sens de « *to be nullified* »; c'est-à-dire, à réfuter, et non nécessairement, comme on le trouve écrit dans certains manuels, d'une valeur de zéro pour le paramètre testé, même si c'est le cas le plus fréquent (Poitevineau, 1998). En général l'hypothèse nulle sera la négation de l'hypothèse à laquelle le chercheur s'intéresse réellement : « *… the hypothesis that the phenomenon to be demonstrated is in fact absent* » (Fisher, 1990/1935, p. 13).

De plus, avant sa mise à l'épreuve, l'hypothèse nulle devrait normalement être consistante avec l'état actuel de la connaissance scientifique. Malheureusement, plusieurs articles et chercheurs identifient dans leurs recherches l'hypothèse nulle comme étant une hypothèse « *prête-nom* »[9], c'est-à-dire, une hypothèse qui est connue pour être fausse avant même que des données soient construites – et elle est souvent utilisée de cette façon. Par ailleurs, rejeter une hypothèse nulle connue pour être fausse avant qu'on construise les données ne fournit pas de nouvelle information scientifique : on a simplement démontré qu'une déclaration déjà connue pour fausse l'est effectivement. Mais si l'hypothèse nulle est consistante avec l'état actuel de la connaissance, alors la rejeter nous informera que nous avons trouvé quelque chose de nouveau, permettant à l'hypothèse de recherche (hypothèse nouvelle qui présente de l'intérêt) *d'avoir des chances* d'être acceptée (Granaas, 2002).

Pareillement, bien que le résultat d'un test de signification soit « *rejeter l'hypothèse nulle* » ou « *échouer à rejeter l'hypothèse nulle* », il est possible dans ce dernier cas d'approfondir la recherche pour étudier la possibilité de résistance d'une telle hypothèse, qui restera encore valide jusqu'à nouvel ordre. Par ailleurs, il y a trois critères pour accepter l'hypothèse nulle, à savoir : *(1)* l'hypothèse nulle devrait être possible, *(2)* les résultats devraient être consistants avec l'hypothèse nulle (ou une p-valeur faible), et *(3)* un bon effort devrait être fait pour chercher un effet (c'est-à-dire, pour rejeter l'hypothèse nulle). Selon Frick (1995), dire qu'un bon effort est fourni dans une expérimentation donnée est fonction du degré de satisfaction des trois critères suivants : *(a)* l'adoption d'un plan expérimental adéquat, *(b)* l'obtention d'intervalles de confiances très larges, pour le paramètre testé, et *(c)* l'existence (ou non) d'un effet (lié) dans une expérimentation similaire, utilisant le même plan expérimental que à celle pour laquelle il reste à trouver un effet.

Il est vrai que l'hypothèse alternative H_1 est souvent celle que le *chercheur* (*ou le décideur*) souhaite prouver, mais il ne faut pas voir une absence d'information dans un résultat négatif. Nous savons qu'au rejet de l'hypothèse nulle H_0, impliquant la signification statistique, est attaché un grand prix, parce que ce rejet est vu comme conduisant à la théorie en développement, tandis que l'échec du rejet de H_0, ou même son acceptation, pourraient conduire à une impasse. La signification statistique devrait en revanche être considérée comme une mesure de satisfaction. Il est, par conséquent, plus utile d'attribuer à une recherche (ou une décision) une valeur qui est fonction de la qualité du plan expérimental adopté, dans la mesure où ce dernier réduit autant que possible les fluctuations d'échantillonnages et les erreurs de mesures expérimentales.

On peut remarquer que les différents items de cette question sont volontairement formulés à l'aide d'expressions traduisant une certaine nullité, qui peut être directement liée au terme « nulle », indiqué dans l'expression « hypothèse nulle ». On peut remarquer, par exemple, les expressions : « *sans valeur* », « *aucune importance* », « *ne conduira pas* », « *fausse* », « *égalité* », « *différence nulle* ». Cela

[9] « *Straw person* » en langue anglaise.

permettra d'étudier si ce terme constitue vraiment un obstacle pour donner une signification exacte à l'expression « hypothèse nulle ». Il est vrai que l'expression indiquée dans l'item E est celle la plus habituellement enseignée aux étudiants, mais cela n'empêche pas d'étudier la possibilité d'existence des autres expressions signalées dans les autres items.

Question 2 : *« Prouver la Véracité d'une Hypothèse » signifie pour vous :*

A. Présenter des arguments aussi solides que possible en faveur de la véracité de cette hypothèse, tout en fixant un seuil exigé et réfléchi d'évidence, et en exposant la force de preuve ou la puissance de votre raisonnement.	**⊗ Oui**	**O Non**
B. Présenter des arguments absolument convaincants comme dans le cas d'une démonstration purement mathématique envers la véracité de cette hypothèse.	**O Oui**	**⊗ Non**

Question 3 : *L'expression « Hypothèse Vraie » signifie pour vous :*

A. Une telle hypothèse est un modèle reflétant au mieux le monde réel, permettant à la plupart des gens rationnels de l'accepter comme modèle réalisable.	**⊗ Oui**	**O Non**
B. La véracité d'une telle hypothèse est seulement une affaire de jugement, dans la mesure où un individu peut considérer cette hypothèse vraie, alors que son voisin peut décider le contraire.	**⊗ Oui**	**O Non**
C. On a présenté des arguments absolument convaincants en faveur de la véracité de cette hypothèse, comme dans le cas d'une démonstration purement mathématique, et cette véracité est établie pour toujours.	**O Oui**	**⊗ Non**
D. Une telle hypothèse est un modèle dans lequel on tolère qu'il puisse exister quelques cas pour lesquels cette hypothèse ne tient pas, mais sans pour autant l'étiqueter comme étant non valide dans le monde réel.	**⊗ Oui**	**O Non**

Items des questions 2 et 3 et réponses attendues

Remarquons que l'analyse des deux expressions (prouver et vrai) objets de ces deux questions avait déjà commencé dans l'introduction de ce travail. Néanmoins, nous allons approfondir une telle analyse en présentant sur ce sujet quelques autres éléments de valeur. De plus, contrairement à l'expression « *hypothèse vraie* » qui est explicitement utilisée dans le langage usuel des tests statistiques, l'expression « *Prouver la Véracité d'une Hypothèse* » est implicitement emmagasinée dans l'esprit de l'utilisateur de cet outil qui sollicite les tests statistiques afin de lui permettre de prouver quelque chose. Signalons aussi que c'est volontairement que nous avons situé ces deux questions dans le même panier d'analyse. La raison en est que les deux termes sous-jacents sont étroitement liés, dans la mesure où *la véracité* *d'une hypothèse* ne sera établie qu'en s'appuyant sur des éléments de *preuve* convaincants. De plus, les différents items de ces deux questions sont tous formulés avec des termes et des expressions induisant soit un caractère relatif considéré comme valide dans le contexte des tests statistiques et suivant la logique sous-jacente, soit un caractère absolu.

Il est à signaler qu'en termes de procédures de tests statistiques, il est préférable d'utiliser le terme « *modèle* » plutôt qu'hypothèse, si l'on veut souligner qu'en tests statistiques, on compare des modèles et non des hypothèses. En effet, des hypothèses (statistiques) sont des modélisations d'*hypothèses scientifiques* plus abstraites, reflétant le monde réel. Ainsi, accepter, par exemple, l'hypothèse nulle signifie que *le modèle nul* pourrait validement être utilisé. Un autre point que nous souhaitons soulever à propos des tests statistiques est que dans un projet de recherche, un test statistique est utilisé seulement pour *aider à décider* en s'aidant de l'analyse statistique. A cela s'ajoute le fait qu'il s'agit seulement d'un outil de la boîte des statistiques, parmi plusieurs qui peuvent être utilisés. Cela permet de conclure que son usage est limité par définition.

Il est vrai que les données construites supportent toujours le modèle alternatif. Si ce n'était pas le cas, aucun test statistique choisissant automatiquement le modèle nul ne devrait être utile ou nécessaire. Un test de signification, par exemple, fournit une mesure ayant force de preuve contre le modèle nul et en faveur de l'acceptabilité du modèle alternatif. L'indicateur de mesure généralement utilisé, est la *p-valeur* qui est égale à « *la probabilité d'obtenir le résultat de l'échantillon (ou même plus extrême) en supposant que le modèle nul est vrai* ». Cette approche en termes de modèles des tests statistiques est plus longuement discutée par McLean (2000).

Ainsi, l'usage de la terminologie telle que « *la valeur vraie de la moyenne* » conduit à des déclarations comme « *l'hypothèse nulle est presque toujours fausse* ». Bien que ceci puisse être vrai, c'est hors de propos. Un test statistique n'est pas directement concerné par la valeur vraie d'un paramètre, mais par les modèles escomptés. Accepter le modèle nul signifie seulement que l'usage de ce modèle, fondé sur la valeur spécifiée du paramètre, est avantageux (valable); le rejeter signifie qu'il est préférable d'utiliser un modèle fondé sur une valeur différente.

Cependant, juger de la qualité de la preuve pour conclure quant au rejet du modèle nul ou à l'échec de son rejet est une tâche subjective. Quelqu'un pourrait considérer une déclaration comme étant prouvée, alors que son proche voisin penserait le contraire. Si la preuve statistique est suffisamment forte, le lecteur pourra accepter le résultat comme « *prouvé* » dans un sens faible. Cet argument s'applique en particulier aux tests statistiques.

Par ailleurs, dans une situation de recherche, la décision est provisoire dans la mesure où il faut toujours avoir présent à l'esprit que l'acceptation ou le rejet d'une hypothèse peuvent ne pas durer longtemps. Les recherches qui seront menées dans le futur pourront contredire les conclusions d'aujourd'hui.

Nous pouvons définir *la vérité* et *la preuve* pragmatiquement – une hypothèse ou une théorie est *vraie* si elle est suffisamment fondée sur de solides évidences observées, de sorte que *la plupart des gens raisonnables* l'acceptent comme un modèle. Cette vue pragmatique de la vérité décrit la science. Ainsi la théorie d'évolution peut être acceptée comme *vraie* parce que l'évidence est suffisamment solide et provient de larges sources variées. Pour la plupart des gens, cette acceptation est probablement implicite. Les conclusions de la justice sont de même nature : dire qu'une personne est *prouvée coupable* d'un crime revient simplement à dire que l'évidence factuelle est suffisamment solide pour que *la plupart des gens* (représentés par le jury) acceptent la culpabilité comme modèle de la réalité.

Question 4: *Si l'on vous demande ce que peut signifier pour vous l'expression « Résultat Significatif », vous penserez à un résultat qui:*

A. Est forcément remarquable et important dans la vie sociétale.	**O Oui**	**⊗ Non**
B. Peut ne pas être ni remarquable, ni important dans la vie sociétale.	**⊗ Oui**	**O Non**
C. N'est pas dû au hasard, dans la mesure où il existe une cause bien connue et bien définie qui l'a suscité.	**O Oui**	**⊗ Non**
D. Peut être remarquable et important dans la vie sociétale.	**⊗ Oui**	**O Non**

Items de la question 4 et réponses attendues

L'expression « *résultat significatif* » est très habituellement utilisée dans les procédures de tests statistiques. Elle est utilisée pour signifier qu'un test statistique a permis de rejeter l'hypothèse nulle. Evidemment, cette expression est utilisée à tort pour remplacer l'expression « *résultat statistiquement significatif* », dans la mesure où l'adverbe « *statistiquement* » y est introduit pour mettre en évidence la différence qui pourrait exister entre une « *signification statistique* » fournie par application d'un test statistique, et une « *signification pratique* »[10]. Dans ce sens, Kirk (1996) a défini une telle différence de la façon assez simple suivante : « *Statistical significance is concerned with whether a research result is due to chance or sampling variability; practical significance is concerned with whether the result is useful in the real world*» (Kirk, 1996, p. 746).

Par ailleurs, l'erreur majeure signalée dans l'interprétation des tests statistiques est la supposition naïve qu'un résultat statistiquement significatif est un résultat

[10]On l'appelle aussi: *signification sociale, signification théorique, signification scientifique, signification substantielle, …*

remarquable (Daniel, 1997). Depuis l'année 1931, Tyler avait déjà commencé à reconnaître l'étendue de la mauvaise interprétation de la signification statistique, en déclarant que les interprétations qui ont été généralement formulées à partir des études de l'époque nous contraignent à concevoir la signification statistique comme équivalente à la signification sociale, alors que ces deux termes sont essentiellement différents et ne devraient pas être confondus. Les différences qui sont statistiquement significatives ne sont pas toujours socialement importantes. La réciproque est aussi vraie : les différences qui ne s'avèrent pas être statistiquement significatives peuvent pourtant être socialement significatives.

De manière similaire, Schafer (1993) a noté que la plupart des chercheurs ne comprennent pas que (statistiquement) *significatif* et *important* sont deux choses différentes. Le terme *significatif* lui semble avoir été mal choisi. De plus, Meehl (1997) caractérise l'utilisation du terme *significatif* comme étant « *cancéreux* » et « *trompeur* » et recommande que les chercheurs interprètent leurs résultats en utilisant les intervalles de confiance de préférence aux p-valeurs impliquées par les tests de signification.

Certes, le résultat (existence ou non de la signification statistique) fourni par application d'un test statistique, à savoir: « *Rejeter* H_0 », « *Accepter* H_0 » ou «*Echouer à rejeter* H_0 », possède deux aspects favorisant le *non déterminisme*: D'une part, la région critique RC, dans le cas d'un test d'hypothèses, et la p-valeur, dans le cas d'un test de signification, sont déterminées par un calcul probabiliste, et d'autre part, le statisticien utilise son jugement (la valeur α, prise pour le niveau de signification) pour déterminer un tel résultat.

Par conséquent, l'omission, dans cette question, de l'adverbe *statistiquement* dans l'expression « *résultat statistiquement significatif* » et la formulation des items sous-jacents pourraient conduire non seulement un apprenant qui n'a jamais suivi de cours sur les tests statistiques, mais aussi un utilisateur expérimenté de l'outil statistique, à choisir des modalités erronées des différents items de cette question.

Le tableau 1 qui suit récapitule les éléments essentiels, caractéristiques des différents items relatifs aux questions 1, 2, 3 et 4 du questionnaire.

Question et « *Concept*[11] *impliqué* »	***Terme trompeur du concept***	***Signification*[12] *du concept***	***Items***	***Eléments d'ambiguïté du vocabulaire, impliqués par l'item***
Question1: « *Hypothèse nulle* »	*«Nulle»*	*Hypothèse prévue pour être falsifiée*	A	*sans valeur, aucune importance*
			B	*ne conduira pas, aucune action nouvelle*
			C	-
			D	*connue pour être fausse*
			E	*égalité, différence nulle*
Question 2: « *Prouver la véracité d'une hypothèse* »	*«Prouver»*	*Prouver de manière relative et non absolue*	A	*arguments aussi solides que possible, fixation d'un seuil exigé d'évidence*
			B	*arguments absolument convaincants, démonstration purement mathématique*
Question 3: « *Hypothèse vraie* »	*«Vraie»*	*Véracité à caractère relatif et non absolu*	A	*modèle reflétant au mieux le monde réel, la plupart des gens l'acceptent*
			B	*affaire de jugement de l'individu*
			C	*arguments absolument convaincants, démonstration purement mathématique*
			D	*modèle, on tolère*
Question 4: « *Résultat significatif*[13]»	*«Significatif»*	*Le résultat fourni par un test statistique pourrait être pratiquement*[14] *significatif, comme il se peut qu'il pourrait ne pas l'être*	A	*forcément remarquable et important*
			B	*peut ne pas être ni remarquable, ni important*
			C	*n'est pas dû au hasard, une cause bien définie l'a suscité*
			D	*peut être remarquable et important*

Tableau 1. Récapitulatif des éléments caractéristiques des différents items relatifs aux questions 1, 2, 3 et 4 du questionnaire

[11] Il s'agit du concept impliqué dans une procédure de tests statistiques.

[12] Il s'agit de la signification (*vraie*) du concept dans le vocabulaire usuel adopté par les procédures de tests statistiques.

[13] L'expression « *Résultat significatif* » est souvent utilisée à la place de l'expression « *Résultat statistiquement significatif* ».

[14]L'adverbe « *pratiquement* » peut être remplacé par : *socialement, théoriquement, scientifiquement, substantiellement, …*

Question 5 : *On désigne par D_0 l'ensemble des données issues d'une enquête policière, qu'on a pu construire de manière aussi adéquate que possible, et qui a priori vont dans le sens de la culpabilité du prévenu X. De telles données sont présentées au juge, qui a décidé de la culpabilité de ce prévenu.*

Présentation de la question 5

Les éléments de la question 5 s'inscrivent dans le cadre d'une situation de test d'hypothèses (ou de décision) de Neyman-Pearson. Ainsi, à la lumière des données construites D_0, on a contrasté à travers cette situation les deux hypothèses H_0 et H_1 qui sont respectivement les modélisations des hypothèses juridiques : « *Le prévenu X est innocent* » et « *Le prévenu X est coupable* ». La décision à laquelle on a abouti dans cette situation est : « rejeter H_0 ».

Chaque item de cette question est usuel dans le langage adopté par les tests d'hypothèses. Il met en exergue une erreur usuellement commise par les apprenants dans l'usage de tel outil statistique. Les expressions par lesquelles les items et leurs modalités sont construits impliquent toutes deux événements : $\mathcal{D}$ (relatif aux données) et H (relatif aux hypothèses statistiques). Modalités et items sont conçus de telle sorte qu'il n'est pas facile pour le sujet de connaitre qu'il s'agit de la probabilité d'un événement simple ou d'un événement conditionnel. Si par hasard ces sujets savent qu'il s'agit d'un événement conditionnel, il sera difficile pour eux de choisir, entre $\mathcal{D}$ et H, lequel est l'événement conditionné et lequel est l'événement conditionnant. Ainsi, les différentes difficultés auxquelles on s'est intéressé sont que la pratique de tests d'hypothèses génère de manière erronée les deux types de probabilités conditionnelles suivantes : *les probabilités des hypothèses H sachant les données $\mathcal{D}$ $(P(H \mid \mathcal{D}))$* et *les probabilités de données $\mathcal{D}'$ sachant d'autres données $\mathcal{D}$ $(P(\mathcal{D}' \mid \mathcal{D}))$.* Chacune des probabilités indiquées dans les items et dans les modalités correspondantes de la question 5 est relative à la conjonction ou au conditionnement des deux événements $\mathfrak{D}$ et H. Ces derniers sont implicitement ou explicitement mentionnés dans les différentes formulations de tels items et modalités. Ces formulations, habituellement utilisés dans les tests d'hypothèses, sont conçues de façon que les sujets ne puissent pas mettre facilement en œuvre les deux événements indiqués, ainsi que le type de probabilité sous-jacente, à savoir conjointe ou conditionnelle. Notons au passage que le terme « *argumentation* », explicité dans la plupart de ces formulations, n'est pas utilisé dans le sens courant des mathématiques.

A. A votre avis, **« *La probabilité que la décision prise par le juge soit due au seul hasard* »** est la même que :

⊗ **a. « La probabilité que la décision prise par le juge soit produite par un processus de hasard ».**

O **b. « La probabilité d'obtenir par hasard la décision prise par le juge ».**

O **c. « La probabilité qu'un processus, considéré comme étant un processus de hasard, pourrait produire la décision prise par le juge ».**

Item 5A et réponses attendues

Cet item et les modalités qui le composent sont implicitement tous exprimés à l'aide de probabilités conditionnelles ne permettant pas aux sujets de saisir facilement lequel des deux événements conditionnels, $(H_0 \mid \mathcal{D})$ ou $(\mathcal{D} \mid H_0)$, est mis en avant. De telles probabilités (conditionnelles) sont très usuelles dans le langage adopté en théorie des tests statistiques.

Par ailleurs, « *connaitre la probabilité que le résultat soit dû au seul hasard* », équivalente à la connaissance de la probabilité impliquée par cet item, est l'un des rôles d'un test statistique, parmi plusieurs habituellement déclarés aux étudiants lors d'un cours. De plus, le terme *résultat* indiqué dans un tel rôle prend une double signification accentuant l'amalgame des tests statistiques que nous avons indiqué dans l'introduction de ce travail, à savoir « *les données construites* D_0 » et « *la décision de rejet de* H_0 ».

Certes, ce n'est pas pour un tel rôle qu'un test statistique est conçu, du fait que « *la probabilité que le résultat soit dû au seul hasard* » n'est autre que « *la probabilité de réalisation de* H_0 *sachant les données* $\mathcal{D}$ » $(P(H_0 \mid \mathcal{D}))$, que les tests statistiques ne peuvent pas générer. La probabilité conditionnelle indiquée dans la modalité *a* de cet item est équivalente à la probabilité $P(H_0 \mid \mathcal{D})$, tandis que celles mentionnées dans les modalités *b* et *c* sont non seulement équivalentes mais aussi égales à la probabilité $P(\mathcal{D} \mid H_0)$, qu'il est possible de déterminer selon la logique des tests statistiques.

B. Selon vous, l'argumentation: **« *La probabilité que le juge décide correctement la culpabilité du prévenu X* »** est la même que l'argumentation:

⊗ **a. « La probabilité que le juge décide la culpabilité du prévenu X, sachant qu'il est coupable ».**

O **b. « La probabilité que le prévenu X soit coupable et le juge décide sa culpabilité ».**

O **c. « La probabilité que le prévenu X soit coupable, sachant que le juge décide sa culpabilité ».**

Item 5B et réponses attendues

« *La probabilité de rejeter correctement l'hypothèse H_0* » est la définition usuelle donnée par la théorie des tests d'hypothèses au concept de *puissance*. Elle est équivalente dans le cas de la présente situation à « *la probabilité que le juge décide correctement la culpabilité du prévenu X* ». Cette définition désigne vraiment « *la probabilité de rejeter l'hypothèse H_0 sachant qu'elle est fausse* » $(P(\mathfrak{D} | H_1))$. Une telle probabilité est la même que celle indiquée dans la modalité *a* de cet item. Cependant, la façon d'exprimer cet item et les modalités correspondantes met en question une autre fois le problème du choix adéquat d'événements qui sont mis en œuvre dans les différentes probabilités signalées. En effet, la probabilité impliquée dans cette définition semble non conditionnelle, et elle pourrait conduire le sujet à croire à tort que c'est une probabilité conjointe (non conditionnelle) des deux événements: « *l'hypothèse nulle est fausse* » et « *on rejette l'hypothèse nulle* » $(P(\mathfrak{D} \cap H_1))$, comme dans le cas de la modalité *b*, ou « *la probabilité de réalisation de H_1 sachant qu'on a décidé de l'accepter* » $(P(H_1 | \mathfrak{D}))$, comme dans le cas de la modalité *c*. Notons au passage que, d'une manière générale, la probabilité $P(A | B)$ est égale à $P(A \cap B)/P(B)$, et que l'égalité entre $P(A | B)$ et $P(A \cap B)$ supposerait que B soit un événement certain.

C. Les deux argumentations (1) et (2) suivantes sont-elles équivalentes ?

O Oui **⊗ Non**

(1) *« En moyenne, 5 fois parmi toutes les 100 fois que ce juge rejettera l'innocence d'un prévenu, il se trompera ».*

(2) *« En moyenne, 5 fois parmi 100 qu'un prévenu est innocent, ce juge le déclare coupable ».*

Item 5C et réponse attendue

Cet item, déjà étudié par Birnbaum (1982), est une occasion de plus de mettre le sujet à l'épreuve, pour tester si l'ambiguïté linguistique peut le conduire à commettre l'erreur de considérer que les deux probabilités conditionnelles, $P(\mathfrak{D} | H_0)$ et $P(H_0 | \mathfrak{D})$, sont équivalentes. Les deux argumentations (1) et (2) sont bien sûr différentes. En effet, la première est valide. Elle exprime l'interprétation donnée au concept de niveau de signification de valeur égale à 5%, et ce dans le cadre *fréquentiste radical* adopté par la théorie des tests d'hypothèses de Neyman-Pearson, sur laquelle nous nous basons dans cette question 5. Elle est équivalente au fait que la probabilité conditionnelle $P(\mathfrak{D} | H_0)$ soit égale à 0,05, où $\mathfrak{D}$ est l'événement « *rejeter l'innocence d'un prévenu* » (c'est-à-dire, *rejeter H_0*), et H_0 est l'événement: « *un prévenu est innocent* » (c'est-à-dire, « *H_0 est vraie* »). En revanche, la deuxième argumentation est invalide dans le cadre de la théorie des tests d'hypothèses. Elle est, en quelque sorte, équivalente au fait que la probabilité conditionnelle $P(H_0 | \mathfrak{D})$ soit égale à 0,05.

D. En se basant sur les données D_0, le juge est convaincu de la culpabilité du prévenu X. Néanmoins, pour pouvoir mieux s'en assurer et afin de prendre une décision définitive, il a mis de côté les données D_0, et il a lancé en parallèle une nouvelle enquête indépendante de la première. Une telle enquête a donné lieu à d'autres données R.

A votre avis, ***« La probabilité que ces nouvelles données R permettent au juge de reprendre la même décision »***, est la même que:

O a. « Le complément à 1 de la probabilité de condamner le prévenu X sachant qu'il est innocent ».

⊗ b. « La probabilité de condamner le prévenu X, sachant qu'on avait déjà décidé qu'il est coupable ».

O c. « La probabilité que le prévenu X soit coupable, sachant qu'on avait déjà décidé qu'il est coupable ».

Item 5D et réponse attendue

Pareillement, cet item et les modalités qui en découlent sont tous exprimés de manière implicite ou explicite à l'aide de probabilités conditionnelles ne permettant pas aux sujets de choisir facilement lequel des trois événements conditionnels, $(H \mid \mathcal{D})$, $(\mathcal{D} \mid H)$ ou $(\mathcal{D}' \mid \mathcal{D})$, est mis en avant. De telles probabilités (conditionnelles) sont usuelles dans le langage des tests statistiques. Par ailleurs, « *connaître la probabilité que le résultat soit répliqué* », équivalente à la connaissance de la probabilité impliquée par cet item, est l'un des plusieurs rôles d'un test statistique habituellement déclarés aux étudiants lors d'un cours. Il est évident que ce n'est pas en vue d'un tel rôle qu'un test statistique est conçu, du fait que « *la probabilité que le résultat soit répliqué* » n'est autre que « *la probabilité de données $\mathcal{D}'$ sachant d'autres données $\mathcal{D}$* » $(P(\mathcal{D}' \mid \mathcal{D}))$, que les tests statistiques ne peuvent pas générer. En effet, toute présentation des résultats d'un test statistique doit être formulée sous la condition « *sachant que H_0 est vraie* », et non « *sachant des données* » (Haller, Krauss, 2002; Zaki, Elm'hamedi, 2009). La probabilité conditionnelle indiquée dans la modalité *b* de cet item est équivalente à la probabilité $P(\mathcal{D}' \mid \mathcal{D})$, tandis que celles mentionnées dans les modalités *a* et *c* sont respectivement équivalentes au complément à 1 de la probabilité $P(\mathcal{D} \mid H_0)$ et à la probabilité $P(H_1 \mid \mathcal{D})$.

E. A votre avis, l'assertion : **« *La probabilité que le juge décide incorrectement la culpabilité du prévenu X* »** est la même que l'assertion :

O **a. « La probabilité que le prévenu X soit coupable et que le juge décide son innocence ».**

O **b. « La probabilité que le prévenu X soit innocent, sachant que le juge décide sa culpabilité ».**

⊗ **c. « La probabilité que le juge décide la culpabilité du prévenu X, sachant qu'il est innocent ».**

Item 5E et réponse attendue

« *La probabilité de rejeter incorrectement l'hypothèse H_0* » est la définition usuelle donnée dans la théorie des tests d'hypothèses pour le concept de *risque de $1^{ère}$ espèce*. Elle est équivalente dans le cas de la présente situation à « *la probabilité que le juge décide incorrectement la culpabilité du prévenu X* ». Cette définition désigne vraiment *la probabilité de rejeter l'hypothèse H_0 sachant qu'elle est vraie ($P(\mathcal{D} \mid H_0)$)*. Une telle probabilité est la même que celle indiquée dans la modalité *c* de cet item. Cependant, la façon d'exprimer cet item et les modalités correspondantes met en question une autre fois le problème du choix adéquat des événements mis en œuvre dans les différentes probabilités signalées. En effet, la probabilité impliquée dans cette définition semble non conditionnelle et pourrait conduire le sujet à croire à tort que c'est une probabilité conjointe (non conditionnelle) des deux événements : « *l'hypothèse nulle est vraie* » et « *on rejette l'hypothèse nulle* » *($P(\mathcal{D} \cap H_0)$)*, comme dans le cas de la modalité *a*, ou « *la probabilité de réalisation de H_0 sachant qu'on a décidé de la rejeter* » *($P(H_0 \mid \mathcal{D})$)*, comme dans le cas de la modalité *b*.

Nous présentons dans le tableau 2 qui suit le récapitulatif des éléments caractéristiques des différents items et modalités relatifs à la question 5 du questionnaire, en définissant ce que signifient les événements $\mathcal{D}$ (ou éventuellement $\mathcal{D}'$) et H, ainsi que les probabilités conditionnelles (ou conjointes) correspondantes. Nous rappelons que le langage (*ambigu*) par lequel les items et leurs modalités sont exprimés, pourrait éventuellement être la cause principale, d'une part, de la méconnaissance, par les étudiants, qu'il s'agit d'une probabilité conditionnelle, et d'autre part, de la confusion non seulement entre l'événement relatif aux données $\mathcal{D}$ et celui relatif aux hypothèses H, mais aussi entre l'événement conditionné et celui conditionnant dans la probabilité conditionnelle impliquée.

Item et *Concept impliqué*		***Evénement*** **$(\mathfrak{D})$ ou $(\mathfrak{D}')$**	***Evénement*** **(H)**	***Evénement conditionnel ou conjoint impliqué***
Item A: ***Bayésien indirect***		*On a observé les données D_0* (D_0)	*La décision prise par le juge est due au seul hasard* (H_0)	**$(H_0 \mid D_0)$**
Modalités	***a***	*On a observé les données D_0* (D_0)	*La décision prise par le juge est produite par un processus de hasard* (H_0)	**$(H_0 \mid D_0)$**
	b	*Les données construites D_0 appartiennent à la région critique RC* (RC)	*Obtenir par hasard la décision prise par le juge* (H_0)	$(RC \mid H_0)$
	c		*Un processus, considéré comme étant un processus de hasard, pourrait produire la décision prise par le juge* (H_0)	$(RC \mid H_0)$
Item B: ***Puissance***		*Le juge décide la culpabilité du prévenu X* (RC)	*Le prévenu X est coupable* (H_1)	**$(RC \mid H_1)$**
Modalités	***a***	*Le juge décide la culpabilité du prévenu X* (RC)	*Le prévenu X est coupable* (H_1)	**$(RC \mid H_1)$**
	b			$(RC \cap H_1)$
	c			$(H_1 \mid RC)$
Item C: ***Niveau de signification***		*Le juge rejette l'innocence d'un prévenu* (RC)	*Le juge se trompera en rejetant l'innocence d'un prévenu* (H_0)	(1) $(RC \mid H_0)$
		Le juge accuse un prévenu d'être coupable (RC)	*Le prévenu est innocent* (H_0)	(2) $(H_0 \mid RC)$
Modalités	Oui			$(RC \mid H_0) = (H_0 \mid RC)$

	Non			**$(RC \mid H_0)$ $\neq$ $(H_0 \mid RC)$**
Item D: ***Réplicabilité***		*Les nouvelles données construites R permettent au juge de reprendre la même décision qu'il avait déjà prise en construisant les données D_0 (i.e., décider la culpabilité du prévenu X* (RC) *Le juge décide la culpabilité du prévenu X* (D_0)	-	**$(RC \mid D_0)$**
Modalités	a	*Décider que le prévenu X est coupable* (RC)	*Le prévenu X est innocent* (H_0)	$(RC \mid H_0)^c$
	b	*Décider que le prévenu X est coupable* (RC) *On avait déjà décidé que le prévenu X est coupable* (D_0)	-	**$(RC \mid D_0)$**
	c	*On avait déjà décidé que le prévenu X est coupable* (D_0)	*Le prévenu X est coupable* (H_1)	$(H_1 \mid D_0)$
Item E: ***Risque de 1ère espèce***		*Le juge décide la culpabilité du prévenu X* (RC)	*Le prévenu X est innocent* (H_0)	**$(RC \mid H_0)$**
Modalités	a	*Le juge décide l'innocence du prévenu X* (RC)	*Le prévenu X est coupable* (H_1)	$(H_1 \cap RA)$
	b		*Le prévenu X est innocent* (H_0)	$(H_0 \mid RC)$
	c	*Le juge décide la culpabilité du prévenu X* (RC)		**$(RC \mid H_0)$**

Tableau 2. Récapitulatif des éléments caractéristiques des différents items et de leurs modalités relatifs à la question 5 du questionnaire

3.3. Codage et outil d'analyse retenus pour le traitement des réponses des étudiants

Pour le traitement des réponses des étudiants, l'analyse factorielle des correspondances multiples (AFCM), nous a semblé être un outil efficace, puisqu'il va permettre d'analyser et d'interpréter les réponses des étudiants en termes de liens qui existent entre les différentes modalités des différents items du questionnaire.

Dans les tableaux 3 et 4 suivants, nous résumons, les différents questions et items du questionnaire, ainsi que les significations et les codages des modalités associées. Ces deux tableaux sont, en quelque sorte, un complément de l'analyse *a priori* dont nous avons commencé à présenter l'essentiel dans la section 3.2. de cet article.

Question	***Items***	***Modalité correcte***	***Codes[15]***
Question1	A	Non	1Ar/1Ae
	B	Non	1Br/1Be
	C	Oui	1Cr/1Ce
	D	Non	1Dr/1De
	E	Non	1Er/1Ee
Question 2	A	Oui	2Ar/2Ae
	B	Non	2Br/2Be

Item	***Probabilités conditionnelles impliquées***	***Modalités[16]***	***Probabilités impliquées[17]***	***Codes[18]***
Item A	$P(H_0 \mid D_0)$	***a***	$P(H_0 \mid D_0)$	5Ar
		b	$P(RC \mid H_0)$	5Ab
		c	$P(RC \mid H_0)$	5Ac
Item B	$P(RC \mid H_1)$	***a***	$P(RC \mid H_1)$	5Br
		b	$P(RC \cap H_1)$	5Bb
		c	$P(H_1 \mid RC)$	5Bc
Item C	$P(H_0 \mid RC)$ *et* $P(RC \mid H_0)$	Oui	$P(H_0 \mid RC) = P(RC \mid H_0)$	5Ce

[15]Le codage adopté pour les modalités est de la forme nXy, où n est le *numéro de la question de la modalité*, X la *lettre désignant l'item de la modalité*, et y la *lettre désignant la modalité de l'item X appartenant à la question.* Les modalités de types nXr ou nXe (c'est-à-dire, y= r ou y= e) désignent respectivement la réussite ou l'échec à l'item X de la question numéro n. Ce dernier codage est utilisé pour les items en Oui/Non. De même, le codage nXr (c'est-à-dire, y= r) est aussi utilisé pour les modalités des items autres que ceux en Oui/Non et ce pour désigner qu'une telle modalité est celle qui est considérée correcte.

[16]Les lettres écrites en gras indiquent que les modalités correspondantes sont considérées comme correctes.

[17] Chacune des probabilités indiquées dans les items et dans les modalités correspondantes de la question 5 est relative soit à la conjonction ou au conditionnement des deux événements $\mathfrak{D}$ et H. Ces derniers sont implicitement ou explicitement mentionnés dans les différentes formulations de tels items et modalités. Ces formulations sont conçues de façon que les sujets ne puissent pas mettre facilement en évidence les deux événements indiqués, ainsi que le type de probabilité sous-jacentes, à savoir conjointe ou conditionnelle.

[18] C'est le même codage que celui signalé dans le tableau 3, pour les modalités des différents items des questions 1, 2, 3 et 4.

Question 3	A	Oui	3Ar/3Ae
	B	Oui	3Br/3Be
	C	Non	3Cr/3Ce
	D	Oui	3Dr/3De
Question 4	A	Non	4Ar/4Ae
	B	Oui	4Br/4Be
	C	Non	4Cr/4Ce
	D	Oui	4Dr/4De

Tableau 3. Codage des modalités des items des questions 1, 2, 3, 4

		Non	$P(H_0 \mid RC) \neq P(RC \mid H_0)$	5Cr
Item D	$P(RC \mid D_0)$	a	$1- P(RC \mid H_0)$	5Da
		b	$P(RC \mid D_0)$	5Dr
		c	$P(H_1 \mid D_0)$	5Dc
Item E	$P(RC \mid H_0)$	a	$P(H_1 \cap RA)$	5Ea
		b	$P(H_0 \mid RC)$	5Eb
		c	$P(RC \mid H_0)$	5Er

Tableau 4. Codage des modalités des items de la question 5

préta

Rappelons que nous avons choisi l'AFCM pour analyser les données de cette étude. Nous présentons, dans ce qui suit, les éléments nécessaires à l'application de cette méthode multi-dimensionnelle ainsi que les résultats d'analyse auxquels nous sommes arrivés à travers son application.

3.4.1. Valeurs propres et inertie totale

L'AFCM[19] appliquée au tableau disjonctif complet issu du codage des réponses des étudiants, a conduit à des valeurs propres non nulles de moyenne 0,05 (l'inverse du nombre d'items qui est égal à 20). Par ailleurs, les valeurs propres supérieures à cette moyenne sont présentées dans le tableau 5 suivant:

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}	λ_{11}
0,111	0,100	0,092	0,086	0,075	0,072	0,066	0,063	0,058	0,053	0,052

Tableau 5. Valeurs propres

L'inertie totale est égale à 1,20 (nombre de valeurs propres non nulles, divisé par le nombre d'items).

3.4.2. Nombre d'axes retenus dans l'analyse

Nous rappelons tout d'abord que l'inertie totale en AFCM appliquée à un tableau disjonctif complet n'a pas de signification statistique[20]; elle ne dépend pas des observations, elle dépend uniquement du nombre de variables et du nombre de modalités impliquées. Par ailleurs, le calcul des taux d'inertie liés aux onze valeurs propres ci-dessus conduit à des pourcentages décroissant de 9,25% à pratiquement 4,33%, ce qui donne une idée assez pessimiste des parts d'informations obtenues par l'analyse factorielle. Nous avons donc eu recours à la formule proposée par Benzécri

---

[19] Cette analyse a été conduite à l'aide du logiciel Statistica (Version 6).

[20] Ce n'est pas le cas pour le calcul d'inertie en analyse de correspondances simples d'un tableau de Burt.

(1979), qui dans une telle situation, va permettre une meilleure appréciation des taux d'inertie :

Inertie corrigée : $\left(\frac{s}{s-1}\right)^2 \left(\lambda_k - \frac{1}{s}\right)^2$ pour $\lambda_k > \frac{1}{s}$, où s est le nombre d'items du questionnaire et λ_k les valeurs propres obtenues par l'analyse du tableau disjonctif complet.

L'application de cette formule aux inerties initiales[21], donne pour les valeurs propres supérieures à 0,05, les résultats présentés dans le tableau 6 qui suit.

Valeurs propres	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
Inerties corrigées	0,004118	0,002796	0,001934	0,001421	0,000682	0,000556

Valeurs propres	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}	λ_{11}
Inerties corrigées	0,000281	0,000186	0,000072	0,000011	0,000004

Tableau 6. Inerties corrigées associées aux valeurs propres

Le tableau 7 suivant fournit les pourcentages d'inerties corrigées et leurs cumuls, correspondant aux valeurs propres supérieures à la valeur moyenne $\frac{1}{20}$:

Valeurs propres	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9	λ_{10}	λ_{11}
% Inerties corrigées	34	23	16	12	6	5	2	2	1	≈ 0	≈ 0
Cumul % Inerties corrigées	34	57	73	85	91	96	98	≈ 100	≈ 100	≈ 100	≈ 100

Tableau 7. Pourcentages d'inerties corrigées et leurs cumuls

Par conséquent, le premier axe représente 34% de l'information totale, le deuxième axe 23%, le troisième axe 16% et le quatrième axe 12% (les axes suivants chutent à une part d'information représentant moins de la moitié du quatrième axe). Ces valeurs indiquent que l'essentiel de l'information est lié aux quatre premiers axes factoriels qui représentent ensemble 85% de l'information totale.

Par ailleurs, les deux premières valeurs propre λ_1=0,111 et λ_2=0,100 sont très proches ; cela signifie que nous sommes pratiquement en présence d'une valeur propre double. En revanche, λ_3=0,092 est significativement supérieure à λ_4=0,086. Par conséquent, nous allons étudier, d'une part, le plan (1,2), et d'autre part, les axes 2 et 3, plutôt que de chercher à donner séparément une interprétation à chacun des 3 premiers axes. Avant d'entamer une telle étude, nous allons consacrer la prochaine section à la présentation de quelques éléments d'analyse globale que nous avons pu déduire en mettant en œuvre les différents plans et axes factoriels que nous avons pu retenir.

[21] Dans la suite de l'analyse, nous nous limiterons simplement aux 11 premières valeurs propres.

3.4.3. Eléments d'analyse globale

En premier lieu en nous basant sur des éléments élémentaires de la statistique descriptive, nous pouvons signaler que *le vocabulaire et le langage* adoptés par les procédures de tests statistiques sont nettement ouverts à plusieurs interprétations (fallacieuses) par nos sujets. Ceci est déduit des pourcentages élevés (compris entre 27% et 85%) des réponses erronées aux différents items du questionnaire. Nous rappelons au passage que ces réponses erronées sont repérées à la fois chez les sujets qui avaient déjà suivi un cours sur les tests statistiques et chez ceux qui n'en avaient pas suivi. Ces pourcentages sont faibles tant pour les items relatifs à *l'ambigüité linguistique* que pour les items concernant *le vocabulaire,* excepté l'item 5C relatif à la distinction, *dans un cadre fréquentiste,* entre la probabilité $P(\mathcal{D} | H)$ qui désigne le concept de niveau de signification, et la probabilité inverse $P(H | \mathcal{D})$, pour lequel ce pourcentage a pu atteindre les 56%.

De plus, les items du questionnaire font référence à une exploration conceptuelle à propos des tests statistiques, et non pas aux performances des étudiants en situation de résolution de problèmes sur ce sujet. Il est donc normal que la plus grande part de l'information (1er plan factoriel) contenue dans les réponses des étudiants ne se traduise pas en termes de performances des étudiants, autrement dit en termes de réussites-échecs. Notons aussi au passage, que dans les oppositions de groupes de modalités à fortes contributions relatives au plan et aux axes factoriels retenus pour l'analyse, nous n'avons pas une opposition nette de modalités contraires. Ce qui confère au questionnaire une hétérogénéité de degré plus ou moins moyen.

Cette hétérogénéité peut être expliquée, d'un côté, par la nature de notre questionnaire qui est formé non seulement d'items en bi-modalités mais aussi en tri-modalités, et d'un autre côté, par l'hétérogénéité des sujets (le public cible) questionnés, dans la mesure où il existe parmi eux ceux qui avaient déjà suivi un cours sur les tests statistiques et ceux qui n'en avaient jamais suivi. Une telle hétérogénéité peut aussi être due à la façon selon laquelle les différents items sont construits, qui ne permet pas aux sujets de facilement reconnaître qu'ils sont face à un questionnaire (homogène) qui tourne autour d'un objectif unique et bien défini, à savoir dans notre cas, l'exploration de l'effet que pourraient avoir le vocabulaire et l'ambiguïté linguistique sur la compréhension de la procédure des tests statistiques.

Sans doute, une telle hétérogénéité est l'une des causes principales du caractère non discriminant[22] des items 1D, 1E et 5E, dont les modalités n'ont que de très faibles contributions relatives aux quatre axes factoriels retenus. Du caractère non discriminant de 1D et 1E, on ne peut pas extraire beaucoup d'information, sinon qu'il

---

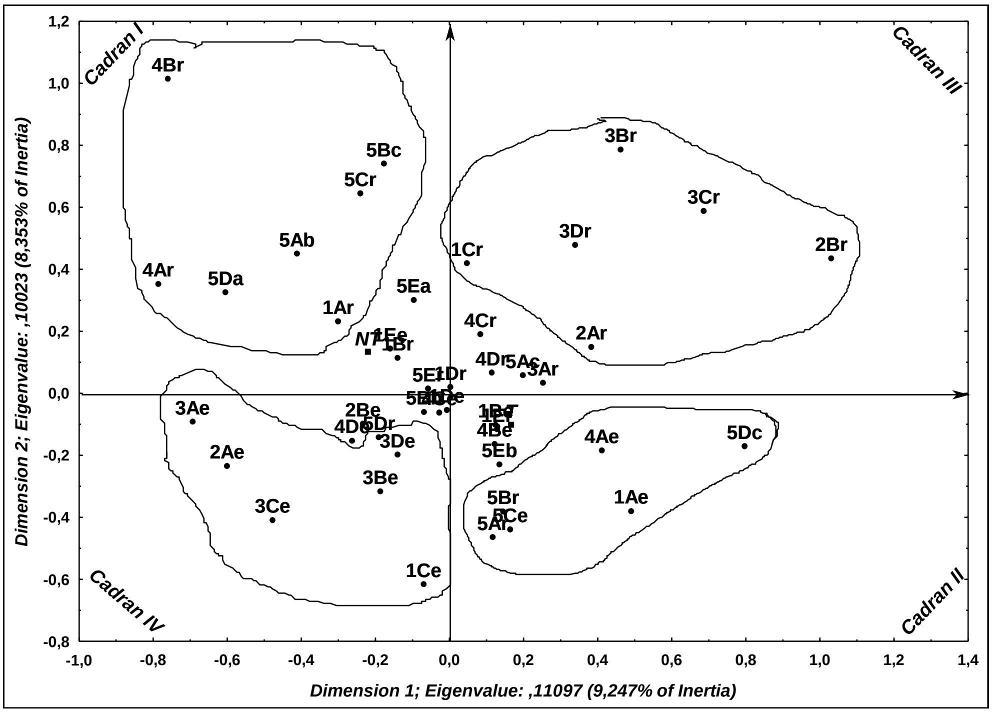
[22] Cela revient à dire que leur présence ou leur absence n'ont pas d'influence sur les réponses des sujets au questionnaire tout entier. Par conséquent l'analyse du questionnaire ne changera pas si on ne les considère pas.

n'y a pas de fortes corrélations entre les réponses individuelles aux différents items du questionnaire et à chacun de ces deux items. Au contraire, celui de l'item 5E conduit à conclure que le langage habituellement utilisé a vraiment un effet négatif sur l'interprétation des concepts et des expressions utilisés relativement aux tests statistiques. En effet, les expressions utilisées pour formuler les items 5B et 5E ne diffèrent que par le fait que le terme *correctement* a été remplacé par le terme *incorrectement*. Contrairement à l'item 5E, l'item 5B est tout à fait discriminant (voir modalités à fortes contributions relatives dans les graphiques 1, 2 et 3). Par ailleurs, les probabilités conditionnelles impliquées par les items 5B et 5E sont respectivement $P(RC \mid H_1)$ et $P(RC \mid H_0)$. Cela signifie que l'échange des deux termes *correctement* et *incorrectement* fait passer d'une probabilité conditionnelle à H_1 à une probabilité conditionnelle à H_0. Mais ce passage n'est pas effectué par les étudiants qui n'ont pas choisi en même temps la modalité (correcte ou fausse) pour l'item 5B et la modalité correspondante (correcte ou fausse) pour l'item 5E. En effet, dans les graphiques 1, 2 et 3, en portant l'attention sur les proximités des modalités de l'item 5B de celles de l'item 5E (sans tenir compte de l'ordre de grandeur de leurs contributions relatives à la construction des axes factoriels retenus), on peut remarquer que les modalités 5Br, 5Ba et 5Bc sont très éloignées respectivement des modalités 5Er, 5Ea et 5Eb. Ceci explique une fois de plus l'effet que pourrait avoir l'ambiguïté linguistique sur la compréhension des tests statistiques.

De même, les items 5C et 5E impliquent tous les deux le même concept, à savoir le niveau de signification (ou le risque de 1ère espèce), identifié par la probabilité conditionnelle $P(RC \mid H_0)$. Ceci devrait être concrétisé par des proximités, dans les graphiques 1, 2 et 3, entre les deux modalités 5Ce et 5Eb et entre les deux modalités 5Cr et 5Er. Mais c'est le constat que les modalités 5Cr et 5Ce sont respectivement proches des modalités 5Ea et 5Eb qui retient l'attention. Une explication acceptable tient au langage dans lesquels les deux items et leurs modalités sont exprimés: *fréquentiste* pour l'item 5C et *probabiliste* pour l'item 5E. De plus, cette proximité remarquée entre 5Cr et 5Ea nous rend conscients de l'existence d'une difficulté conceptuelle très importante dans notre public cible, en raison de l'existence de sujets qui comprennent bien que les probabilités $P(RC \mid H_0)$ et $P(H_0 \mid RC)$ soient différentes, mais qui en même temps confondent $P(RC \mid H_0)$ avec $P(H_1 \cap RA)$. Ceci explique à nouveau l'effet que pourrait avoir l'ambiguïté linguistique sur l'interprétation des expressions usuelles relativement aux tests statistiques.

3.4.4. Interprétation du plan factoriel (1, 2)

L'AFCM conduit à des inerties de 34% pour l'axe 1 et de 23% pour l'axe 2. Le graphique 1 suivant représente la projection de l'ensemble des modalités par rapport au plan (1,2):



Graphique 1. *Plan factoriel (1, 2)*

Les modalités correspondant aux plus fortes contributions relatives (comprises entre 3,3% et 9,6%) dans la construction des axes 1 et 2, et ayant une bonne représentation, sont celles qui sont entourées dans le graphique 1. Ces modalités, distribuées en quatre regroupements (voir cadrans de I à IV, graphique 1), donnent lieu, dans le plan factoriel (1,2), à deux oppositions : *Cadran I vs Cadran II* et *Cadran III vs Cadran IV*. Ainsi, avant d'attribuer des significations à ces deux oppositions, qui aideront à mettre en place une interprétation convenable de ce 1^er^ plan factoriel qui contient une part très importante d'information des réponses des étudiants, nous allons étudier quelques proximités remarquées, dans le graphique 1, entre les différentes réussites et les différents échecs aux items de notre questionnaire.

Les différents items des questions 2, 3 et 4 sont soit de caractère *relatif*, soit de caractère *absolu*. Bien qu'ils soient formulés de façons différentes, chacun d'entre eux est évidemment associé à l'un de ces deux caractères. Ces items reflètent, en quelques sortes, les interprétations variées (*vraies* ou *fausses*) usuellement données par les étudiants, et même par les professionnels, aux différents concepts habituellement utilisés relativement aux tests statistiques. Ces concepts sont mobilisés par les questions sous-jacentes, à savoir : « *Prouver la véracité d'une hypothèse* » pour la question 2, « *Hypothèse vraie* » pour la question 3 et « *Résultat significatif* » pour la question 4. On en déduit alors que non seulement les réussites aux différents items composant ces trois questions devraient être proches sur le graphique 1, mais aussi que les échecs correspondants devraient être proches. Un tel constat est satisfait pour la plupart des items, sauf pour les modalités (4Ar, 4Br) et (4Ae, 4Be), qui forment chacune un groupe, et qui se trouvent respectivement éloignées des autres réussites et des autres échecs aux items des trois questions susmentionnées. Ceci est sans doute dû au vocabulaire trompeur, utilisé en tests statistiques, à savoir l'expression « *le résultat est significatif* » qui figure dans la question 4 du questionnaire. En effet, une telle expression est habituellement utilisée pour indiquer que le résultat fourni par le test statistique est *le rejet de l'hypothèse* H_0, ou *l'acceptation de l'hypothèse* H_1 dans le cas des tests d'hypothèses. Cette dernière expression est, en quelque sorte, équivalente à l'expression « *l'hypothèse* H_1 *est vraie* », figurant dans la question 3. Cependant, contrairement aux items de cette dernière question, les réussites (ou les échecs) aux items de la question 4 ne sont pas tous voisins des réussites (ou des échecs) aux différents items des questions 2, 3 et 4.

De même, les proximités observées dans le graphique 1, entre 5Ab, 5Bc, 5Cr et 5Da, d'un côté, et entre 5Ar, 5Br, 5Ce et 5Dc, de l'autre, montrent de manière nette l'existence de sujets qui distinguent entre les deux probabilités $P(\mathcal{D}|H)$ et $P(H|\mathcal{D})$ (5Ar, 5Br et 5Cr) et qui en même temps commettent l'erreur induisant non seulement à considérer que ces deux probabilités sont égales (5Ab, 5Bc et 5Ce) mais aussi que la probabilité $P(\mathcal{D}|H)$ est égale au complémentaire de la probabilité $P(\mathcal{D}'|\mathcal{D})$ (5Da et 5Dc). Ceci est sans doute dû au langage par lequel les items et les modalités de la question 5 sont exprimés, dans la mesure où les autres facteurs susceptibles d'induire de telles difficultés, surtout ceux à caractère psychanalytique (cf. § 2.5), pourraient être exclus ici, à cause de l'hétérogénéité de nos sujets, d'une part, et de leur ignorance de l'ignorance de l'orientation du questionnaire vers les tests statistiques, d'autre part. Ceci explique une autre fois l'effet possible de *l'ambiguïté linguistique* sur l'interprétation des concepts utilisés dans les tests statistiques. Le positionnement des deux groupes de modalités (5Ab, 5Bc, 5Cr et 5Da) et (5Ar, 5Br, 5Ce et 5Dc) renforce une telle conjecture, dans la mesure où ils impliquent tous deux les deux difficultés déjà indiquées, alors même qu'ils se placent dans des cadrans *opposés* (cadran I et cadran II) du graphique1.

Après cette étude succincte des proximités observées entre les différentes modalités dans ce 1er plan factoriel, nous consacrons le paragraphe suivant à l'extraction d'informations supplémentaires à partir des réponses des sujets, pour enfin attribuer à ce plan une signification qui lui convient. Rappelons qu'il y a quatre groupes de modalités qui ont de fortes contributions relatives à la construction de ce 1er plan factoriel et qui s'opposent deux à deux[23]: d'une part, 1Ar, 4Ar, 4Br, 5Ab, 5Bc, 5Cr

[23] Voir Cadran I, Cadran II, Cadran III et Cadran IV du graphique 1.

et 5Da contre 1Ae, 4Ae, 5Ar, 5Br, 5Cr et 5Dc, et d'autre part, 1Cr, 2Ar, 2Br, 3Br, 3Cr et 3Dr contre 1Ce, 2Ae, 3Ae, 3Be, 3Ce et 3De.

- *Cadran I vs Cadran II:*

Dans ces deux cadrans, nous sommes en présence de l'opposition : 1Ar, 4Ar, 4Br, 5Ab, 5Bc, 5Cr et 5Da *vs* 1Ae, 4Ae, 5Ar, 5Br, 5Cr et 5Dc. Ainsi, comme nous l'avons déjà indiqué dans les paragraphe précédents, les deux groupes de modalités (5Ab, 5Bc, 5Cr et 5Da) et (5Ar, 5Br, 5Cr et 5Dc), qui figurent respectivement dans le cadran I et le cadran II, impliquent tous les deux l'existence de sujets qui distinguent entre les deux probabilités $P(\mathcal{D}|H)$ et $P(H|\mathcal{D})$ dans des situations, mais qui commettant non seulement l'erreur induisant que ces deux probabilités soient égales dans d'autres situations similaires, mais aussi l'erreur consistant à avancer que la probabilité $P(\mathcal{D}|H)$ soit égale au complémentaire de la probabilité $P(\mathcal{D}'|\mathcal{D})$. De plus, la modalité 4Br est une conséquence logique de la modalité 4Ar, dans la mesure où il est rare de trouver un sujet caractérisé par 4Ar et 4Be à la fois, du fait que l'item 4B est, en quelques sortes, une négation de l'item 4A. Nous traduisons ceci par le fait que ces deux cadrans opposent la réussite à l'échec au fait que l'expression r*ésultat significatif* désigne vraiment un résultat à caractère *relatif* et non *absolu*. Enfin, nous remarquons aussi que les deux modalités 1Ar et son opposée 1Ae se trouvent dans ces mêmes cadrans. Pareillement, cela signifie que ces deux cadrans, I et II, opposent aussi la réussite à l'échec au fait que le terme *nulle* indiqué dans l'expression *hypothèse nulle* ne signifie en aucun cas « *sans valeur* ».

- *Cadran III vs Cadran IV:*

De même, dans ces deux cadrans, nous sommes en présence de l'opposition (réussites-échecs) de 1Cr, 2Ar, 2Br, 3Br, 3Cr et 3Dr *vs* 1Ce, 2Ae, 3Ae, 3Be, 3Ce et 3De. Contrairement aux deux cadrans, I et II, dans lesquels un mélange de modalités relatives au *vocabulaire* et à *l'ambiguïté linguistique* impliqués par les tests statistiques, est mis en jeu, les deux cadrans III et IV sont concernés par le vocabulaire *seul*.

La formulation d'un item donné de la question 3 explicite soit le caractère *absolu* (*erroné*) de la véracité d'une hypothèse comme dans le cas de l'item 3C, soit le caractère *relatif* (*correct*) de cette véracité comme dans le cas des autres items : 3A, 3B, 3D et 3E. Ce caractère relatif est exprimé dans ces items par différents aspects qui tous l'impliquent. Ces aspects sont soit *intrinsèques* à l'hypothèse elle-même comme dans le cas de l'item 3D, soit liés à *la personne* qui décide de cette véracité tout en utilisant son *jugement argumenté*, son *raisonnement rationnel*, …, comme dans le cas des items 3A et 3B. On en déduit alors que la *réussite* (*respectivement l'échec*) à n'importe quel item de cette question 3 implique le caractère *relatif* (*respectivement absolu*) de la notion de *véracité d'une hypothèse*. De même, alors que la modalité 2Be ne se trouve pas parmi le groupe de modalités entourées dans le cadran IV du graphique 1, sa contribution relative à la construction du 1er plan factoriel n'est pas faible comparée aux contributions relatives des autres modalités, comme 2Ae. Nous pouvons donc dire que ces deux cadrans opposent les deux groupes de modalités (2Ar et 2Br) et (2Ae et 2Be) et nous interprétons ceci comme le fait que le *raisonnement adopté*[24] pour montrer la véracité d'une hypothèse est à caractère *relatif* et non *absolu*[25].

Enfin, remarquons aussi que chacune des modalités 1Cr et son opposée 1Ce est nettement située dans un cadran, avec une forte composante sur l'axe 2. Cela signifie que les deux cadrans III et IV opposent aussi la réussite à l'échec à la définition *correcte*, donnée par *Fisher*, au concept *d'hypothèse nulle*, à savoir : « *C'est une hypothèse prévue pour être falsifiée ou rejetée, afin de gagner un support susceptible de permettre un progrès scientifique* ».

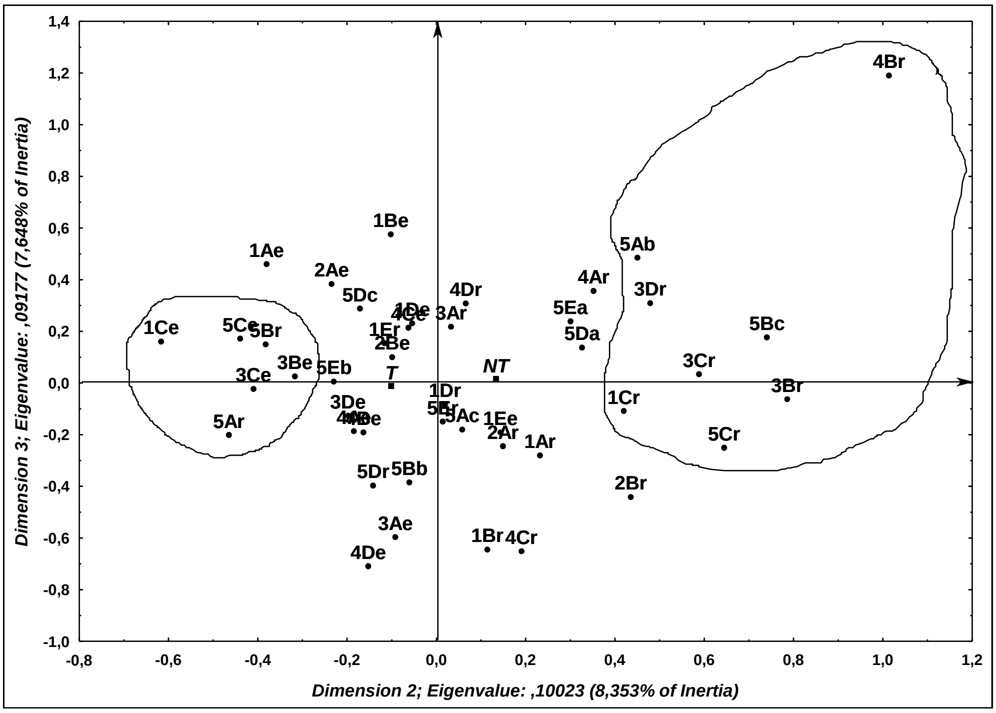
En conclusion, le plan (1,2) est *un plan d'ambiguïté linguistique et de réussite-échec en vocabulaire utilisé*, qui se traduit par :

- Une distinction mal assimilée entre les trois probabilités $P(\mathcal{D} \mid H)$, $P(H \mid \mathcal{D})$ et $P(\mathcal{D}' \mid \mathcal{D})$, associée à une réussite-échec au fait que l'expression « *résultat significatif* » désigne un résultat à caractère *relatif* et non *absolu*, et au fait que le qualificatif *nulle* dans l'expression « *hypothèse nulle* » est tout à fait différent du qualificatif « *sans valeur* » *(Cadran I vs Cadran II)*;
- Une réussite ou un échec au fait que la notion de « *véracité d'une hypothèse* » et celle de *raisonnement* adopté pour montrer une telle véracité sont toutes les deux à caractère *relatif* et non *absolu*, est associée à une réussite ou un échec à la définition correcte (*donnée par Fisher*) au concept d'*hypothèse nulle (Cadran III vs Cadran IV).*

3.4.5. Interprétation du 2ème axe factoriel

L'AFCM conduit à une inertie de 23% pour l'axe 2. Les modalités qui contribuent le plus à la construction de cet axe sont celles entourées dans le graphique 2 ci-après[26]. Elles ont une contribution comprise entre 3,3% et 8,9%. La qualité de représentation de ces modalités par rapport à cet axe est comprise entre 0,095 et 0,290.

[24] Selon la logique des tests statistiques.
[25] Ibid.
[26] Notons au passage que ces modalités occupent des positions correspondant aux modalités ayant les plus grandes coordonnées en valeur absolue par rapport au 2ème axe factoriel. Les autres modalités occupent des positions quasiment intermédiaires, avec en outre de faibles contributions relatives.



Graphique 2. *Plan factoriel (2, 3)*

Dans le deuxième plan factoriel, le 2ème axe factoriel présente l'opposition suivante: 1Ce, 3Be, 3Ce, 5Ar, 5Br et 5Ce *vs* 1Cr, 3Br, 3Cr, 3Dr, 4Br, 5Ab, 5Bc et 5Cr.

Cet axe oppose donc une absence de relativité conférée à la véracité d'une hypothèse (3Be, 3Ce), à la présence d'une telle relativité sous ses différents aspects, à savoir: celui *intrinsèque* à l'hypothèse (3Br), celui lié à *la personne* qui utilise son jugement argumenté pour pouvoir décider de la véracité (*ou non*) (3Dr), et enfin celui relatif au pouvoir d'être vigilant à conclure sur cette véracité, bien qu'elle soit exprimée par des termes absolus habituellement utilisés, comme par exemple: « *résultat significatif* » (4Br). Notons au passage que la présence de la modalité 3Cr du côté des modalités 3Br, 3Dr et 4Br n'est qu'un support qui consolide notre interprétation concernant la relativité de l'hypothèse.

De plus, l'axe 2 oppose les deux groupes de modalités (5Ar, 5Br et 5Ce) et (5Ab, 5Bc et 5Cr). Chaque modalité d'un groupe donné trouve son opposé dans l'autre groupe. Le mélange de modalités, de réussites et d'échecs, composant chacun des deux groupes nous a permis de conclure à l'effet que peut avoir *l'ambiguïté linguistique* sur l'interprétation des concepts utilisés en tests statistiques. En effet, pour le groupe de modalités[27]: (5Ar, 5Br et 5Ce), il est vrai que la réussite à l'item 5A permet d'emblée de supposer que le langage, impliquant une approche *bayésienne indirecte*, habituellement utilisé pour définir le rôle pour lequel un test statistique est conçu, à savoir: déterminer « *la probabilité que la décision prise par le juge soit due au seul hasard* », n'a pas d'effet sur la confusion, par les sujets, des probabilités: $P(H|\mathcal{D})$ et $P(\mathcal{D}|H)$ mobilisées par les différentes modalités de cet item. Il est vrai aussi que la réussite à l'item 5B permet de supposer que le langage habituellement utilisé pour définir la puissance statistique : « *la probabilité que le juge décide correctement la culpabilité du prévenu X* », n'a pas d'effet sur la confusion des probabilités $P(H|\mathcal{D})$, $P(\mathcal{D}|H)$ et $P(\mathcal{D} \cap H)$ mobilisées dans les différentes modalités de cet item. Cependant, l'échec à l'item 5C montre que cette supposition n'est pas valide dans tous les contextes. En effet, en exprimant, dans *un cadre fréquentiste*, les deux probabilités $P(H|\mathcal{D})$ et $P(\mathcal{D}|H)$, tout en utilisant la probabilité $P(\mathcal{D}|H)$ pour déterminer un *niveau de signification*, les sujets qui paraissaient avoir distingué la nuance qui pourrait exister entre ces probabilités conditionnelles, en ayant auparavant réussi à répondre aux items 5A et 5B, commettent encore une telle confusion. Ceci fait à nouveau apparaître l'effet du langage utilisé sur l'interprétation des concepts et expressions mobilisés par un test statistique.

Enfin, ce 2ème axe confirme encore l'opposition de la réussite (1Cr) à l'échec (1Ce) sur la définition *correcte* (donnée par *Fisher*) de ce que signifie le concept « *d'hypothèse nulle* ».

En conclusion, les tendances expliquées par le 2ème axe factoriel renvoient à une *présence-absence* de relativité du vocabulaire utilisé, associé à *réussite-échec* sur la définition *correcte* (donnée par *Fisher*) du concept *d'hypothèse nulle*, accompagnée d'une ambiguïté linguistique impliquant la confusion entre les probabilités conditionnelles $P(\mathcal{D}|H)$, $P(H|\mathcal{D})$ et $P(\mathcal{D}\cap H)$. Par conséquent, le 2ème axe factoriel peut être interprété comme *un axe de confirmation de l'ambiguïté linguistique et de la réussite-échec en vocabulaire utilisé, déjà trouvés dans le plan (1,2).*

3.4.6. Interprétation du 3ème axe factoriel

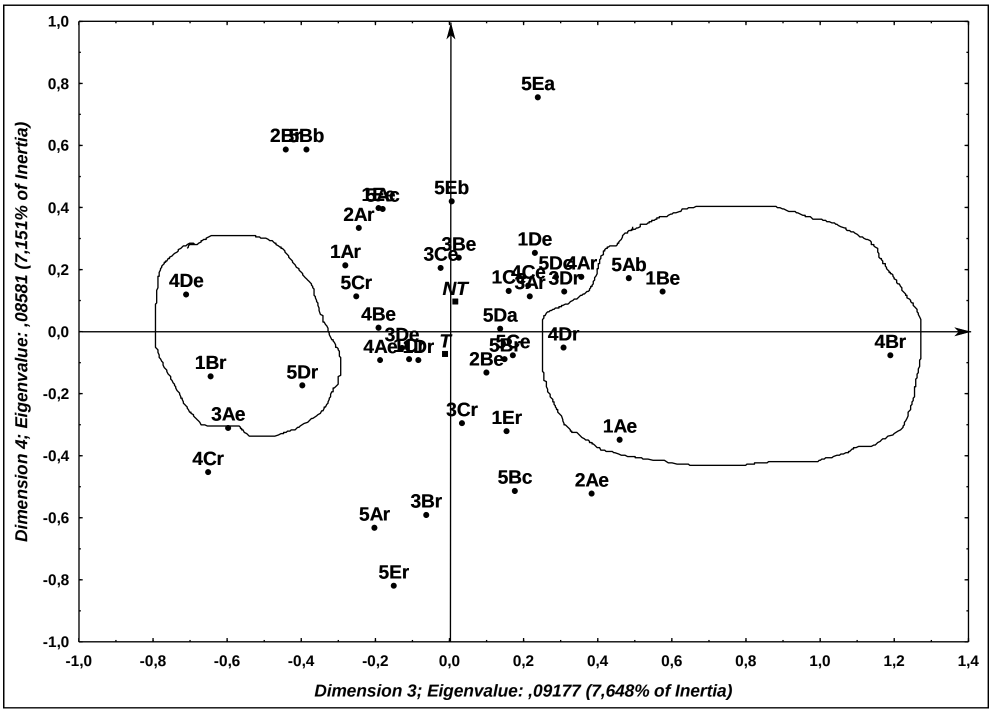
L'AFCM conduit à une inertie de 16% pour l'axe 3. Les modalités qui contribuent le plus à la construction de cet axe sont celles entourées dans le graphique 3 ci-après[28]. Elles ont une contribution comprise entre 3,0% et 10,7%. La qualité de

---

[27] Le même raisonnement est valable pour l'autre groupe de modalités (5Ab, 5Bc et 5Cr).

[28] Comme précédemment, notons au passage que ces modalités occupent des positions correspondant aux modalités ayant les plus grandes coordonnées en valeur absolue sur le 3ème axe factoriel. Les autres modalités occupent des positions quasiment intermédiaires, avec en outre de faibles contributions relatives.

représentation de ces modalités par rapport à un tel axe est comprise entre 0,084 et 0,370.



Graphique 3. *Plan factoriel (3, 4)*

Dans le troisième plan factoriel, le 3ème axe factoriel présente l'opposition de 1Br, 3Ae, 4De et 5Dr *vs* 1Ae, 1Be, 4Br, 4Dr et 5Ab.

Cet axe oppose donc l'absence à la présence d'une certaine relativité quant à la notion de *résultat significatif* (4De *vs* 4Dr). D'un côté, une telle présence est consolidée par la réussite à l'item 4B, qui exprime autrement une telle relativité. De l'autre côté, une telle absence est supportée par l'échec à l'item 3A, revenant à avancer que « *la véracité d'une hypothèse* », qui est, en quelque sorte, une autre façon d'exprimer un *résultat significatif*, a aussi un caractère relatif.

Notons aussi que l'axe 3 oppose la réussite (1Br) à l'échec (1Be) à la définition correcte du concept *d'hypothèse nulle*, qui diffère de celle donnée à « *l'hypothèse testée* » dans la théorie de Neyman-Pearson, à savoir : « *c'est une hypothèse dont la véracité ne conduira à l'adoption d'aucune action nouvelle* ». Un tel échec est accompagné par un autre échec (1Ae) consistant à prétendre que le qualificatif de *nulle* dans l'expression « *hypothèse nulle* » signifie « *sans valeur* ».

Enfin, cet axe oppose aussi la réussite (5Dr) à la distinction entre les deux probabilités: $P(\mathcal{D}' \mid \mathcal{D})$ et $P(\mathcal{D} \mid H)$ lorsque $P(\mathcal{D}' \mid \mathcal{D})$ est exprimée de la façon habituellement utilisée, mais mal interprétée, en tests statistiques, à savoir: « *la probabilité de réplication de la décision* », équivalente à « *la probabilité que ces nouvelles données R permettent au juge de reprendre la même décision* » dans l'item 5D de notre questionnaire, et l'échec (5Ae) induisant la confusion entre les deux probabilités: $P(H \mid \mathcal{D})$ et $P(\mathcal{D} \mid H)$, et ce lorsque $P(H \mid \mathcal{D})$ est exprimée, comme nous avons déjà indiqué en interprétant le 2ème axe factoriel, sous une façon impliquant *l'approche bayésienne indirecte*, habituellement utilisée pour définir le rôle pour lequel un test statistique est instauré, à savoir: déterminer « *la probabilité que la décision prise par le juge soit due au seul hasard* », objet de l'item 5A de notre questionnaire.

En conclusion, les tendances expliquées par le troisième axe factoriel renvoient à *la présence-absence* du caractère relatif du vocabulaire utilisé, à la *réussite-échec* en termes de langage utilisé, associée à une *réussite-échec* quant à la définition *correcte* (donnée par *Fisher*), qui est différente de celle donnée à *l'hypothèse testée* dans la théorie de Neyman-Pearson. Par conséquent, le 3ème axe factoriel peut être interprété comme *un axe de réussite-échec dans l'utilisation du vocabulaire et du langage.*

4. Discussion, conclusions et perspectives didactiques

Nous avons passé en revue, dans cet article, un ensemble de facteurs susceptibles d'être principalement en cause pour les difficultés que rencontrent les étudiants, et même les professionnels, dans la compréhension des tests statistiques. Ce texte s'est focalisé sur les facteurs de *vocabulaire* et *d'ambiguïté linguistique*, qui sont souvent déconsidérés dans les cours dispensés aux étudiants par la plupart des enseignants de statistique (et probabilités). Pareillement, ces enseignants sous-estiment leur ampleur et leurs effets néfastes sur la compréhension des concepts statistiques, lesquels passent habituellement pour être davantage liés à la vie de tous les jours que les autres concepts de mathématiques. Par ailleurs, toute l'importance donnée dans ce travail à ces deux facteurs ne devrait pas faire oublier les difficultés qui peuvent être causées par les autres facteurs indiqués dans la partie théorique introductive de cette étude. Ces derniers peuvent entraîner des conséquences néfastes, à ne pas sous-estimer, et méritent aussi des études approfondies.

Certes, la nature de l'instrument de mesure (questionnaire) sur lequel nous nous sommes appuyés ne permet pas à nos sujets, surtout ceux qui avaient déjà suivi un cours sur les tests statistiques, de reconnaitre facilement qu'ils sont face à des situations impliquant le vocabulaire et le langage utilisés en procédures de tests statistiques. Ceci est un garant plus ou moins fort de l'obtention de réponses qui ne soient pas influencées par d'autres facteurs, surtout de type psychanalytique (§ 2.5.). Ainsi, les résultats d'analyse factorielle multi-dimensionnelle des réponses des étudiants interrogés ont donné lieu à un plan et des axes factoriels avec des interprétations en termes de *maîtrise du vocabulaire et du langage utilisés en tests statistiques*. Plan et axes se déclinent selon l'importance de leur part d'inertie absolue (i.e., importance de leur part d'information contenue dans l'ensemble des réponses) suivant les interprétations respectives qui suivent.

- *Une ambiguïté linguistique et une réussite-échec en vocabulaire utilisé (Plan (1,2))*, se traduisant par :
    - *Une distinction non assimilée* entre les trois probabilités $P(\mathfrak{D} \mid H)$, $P(H \mid \mathfrak{D})$ et $P(\mathfrak{D}' \mid \mathfrak{D})$, associée à une *réussite-échec* au fait que l'expression « *résultat significatif* » désigne un résultat à caractère *relatif* et non *absolu*, et au fait que le qualificatif *nulle* indiqué dans l'expression « *hypothèse nulle* » est différent du qualificatif « *sans valeur* » *(Cadran I vs Cadran II)*;
    - *Une réussite-échec* au fait que les notions de *véracité d'une hypothèse* et de *raisonnement* adopté pour montrer une telle véracité sont toutes les deux à caractère *relatif* et non *absolu*, accompagnée d'une *réussite-échec* à la définition correcte (*donnée par Fisher*) du concept *d'hypothèse nulle (Cadran III vs Cadran IV).*
- *Une confirmation de l'ambiguïté linguistique et de la réussite-échec en vocabulaire utilisé, déjà trouvées dans le plan (1,2)*, se traduisant par une *présence-absence* de relativité du vocabulaire utilisé, associé à *réussite-échec* à la définition *correcte* (donnée par *Fisher*) du concept *d'hypothèse nulle*, accompagnée d'une ambiguïté linguistique impliquant la confusion entre les probabilités conditionnelles $P(\mathfrak{D} \mid H)$, $P(H \mid \mathfrak{D})$ et $P(\mathfrak{D} \cap H)$ (*Axe 2*).
- *Une réussite-échec en termes de vocabulaire et de langage utilisés*, se traduisant par *présence-absence* du caractère relatif du vocabulaire utilisé, une *réussite-échec* en termes de langage utilisé, associée à une *réussite-échec* quant à la définition *correcte* (donnée par *Fisher*), différente de celle donnée à *l'hypothèse testée* dans la théorie de Neyman-Pearson (*Axe 3*).

Finalement, notons au passage que ces facteurs de vocabulaire et d'ambiguïté linguistique pourraient *a priori* être pris en considération par l'enseignement, contrairement à ce qui se fait habituellement et plus généralement dans toute approche didactique des tests statistiques. Cela permettra certainement d'explorer des perspectives de recherches d'ingénieries didactiques sur les tests statistiques.

Nous avons placé en individus supplémentaires sur les trois premiers plans factoriels les centres de gravité respectifs du groupe d'étudiants ayant déjà suivi un cours sur les tests statistiques, le centre de gravité (*T*), et celui des étudiants qui n'en ont pas suivi, le centre de gravité (*NT*). Il est apparu qu'aucun de ces deux centres de gravité (*T*) et (*NT*) ne s'est situé du côté d'une bonne maitrise du vocabulaire et du langage habituellement utilisés en tests statistiques. Est-ce l'effet d'un enseignement qui présente les matières (surtout scientifiques) comme une batterie de connaissances statiques et non dynamiques ? Cela mérite en tout cas une étude didactique approfondie en termes d'approches d'enseignement des sciences dans notre système éducatif. Celle-ci pourrait permettre, lorsque des anomalies sont repérées, d'élaborer de nouveaux curricula prenant en considération le caractère relatif de la science et l'ambiguïté linguistique que pourraient causer les expressions et concepts véhiculés. Dans de tels curricula, on devrait aussi insister sur le fait d'introduire en cours les concepts scientifiques en les présentant aux étudiants dans les différents registres sémiotiques possibles (*verbal, graphique, tabulaire, ...*), en insistant surtout sur le registre verbal qui est assez constructif mais souvent négligé, et en apprenant aux étudiants à passer d'un registre sémiotique à un autre de manière fluide en toute facilité (Duval, 1993).

BIBLIOGRAPHIE

ACREE, M. C. (1978) *Theories of statistical inference in psychological research: A historicocritical study*. Ann Arbor, MI: University Microfilms International. (University Microfilms No. H790 H7000).

BAR-HILLEL, M. A. & FALK, R. (1982) Some teasers concerning conditional probabilities, *Cognition*, **11**, 109-122.

BATANERO, C. (2000) Controversies around the role of statistical tests in experimental research, *Mathematical Thinking and Learning*, **2(1-2)**, 75-98.

BATANERO, C. & DIAZ, C. (2006) Methodological and Didactical Controversies around Statistical Inference, *Proceedings of 38^{th} Conference of the French Statistical Conference*, Paris: SFDE. CDROM.

BENZECRI, J. P. (1979) Sur le calcul des taux d'inertie dans l'analyse d'un questionnaire, *Cahiers de l'analyse des données*, **4**, 377-378.

BIRNBAUM, I. (1982) Interpreting statistical significance, *Teaching Statistics*, **4**, 24-27.

BOX, J. F. (1978) *R. A. Fisher: The life of a scientist*, New York: Wiley.

CARVER, R. P. (1978) The case against significance testing, *Harvard Educational Review*, **48**, 378-399.

COHEN, J. (1994) The earth is round (p<.05), *American Psychologist*, **49**, 997-1003.

DACUNHA-CASTELLE, D. & DUFLO, M. (1990) *Probabilités et Statistiques, Tome 1, Problèmes à temps fixe* ($2^{ème}$ édition), Masson.

DANIEL, L. G. (1997) Kerlinger's research myths: An overview with implications for educational researchers, *Journal of Experimental Education*, **65**, 101-112.

DRACUP, C. (1995) Hypothesis testing –what it really is, *The psychologist*, **8**, 359-362.

DUVAL, R. (1993) Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, **5**, 37-65.

EHRENBERG, A. S. C. (1990) A hope for the future of statistics: MSOD, *The American Statistician*, **44(3)**, 195-196.

ELM'HAMEDI, Z. (2010) *Contribution à une ingénierie didactique pour l'enseignement et l'apprentissage des tests statistiques à l'université*. Doctorat. Université Sidi Mohammed Ben Abdellah- Faculté des Sciences Dhar El Mehraz, Fès, Maroc.

ELM'HAMEDI, Z. (2014) Effets d'un apprentissage empirique sur la compréhension du concept de moyenne arithmétique, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, **19**, 129-169.

FALK, R. & GREENBAUM, C. W. (1995) Significance test die hard, *Theory & Psychology*, **5(1)**, 75-98.

FALK, R. (1986) Misconceptions of statistical significance, *Journal of Structural Learning*, **9**, 83-96.

FALK, R. (1992) A closer look at the probabilities of the notorious three prisoners, *Cognition*, **43**, 197-223.

FISHER, R. A. (1990) - The Design of Experiments. London: (Réimp. 8ème édition de 1966) In J. H. BENNETT (Ed.), Statistical Methods, Experimental Design, and Scientific Inference. Oxford: Oxford University Press. (1rst edition: 1935, London: Oliver and Boyd.)

FREUND, J. E. & PERLES, B. M. (1993) Observations on the definition of p-values. *Teaching Statistics*, **15(1)**, 8-9.

FRICK, R. W. (1995) Accepting the null hypothesis, *Memory & Cognition*, **23(1)**, 132-138.

GALL, I. (1995) Statistical Tools and Statistical Literacy: The Case of The Average, *Teaching Statistics*, **17(3)**, 97-99.

GARFIELD, J. & AHLGREN, A. (1988) Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research, *Journal for Research in Mathematics Education*, **19(1)**, 44-63.

GIGERENZER, G. & MURRAY, D. J. (1987) *Cognition as intuitive statistics*, Hillsdale, NJ: Erlbaum.

GIGERENZER, G. (1993) *The superego, the ego, and the id in statistical reasoning, In G. Keren & C. Lewis (Eds.). A Handbook for Data Analysis in the Behavioral Sciences: Methodological Issues*, Hillsdale, NJ: Erlbaum.

GIGERENZER, G. (2004) Mindless statistics, *The Journal of Socio-Economics*, **33**, 587-606.

GIGERENZER, G., SWIJTINK, Z., PORTER, T., DASTON, L., BEATTY, J. & KRÜGER, L. (1989) *The empire of chance: How probability changed science and everyday life*, Cambridge, UK: Cambridge University Press.

GILLMAN, L. (1992) The car and the goats, *American Mathematical Monthly*, **99**, 3-7.

GRANAAS, M. (2002) Hypothesis testing in psychology: throwing the baby out with the bathwater? *ICOTS 6.*

HALLER, H. & KRAUSS, S. (2002) Misinterpretations of significance: A problem students share with their teachers? *Methods of Psychological Research*, **7(1)**, 1-20.

HAWKINS, A. (1991) Success and failure in statistical education –a UK perspective. In D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (Vol. **1**, pp. 24-32), Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

HAWKINS, A., JOLLIFFE, F. & GLICKMAN, L. (1992) *Teaching statistical concepts*, London: Longman.

HUBERTY, C. J. (1985) *On statistical testing*, Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago, IL.

ISELER, A. (1997) Signifikanztests: Ritual, guter Brauch und gute Gründe. Diskussion von Sedlmeier 1996. *Methods of Psychological Research Online.*

KIRK, R. E. (1996) Practical Significance: A concept whose time has come, *Educational and Psychological Measurement*, **56**, 746-759.

KRUSKAL, W. (1980) The significance of Fisher: a review of R. A. Fisher: the life of a scientist, *Journal of the American Statistical Association*, **75**, 1019-1030.

LABOVITZ, S. (1970) Criteria for selecting a significance level: A note on the sacredness of .05. In D. E. Morrison et R. E. Henkel (Eds.), *The significance test controversy* (pp. 166-171). Chicago: Aldine.

LAMRABET, D. (2001) La démonstration mathématique : structure et situations, *Actes du Congrès international : Universalité et Localité en Sciences*, Faculté des Lettres et Sciences Humaines. Rabat, mars 2001.

LECOUTRE, B. (2006) Training students and researchers in Bayesian methods for experimental data analysis, *Journal of Data Science*, **4**, 207-232.

LINDLEY, D. V. (1993) The analysis of experimental data: The appreciation of tea and wine, *Teaching Statistics*, **15**, 22-25.

LUNT, P. K. & LIVINGSTONE, S. M. (1989) Psychology and statistics: testing the opposite of the idea you first thought of, *The psychologist*, **2**, 528-531.

MARGOLIS, H. (1987) *Patterns, thinking, and cognition: A theory of judgment.* Chicago: University of Chicago Press.

MCLEAN, A. L. (2000) *On the nature and role of hypothesis tests,* Department of Econometrics and Business Statistics Working Paper 4/2001.

MCLEAN, A. L. (2002) Statistacy: Vocabulary and hypothesis testing, *ICOTS 8*.

MEEHL, P. E. (1997) The problem is epistemology, not statistics: Replace significance tests by confidence intervals and quantify accuracy of risky numerical predictions. In L. I., Harlow, S. A., Mulaik et J. H., Steiger (Eds.), *What if there were no significance tests?* (pp. 393-426). Mahwah, NJ: Erlbaum.

MORRISON, D. E. & HENKEL, R. E. (Eds). (1970) *The Significance Tests Controversy,* A reader, Chicago: Aldine.

NICKERSON, R. S. (1996) Ambiguities and unstated assumptions in probabilistic reasoning, *Psychological Bulletin*, **120**, 410-433.

NICKERSON, R. S. (2000) Null hypothesis significance testing: A review of an old and continuing controversy, *Psychological Methods*, **5(2)**, 241-301.

OAKES, M. (1986) *Statistical Inference:* A commentary for the social and behavioural sciences, Chichester, England: Wiley.

POITEVINEAU, J. & LECOUTRE, B. (2001) The interpretation of significance levels by psychological researchers: The .05-cliff effect may be overstated, *Psychonomic Bulletin and Review,* **8**, 847-850.

POITEVINEAU, J. (1998) *Méthodologie de l'analyse des données expérimentales : Etude de la pratique des tests statistiques chez les chercheurs en psychologie, approches normative, perspective et descriptive,* Ph. D, Université de Rouen.

POLLARD, P. & RICHARDSON, J. T. E. (1987) On the probability of making Type I errors, *Psychological Bulletin,* **102**, 159-163.

SCHAFER, J. P. (1993) Interpreting statistical significance and nonsignificance, *Journal of Experimental Education,* **61(4)**, 383-387.

SEDLMEIER, P. & GIGERENZER, G. (1989) Do studies of statistical power have an effect on the power of studies? *Psychological Bulletin*, **105**, 309-316.

THOMPSON, B. (1994) The pivotal role of replication in psychological research: Empirically evaluating the replicability of sample results, *Journal of Personality,* **62**, 157-176.

THOMPSON, B. (1996) AERA editorial policies regarding statistical significance testing: Three suggested reforms, *Educational Researcher*, **25(2)**, 26-30.

TRURAN, J. M. (1998) The development of the idea of the null hypothesis in research and teaching. In L. Periera-Mendoza, L. S., Kea, T. W., Kee & W., Wong (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics* (pp. 1067-1073), Voorburg, the Netherlands: ISI Permanent Office.

TYLER, R. W. (1931) What is statistical significance? *Educational Research Bulletin*, **10**, 115-118.

VALLECILLOS, A. (1995) Comprensión de la lógica del contraste de hipótesis en estudiantes universitarios, (University students' understanding of the logic of hypothesis testing), *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **15(3)**, 53-81.

WATTS, D. G. (1991) Why is introductory statistics difficult to learn? And what can we do to make it easier? *The American Statistician*, **45(4)**, 290-291.

ZAKI, M. & ELM'HAMEDI, Z. (2009) Eléments de mesures pour un enseignement des tests statistiques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, **14**,153-194.

ZAKI, M. & ELM'HAMEDI, Z. (2013) Aspects de quelques critiques non fondées de la théorie des tests statistiques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, **18**, 139-171.

ZENDRERA, N. (2003) Difficultés d'apprentissage liées aux tests statistiques. Le cas des tests auprès des étudiants en sciences humaines, *Actes des XXXVème JdS (2)*, 895-899, SFdS et Université Lyon, 2-6 juin 2003.

ZENDRERA, N. (2004) Difficultés et obstacles rencontrés dans l'apprentissage des tests paramétriques : objets d'une recherche en didactique de la statistique, *Actes des XXXVIème JdS*, SFdS, Université Montpellier II et Ecole supérieure agronomique. Montpellier, 24-28 mai 2004.

ZAHID ELM'HAMEDI
Centre Régional des Métiers de l'Education et de la Formation, Région Casablanca-Settat, Section Provinciale de Settat. Hay El Farah II, Avenue Taha Hussein, B.P: 3066, Ville de Settat, Maroc.
E-mail: mhamdizahid@yahoo.fr

Isabelle Bloch, Patrick Gibel

A model to analyze the complexity of calculus knowledge at the beginning of University course
Presentation and examples

Abstract. Our research focuses on the difficulties students encounter with the learning of calculus, considering that they have to cope with many more mathematical objects but also with new ways of reasoning – not only algebraic calculation, but also the practice of approximation, and a scaffolding way of using functions, limits, derivative, integrals, etc. to justify their answers. The semiotic facet of new objects, and the way to manage it, is also a source of great difficulties. In this article we establish that the model we built (Bloch & Gibel, 2011) is adequate to describe the work of University students who have to deal with the resolution of exercises about parametric curves and differential equations, even if this context is not an adidactical situation. In 2018, L2 students of Pau University were asked to solve little problems about limits, integral calculations or recurrence questions. They revealed difficulties to organize their knowledge and conclude about a limit, for instance. We give some examples of these troubles. We conclude for the necessity to implement adequate devices to help students better understand these 'new mathematics'.

Keywords. Calculus, students' understanding of mathematical signs and objects, reasoning processes, parametric curves, differential equations.

Résumé. Un modèle pour analyser la complexité de la connaissance du calcul au début de l'Université. Présentation et exemples. Notre recherche concerne les difficultés que rencontrent les étudiants dans l'apprentissage de l'analyse, en constatant qu'ils ont à faire face à de nouveaux objets mais aussi à de nouveaux modes de raisonnements : non seulement des calculs algébriques, mais aussi des approximations, et une articulation de l'usage des concepts comme les fonctions, limites, intégrales afin d'établir des preuves. Le statut sémiotique des objets est également une source de grandes difficultés. Nous montrons dans cet article que le modèle que nous avons décrit dans un article paru en 2011 est adéquat pour décrire les procédures et les erreurs d'étudiants de première année d'université dans la résolution de problèmes sur les courbes paramétriques et les équations différentielles. Nous concluons sur la nécessité d'introduire des dispositifs adaptés afin d'aider les étudiants à comprendre cette 'nouvelle' façon de faire des mathématiques.

Mots-clés. Analyse, signes et objets mathématiques et compréhension des étudiants, processus de raisonnement, courbes paramétriques, équations différentielles.

Contenu condensé de l'article

A l'université de Pau et des pays de l'Adour, une unité d'enseignement appelée '*Mathématiques du mouvement*' a été proposée en première année de licence ; elle tente d'articuler mathématiques et physique. Comment se passe cette articulation ? Permet-elle aux étudiants de mieux saisir les outils mathématiques en jeu ? Tenter

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 24, p. 183 – 206.

de contextualiser les connaissances mathématiques dans des situations relatives à la cinématique permet-il aux étudiants de mieux comprendre les savoirs sous-jacents ?

En effet, à ce niveau certains concepts mathématiques subissent une transformation telle que leur statut et leur mode de fonctionnement s’en trouvent complètement bouleversés. Dans la transition secondaire/supérieur, ce décalage épistémologique est accentué par la configuration actuelle des contenus des programmes du secondaire : nous avons montré (Bloch, 2018) que les objets y sont étudiés de façon descriptive et non relativement à leur nécessité et leur rôle d’outil dans la construction de situations mathématiques ; c’est aussi le cas pour la fonction exponentielle par exemple, ou les équations différentielles. De plus, les procédures de résolution visées au supérieur sont beaucoup plus complexes et peuvent faire appel à des techniques de divers champs mathématiques ; les étudiants doivent identifier ces changements de cadres de façon autonome et savoir s’extraire du champ initial, ainsi que nous l’avions exposé dans Bloch & Gibel (2016). Nous rappelons que le modèle décrit dans Bloch & Gibel (2011) prend en compte trois axes d'analyse des productions étudiantes dans les situations : le niveau de milieu où se situe l'étudiant, la nature et les fonctions du raisonnement, et les signes mathématiques associés à ces productions, avec leur niveau d'abstraction, lequel est étroitement corrélé au niveau de milieu. Nous analysons les productions des étudiants relativement au modèle, et montrons que l'évocation du cadre cinématique ne suffit pas à aiguiller les étudiants sur une étude consistante des courbes paramétrées.

---

1. The learning of calculus: objects, signs and reasoning processes

Every researcher knows that mathematical work in the field of Calculus is usually very difficult for even good students when they are entering the University. The amount of research about this issue is now considerable and it goes on expanding and disseminating among communities, which is very good news (see for instance Tall, 1996, 2002; Reinholz, 2015; Bressoud, 2011; González-Martín, Bloch, Durand-Guerrier & Maschietto, 2014...). Studying this transition between the mathematical organisation in secondary school and University, in the teaching of (pre)calculus, we aim at classifying the different 'things' students have to cope with when they practise Calculus and move to Analysis. Our research focuses first on difficulties students encounter, considering that they have to manage many more mathematical objects *and* new ways of reasoning – not only algebraic calculation, but also approximation, and a scaffolding way of using functions, limits, derivative, integrals, etc... to justify their answers. Then we aim at building situations for a better learning of Calculus and Analysis.

1.1. The way to manage previous knowledge

The organisation in Secondary school takes into account some mathematical objects, such as functions, derivatives, integrals: but a number of researchers underline the fact that the way these objects are introduced leads to algebraic calculation and not to analytic work. For instance, students are supposed to calculate an integral but not to justify why it exists; to study the variations of functions with derivative, but not to have a knowledge about which functions get derivatives at which points, or not. So we can see that the *raison d'être* of a mathematical concept is not highlighted.
We notice that, even if teachers think of the structural level, in most cases they confront students only with the operational one. For instance, Ghedamsi (2015, p. 2109) analyses a first-year regular course at University and she concludes that:

> He (*the teacher*) does not intervene to enrich this work (*the students' work*) by emphasizing relationships among notions, by changing the setting of semiotic representations, by allowing openings to organize knowledge, by making assessments of knowledge, etc. (...) During the whole lesson, the students use methods from secondary school and do not succeed to shift to the use of methods expected at university level.

On the other hand, the old-style way of teaching (declaring mathematical knowledge in front of students) does not lead to success, so Artigue (2001) notices:

> ...an evidence of the limitations both of traditional teaching practices and of teaching practices which, reflecting the Bourbaki style, favoured formal and theoretical approaches. (Artigue, 2001, p. 208)

In this outlook, she agrees with Bressoud (2011) who identifies this traditional practice as “the worst way to teach”.

One effect at least is problematic: it leads students to ignore what mathematical concepts mean and aim at, and what we try to define and prove when we do mathematics (Bloch, 2015; Godino, 1996). We can observe that very often students are trying to calculate in a rather hazardous way, aiming to apply ‘in the dark’ rules they learned but in no way mastering concepts involved in the problem. Let us quote how Hubbard & West (1995) react about students' solutions of differential equations; it highlights how students can refer (or not) to (un)usual objects:

> The origin of this book was the comment made by a student: ‘This equation has no solution’. The equation in question did indeed have solutions, as an immediate consequence of the existence and uniqueness theorem, which the class had been studying the previous month. […] In fact, only very exceptional equations can be explicitly integrated. For instance, none of the following rather innocent differential equations can be solved by the standard methods: $x' = x^2 - t$; $x' = sin(tx)$; $x' = e^{tx}$. […] A proper attitude is the following: *differential equations define functions, and the objects of the theory is to develop methods for understanding (describing and computing) these functions.* (Preface, p. viii)

In the evaluation cases we study below, the problem seems not to be the way the notions have been taught: we got an access to the students' course notes, and they show relevant justifications and explanations. The didactical repertoire of the class has been elaborated by suitable exercises and situations, leading to highlight the operating mode of these concepts. But mathematical signs – and objects - are not always 'grasped' by students in the right way, a way that has suffered very important adjustments since secondary school. We can observe this complexification also in the answers students give to little problems we asked them (see 3.).

1.2. Mathematical objects and signs: complexification

At the beginning of University studies, students have to cope with functions, as in Secondary school, like rational ones such as polynomials, or sinus or cosine; they have to solve problems with exponentials, logarithms, but the derivatives can also generate new functions, and integrals too, or series: so objects may have a different status, and signs become polysemic. With respect to these signs, we notice that in Secondary school students operate frequently by implementing isolated techniques: in secondary mathematical context they can calculate in a rather straightforward way. But at University, they face complex signs and they have to associate different kinds of symbols, sometimes through a long proving process, for example to calculate a rather complex integral or to prove that a theorem is valid, which is not their responsibility in Secondary school. At University too, signs are multiform: for instance a derivative can be written f' but also df/dx; or x can be the function, so it will appear as dx/dt; a letter can nominate a variable, a function, or a parameter, which status is sometimes difficult to decode.

Moreover, the rules about the use of signs are imbricated, so if you try to calculate $\int cos^2x\ dx$ you have to linearize cos^2x because you cannot apply the rule of the primitive of x^2, just 'mixed' with the primitive of $cos\ x$, to cos^2x… and find $1/3.sin^3x$, as we saw once a student. This evolution of signs is even more evident considering the proving procedures within the calculus work: students have to understand and use new analytic methods, as it is well known, for limits with ε and α, and to master quantifiers, which reveals to be rather hard (see Gueudet, 2008; Chellougui & Kouki, 2013).

1.3. Reasoning processes

This new complexity requires that students adapt themselves to improve and perfect their reasoning processes: they must learn to use all the facets of knowledge and to adapt their "way of doing", taking into account all the aspects of a question and the requirements of the proofs. This implies that they become able to choose which knowledge is adequate to the problem, how to use it in a relevant way, and how to develop reasoning processes. This contrasts with the practices they get at Secondary school, where they usually just have to answer to punctual questions and are not accustomed to master the whole reasoning process.

They also have to deal with formal proofs and reasoning they have not been accustomed to understanding and managing. In Bloch & Ghedamsi (2004) we insist on the transition from an algorithmic work to complex techniques and technologies. Activities at tertiary level are centered on mathematical generalities, and their resolution requires the use of heuristic techniques: proving or conjecturing, or reasoning by *reductio ad absurdum*, or a research of counter-examples. These activities require a formalization work that is not usual at secondary level.

We can say that throughout these reasoning processes, signs (and then objects) work in a strong interaction, as seen in the example above: integrals with the primitive of sine and squares, but also techniques and technologies to prove. Among these technologies it is very important that students learn how to manage the new tools, such as quantifiers and the way to perform a valid reasoning up to its end.

This first approach leads us to some questions:

- How can we classify the objects, signs and reasoning processes students have to cope with during resolution of calculus problems?
- Which theoretical frame permits us to identify the different shapes and functions of students' reasoning activity? How (with which tools) is this activity likely to be observed?
- How is it possible to improve the way students can achieve an access to relevant concepts and methods for proving in Calculus, and which situations can be implemented at the transition between secondary and tertiary level?

2. Theoretical tools to analyze situations and students' productions: a model

Our main theoretical frame is TDS at University level (Theory of Didactical Situations, see González-Martín et al., 2014) but let us mention that the way we investigate is also correlated, in a way, to APOS theory, as we are concerned with existing *processes* in the way students do mathematics, and *objects* in the situations we try to organize, these objects being, at closing stages, expressed in schemas, that is, composite signs with various embodied rules.

Trigueros & Planell (2010) actually define the application of their theory within three stages: at the general *intra-stage* actions are possible, without identifying properties: it corresponds with M-2 in TDS (see below); the *inter-stage* is the one where students can identify relations between objects and processes, it is M-1 in TDS; and the construction of the knowledge occurs in the *trans-stage*, which can correspond to M0.

Trigueros & Planell (2010) insist on the importance of different theoretical frames to analyse phenomena from complementary perspectives. We also associate a semiotic analysis to TDS viewpoint (see Table 2 below): this allows us to consider the nature of the problems we ask students to solve, and evaluate which mathematical objects and representations they were able to apply in a right process and which ones they did not master.

Mathematics aims at the definition of 'useful' properties that can help to solve a problem and to better understand the nature of concepts. A strong characteristic of these properties is their invariance: they apply to wide fields of objects – numbers, functions, geometrical objects, and so on. This implies the necessity of flexibility of mathematical signs and significations. To grasp the generality and invariance of properties, students have to do many comparisons – and mathematical actions – between different objects in different notational systems. While the choice of pertinent symbols and different classes of mathematical objects is necessary to reach this aim, it is not sufficient: as we said, the situation in which students are immersed is essential. The Theory of Didactical Situations (Brousseau, 1997) claims that to make mathematical signs meaningful – which means that signs have a chance to be related to conceptual mathematics objects – it is necessary to organise situations that allow the students to engage with validation, that is, to work with mathematical formulation and statements.
As we said in González-Martín et al. (2014):

> In TDS, the fundamental object is the notion of *Situation*, which is defined as the ideal model of the system of relationships between students, a teacher, and a *milieu*. Students' learning is seen as the result of interactions taking place within such systems and is highly dependent on characteristics of these systems. […] Different phases of a *Situation* include: *action* (knowing appears as a means for action through models that can remain implicit), *formulation* (knowing develops through the building of an appropriate language), *validation* (knowing becomes part of a fully coherent body of knowledge). (p. 118)

The model of structuration of the didactical milieu used in our device is that of Bloch (2005). The chart below (Table 1) sums up the levels of milieu – from M1 to M-3.

M1 Didactical milieu	E1: reflexive student-subject	P1: Professor planner
M0 Learning milieu: institutionalization	E0: generic student-subject	P0: professor teaching
M-1 Reference milieu Formulation and validation	E-1: The student-subject as a learner	P-1: Professor Regulator
M-2 Heuristic milieu: action, research	E-2: The student-subject as an actor	P-2: Professor devolves and observes
M-3 Material milieu	E-3: epistemological student-subject	

Table 1. Structuration of the didactical milieu

The negative levels are of particular interest in the sequences we frequently study since they allow us to describe the emergence of a proof process in the setting up of an adidactical situation. The place where we hope to see the expected reasoning processes appear and develop is located at the articulation between the heuristic milieu and the reference milieu.

Let us specify however that, especially at the tertiary level, situations are not always entirely adidactical, but they can include an *adidactical dimension*, which allows letting students have a research activity and question the statements, even if they do not attain the final formal knowledge. The teacher must take this last stage in charge in M0. As said by Hersant & Perrin-Glorian (2005) and developed in Gravesen, Grønbaeck & Winsløw (2017), the milieu of situations - especially at the tertiary level - can show evidence of:

> a number of generic potentials for student learning, developed from and within the theory of didactic situations: adidactic potential, linkage potential, deepening potential and research potential. (p. 5)

It means that the milieu of such situations has been built in order to anticipate that students have a responsibility on knowledge: they are supposed to undertake reasoning, conjectures, calculations, decisions on a statement. A situation is:

> A system of relationships between students, a teacher, and a milieu (…) [where the milieu is] the set of material objects, knowledge available, and interactions with others, if any, that the learner has in the course of said activity. (González-Martín et al., 2014, p.119).

A link with previous knowledge, or related other knowledge, can also be shared in the situation; the knowledge can be deepened, and this deepening potential occurs mainly at the M0 level, that is, when the teacher institutionalizes the aimed knowledge; or the deepening can be organized later, in a further situation.

2.1. Identifying signs in situations

Considering the difficulties about how mathematical signs work and are likely to be understood, we thought it is necessary to introduce a semiotic dimension in our model. Our theorical reference is Peirce's semiotics. According to Saenz-Ludlow (2006):

> For Peirce, thought, sign, communication, and meaning-making are inherently connected. (…) Private meanings will be continuously modified and refined eventually to converge towards those conventional meanings already established in the community. (p. 187)

In Peirce's semiotics a whole sign is triadic and constituted by an *object* to which the interpretation refers, a 'material sign' (*representamen*), and an *interpretant*, the latter being an identity that can put the sign in relation with something – the object. A very important dimension in Peirce's semiotics is that interpretation is a *process*: it evolves through/by new signs, in a chain of interpretation and signs (representamen). The *interpretant* – the sign agent, utterer, mediator – modifies the sign according to his/her own interpretation. This dynamics of signs' production and interpretation plays a fundamental role in mathematics where a first signification has always to be re-arranged, re-thought, to fit with new and more complex objects – such as an integral for an example.

Peirce – who was himself a mathematician – organised signs in different categories; briefly said, signs are triadic, but they are also of three different kinds. We briefly sum up the complex system of Peirce's classification (ten categories, depending on the nature of each component of the sign, representamen, object, interpretant: see Everaert-Desmedt, 1990; Saenz-Ludlow, 2006) by saying that we will call an *icon* a sign referring to the object as itself – like a red object refers to a feeling of red. An *index* is a sign that refers to an object, as a proposition like: 'this apple is red'. A *symbol* is a sign that contains a rule. In mathematics all signs are symbols to be interpreted as *arguments* (see below), though they are not exactly of the same complexity; and so are the language arguments we use in mathematics for communication, reasoning, teaching and learning. Let us notice that signs can be either formal or linguistic: both will be taken into account. Are significant the arguments embodied in those signs.

About these different kinds of signs, Peirce wrote:

> First, an analysis of the essence of a sign, (stretching that word to its widest limits, as anything which, being determined by an object, determines an interpretation to determination, through it, by the same object), leads to a proof that every sign is determined by its object, either first, by partaking in the characters of the object, when I call the sign an Icon; secondly, by being really and in its individual existence connected with the individual object, when I call the sign an Index; thirdly, by more or less approximate certainty that it will be interpreted as denoting the object, in

> consequence of a habit (which term I use as including a natural disposition), when I call the sign a Symbol. (Peirce 1906, p. 495).

Let us specify that a sign as an Icon, for instance, could never give an argument, while an argument can very well be interpreted only as an Icon by somebody who would not get the right interpretant. This feature of Peirce's theory we find of course very relevant for mathematical signs interpretation. His theory is applicable to analyse the interpretation of mathematical signs, because all mathematical signs are *arguments*, even if of different levels, and because there will be some problems of misunderstanding if students do not interpret them in their suitable value.

Mathematical signs are symbols that give rise to arguments ('in consequence of a habit', here a mathematical habit of course) but of different levels: then '3' is the representamen of an argument because it always signifies that there are three elements somewhere (in a mathematics problem for instance; the relation between '3' and the number is a rule); but '123' (one hundred and twenty three) will be a more complex argument because the rule must include the decimal numeration, which is not the case in '3'. This complexity is what authorizes various interpretation of the same symbols, according to the mathematical competence of the interpretant.

This particularity of semiotic tools in mathematics will be in agreement with the relevant elements of the construction of a situation, because in a partially adidactical situation we must foresee the 'wrong' expression of mathematical properties, or the misunderstanding of some ostensives.

So Peirce’s semiotics seems particularly appropriate for our research and will enable us to study more precisely the evolution and the transformations of the signs used by the different actors within the situation. In our application of this semiotics we use the three usual designations: icon, indexical sign and symbol-argument. Yet we do not consider the whole intricacy of Peirce’s theory: it would be too complex to take into account and not necessary to interpret correctly students’ actions in the situation. We just correlate *icons* with students’ intuitions, drawings, examples, resolution attempts; *indexical signs* with local proofs, first tools for validation, more accurate reasoning, formulations of mathematical objects; and *symbols-arguments* with the concluding validation and formulation of the rules, and of the aimed knowledge – mostly under the teacher’s responsibility. This categorization fits with the TDS model of milieu, which helps us to analyse students' productions within the two theories. We can also consider Peirce's idea of a 'hypoicon', which is a kind of schema involving a whole reasoning (see in Table 4 below).

We also want to take into account the semantic dimension – the *meaning* of the aimed knowledge – to analyse reasoning processes: this contributes to justify our choice of the TDS as a basis of our model. As we said, TDS organizes adidactical situations with three phases (corresponding to levels of the milieu): a heuristic one (students' action, oriented to the meaning of the aimed concept) grounded with a question; a formulation and validation phase; and a last one, institutionalization by the teacher. In this configuration the reasoning processes we take into account are as well valid or erroneous ones. This theoretical frame allows us also to develop an analysis of the *functions* of the reasoning processes within the situation (Gibel, 2015, 2018).

2.2. The didactical repertoire and the repertoire of representation

The work in the students' group leans first on the existing *repertoire*: all the semiotic means used by a teacher, and those he expects from his/her pupils through teaching, establish the didactical repertoire of the class – as defined by Gibel (2013). The didactical repertoire of the class can be identified as being part of the mathematical knowledge the teacher has chosen to explain, namely during validation and institutionalization phases of previous situations or previous lessons. The repertoire of representation is a constituent part of the didactical repertoire. It is made up of signs, diagrams, symbols and shapes and also linguistic elements (oral and/or written sentences), which make it possible to name the objects encountered and to formulate properties and results.

To sum up, in our model we consider signs, functions of reasoning, and levels of argumentation, while noticing that the reasoning processes elaborated by students and teacher during a lesson can occur in various ways: linguistic, calculative, scriptural, and graphic elements (see Bloch 2003). This leads to retain three main axes to study the reasoning processes.

- The first axis is linked to the nature of the situation: in a situation involving a research dimension, students produce reasoning processes which depend to a great extent on the involved phase of the situation, that is, the level of milieu (heuristic milieu, milieu of formulation or validation) (Table 1).
- The second axis is the analysis of the functions of reasoning. We aim at linking these two axes, showing how the reasoning functions are connected specifically to the levels of milieu and how these functions also *manifest* these levels of milieu.
- The third axis concerns noticeable signs and representations. These elements can be observed through different forms which affect the way the situation unfolds.

The schema below (Table 2) summarizes the construction of our model:

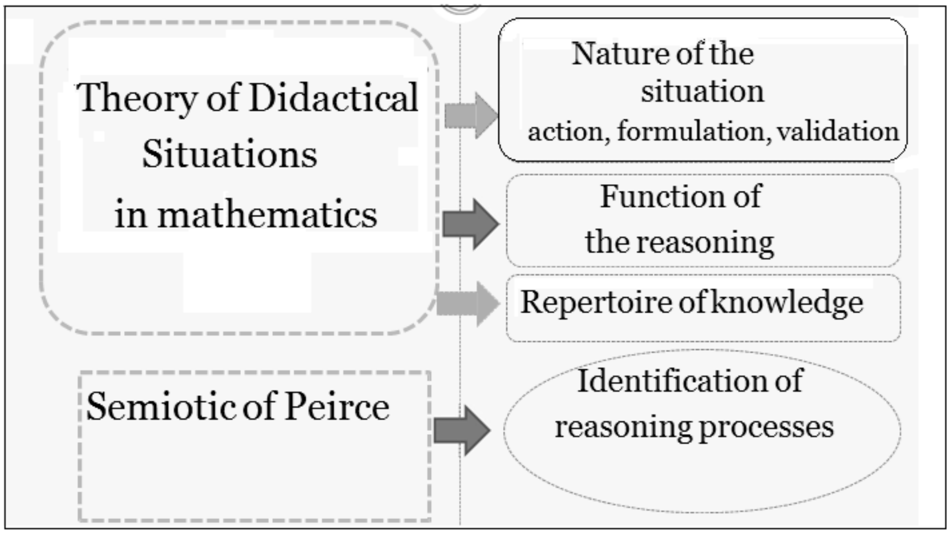


Table 2. Articulate TDS and Semiotic

Besides, we will observe if reasoning takes place on a semantic (SEM) or syntactic (SYNT) way. Durand-Guerrier (2010) defines precisely the semantic, syntactic and pragmatic dimensions by quoting Morris:

> semantics concerns the relation between signs and objects they refer to; syntax concerns the rules of integration of signs in a given system, and pragmatics the relationship between subjects and signs. (Morris, 1938)

The application of the model to a situation will then include an analysis of the milieu and semiotic analysis of the students and teacher's productions. We will interpret the conjectures, intuitions, signs and reasoning processes as an evolution of the didactical repertoire of the class, knowing that the situation aims at developing a mathematical knowledge in the field of calculus. It is necessary to see the signs students engage in the situation and which level of reasoning and rationality is involved in their work. The heuristic phase (students' action) must be grounded in a consistent mathematical question; then follows the formulation and validation phase; and institutionalization by the teacher. So for each level of milieu, we should be able to define the kind of reasoning (Table 3).

	M-2: research milieu	M-1: formulation	M0: institutionalization
Nature and functions of reasoning	SEM R1.1 - Intuitions on a drawing - Decision of a calculation - Exhibition of an example or counter example	SYNT/SEM R1.2 - Generic calculations and conjectures (right or wrong) - Decision on a math. objet	SYNT R1.3 - Formalization of proofs within the math. involved theory (mainly by the teacher)

Table 3. Functions of reasoning with regards to levels of milieu

This configuration provides tools to observe reasoning processes. The matrix notation R1.1, etc. is a tool to locate the level of attainment of the students' results. Then the second line of our model (Table 4) helps identifying the signs students use in the resolution of problems at stake in the situations, and the formal final signs. This leads us to:

	M-2 research milieu	M-1 formulation	M0 institutionalization
Level of use of signs and symbols	SYNT/SEM R2.1 Icons or indices depending on the context (first schemas, intuitions…)	SYNT/SEM R2.2 Local or more generic arguments: indices, calculations	SYNT R2.3 Formal and specific arguments: symbols *Hypoicons: schemas*

Table 4. Semiotic analysis of reasoning forms

We can see that the reasoning repertoire evolves within the situation: it leads us to provide a third line in the model (Table 5), with the aim of helping a teacher or a researcher to anticipate this evolution.

	M-2 research milieu	M-1 formulation	M0 institutionalization
Actualisation of the repertoire	SYNT/SEM R3.1 - Old knowledge - Enrichment at heuristic level: calculations, conjectures	SYNT/SEM R3.2 Enrichment at the argumental level: - statements, reasoning	SYNT R3.3 - Formalized proofs - Signs within the relevant theory - theoretical elements

Table 5. Evolution of the didactic repertoire and reasoning regarding the milieu

We could observe that within the problem resolution, different kinds of argumentation were proposed by students: so according to Lalaude-Labayle's work (2016), himself inspired by Peirce's categories, we add a dimension to our study; it concerns the nature of the proof students are able to propose, depending in which level of milieu they are located. This facet comforts the other tools we use to analyse students' productions.

Kind of argumentation	Abduction, induction, deduction	Induction, deduction	Deduction

Table 6. Argumentation

Let us give an example of each level of argumentation:

- Abduction: this situation is similar to another one I previously encountered, so I will choose this exponential function…
- Induction: this example involves these properties so I think it is an exponential function…
- Deduction: I could identify a derivative with all suitable properties, so it is necessarily an exponential function.

We want to underline the fact that an *a priori* analysis is necessary for each situation we choose to study: the model we built is efficient to perform this *a priori* analysis, as it allows us to anticipate resolution processes and difficulties. In this perspective, we aim at classifying reasoning, calculations, formulas, the nature of signs produced, and knowledge(s) likely to be expressed by students in the different phases, reflecting the situation in which students will be located.

The model can also be used to analyse 'ordinary' secondary or university teaching, as it allows detecting students' reasoning processes, use of symbols, and understanding of mathematical objects involved. We can analyse the students' templates while they try to solve a problem: they are first in a heuristic milieu M-2, trying to find a resolution process. Then they decide to undertake calculations, use of theorems, and their final action leads them to take position in a milieu M-1. In a different way, this can also be seen in the context of an evaluation, which we present in the next part.

3. Two situations of problem solving: how students cope with new knowledge and unusual signs

We made our model operate in classical adidactical situations (Bloch & Gibel, 2011), but we wanted to use it in quite 'ordinary' problem solving situations. Let us notice that these situations are partially adidactic because problems sent to students do not make use of trivialized knowledge.

In the model, we consider that the learning milieu M0 would be identified as the production of a standard solution expected by the teacher in terms of formulas and mathematical symbols. M-1 is a level of calculations that students undertake with their own formulas and conjectures. M-2, the heuristic milieu, contains students' attempts that highlight how they see the mathematical objects at stake. As said in Gravesen, Grønbaeck & Winsløw (2017), it is the place where students do A6 (in the authors' list):

> A6. Employ a non-formal "heuristic" representation of a mathematical object, to investigate it (p.5)

We then consider the productions of fourteen (14) students in this context – problem solving – at the University of Pau, in May 2014. The teaching unit involved is named: "Mathematics of the movement", which is interesting because a link is made between mathematical knowledge and physics problems; moreover, students can have access to the idea that a variable is not always denoted by x, it can be t as well, which refers to the time in a movement.

The milieu includes three exercises, the first one on polar and parametric functions, the second and the third ones on differential equations. Parametric curves and differential equations are especially interesting to study as they involve complex new signs, unusual processes for secondary students, and new kinds of reasoning. These reasoning encompass also mathematical objects, such as functions, limits, derivatives, but in a new way of thinking. As a number of authors, we can insist on:

> the importance of representations and mathematical visualization in the understanding of concepts. (Trigueros & Planell, 2010, p. 7)

3.1. Parametric curves

3.1.1. Proposed task

A parametric curve is of the type: $x = f(t), y = g(t)$. There are two functions x and y to study; students must understand that what is required finally is to describe the variations of y with respect to x, in the case of a movement for instance; so the study of the two functions f and g (including the calculation of their derivatives) is just a step (of R1.2 type) to interpret what happens with the curve of y while x being the final variable. Sketching the graph needs to give values to t, being sure that we got the 'whole' curve; or eliminating the parameter t, which may reveal to be complex, because in this case you cannot 'see' this number t varying. According to Trigueros and Planell (2010), we insist on the importance of the role of visualization in resolution of functions problems.

So, Weber and Thompson (2014) notice that understanding parametric functions suppose that one:

> … supports an image of scanning through values of one variable and tracking the value of another variable, (…so) imagine the quantities as coupled. (p. 77)

They also note that:

> It is nearly impossible for a novice student to conceive simultaneously a relationship between three quantities. (*ibid.*, p.74)

Another difficulty comes from the existence of tangents. In contrast to what happens with algebraic curves, parametric ones can have two tangents at the same point: this is a singular point that students did not meet before. They are expected to identify the nature of this singular point, for instance a cusp. They must first apply a formula ($x'(t)=0, y'(t)=0$) and then try to find the tangents at this point to be able to identify the nature of the singular point. Students have to engage a calculation and reasoning of successive derivatives that takes place at R2.3 or R3.2 level at least and involves specific interpretation about the objects at stake.

We classified the students' outcomes from S1 to S14. In May 2014 students were confronted to the following question:

Let us study the parametric curve defined by $x(t) = a\, t^2/(1+t^2)$, $y = a\, t^3/(1+t^2)$ with $t \in \mathbb{R}$. Show that it is sufficient to study for $t \geq 0$. Determine the variations and confirm that the curve gets symmetry, an asymptote and a singularity.

Students have to calculate $x(-t)$ and $y(-t)$ and conclude about the kind of symmetry; calculate the derivatives, build the variation table and do not forget the limits; and they must undertake pertinent interpretations of these results. The curve has a singularity, a cusp: they must find its coordinates and its nature. We expect that a difficulty can occur in the interpretation of derivatives: students are accustomed to calculating such derivatives but for algebraic functions one derivative is enough to find the variation of *f*. The asymptote can be a problem too, as $t \to +\infty$ when $x \to a$ and $y \to +\infty$. So the asymptote is vertical, but nevertheless when $t \to +\infty$, which can be a source of misunderstanding: for algebraic curves a limit where the variable tends to infinite corresponds to a horizontal asymptote.

Let us insist on the fact that these (little) problems involve a part of no trivial knowledge for students; this is why we say they are partially adidactical situations.

3.1.2. Analysis of the students' results

The first third writings show a global success (the notes are 19 or 20). Seven students are over 10, and the last seven productions are inadequate, the notes beeing from 8 to 2/20. So S11 is confused with the sign of *t* and *x, y*; half of the students have a problem with the symmetry and do not succeed with its identification; students make a lot of mistakes in signs, and in derivative calculation, though it has been studied in secondary school. The fourteen writings give the final result shown in Table 7, which confirms that the global success is not very high, and which shows a real contrast between the best students, who succeed in almost all the problem, and the last ones who do not master concepts and techniques.

Derivatives	***Exact Symmetry***	***Asymptote $x = a$***	***Singular point***	***Curve***
Correct calculation 12 (on 14)	7	Limites : 6 $x = a$: 4	Nul derivatives: 6 Nature of the point : 4	7 - according with the symmetry

Table 7. Students' difficulties

Student S1 does perfectly all that is expected: she calculates the derivatives, the behaviour of the function, draws the graph with the asymptote, and determines the cusp with its tangent, which needed to calculate $x^{(3)}(t)$ and $y^{(3)}(t)$ for $t=0$. S1 reaches the level R1.3, she makes a formalization of proofs within the required theory. Student S14 cannot do anything; five other students encounter difficulties to calculate derivatives, to interpret the symmetry, and to find the singular point. One student says that *a* should be the parameter. Another writes that the equation of the curve is $x(t)+y(t)$... : this student does not master the target concept of parametric curve, so he stays at level M-2 and tries heuristic (non-relevant) calculation.

So, we can see that even in M-2, some students do not appear to be able to undertake local adequate calculations, as they do not understand that they are no more in the case of a Cartesian function. There are errors about the nature of the asymptote, for instance: only six students calculate the limits and conclude about the asymptote, reaching the R2.2 level, but among these six, two of them write a wrong equation: $y=a$ instead of $x=a$. The students' productions also show calculation mistakes, especially in derivatives and primitives. The handling of singular points is not properly integrated: students are *unsettled* by the conditions for being a singularity, by the ways of finding the tangent... For instance, S6 tries to find the point by calculating $x=0$ and $y=0$ instead of their derivatives; S2, who succeeds in the exam, writes that: "every non collinear vector to the curve is tangent to the curve"…

Some students who calculate without mistakes encounter problems with the interpretation of their calculations: according to our model, we conclude that their use and interpretation of signs do not exceed the R2.1 or R2.2 level. To strengthen our approach, let us say that these students reveal to be able to calculate x'(t) and y'(t) using a well-known algorithm. However, they are unable to interpret the results because in the particular case of a singular point it is necessary to make complementary decisions on a mathematical object (R1.2 Table 3) such as calculate x''(t) and y''(t) and interpret them. Moreover, there is a need of explaining because you do that: the *raison d'être* of the calculation, that is, an "enrichment at the argumental level" as said in Table 5.

Those who succeed very well (four from the twelve) write sentences to explain that a singular point is given by *x'(t)=0, y'(t)=0*, applying a R2.2 or even R2.3 knowledge: they are producing statements with relevant signs that come under level R3.2 in Table 5.

One student says that it means that the speed is equal to zero; but only the first one S1 is able to calculate the tangent and identify the nature of the singularity, being clearly in the position R2.3 for all needed symbols: this seems to confirm that she is also located at level R3.3 with regard to Table 5.

3.2. Differential equations

In the second problem students had to cope with the solving of these two differential equations:

Exercise 3: Given the first order differential equation: $e^x yy' - x^2(y^2-9) = 0$
After separating the variable, solve the equation. Then solve the Bernoulli differential equation:

$$y' - \frac{4}{x}y - x\sqrt{y} = 0$$

3.2.1. A priori analysis

First, we consider the first order differential equation. Separating the variables implies preserving the initial shape, that is, not to develop the term $x^2(y^2-9)$, to obtain the following shape: $\frac{yy'}{y^2-9} = \frac{x^2}{e^x}$. This requires analysing preliminarily the features, the characteristics of the different mathematical signs appearing in the equation to anticipate the expected form. To solve this equation, students have then to transform y' as $y' = \frac{dy}{dx}$; then they can produce an algebraic form allowing them to integrate the terms.

Dealing with the term $\int \frac{x^2}{e^x} dx$ requires necessarily applying *twice* integration by parts. Considering the second part of the exercise, solving the Bernoulli equation gives rise to a number of difficulties: the first one consists in being able to make the substitution leading to the equation $2zz' - \frac{4}{x}z^2 = xz$. After simplification it can then be written: $2z' - \frac{4}{x}z = x$.

Students must solve first the homogeneous differential equation associated, and then they have to solve the inhomogeneous differential equation by variation of the constant, which can be a source of new difficulties. The technique of variation of the constant is a part of the new technical and technological tools of first year University course, so it is of Level R3.3 in our model.

3.2.2. Analysis of students' outcomes

First we analyze main difficulties encountered by students to solve the differential equation $e^x yy' - x^2(y^2-9) = 0$. The first one is to separate the variable to obtain $\frac{yy'}{y^2-9} = \frac{x^2}{e^x}$: among fourteen students only eight of them accomplished this task; for two of them this task was difficult and required several attempts as we expected. The next step of the resolution needs to compute $\int \frac{y}{y^2-9}dy$. Seven students out of eight were able to fulfil this task, but two of them represented the quotient as a sum of rational functions, because they did not acknowledge the derivative of the function $Ln(y^2-9)$. Recognize this primitive is of Level R2.2 because students have to identify a schema – a hypoicon according to Peirce – of different 'models' of derivatives/primitives, which variable is not always '*x*'. It supposes that the students' repertoire encompasses a lot of 'forms' that at this level they did not meet often enough. This informs us and is a good example of the lack of availability of mathematical tools to solve this problem. According to Table 5, these students are stuck at level R3.1. They try to operate with their previous repertoire and do not succeed in adapting this repertoire with the new tools studied.

We notice that only five students were able to deal with the term $\int \frac{x^2}{e^x}dx$ applying twice integration by parts. Then, only four students resolved this equation and obtained the whole solution.

As regards the Bernoulli equation, half of the students recognized an equation such as $y' + a(x)y = b(x)y^n$, with $n = \frac{1}{2}$ and $a(x) = -\frac{4}{x}$, $b(x) = x$. They were able to make the substitution $z = y^{\frac{1}{2}}$. But only five of them succeeded in obtaining

$2z'-\frac{4}{x}z = x$; two students did not dare to reduce the equation; they could not admit the possibility of dividing each term by z. Among these five students, the three other students implemented successful methods of solving.

We consider that this solution is not only procedural: students have to interpret that this integral includes well-known functions as x^2 and e^x, so they are supposed to know how to integrate and to derive them. Students must decide by induction that integration by parts would be an appropriate solution. We can presume that those who fail in this calculation are in an abduction process, trying to guess which tool would be likely to lead to blind success.

As a conclusion of this study, the model proves to be efficient to detect students' difficulties about signs, a new interpretation of functions and their derivatives in the case of parametric curves; troubles in the transformation of differential equations to obtain and be able to recognize interpretable 'shapes' as *y'/y*, for instance. Our model also allows– and this can be an important help for teachers and researchers – to become more precisely aware of the level students attain in their attempts to solve the problems: the fact that students made attempts to answer allows to investigate their knowing, their ability to choose mathematical tools and to make these tools work in a proper way in the problem. The elements of our model also allow a good analysis of the way students master the mathematical signs, considering that, as Trigueros and Planell (2010) notice, signs, visualization and understanding are strongly linked. We could add that a level for mastering calculation is essential too.

Conclusion

We can conclude that it is really difficult for students to get access to Level 3 of our model, although this level is the 'expert' one required: they frequently keep stuck at Level 1 with old non-adapted knowledge or false calculations (intra-stage according to Trigueros & Planell, 2010), or they try to work at Level 2 (inter-stage according to the same authors) but do not succeed in more complex calculations, especially when schemas (in Peirce's sense) are involved; or they make the expected calculation but are no more able to interpret it within the problem.

We notice that the involved activities, at this level, imply a very rich assortment of techniques, procedures, and a variety of occasions to apply formulas, which is not obvious even if students have understood the previous course. Yet the familiarity with this new field of knowledge is not easily established for a majority of students, and they are deficient in algebraic skills. Then the students' outcomes illustrate their numerous attempts to try to calculate and recognize well-known shapes within the heuristic milieu. We think that the difficulties highlighted in this study are not linked with the teacher's didactical choices, but they are common within the population of mathematical students, due to the reasons we evoked in the first part of this paper. Let us notice that the name of the course “Mathematics of the movement” is somewhere a fiction: these problems do not refer to a physics problematics, and even if it had been, we doubt it would have helped students to solve them, since difficulties reveal to come under understanding and calculating in mathematics. Maybe a strong reference to a physics phenomenon would have been more a source of additional difficulties.

We also want to point out the missing knowledge in the (French) secondary curriculum: students study no more the composition of functions. Yet they must recognize the kind of schemas we see in a differential equation as above, and this implies to detect which functions are at stake and how they appear in the formula. As students have no familiarity with 'the whole formula' they try to interpret each element separately, which has no meaning. So, most of them do not achieve the level R3.

We could also formulate these obstacles by saying that students fail in doing a pertinent association between syntactic and semantic methods: they are stressed with calculations and cannot control the meaning of the operations they have done.

These results show that it would be necessary to introduce relevant situations with an adidactical dimension aiming at the introduction of the Calculus concepts. Notice that building such situations for complex mathematical knowledge is not always easy. Moreover, the implementation supposes that the teacher masters the course of the situation and the students' progress: this implies specific professional skills, the lesser being to be open minded to students' productions, even if 'false', and able to provide some help but not the whole solution.

The next step of our work should be to find relevant situations for the teaching of Calculus, both in an introductory way in Secondary school, and at University.

Bibliography

ARTIGUE, M. (2001). What can we learn from Educational Research at University level? In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 207—220). New York: Springer.

BLOCH, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics*, **52**, 3-28.

BLOCH, I. (2005). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur.* Note de synthèse de l’Habilitation à Diriger les Recherches. Université Paris 7. Available on: https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00012153

BLOCH I. (2015). Concepts, objets, symboles, enseignement des mathématiques : Quelques réflexions sur l'épistémologie et la didactique. *Petit x*, **97**, 71-79.

BLOCH I. (2018). Connaissances sur les nombres des élèves de fin de secondaire et adaptation à l'université. *Petit x*, 106, 65-77.

BLOCH, I., GHEDAMSI, I. (2004). The teaching of calculus at the transition between Upper Secondary School and University. *Communication to the Topic Study Group 12, ICME 10.* Copenhagen, Denmark. Retrieved from http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.123.6490&rep=rep1&type=pdf

BLOCH, I., GIBEL, P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **31-2**, 191-227.

BLOCH, I., GIBEL, P. (2016). A model to analyse the complexity of calculus knowledge at the beginning of University course. In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of INDRUM 2016, First Conference of the International Network For Didactic Research in University Mathematics* (pp. 43-52). Montpellier: Université de Montpellier and INDRUM.

BRESSOUD, M. (2011). Historical Reflections on Teaching the Fundamental Theorem of Integral Calculus. *The American Mathematical Monthly*, **118-2**, 99-115.

BROUSSEAU, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

CHELLOUGUI, F., & KOUKI, R. (2013). Use of Formalism in Mathematical Activity Case Study: The Concept of Continuity in Higher Education. *Proceedings of the Eighth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME 8,* Antalya, Turquey. Retrieved from: https://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/index.php?slab=proceedings

DURAND-GUERRIER, V. (2010). Semantic perspective in mathematics education. A model on theoretic point of view. *Proceedings of ICME 11*, Mexico. Retrieved from https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/files/Publications/ICME_proceedings/ICMI_2011/Durand-Guarrier.pdf

EVERAERT-DESMEDT, N. (1990). *Le processus interprétatif : introduction à la sémiotique de CS Peirce.* Liège : Mardaga.

GHEDAMSI, I. (2015). Teacher management of learning calculus: case of sequences at the first-year University. In Krainer, K., Vondrová, N. (Eds.). *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)*. (p. 2103-2109). Prague, Czech Republic: Charles University. Retrieved from: http://www.erme.tu-dortmund.de/~erme/CERME9/index.php

GIBEL, P. (2013). Presentation and setting up of a model of analysis for levels of proof in mathematics lessons in primary school. In Ubuz, B., Haser, C., Mariotti, M. A. (Eds.). *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)*. (p. 127-135); Ankara, Turkey Retrieved from http://www.erme.tu-dortmund.de/~erme/CERME8/index.php

GIBEL, P. (2015). Mise en œuvre d'un modèle d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques à l'école primaire. *Éducation et Didactique*, **9-2**, 51-72.

GIBEL, P. (2018). *Elaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques*. Note de synthèse de l'Habilitation à Diriger les Recherches, Université de Pau et des Pays de l'Adour. Available on: https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01919188

GODINO, J. (1996). Mathematical concepts, their meanings, and understanding. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of XX Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.2, pp. 417-425). Valencia: Universidad de Valencia.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A., BLOCH, I., DURAND-GUERRIER, V., MASCHIETTO, M. (2014). Didactic Situations and Didactical Engineering in University mathematics: cases from the study of Calculus and proof. *International Journal of Research in Mathematics Education*, **16(2),** 117-134.

GUEUDET, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics* **67**, 237-254.

GRAVESEN, K., GRØNBAECK, N., WINSLØW, C. (2017). Task Design for Students' Work with Basic Theory in Analysis: The Cases of Multidimensional Differentiability and Curve Integrals. *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education*. N°**3**. p. 9-33

HERSANT, M., PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactic situations. *Educational Studies in Mathematics*, **59(1–3),** 113-151.

HUBBARD, J.H., WEST, B.H. (1995). *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach*. New York: Springer.

LALAUDE-LABAYLE, M. (2016). *L'enseignement de l'algèbre au niveau universitaire. Etude épistémologique et didactique*. Thèse de doctorat, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

MORRIS, C.W. (1938). *Foundations of the Theory of Signs*, Chicago: University of Chicago Press Cambridge University Press.

PEIRCE, C. S. (1906) Prolegomena to an Apology for Pragmaticism. *The Monist*. Vol. 16, 492-546

REINHOLZ, D. (2015) Peer-Assisted Reflection: A Design-Based Intervention for Improving Success in Calculus. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, Volume 1, Issue 2, pp 234–267

SAENZ-LUDLOW, A. (2006). Classroom interpreting games with an illustration. *Educational Studies in Mathematics*, **61**, 183-218.

TALL, D. (1996). Function and calculus**.** In Bishop et al. (Eds) *International Handbook of Mathematics Education*, (p. 289-325). The Netherlands: Kluwer.

TALL, D. (2002). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, **48(2-3)**, 199-238.

TRIGUEROS, M., MARTINEZ-PLANELL, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variables functions. *Educational Studies in Mathematics*, **73(1),** 3-19.

WALL, C.T.C. (2004). *Singular points of plane curves*. Cambridge University Press. Available on: https://www.cambridge.org/core/books/singular-points-of-plane-curves/C805A76E40F5DB806A0F2FC6CBEA63A0#

WEBER, E., THOMPSON, P.W. (2014). Students' images of two variables functions and their graphs. *Educational Studies in Mathematics*, **87,** 67-85.

ISABELLE BLOCH
Université de Bordeaux, France
isabelle.bloch@u-bordeaux.fr

PATRICK GIBEL
Université de Bordeaux, France
patrick.gibel@u-bordeaux.fr

INFORMATIONS POUR LES AUTEURS

Présentation de la revue

Les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives est une revue annuelle fondée en 1988 par Raymond Duval et François Pluvinage, actuellement sous la responsabilité de François Pluvinage, Philippe R. Richard et Laurent Vivier.

Cette revue internationale est dédiée à la diffusion de la recherche en didactique des mathématiques et des domaines connexes. Il s'agit d'une revue francophone de référence sur les recherches portant sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Les articles sont principalement écrits en français, mais peuvent également être publiés en espagnol ou en anglais.

La revue fait l'objet d'un classement scientifique par l'organisme européen ERIH et par l'HCERES en France. Elle est également répertoriée dans des bases de données de référence comme MathEducDataBase ou Googlescholar. Ces différents référencements ajoutent une valorisation des publications dans les Annales pour les auteurs. Les articles sont en accès libre sur le site au bout d'un an.

La revue est ouverte à tout type de recherche. Les articles peuvent être de nature théorique, en relation étroite avec une expérimentation dans le cadre d'un enseignement, ou constituer des comptes rendus d'expériences d'enseignement appuyées sur un cadre théorique explicite. Il est également possible de présenter une synthèse de recherches menées dans un domaine particulier de la didactique des mathématiques, ou de proposer des notes de lectures d'ouvrages scientifiques du domaine. Les articles peuvent concerner tous les cadres d'enseignement dans des contextes socioculturels variés et aussi s'intéresser à la formation, initiale et continue, des enseignants.

Outre la publication du numéro annuel, la revue offre la possibilité d'éditer un numéro spécial sur la base d'un projet clairement formulé.

Cette revue s'adresse principalement aux chercheurs en didactique. Elle intéressera également les formateurs d'enseignants soucieux d'appuyer leurs formations sur la recherche en didactique des mathématiques.

Site internet de la revue : http://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/adsc.

Instructions aux auteurs

La revue est ouverte à tout type de recherche, que ce soit un essai didactique ou un rapport d'étude impliquant de la recherche empirique. Il est également possible de présenter une synthèse des recherches menées dans un domaine particulier de l'enseignement des mathématiques ou d'un domaine connexe (physique, algorithmique, etc.), ou de proposer des notes de lectures d'ouvrages scientifiques. Les domaines théoriques de références sont issus de la didactique des mathématiques. Lorsqu'ils s'insèrent dans une problématique d'enseignement des mathématiques, les travaux peuvent aussi prendre appui sur la psychologie cognitive ou sur la linguistique.

Les articles ne dépassent généralement pas vingt pages, mais exceptionnellement, ils peuvent être plus longs et permettre ainsi à l'auteur de développer un point de vue original qui émerge dans le champ de la recherche.

Les articles peuvent être écrits en français, en espagnol ou en anglais. Lorsque l'article est écrit en espagnol ou en anglais, il est attendu que les auteurs proposent également un résumé en français. Si l'une des trois langues de la revue n'est pas comprise par les auteurs, merci de le préciser lors de la soumission.

Les articles sont à soumettre par courrier électronique à mai-adsc@unistra.fr.

Avant tout envoi, nous vous prions de vérifier que votre article respecte bien les consignes éditoriales suivantes :

- Le format de la revue est respecté : voir le fichier de styles[1] pour les auteurs ;
- Le niveau de langue utilisé est soigné et bien travaillé.
- L'article proposé est original. Il n'a ni déjà été publié ailleurs ni envoyé à une autre revue pour publication. Il ne s'agit pas non plus d'une simple traduction d'un article déjà publié.
- L'article ne contient aucun plagiat et il est dûment référencé.
- En décidant d'envoyer un article à la revue des Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vous autorisez la mise en ligne de votre article sur le site de la revue, un an après sa publication.

Pour composer un article sans utiliser le modèle, par exemple en recourant à LaTeX, voici des précisions sur le format des pages et les caractères utilisés.

---

[1] https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/adsc_style-auteur.doc

Feuille A4 portrait, avec les marges suivantes :

- Haut : 3 cm Bas : 8 cm
- Gauche : 4 cm Droite : 4 cm
- En tête : 2 cm Pied de page : 7 cm
- Reliure : 0 cm

Caractères :

- Auteur(s) en première page : Arial 12 points, gras, petite capitale, Centré ;
- Titre en première page : Arial 14 points, petite capitale, Centré ;
- Abstract – Résumé – Mots clés : Times New Roman 10 points ;
- En-tête : Arial 9 points ;
- Corps de texte : Times New Roman 11 points.

Pour la pagination d'un article proposé, commencer par le numéro 1.

Procédures de sélection des textes

Les articles proposés sont soumis à un arbitrage, en double aveugle, par trois évaluateurs avant publication. Une synthèse sera envoyée aux auteurs par les rédacteurs en chef. Le cas échéant, des demandes de modifications, aménagements ou compléments des textes présentés seront adressées aux auteurs.

Les articles sont reçus par les rédacteurs en chef de la revue. Ils sont emmagasinés sur une plateforme de partage privée uniquement accessible aux rédacteurs en chef, aux conseillers scientifiques et à la conseillère éditoriale.

Une première appréciation de l'adéquation de l'article avec les objectifs de la revue est faite par les rédacteurs en chef. Cette première évaluation peut aboutir à un refus de l'article s'il ne correspond pas à la ligne éditoriale de la revue ou s'il pose un problème éthique. Il peut également être renvoyé aux auteurs pour effectuer des modifications avant l'envoi aux évaluateurs, par exemple, pour une remise en forme ou une correction linguistique. En cas de nécessité, les conseillers scientifiques peuvent être consultés.

Les rédacteurs en chef se consultent pour le choix et la sollicitation des évaluateurs qui ont, au plus, deux mois pour renvoyer leur évaluation. Ils suivent le bon déroulement du processus d'évaluation et ils sont attentifs aux dates de retour afin de prévoir la publication. Un fichier privé aux fonctions de partage et de synthèse est tenu à jour.

Une fiche d'évaluation est proposée aux trois évaluateurs. Selon le retour de ces derniers, une synthèse est envoyée aux auteurs incluant leurs évaluations. Quatre cas de figure sont envisagés : (A) publication acceptée en l'état ; (B) publication acceptée avec des modifications mineures à effectuer, sans nécessité d'une nouvelle évaluation ; (C) Publication possible sous réserve de modifications majeures à effectuer et nécessitant une nouvelle évaluation ; (D) refus de l'article. Selon l'éventualité, le traitement est le suivant :

- Cas A, l'article est transféré à la conseillère éditoriale et au secrétaire d'édition pour préparer la publication.
- Cas B, les rédacteurs en chef demandent le retour des modifications par les auteurs dans un délai maximum d'un mois.
- Cas C, les auteurs ont deux mois pour renvoyer leur nouvelle version. Par la suite, les trois relecteurs initiaux sont sollicités avec un délai de 2 mois pour faire la relecture (délai pouvant être ramené à 1 mois si cela permet de publier l'article dans le numéro de l'année).
- Cas D, un retour circonstancié est envoyé aux auteurs par les rédacteurs en chef. Si nécessaire, les conseillers scientifiques peuvent être sollicités.

Généralement, les articles envoyés l'année *n* et acceptés sont publiés dans le numéro de l'année *n* + 1.

Imprimerie et reprographie
Directions des affaires logistiques intérieures
Université de Strasbourg

Dépôt légal 4ème trimestre 2018