

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

Revue internationale de didactique des mathématiques

Rédacteurs en chef :

FRANCOIS PLUVINAGE, PHILIPPE R. RICHARD, LAURENT VIVIER,

Volume 23 - 2018

IREM de Strasbourg

Université de Strasbourg

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
ISSN 0987 - 7576

Rédacteurs en chef

François PLUVINAGE, CINVESTAV-IPN, Mexico, Mexique
Philippe R. RICHARD, Université de Montréal, Montréal, Canada
Laurent VIVIER, Université Paris Diderot, Paris, France

Conseillers scientifiques

Raymond DUVAL Lille, France	Alain KUZNIAK Université Paris Diderot, Paris, France
Athanasios GAGATSIS Université de Chypre, Nicosie, Chypre	Eric RODITI Université Paris Descartes, Paris, France

Comité de rédaction

Alain BRONNER Université de Montpellier, France	Asuman OKTAÇ CINVESTAV, Mexico, Mexique
Lalina COULANGE Université de Bordeaux, France	Luis RADFORD Université Laurentienne, Sudbury, Canada
Iliada ELIA Université de Chypre, Nicosie, Chypre	Jean-Claude REGNIER Université Lumière, Lyon, France
Cécile De HOSSON Université Paris Diderot, Paris, France	Maggy SCHNEIDER Université de Liège, Belgique
Inés M ^a GOMEZ-CHACON Université Complutense, Madrid, Espagne	Denis TANGUAY Université du Québec à Montréal, Canada
Nadia HARDY Université Concordia, Montréal, Canada	Laurent THEIS Université de Sherbrooke, Canada
Fernando HITT Université du Québec à Montréal, Canada	Carl WINSLOW Université de Copenhague, Danemark
Catherine HOUEMENT Université de Rouen, France	Moncef ZAKI Université de Fès, Maroc
Maria Alessandra MARIOTTI Université de Sienne, Italie	

Responsable de publication

Josiane NERVI-GASPARINI
Directrice de l'IREM de Strasbourg

Conseil éditorial

Charlotte DEROUET
Université de Strasbourg, France

Secrétariat d'édition

Bruno METZ
IREM de Strasbourg

Éditeur

IREM de Strasbourg – Université de Strasbourg
7, rue René Descartes 67084 Strasbourg CEDEX
Tél. : +33 (0)3 68 85 01 30
Fax. : +33 (0)3 68 85 01 65
irem@math.unistra.fr

Bibliothèque

Christine CARABIN
Tél : +33 (0)3 68 85 01 61
<http://irem.unistra.fr>

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
VOLUME 23 – 2018

SOMMAIRE

ÉDITORIAL	7
CATHERINE HOUEMENT, ÉDITH PETITFOUR (France) <i>L'analyse sémiotique de l'activité mathématique, une nécessité didactique dans le contexte de l'adaptation scolaire</i>	9
AMÉLIE AUQUIÈRE, ISABELLE DEMONTY, ANNICK FAGNANT (Belgique) <i>Impact des structures sémantiques et de l'introduction de schématisations sur les performances et les démarches de résolution de problèmes</i>	41
GRAFEM : NADINE BEDNARZ, CAROLINE LAJOIE, JEAN-FRANÇOIS MAHEUX, MIREILLE SABOYA (Canada) <i>Contextualiser pour enseigner les mathématiques : un enjeu de formation</i>	69
LAURENT MOUTET (France) <i>L'analyse d'une séquence d'enseignement de la relativité restreinte : l'apport du modèle de l'espace de travail mathématique étendu</i>	107
GÜNHAN CAGLAYAN (Etats-Unis) <i>Coordinating Representation Registers: Linear Algebra Students' Understanding of Orthogonal Legendre Polynomials in the Inner Product Space P_n in a Technology-Assisted Learning Environment</i>	137
FABIEN EMPRIN (France) <i>Les apports d'une analyse statistique des données textuelles pour les recherches en didactique : l'exemple de la méthode Reinert</i>	179
INFORMATIONS POUR LES AUTEURS	201

EDITORIAL

Cette année 2018 a été particulièrement riche pour les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives (ADSC). Tout d'abord, il convient de saluer la qualité du travail fourni par Eric Roditi durant ses années de codirection scientifique des ADSC. En particulier, ses contacts en dehors du seul monde de la didactique des mathématiques ont été source de propositions d'articles novateurs. Mais le développement de ses activités professionnelles au sein de son laboratoire ne lui permettait plus de consacrer aux ADSC tout le temps qui lui paraissait nécessaire pour assurer un bon travail d'éditeur. Il a donc demandé qu'un relais soit assuré, tout en concluant très efficacement sa codirection scientifique. Qu'il trouve ici l'expression d'un remerciement mérité.

Depuis quelques années, la consultation du site Internet des ADSC au sein de l'IREM de Strasbourg a pu s'enrichir grâce à deux sites miroir, l'un situé à l'Université Paris Diderot, l'autre à l'Université de Montréal. Il était alors assez naturel de songer à ces deux antennes pour la codirection scientifique de la revue. Deux membres de ces institutions ont bien voulu accepter de prêter leur concours à la publication. Nous sommes donc à présent trois codirecteurs scientifiques : Francois Pluvinage entre l'IREM de Strasbourg et le Cinvestav-IPN de México, Philippe R. Richard de l'Université de Montréal et Laurent Vivier de l'Université Paris Diderot.

Chacun sait qu'en géométrie, trois points déterminent un plan. Et un plan, nous en avons effectivement un pour les ADSC. Il s'agit de les faire admettre au sein de *Open Edition*, afin de leur donner la meilleure des visibilités et de valoriser au mieux pour les auteurs la parution d'un article dans les ADSC. Un certain nombre de conditions étaient à remplir à cette fin. L'une était que chaque manuscrit donne lieu à un triple arbitrage pour que sa publication puisse être acceptée. Cette mesure a été mise en œuvre dès cette année 2018. Une autre condition était que les articles d'un volume donné soient accessibles en ligne une année après sa parution sous forme imprimée. L'IREM de Strasbourg a heureusement accepté de réduire à un an le délai de libre accès à la consultation en ligne, qui était auparavant de trois ans. Concrètement, cela signifie que la consultation des articles d'un volume donné est ouverte lorsqu'est publié le volume suivant sous sa forme imprimée.

La publication d'articles issus du Québec au Canada était déjà un fait. La présence de La Belle Province s'est renforcée au sein du comité scientifique des ADSC. Certes, il s'agit d'une présence francophone, mais pour autant la revue se veut de rester fidèle à sa politique de publication multilingue, avec bonne représentation d'articles en anglais et en espagnol, donc au total avec le français, les trois langues européennes les plus parlées dans le monde, particulièrement dans les Amériques. La publication cette année 2018 d'un volume spécial des ADSC sous l'intitulé English-French a naturellement renforcé la présence de l'anglais.

Dans ce *Special English-French*, paru en juillet, les articles d'introduction et de conclusion se présentent en versions française et anglaise, les autres articles étant rédigés en anglais, mais tous avec participation de chercheurs français. En effet, le propos de ce volume spécial est de montrer sur un certain nombre de sujets la confrontation des points de vue de chercheurs relevant d'écoles de pensées ayant chacune sa vision et ses pratiques propres. Nous espérons que les lecteurs d'articles de ce volume spécial apprécieront l'enrichissement qui a pu en résulter.

L'équipe de direction scientifique des ADSC :

Francois Pluvinaud, Philippe R. Richard, Laurent Vivier

CATHERINE HOUEMENT, ÉDITH PETITFOUR

L'ANALYSE SEMIOTIQUE DE L'ACTIVITE MATHÉMATIQUE,
UNE NECESSITE DIDACTIQUE DANS LE CONTEXTE DE
L'ADAPTATION SCOLAIRE

Abstract. Semiotic analysis of mathematical activity, a didactic need in the context of school adaptation.

The research we are conducting seeks to understand what is being played out between the actors (students, teacher) which could enlighten us on some difficulties for teaching mathematics in special education. It explores the semiotic dimension of mathematical activity. In this paper a learning situation of the decimal numeration is proposed to three students with intellectual disabilities in a Medical-Educational Institute. The analyse is based on the different signs activated (Arzarello, 2006 ; Radford, 2003) through interactions between students during a brief episode. The study points out the presence of "semiotic misunderstandings" and the role of interactions in the activity, including social interactions, between students or with the teacher.

Résumé. La recherche que nous menons cherche à comprendre ce qui se joue entre les acteurs (élèves, enseignant) et qui pourrait éclairer certaines difficultés à faire apprendre des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire. Pour ce faire, nous étudions en particulier la dimension sémiotique de l'activité mathématique. Le support est une situation d'apprentissage de la numération décimale, proposée à trois élèves handicapés atteints de déficience intellectuelle dans un Institut Médico-Éducatif. Les analyses s'appuient sur les différents signes activés lors des interactions, lorsqu'ils font des mathématiques (Arzarello, 2006 ; Radford, 2003). L'étude pointe la présence de « malentendus sémiotiques » et le rôle des interactions, y compris sociales, entre élèves ou avec l'enseignante dans l'activité.

Mots-clés. Sémiotique, adaptation scolaire, malentendus sémiotiques, mathématiques.

Introduction

Dans nos travaux de recherche¹ nous adoptons une approche que nous qualifions de situationniste au sens où nos analyses se font à partir d'observations d'élèves en situation de classe et non à partir d'informations données par un diagnostic neuropsychologique, par la mention du handicap, par les empêchements *a priori*

¹ Projet *Sémiotique dans l'enseignement spécialisé* dans *École inclusive et prise en compte de la diversité des élèves* dans *Recherches collaboratives* sur le site <http://espe.univ-rouen.fr/>.

que le handicap devrait entraîner chez l'élève. Nous suivons en cela Vergnaud : « Tout sujet, même lourdement frappé, peut mettre en œuvre des ressources alternatives, qui, même si elles sont plus coûteuses, psychologiquement, que les moyens ordinaires, n'en permettent pas moins d'accomplir des gestes, des raisonnements et des opérations, qui ne semblaient pas, ou plus, *a priori* accessibles. » (Vergnaud, 2004, p.2).

Notre question génératrice, est de comprendre ce qui se joue pour des élèves (dans cet article, un groupe d'élèves d'un Institut Médico-Éducatif), dans les relations et interactions entre l'enseignante spécialisée et ses élèves, dans les interactions entre élèves, dans leur appréhension des savoirs en jeu dans une activité à visée mathématique. À long terme, nos travaux visent à identifier des leviers potentiels pour enrichir les pratiques² conduisant des élèves en situation de handicap à apprendre des mathématiques, avec leur handicap et les capacités qu'ils peuvent développer par compensation. Or, « la construction de la pratique découle d'une confrontation entre la réalité et des répertoires de connaissances [des professeurs en formation] et rien ne peut être agi efficacement s'il n'existe pas de processus d'adaptation » (Nadot, 2005). À l'instar de Nadot, nous adoptons une démarche compréhensive.

Nous focalisons nos observations sur les actions des élèves (actions pour soi) et sur les interactions sociales, lorsque les élèves font des mathématiques, avec l'hypothèse de travail qu'elles sont constitutives de leurs apprentissages, suivant en cela la conception vygotskienne de la médiation (Wertsch, 1991).

Nous faisons également l'hypothèse qu'il est possible de prendre appui sur les signes – oraux, graphiques, gestuels, liés à du matériel – que nous renvoient les élèves, en interaction entre pairs ou avec l'enseignant, pour comprendre comment ils fonctionnent et quelle cohérence ils développent. Nous nous référons ainsi à la théorie de l'objectivation (Radford, 2006) et utilisons des outils d'analyse sémiotique pour rendre compte des différents signes activés lors des interactions entre élèves et les interpréter (Peirce, 1978 ; Arzarello, 2006 ; Radford, 2003).

Notre étude³ s'attelle donc au repérage de tels signes et à la construction d'hypothèses sur les interprétations des élèves des différents éléments de l'activité mathématique. Dans une première partie, nous exposons nos outils d'analyse sémiotique, en relation avec l'activité mathématique, qui sera modélisée sous forme d'organisations mathématiques locales dans la deuxième partie (Chevallard, 1999). Les questions de recherche concluent cette partie. La deuxième partie

² d'enseignants en formation continue, comme précisé plus loin.

³ Cette étude a fait l'objet d'une présentation au cours du 44^{ème} colloque des formateurs d'enseignants du premier degré en mathématiques organisé par la COPIRELEM en juin 2017 à Épinal.

précise le contexte de l'étude, un épisode d'une séance d'enseignement autour de la numération décimale, les données recueillies et des éléments d'analyse didactique *a priori*. Dans la troisième partie, une analyse sémiotique repère les signes mathématiques qui circuleront *a priori* et les signes « non mathématiques » liés à la consigne ou aux supports proposés. La quatrième partie rend compte de l'analyse *a posteriori* didactique et sémiotique : elle pointe notamment la variété des techniques utilisées, l'influence possible des multiples signes en circulation sur les réactions/productions d'élèves. Une discussion clôt la réflexion.

1. Outils d'analyse sémiotique et questions de recherche

1.1. Processus sémiotique

La sémiotique étudie la production, la codification et la communication de signes. Elle a dépassé l'étude de la langue grâce notamment aux travaux de Charles Sanders Peirce (1839-1914). Selon Peirce (1978) et d'autres chercheurs développant un modèle sémiotique triadique (le triangle sémiotique), la sémiotique étudie les relations entre les trois pôles suivants : référent ou objet, signes ou représentations sémiotiques, interprétations de ces signes. Nous retiendrons ces expressions de préférence aux nombreuses autres de la littérature sémiotique (Eco 1980). Le référent (ou objet) est ce à quoi renvoie le signe et l'interprétation ce qu'en comprend la personne qui reçoit ce signe. Pourront donc se croiser dans la communication des interprétations différentes d'un même signe.

Dans le domaine de la langue, le modèle dyadique de Saussure (cité par Eco 1980) avec les deux pôles, signe et interprétation, permet déjà d'attraper la complexité du langage, et l'influence du contexte : le mot volume, par exemple, est interprété différemment selon qu'il est associé à une collection de livres, à un environnement sonore ou à un aquarium.

Un objet a de multiples signes qui lui font référence. Certains signes ont plus de « ressemblance » que d'autres avec l'objet (pour ceux qui connaissent l'objet) : Peirce parle alors de signes iconiques⁴. Une photo d'un objet réel est souvent plus « fidèle » qu'un schéma, une photo « parle » souvent beaucoup plus qu'un mot. Le chant d'un pinson est un signe qui évoque en général la présence d'un oiseau, sans plus de détail ; avec un peu d'entraînement, on reconnaît le chant du pinson. Une interprétation n'est pas figée. Peirce s'intéresse au processus d'évolution des interprétations d'un même signe par un sujet et met en avant ce mouvement d'une interprétation à une autre.

⁴ Pour plus de développement sur Peirce, voir Bloch & Gibel (2011).

Un signe ne peut donner à voir, à entendre, à sentir qu'une facette de l'objet, il ne peut pas rendre compte de l'objet dans son entièreté. Le chant du pinson ne fournit ni la taille du pinson ni la couleur de son plumage.

Une personne confrontée à un signe interprète ce signe en fonction des connaissances qu'elle a de l'objet que ce signe est censé représenter. Le contexte réel ou inséré par la personne influe aussi sur l'interprétation.

1.2. Sémiotique et mathématiques

Des chercheurs ont déjà développé cette approche sémiotique en s'intéressant plutôt aux pratiques mathématiques expertes. Par exemple, Chevallard (1994) a introduit dans la Théorie Anthropologique du Didactique la distinction ostensif et non ostensif, en appui sur un modèle sémiotique dyadique. Plus généralement, Vergnaud (1990) intègre une facette sémiotique, dans son modèle de la conceptualisation : « les formes langagières et non langagières qui permettent de représenter le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant) » (Vergnaud, 1990, p.145) sont un des trois volets du concept.

Pour Duval (1993, 2006), les mathématiques sont un domaine particulièrement sensible aux questions sémiotiques : en effet les objets mathématiques sont par essence théoriques, ils sont perceptivement et instrumentalement inaccessibles, ils ne sont « visibles » que par leurs représentations sémiotiques, leurs signes. Duval s'appuie sur le modèle triadique de Peirce pour rendre compte de processus cognitifs inhérents à l'activité mathématique. Dans une vision mathématique naturaliste, une représentation sémiotique tend à se substituer à l'objet mathématique qu'elle dénote. Or le signe n'est pas l'objet. Duval affirme qu'en mathématiques, la multiplicité des représentations sémiotiques d'un même objet est cruciale pour appréhender cet objet et qu'une représentation n'est intéressante que dans la mesure où elle peut se transformer en une autre représentation. Selon Duval (2006), les représentations sémiotiques internes aux mathématiques, de nature symbolique, s'organisent en systèmes sémiotiques (ou registres sémiotiques), définis notamment par des règles organisatrices à partir d'éléments de base. Duval distingue, pour le travail cognitif lié aux mathématiques, deux transformations de représentations, selon qu'elles appartiennent au même système sémiotique (traitement) ou à deux systèmes différents (conversion).

Par exemple, un nombre a plusieurs représentations, issues de différents systèmes sémiotiques : écritures décimales finies ou non, écritures fractionnaires. La représentation sémiotique « $4/3$ » donne immédiatement à voir « 4 partagé en 3 » ; la conversion en « 1,333 ... » donne immédiatement à voir l'ordre de grandeur, entre 1 et 2 ; cet ordre de grandeur aurait aussi pu être obtenu par une transformation de « $4/3$ » en « $1 + 1/3$ ». Bien sûr, l'interprétation des écritures

n'est pas transparente : comme pour toute représentation sémiotique, elle est à construire par le sujet ...

Si on suit Peirce, l'*interprétation ultime* d'un signe mathématique dénotant un objet mathématique, qui est une enveloppe (au sens mathématique) de toutes les interprétations correctes du signe, correspondrait à l'objet lui-même.

L'utilisation du modèle de Peirce n'est pas nouvelle en didactique des mathématiques (Bloch, 2009 ; Bloch & Gibel, 2011). En explorant notamment les dimensions syntaxique, sémantique et pragmatique de la sémiose, Bloch & Gibel (2011) affinent un modèle d'analyse des raisonnements, en appui sur des élèves de Première Scientifique (16-17 ans, grade 9). Ces chercheurs pointent les enrichissements de la nature⁵ des signes (langagiers, scripturaux ou graphiques), que les élèves produisent dans une situation visant la conceptualisation de la limite d'une longueur. L'étude que nous présentons s'intéresse plus aux interprétations et mises en relation des signes qu'aux enrichissements de leur nature, compte tenu des signes produits par les élèves observés et de la brièveté de l'épisode étudié.

Ainsi, nous utilisons une approche sémiotique, et certains outils de Peirce, pour prendre en compte l'usage et l'interprétation par les élèves, notamment dans l'enseignement spécialisé, des signes mathématiques, souvent décalés par rapport aux usages et interprétations usuelles dans les mathématiques.

Plusieurs chercheurs sur l'enseignement des mathématiques à des élèves en grande difficulté scolaire (par exemple Giroux, 2013) pointent même comme enjeu d'enseignement la réduction des décalages entre les interprétations mathématiques des enseignants et des élèves dans une situation d'enseignement.

Pour rendre compte de ces différences d'interprétations, nous utiliserons le terme de *malentendu sémiotique* avec les sens suivants :

- un décalage, une contradiction entre deux interprétations d'un même signe par un même sujet,
- une interprétation personnelle et « décalée » d'un signe mathématique culturellement fixé.

Prenons l'exemple suivant qui rend bien compte de la complexité et des ans emboitements sémiotiques : on demande à un élève de 6-7 ans (grade 1, en mars) de produire une collection de cubes dont la quantité est donnée par le signe « 32 », à partir du matériel usuel de la classe (un bac avec plus de dix barres de dix cubes emboîtés, chaque barre étant d'un seul tenant, et un autre bac avec plus de cinquante cubes en vrac). L'élève doit donc produire un signe matériel de la « référence » (la quantité 32) dont l'écriture chiffrée « 32 » est un signe. La

⁵ passage d'icône, à indice, voire à symbole / argument.

production de l'élève permet de faire des hypothèses sur son interprétation du signe « 32 ». Cette production est donc elle-même un signe que l'enseignant peut interpréter. Par exemple une collection donnée sous la forme de 3 barres de dix cubes et 2 cubes isolés ou emboîtés peut être considérée comme le signe d'une interprétation correcte (certes locale) des aspects décimal et positionnel de l'écriture indo-arabe. Une collection de 32 cubes en vrac sera vue comme le signe d'une interprétation correcte du signe « 32 », sans plus. En revanche, la production constituée d'une barre de trois cubes juxtaposée à une barre de deux cubes sera considérée comme le signe d'une interprétation erronée de l'écrit indo-arabe, donc d'un malentendu sémiotique.

L'approche sémiotique développée notamment par Arzarello (2006) et Radford (2003), en appui sur Peirce, est aussi un outil puissant pour rendre compte de l'activité des élèves, de leur engagement et du traitement de la tâche (mathématique ou non), à partir des signes qu'ils émettent, qu'ils soient verbaux, graphiques, gestuels. Petitfour (2015) a largement exemplifié dans sa thèse l'utilisation de cette approche pour observer et comprendre les différentes facettes de l'activité d'un élève dyspraxique aux prises avec l'injonction d'une construction instrumentée.

1.3. Questions pour cet article

Nous centrons notre étude sur un épisode d'enseignement de la numération décimale à trois élèves de 12-13 ans déficients intellectuels de l'Unité d'Enseignement d'un Institut Médico-Éducatif.

Nous cherchons à répondre aux questions suivantes dans le but est de comprendre le fonctionnement de ces élèves en situation de handicap lorsqu'ils font des mathématiques.

Quels signes mathématiques sont activés pendant ce moment ?

Quelle(s) interprétation(s) les élèves font-ils des divers signes que leur adresse, que leur propose l'enseignante ? Quels décalages avec des interprétations attendues culturellement ou par l'enseignante dans le contexte ?

Quels signes sont activés par les élèves en interaction entre pairs et avec l'enseignante ?

Que nous permettent-ils d'inférer de leur compréhension des tâches proposées, de leur engagement dans le travail, de leurs connaissances sur le nombre ?

2. Contexte et analyse *a priori*

Après une présentation du contexte de l'étude, nous proposons une analyse *a priori* didactique de la situation proposée aux élèves, que nous compléterons par une

analyse *préalable* sémiotique dans la partie suivante, en appui sur le document fourni aux élèves et le matériel disponible. L'analyse didactique repère des organisations mathématiques locales (Chevallard, 1999), pour ensuite qualifier les techniques mobilisées par les élèves. Elle intègre déjà une part sémiotique.

2.1. Contexte de l'étude, données recueillies

L'épisode étudié s'insère dans une séquence d'enseignement de la numération décimale réalisée dans une classe d'un Institut Médico-Éducatif avec 7 élèves de 12-13 ans déficients intellectuels. Nous suivrons plus particulièrement trois élèves (Nick, Mélanie et Angèle). L'enseignante de cette classe suit la formation CAPA-SH⁶ dans laquelle nous intervenons. Elle a élaboré et mis en œuvre en novembre 2016 une situation de numération, contextualisée par une commande fictive de craies, pour travailler avec ses élèves la décomposition des nombres.

Nous avons filmé la troisième séance qui a eu lieu le jeudi 17 novembre 2016 et avons enregistré différents échanges à propos de cette séance. Pour cette étude, nous nous appuyons sur différentes données issues de diverses sources : échanges par courriel entre enseignante et chercheuses huit jours avant la séance ; entretien d'autoconfrontation, trois mois après la séance (février 2017) ; échanges entre stagiaires de la même promotion que l'enseignante, dans le cadre de la formation CAPA-SH, lors d'un visionnement de cette même séance, trois mois et demi après la séance.

L'extrait étudié concerne l'activité « Bulletin de commande » (annexe 1) proposée à Nick, Mélanie et Angèle. Ces trois élèves travaillent sur des fiches (cf. le document élève de l'annexe 1) dans le « coin-maths » de la salle, espace avec une table, du matériel qui sera précisé par la suite et des affichages mathématiques au mur : un tableau des nombres jusqu'à 100 (tableau de 10 lignes et 10 colonnes) et trois bandes numériques (de 0 à 39, de 40 à 79 et de 80 à 100).

Après un « jeu du furet », rituel de comptage de « un en un », décroissant de 50 à 30, puis croissant de 11 à 80, mené avec les sept élèves de la classe, l'enseignante invite Nick, Mélanie et Angèle à travailler ensemble dans le « coin-maths » tandis qu'elle s'occupera d'une autre élève. Les trois élèves reçoivent chacun un « bulletin de commande de craies » à compléter (cf. annexe 1) et disposent de matériel : un bac avec des bâtons en vrac, des paquets de dix bâtons élastiques et des paquets de cent bâtons (constitués de dix paquets de dix bâtons) également

⁶ Cette formation préparait depuis 2004 des professeurs des écoles titulaires au CAPA-SH (Certificat d'aptitude professionnelle pour les aides spécialisées, les enseignements adaptés et la scolarisation des élèves en situation de handicap). Depuis février 2017, le CAPA-SH est remplacé par le CAPPEI (Certification d'Aptitude Professionnelle aux Pratiques de l'Education Inclusive).

élastiques (cf. la photo du matériel à disposition de l'annexe 1). Les paquets ont été produits par les élèves lors d'une première séance (le jeudi 10 novembre). On ne sait suite à quelle consigne, les élèves ont voulu dénombrer des bâtons : « ils ont fait les paquets de cent avant ... c'est eux qui ont voulu les compter, ils sont passés par les paquets de dix et de cent ... on n'a jamais fini de compter la boîte entière, c'est un travail que j'avais pas prévu en fait. » (Extrait d'un entretien avec l'enseignante, février 2017). Lors d'une deuxième séance, le lundi 14 novembre, Nick et Angèle ont travaillé sur une activité (et une fiche) analogue à celle de la troisième séance, pour des commandes de 10, 30, 42, 55, 100 et 120 craies. Ils étaient alors accompagnés par l'enseignante dans l'utilisation du matériel : « c'est moi qui ai proposé le matériel d'emblée [...] la fois d'avant, ils prenaient le matériel, par exemple pour faire cent, ben, par dizaine, dix, vingt, trente, ... en comptant de dix en dix. » (Extrait d'entretien avec l'enseignante, février 2017).

2.2. Analyse *a priori* didactique

Le type de tâches mathématiques, sous-tendu par l'activité contextualisée de remplissage du bulletin commande de « boîtes de 10 » et de « craies à l'unité », consiste à décomposer un nombre écrit en chiffres en nombre de dizaines et nombre d'unités, voire de donner la décomposition canonique⁷ du nombre en dizaines et nombre d'unités. Le savoir visé participe de la compréhension du nombre écrit en chiffres, notamment la relation entre position et valeur d'un chiffre dans le nombre.

On peut remarquer que dans cette fiche, il n'y a pas de consigne. Nous savons que Nick et Angèle ont travaillé avec l'enseignante sur un bulletin de commande analogue lors de la séance précédente.

Le premier tableau impose une décomposition canonique en dizaines puisque dans la colonne « Boîtes de craies livrées » les élèves ont à compléter les pointillés de la réponse pré remplie « boîtes de 10 ». Le second tableau permet différentes décompositions en dizaines et unités avec la réponse à compléter « boîtes de 10 et craies à l'unité ». L'effet des premiers items, couplé à celui du contrat didactique, peut laisser supposer qu'est attendu le nombre maximum de boîtes de dix craies associé au nombre minimum de craies à l'unité.

Les variables didactiques sont la taille des nombres (nombres de trois chiffres inférieurs à 200 ou pas), le fait que le nombre soit (ou pas) un multiple de dix, le fait qu'il y ait ou non un « 0 » au rang des dizaines, les relations entre les nombres successivement proposés, la présence ou non de matériel (bâtons), la disponibilité (ou pas) de groupes compacts de dix bâtons ou de cent bâtons, les supports

⁷ Nous appellerons « décomposition **canonique** en unités de numération » la décomposition qui donne les nombres maxima d'unités de numération des rangs les plus élevés.

autorisés, tels que tableau de nombres organisés (comme celui affiché au mur), bande numérique, tableau de numération, calculatrice, brouillon.

Différentes techniques de résolution, au sens de Chevallard (1999), sont envisageables pour les élèves, plus ou moins performantes ou plus ou moins adaptées selon le nombre de craies commandées. Nous les présentons ainsi que des mises en œuvre mettant en jeu différents systèmes sémiotiques.

Voici des techniques, en appui sur l'interprétation de l'écriture chiffrée.

Utilisation de relations connues (T_0) : Des relations connues entre le nombre donné et le nombre de dizaines correspondant peuvent être utilisées, comme la relation « cent, c'est dix dizaines » qui, si elle a été mémorisée, permet de trouver de façon immédiate qu'il faut « 10 boîtes de 10 » pour une commande de 100 craies lorsque l'on revient au contexte des craies. En contexte, des relations trouvées entre nombre de craies commandées et nombre de « boîtes de 10 » et de « craies à l'unité » livrées et des calculs sur ces relations (produit par un entier ou somme de deux relations) peuvent être utilisés. Par exemple, le nombre de « boîtes de 10 » pour 200 craies commandées peut être déduit en doublant le nombre de « boîtes de 10 » pour 100 craies commandées. Autre exemple, le nombre de « boîtes de 10 » et de « craies à l'unité » pour 246 craies commandées peut être déduit en ajoutant ceux correspondant à 100 craies et 146 craies.

Troncature (T_1) : Le nombre maximum de « boîtes de 10 » est donné par une troncature à la dizaine du nombre donné et le nombre de « craies à l'unité » correspond au chiffre des unités du nombre donné. La troncature peut se faire par lecture directe sur l'écriture chiffrée ou à l'aide d'un tableau de numération que l'on complète. Si besoin, la lecture peut être aidée par des signes graphiques, par exemple, par un trait de séparation entre le chiffre des dizaines et celui des unités. Elle peut être aussi accompagnée par l'utilisation du doigt ou de la main : par exemple le doigt ou la main cache le chiffre le plus à droite pour permettre la lecture du nombre de dizaines, puis le laisse apparent en cachant cette fois les autres chiffres.

Décomposition canonique en appui sur l'écriture chiffrée (T_2) : Le nombre de « boîtes de 10 » et de « craies à l'unité » peut être trouvé avec la décomposition canonique en nombre de centaines, dizaines et unités du nombre donné à partir de son écriture chiffrée. Ensuite sont utilisés l'égalité entre 1 centaine et 10 dizaines, un calcul du nombre total de dizaines et la correspondance d'une dizaine avec une « boîte de 10 » et d'une unité avec une « craie à l'unité ». Par exemple, 246 se décompose en 2 centaines, 4 dizaines et 6 unités. Sachant que 1 centaine est égale à 10 dizaines, 2 centaines sont égales à 20 dizaines, 246 se décompose donc en (20 + 4) dizaines et 6 unités, soit en 24 dizaines et 6 unités. Il faut donc 24 « boîtes de 10 » et 6 « craies à l'unité ».

Décomposition canonique en unités de numération en appui sur l'oralisation du nombre (T_3) : Le nombre de « boîtes de 10 » et de « craies à l'unité » peut être trouvé avec la décomposition canonique en nombre de centaines, dizaines et unités à partir du nombre donné à l'oral. Ensuite sont utilisés l'égalité entre cent et dix dizaines, la relation entre le nom d'un multiple de dix et le nombre de dizaines correspondant, un calcul du nombre total de dizaines et la correspondance d'une dizaine avec « une boîte de 10 » et d'une unité avec une « craie à l'unité ». Par exemple, 246, lu « deux-cent-quarante-six », se décompose en « deux-cents », « quarante » et « six ». Sachant que « cent » est égal à « dix dizaines », « deux-cents » est égal à « vingt dizaines », sachant aussi que « quarante » est égal à « quatre dizaines », « deux-cent-quarante-six » se décompose donc en « vingt-quatre dizaines », et « six unités ». Il faut donc 24 « boîtes de 10 » et 6 « craies à l'unité ».

D'autres techniques sont en appui sur la structuration de la comptine orale ou du calcul :

Ajouts de 10 (T_{41}) : Le nombre de « boîtes de 10 » à commander peut être déterminé par des additions répétées de 10 jusqu'au nombre cible (c'est-à-dire jusqu'au nombre de craies à commander ou, sinon, jusqu'au plus grand nombre de la suite de sommes inférieur au nombre de craies à commander), suivi du dénombrement des termes 10 de la somme calculée. Le nombre de « craies à l'unité » correspond à la différence entre le nombre donné et le nombre cible.

Retraits de 10 (T_{42}) : Le nombre de « boîtes de 10 » à commander peut être déterminé par des retraits successifs de 10 à partir du nombre donné tant que cela est possible (résultat de la soustraction supérieur ou égal à 10), suivi du dénombrement des termes 10 retranchés. Le nombre de « craies à l'unité » correspond au reste inférieur à 10.

Les techniques T_{41} et T_{42} sont en réalité au moins doubles, car elles se déclinent en version écrite et en version orale avec appui mémoriel gestuel ou écrit. Les additions ou soustractions peuvent être calculées mentalement ou à l'aide des opérations successivement posées. Les résultats successifs peuvent aussi être trouvés grâce à l'énumération montante ou descendante de la comptine des nombres de dix en dix avec repérage pris sur les doigts (les doigts jouent le rôle d'instrument mémoriel), repérage sur un tableau de nombres (idem) ou à l'aide d'un marquage de traits sur une feuille par exemple. Le dénombrement des termes 10 se fait alors par comptage ou reconnaissance de configurations de doigts ou de marques.

Il existe d'autres techniques de type calcul qu'on ne développera pas : la multiplication par 10 à trous (T_{43}) et la division par 10 (T_{44}).

D'autres techniques enfin sont en appui sur une représentation matérielle ou graphique. Elles reposent sur la construction d'une collection organisée et équipotente à celles des craies commandées, suivie d'un dénombrement de « paquets de 10 » et de « craies à l'unité ». La construction d'une collection équipotente à celle des craies commandées peut être réalisée avec une représentation, matérielle ou graphique, des craies et boîtes de craies. Par représentation matérielle, nous entendons des objets tangibles manipulables : les bâtons à disposition peuvent être utilisés, en considérant par exemple qu'un bâton représente une craie et que dix bâtons élastiqués représentent une boîte de 10 craies. Une représentation graphique peut être sous forme d'un dessin de craies et de boîtes de craies (en appui sur les photos de l'énoncé ou sur les connaissances culturelles des élèves) ou encore sous forme de signes graphiques plus schématiques (par exemple un trait ou un rond pour représenter une craie, etc.). Nous distinguons les techniques en fonction du mode de construction de la collection équipotente à celles des craies commandées :

À partir de la représentation de « craies à l'unité » (T_5) : la collection de craies est construite de « un en un », par une représentation des craies matérielle par des bâtons ou graphique, au fur et à mesure de l'énoncé d'un mot nombre de la comptine numérique jusqu'à la quantité de craies commandée. Sont ensuite réalisées – ou bien au fur et à mesure – des « boîtes de 10 » jusqu'à ce qu'il reste moins de dix unités isolées. Pour cela, les bâtons par dix sont regroupés par dix par un élastique, ou bien sont disposés en une configuration donnée (par exemple, des lignes de dix bâtons) ; sur une feuille de papier, on peut, par exemple, entourer les traits par dix, on peut aussi faire les tracés dans une configuration où les paquets de dix seront visuellement repérables, etc. Pour terminer, les « boîtes de 10 » réalisées et les « craies à l'unité » restantes sont dénombrées.

À partir de la représentation de « boîtes de 10 » et de « craies à l'unité » (T_6) : la collection de craies est construite de dix en dix, par une représentation matérielle ou graphique des « boîtes de 10 », au fur et à mesure de l'énoncé d'un mot nombre de la comptine des dizaines (« dix, vingt, trente, ... ») jusqu'au nombre de craies à commander (si c'est un multiple de 10) ou sinon jusqu'au plus grand nombre inférieur au nombre de craies à commander. La collection de boîtes de craies est ensuite complétée, lorsque le nombre n'est pas multiple de 10, par des craies à l'unité.

À partir de la représentation de « boîtes de 100 », de « boîtes de 10 » et de « craies à l'unité » (T_7) : la collection de craies est construite en appui sur la décomposition canonique en nombre de centaines, dizaines et unités du nombre donné à partir de son écriture chiffrée ou en appui sur la lecture orale de cette écriture chiffrée. Avec le matériel, on prend un nombre de bâtons correspondant au nombre d'unités, un nombre de « paquets de 10 » correspondant au nombre de dizaines et un nombre de

« paquets de 100 » correspondant au nombre de centaines. On transforme chaque « paquet de 100 » en enlevant l'élastique, on libère ainsi dix « paquets de 10 ». On réunit alors les « paquets de 10 » obtenus avec les paquets analogues pour dénombrer l'ensemble de ces paquets.

Cette recension confirme le grand nombre de techniques *a priori* possibles, sans compter les techniques composées de plusieurs de ces techniques. Les élèves n'utiliseront pas nécessairement la même technique pour toutes les tâches.

3. Analyse sémiotique préalable

Nous utilisons l'expression analyse sémiotique *préalable* pour anticiper les signes susceptibles de circuler pendant l'épisode étudié, mathématique ou lié au contexte d'interactions (consigne, document, matériel, ...). Cette analyse porte sur les signes oraux, graphiques et matériels, en lien avec la tâche mathématique proposée par l'enseignante.

3.1. Signes oraux liés aux quantités

Dans les échanges verbaux qui pourront avoir lieu au moment du lancement du travail par l'enseignante et entre les trois élèves figureront de façon évidente des signes oraux liés aux quantités avec les noms de nombre à l'oral, dans leurs fonctions usuelles : désigner une quantité (dix craies, dix bâtons, deux boîtes...), désigner une mesure de quantité (nombre sans unité, expressions telles que « boîte de dix », « paquet de cent »), oraliser un nombre écrit en chiffres.

3.2. Signes graphiques liés aux quantités

Des signes conventionnels liés aux quantités sont présents dans la fiche réalisée par l'enseignante, avec l'écriture en chiffres du nombre de craies dans une boîte et celle des nombres de craies commandées. Le premier nombre apparaît dans les expressions « boîte de 10 craies » et « boîtes de 10 », les autres sont présentés dans la colonne d'en-tête « Nombre de craies commandées » dans les deux tableaux appelés « bulletins de commande » (100, 120, 150, 160, 200 pour le premier tableau, 101, 146, 246, 333, 350 pour le deuxième).

Des étiquettes où est écrit « 100 » sont présentes dans le bac de matériel, attachées aux paquets de cent bâtons, bâtons groupés en dix paquets de dix.

D'autres nombres écrits en chiffres sont affichés dans le « coin-maths » où se déroule l'activité : à la gauche des élèves, les nombres de 0 à 100 sont présentés dans un tableau organisateur de nombres (sur chaque ligne, les nombres ont le même nombre de dizaines et sur chaque colonne le même nombre d'unités) ; devant les élèves sont affichées trois bandes de nombres (de 0 à 39, de 40 à 79 et de 80 à 100).

Pour compléter la fiche, les élèves doivent écrire des nombres, mesures de quantité, tandis que les unités de ces quantités (« boîtes de 10 », « craies à l'unité ») ne sont pas à leur charge, elles sont déjà inscrites dans la colonne à compléter.

Les élèves pourront aussi, s'ils en prennent l'initiative, dessiner des collections pour mettre en œuvre les techniques T_5 , T_6 ou T_7 . Les contraintes matérielles rendent cependant ces techniques peu probables, car non encouragées par l'enseignante : en effet aucun support papier libre ou ardoise n'a été prévu.

3.3. Matériel lié aux quantités

L'activité mathématique est contextualisée par une commande de craies à réaliser, avec une contrainte sur la forme de la commande pour provoquer la décomposition du nombre de craies à commander en nombre de « boîtes de 10 » et nombre de « craies à l'unité ».

Les craies sont évoquées sur la fiche des élèves par des signes écrits avec le terme « craies » et les expressions « craies toutes seules », « craies à l'unité », « boîte de 10 », « boîtes de craies », « boîtes de 10 craies ». Elles le sont aussi par la photo d'une « craie à l'unité » et celle d'une « boîte de 10 craies », présentées dans un tableau avant les bulletins de commande. Les élèves ont pu voir les objets réels (la craie et la boîte) lors de la séance précédente.

Des bâtons censés représenter les craies sont à disposition des élèves. Ces objets matériels sont en vrac dans un bac, soit groupés par dix avec un élastique, soit groupés par cent avec dix paquets de dix élastiqués, soit isolés. Le lien entre les craies et cette représentation par des bâtons a été pris en charge par l'enseignante lors de la séance précédente, en réponse à l'impossibilité de manipuler le « vrai » matériel, la quantité de boîtes de craies dans la classe n'étant pas suffisante. Possibilité est donc laissée aux élèves de réaliser des actions avec ce matériel.

3.4. Signes liés aux consignes et à l'organisation des tâches

Sur la fiche, le contexte est posé par les mots « commande » et les acteurs de la commande sont mentionnés « Les professeurs de l'IMPro » et « les classes des petits ». Le travail à faire n'est pas explicité. Il faut repérer dans le tableau les pointillés comme lieu de la réponse à écrire et coordonner les informations du tableau pour savoir quel type de réponse est attendu. *A priori*, savoir ce qu'il faut faire nécessite un accompagnement de l'enseignante sauf si ce type de présentation a déjà été rencontré dans la classe.

Le premier tableau associe langage écrit (« craie à l'unité », « boîte de 10 craies ») et photos correspondantes. Les deux autres tableaux ont pour titre « bulletin de commande ». Chacun associe le nom des clientes ou de la classe (1^{ère} colonne) au nombre de craies commandées (2^{ème} colonne) et aux boîtes de craies livrées (3^{ème} colonne). La présentation synoptique choisie est censée représenter un bulletin de

commande. La première colonne ne sert à rien pour la résolution de la tâche mathématique. Les tableaux ont autant de lignes que de tâches. La présentation en tableau permet de limiter la répétition de la tâche.

Remarquons que la lecture de ces tableaux n'est pas analogue à celle requise pour le tableau de nombres affiché dans le « coin-maths ».

Un tableau est aussi un signe qui rend compte de liens entre des informations : regrouper des informations sur une même ligne est une façon schématique de rappeler (ou d'installer) le contexte et la tâche prescrite, les organiser en colonnes est une façon de rendre compte du même type de tâche par colonne. L'intention de l'enseignante est sans doute que le tableau soit parcouru par ligne, sans attention particulière à l'information de la première colonne. Mais l'élève peut aussi l'appréhender par colonne.

3.5. Signes en lien avec la pratique de l'enseignante

Nous relevons ici ce que l'enseignante nous donne à voir de certaines de ses croyances.

L'enseignante choisit de contextualiser la tâche demandée par une situation plongée dans l'environnement scolaire des élèves (ceux-ci connaissent les professeurs, les locaux et les classes, on a besoin de craies). La volonté de l'enseignante, exprimée dans l'entretien d'autoconfrontation, est « d'ancrer ça [l'activité] dans une partie de leur réalité pour les aider à se projeter ». L'enseignante conserve cependant une situation artificielle : il est impossible de savoir à l'avance à l'unité près combien de craies seront consommées, une commande « authentique » est contrainte au moins par boîtes de dix, un bon de commande se fait en général par école ... Cette pratique de pseudo-authenticité est usuelle dans l'enseignement ordinaire et spécialisé. L'enseignante cherche à préparer l'enrôlement dans la tâche, mais garde le contrôle des tâches proposées (Bruner, 1983). Elle suppose que les élèves s'engageront moins facilement dans une tâche moins motivée socialement.

L'enseignante choisit de mettre à disposition des élèves un matériel, des bâtons, plus commode (et plus disponible) que des craies. Ce matériel peut avoir pour elle une double fonction (confirmée dans l'entretien) : aider à se représenter le problème des craies et aider à « décomposer des nombres ». Tempier (2016) a revalorisé ce type de tâches pour l'apprentissage des aspects décimal et position de la numération écrite, le matériel constituant un élément du milieu qui permet la validation des signes proposés par les élèves. Ici le double contexte (craies et bâtons) occasionne une tâche supplémentaire pour les élèves (transparente pour l'enseignante), représenter les craies par des bâtons. Cette tâche n'est pas inintéressante puisque cela les entraîne à l'invariance de résultats dans deux

contextes différents (craies et bâtons). Travailler directement dans le contexte bâtons eut été une autre possibilité.

Dans la continuité de la séance d'avant, l'enseignante choisit de présenter données et travail à faire dans un tableau. On peut supposer qu'avec cette présentation condensée l'intention de l'enseignante est de réduire le temps de lecture et d'écriture des élèves, voire de regrouper *a priori* les informations utiles au traitement (deuxième et troisième colonnes). Cette épuration et ce classement des informations contextuelles peuvent porter leurs fruits pour des élèves sensibles aux formes de présentation des données, comme le montre Fauvet (2003).

L'enseignante organise la série de tâches de même type (décomposition canonique en dizaines et unités) dans deux tableaux, ce qui montre qu'elle prend en compte une variable didactique à deux valeurs (non, oui), la présence d'unités isolées.

Les informations fournies dans les deux colonnes de droite du tableau ne sont pas symétriques : la colonne du milieu ne comporte que des mesures, celle de droite des quantités (mesures et unités). Cela peut être le signe d'une connaissance faible du rôle des unités pour les grandeurs discrètes. En revanche, les en-têtes donnent les unités de mesure (craies, boîtes de craies), mais sans préciser de nouveau leur lien : une boîte, c'est dix craies.

4. Analyse *a posteriori*

Dans cette partie, nous analysons la réalisation du début de l'exercice, c'est-à-dire le remplissage par les trois élèves du premier bulletin de commande. Nous cherchons à prendre en compte les signes des élèves et leurs interprétations dans les processus d'apprentissage, mais aussi à identifier les blocages et les malentendus sémiotiques qui se développent dans leur activité mathématique.

L'épisode étudié démarre soixante-quinze secondes après le lancement de l'activité par l'enseignante : « Mélanie, Nick, Angèle, je vais vous donner une activité, toujours la même chose le bon de commande et qui ressemble à ce que vous avez fait, comme ça Mélanie, tu, ben tu vas travailler avec eux, ils vont te montrer ce qu'ils ont fait, et on pourra voir après pour les milliers, parce que c'est là où ça coïncitait la semaine dernière. ». Cet épisode fait suite à des échanges de souvenirs liés à la fréquentation des enseignants des classes des petits mentionnés dans la première colonne du tableau, échanges qui mettent d'ailleurs en évidence l'effet distracteur du contexte choisi.

Après la présentation de quelques éléments méthodologiques, nous allons identifier la façon de procéder des élèves pour trouver le nombre de boîtes de craies livrées en mettant en lien leurs procédures avec les techniques de résolution présentées dans l'analyse *a priori* de la partie précédente. Nous identifierons ensuite les malentendus sémiotiques qui se produisent lors de l'activité des élèves.

4.1. Éléments méthodologiques

L'épisode étudié (interventions 75 à 100) est retranscrit en annexes 2 et 3 à partir de nos données (vidéos et enregistrements de la séance).

Comme nous utilisons le concept de faisceau sémiotique, qui est un système composé de différents signes – mots (parlés ou écrits), représentations écrites, formes d'expression extra linguistique (gestes, regards, etc.), matériel, etc. – et de leurs relations mutuelles, produits par les élèves et leur enseignant dans des activités de classe (Arzarello, 2006), nous nous appuyons sur la ligne sémiotique (Sabena, 2018), outil de transcription multimodale.

Nous construisons ainsi un tableau sémiotique (annexe 2) ; sur la première ligne, nous inscrivons des repères de temps, instants auxquels démarre chacune des interventions, ce qui donne ainsi des informations précises sur leur durée. Nous numérotions les interventions chronologiquement sur la seconde ligne et sur la troisième, nous notons leurs auteurs. Nous présentons ensuite les signes observés et leurs auteurs en introduisant autant de lignes que nécessaire en fonction de ce que les données nous permettent de relever. Dans l'annexe 2 (interventions 75 à 90), nous avons relevé des mots parlés et des mots écrits (notés respectivement en caractères droits et en italique sur la transcription), ainsi que des formes d'expression corporelle (regard, gestes, action avec du matériel), que nous présentons par une description écrite ou par des photos ou dessins. Dans le tableau sémiotique, sont représentés d'une part, le caractère systémique du faisceau se référant aux relations entre les différents types de signes à un certain moment, et d'autre part, sa nature dynamique se focalisant sur les évolutions des signes et leurs transformations au cours du temps. La transcription de la fin de l'épisode, nécessaire préalable à la construction du tableau sémiotique, figure en annexe 3.

Le grain d'analyse du tableau sémiotique se situe au niveau micro (de l'ordre de la seconde). Les interprétations qu'il nous permet sont mises en relation avec l'analyse didactique de nos données (voir 2.1)

4.2. Procédures des élèves

Mélanie

Mélanie se montre capable de formuler oralement la tâche en s'appuyant sur un exemple suite à l'expression par Nick de ce qu'il faut faire, « des paquets de dix » : « faut qu'tu r'gardes combien il en faut d'dix, combien il faut d'dix euh cent, combien il faut de boîtes de dix pour faire cent » (intervention 78). Les gestes de pointage qui accompagnent son discours (*frappés sur « 10 »* à la lecture de « boîtes de 10 » et *frappés sur « 100 »* à la lecture de ce nombre de boîtes de craies commandées) montrent qu'elle décode bien ce qui est attendu dans cette présentation de la tâche sous forme de tableau. Absente lors de la séance

précédente, elle ne peut s'appuyer sur l'activité analogue déjà réalisée, comme le peuvent Angèle et Nick.

Mélanie interprète *paquets de dix par nombre de dix*. On la voit dénombrer les *dix* avec ses doigts pour la commande de cent craies (technique T_{41}) : elle lève successivement ses doigts de la main gauche à partir du pouce en pointant chaque doigt avec son crayon tenu dans la main droite, puis elle lève successivement ceux de la main droite tout en murmurant la comptine numérique de dix en dix et jusque cent. Elle reconnaît alors la configuration *dix doigts*, ce qui lui permet d'écrire le nombre 10 dans la case réponse. Dans cette action, nous pouvons dire que Mélanie utilise ses doigts comme instrument pour trouver la réponse (ou pour contrôler une réponse qui lui viendrait). Pour Mélanie, les doigts considérés comme signe sont utilisés avec deux valences (Chevallard, 1994) : une valence instrumentale quand elle les utilise pour énumérer gestuellement les dizaines, une valence sémiotique quand elle reconnaît comme dix la configuration de tous ses doigts levés.

Mélanie complète ensuite de plus en plus rapidement le nombre de craies commandées sans utiliser ses doigts. Il se peut qu'elle utilise la technique T_1 de troncature des nombres, par lecture directe sur l'écriture chiffrée, après avoir repéré le lien entre 100 et 10 dans sa première ligne complétée. Des exercices ultérieurs confirment sa capacité à repérer une relation entre les nombres d'une ligne d'un tableau pour la réinvestir sur les autres lignes.

Angèle

Les signes envoyés par Angèle sont essentiellement de nature interactionnelle.

Angèle signale dès le départ son incompréhension du travail attendu (75. « eh faut faire quoi là, j'ai pas compris ? »). Il se peut que l'organisation écrite en tableau, dont nous avons montré plus haut la complexité cachée, ne lui permette pas de comprendre la tâche. La formulation de la tâche sur un exemple par Mélanie la conduit à donner oralement, sans hésitation et sûre d'elle, le nombre de *boîtes de dix* (intervention 78) nécessaires pour la commande de 100 craies, puis celle de 120 (intervention 79. « Bah dix ! », intervention 89. « Ça fait douze ! »). Elle utilise sans doute, pour les commandes de 100 et de 120 craies, la technique T_0 en appui sur un résultat connu. Les mêmes deux premières lignes du tableau ont en effet déjà été complétées trois jours plus tôt avec l'aide de l'enseignante, et Angèle peut avoir mémorisé les résultats. Pourtant, elle ne cesse de réclamer de l'aide à l'enseignante et à Mélanie pour faire l'exercice (« Madame, j'ai pas compris », « Faut nous aider Mélanie, hein »). Ce qui montre qu'elle n'a pas confiance dans ces réponses immédiates ! D'où peut venir ce doute ? Il semblerait qu'elle ne puisse pas avancer sans validation de l'enseignante ou d'un camarade qu'elle estime « plus fort ».

Pour la commande de 150 craies, Angèle dit en hésitant : « ça fait cinq » et se reprend, sans doute, comme le laisse supposer son regard sur le « 15 » qu'est en train d'écrire Mélanie (« ça fait combien ? Quinze »). Nous pouvons faire l'hypothèse d'une confusion entre chiffre et nombre de dizaines dans sa réponse « cinq » donnée au départ, erreur classique liée à une conception uniquement positionnelle de la dizaine (Tempier, 2016).

Angèle complète les lignes suivantes probablement en copiant les résultats notés par Mélanie tout en continuant à solliciter de l'aide (95. « Maîtresse, je suis perdue, Mélanie, elle ne nous aide pas aussi »). Mais il se peut aussi qu'elle ait repéré des régularités entre nombres écrits en chiffres et réponses précédentes.

Nick

Nick exprime la tâche à réaliser ainsi : « Tu fais des paquets de dix », ce qui correspond à une étape d'une technique s'appuyant sur une représentation matérielle, *a priori* la technique T_5 qui part des bâtons ou des craies isolées et qu'il a mise en œuvre avec l'enseignante trois jours plus tôt. *Faire des paquets de dix* ne semble référer pour Nick qu'au matériel, qu'il ne cherche pourtant pas à utiliser, peut-être parce que le bac de bâtons ne lui est pas accessible depuis sa place et que ni Mélanie ni Angèle ne s'en servent pour compléter le tableau. Aucune concrétisation de ce que suggère Nick (*faire des paquets de dix*), et qui correspond à ce qu'il a retenu de la séance précédente quand l'enseignante leur a demandé de se rappeler de ce qui a été fait (« on a fait des paquets de dix »), n'apparaît de façon visible dans ses procédures de résolution de l'exercice. Pour la première ligne du tableau (100 craies commandées), il utilise probablement la réponse « bah dix » formulée par Angèle, en enchaînant oralement avec l'énoncé d'une procédure erronée : en appui sur la réponse pré remplie « ... boîtes de 10 » du tableau, il pointe « ... » et « 10 » en disant « ça fait dix plus dix, ça fait vingt » (intervention 82).

Nick écrit les réponses « 10 » pour 100 craies commandées, « 12 » pour 120 craies commandées et « 5 » pour 150 craies commandées dans son tableau après leur formulation orale par Angèle et il continue de façon autonome en écrivant « 6 » comme nombre de « boîtes de 10 » pour la commande de 160 craies. Il semble partager la confusion d'Angèle entre chiffre des dizaines et nombre de dizaines. Il rectifie ses deux dernières réponses par « 15 » et « 16 » suite à l'intervention d'Angèle (« ça fait combien ? Quinze »). Le « 40 », inscrit comme nombre de « boîtes de 10 » pour 200 craies commandées, pourrait provenir de la somme des quatre « 10 » des lignes précédentes. Nous entendons en effet par la suite, à plusieurs reprises, Nick tenter d'ajouter des nombres du tableau. La présentation sous cette forme, choisie par l'enseignante pour organiser les tâches (cf. partie 4.4), contribue peut-être à cet « automatisme ».

4.3. Malentendus sémiotiques

Nous identifions deux types de malentendus au sein des faisceaux sémiotiques : des malentendus liés à des connaissances mathématiques et des malentendus de type interactionnel.

4.3.1. Malentendus liés à des connaissances mathématiques

Nick semble considérer que les nombres écrits en chiffres sont là pour être ajoutés entre eux, qu'une réponse doit s'appuyer sur un calcul.

Pour la réponse de la première tâche (Mme C.), l'enseignante attend le nombre « 10 » dans le vide laissé, pour obtenir *10 boîtes de 10*, implicitement *10 boîtes de 10 craies*. Juste après l'intervention d'Angèle qui donne oralement la réponse dix (79. « bah dix ! »), Nick déclare : « Ça fait dix plus dix, ça fait vingt » en pointant (intervention 82) l'espace de la réponse (encore vide) et le 10 de « boîtes de 10 ». Étonnamment il ajoute ces deux nombres, comme si des nombres écrits en chiffres n'étaient destinés qu'à être combinés, regroupés dans un calcul.

Cette hypothèse est corroborée lors du moment de la correction de cette ligne avec l'enseignante (qui fait utiliser du matériel pour valider la réponse) quand Nick dénombre cent bâtons en les comptant par paquets de dix (« dix, vingt, trente, ..., quatre-vingt-dix, **cent** ») et conclut : « Ça fait cent-dix ».

Les interprétations de Nick semblent révéler un malentendu sur la fonction de l'écrit en chiffres, qui ne serait proposé qu'afin de calculer. À la fin du remplissage du premier tableau, on l'entend calculer à voix basse et énoncer le résultat suivant : « ça fait mille cinq cent quatre-vingt-cinq » comme s'il avait voulu ajouter tous les nombres des tableaux (total 1806).

Angèle, s'intéressant à la deuxième tâche (120 craies), oralise de façon erronée le nombre 120 dans sa réponse (87. « Ça fait douze, deux cent-vingt »), « prononçant » en quelque sorte deux fois le 2. Elle est immédiatement reprise par Mélanie (« **Cent**-vingt »), ce qui ne fait pas varier sa réponse (« Ça fait douze ! »). Ce malentendu est lié à la conversion entre oral et écrit en chiffres d'un nombre.

Les réponses correctes d'Angèle, dix et douze, peuvent être connues de mémoire (réponses à la même tâche réalisée trois jours plus tôt) ou trouvées par une analyse de l'écriture chiffrée des nombres. L'analyse de l'écrit est corroborée dans la troisième tâche (150 craies), où Angèle déclare cinq (pour les boîtes de dix) du tac au tac (91. « Ça fait ... cinq »), le cinq repris par écrit par Nick (intervention 92). Cette réponse erronée nous semble traduire la difficulté de l'interprétation de la dizaine : chiffre dans le nombre ou nombre maximal de « dix » contenus dans le nombre.

Nous relevons ainsi plusieurs types de malentendus, qui ne sont pas inconnus des didacticiens et peuvent être liés par exemple à :

- la fonction des nombres écrits en chiffres dans la vie scolaire : par exemple pour Nick, les nombres semblent par moment très détachés des quantités qu'ils représentent, comme le constatent Drouhard & al. (1994) pour des élèves de collège étudiant l'algèbre ;
- l'utilisation conjointe de l'oral d'un nombre et de son écriture en chiffres pour dénombrer (Mounier, 2016) ; notamment le fait qu'un chiffre ait un nom différent selon sa position dans le nombre : le 4 de « 34 » se dit quatre, le 4 de « 43 » se dit quarante ;
- la double interprétation d'une unité de numération (ici dizaine) dans un nombre (Tempier, 2016) : position d'un chiffre, ou quantité maximum de cette unité contenue dans le nombre ;
- plus généralement l'influence conjointe des tâches (ou de leur reformulation) et des représentations des nombres sur la réponse de l'élève (Block & al, 2012).

4.3.2. Malentendus de type interactionnel

L'enseignante engage les trois élèves à travailler ensemble (« comme ça Mélanie, tu, ben tu vas travailler avec eux, ils vont te montrer ce qu'ils ont fait ») : Angèle et Nick ont travaillé avec l'enseignante lors de la séance précédente sur le même type de fiche, Mélanie était absente. Ainsi, l'enseignante installe le travail de groupe et dévolue la consigne de travail à Nick et Angèle. Elle crée de ce fait un système didactique auxiliaire (Theis et al., 2016), qu'elle prévoit piloté par Angèle et Nick.

Or, les interventions d'Angèle montrent qu'elle ne se sent pas, par rapport à Mélanie, en position topogénétique haute de *celle qui donne la consigne*, bien au contraire. Ses attendus d'un travail de groupe ne sont pas en accord avec ceux que prévoit l'enseignante, compte tenu de la position haute (information recueillie lors de l'entretien avec l'enseignante) qu'Angèle accorde habituellement à Mélanie (87. « Faut nous aider Mélanie hein »). Angèle semble accorder de l'importance à l'avis de Mélanie, qu'elle considère comme *celle qui sait*, sans doute aussi parce que Mélanie travaille habituellement avec deux élèves d'un meilleur niveau (information donnée par l'enseignante lors de l'entretien d'autoconfrontation). Comme Angèle n'obtient pas l'aide qu'elle attend, elle se tourne vers l'enseignante « Maîtresse je suis perdue, Mélanie, elle nous aide pas aussi ». La dynamique interactionnelle qu'a voulu mettre en place l'enseignante ne fonctionne pas. Finalement c'est Mélanie qui initie le travail.

Lorsque Mélanie explique à Angèle ce qu'il faut faire en s'appuyant sur la première tâche (78. « faut qu'tu r'gardes combien il en faut d'dix, combien il faut

d'« dix euh cent combien il faut de boîtes de dix pour faire cent »), Angèle répond « bah dix ! » comme une évidence pour elle. Mélanie réplique par un geste des mains, d'une durée assez longue (5 secondes), en tournant la tête à Angèle et sans mot dire. Durant ce geste, Nick dit à Angèle : « tu fais comme tu veux » (intervention 80) : on peut penser qu'il répond en écho au geste de Mélanie, qu'il interprète ainsi. Angèle enchaîne directement en interpellant l'enseignante et en exprimant son incompréhension de ce qu'il faut faire (81. « Madame, j'ai pas compris »). Cela peut découler aussi de son interprétation du geste de Mélanie, qui ne validerait pas sa réponse, voire qui l'invaliderait !

Mélanie cependant n'est pas en mesure de valider ou d'invalidier la réponse d'Angèle au moment où celle-ci la formule. Juste après, on la voit en effet mettre en œuvre une technique d'énumération avec les doigts en énonçant la comptine de dix en dix jusqu'à cent et noter la réponse « 10 » sur sa feuille. Les propos de Mélanie qui suivent son geste peuvent aussi éclairer en différé le sens de ce qu'elle veut transmettre par ce geste : Angèle et Nick ont déjà fait l'exercice, donc ils devraient savoir, alors qu'elle, elle le découvre (85. « vous l'avez fait quand ? quand j'étais pas là, eh ben voilà, vous l'avez fait ! »). Nous identifions donc le sens du geste donné par Mélanie et les différentes interprétations qui en sont faites par Angèle et Nick comme un *malentendu de type interactionnel*.

Concernant le travail de groupe entre les trois élèves, si Angèle est en attente d'aide de la part de Mélanie, en revanche, elle ne tient absolument aucun compte des tentatives d'aide proposées par Nick : elle semble ne pas l'entendre et ne faire confiance qu'à Mélanie. Pourtant, celui-ci fait preuve d'une attitude ouverte et disposée à des échanges en groupe, conformément à ce qui a été demandé par l'enseignante. Il répond à la question d'Angèle lorsqu'elle demande ce qu'il faut faire (77. « Tu fais des paquets de dix »), aussi à la question de Mélanie (85. « Vous l'avez fait quand ? ») en prenant la peine de réfléchir à quand l'exercice a été fait, même si cela n'apporte rien à la résolution de la tâche (86. « j'ai fait ... je réfléchis, euh, j'ai fait lundi ») ; il traduit la réponse gestuelle de Mélanie par le langage pour éclairer Angèle ; il est réceptif aux réponses données à l'oral par Angèle et Mélanie, il les intègre dans sa réflexion. Ainsi, il va prendre les réponses « 10 », « 12 » et « 5 » pour les trois premiers items, déduire la réponse « 6 » pour le quatrième, puis transformer les « 5 » et « 6 » en « 15 » et « 16 » quand il entendra Angèle affirmer « quinze ». Enfin, il corrigera la première réponse « 10 » du premier tableau en « 101 » quand Mélanie parlera des cent-une craies du deuxième tableau.

Cet incident nous laisse supposer que Nick n'exerce aucun ou peu de contrôle sur ses réponses. Pour la transformation de « 10 » en « 101 », nous identifions un *malentendu-mal vu* que l'on peut peut-être attribuer aux difficultés de Nick à se repérer sur une feuille et dans un tableau, vu ses troubles visuospatiaux.

Mélanie, quant à elle, ne cherche pas à participer au travail collectif, elle accepte juste d'explicitier ce qui est attendu. Elle refuse de prendre le rôle d'aidant qu'Angèle veut lui attribuer (97. « Moi j'peux pas travailler, vous aider et travailler en même temps, moi aussi faut qu'j'travaille. »).

Cette analyse met en évidence que les élèves peuvent ne pas comprendre soit ce qui est attendu d'eux, le tableau semble avoir un effet perturbateur sur Angèle et Nick, soit le rôle qui leur a été attribué au sein du groupe de travail : Angèle attend de l'aide de la part de Mélanie ; Mélanie réalise l'activité individuellement, ne se sentant pas capable de travailler et d'apporter de l'aide en même temps aux deux autres ; Nick essaie d'échanger avec Angèle et Mélanie, mais semble *parler dans le vide*, par exemple sa traduction erronée de « 10 boîtes de 10 » par « ça fait dix plus dix, ça fait vingt » n'est pas contestée par Mélanie alors qu'elle obtient une autre réponse en utilisant ses doigts au même moment. Ces malentendus peuvent avoir un impact déterminant sur la construction des concepts mathématiques visés, car ceux-ci se réalisent dans un contexte interactionnel et incarné.

Conclusion

Cette recherche renforce notre conviction de la richesse d'un cadre sémiotique pour analyser les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage de mathématiques en milieu spécialisé, à l'instar de Giroux (2003) et Bloch (2009). L'analyse sémiotique *préalable* du support fourni (un tableau) et de la contextualisation associée (les classes de l'école qui commandent des craies) a complété l'analyse didactique en anticipant des malentendus possibles sur la lecture du tableau et la tâche à réaliser, malentendus qui restent souvent ignorés des enseignants.

Une étude sémiotique multimodale (Radford, 2003 ; Arzarello, 2006), s'intéressant non seulement aux signes oraux, matériels et graphiques, mais aussi gestuels, circulant dans la classe au cours de la séance, permet de prendre en compte leur variété et leur imbrication. L'outil méthodologique, tableau sémiotique, inspiré de la lignesémiotique (Sabena, 2018) est particulièrement pertinent pour mettre au jour cette multimodalité, travailler les deux dimensions synchronique (simultanéité de systèmes sémiotiques mobilisés) et diachronique (évolution temporelle du faisceau sémiotique). Il nous permet ainsi de faire des hypothèses plus fines sur la dynamique des interactions et sur l'appropriation des connaissances par les élèves. L'étude des postures corporelles des élèves apporte des informations sur leurs façons d'appréhender la tâche (Nick en réflexion active dans une posture en retrait par rapport au document, Angèle « perdue » à la recherche d'aide par le regard).

Concernant les connaissances mathématiques, en appui aussi sur notre analyse didactique *a priori*, nous avons ainsi repéré l'évolution de la technique de Mélanie, qui se libère de ses doigts pour répondre, les réponses peu assurées d'Angèle, pourtant souvent justes, une lecture encore fragile des nombres. Nous avons relevé

la tentation de Nick (une hypothèse) d'ajouter des nombres entre eux, certes par l'oral (parfois oral intérieur oralisé) mais aussi par les gestes notamment de pointage (ou gestes déictiques, selon la classification de McNeill, 1992), accompagnant cet oral.

Le tableau de commande semble avoir joué un rôle différent selon les élèves. Nous faisons l'hypothèse que l'organisation de la tâche sous forme de tableau s'est révélée bénéfique pour Mélanie, tant pour comprendre la consigne de l'exercice que pour réduire le temps de réponse au fil des lignes du tableau : elle passe d'une procédure combinant l'expression orale, gestuelle de différentes conversions (écrit vers oral, énumération sur les doigts et frappés avec crayon) à une procédure mentalisée qui semble automatique.

La présentation de la tâche sous forme de tableaux a constitué en revanche un obstacle pour Angèle et Nick, bien qu'ils aient déjà eu le même type de tâches à résoudre trois jours plus tôt. Les moyens sémiotiques activés antérieurement étaient cependant plus importants : signes oraux et matériels avec un étayage oral de l'enseignante guidant les actions de Nick et Angèle sur les bâtons représentant les craies. Dans l'épisode étudié, Nick est tenté d'additionner des nombres du tableau sans relation avec la tâche, quant à Angèle, elle exprime avec force sa volonté de comprendre (ou de faire) ce qu'il fallait faire.

Plus généralement sur l'engagement des élèves, l'analyse sémiotique de l'épisode montre un investissement certain de Nick, Angèle et Mélanie dans la résolution de la tâche qui leur a été proposée : les trois élèves cherchent à compléter la fiche de travail que l'enseignante leur a donnée et restent concentrés et actifs sur toute la durée de l'épisode étudié (observation de leur position, écoute de leurs échanges). Cependant les modalités de travail proposées (travail en groupe, supports) n'ont pas conduit aux enrichissements mutuels escomptés par l'enseignante ni à un développement pour tous des connaissances visées sur la numération.

Concernant les interactions, l'analyse menée nous montre que le rôle que l'enseignante assigne à certains élèves (aider Mélanie à comprendre la consigne pour Angèle et Nick) et l'estimation que chacun a des connaissances de l'autre (la hiérarchie entre *sachants* que les élèves ont intégrée) influencent les interactions et les réponses. Ce phénomène n'est pas inconnu, il entre en résonance avec ce qu'a pointé Butlen (2012) lors de l'échec d'Yvan (Butlen, 2012, p.141) dans un jeu de course à vingt entre deux élèves psychotiques. Il semblerait qu'un élève de l'enseignement spécialisé ait plus de mal à détacher la tâche scolaire de l'environnement matériel, social et affectif dans lequel elle s'insère. Les relations à l'autre, les émotions jouent un rôle non négligeable dans la production de la réponse. L'élève de l'enseignement spécialisé mettrait en œuvre moins de contrôles de type mathématique sur les propositions de réponse (les siennes ou celles de ses pairs).

Concernant les malentendus liés aux signes mathématiques (mots et symboles), on rencontre les deux types décrits dans le paragraphe 1.2 : des interprétations décalées, assez « classiques », d'un signe mathématique (par exemple une mauvaise conversion entre oral et écrit du nombre), et des interprétations non stables d'un même signe chez un élève (par exemple Angèle). Il se peut que Nick, en cherchant à additionner les nombres, nous fournisse l'exemple d'une rigidification de son interprétation de la fonction des nombres (« toujours à mettre ensemble »).

Mais on pointe aussi dans l'épisode des malentendus interactionnels, qui resteraient cachés sans cette analyse : ils sont pourtant susceptibles de « déformer » le travail mathématique, voire la réponse de l'élève.

En conclusion, il nous semble avoir montré qu'une analyse sémiotique, notamment en termes de faisceaux sémiotiques (Arzarello, 2006 ; Sabena 2018), en complément d'une analyse didactique (plus classique), nous permet d'enrichir nos connaissances sur les façons d'élèves de l'enseignement spécialisé d'interagir, d'apprendre, de comprendre et d'avancer dans l'activité mathématique. Elle met en lumière et précise la place prise dans l'enseignement spécialisé par les interactions entre pairs et avec l'enseignante. Elle laisse entrevoir l'extrême sensibilité des élèves aux signes envoyés par l'enseignant ou par leurs camarades : modes de présentation (ici la mise en tableau des consignes), types de représentations utilisées pour les nombres (dits à l'oral, écrits comme mesures « sèches » ou écrits contextualisés, ...), positions topogénétiques prescrites qui peuvent se poser en obstacle à l'entrée sereine dans la tâche et à l'avancée de sa résolution. Il faudra éveiller la vigilance de l'enseignant spécialisé sur ces points.

Bibliographie

ARZARELLO F. (2006), Semiosis as multimodal process, in L.Radford et B.D'Amore (Eds) Sémiotique, culture et pensée mathématique, *Número especial, Revisita Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 267-299.

BLOCH I. (2009), Enseignement des mathématiques à des élèves "en difficulté" : quelques outils pour la formation, à partir de situations et d'une étude des signes mathématiques, 63-79, in *Actes du 35^e colloque COPIRELEM, Bombannes 2008*.

BLOCH I., GIBEL P. (2011), Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques. Etude des niveaux de preuve dans une situation d'enseignement des limites. *Recherches en didactique des mathématiques*, **31 (2)**, 191-228.

BLOCK D., NIKOLANTONAKIS K. & VIVIER L. (2012), Registres et praxis numérique en fin de première année de primaire dans trois pays. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **17**, 59-86.

- BRUNER J. (1983), *Savoir faire, savoir dire, le développement de l'enfant*. Paris : Presses Universitaires de France.
- BUTLEN D. (2012), Questions autour de l'enseignement des mathématiques en ASH : deux exemples de recherche. Réflexions et perspectives. 126- 148, in *Actes du Séminaire National de Didactique 2012*, ARDM.
- CHEVALLARD Y. (1994), Ostensifs et non ostensifs. Conférence de Turin. En ligne sur : <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Ostensifsetnon-ostensifs.pdf>
- CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, **19(2)**, 221-226.
- DROUHARD J.-P., LEONARD F., MAUREL M., PECAL M., SAKUR C. (1994), Calculateurs aveugles, dénotation et entretiens "faire faux". *Séminaire Franco-Italien II de Didactique de l'Algèbre* (Nice).
- DUVAL R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **5**, 37-65.
- DUVAL R. (2006), Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques, 67-89, in *Actes du 32^{ème} colloque COPIRELEM*. Strasbourg 2005. IREM de Strasbourg-
- ECO U. (1980), *Le signe. Histoire et analyse d'un concept*. Bruxelles : éditions Labor.
- FAUVET F. (2003), Traitement de pathologies de l'apprentissage : démarches issues de la *didactique* des mathématiques, étude d'un cas, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **8**, 151-165.
- GIROUX, J. (2013), Etudes des rapports enseignement/apprentissage des mathématiques dans le contexte de l'adaptation scolaire. Problématique et repères didactiques. *Education et Didactique*, **7(1)**, 59-85.
- MCNEILL, D. (1992). *Hand and Mind : What gestures reveal about thought*. Chicago: Chicago University Press.
- MOUNIER E. (2016), École et nouveaux outils d'analyse des procédures de dénombrement pour explorer leurs liens avec la numération écrite chiffrée et la numération parlée. *Recherches en didactique des mathématiques*, **36 (3)**, 347-396.
- NADOT S. (2005). Entre formation et pratique, hypothèses sur les obstacles rencontrés, 7-18. *Actes du 31^{ème} colloque COPIRELEM*. Foix 2004. IREM de Toulouse.
- PEIRCE C.S. (1931 à 1953), *Écrits sur le signe (rassemblés, traduits et commentés par Gérard Deledalle)*. Paris : Éditions du Seuil 1978.

PETITFOUR E. (2015), *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème*. Thèse de l'Université Paris 7.

RADFORD L. (2003), Gestures, Speech, and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization, *Mathematical Thinking and Learning*, **5(1)**, 37-70.

RADFORD L. (2006), Elements of a Cultural Theory of Objectification. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 103-129.

SABENA C. (2018), Explorer l'apport des gestes aux processus d'argumentation mathématique dans une perspective sémiotique. In *Actes du 44^{ème} colloque COPIRELEM*. Épinal 2017.

TEMPIER F. (2016), Composer et décomposer ; un révélateur des de la compréhension de la numération chez les élèves, *Grand N*, **98**, 67-90.

THEIS L., MORIN M.-P., TAMBONE J., ASSUDE T., KOUDOGBO J., MILLION-FAURE K. (2016), Quelles fonctions de deux systèmes didactiques auxiliaires destinés à des élèves en difficulté lors de la résolution d'une situation-problème mathématique ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **21**, 9-38.

VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, **10 (2-3)**, 133-170.

VERGNAUD G. (2004), Un cadre général en guise d'introduction. *La nouvelle revue de l'AIS*, **27**, 1-7.

WERTSCH J.V. (1991), *Voices of the mind*. Harvard University Press, Cambridge, MA.

Annexe 1

1. Document élève :

La commande de craies pour les classes des petits

Les professeurs de l'IMPro commandent des craies.

Le marchand ne vend que des boîtes de 10 et des craies toutes seules (à l'unité).

Craie à l'unité	
Boîte de 10 craies	

Voici le bulletin de commande des professeurs du bâtiment 12 A :

Clientes	Nombre de craies commandées	Boîtes de craies livrées
Mme C.	100	 boîtes de 10
Mme F.	120	 boîtes de 10
Mme D.	150	 boîtes de 10
Mme M.	160	 boîtes de 10
Mme V.	200	 boîtes de 10

Voici le bulletin de commande pour le collège du C. :

Classes	Nombre de craies commandées	Boîtes de craies livrées
Classe de 6°	101	 boîtes de 10 et craies à l'unité
Classe de 5°	146	 boîtes de 10 et craies à l'unité
Classe de 4°	246	 boîtes de 10 et craies à l'unité
Classe de 3°	333	 boîtes de 10 et craies à l'unité
Classe de SEGPA	350	 boîtes de 10 et craies à l'unité

2. Matériel à disposition



Annexe 2

1'15		1'17	1'19	1'22			
75		76	77	78			
An		Me	Ni	Me			
M O T S	An	eh faut faire quoi là j'ai pas compris ?					
	Me	en fait faut qu'tu ...			faut qu'tu r'gardes combien, combien y'en faut d'dix	euuh cent combien il faut de boîtes de dix	pour faire cent
	Ni			tu fais des paquets de dix			
C O R P S	An						
	Me				regarde la 1 ^{ère} ligne		regarde
	Ni					frappés	frappés sur 10
							Nick regarde sa feuille
1'30		1'31	1'34	1'36			
79		80	81				
M O T S	An	Me	Ni	Me	An	Me	
	bah dix !				Madame j'ai pas compris		
						murmure la comptine de dix en dix	
C O R P S	An						
							lève successivement ses doigts : main gauche à partir du pouce, pointant avec son crayon dans main droite (cinq frappements)
	Ni						regarde sa feuille
							Nick regarde Mélanie et Angèle

1'38			1'41			1'42		
			82			84		
M O T S	An	Me	Ni			Me	Ni	
	Me	Murmure ... quatre-vingt, quatre-vingt-dix, cent			Heinein ?			
	Ni		ça fait dix	plus dix	ça fait vingt	ça fait dix boîtes	puis on en prend dix	
C O R P S	An							
	Me		regarde Nick			s'apprête à écrire		cherche un crayon de papier dans sa trousse
	Ni		regarde Mélanie					

Annexe 3

- 90 Ni écrit 10 sur la 1^{ère} ligne, 12 sur la 2^{ème} du premier tableau
Ni à voix basse : cent cinquante, il réfléchit le nez en l'air
// Me écrit 12 sur la 2^{ème} ligne du premier tableau
- 91 An : ça fait ... cinq
// Me : Attends (elle n'a pas encore écrit 15)
- 92 Ni : ouais, Ni écrit 5 sur la 3^{ème} ligne du premier tableau
// Me écrit 15 sur la 3^{ème} ligne du premier tableau
- 93 An : ça fait combien ? Quinze (affirmative) quinze
// Me écrit 16 sur la 4^{ème} ligne du premier tableau
// Ni écrit 6 sur la 4^{ème} ligne du premier tableau
- 94 Ni regarde An et corrige son 5 en 15 et son 6 en 16 (4)
// Me écrit 20 sur la 5^{ème} ligne du premier tableau
- 95 An : maîtresse je suis perdue. Me elle nous aide pas aussi (5)
An essaie de regarder discrètement sur Me qui en est à compléter la 1^{ère} ligne du second tableau.
- 96 Prof : j'arrive, une seconde An
Prof travaille avec Alex : tu dessines la commande qu't'as préparée (main sur les bâtons), t'imagines que c'est des craies hein parce que je n'ai pas assez de craies (montre la boîte de craies) pour vous donner des boîtes entières
- 97 Me : moi j'peux pas travailler, vous aider et travailler en même temps, moi aussi faut qu'j'travaille
// Me complète la 2^{ème} ligne second tableau
// Ni écrit 40 sur la 5^{ème} ligne du premier tableau.
La 1^{ère} ligne du second tableau le laisse perplexe
- 98 Me finit le second tableau.
// Ni Tout bas, pour lui : qu'est ce qu'on voit au six ? // pointe avec son crayon « 6° » sur la fiche. N'importe quoi ! ça fait mille cinq cent quatre-vingt-cinq
- 99 Me : voilà, là, mettons cent, cent un, combien il faut d'boîtes de dix
//An : dix et un
- 100 Me : et une craie de l'unité, eh ben voilà ! fesez ça hein !
Ni : moi j'l'ai fait, Ni corrige la 1^{ère} ligne du premier tableau en écrivant 1 après le 10 pour obtenir 101.

100	40
120	9-2-6
150	a.C. bo
160	9-2-6 bo
200	boîte

(4) Feuille de Ni

(5)



CATHERINE HOUEMENT

ESPE Université Rouen Normandie
LDAR (EA 4434) Université de Rouen Normandie, UA UCP UPD UPEC
Case 7018 - Bâtiment Sophie Germain
75205 PARIS Cedex 13
catherine.houdement@univ-rouen.fr

ÉDITH PETITFOUR

ESPE Université Rouen Normandie
LDAR (EA 4434) Université de Rouen Normandie, UA UCP UPD UPEC
Case 7018 - Bâtiment Sophie Germain
75205 PARIS Cedex 13
edith.petitfour@univ-rouen.fr

AMÉLIE AUQUIÈRE
ISABELLE DEMONTY
ANNICK FAGNANT

IMPACT DES STRUCTURES SÉMANTIQUES ET DE L'INTRODUCTION DE SCHÉMATISATIONS SUR LES PERFORMANCES ET LES DÉMARCHES DE RÉOLUTION DE PROBLÈMES

Abstract. Impact of semantic structures and schematic diagrams on performance and problem-solving strategies. This study focuses on the impact of the introduction of "range-tout" schematizations (Polotskaia and Consultant, 2010; Savard and Polotskaia, 2014) on pupils aged 9-10's problem-solving strategies. Coming from a test submitted to a micro-intervention and a post-test, the results highlight the impact of the semantic structures on children's spontaneous strategies (complement-procedure vs comparison-procedure, Gamo, Taabane and Sander, 2011) and on the way they appropriate the schematizations. Qualitative analyzes show that the introduction of schematizations positively affects students' performance when they encounter their spontaneous approaches, but that it is counterproductive (in the short term) when it directs them towards a different (and less economical) strategy.

Résumé. Cette étude s'intéresse à l'impact de l'introduction de schématisations « range-tout » (Polotskaia et Consultant, 2010 ; Savard et Polotskaia, 2014) sur les démarches de résolution de problèmes mises en œuvre par des élèves de 9-10 ans. Au départ d'un pré-test, d'une micro-intervention et d'un post-test, les résultats mettent en lumière l'impact des structures sémantiques des problèmes sur les démarches spontanées des élèves (*procédure-complément vs procédure-comparaison* notamment, Gamo, Taabane et Sander, 2011) et sur la façon dont ils s'approprient les schématisations proposées. Les analyses qualitatives montrent que l'introduction des schématisations affecte positivement les performances des élèves lorsqu'elles s'accordent à leurs démarches spontanées, mais qu'elle s'avère contre-productive, à court terme, quand elle les oriente vers une démarche différente et moins économique.

Mots-clés. Résolution de problèmes, schématisations, problèmes composant plusieurs structures sémantiques, démarches de résolution.

Introduction

Intrinsèquement liée aux mathématiques, la résolution de problèmes vise notamment à développer de nouveaux contenus dans des situations porteuses de sens, à appliquer des procédures dans des situations concrètes, ou encore, à développer des compétences transversales (Demonty et Fagnant, 2012 ; Fagnant et Vlassis, 2010). Lorsque l'on s'intéresse aux liens entre les mathématiques et la

réalité, deux processus complémentaires sont à l'œuvre (Houdement, 2011) : la *mathématisation* et la *modélisation*. Alors que la *mathématisation* « consiste à acquérir des connaissances mathématiques à partir de la résolution de problèmes issus du réel », la *modélisation* « est plutôt l'inférence, puis l'opérationnalisation de mathématiques pour résoudre un problème issu du réel » (page 59). Dans cet article, c'est à la résolution de problèmes d'application que nous allons porter une attention particulière. En accord avec Houdement (2011), les liens entre les mathématiques et la réalité relèvent donc, ici, du versant de la *modélisation*. Dans ce cadre, lorsque l'on propose des problèmes arithmétiques verbaux aux élèves, on attend d'eux qu'ils mobilisent des connaissances mathématiques acquises préalablement pour faire face aux situations qui leur sont proposées. On peut alors considérer la résolution de problèmes comme un « processus complexe de modélisation mathématique » (Verschaffel et De Corte, 2008 ; Verschaffel, Greer et De Corte, 2000) impliquant, notamment, la construction d'un « modèle de situation » (ou d'une représentation) traduisant la compréhension du phénomène à investiguer. C'est sur la base de cette représentation que l'élève devrait mobiliser le « modèle mathématique » à mettre en œuvre en vue de résoudre adéquatement le problème ; c'est aussi en référence à cette représentation qu'il devrait interpréter la solution et évaluer sa plausibilité dans le contexte appréhendé.

Autrement dit, on considèrera que résoudre un problème nécessite de *comprendre* les relations entretenues entre les divers éléments qui le composent, avant de s'engager dans le (ou les) calcul(s) adéquat(s). Cette *compréhension* implique la construction d'une *représentation mentale* qui peut résulter de l'activation d'un « schéma-problème » disponible en mémoire ou de la construction d'un « modèle épisodique de situation » prenant en compte le contexte dans lequel la situation mathématique s'inscrit. Chez les jeunes élèves, l'utilisation de matériel manipulable permet de soutenir ce processus de construction de représentation en allégeant la charge mnésique alors que, chez les élèves un peu plus âgés, c'est généralement la construction de *schématisations externes* qui est privilégiée (Thevenot, Barrouillet et Fayol, 2015).

La présente étude s'inscrit dans ce cadre puisqu'elle s'intéresse à une schématisation particulière, issue de travaux développés par une auteure d'origine russe (Polotskaia, 2009 ; Polotskaia et Consultant, 2010¹) et réinvestis dans plusieurs études canadiennes (Ducharme et Polotskaia, 2008, 2009 ; Gervais, Polotskaia et Consultant, 2010 ; Polotskaia, Savard et Freiman, 2016 ; Savard et Polotskaia, 2014). À la différence des schémas spécifiques aux structures

¹ Ces schématisations se rapprochent de celles utilisées dans la « Méthode de Singapour », qualifiées de « Strip diagrams » dans la littérature anglo-saxonne (Beckmann, 2004).

sémantiques de problèmes envisagés dans plusieurs travaux (Gustein et Romberg, 1995 ; Verschaffel, Greer et De Corte, 2007 ; Willis et Fuson, 1988), ces schématisations, qualifiées de « range-tout » par les auteurs, présentent la particularité d'être adaptables à différentes structures sémantiques de problèmes. Les différents écrits proposés par cette équipe de recherche montrent l'intérêt d'une telle approche d'un point de vue didactique (Gervais et al., 2013 ; Savard et Polotskaia, 2014) et illustrent la façon dont elle peut être mise en place progressivement en classe. Toutefois, à notre connaissance, ils ne nous éclairent pas réellement sur son efficacité en proposant des données empiriques attestant, par exemple, de progrès réalisés par les élèves soumis à une telle approche.

Au départ d'un dispositif composé d'un pré-test, d'une micro-intervention et d'un post-test, cette étude s'intéresse ainsi à l'effet de l'introduction de schémas « range-tout » sur les performances et sur les démarches de résolution d'élèves de grade 4 (élèves de 9-10 ans). Elle fait l'hypothèse d'un effet différentiel de ces schématisations en fonction des types de problèmes proposés et des démarches spontanées des élèves.

1. Cadre théorique

La résolution de problèmes est une activité mathématique pour laquelle les élèves rencontrent fréquemment des difficultés les menant à l'adoption de démarches inefficaces, s'appuyant notamment sur une analyse superficielle de l'énoncé (Verschaffel et De Corte, 2008). Si posséder des connaissances mathématiques est nécessaire pour résoudre des problèmes, cela ne semble toutefois pas suffisant (Houdement, 2011, 2014 ; Marcoux, 2012, 2014). Des approches d'enseignement visant à apprendre aux élèves à développer des stratégies cognitives et métacognitives en résolution de problèmes (Hanin et Van Nieuwenhoven, 2016 ; Jaegers, Lafontaine et Fagnant, 2016 ; Mevarech et Kramarski, 2014 ; Özoy et Ataman, 2009) semblent également indispensables.

Parmi les recherches qui se sont intéressées au développement de stratégies cognitives en résolution de problèmes, de nombreuses études se sont focalisées sur les schématisations externes pouvant soutenir l'étape de construction de la représentation du problème. Plusieurs études ont ainsi montré qu'il était possible de s'appuyer sur les dessins spontanément construits par les élèves (*self-generated drawings*) pour les amener vers des schématisations plus efficaces (Csíkos, Sztányi et Kelemen, 2012 ; Van Essen et Hamaker, 1990) ou encore de leur apprendre à utiliser des schémas prédéfinis correspondant aux différentes structures sémantiques de problèmes (Levain, Le Borgne et Simard, 2006 ; Willis et Fuson, 1988). D'autres études se sont centrées sur l'utilisation de la droite graduée face à des problèmes additifs simples (Elia, 2011) ou encore sur l'enseignement de « *spatial diagrams* » (Novick, Hurley et Francis, 1999) pouvant notamment être

utilisés face à des problèmes non-routiniers (Diezmann, 2002 ; Pantziara, Gagatsis et Elia, 2009). Enfin, quelques recherches se sont aussi attachées à confronter l'impact de différents types de schématisations sur la mise en œuvre d'une démarche efficace de résolution (Elia, 2009 ; Elia, Gagatsis et Demetriou, 2007 ; Fagnant, Auquièrre et Vlassis, 2015 ; Fagnant et Vlassis, 2013).

Globalement, ces études s'accordent à montrer que les schématisations efficaces sont celles qui aident à construire une représentation mentale permettant de mettre en évidence les données importantes du problème et les relations qui les unissent (Hegarty et Kozhenikov, 1999 ; Uesaka et al., 2007). À l'heure actuelle, aucune étude n'a toutefois permis de déterminer la forme précise que devraient préférentiellement prendre ces schématisations (dessins libres vs schémas prédéfinis d'une part et quels types de schémas prédéfinis d'autre part), ni la meilleure manière de les enseigner (voir notamment Fagnant et Vlassis, 2013 ; Thevenot et al., 2015, pour des synthèses).

Parmi les différents types de schématisations possibles, Polotskaia et ses collaborateurs (Ducharme et Polotskaia, 2008, 2009 ; Polotskaia, 2009 ; Polotskaia et Consultant, 2010) proposent un schéma « range-tout » qui, en plus de soutenir le raisonnement des élèves, aurait l'avantage d'être adaptable à des problèmes de structures sémantiques différentes et de les aider à se focaliser sur les relations existant entre les quantités connues et inconnues.

Pour bien comprendre cette approche, il paraît utile de rappeler brièvement les travaux de Riley, Greeno et Heller (1983) ayant conduit à distinguer trois structures sémantiques de base qui permettent de construire une multitude de problèmes additifs et soustractifs :

- Les problèmes de type *changement* se réfèrent à des situations actives ou dynamiques dans lesquelles certains événements affectent la valeur d'une quantité initiale.
- Les problèmes de type *combinaison* font référence à des situations statiques impliquant deux quantités qui peuvent être considérées, soit séparément, soit en combinaison.
- Les problèmes de type *comparaison* impliquent deux quantités qui sont comparées, ainsi qu'une valeur indiquant la différence entre ces deux quantités.

En variant la position de l'inconnue et le sens de la relation ou de la transformation impliquée, il est alors possible de distinguer 14 types de problèmes différents, de complexité variable et permettant de donner du sens aux opérations additives et soustractives (Fagnant, 2013). De nombreuses études ont mis en évidence la pertinence de cette catégorisation appuyée sur les structures sémantiques et ceci, tant au niveau de la difficulté des problèmes que des démarches utilisées par les

élèves pour les résoudre (voir Fayol, 1990 ; Verschaffel et De Corte, 1997, pour des synthèses). Ces structures sémantiques de base peuvent aussi être composées de façon à construire des structures plus complexes, comme nous le verrons par la suite avec les travaux de Gamo et ses collègues (Gamo et al., 2011 ; Gamo, Nogry et Sander, 2014 ; Gamo, Sander et Richard, 2010).

La figure 1 illustre les schématisations « range-tout » pour les trois structures sémantiques de base. Le principe de construction de ces schématisations est le suivant : chaque donnée du problème est représentée par un segment dont la longueur correspond approximativement à sa valeur et c'est la disposition des segments qui permet d'exprimer les relations existant entre les données concernées (Ducharme et Polotskaia, 2008).

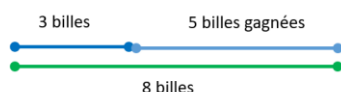
Structure de type « Combinaison »

Pierre a 3 pommes. Anne a 5 pommes. Ensemble, ils ont 8 pommes.

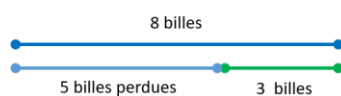


Structure de type « Changement »

Pierre avait 3 billes. Il a gagné 5 billes. Maintenant, il a 8 billes.



Pierre avait 8 billes. Il a perdu 5 billes. Maintenant, il a 3 billes.



Structure de type « Comparaison »

Pierre a 3 pommes. Anne a 5 pommes de plus que Pierre. Anne a 8 pommes.



Pierre a 8 pommes. Anne a 3 pommes de moins que Pierre. Anne a 5 pommes.



Figure 1. Schémas « range-tout » pour des structures de problèmes de types combinaison, changement et comparaison

Pour introduire ces schématisations, Polotskaia et ses collègues proposent la mise en place d'un scénario prenant la forme d'un jeu de communication (Ducharme et Polotskaia, 2009 ; Polotskaia et Consultant, 2010). Durant ce jeu (appelé « jeu du capitaine »), les élèves, répartis en équipes, sont invités à analyser une série de problèmes et à construire des messages-dessins respectant un ensemble de règles : 1) le message doit représenter le problème ; 2) le message ne doit comporter aucune lettre² ; 3) le message ne doit comporter aucun symbole d'opération arithmétique ($+$ $\div$ $-$ $\times$) ; et 4) le message ne doit pas comporter de nombres autres que ceux du texte du problème. Chaque équipe remet ses messages à un élève (le « capitaine » de l'équipe). L'objectif est que cet élève puisse trouver la solution du problème sans avoir accès à l'énoncé du problème d'origine.

La figure 2 illustre des messages respectant les règles susmentionnées. Même sans avoir vu l'énoncé du problème, on comprend qu'il s'agit d'additionner une série d'achats et de rechercher le prix du dernier achat (représenté par un point d'interrogation) de façon à conduire à un total de 50 euros.

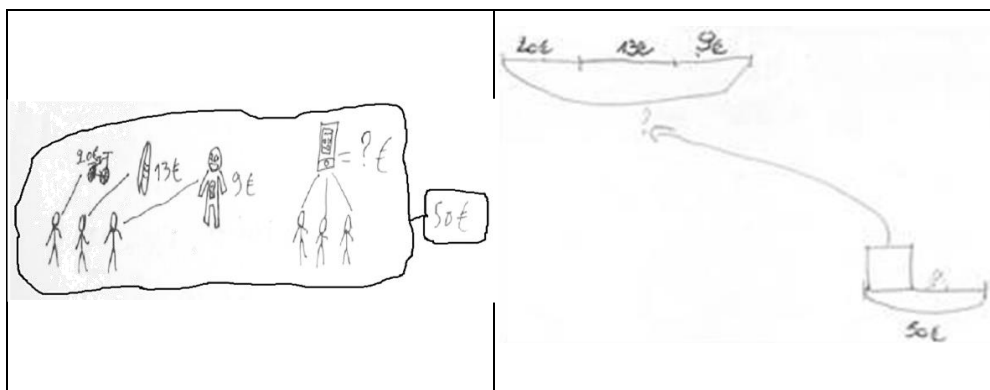


Figure 2. Schématisations respectant les règles du « jeu du capitaine » (inspiré de Polotskaia et Consultant, 2010)

La schématisation de gauche conserve des éléments concrets de la situation, utiles à la contextualisation du problème, mais peu nécessaires à sa résolution. La schématisation de droite, plus abstraite, est suffisante pour résoudre le problème. L'exploitation des messages-dessins produits par les élèves permet d'introduire les schématisations « range-tout », présentées comme une façon simplifiée de

² Dans les règles d'origine, le message ne doit comporter « aucune lettre ». Il peut être intéressant de modifier cette contrainte par « aucun mot » de façon à permettre aux élèves d'indiquer les unités correspondantes et de faciliter ainsi la contextualisation des résultats numériques (c'est-à-dire ce qu'Houdement, 2011, nomme le processus de « qualification »).

représenter le problème. Elles deviennent alors des « outils » dont peuvent s'emparer les élèves pour soutenir leur propre processus de résolution de problèmes.

Pour Polotskaia et ses collaborateurs, l'intérêt de ces schématisations est d'amener les élèves à « mettre en relation les nombres entre eux pour mettre en lumière la structure mathématique du problème et ainsi dégager l'opération à effectuer » (Gervais et al., 2013, page 50). Ces schémas peuvent non seulement être adaptés aux trois structures additives classiques, mais ils peuvent également être utilisés pour représenter des problèmes complexes, combinant par exemple plusieurs structures additives (ex. *changement* + *combinaison*), voire même des structures multiplicatives.

Dans la mesure où une même schématisation se veut adaptable aux différentes structures sémantiques de problèmes, on peut penser que les schématisations « range-tout » s'accordent assez mal à la théorie des « schémas-problèmes » selon laquelle les élèves activeraient, à partir de la lecture de l'énoncé, un schéma mental (une connaissance abstraite logée en mémoire à long terme) correspondant à une structure sémantique de problèmes (Julo, 2002 ; Thevenot et al., 2015). À l'heure actuelle, les travaux en psychologie cognitive ont d'ailleurs remis en cause cette théorie au profit de la théorie des « modèles épisodiques de situation » qui permet de rendre compte « du fait que des aspects interprétatifs du contenu du problème influencent sa résolution » (Gamo et al., 2011, page 616). En effet, on sait aujourd'hui que les facteurs linguistiques et situationnels (comme la formulation de l'énoncé, la place de la question, le déroulement de l'histoire...) influencent la résolution de problèmes, même lorsque ceux-ci présentent des structures sémantiques comparables (Coquin-Viennot et Moreau, 2003 ; Gamo et al., 2011 ; Thevenot et al., 2015). Avec les schématisations « range-tout », on n'attend pas des élèves qu'ils *activent* directement un schéma mental particulier en fonction de la structure sémantique du problème (théorie des « schémas-problèmes »), mais plutôt qu'ils *construisent* un modèle mental spécifique (théorie des « modèles épisodiques de situation ») permettant de mettre en exergue les relations entre les éléments saillants du problème (Thevenot et al., 2015). Lorsque les problèmes composent plusieurs structures sémantiques et nécessitent plusieurs étapes de résolution, on peut aussi penser que la mise en œuvre des schématisations « range-tout », via l'analyse étape par étape de chaque relation mathématique qu'elle induit, pourrait aussi favoriser un processus de « qualification » qui consiste à amener les élèves à identifier chaque résultat intermédiaire, en relation avec le contexte de l'énoncé (Houdement, 2011, 2014).

S'inscrivant dans la lignée théorique des « modèles épisodiques de situation », Gamo et ses collègues (Gamo et al., 2010, 2011, 2014) se sont intéressés à la « nature des variables » impliquées dans les énoncés de problèmes. Leurs travaux

ont montré que la nature de la variable en jeu dans l'énoncé du problème incite les élèves à s'engager dans une démarche de résolution donnée, sans étudier toutes les démarches de résolution possibles. Plus précisément, portant leur attention sur l'opposition entre deux types de variables (matériel vs temporel), ils font l'hypothèse que la présence de « variables matérielles » (ex. effectifs, prix ou poids) mènerait la majorité des élèves à utiliser une *procédure-complément*, non-économique et plus complexe, tandis que la présence de « variables temporelles » (ex. durée ou âge) favoriserait le recours à une *procédure-comparaison*, plus économique et plus efficace, et ce, sans jamais songer à une alternative.

Le tableau 1 illustre des exemples de problèmes composant plusieurs structures sémantiques de base, ainsi que les *procédures* (*complément*, *comparaison* et *hybride*) pouvant être mobilisées face à chacun d'eux. Les travaux susmentionnés de Gamo et ses collègues, menés auprès d'élèves de 9-11 ans (grades 4-5), montrent clairement que c'est la *procédure-complément*, comprenant trois étapes, qui est privilégiée face au premier problème alors que c'est la *procédure-comparaison*, qualifiée d'économique puisque ne comportant qu'une seule étape, qui est majoritaire face au second. Ce second problème est mieux réussi que le premier, témoignant ainsi de la plus grande efficacité de la procédure économique. *A contrario*, la procédure en trois étapes semble s'avérer plus complexe et être source d'erreurs.

Enoncé avec variable matérielle (poids)	Enoncé avec variable temporelle (durée)
Un sac de farine pèse 8 kg. On le pèse avec un sac de crevettes. La balance indique 14 kg. Un sac de moules est pesé avec le même sac de crevettes. Ce sac de moules pèse 3 kg de moins que le sac de farine. Quel est le poids indiqué sur la balance ?	Le voyage d'Arnaud dure 8 heures. Son voyage a débuté à une certaine heure. À l'arrivée, l'horloge indique 17h. David part à la même heure qu'Arnaud. Son voyage dure 2 heures de moins que celui d'Arnaud. À son arrivée, quelle heure est indiquée sur l'horloge ?
Procédure-complément : $8+(6)=14$; $8-3=(5)$ et $6+5=(11)$ Procédure-comparaison : $14-3=(11)$ Procédure hybride : $8+(6)=14$ et $14-3=(11)$	Procédure-complément : $8+(9)=17$; $9-2=(7)$ et $8+7=15$ Procédure-comparaison : $17-2=(15)$ Procédure hybride : $8+(9)=17$ et $17-2=(15)$

Tableau 1. Problèmes impliquant des variables matérielle ou temporelle et démarches de résolution possibles (d'après Gamo et al., 2011, page 629)

De notre point de vue, ces deux problèmes ne se distinguent pas seulement en fonction de la variable impliquée (matérielle vs temporelle), mais aussi selon leur structure sémantique qui traduit un caractère dynamique ou statique de la situation elle-même. Ainsi, même si les deux problèmes impliquent une relation de *comparaison*, le premier problème s'apparente à une structure de type *combinaison* et le second à une structure de type *changement*, selon la typologie de Riley et al. (1983). Les schémas « range-tout » devraient pouvoir s'adapter à ces structures de problèmes, mais vont-ils affecter les démarches de résolution spontanées des élèves ?

2. Questions de recherche et hypothèses

La première question de recherche s'inscrit dans la lignée des travaux de Gamo et ses collaborateurs (Gamo et al., 2010, 2011, 2014). Elle s'intéresse à l'impact de la structure sémantique des problèmes, sur les démarches de résolution. Nous pensons effectivement que les élèves recourront plus spontanément à une démarche économique (c'est-à-dire, en une seule étape) pour résoudre un problème impliquant conjointement des relations de types *changement* et *comparaison* et qu'ils privilégieront une démarche complexe (c'est-à-dire, en trois étapes) pour la résolution d'un problème composant des relations de types *combinaison* et *comparaison*. En corollaire, les taux de réussite du premier problème devraient être plus élevés que ceux du second. Complémentairement, il est supposé qu'un problème impliquant uniquement des relations de type *combinaison* sera mieux réussi que les deux structures susmentionnées qui composent deux types de relation sémantique.

La seconde question de recherche s'inscrit, quant à elle, dans la lignée des travaux de Polotskaia et ses collègues (Ducharme et Polotskaia, 2008, 2009 ; Gervais et al., 2013 ; Polotskaia, 2009 ; Polotskaia et al., 2016 ; Polotskaia et Consultant, 2010 ; Savard et Polotskaia, 2014). Elle vise à analyser l'impact de la construction de schématisations « range-tout » sur les performances des élèves et sur leurs démarches de résolution. Nous faisons l'hypothèse d'un effet différentiel de ces schématisations en fonction de la structure sémantique des problèmes et des démarches spontanées des élèves. En effet, même si elles se veulent adaptables aux problèmes relevant des différentes structures sémantiques, le travail d'abstraction à réaliser pour les concrétiser n'est pas le même dans tous les cas. Plus précisément, nous pensons que l'introduction de ces schématisations sera essentiellement efficace face à un problème de type *combinaison* dans la mesure où cette structure sémantique traduit une relation statique, de type parties-tout, qui s'accorderait particulièrement bien aux schémas « range-tout ». On peut ensuite escompter un effet positif marqué face à un problème de type *combinaison-comparaison* étant donné qu'il traduit aussi une relation statique et que la schématisation ne devrait pas entrer en conflit avec la procédure non-économique attendue pour ce type de

problème. Corrélativement, on s'attend à un effet moins marqué face à un problème de type *changement-comparaison* dans la mesure où les transformations dynamiques demandent une abstraction plus importante pour être reconceptualisées sous la forme d'une relation parties-tout et que le passage par la schématisation pourrait s'avérer conflictuel avec la procédure économique attendue face à ce type de problème.

3. Dispositif de recherche

Pour répondre à la première question de recherche, un test constitué de trois problèmes de structures sémantiques différentes (voir tableau 2) a été administré à dix classes (N = 178 élèves) de 4^e année primaire en Belgique francophone (grade 4, élèves de 9-10 ans).

Type <i>combinaison</i>	La brocante (P1) Michael, Jerry et Daniel ont participé à une brocante. Avant-midi, Michael a vendu son vieux vélo pour 20€, Jerry a vendu ses skis pour 13€ ; Daniel a vendu son costume d'Halloween de l'année passée pour 9€. Après-midi, les amis ont vendu un DVD. En tout, les trois garçons ont accumulé 50 €. Combien d'argent les amis ont-ils reçu pour le DVD ?
Type <i>changement-comparaison</i>	La fête de l'école (P2) C'est la fête de l'école aujourd'hui. Antoine avait encore quelques tickets de l'an passé. Aujourd'hui, il a gagné 8 tickets. Fin de journée, il compte tous ses tickets pour choisir son cadeau et constate qu'il en a 17. Nadia avait le même nombre de tickets qu'Antoine en début de journée. Aujourd'hui, elle en a gagné deux de moins que lui. Combien de tickets Nadia a-t-elle en fin de journée ?
Type <i>combinaison-comparaison</i>	La rentrée scolaire (P3) Laurent achète au supermarché un classeur qui coûte 8 € et un plumier. Il paie 14 €. Un stylo coûte 3 € de moins qu'un classeur. Augustin achète un plumier et un stylo. Combien Augustin doit-il payer pour ses achats ?

Tableau 2. Les 3 problèmes soumis aux 10 classes de 4^e année primaire (N = 178)

Le problème de type *combinaison* (P1) est un problème parallèle à celui utilisé par Polotskaia et ses collègues pour introduire le « jeu du capitaine ». Les problèmes de types *changement-comparaison* (P2) et *combinaison-comparaison* (P3) impliquent tous deux des variables « matérielles » (des tickets dans un cas, des prix dans l'autre) et sont construits de façon sensiblement parallèle aux problèmes de « durée » et de « poids » proposés par Gamo et al. (2011, voir tableau 1). Les

consignes invitaient les élèves à réaliser un dessin ou un schéma s'ils le souhaitaient ; elles leur demandaient explicitement d'indiquer tous leurs calculs.

Pour répondre à la deuxième question de recherche, un dispositif en trois étapes a été mis en œuvre dans six classes de grade 4³ (N = 107 élèves) : le pré-test, constitué des trois problèmes précités ; une micro-intervention visant à introduire les schémas de type « range-tout » et un post-test constitué de trois problèmes parallèles à ceux du pré-test. L'intervention menée se décline en cinq étapes réparties en deux séances : la première séance est menée immédiatement après l'administration du pré-test tandis que la seconde précède directement celle du post-test.

La première étape (mise en situation) consiste à proposer une version simplifiée du « jeu du capitaine » (adaptée de Polotskaia et Consultant, 2010). Les élèves sont répartis en duos et chaque membre de chaque duo reçoit un problème de type *combinaison* très simple (P1 – *Pierre a 4 billes. Nadia a 6 billes. Combien de billes Pierre et Nadia ont-ils ensemble ?* ; P2 – *Pierre a 4 billes. Nadia a aussi quelques billes. Ensemble, Pierre et Nadia ont 10 billes. Combien de billes Nadia a-t-elle ?*). Afin de faciliter les échanges au sein des duos, les problèmes proposés sont volontairement proches : les valeurs numériques et les éléments contextuels sont identiques, mais la place de l'inconnue diffère (recherche du « tout » ou d'une « partie »). Les consignes données sont proches de celles du jeu d'origine (voir figure 3).

« Dans chaque groupe duo, chacun a reçu un problème différent. Tous les problèmes parlent de Pierre, de Nadia et de billes. Vous devez écrire un message qui permettra à votre copain de résoudre le problème. Attention : il ne lira pas le problème et ne verra que votre message !

Voici les règles pour le message :

- *Le message doit représenter le problème ;*
- *Le message ne doit comporter aucune lettre ;*
- *Le message ne doit comporter aucun symbole d'opération arithmétique (+ ÷ – ×) ;*
- *Le message ne doit pas comporter de nombres autres que ceux du texte du problème. »*

Figure 3. Consignes pour le « jeu du capitaine »

³ Les 6 classes font partie des 10 classes précédemment citées. Il s'agit d'un sous-échantillon de convenance dans la mesure où ce sont simplement les classes qui ont accepté de participer à l'expérimentation qui ont été retenues.

Après le travail en duos, une phase de correction collective (étape 2) permet de confronter les messages créés par les élèves et d'introduire les schémas « range-tout », présentés comme étant une solution économique et efficace pour représenter la structure du problème. Pour finir, un nouveau problème de type *combinaison*, proche des deux précédents, mais faisant porter l'inconnue sur l'autre « partie » (P3 – *Pierre a quelques billes. Nadia a 6 billes. Ensemble, Pierre et Nadia ont 10 billes. Combien de billes Pierre a-t-il ?*) est proposé aux élèves dans le but de réinvestir collectivement le type de schémas introduit (étape 3).

La seconde séance d'intervention est menée environ une semaine après la première. Elle consiste à proposer une phase de rappel des schémas (étape 4) et un réinvestissement de ceux-ci face à un problème permettant d'investir les deux structures sémantiques qui le composent, c'est-à-dire les structures de types *changement* et *comparaison* (étape 5). Les élèves sont invités à représenter le problème en utilisant des schémas « range-tout », puis à le résoudre. Dans le but de favoriser le processus de *qualification* (Houdement, 2011), l'enseignant précise qu'ils peuvent maintenant écrire des informations sur les schémas pour s'aider à mieux comprendre la situation (ex. les billes, les prénoms des enfants, en tout...). Il précise aussi qu'ils peuvent faire plusieurs schémas pour analyser pas à pas le problème. La correction collective met en exergue les schémas attendus (figure 4).

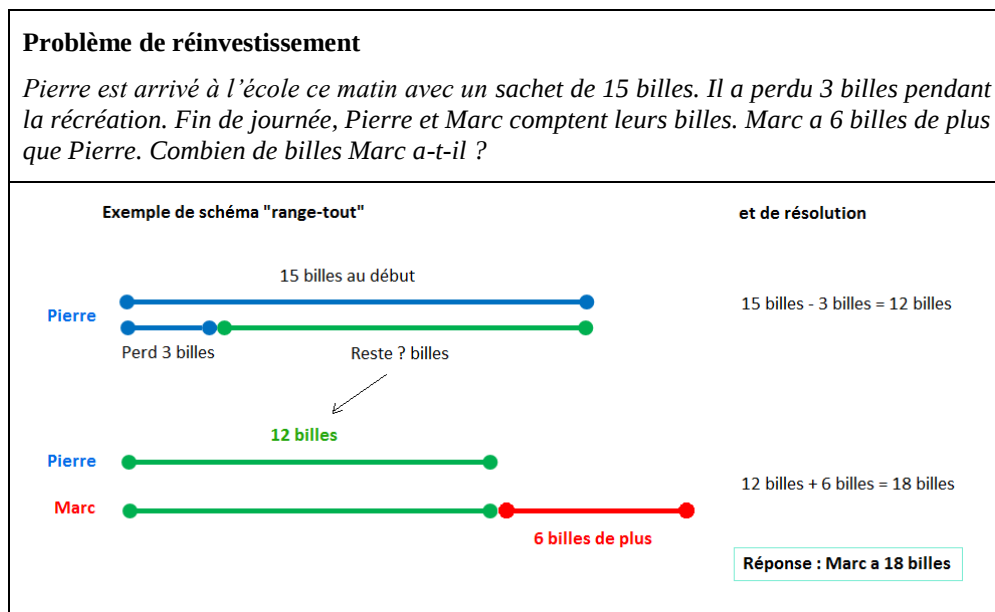


Figure 4. Exemple de schématisations et de résolution proposé lors de la mise en commun portant sur le problème de réinvestissement

Comme indiqué précédemment, le post-test est composé de trois problèmes parallèles à ceux du pré-test. Les thématiques abordées et l'ordre de présentation des problèmes ont été modifiés pour éviter un effet de *testage*. Pour faciliter la lecture, nous les avons identifiés, ici, par des codes similaires à ceux du pré-test (P1', P2' et P3' – voir tableau 3). Les consignes étaient du même type qu'au pré-test, si ce n'est qu'elles demandaient explicitement aux élèves d'utiliser les schémas découverts précédemment.

Type <i>combinaison</i>	La vente de chocolats (P1') Fatima, Lucie, Emma et Julien vendent des chocolats pour leur voyage scolaire. Les ventes de Fatima lui ont rapporté 24€, celles de Lucie 5 euros et celles d'Emma, 7€. Les ventes de Julien lui ont aussi rapporté un peu d'argent. En tout, les ventes des quatre enfants ont rapporté 40 euros. Combien d'argent les ventes de Julien lui ont-elles rapporté ?
Type <i>changement-comparaison</i>	La partie de fléchettes (P2') A midi, Farid et Julie terminent la partie de fléchettes commencée à dix heures. Farid avait déjà quelques points après la partie de la matinée. À midi, il gagne 7 points. Il a maintenant un total de 13 points. Julie avait le même nombre points que Farid ce matin. À midi, elle gagne 3 points de moins que lui. Combien de points Julie a-t-elle à la fin de la partie ?
Type <i>combinaison-comparaison</i>	Le matériel de tennis d'occasion (P3') Patrick achète une boîte de balles à 6 € et un sac de sport. Il paie 15 €. Une housse de raquette coûte 2 € de moins que la boîte de balles. Jordan achète un sac de sport et une housse de raquette. Combien Jordan doit-il payer pour ses achats ?

Tableau 3. Les 3 problèmes du post-test soumis aux 6 classes ayant mis en œuvre l'intervention (N = 107)

4. Résultats

4.1. La difficulté relative des trois problèmes et les démarches spontanées des élèves

Alors que l'on pensait que le problème 1 aurait été le plus facile dans la mesure où il ne met en œuvre qu'un seul type de relation, les résultats présentés dans le tableau 4 montrent que c'est le problème 2 qui est le mieux réussi. Le problème 3 est celui qui présente le taux de réussite le plus faible.

	P1 <i>Combinaison</i>	P2 <i>Changement-comparaison</i>	P3 <i>Combinaison-comparaison</i>
% de résolutions correctes ⁴	62% (N = 111)	70% (N = 124)	25% ⁵ (N = 45)

Tableau 4. Résultats globaux des élèves à chaque problème (N=178)

Le problème de type *combinaison*⁶ est celui qui est le plus fréquemment accompagné d'une schématisation spontanée relativement concrète qui, dans la majorité des cas, semble constituer une aide à la résolution (voir figure 5). Parmi les élèves qui ont résolu le problème correctement (N=111), 63% ont utilisé un calcul relationnel ($20+13+9+?=50$) ; 21% ont procédé en deux temps ($20+13+9=42$ et $50-42=8$, parfois en réalisant la deuxième étape mentalement) ; 9% ont réalisé un calcul canonique ($50-20-13-9=8$) et 7% se sont appuyés directement sur la schématisation et n'ont écrit aucun calcul.

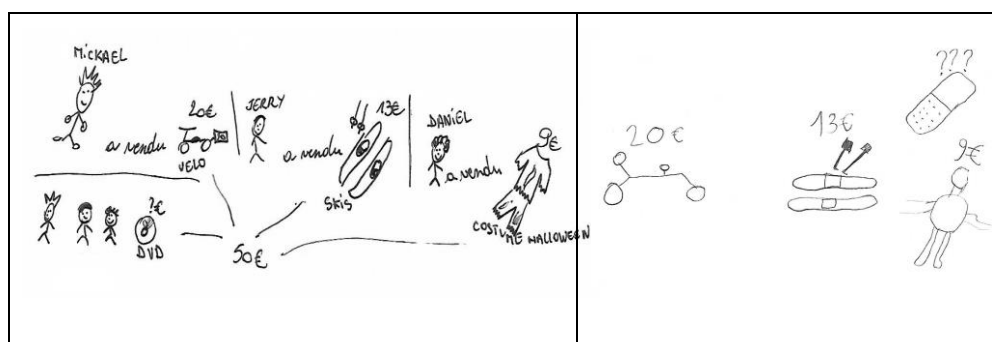


Figure 5. Exemples de schématisations produites face au problème (P1) de type *combinaison*

⁴ Le pourcentage de résolutions correctes comprend les réponses correctes, ainsi que les démarches correctes assorties d'une erreur de calcul ou d'un problème d'identification de la réponse. Pour le P1, cinq élèves ont résolu correctement le problème (ex. $20+13+9+8=50$), puis ont indiqué 50 dans la case réponse.

⁵ Notons que certains élèves (8,5%) aboutissent à la réponse « 11 » en considérant que le stylo coûte 3 euros et en additionnant ce prix au prix du classeur (8 euros). Bien qu'aboutissant à la réponse attendue, ces résolutions n'ont pas été considérées comme correctes et ne sont pas reprises dans le tableau 4.

⁶ Face aux trois problèmes, plus de la moitié des élèves accompagnent leur démarche de résolution d'une schématisation spontanée relativement concrète (64% pour P1, 56% pour P2 et 53% pour P3).

Pour les deux autres problèmes, les démarches correctes des élèves ont été analysées selon qu'elles relevaient d'une procédure économique (*procédure-comparaison*) ou non-économique (*procédure-complément*). Certaines démarches, qualifiées d'hybrides, constituent un « croisement » entre ces deux procédures et d'autres n'ont pas pu être classifiées. Les résultats sont présentés dans le tableau 5.

P2 - <i>Changement-comparaison</i> (N=124)		P3 - <i>Combinaison-comparaison</i> (N = 45)	
Procédure-complément (9)+8=17, 8-2=(6) et 9+6=(15)	2% (N=2)	Procédure-complément 8+(6)=14, 8-3=(5) et 6+5=(11) ⁷	91% (N=41)
Procédure hybride (9)+8=17 et 17-2=(15)	15% (N=19)	Procédure hybride 8+(6)=14 et 14-3=(11)	2% (N=1)
Procédure-comparaison 17-2=(15)	79% (N=98)	Procédure-comparaison 14-3=(11)	4% (N=2)
Non identifiable <i>Calcul et schématisation absents ou incodables</i>	4% (N=5)	Non identifiable <i>Calcul et schématisation absents ou incodables</i>	2% (N=1)

Tableau 5. Démarches observées face aux problèmes composant deux structures sémantiques

Si les élèves sont très nombreux à recourir à une procédure économique (en une étape) face au problème de type *changement-comparaison*, pratiquement aucun n'y a recours face au problème de type *combinaison-comparaison* où c'est la procédure en trois étapes qui est largement privilégiée. Dans la même logique, les *procédures hybrides*, qui s'appuient elles aussi sur une comparaison des états finaux, ne s'observent pratiquement que face au problème impliquant un changement. La simplicité de la *procédure-comparaison* et la complexité de la *procédure-complément* permettent de comprendre la hiérarchisation au niveau des taux de réussite. La figure 6 illustre les schématisations correspondant aux démarches les plus fréquentes pour chacun des problèmes.

⁷ Parmi les 41 démarches correspondant à une *procédure-complément*, 10 élèves écrivent les calculs correspondant aux trois étapes impliquées ; les autres réalisent une partie de la démarche mentalement : la dernière étape (8+(6)=14 et 8-3=(5) – 7 élèves), la deuxième étape (8+(6)=14 et 6+5=(11) – 6 élèves), voire les deux premières étapes (le seul calcul indiqué est alors 6+5=11, souvent accompagné du dessin des achats – le classeur à 8 euros, le plumier à 6 euros et le stylo à 5 euros).

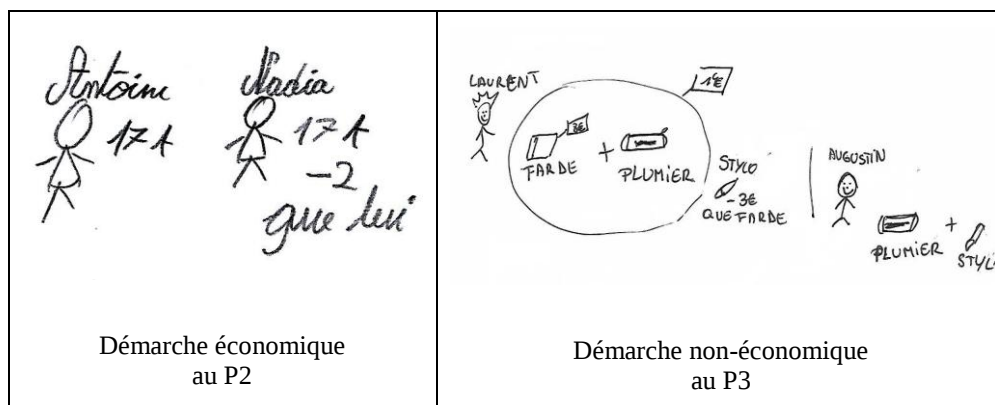


Figure 6. Exemples de schématisations illustrant les démarches les plus courantes observées face aux problèmes (P2) de types *changement-comparaison* et (P3) *combinaison-comparaison*

Les variables impliquées dans chaque énoncé étant, dans les deux cas, « matérielles » et non « temporelles » (des articles à acheter d'un côté et des tickets gagnés à une tombola de l'autre), il semble, en accord avec notre hypothèse, que c'est bien la structure sémantique du problème qui encourage le recours à une démarche économique de type *procédure-comparaison*.

4.2. L'impact de l'introduction des schématisations « range-tout »

La comparaison entre le pré-test⁸ et le post-test (voir tableau 6) montre que les élèves ont progressé face au problème de type *combinaison* (+15%) et, dans une moindre mesure, face à celui de type *combinaison-comparaison* (+8%). À l'inverse, une régression est constatée pour le problème de type *changement-comparaison* (-12%). Les effets observés restent néanmoins relativement faibles (ampleurs de l'effet comprises entre 0,17 et 0,33).

⁸ Les taux de réussite des 6 classes au pré-test sont très proches de ceux observés pour l'ensemble des 10 classes.

	P1	P1'	P2	P2'	P3	P3'
% de résolutions correctes ⁹	61% (N=65)	76% (N=81)	71% (N=76)	59% (N=63)	26% (N=28)	34% (N=36)
(Ecart-type)	(49%)	(43%)	(46%)	(49%)	(44%)	(48%)
Ampleur de l'effet (AE) ¹⁰	0,33		-0,25		0,17	

Tableau 6. Comparaison des résultats globaux des élèves lors du pré-test et du post-test (N=107)

Pour tenter de comprendre ces résultats, il convient d'abord d'observer dans quelle mesure les élèves ont réinvesti les schématisations introduites. Le tableau 7 montre qu'environ 80% des élèves ont produit des schématisations au post-test (ce qui est en augmentation par rapport au pré-test) et que, dans trois-quarts des cas, ces dernières sont de type « range-tout ». Pour chaque problème, environ 20% des élèves¹¹ ont directement calculé la solution au départ du schéma, sans passer par la mise à plat d'un calcul sous une forme conventionnelle.

⁹ Le pourcentage de résolutions correctes a été calculé comme expliqué précédemment. Pour le P1, les progrès observés masquent une difficulté spécifique aux problèmes pour lesquels la position de l'inconnue favorise la production de calculs « à trou ». En effet, les élèves ont certes progressé au niveau des démarches de résolution, mais on note aussi une augmentation du nombre de réponses incorrectement identifiées dans la case prévue à cet effet (3% au pré-test contre 13% au post-test). Dans le deuxième exemple de la figure 7, le point d'interrogation placé à côté du « 4 » laisse entendre que l'élève a bien repéré l'inconnue. Pourtant, il indique « 40 » dans la case réponse, c'est-à-dire le nombre situé derrière le signe d'égalité dans son calcul « 36+4=40 ».

¹⁰ L'ampleur de l'effet est calculée sur la base des moyennes et des écarts-types ($M_1 - M_2 / \sqrt{[(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) / 2]}$). Généralement, en référence à Cohen (1992), on considère une ampleur de l'effet de 0,2 comme faible, de 0,5 comme modérée et de 0,8 comme élevée. L'ampleur de l'effet renseigne sur la taille de la différence entre deux moyennes observées, mais n'autorise pas forcément les généralisations.

¹¹ On note ainsi 22% d'omission dans la zone « calcul » pour le P1' (contre 4% au pré-test) ; 20% pour le P2' contre 11% au pré-test) et 20% pour le P3' (contre 6% au pré-test).

	P1	P1'	P2	P2'	P3	P3'
% de schématisations (dont % de « range-tout » au post-test)	61%	79% (75%)	53%	86% (79%)	54%	81% (75%)

Tableau 7. Proportion d'élèves proposant une schématisation lors du pré-test et du post-test (N=107)

Pour le problème de *type combinaison*, les schématisations produites par les élèves s'avèrent généralement efficaces. En accord avec les démarches de résolution déjà observées au pré-test, certains produisent une schématisation qui combine d'emblée l'ensemble des données et d'autres procèdent en deux étapes, comme illustré à la figure 7. Même si les schématisations ne prennent pas toujours la forme attendue (voir troisième exemple), elles semblent avoir pu aider les élèves à organiser leur démarche et à résoudre correctement le problème.

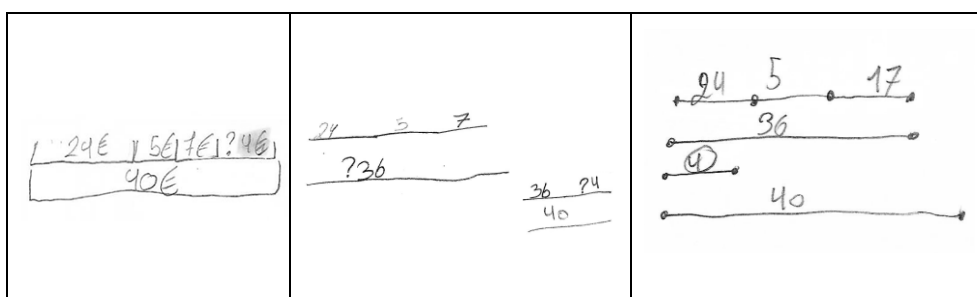


Figure 7. Exemples de schématisations « range-tout » correspondant au problème (P1') de *type combinaison*

Pour comprendre les résultats obtenus aux deux autres problèmes, les démarches correctes observées ont été codées dans les mêmes catégories que précédemment. Pour faciliter la lecture des exemples qui vont suivre, elles sont rappelées dans le tableau 8 et exemplifiées au départ des données du post-test.

Les résultats montrent assez nettement une évolution des démarches au profit des procédures non-économiques (*procédures-complément*). Pour le problème de *type combinaison-comparaison*, ces procédures étaient déjà très majoritaires au pré-test et les quelques rares élèves qui s'étaient appuyés sur une comparaison des états finaux (*procédure-comparaison*) ont abandonné cette procédure.

P2 – <i>Changement-comparaison</i>			P3 – <i>Combinaison-comparaison</i>		
	Pré-test (N=76)	Post-test (N=63)		Pré-test (N=28)	Post-test (N=36)
Procédure-complément (6)+7=13, 6-2=(4) et 6+4=(10)	1% (N=1)	24% (N=15)	Procédure-complément 6+(9)=15, 6-2=(4) et 9+4=(13) ¹²	89% (N=25)	100% (N=36)
Procédure hybride (6)+7=13 et 13-3=(10)	10% (N=8)	24% (N=15)	Procédure hybride 6+(9)=15 et 15-2=(13)	4% (N=1)	-
Procédure-comparaison 13-3=(10)	86% (N=65)	52% (N=33)	Procédure-comparaison 15-2=(13)	7% (N=2)	-
Non identifiable <i>Calcul et schématisation absents ou incodables</i>	2 (3%)	-	Non identifiable <i>Calcul et schématisation absents ou incodables</i>	-	-

Tableau 8. Évolution des démarches observées face aux problèmes composant deux structures sémantiques

La figure 8 illustre trois exemples de schématisations « range-tout » traduisant la *procédure-complément*. Dans le premier cas, les trois étapes de calcul sont représentées ; dans le deuxième cas, la deuxième étape est réalisée mentalement ; dans le troisième cas, seule la dernière étape est représentée (le « dessin » qui précède le schéma « range-tout » témoignant de la bonne compréhension de la situation).

¹² Au pré-test comme au post-test, la mise en œuvre de la *procédure-complément* ne se traduit pas nécessairement par l'écriture des trois étapes de calcul. Comme précisé précédemment, certaines étapes sont en effet réalisées mentalement, pouvant conduire l'élève à n'écrire que certaines étapes de calcul et/ou, dans la même logique, à ne représenter que certaines étapes sous la forme d'une schématisation « range-tout ».

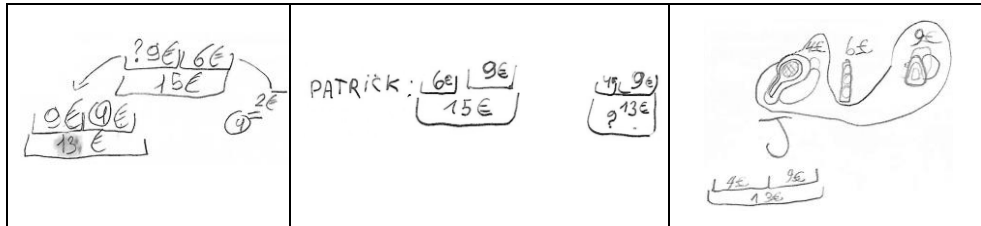


Figure 8. Exemples de schématisations « range-tout » correspondant au problème (P3') de type *combinaison-comparaison*

Pour le problème de type *changement-comparaison*, l'évolution est notable puisque près d'un quart des démarches correctes s'appuie maintenant sur une *procédure-complément*, comme si le passage par la schématisation externe induisait une volonté de décomposer les différentes étapes du problème. L'augmentation des procédures hybrides peut sans doute aussi se comprendre dans cette logique (propension à mettre à plat l'état initial, même si on ne s'en sert finalement pas pour procéder à une comparaison des états finaux).

La figure 9 illustre les trois types de procédures observées : les deux premiers exemples traduisent des *procédures-complément* (toutes les étapes sont représentées dans le premier cas, la deuxième étape est réalisée mentalement dans le second); les deux suivants correspondent respectivement à une procédure hybride et à une *procédure-comparaison*.

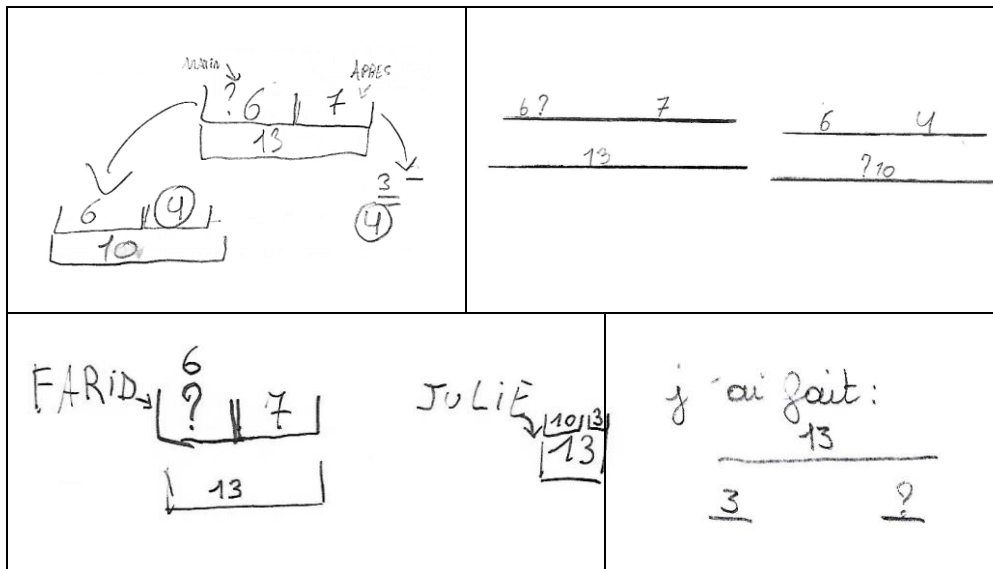


Figure 9. Exemples de schématisations « range-tout » correspondant au problème (P2') de type *changement-comparaison*

5. Conclusion et discussion

La première question de recherche s'intéressait à l'impact des structures sémantiques sur les performances et sur les démarches mises en œuvre par les élèves. Nos hypothèses se vérifient partiellement : le problème de type *combinaison* ne s'est pas révélé le mieux réussi, mais la hiérarchie entre les problèmes de types *changement-comparaison* et *combinaison-comparaison* est, quant à elle, très marquée. Concernant les démarches de résolution, notre hypothèse se vérifie largement : la procédure économique (*procédure-comparaison*) s'est révélée très majoritaire face au problème de type *changement-comparaison* et quasiment inexistante face à celui de type *combinaison-comparaison* qui était, quant à lui, principalement résolu via une procédure non-économique (*procédure-complément*). Gamo et al. (2011) estimaient que la nature des variables en jeu expliquait l'utilisation de ces deux procédures. Plus précisément, leur interprétation était la suivante :

Certaines variables (Effectif, Prix, Hauteur et Poids) en tant que variables mesurant des quantités matérielles, engendrent plutôt une représentation cardinale des quantités qui se cumulent, incitant au calcul du tout et/ou du complément, alors que d'autres (Durée et Âge) compte tenu de leur appartenance à la classe des variables mesurant des quantités temporelles, engendrent une représentation ordinale qui invite à une comparaison de quantités incitant au calcul de la différence associée à la comparaison. Les procédures de résolution mises en œuvre apparaissent bien être dépendantes de la classe d'appartenance de la variable (Gamo et al., 2011, page 636).

Les deux problèmes que nous avons soumis aux élèves ont été construits selon une formulation sensiblement parallèle à celle utilisée par Gamo et al. (2011). Nos deux énoncés proposaient des variables qu'il nous semble pouvoir qualifier de « matérielles » puisqu'il s'agissait de tickets dans un cas et d'euros dans l'autre. *A priori*, il s'agit bien de quantités qui s'accordent davantage à une représentation « cardinale » et non « ordinale » des nombres. Le premier problème proposé était toutefois formulé en mettant en exergue une structure sémantique de type *changement* (le nombre de tickets de départ est affecté par une transformation positive exprimée par le nombre de tickets gagnés durant la journée) alors que le second mettait en exergue une structure sémantique de type *combinaison* (les différents achats constituent les différentes parties et la somme totale représente le tout). En accord avec notre hypothèse, il semblerait donc que ce soit la structure sémantique des problèmes qui affecte la procédure de résolution mise en œuvre, et ceci, à tout le moins lorsqu'il s'agit de variables matérielles dans les deux cas. Des études complémentaires devraient être menées pour vérifier ce qu'il se passerait si l'on proposait ces deux structures sémantiques dans des problèmes impliquant des

variables temporelles. Par ailleurs, il importerait aussi de vérifier dans quelle mesure la formulation n'affecte pas le repérage de la partie commune dans les deux énoncés. En effet, dans les problèmes engendrant une procédure économique (problème de durée chez Gamo et al. vs problème de tickets dans notre étude), seuls deux « personnages » sont impliqués, ce qui permet aisément de comprendre que l'on peut comparer les états finaux (l'heure d'arrivée dans un cas ; le nombre de tickets disponibles en fin de journée dans l'autre). *A contrario*, dans les autres problèmes (poids vs achats en euros), trois « objets » sont impliqués (un sac de farine, un sac de crevettes et un sac de moules dans un cas ; un plumier, un classeur et un stylo dans l'autre), ce qui rend sans doute moins saillants les éléments finaux à comparer (le poids indiqué sur les deux balances dans un cas, la somme des achats effectués par chacun des deux enfants dans l'autre).

La seconde question de recherche s'intéressait à l'effet de l'introduction des schématisations « range-tout » sur les performances et sur les démarches de résolution de problèmes des élèves. En accord avec nos hypothèses, c'est face au problème de type *combinaison* que les progrès sont les plus marqués (de l'ordre de 15%) ; le problème de type *combinaison-comparaison* engendre, lui aussi, un certain progrès (de l'ordre de 10%) et le problème de type *changement-comparaison* se solde par une régression sensible (de l'ordre de 10% également). Le problème de type *combinaison* (P1, P1') implique une relation parties-tout qui correspond assez directement à une schématisation de type « range-tout ». Il est donc assez logique que ce soit le problème pour lequel les progrès sont les plus importants. Notons aussi que c'est la structure de problème au départ de laquelle le « jeu du capitaine » a été mené lors de l'intervention, mais avec un problème beaucoup plus simple et dans un contexte très différent ne permettant sans doute pas aux élèves de faire aisément le lien entre les deux types de problèmes. La régression observée au problème de type *changement-comparaison* s'explique sans doute par le développement de procédures non-économiques à la suite de l'introduction des « range-tout » qui semblent avoir induit une schématisation étape par étape peu compatible avec la *procédure-comparaison* s'appuyant directement sur le calcul de la différence entre les deux états finaux.

Au final, si les progrès observés à la suite de l'introduction des schématisations « range-tout » restent, somme toute, assez faibles (ampleurs de l'effet comprises entre 0,17 et 0,33), il faut toutefois rappeler la brièveté de l'intervention menée. Le « jeu du capitaine » n'a été mis en œuvre qu'une seule fois et les schémas « range-tout » introduits dans ce jeu n'ont été réinvestis que dans deux problèmes, ce qui est sans doute insuffisant pour permettre une réelle appropriation par les élèves (Ducharme et Polotskaia, 2008, 2009). En effet, cette approche s'éloigne des démarches courantes des élèves qui ont l'habitude de se centrer sur les données plutôt que sur les relations et qui peuvent être quelque peu perturbés par l'idée de

représenter des quantités précises par des segments de droite de longueur très approximative.

Par ailleurs, les schématisations « range-tout » demandent aussi un certain degré d'abstraction étant donné qu'elles nécessitent une reconceptualisation des problèmes en termes de relations « parties-tout », ce qui n'est *a priori* pas très « naturel » pour certains problèmes et ce qui s'avère sans doute très complexe pour certains élèves. De ce point de vue, la réapparition dans la littérature récente de schémas « parties-tout » visant à représenter tous les types de problèmes peut surprendre dans la mesure où des travaux déjà anciens concluaient plutôt à la nécessité d'adapter les schématisations aux différentes structures de problèmes et critiquaient l'utilisation de schémas parties-tout pour représenter les transformations négatives (Vergnaud 1982, 1990, 1997 ; voir aussi Gustin et Romberg, 1995 ; Verschaffel, 1990). *A contrario*, la remise en cause de la théorie des « schémas-problèmes » au profit de la théorie des « modèles épisodiques de situation » (Coquin-Viennot et Moreau, 2003 ; Thevenot et al., 2015), davantage sensibles à la formulation des énoncés et s'accordant mieux avec l'idée d'une schématisation construite (progressivement) au départ du texte, pourrait constituer un élément en faveur des schémas « range-tout ». En effet, lorsque les élèves sont invités à utiliser des schémas prédéfinis qui leur ont été fournis antérieurement (un schéma pour représenter chaque structure sémantique de problèmes ; i.e. étude de Willis et Fuson, 1988), ils risquent de développer des stratégies superficielles consistant à rechercher des mots-clés indicateurs du « bon » schéma, ce qui risque finalement de faire perdre tout le bénéfice d'une telle approche. Avec les schémas « range-tout », il ne s'agit pas de faire appel à un schéma spécifique à un type de problème particulier conservé en mémoire, mais bien de réellement construire une schématisation en organisant soi-même la mise en relation entre les données et l'inconnue au départ d'un canevas adaptable aux différentes situations rencontrées. Si ces schématisations semblent constituer une aide potentielle à la résolution de problèmes, des études complémentaires doivent encore être menées pour mieux comprendre comment et à quelles conditions les élèves peuvent s'emparer d'un tel « outil externe » pour soutenir leur processus de construction d'une représentation mentale des situations rencontrées.

Bibliographie

- BECKMANN, S. (2004). Solving Algebra and Other Story Problems with Simple Diagrams: a Method Demonstrated in Grade 4–6 Texts Used in Singapore. *The Mathematics Educator*, **14**(1), 42-46.
- COHEN, J. (1992). A power primer. *Psychological Bulletin*, **112**(1), 155-159.
- COQUIN-VIENNOT, D. & MOREAU, S. (2003). Highlighting the role of the episodic situation model in the solving of arithmetical problems. *European Journal of Psychology of Education*, **XVIII**(3), 267-279.
- CSÍKOS, C., SZITÁNYI, J. & KELEMEN, R. (2012). The effects of using in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics*, **81**(1), 47-65.
- DEMONTY, I. & FAGNANT, A. (2012). Les différentes fonctions de la résolution de problèmes sont-elles présentes dans l'enseignement primaire en communauté française de Belgique ? In J.-L. Dorier & S. Coutat. (Eds). *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle – Actes du colloque EMF2012* (SPE3, pp. 1752–1760).
- DIEZMANN, C. M. (2002). Enhancing students' problem solving through diagram use. *Australian Primary Mathematics Classroom*, **7**(3), 4-8.
- DUCHARME, M. & POLOTSKAIA, E. (2008). Développement du raisonnement algébrique par résolution de problèmes textuels chez les enfants au primaire (ingénierie didactique) (Partie 1). *ENVOL*, **145**, 21-28.
- DUCHARME, M. & POLOTSKAIA, E. (2009). Développement du raisonnement algébrique par résolution de problèmes textuels chez les enfants au primaire (ingénierie didactique) (Partie 2). *ENVOL*, **146**, 33-38.
- ELIA, I. (2009). L'utilisation d'images en résolution de problèmes additifs : quel type d'images et quel rôle. *Annales de Didactique des Sciences cognitives*, **14**, 5-29.
- ELIA, I. (2011). Le rôle de la droite graduée dans la résolution de problèmes additifs. *Annales de Didactique des Sciences cognitives*, **16**, 45-66.
- ELIA, I., GAGATSIS, A. & DEMETRIOU, A. (2007). The effects of different modes of representations on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction*, **17**, 658-672.
- FAGNANT, A. (2013). Opérations arithmétiques et symbolisations variées. Partir des démarches informelles des élèves pour donner du sens aux apprentissages. *Education & Formation*, **e-298**(1), 23-38.

FAGNANT, A., AUQUIÈRE, A. & VLASSIS, J. (2015). *Résolution de problèmes arithmétiques et représentations schématiques : comment évaluer l'efficacité d'approches didactiques contrastées ?* In P. Detroz & O. Borsu (Eds). Actes du 27^e colloque de l'Admée-Europe. L'évaluation à la lumière des contextes et des disciplines.

FAGNANT, A. & VLASSIS, J. (2010). Le rôle de la résolution de problèmes dans les apprentissages mathématiques : questions et réflexions. *Education Canada*, **50(1)**, 50-52.

FAGNANT, A. & VLASSIS, J. (2013). Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational Studies in Mathematics*, **84**, 149-168.

FAYOL, M. (1990). *L'enfant et le nombre*. Paris : Delachaux & Niestlé.

GAMO, S., NOGRY, S. & SANDER, E. (2014). Réduire les effets de contenus en résolution de problème pour favoriser la construction d'une représentation alternative. *Cahiers des Sciences de l'Éducation*, **36**, 35-66.

GAMO, S., SANDER, E. & RICHARD, J-F. (2010). Transfer of strategy use by semantic recoding in arithmetic problem solving. *Learning & Instruction*, **20**, 400-410.

GAMO, S., TAABANE, L. & SANDER, E. (2011). Rôle de la nature des variables dans la résolution de problèmes additifs complexes. *L'Année psychologique*, **111**, 613-640.

GERVAIS, C., SAVARD, A. & POLATSKAIA, E. (2013) La résolution de problèmes de structures additives chez les élèves du premier cycle du primaire : le développement du raisonnement. *Bulletin AMQ*, **53**, 58-66.

GUSTEIN, E. & ROMBERG, T.A. (1995). Teaching children to add and subtract. *Journal of mathematical Behavior*, **14**, 283-324.

HANIN, V. & VAN NIEUVENHOVEN, C. (2016). Évaluation d'un dispositif pédagogique visant le développement de stratégies cognitives et métacognitives en résolution de problèmes en première secondaire. *Évaluer. Journal International de Recherche en Education et Formation*, **2(1)**, 53-88.

HEGARTY, M. & KOZHENIKOV, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, **91(4)**, 684-689.

HOUEMENT, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques ordinaires à l'école. *Annales de Didactique des Sciences cognitives*, **16**, 67-96.

HOUEMENT, C. (2014). Des connaissances fonctionnelles (mais ignorées) en résolution de problèmes arithmétiques. *Cahiers des Sciences de l'Education*, **36**, 7-33.

JAEGERS, D., LAFONTAINE D. & FAGNANT, A. (2016). Développer l'autorégulation et les compétences en résolution de problèmes : une étude exploratoire en fin d'enseignement primaire en Belgique francophone. *Revue Suisse des Sciences de l'Education*, **38(3)**, 1-21.

JULO, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, **69**, 31- 52.

LEVAIN, J.P., LE BORGNE, P. & SIMAR, A. (2006). Apprentissage de schémas et résolution de problèmes en SEGPA. *Revue Française de Pédagogie*, **159**, 95-109.

MARCOUX, G. (2012). *Tâches scolaires et mobilisation adaptée de procédures : quels paramètres sont influents ?* Thèse de doctorat en Sciences de l'Éducation, Université de Genève, document non publié.

MARCOUX, G. (2014). Résolution de problèmes arithmétiques dans le cadre d'une approche par compétences : ordre des tâches et parts d'influence de quelques facteurs cognitifs et motivationnels. *Les cahiers des Sciences de l'Éducation*, **36**, 67-114.

MEVARECH, Z. R. & KRAMARSKI B. (2014). Critical maths for innovative societies: the role of metacognitive pedagogies. OECD publishing.

NOVICK, L.R., HURLEY, S.M. & FRANCIS, M. (1999). Evidence for abstract, schematic knowledge of three spatial diagram representations. *Memory & Cognition*, **27(2)**, 288-308.

ÖZOY G. & ATAMAN A. (2009). The effect of metacognitive strategy training on mathematical problem solving achievement. *International Electronic Journal of Elementary Education*, **1(2)**, 67-82.

PANTZIARA, M., GAGATSIS, A. & ELIA, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics*, **72**, 39-60.

POLOTSKAIA, E. (2009). *Communication de la structure mathématique du problème par les élèves du primaire. Analyse d'un scénario didactique*. Proceedings of CIEAEM 61, 178-183, University of Palermo, Italy.

POLOTSKAIA, E. & CONSULTANT, P. (2010). Des représentations graphiques dans l'enseignement des mathématiques – Deux jeux pour apprendre. *Bulletin AMQ*, **L(1)**, 12-28.

- POLOTSKAIA, E., SAVARD, A. & FREIMAN, V. (2016). Investigating a case of hidden misinterpretations of an additive word problem: structural substitution. *European Journal of Psychology of Education*, **31**, 135-153.
- RILEY, M.S., GREENO, J.G. & HELLER, J.I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. In H.P. Ginsburg (Ed.) *The development of mathematical thinking*. New York : Academic Press.
- SAVARD, A. & POLOTSKAIA, E. (2014). Gérer l'accès aux mathématiques dans la résolution de problèmes textuels : une exploration du côté de l'enseignement primaire. *Education & Francophonie*, **XLII(2)**, 138-157.
- THEVENOT, C., BARROUILLET, P. & FAYOL, M. (2015). De l'émergence du savoir calculer à la résolution des problèmes arithmétiques verbaux. In M. Crahay & M. Dutrevis (Eds). *Psychologie des apprentissages scolaires* (pp. 169-197). Bruxelles: De Boeck.
- UESAKA, Y., MANALO, E. & ICHIKAWA, S. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviors promote students' use of diagrams in mathematics problem solving? *Learning and Instruction*, **17**, 322-335.
- VAN ESSEN, G. & HAMAKER, C. (1990). Using self-generated drawings to solve arithmetic word problems. *Journal of Educational Research*, **83(6)**, 301-312.
- VERGNAUD, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operation of thought involved in addition and subtraction problems. In T.P. Carpenter, J.M. Moser & T.A. Romberg (Eds). *Addition and Subtraction. A cognitive perspective*, (pp. 39-59). Hillsdale, N. J. : Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactique des Mathématiques*, **10 (2.3)**, 133-170.
- VERGNAUD, G. (1997). The nature of mathematical concepts. In T. Nunes & P. Bryant (Eds). *Learning and Teaching Mathematics: An International perspective* (pp. 5-28). UK : Psychology Press Ltd.
- VERSCHAFFEL, L. (1990). *A review of research on addition and subtraction word problem solving*. Centre of Instructional Psychology and Technology. University of Leuven. Internal Report.
- VERSCHAFFEL, L. & DE CORTE, E. (1997). Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school? In T. Nunes & P. Bryant (Eds), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective* (pp. 69-97). UK : Psychology Press Ltd.
- VERSCHAFFEL, L. & DE CORTE, E. (2008). La modélisation et la résolution des problèmes d'application : de l'analyse à l'utilisation efficace. In M. Crahay, L.

Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Eds). (2^e édition). *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques ?* (153-176). Bruxelles : De Boeck.

VERSCHAFFEL, L., GREER, B. & DE CORTE, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, Hollande : Swets & Zeitlinger.

VERSCHAFFEL, L., GREER, B. & DE CORTE, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Reston, VA: NCTM.

WILLIS, G.B. & FUSON, K.C. (1988). Teaching children to use schematic drawings to solve addition and subtraction word problems. *Journal of Educational Psychology*, **80**(2), 192-201.

AMÉLIE AUQUIÈRE

Département des Sciences de l'Éducation, Université de Liège
amelie.auquiere@uliege.be

ISABELLE DEMONTY

Département des Sciences de l'Éducation, Université de Liège
isabelle.demonty@uliege.be

ANNICK FAGNANT

Département des Sciences de l'Éducation, Université de Liège
afagnant@uliege.be

CONTEXTUALISER POUR ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES : UN ENJEU DE FORMATION

Abstract. Research in mathematics education shows that dwelling upon questions regarding “contextualizations” in teaching and learning mathematics is important for teacher training. In this article, we examine in terms of contextualization, three training practices (addressing primary or secondary prospective teachers at Université du Québec à Montréal – UQAM) targeting the same mathematical content (division). Through each case, following an inductive process, we analyze *a posteriori* the meaning of contextualizing, including its assigned function by the teacher-students or the teacher-educator, whether the contextualizations were explicitly requested or emerged in students’ work. A transversal reading of the cases shows the richness of meanings associated with contextualization and identify potential avenues for teacher training.

Résumé. S’attarder aux questions de contextualisation dans l’enseignement et l’apprentissage des mathématiques constitue, comme le montrent les travaux de recherche en didactique des mathématiques et les contraintes institutionnelles, un enjeu important à considérer dans la formation des enseignants. C’est à cet enjeu que s’attarde cet article. Trois cas de pratiques de formation à l’enseignement des mathématiques à l’Université du Québec à Montréal (UQAM), ciblant un même contenu mathématique (la division), sont analysés sous l’angle de la contextualisation. Ces pratiques, analysées *a posteriori*, proviennent d’un cours de didactique des mathématiques s’adressant à de futurs enseignants de mathématiques au secondaire (deux premiers cas) et d’un cours de didactique des mathématiques s’adressant plutôt à de futurs enseignants du primaire (troisième cas). Une contextualisation y est sollicitée de manière explicite ou émerge du travail mené par les futurs enseignants. Pour chacun des cas, nous dégageons, par une démarche d’analyse inductive, le sens que prend, dans l’action, cette contextualisation, et la fonction qui lui est attribuée. Une lecture transversale de ces cas montre une richesse des significations associées à la contextualisation, et permet de cibler des enjeux de formation.

Mots-clés. Formation des maitres en mathématiques, Contextualisation dans l’enseignement des mathématiques, Concept et algorithmes de division.

¹ Groupe de REcherche sur la Formation à l’Enseignement des Mathématiques. Les membres du GREFEM ayant participé à la rédaction de cet article sont, par ordre alphabétique, Nadine Bednarz (Université du Québec à Montréal, Québec, Canada), Caroline Lajoie (Université du Québec à Montréal, Québec, Canada), Jean-François Maheux (Université du Québec à Montréal, Québec, Canada) et Mireille Saboya (Université du Québec à Montréal, Québec, Canada).

1. Introduction

La question de l'utilisation des « contextes » dans l'enseignement des mathématiques touche à l'essence même de ce que sont les mathématiques et leur apprentissage. En revenant sur la rationalité invoquée par ceux qui prônent l'utilisation de contextes dans l'enseignement des mathématiques, Boaler (1993) nous sensibilise à cet enjeu. Que ces raisons soient liées à la motivation des élèves, au transfert des apprentissages, ou encore à une prise en compte des liens entre les mathématiques scolaires et les problèmes « réels », elles reposent sur une hypothèse largement répandue en éducation mathématique affirmant que l'apprentissage sera « meilleur » si les mathématiques sont apprises dans des contextes « réels », et si les liens entre ce qui est requis dans les deux cas sont établis. Or les travaux de Lave (1988) et les nombreuses études menées sur les mathématiques au travail viennent contester cette conception universelle et générale des mathématiques, qui semble intemporelle, et dont les applications sont conçues comme des situations où une connaissance générale s'applique sans affecter la nature des objets mathématiques impliqués. Un des éléments clés, au contraire, qui se dégage des études sur les mathématiques au travail a trait au rôle structurant du contexte dans les conceptualisations développées en pratique et dans leurs transformations, lorsque celles-ci sont contextualisées, recontextualisées à travers différentes situations (Noss, 2002). Ces différents travaux montrent en ce sens la complexité de la question attachée aux « contextes », pris dans le sens de circonstances et conditions entourant un problème ou une idée mathématique, et à leur utilisation dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Quelques travaux de recherche viennent ainsi interroger l'impact que peuvent avoir les contextes sur l'engagement des élèves dans la résolution de problèmes en mathématiques, ces derniers pouvant jouer un rôle de support à la résolution, mais également s'instaurer en obstacle au travail mathématique (Webb, 1984 ; Nguala, 2006 ; Cooper et Harries, 2002 ; Boaler, 1993). En ce sens, ils ne peuvent être pris *a priori* comme un acquis sur lequel peut s'appuyer l'apprentissage, mais leur rôle doit être interrogé. Cette interrogation est au cœur du travail mené depuis plus de 30 ans par les chercheurs de l'Institut Freudenthal aux Pays-Bas, dans la perspective du « Realistic Mathematics Education » (RME) (voir notamment Streefland, 1991 ; Treffers, 1993 ; Gravemeijer et Doorman, 1999 ; Van den Heuvel-Panhuizen, 2003 ; Rasmussen et King, 2000 ; Hough et Cough, 2007), une perspective suivant laquelle les contextes ne sont pas qu'un lieu d'application des concepts mathématiques :

« In realistic mathematics education, context problems play a role from the start onwards [...] The point of departure is that context problems can function as anchoring points for the reinvention of mathematics by the students themselves » (Gravemeijer et Doorman, 1999, p. 111).

En partant de contextes « imaginables », au sens où ces derniers sont « experientially real » pour les élèves, et de l'activité informelle qui s'y développe, les recherches-développements menées dans plusieurs domaines ont permis de documenter un processus de mathématisation progressive : des modèles spontanés que les élèves se donnent pour résoudre les situations qui leur sont proposées, modèles émergents développés dans une activité mathématique située (« model of ») aux modèles plus généraux (dits « model for ») (Gravermeijer et Doorman, 1999). Ces modèles progressivement développés par les élèves trouvent ainsi leur ancrage dans ces contextes et sont suffisamment flexibles pour pouvoir être réinvestis dans d'autres situations. Le contexte sert ici en quelque sorte de pont entre un niveau informel où les élèves inventent des stratégies et un niveau plus formel de l'activité mathématique où les modèles sont généralisables (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003). L'importance accordée aux contextes ressort donc clairement de ces différents travaux menés en didactique des mathématiques, des contextes qui, notons-le, et ce contrairement à ce que peut laisser entendre le mot « realistic », ne se limitent pas aux contextes réels :

« In RME, context problems are defined as problems of which the problem situation is experientially real to the student. Under this definition, a pure mathematical problem can be a context problem too. Provided that the mathematics involved offers a context, that is to say, is experientially real for the student » (*ibid*, p. 111).

Sur un tout autre plan, le recours aux contextes est également une recommandation forte des programmes d'études au Québec, et ce depuis fort longtemps, comme le montre l'analyse des programmes et des documents pédagogiques réalisée par Lajoie et Bednarz (2012, 2016) sur plus d'un siècle de réformes successives. Ces contextes peuvent être issus de la vie de tous les jours, réels ou réalistes, fantaisistes, purement mathématiques (MEQ, 1988)² ou encore issus de domaines généraux de formation (médias, environnement, santé, etc.) et d'autres disciplines scolaires (sciences, sciences humaines, ...) (MEQ, 2001 ; MELS, 2003, 2005). Cette place accordée aux contextes dans l'enseignement des mathématiques au plan institutionnel n'est pas sans incidence pour la formation des enseignants. Les « contextes » apparaissent en effet comme des incontournables avec lesquels seront appelés à travailler les enseignants. Les quelques études menées au Québec à ce sujet, à travers une analyse de chapitres de manuels utilisés au secondaire – un matériel avec lequel les enseignants sont appelés à travailler (Cotnoir, 2010), ou encore une analyse des manières de faire des mathématiques chez les enseignants à la fin du

² Un contexte est « réel s'il se produit effectivement dans la réalité », « réaliste s'il est susceptible de se produire réellement », « fantaisiste s'il est le fruit de l'imagination et qu'il est sans fondement dans la réalité », « purement mathématique s'il fait exclusivement référence à des objets mathématiques » (MEQ, 1988, pp. 26-27).

secondaire comme on le constate au quotidien (Corriveau, 2013), confirment l'importance de cette contextualisation dans l'enseignement des mathématiques. La question du recours aux contextes dans la formation des futurs enseignants pourrait bien constituer en conséquence un de ses enjeux importants. Quelques travaux de recherche menés par des chercheurs de l'Institut Freudenthal tendent d'ailleurs déjà à montrer que ce travail autour des contextes en formation des enseignants ne va pas de soi – notamment dans le défi que pose pour l'enseignant le travail à partir des raisonnements des élèves construits en contexte (Wubbels, Korthagen et Broekman, 1997).

Pour avancer sur la compréhension de cette contextualisation en formation des enseignants et des enjeux qu'elle soulève, nous avons cherché à cerner, en partant de nos propres pratiques de formation qui intègrent ces questions de contextualisation dans nos cours, les formes que prend cette contextualisation dans l'action lorsque nous travaillons avec de futurs enseignants : que peut signifier travailler avec des « contextes » en formation des enseignants et pourquoi le fait-on ?

2. Quelques repères méthodologiques

Dans le cadre de cette étude, nous avons choisi d'examiner les pratiques de formation de trois d'entre nous, chercheurs-formateurs³, sous l'angle de la contextualisation. La notion de pratique⁴ est ici définie comme « une manière de faire singulière d'une personne, sa façon réelle, propre d'exécuter une activité professionnelle : l'enseignement » (Altet, 2002, p. 86). Elle ne recouvre pas seulement les actes observables, soit un ensemble de gestes, d'actions mises en œuvre dans un cours, mais renvoie également aux choix et aux prises de décision qui sont effectués lors de la préparation des séances ou dans le cours lui-même. Cette pratique professionnelle rassemble « à la fois la manière de faire de chaque personne singulière, le faire

³ Comme groupe de chercheurs et formateurs, impliqués dans la formation des enseignants du primaire et du secondaire à l'Université du Québec à Montréal, et ce depuis de nombreuses années, le choix a été fait de partir de nos propres pratiques, de l'intérieur de celles-ci. La connaissance intime que nous en avions permettait en effet d'explorer de façon fine cette contextualisation et ses enjeux.

⁴ La notion de pratique a été développée sur le plan théorique par les didacticiens des mathématiques, dans les travaux portant sur les pratiques enseignantes, en s'appuyant sur la double approche ergonomique et didactique (Robert et Rogalski, 2002; Roditi, 2005, 2013). Ces travaux ont permis de mettre en lumière la complexité de ces pratiques, leurs différentes composantes (cognitives et médiatives en lien avec le travail en classe, sociale en lien avec l'établissement scolaire, les autres enseignants et les parents, institutionnelle en lien avec les programmes et personnelle en lien avec le parcours de l'enseignant et ses conceptions, valeurs...). Ils ont permis également de documenter l'activité de l'enseignant (ses gestes professionnels, la logique qui le guide).

propre à cette personne, et les procédés pour faire qui correspondent à une fonction professionnelle telle qu'elle est définie par un groupe professionnel particulier en fonction de buts, d'objectifs et de choix autonomes » (*ibid*, p. 86). Ce dernier aspect nous semble ici particulièrement important, car les pratiques que nous reprenons dans cet article s'inscrivent dans une certaine historicité du développement de la formation des enseignants à l'UQAM, qui a été construite au fil du temps par un groupe de formateurs-didacticiens (voir à ce sujet pour le secondaire Bednarz, 2001 ; Bednarz, Gattuso et Mary, 1995 ; pour le primaire Lajoie et Pallascio, 2001). Les orientations qui ont été retenues, les choix qui ont été faits sont ainsi le résultat d'un travail collectif.

L'analyse des trois cas s'est développée à partir de récits de pratique, sous forme verbale, des trois formateurs, de tâches proposées en formation, et de réflexions et discussions impliquant les quatre auteurs. De plus, en ce qui concerne le troisième cas, notre analyse a aussi porté sur des extraits de verbatim de séances de formation. Pendant un an environ, des rencontres hebdomadaires nous ont conduits à cibler progressivement un contenu spécifique commun aux trois cas, qui rejoignait la formation des enseignants du primaire et celle des enseignants du secondaire.

Notre intention par ce choix et par ce travail est de nourrir une explicitation de plus en plus riche et nuancée des pratiques impliquant la contextualisation, ainsi que des *possibilités* envisagées à cet égard. Il n'est donc pas question ici de réaliser une analyse documentaire de cas, mais bel et bien de dégager, à travers une réflexion sur ceux-ci, des manières de concevoir la contextualisation en mathématiques et les enjeux de formation des enseignants qui peuvent s'y rattacher. Il s'agit donc d'analyses *a posteriori* de nos pratiques de formation. Ces pratiques proviennent de cours donnés en formation des enseignants (du secondaire en mathématiques pour les deux premiers cas, du primaire pour le troisième) dans lesquels nous intervenons et dans lesquels la contextualisation est sollicitée de manière explicite ou émerge de façon régulière.

Les trois exemples que nous allons plus spécifiquement traiter ici sont développés autour de la division. Si nous avons choisi ce thème, c'est en partie parce qu'il rejoint la formation des enseignants du primaire et celle des enseignants du secondaire, et en partie aussi parce que la division est riche et complexe du point de vue didactique (Lajoie et Maheux, 2013) et que le recours à des contextes pour l'enseigner n'est pas sans poser de difficultés (Boulet, 1998).

À travers ces trois exemples, nous cherchons à mieux comprendre la diversité que recouvre la contextualisation dans le travail mené par trois d'entre nous autour de ce concept mathématique, nous permettant plus largement de dégager :

- le sens pris dans l'action contextualiser ou avoir recours à des contextes en formation des enseignants ;

- la fonction attribuée à cette contextualisation : nous contextualisons pour/à quelles fins ?

Cette analyse prend appui, dans un premier temps, sur une description des tâches proposées, des choix faits et de ce qui les motive. Il s'agit pour chacun des cas de rendre compte de ceux-ci du point de vue de la formatrice impliquée (puisque'il s'agit en fait ici de trois formatrices – une par cas), de manière à saisir « le fond des choses » par une certaine distanciation de l'action. Ce recul permet de faire ce que Denzin (1989) appelle, au sens de l'ethnographie, une « description dense » des pratiques investiguées :

« La description dense [...] injecte de l'histoire dans l'expérience, établit la signification d'une expérience isolée ou d'une suite d'événements pour la ou les personnes en question. » (Denzin, 1989, p. 55)

Dans chacun des cas, la formatrice impliquée va ainsi préciser, en partant de ce qu'elle fait à propos de la division, des exemples de tâches réalisées avec les étudiants en formation, les analyses didactiques qui les sous-tendent et les choix qu'elle fait, les intentions sous-jacentes, de manière à décrire de la manière la plus fine possible le travail réalisé à propos des contextes en formation. Dans les deux premiers cas, la description ne renvoie qu'à la formatrice, aux tâches qu'elle propose, à leur analyse préalable, pour en faire ressortir ce qui la guide et l'anticipation de ce qui pourrait s'y dérouler, et ce de manière à mettre en évidence ce qu'elles devraient ou pourraient solliciter. Dans le troisième cas, la description des tâches proposées par la formatrice est complétée par des extraits de verbatim de séances de formation rendant compte de ce que font effectivement les étudiants en formation dans ces tâches.

Cette description dense constitue l'assise du travail mené par l'équipe. Le regard croisé porté sur les trois cas va en effet conduire à se dégager de la posture de formateur pour entrer dans une analyse de chacun des cas. Cette démarche d'analyse inductive, au sens de Blais et Martineau (2006), nous conduit à cerner, au-delà de la description explicite de ce qui se fait et des intentions, le sens qui se dégage concernant ce que recouvre le travail de contextualisation en formation.

Dans ce qui suit, nous présentons le résultat de ce travail en introduisant chacun des trois cas par une description de la pratique, suivie d'une synthèse des éléments qui s'en dégagent. L'enchaînement des cas permet de faire ressortir une complexification progressive de l'idée de contextualisation et des enjeux de formation qui peuvent y être associés. Dans la discussion qui suit l'analyse, nous proposons une seconde lecture de ces cas en revenant de manière transversale sur ceux-ci.

Suivant un choix de rédaction reflétant au mieux le type d'analyse menée, les concepts théoriques porteurs pour celle-ci interviendront au fil du texte, au fur et à me-

sure qu'ils s'avèrent utiles pour l'analyse, plutôt qu'à l'intérieur d'un cadre théorique ou conceptuel préalable à celle-ci.

3. Trois cas de pratique impliquant la contextualisation autour du concept de division

3.1 Cas 1 : Un travail sur le contexte à partir de la formulation de problèmes en mots

3.1.1. Pour situer le travail réalisé

Au Québec, la formation des enseignants du secondaire est offerte à l'intérieur de programmes de premier cycle universitaires d'une durée de quatre ans. À l'Université du Québec à Montréal, le choix a été fait dès les années soixante-dix d'une formation professionnelle axée sur l'intervention en enseignement des mathématiques, venant façonner, de manière intégrée, à la fois la formation mathématique, didactique et pratique. Nous avons décrit ailleurs l'orientation globale de ce programme et ses caractéristiques particulières (Bednarz, 2001). Les premier et deuxième cas sont tirés du premier cours de didactique des mathématiques que doivent suivre les futurs enseignants dès la première année, un cours de 90 heures (voir pour une description plus précise de ce cours, didactique 1 et laboratoire, Bednarz *et al.*, 1995). Dans ce premier cours de didactique des mathématiques destiné aux futurs enseignants du secondaire, une attention particulière est portée sur la division en lien avec l'enseignement et l'apprentissage des élèves du début du secondaire (12-13 ans) et ce qui a été fait antérieurement au primaire. *Le travail réalisé sur les contextes prend ici appui sur l'opération de division à travers l'étude de problèmes en mots.* Ces problèmes prennent une forme particulière en ce sens qu'ils font appel à un contexte. Autour de ces problèmes « à contexte », le travail de la formatrice poursuit plusieurs intentions : sensibiliser les futurs enseignants aux différents modèles conceptuels de la division, soit le partage et le groupement, faire voir l'importance de présenter aux élèves des problèmes impliquant ces deux modèles, leur faire prendre conscience des difficultés des élèves en lien avec ces problèmes et les rendre habiles à composer de tels problèmes. C'est autour de cette préoccupation que nous plongeons nos futurs enseignants de mathématiques dans différentes tâches qui vont rejoindre les questions suivantes : *quels problèmes « à contexte » choisir et pourquoi ? Quelles difficultés peut-on anticiper chez les élèves ?*

3.1.2. *Choix des problèmes à contexte proposés par la formatrice et premières tâches proposées aux futurs enseignants en lien avec ces problèmes*

Diverses recherches faisant état de raisonnements, conceptions, difficultés et erreurs des élèves et des futurs enseignants du primaire et du secondaire face à des problèmes à contexte impliquant des multiplications et des divisions⁵ guident la formatrice dans le choix ou la construction de problèmes à contexte à travailler avec les futurs enseignants. Ainsi le **modèle conceptuel sous-jacent de l'opération à l'étude** est une des « variables didactiques » (éléments d'une tâche permettant d'en varier les exigences) qui influence le choix de la formatrice, sachant qu'il y a reconnaissance plus immédiate de la division-partage que groupement par les élèves lorsqu'ils sont confrontés à des problèmes numériques.

D'autres variables didactiques reliées au contexte choisi sont mises de l'avant. Pour les faire ressortir par les étudiants, une liste de différents problèmes à contexte leur est proposée, c'est-à-dire des problèmes choisis sur la base d'une analyse didactique préalable réalisée par la formatrice. Il est demandé aux futurs enseignants d'analyser la complexité de ces problèmes et d'anticiper l'engagement des élèves. Certains résultats de recherche viendront ici confirmer ou infirmer les hypothèses des étudiants quant aux raisonnements sollicités, difficultés et erreurs des élèves. La comparaison des taux de réussite dans la résolution des problèmes à contexte amènera également à dégager des variables didactiques telles que (a) ce à quoi réfère le problème et (b) la nature des nombres impliqués. En effet, face à deux problèmes qui sollicitent la même opération et qui font appel au même modèle conceptuel, les étudiants s'aperçoivent que l'histoire à laquelle on se réfère a une influence sur le taux de réussite des élèves. Ainsi, un problème mettant en scène des poissons dans des aquariums, par exemple, est plus familier aux élèves qu'un problème de même structure impliquant plutôt le taux de glucose chez les êtres humains. De plus, ces différents contextes amènent une réflexion quant à la nature des nombres en jeu. En effet, certains problèmes obligent un traitement sur des nombres naturels (contexte discret de distribution de poissons dans des aquariums, par exemple) alors que d'autres ouvrent la porte vers les nombres rationnels (contexte continu – de mesure ou de vitesse par exemple), ce qui n'est pas sans poser de difficultés aux élèves, en particulier lorsque le dividende est plus petit que le diviseur.

Forts de ce regard didactique sur les problèmes à contexte, les futurs enseignants vont alors être appelés à analyser les problèmes à contexte présents dans les manuels scolaires, une des ressources dans le quotidien de l'enseignant et de première importance pour plusieurs d'entre eux. Cette analyse les conduira à mettre en évi-

⁵ À titre d'exemple, nous pouvons citer les recherches de Ball (1990), Simon (1993), Graeber, Tirosh et Glover (1986), Fischbein, Deri, Nello et Marino (1985).

dence que les problèmes à contexte de division partage sont surreprésentés par rapport aux problèmes à contexte de division groupement. Les problèmes proposés par les manuels scolaires apparaissent ici limités pour développer chez les élèves l'habileté à résoudre des problèmes mobilisant différents modèles conceptuels. S'en dégage donc l'importance que l'enseignant puisse compléter la liste de problèmes existants par des problèmes qui ouvriront sur d'autres caractéristiques (autre modèle conceptuel, nature des nombres, etc.). Et c'est bien là une intention de la formatrice : développer l'habileté chez les futurs enseignants à construire des problèmes à contexte, mais pas n'importe lesquels, des problèmes préalablement déterminés par une analyse didactique éclairée par les résultats obtenus par la recherche. Mais ceci n'est pas une mince tâche !

3.1.3. *Qu'implique la tâche de formuler des problèmes à contexte ?*

S'appuyant sur la connaissance des difficultés des futurs enseignants à élaborer des problèmes impliquant une division⁶, la formatrice construit une suite de tâches visant à travailler cette difficulté. C'est par un retour en classe sur leurs productions que les étudiants sont amenés à prendre conscience de la complexité que représente la composition d'un problème à contexte selon des variables didactiques bien précises (par exemple le choix du **modèle groupement de la division**, le choix d'un **dividende plus petit que le diviseur**). Un travail assidu de composition de problème et d'analyse de ces productions peut alors suivre, au cours duquel les futurs enseignants développent leurs habiletés à manipuler ces variables.

3.1.4. *Autour d'un autre élément du « contexte » : le réalisme*

Lors des discussions en grand groupe autour des problèmes énoncés par les futurs enseignants, un autre élément du contexte ressort régulièrement : celui relié au **réalisme**. En effet, l'authenticité potentielle d'un problème fait l'objet de vives discussions au cours desquelles un problème jugé peu réaliste par les futurs enseignants est généralement vu comme moins parlant, moins porteur de sens pour les élèves. Cette réflexion autour des contextes *réels* ou *réalistes* résonne avec certains énoncés du programme de formation de l'école québécoise dont le suivant :

« ...la spécificité de la mathématique comme langage et comme outil d'abstraction exige de traiter dans l'abstrait des relations entre les objets ou entre les éléments de situations. Néanmoins, son enseignement au secondaire est plus efficace lorsqu'il prend appui sur des objets concrets ou sur des situations tirées de la réalité » (MELS, 2003, p. 232 ; MELS, 2005, p. 1).

⁶ Cette connaissance provient des recherches citées dans la note de bas de page précédente.

Ainsi, les documents ministériels semblent fortement suggérer de prendre appui sur des situations tirées de la réalité pour soutenir l'apprentissage des mathématiques. Du côté des futurs enseignants, les discussions sur les problèmes à contexte qu'ils rencontrent en analysant les manuels scolaires ou ceux qu'ils composent les amènent à regarder de plus près cette composante du contexte. Par exemple, un problème qui présente une discussion où une personne propose d'échanger les $\frac{3}{5}$ de son fromage (figure 1) laisse les futurs enseignants perplexes face au peu de vraisemblance qu'une telle situation ait lieu dans la « vraie » vie.

Mathilde : Mathieu, je suis prête à échanger les $\frac{3}{5}$ de mon fromage contre ton orange. Es-tu d'accord ?

Mathieu : Je préfère conserver 4 des 12 morceaux de mon orange, Mathilde. Quelle fraction de ton fromage me donnes-tu en échange des autres morceaux ?

Quelle fraction de son fromage Mathilde devrait-elle offrir à Mathieu ? Explique ton raisonnement.

Figure 1. Problème tiré d'un manuel

Ce problème à contexte fait fortement réagir les futurs enseignants, le contexte leur apparaissant artificiel. Si le programme de formation de l'école québécoise semble souhaiter un travail autour de problèmes réalistes de manière à rendre cet enseignement plus efficace, les futurs enseignants dénoncent en revanche l'utilisation forcée de problèmes *faussement réalistes*. Ils réalisent que de chercher à tout prix à rejoindre l'élève en évoquant des situations du quotidien n'est pas nécessairement le meilleur choix.

3.1.5. Bilan sur le premier cas : quel sens prend, dans l'action, la contextualisation ? Quelle fonction ?

À la lumière de ce qui vient d'être présenté, un certain sens de l'idée de contexte émerge tout au long du travail mené par la formatrice avec les étudiants en formation. *En effet, la contextualisation s'ancre ici dans les problèmes à contexte. Elle prend forme autour d'un travail mené sur ces problèmes, autour de certaines variables didactiques qui apparaissent des éléments incontournables, en particulier : le modèle conceptuel de l'opération, les nombres en jeu (ordre de grandeur relative, type de nombres, nature des nombres) reliés à l'histoire à laquelle réfère le problème et une réflexion concernant le réalisme du problème.*

Que dire des intentions de la formatrice ? En demandant aux futurs enseignants de contextualiser en composant des problèmes, elle reconnaît vouloir les conscientiser à la difficulté d'un tel exercice, et leur faire prendre conscience du jeu possible des variables didactiques du problème en lien avec l'apprentissage de l'élève. Les fu-

turs enseignants pourront ainsi percevoir la portée du travail consistant à choisir des problèmes et à inventer des contextes pertinents et diversifiés pour les élèves. Cette préoccupation vient en partie d'un besoin identifié au niveau des manuels scolaires, visant à combler le peu de représentativité de certaines variétés de problèmes.

Présentée ainsi, *la contextualisation évoque donc un travail sur l'énoncé de problèmes mathématiques regardés sous l'angle de ce que raconte le texte présenté à l'élève, des modèles conceptuels auxquels se rattachent ces énoncés, et du jeu sur des nombres*. Ce sont là des éléments clés en lien avec l'interprétation et l'engagement dans le problème, et donc du travail avec les idées mathématiques que l'on cherche à convoquer à l'aide d'un problème donné. Ils évoquent, en d'autres mots, la particularité du regard *didactique* sur des problèmes où *la contextualisation prise au sens de ces trois composantes (situation de référence, modèles conceptuels, nombres) devient un enjeu de formation particulièrement fort*. De plus, la problématique émergeant autour du réalisme des situations de référence évoque ici un *autre aspect lié à la contextualisation : celui des contraintes institutionnelles*. En effet, un accent particulièrement fort observé sur la contextualisation d'une part et d'autre part sur des situations dites réalistes, dans les documents du Ministère, est confronté aux insuffisances potentielles des ressources à la disposition de l'enseignant. Un enjeu important apparaît concernant le développement d'un regard critique par cet enseignant face à cette « commande » institutionnelle. Évidemment, il ne s'agit pas ici d'un enjeu spécifiquement lié à la contextualisation, mais de quelque chose qui d'une certaine manière prend prétexte de la contextualisation pour être développé.

Nous allons à présent poursuivre l'analyse en examinant un second cas qui se situe dans le même cours de didactique, et qui, du point de vue de la formation offerte aux futurs enseignants du secondaire dans notre établissement, se place, dans le cursus, à la suite du cas dont nous venons de discuter. Ce deuxième cas se situe également en continuité avec ce qui précède dans la mesure où la contextualisation y est aussi une affaire de formulation et d'énoncés, de modèle conceptuel associé à l'opération et de nombres en jeu. S'y ajoutent toutefois, et ce sont les aspects sur lesquels nous insisterons, d'autres éléments qui viennent élargir la conceptualisation en cours.

3.2 Cas 2 : Un travail en contexte sur les opérations : le contexte comme point d'appui pour penser une progression

L'exemple qui suit s'attarde au travail sur la division sous ses deux aspects imbriqués : modèle conceptuel sous-jacent de l'opération et calcul. L'accent, comme nous le verrons dans la tâche présentée aux étudiants ci-dessous, est moins placée sur la reconnaissance de l'opération dans un ensemble de problèmes que sur des

manières d'approcher le calcul sur de nouveaux nombres, un calcul qui se veut réfléchi, ainsi que sur l'explicitation de raisonnements clés permettant d'approcher ces nouveaux calculs.

3.2.1. Un premier regard sur une tâche proposée aux étudiants

Nous démarrons ici avec une tâche impliquant la division, visant à s'attarder au passage des opérations sur les nombres naturels aux opérations sur les nombres rationnels (figure 2), un enjeu central dans la transition entre l'école primaire et secondaire en enseignement des mathématiques. Nous nous attardons aux questions de contextualisation qu'elle convoque.

Vous êtes enseignant de 1re secondaire. Vous vous proposez d'aborder la division d'une fraction par une fraction en utilisant les nombres donnés ci-dessous :

(a) $36 \div 3$ (b) $36 \div 1/4$ (c) $36 \div 3/4$ (d) $36/5 \div 3/4$

Composer un problème à contexte accessible aux élèves, qui se résoudrait par une telle opération, et prévoir une illustration à utiliser pour l'ensemble des nombres à travailler. Montrer ensuite pour chaque cas à l'aide de l'illustration et de la verbalisation en référence au problème *comment on peut anticiper* la réponse en passant de (a) à (d).

Figure 2. Une tâche visant la division dans le passage des nombres naturels aux rationnels

Comme précédemment, on demande ici aux futurs enseignants de formuler un problème à contexte faisant référence à une certaine « histoire » et à des nombres dont la nature (nombres entiers naturels, fractions) et le rôle (fractions associées tantôt au dividende, tantôt au diviseur) varient. Liberté est toutefois laissée aux étudiants en formation quant à cette formulation : on ne parle pas de réalisme. Ici aussi toutefois, tout comme dans le premier cas, les problèmes à contexte formulés par les futurs enseignants sont souvent des problèmes réels ou réalistes.

Dans cet exemple, on ne demande pas, par ailleurs, de faire appel à un modèle conceptuel donné, l'idée étant de faire émerger de la discussion, lors du retour, les limites éventuelles de certaines contextualisations, notamment le modèle conceptuel sous-jacent, dans le passage aux opérations sur les rationnels. Ainsi, un modèle partagé formulé sur les entiers naturels sera difficilement extensible aux rationnels.

Une différence encore plus importante apparaît dans la manière dont la contextualisation est *abordée ici en matière de progression* plutôt que de façon ponctuelle. Elle doit permettre une exploitation dans le temps. La contextualisation doit donc être envisagée dans cette idée de passage, de transformation de certains nombres à

d'autres nombres, d'où la question formulée dans la tâche concernant l'anticipation du résultat d'un calcul à partir d'un autre résultat (c.-à-d. sans faire le second calcul au complet).

Une illustration est aussi appelée à jouer un rôle dans ce travail, et en ce sens on est en présence d'une présentation du problème qui n'est pas juste en mots, mais aussi imagée. Une *verbalisation* de cette progression est aussi demandée explicitant chacune des opérations et le passage de l'une à l'autre. Enfin, ce contexte est manifestement attaché au *travail de l'enseignant* et à l'activité professionnelle de préparation d'une suite de cours par l'enseignant.

Pour aller plus loin sur ce que met en jeu cet exemple, entrons plus à fond sur une analyse de la tâche.

3.2.2. Exigences et engagements dans la tâche, éclairage qu'ils amènent sur le plan de la contextualisation

À la première étape, les futurs enseignants doivent formuler un problème à contexte, et anticiper le sens que cette formulation aura lorsque les nombres changeront par la suite. Ainsi, la situation de référence qui est élaborée doit être « plausible » pour tous les nombres proposés dans la tâche. Une nuance importante se fait ainsi par rapport à l'idée de réalisme présentée dans le cas précédent : c'est ici plus une question de **fécondité** par rapport à des **variations** du problème qui importe. Ces variations, on le comprend, permettent de jouer avec les exigences, sur le plan mathématique, d'un problème de division, qui doit être plausible à la fois pour un travail avec des nombres entiers naturels et des fractions.

L'enjeu de fécondité s'illustre assez bien avec l'exemple suivant. Un problème tel que « Marie fait des équipes dans sa classe, plaçant 3 enfants par équipe. Si 36 enfants sont présents, combien pourra-t-elle faire d'équipes ? », faisant appel au modèle conceptuel groupement de la division, sera difficilement récupérable quand on voudra travailler avec autre chose que des entiers. En revanche, la contextualisation suivante, faisant référence au même modèle conceptuel de la division, est beaucoup plus féconde au sens où il est possible d'en faire facilement des variations au niveau des nombres impliqués : « Jean parcourt chaque jour 3 kilomètres pour s'entraîner. S'il veut parcourir 36 kilomètres, combien de jours cela lui demandera-t-il ? ». Une réflexion sur les nombres prime dans le choix d'une contextualisation plutôt que l'autre : la première contextualisation met en jeu des quantités discrètes pour lesquelles l'extension aux fractions n'a pas grand sens, la deuxième réfère à des grandeurs continues pour lesquelles un fractionnement du tout est envisageable.

En sollicitant la production d'une illustration accompagnant le problème, une autre nuance fait jour. L'enjeu de contextualisation en lien avec la situation de référence

ne passe pas que par les mots. Elle se retrouve aussi dans d'autres éléments sur lesquels pourra s'articuler le travail mathématique (ici l'illustration)⁷. Fournir une illustration permettant de travailler le problème (en effet, il ne s'agit pas d'illustrer la situation de manière décorative !) exige donc, d'une part, de contextualiser de telle sorte que les éléments clés du point de vue mathématique soient représentés ou manipulables, que l'on puisse voir/faire la division avec/dans l'illustration. D'autre part, l'inscription dans une certaine progression (marquée ici par un changement dans les nombres) exige aussi de cette illustration qu'elle soit aisément ajustable.

Ainsi, le problème de course peut être richement illustré de la manière suivante, l'illustration permettant facilement de visualiser l'opération en jeu et le résultat (voir figure 3) :

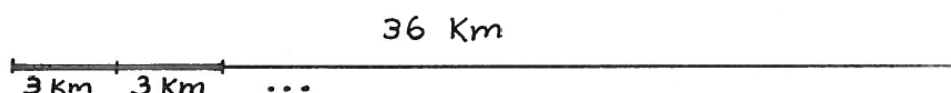


Figure 3. Illustration pour $36 \div 3$

On peut visualiser un parcours total de 36 kilomètres ainsi que la mesure de 3 kilomètres, une amorce de répétition de cette grandeur, qui permet de représenter le problème, mais aussi de travailler sa résolution. La répétition de la grandeur 3 kilomètres sur l'illustration dans le parcours global de 36 kilomètres fait bien voir le modèle conceptuel de la division sous-jacent, soit celui de groupement. Elle peut aussi se révéler utile à l'explication du quotient : « 3 kilomètres » est répété 12 fois pour atteindre 36 kilomètres, nous avons 12 fois 3 km dans 36 km.

Qui plus est, le passage de l'opération « $36 \div 3$ » à « $36 \div \frac{1}{4}$ », le point (b) de la tâche (voir figure 4), se fait assez bien. Si le problème devient « Jean parcourt chaque jour $\frac{1}{4}$ de kilomètre... », la résolution pourra par exemple s'appuyer sur les raisonnements suivants, verbalisés en contexte, mais aussi *en lien* avec celui développé avec « $36 \div 3$ » :

Si Jean parcourt quotidiennement $\frac{1}{4}$ de kilomètre (au lieu de 3 kilomètres), il parcourt quotidiennement 12 fois moins de distance. On peut constater, dans l'illustration, que le $\frac{1}{4}$ répété 12 fois pour atteindre 3 unités (figure 4), et on en déduit qu'on prendra donc 12 fois plus de temps pour parcourir la même distance : $36 \div \frac{1}{4} = (36 \div 3) \times 12$. La fécondité en lien avec les variations participe donc de manière forte à l'idée de progression discutée précédemment.

⁷ De manière plus générale, on pourrait parler du *matériel didactique* proposé afin de s'engager dans un problème (de division, par exemple). Des exemples de telles tâches référant à l'algorithme de calcul de la division sont fournies dans Bednarz *et al.* (1995).

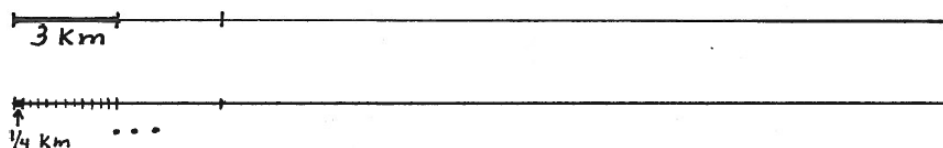


Figure 4. Passage de $36 \div 3$ à $36 \div \frac{1}{4}$

Mais elle s'incarne aussi dans la possibilité *d'utilisations alternatives* de la contextualisation pour travailler mathématiquement. Ainsi, la situation de référence et l'illustration choisie ici sont particulièrement riches en ce qu'elles permettent d'autres lectures (voir figure 5). On peut par exemple passer de (a) à (b) par un intermédiaire et raisonner ainsi : au lieu de parcourir 3 kilomètres par jour, si Jean parcourt 1 kilomètre, il parcourt 3 fois moins de kilomètres qu'en (a), et il lui faudra donc 3 fois plus de temps pour parcourir la même distance. S'il parcourt maintenant 4 fois moins de kilomètres par jour (le $\frac{1}{4}$ est ici vu comme $\frac{1}{4}$ de 1 kilomètre), il prendra 4 fois plus de temps que s'il avait parcouru 1 kilomètre par jour, d'où : $36 \div \frac{1}{4} = (36 \div 3) \times 3 \times 4$. L'illustration qui appuie ce raisonnement (figure 6) met en évidence la grandeur intermédiaire (1 kilomètre, répété 3 fois) et le $\frac{1}{4}$ (répété 4 fois dans ce 1 kilomètre) :

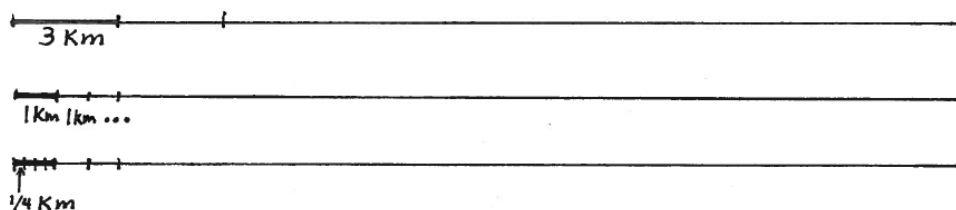


Figure 5. Passage de $36 \div 3$ à $36 \div \frac{1}{4}$ en passant par un intermédiaire

Le même type de travail peut être envisagé dans le passage à (c), avec le nombre $\frac{3}{4}$ comme diviseur. Revenant à (a), on pourrait ainsi se dire que « Si Jean parcourt une distance de $\frac{3}{4}$ kilomètres quotidiennement, il parcourt 4 fois moins de kilomètres » que s'il en faisait 3 ($\frac{3}{4}$ est vu comme $\frac{1}{4}$ de 3 kilomètres), donc ça va lui prendre 4 fois plus de temps pour parcourir la même distance : 36 divisé par $\frac{3}{4} = (36$ divisé par $3) \times 4$. Partant plutôt de (b) on pourrait raisonner (avec l'illustration, toujours) « Si Jean parcourt $\frac{3}{4}$ de kilomètre quotidiennement, il parcourt une distance 3 fois plus grande que lorsqu'il en faisait $\frac{1}{4}$ » ($\frac{3}{4}$ de kilomètre est vu comme 3 fois $\frac{1}{4}$ de kilomètre), donc ça lui prendra 3 fois moins de temps pour parcourir la même distance : 36 divisé par $\frac{3}{4} = (36$ divisé par $\frac{1}{4})$ divisé par 3.

Et il en va de même si on passe à (d) avec « $36/5 \div \frac{3}{4}$ » (p. ex., partant de (c) : « Jean doit parcourir une distance de $36/5$ km, une distance 5 fois plus petite, s'il parcourt chaque jour $\frac{3}{4}$ km, ça va lui prendre 5 fois moins de temps pour parcourir une distance 5 fois plus petite ») : $36/5$ divisés par $\frac{3}{4} = (36$ divisé par $3/4)$ divisé

par 5.

L'articulation entre ces différentes manières de voir ou de traiter le problème conduit à un travail sur le sens de la fraction (vue ici comme partie d'un tout, le tout pouvant varier selon la modélisation, par exemple $\frac{3}{4}$ peut être vu comme $\frac{1}{4}$ de 3 km ou 3 fois $\frac{1}{4}$ de km). Des nuances peuvent aussi être mises en évidence concernant les difficultés à mener à terme un raisonnement en fonction de la contextualisation choisie. Par exemple, on peut tout à fait raisonner sur la fraction $\frac{36}{5}$ en la prenant comme « 36 fois $\frac{1}{5}$ de kilomètre, ou encore 7,2 kilomètres », mais la représentation et l'anticipation du résultat deviennent alors un peu plus difficiles.

Une anticipation apparaît nécessaire de la part de l'étudiant en formation, ce dernier devant faire sens de ces variations de nombres et d'opérations sur ces nombres dans/avec l'illustration, dans la verbalisation, dans l'histoire.

3.2.3. Imbrication dans un environnement contextuel

En seconde analyse, nous pouvons voir dans l'exemple qui précède toute l'importance du jeu qui s'établit entre les différents éléments de contextualisation mobilisés dans une tâche, et qui sont imbriqués les uns aux autres :

- La formulation en mots d'un énoncé évocateur d'une certaine « histoire », accompagnant et posant le problème à résoudre, et à laquelle on pourra se référer pour donner sens à l'opération et au passage d'une expression à l'autre (c.-à-d. lorsque les nombres sont modifiés) ;
- Un modèle conceptuel de l'opération : l'étudiant en formation doit considérer, dans cette formulation en mots qu'il a produite, un modèle conceptuel (ici une division-groupement) ;
- Une illustration : il faut là aussi pouvoir reconnaître dans cette illustration un modèle conceptuel et donner sens aux transformations sur les nombres permettant de passer d'une opération à l'autre. Le travail sur l'illustration, autant dans le cas de la division sur les entiers naturels (figure 3) que dans les passages aux autres nombres (figures 4, 5), montre bien en effet comment ce modèle conceptuel de la division (groupement) est sollicité dans l'action, avec et dans l'illustration, et comment la transformation d'un nombre en un nouveau nombre est mise en évidence.
- Une verbalisation des nombres et des opérations réfère à l'histoire (action, personnages, lieu...), mais aussi à l'illustration. Connotée du point de vue de la situation et appuyée par des gestes sur l'illustration, elle permet de mettre en évidence des raisonnements clés dans les passages d'une opération sur les nombres à l'autre.

Nous parlerons en ce sens d'**environnement contextuel** plutôt que de « contexte » pour bien traduire cette imbrication de différents éléments, et qui *peut inclure* un « habillage du problème » autour d'une situation de référence. En effet, nous voyons ici s'esquisser une nuance importante concernant non seulement le « réalisme » de ces situations de référence, mais aussi leur présence même au sein d'un environnement contextuel donné. Ainsi, une situation de référence fantaisiste ou peu vraisemblable pourrait très bien, dans le cadre de la tâche présentée ici, satisfaire aux exigences en ce qui concerne la fécondité, et pour cette raison être retenue par la formatrice comme un « bon » exemple de contextualisation. D'autre part, la tâche proposée à la figure 2 s'inscrit dans une série d'activités où la référence à une situation (une histoire) n'est pas toujours présente (voir à ce sujet pour plus de détails, Bednarz, Gattuso et Mary, 1995).

Dans toutes ces tâches, *la contextualisation est pensée en fonction d'un travail dans le temps* : il s'agit en quelque sorte d'installer un terrain de familiarité et d'explorer cet environnement contextuel afin d'en percevoir ses possibilités sur le long terme. Ultimement, cette inscription dans le temps a aussi pour objectif de faire émerger la *nature générique des raisonnements* développés dans un environnement contextuel particulier (le raisonnement mené sur des nombres particuliers, connotés dans la situation, permettant par exemple de passer de 36 divisé par 3 à 36 divisé par $\frac{3}{4}$, est un raisonnement plus général).

L'aspect de la *verbalisation* se distingue également comme élément de contextualisation. Si l'environnement contextuel, avec ses différentes dimensions, peut servir d'amorce ou de motivation pour donner un sens à l'opération, c'est sa fonction comme encouragement au travail mathématique et à son développement dans le temps qui est mise de l'avant. Les verbalisations associées pour penser le passage de certains nombres à d'autres nombres sont sollicitées : différentes verbalisations de la fraction (par exemple 3/4 km est verbalisé comme $\frac{1}{4}$ de 3 km ou 3 fois $\frac{1}{4}$ de 1 kilomètre), des verbalisations de la relation entre le diviseur initial et le diviseur transformé ainsi que de son effet sur le quotient (en référence à la situation et dans/sur l'illustration) - par exemple 4 fois moins de distance parcourue quotidiennement si au lieu de parcourir 3 km, on parcourt $\frac{3}{4}$ km, donc 4 fois plus de temps pour parcourir la même distance), etc.

L'environnement contextuel tel que mis de l'avant ici vise une certaine déconstruction ou reconstruction du calcul et de façons de lui donner sens. On verbalise des raisonnements et des manipulations de façon variée, mais aussi les liens entre eux dans le passage d'une manipulation ou d'une opération à l'autre. La déconstruction passe donc par une complexification dans les manières de voir (p. ex. les opérations ou même les nombres, à travers différentes interprétations du nombre $\frac{3}{4}$ par exemple) autant que par une diversification des manières de faire (p. ex. de résoudre un problème donné).

La contextualisation n'est pas détachée des concepts en jeu et de leur analyse : elle vise à donner un sens aux concepts en **servant de support** au raisonnement, et à faire avancer conceptuellement par le jeu de déconstruction-reconstruction sollicité par les variations introduites dans l'environnement contextuel.

3.2.4. Bilan sur le second cas : quel sens prend, dans l'action, la contextualisation ? Quelle fonction ?

À la lumière de ce qui vient d'être présenté, la contextualisation qui émerge de l'étude de ce cas renvoie à :

- Différentes dimensions : une formulation accompagnant le problème référent à une histoire, des personnages, une action ; des nombres connotés dans la situation ; un modèle conceptuel ; une illustration ; une verbalisation⁸.
- Une imbrication profonde de ces différentes dimensions conduisant à des environnements contextuels dépassant de beaucoup le simple « habillage » du problème.
- Un accent mis sur la fécondité de ces environnements en fonction des variations possibles et de la diversité du travail mathématique qu'on pourrait y réaliser.
- Une dynamique pensée dans le temps, l'environnement contextuel étant appelé à bouger tout au long d'un processus (on peut parler en ce sens d'une sorte de contextualisation-recontextualisation) : des variations qui obligent à repenser cet environnement contextuel (l'histoire, l'illustration, les visualisations possibles, le matériel, les verbalisations associées).
- Une activité mathématique riche et complexe sollicitée dans ces environnements contextuels mettant en jeu une flexibilité dans l'interprétation, dans les raisonnements, dans les passages, et où la contextualisation sert de support et joue un rôle « pivot ».

L'intention de la formatrice est ici de pousser le travail sur les environnements contextuels avec les futurs enseignants le plus loin possible. Elle cherche à confronter le futur enseignant, dans l'action et le retour, à ce qu'un tel travail exige du point de vue de la préparation : une anticipation (p. ex. d'un problème en mots et d'une illustration plausibles pour tous les nombres considérés) ; une réflexion sur les choix (de situations de référence, d'illustrations, de matériel..., p. ex. sur les possibilités, les difficultés particulières, les limites) ; une reconstruction des concepts

⁸ Pourrait s'y ajouter également une dimension matérielle comme le montrent d'autres exemples exploités dans le même cours à propos de l'algorithme de division. Le travail demandé sollicitera la formulation et un recours à un matériel pour appuyer la verbalisation d'une division sur certains nombres, multibases, jetons de couleur, abaque, etc. (voir Bednarz *et al.*, 1995).

impliqués (p. ex. du sens accordé aux nombres ou à l'opération) ; une explicitation des raisonnements ou d'actions mathématiques (p. ex. pour résoudre un problème à partir d'un autre, pour passer d'une opération sur des nombres à l'autre, ou avec un matériel donné). Percevoir la richesse et la complexité des significations en jeu afin de mettre en valeur l'activité mathématique elle-même est ici fondamental. Ce n'est pas le résultat de 36 divisé par $\frac{3}{4}$ qui est intéressant, mais la multitude de manières dont on peut arriver à ce résultat de manière « parlante » à travers les éléments du contexte. Ainsi, contrairement au premier cas, c'est moins une prise de conscience des variables didactiques qui est visée que l'habileté à prendre appui sur les éléments de contextualisation pour penser le travail mathématique (par exemple, le passage d'opérations sur les nombres naturels à des opérations sur les nombres rationnels).

Les deux cas abordés jusqu'ici s'appuient essentiellement sur une analyse de pratiques de formation autour de quelques tâches. Nous proposons à la section suivante un troisième cas, que nous regarderons cette fois également à travers sa mise en œuvre auprès de futurs enseignants.

3.3 Cas 3 : Apprendre à exploiter (comme apprenant/comme enseignant) un contexte qui émerge

Au Québec, la formation des enseignants du primaire est offerte à l'intérieur de programmes de premier cycle universitaire d'une durée de quatre ans dédiés entièrement à l'éducation préscolaire et à l'enseignement au primaire. Le troisième cas est tiré du premier cours obligatoire de didactique des mathématiques que doivent suivre les futurs enseignants du primaire à l'UQAM, soit un cours de 45 heures de didactique de l'arithmétique.

Ce cas est développé autour de la division avec reste et ses algorithmes, incluant celui traditionnellement enseigné au Québec. Nous débutons par la présentation d'une tâche typique de ce qui se fait dans le cadre de cette pratique, suivie d'une analyse d'événements observés lors de sa réalisation avec un groupe d'étudiants.

3.3.1 La tâche proposée aux étudiants : un jeu de rôles autour de l'opération de division

La tâche proposée consiste en fait en un *jeu de rôles* (Lajoie et Pallascio, 2001 ; Lajoie, 2009). Ce jeu (voir figure 6) vise à travailler avec les étudiants l'intervention de l'enseignant – sur le moment – face à des erreurs liées à l'utilisation de l'algorithme traditionnel de division sur les entiers. Ce n'est toutefois pas sous cet angle que nous le développerons ici, mais davantage sous celui des contextes qui émergent en classe lorsque les étudiants abordent ce jeu de rôles.

Des élèves d'une classe de 3e cycle (10-12 ans) ont travaillé à résoudre différents problèmes impliquant des nombres rationnels, et ils font maintenant une mise en

commun de leurs résultats. On observe des erreurs mathématiques dans leur approche. Mia et Félix, par exemple, ont fourni des solutions erronées à la question :

La réponse suivante à une division a été fournie par un élève. Peux-tu trouver son erreur ?

$$18\,181 \div 9 = 22,111 \text{ reste } 1.$$

Solution de Mia : Nous avons trouvé l'erreur. Il aurait dû obtenir 2 020 reste 1/18 181.

Solution de Félix : Nous avons trouvé l'erreur. Il aurait dû obtenir 2 020 reste 0,111...

Un enseignant/acteur (choisi pour le jeu de rôles) aura quelques minutes pour amener un élève/acteur (choisi pour le jeu de rôles) à résoudre correctement le problème précédent tout en partant de la démarche de l'élève/acteur, en construisant à partir de sa manière de concevoir le problème et non en repartant à zéro.

Figure 6. Une tâche de jeu de rôles proposée aux futurs enseignants du primaire

Cette tâche est présentée aux étudiants du cours de didactique de l'arithmétique au primaire après qu'on leur ait demandé de lire à la maison un texte de G. Boulet (1998) portant sur la division. L'intention de la formatrice en proposant cette lecture préalable au jeu de rôles est de sensibiliser les étudiants au fait que (a) la division est un concept complexe à ne pas confondre avec celui d'algorithme de division, que (b) deux modèles conceptuels peuvent intervenir quand il est question de division. Elle souhaite aussi qu'ils réalisent que (c) il est possible, et même avantageux, lorsqu'on introduit un algorithme de division, de verbaliser chacune des étapes en cohérence avec un contexte donné, plutôt que de manière détachée ou incohérente avec celui-ci. En effet, l'article confronte les étudiants à certaines incohérences entre la verbalisation routinière de l'algorithme traditionnellement enseigné au Québec et les contextes sur lesquels on a tendance à s'appuyer, comme enseignants, pour enseigner la division. L'auteure mentionne ainsi que de futurs enseignants à qui on demande de créer une « mise en situation adéquate » qui permet de donner du sens à l'algorithme fournissent généralement un problème de division-partage (impliquant par exemple le partage équitable de pommes entre un certain nombre de personnes), alors qu'ils verbalisent l'algorithme en utilisant plutôt un langage faisant appel au modèle groupement. Ainsi, le calcul suivant (figure 7), accompagné d'une mise en situation dans laquelle on demande « Combien de pommes Marie devra donner à chacun de ses 12 invités sachant qu'elle a 715 pommes », s'accompagne généralement d'expressions telles que : « combien de 12 rentrent dans 71 ? » ou encore « 12 va 5 fois dans 71 ».

$$\begin{array}{r}
 715 \overline{) 12} \\
 \underline{60} 59 \text{ r } 7 \\
 115 \\
 \underline{108} \\
 7
 \end{array}$$

Figure 7. Une variante de l'algorithme de division (tiré de Boulet, 1998, p. 17)

Cela dit, la tâche de jeu de rôles proposée aux étudiants ne fait pas mention explicite de ce texte, ni des enjeux auxquels on a voulu les sensibiliser (voir figure 7). On remarque aussi que, contrairement aux deux premiers cas rapportés, la tâche ne fait pas appel à une contextualisation par rapport à une situation de référence ou à un matériel didactique, et qu'il n'est pas non plus question d'un modèle conceptuel sur lequel l'opération pourrait s'appuyer. Certaines dimensions de contextualisation sont tout de même présentes dans la tâche : les nombres impliqués dans la division n'ont rien d'anodin et les erreurs commises par Mia et Félix (figure 6) sont exprimées sous des formes qui résultent d'un choix de la formatrice. Les nombres retenus pour le diviseur et le dividende ont pour fonction d'amener les étudiants à explorer et à se questionner sur la division avec reste et les erreurs fournies ont été choisies de manière à ce qu'au cours de son intervention l'enseignant puisse difficilement se contenter d'exprimer le reste sous la forme d'un entier (soit ici $18\,181 \div 9 = 2\,020$ reste 1), étant plutôt guidé vers un développement du quotient sous une forme décimale ou fractionnaire ($18\,181,111\,1\dots$ ou $18\,181$ et $1/9$). On réalise avec ceci que ce ne sont pas simplement les nombres impliqués qui participent à l'élaboration d'un environnement contextuel, mais aussi la forme d'écriture de ces nombres. Se dégage aussi peu à peu, comme nous le verrons plus loin, l'idée selon laquelle un algorithme peut lui aussi devenir l'élément central d'une contextualisation, au même titre qu'un matériel de manipulation ou une situation de référence

3.3.2 Engagement dans la tâche : une incursion dans des données de recherche

Nous souhaitons, pour la suite de l'analyse de ce cas, nous concentrer davantage sur les dimensions du contexte qui émergent du travail des étudiants. Nous avons choisi de reprendre des données de recherches, qui ont déjà été analysées sous un autre angle dans Lajoie et Maheux (2013), afin d'illustrer la construction d'une contextualisation n'ayant pas été explicitement sollicitée par la formatrice ou par la tâche, et analyser la manière dont ce contexte est exploité dans l'action.

L'extrait suivant, qui s'accompagne du calcul présenté à la figure 8, met en scène Dominique, une future enseignante jouant ici le rôle d'une élève devant expliquer

ce qui l'amène à croire que le quotient recherché est « 2 020 reste 1/18 181 » (la solution de Mia, figure 6). Dans cet extrait, l'élève Dominique introduit d'elle-même une idée de *partage* de bonbons entre 9 amis, une situation de référence qu'elle évoquera tout au long de son travail sur l'algorithme.

Dominique : Donc, ici je veux diviser un bonbon en 9 amis, j'peux pas. J'vais descendre mon 1 et mon 8, maintenant j'ai 18 bonbons en 9 amis; ils vont en avoir 2 chaque. J'vais faire la soustraction. Ensuite, je descends mon 1. Si j'veux diviser un bonbon encore, comme tantôt, en 9 amis... ben j'ai mis un 0 là, ben j'vais en mettre un là. Je vais descendre mon 8. Si j'veux diviser mon 18 bonbons en 9 amis, ils vont en avoir 2 chaque encore. $18 - 18 = 0$. Il me reste 1 à descendre. Si j'veux diviser 1 bonbon en 9 amis, ça (ne) marche pas [elle ajoute un 0 à son quotient]. Pis en fait, tu peux pas le diviser encore donc le 1... il me reste 1 bonbon à diviser sur 18 181. Reste 1 bonbon à diviser sur heu... [elle ajoute le mot « reste » entre 02 020 et 1/18 181]

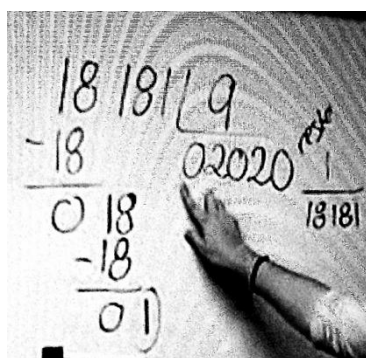


Figure 8. Calcul réalisé par Dominique au tableau

Des éléments de contextualisation qui se superposent

Il est difficile de savoir pourquoi Dominique introduit ici un partage de bonbons entre amis. Est-ce en relation avec la lecture qu'elle a faite de Boulet (1998) ? Est-ce dans le but d'ancrer sa verbalisation de l'algorithme ? Quoi qu'il en soit, cet élément de contextualisation ne semble pas jouer un rôle déterminant dans la verbalisation qui l'accompagne, soit un discours en apparence routinier et portant essentiellement sur les chiffres (les symboles) en présence. En effet, on ne peut pas dire que Dominique s'appuie de manière très éloquente sur la situation de référence que présente le partage de 18 181 bonbons entre 9 personnes pour faire sens de la division avec l'algorithme. Une lecture attentive de sa verbalisation révèle en fait plusieurs dimensions de l'environnement contextuel en jeu dans cette verbalisation qui parfois se complètent, parfois se superposent tout simplement : on se retrouve à la fois dans un contexte général de *partage*, mais aussi dans un contexte plus particulier de *partage de bonbons*, tout en étant plongé dans un contexte *algorithmique*.

Le modèle conceptuel de la division-partage « colle bien » avec l'idée de répartition de bonbons, et la verbalisation est aussi assez cohérente avec ce modèle (c'est du moins ce que suggère l'emploi de l'expression « divisé en » plutôt que « divisé par »). Par contre, s'il n'y a pas de contradiction évidente, on voit tout de même très peu intervenir la situation de référence dans le raisonnement sur l'algorithme, les deux semblant fonctionner de manière indépendante. Dominée par la dimension algorithmique, la verbalisation devient problématique lorsque, par exemple, les quantités de bonbons ne collent pas à la valeur du dividende (plutôt que 18 bonbons à la première étape il faudrait parler de 18 000 bonbons). Il y a aussi plusieurs étapes qui sont verbalisées sans qu'il leur soit donné un sens en lien avec le partage de bonbons (que signifie « descendre mon 1 » ?). Ainsi, l'histoire évoquée, soit le partage de bonbons, apparaît plutôt accessoire puisque ni le raisonnement de l'élève ni sa verbalisation ne semblent s'y appuyer, du moins à cette étape. Cette distance nous conduit donc à nuancer l'idée d'imbrication discutée au cas précédent. L'idée d'une distribution de bonbons est pour ainsi dire occultée par la dimension algorithmique où l'action de « descendre 1 » prend tout son sens.

Cette étape du jeu de rôles a le potentiel de mettre les futurs enseignants au défi de soutenir un raisonnement et une verbalisation par des éléments de contextualisation qui émergent naturellement dans l'action. En effet, si l'imbrication des différentes dimensions d'une contextualisation semble aller de soi lorsque celle-ci est le fruit d'une analyse didactique préalable, comme on a pu le voir dans le deuxième cas, cette articulation présente un défi de taille lorsque certains de ses éléments sont décidés dans l'action. Si l'article de Boulet pouvait déjà sensibiliser les futurs enseignants à cette question, vivre (pour ceux qui jouent) ou même observer (pour ceux qui assistent) l'importance de cette imbrication est tout autre chose.

Émergence, enrichissement et raffinement, dans l'action, d'un environnement contextuel susceptible d'appuyer l'intervention

À la suite de l'explication de « l'élève » Dominique, Justine, qui joue le rôle de l'enseignante, est plongée dans une contextualisation dont certaines dimensions ont été introduites par l'élève : en particulier le modèle partage de la division, et le fait que ce partage se fasse sur un certain nombre de bonbons avec un certain nombre de personnes. L'enseignante Justine a donc ici une occasion de tirer profit de la contextualisation en émergence pour appuyer son intervention auprès de Dominique. Elle pourrait par exemple tirer profit du contexte de partage de bonbons pour :

- Amener l'élève Dominique à réaliser qu'elle commet une erreur dans l'expression du reste, par exemple en abordant sa manière d'interpréter le reste ou son écriture;

- Verbaliser ou illustrer (ou amener l'élève à le faire) les étapes de l'algorithme jusqu'à l'obtention du quotient, par exemple, en se demandant à chaque étape combien (de milliers, de centaines, de dizaines...) de bonbons recevra chacune des 9 personnes.
- Amener l'élève à exprimer le reste sous forme fractionnaire (*) ou décimale, à interpréter une période (dans le quotient exprimé sous forme décimale);

Au cours de son intervention, Justine propose plutôt de modifier la situation de référence en changeant les bonbons pour des chocolats, la rendant peut-être mieux adaptée au travail de partage du reste. Il est en effet plus facile d'imaginer le partage d'une tablette de chocolat en 9 parties égales que celui d'un bonbon ! Ce faisant, l'enseignante Justine reste donc essentiellement dans la contextualisation proposée et, nous allons le voir, la développe en y ajoutant une illustration, et une verbalisation contextualisée, du travail sur le reste (en partie reprise par Dominique). L'imbrication de différents éléments de l'environnement contextuel se met donc peu à peu en place, structurant la verbalisation, et soutenant les raisonnements de l'élève Dominique et de son enseignante Justine :

Justine : Ok. Par 9 personnes. Donc, s'il me reste une barre de chocolat, pis j'veux pu qui m'en reste. Moi, j'veux pu rien avoir, j'veux tout distribuer ; je suis très généreuse. J'veux pu qui m'en reste. Par quoi j'pourrais diviser ma barre de chocolat ?

Dominique : Ben... heu... j'vais la séparer en 9 parties, pour en donner une à chaque personne.

Justine : Une à chaque ami. C'est vrai. Donc, si on illustre ça, c'est comme si tu disais 1 à 9. (Frédérique : Ouais) Comment j'pourrais l'illustrer ? Est-ce que je pourrais l'illustrer...

Dominique : Ben j'ai une barre de chocolat là, je la divise en 9... en parties égales. [Elle dessine une barre de chocolat de forme rectangulaire au tableau et la divise en 9, soit en 3 rangées et 3 colonnes]

Justine : Ouais. Donc, j'aurais... il m'en reste une... donc une partie... [Justine pointe avec insistance une des neuf parties de la barre, à la suite de quoi Frédérique hachure cette partie] ... sur 9. Ok donc, on pourrait illustrer ça sous forme de fraction...

Dominique : Ouais

Justine : Qui serait ?

Dominique : 1 sur 9 [Elle l'écrit au tableau]

Justine : Donc, comme je ne veux plus qu'il m'en reste, chaque personne va avoir 2 020 barres de chocolat et un morceau sur la dernière barre qu'il me reste.

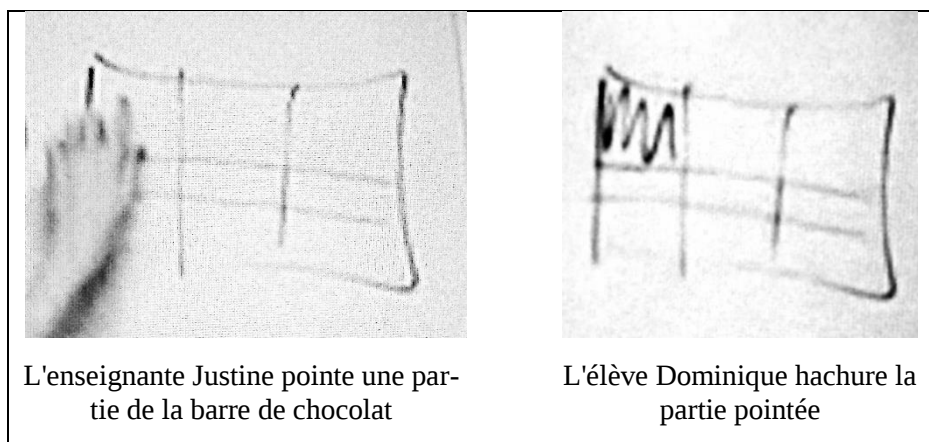


Figure 9. Introduction par Justine d'une illustration dans l'environnement contextuel

On constate que la verbalisation de Justine s'articule aux autres éléments de la contextualisation, en particulier à la situation de référence évoquée et à l'illustration qu'elle trace au tableau (figure 9). Le travail semble néanmoins par moments hasardeux : à la fin de l'échange, l'enseignante Justine paraît confondre ce qu'il reste suite au partage de 1 9191 barres en 9 (soit une barre) avec la partie de la barre qu'elle donnera à chacun suite au partage de ce reste (soit un neuvième). Comme si elle prenait conscience de cette confusion, elle reprend sa verbalisation lors du dernier énoncé (« chaque personne va avoir 2 020 barres de chocolat et un morceau sur la dernière barre qu'il me reste »). On peut penser que l'illustration ajoutée au problème est pour quelque chose dans cette prise de conscience : c'est bien *le reste* qui été représenté et partagé, et l'environnement contextuel *en garde la trace*.

Du point de vue de l'action, le côté vivant de la contextualisation joue donc de manière particulière sur différents niveaux. D'une part, cette contextualisation se transforme, se développe et se raffine, les ajustements successifs pouvant permettre une meilleure imbrication des éléments qui la composent. On constate aussi que cette évolution est elle-même « contextualisée » au sens où elle se fait en fonction de ce qui devient le point d'intérêt du travail en cours. Ici, les étudiantes ne sont pas revenues sur l'utilisation de l'algorithme, satisfaites de travailler au niveau du reste, soit au niveau de l'élément qui posait problème de manière peut-être plus évidente. Enfin, on retiendra la fonction de mémoire de certains éléments de l'environnement contextuel, qui peuvent contribuer à faire sens des idées en jeux.

Une discussion très riche pourrait aussi avoir lieu ici concernant la préservation et la transformation d'une contextualisation donnée. L'ajout de marques sur l'illustration (figure 9) ne constitue-t-il pas lui-même un enrichissement ? Une con-

et Dominique semblent rapidement se trouver dans une impasse, toutes deux face à un résultat qui les laisse coites, jusqu'à l'intervention de la formatrice qui revient avec elles sur le modèle partage de la division :

Formatrice : Dans un de mes groupes, quand l'élève est arrivé à son reste 1 [figure 10] il s'est passé quelque chose d'intéressant... quelque chose d'imprévu surtout aux yeux de l'enseignante : l'élève a partagé son reste en 10 plutôt qu'en 9 ! Qu'est-ce que vous en pensez ?

Une discussion s'enclenche alors et la classe est amenée à voir le fait que le fractionnement en dix du morceau qui reste permet de distribuer de manière récursive un morceau (à chaque fois de plus en plus petit) à chacune des 9 personnes : $1/10$, puis $1/100$, puis $1/1\,000$, etc., ce qui permet d'écrire la part de chacun sous forme décimale ($18\,181 \div 9 = 2\,020,111\dots$). La conversation avec le groupe s'est poursuivie encore un peu plus loin, amenant les étudiants à reconnaître des égalités surprenantes telles que « $1/9 = 1/10 + 1/100 + 1/1\,000 + \dots$ » ou encore « $1 = 0,999\,99\dots$ ». À cette étape, l'intention rapportée par la formatrice est d'amener les étudiants à percevoir la richesse d'un contexte *a priori* très simple ... les amener à voir jusqu'où on peut aller dans l'enseignement du concept de division en s'appuyant sur le modèle partage.

Évidemment, il ne s'agit pas de dire que la recontextualisation proposée par Justine est « mauvaise » en soi. Un travail signifiant *sur l'algorithme* lui-même aurait probablement pu conduire à une prise de conscience par rapport à la difficulté en cours, par exemple en identifiant la position des unités, dixièmes, centièmes. De même, se pencher *sur les nombres* n'est pas non plus sans possibilité : par exemple, obtenir le résultat « $100 \div 90 = 1$ reste 1 » pour ensuite raisonner sur ce qui est attendu de $1 \div 9$, soit un quotient et un reste dix fois plus petits. Par contre, on constate un éloignement graduel par rapport au travail précédent qui, naturellement, rend de plus en plus exigeant le retour aux contextualisations antérieures et à l'utilisation des traces laissées par ce travail. Ainsi, non seulement transformer un environnement contextuel pour avancer dans le travail mathématique ne va pas de soi, mais ces transformations peuvent aussi conduire à une sorte « d'égarement contextuel », un passage où on ne parvient plus à mettre en relation les différents éléments en présence de manières signifiantes, si bien que, devant cette confusion, on se trouve pour ainsi dire sans mots, ne sachant plus « de quoi on parle ». *Développer une certaine aisance à faire (re-)émerger dans l'action un environnement contextuel productif à partir des éléments en présence* est un enjeu de formation de taille dont, par cette analyse, nous commençons tout juste à prendre conscience.

Enfin, notons que l'anecdote proposée par la formatrice dans le dernier extrait a aussi pour effet de ramener dans la conversation la question du réalisme de la réf-

rence à une situation du quotidien. Immanquablement, les étudiants réagissent au partage récurrent en 10 parties d'une tablette de chocolat en soulignant que « dans la vraie vie, on ne va pas séparer une tablette en 10 pour la partager entre 9 personnes » et que « dans la vraie vie, le fractionnement du reste en 10 s'arrêterait un jour ; on ne ferait pas un partage à l'infini ». Cet aspect est alors repris sous l'angle des *limites nécessairement associées à une contextualisation*. Il est alors important pour la formatrice de souligner qu'en effet, aucune situation de référence, ni aucun environnement contextuel, ne permet de « couvrir » l'ensemble des possibilités mathématiques qui peuvent intervenir (par exemple : la division par 0 et le travail sur l'infini mathématique – voir à ce sujet Lajoie et Mura, 1994). Il y a en ce sens un intérêt à *pouvoir se détacher* d'une contextualisation donnée, passer de l'une à l'autre, et ainsi de suite.

3.3.3 Bilan sur le troisième cas : quel sens émerge de ce travail sur la contextualisation par les futurs enseignants ? Quelle fonction ?

Dans ce qui précède, nous avons examiné les contextualisations qui émergent sur le vif dans le travail d'étudiants en formation des maîtres. Les deux grands modèles conceptuels de l'opération ont été spontanément évoqués, de même que le recours à une situation de référence et à une certaine illustration (comme dans le deuxième cas). Nous avons aussi introduit l'idée d'algorithme comme élément de contextualisation en plus du travail sur les nombres comme tels. L'analyse fait ressortir que ces différentes dimensions se superposent dans l'action sans nécessairement être articulées entre elles. L'accent a surtout été mis cependant sur le défi de mettre en œuvre de manière productive ces environnements contextuels, de les transformer, de les enrichir et de faire usage, en même temps, des traces en présence. En même temps, nous avons vu que l'action « dans » et « avec » une contextualisation ne va pas sans le risque, la possibilité et la nécessité d'un certain détachement. Pour nous, une certaine familiarité avec les idées mathématiques en jeu est sans aucun doute un aspect important dans le développement de cette aisance et il nous apparaît essentiel de favoriser cette familiarité en formation *en même temps* que des compétences plus « didactiques » liées au travail éventuel avec les élèves.

4. Discussion

À travers ce qui précède, dégager un sens à « contextualiser » se révèle une entreprise d'autant plus riche et nuancée qu'elle s'articule sur trois différents exemples de pratiques de formation dont nous avons cherché à reconstruire le récit. Un premier regard transversal sur ces exemples évoque tout d'abord des façons différentes d'approcher la contextualisation. Dans le premier cas, les futurs enseignants sont appelés à **travailler avec des contextes** et leurs éléments, un travail guidé par une préoccupation de la formatrice envers un choix éclairé de situations, que Vergnaud (2002) considère comme le « premier acte de médiation ». L'idée de **travailler en contexte** en exploitant à fond un environnement contextuel est davantage au cœur du deuxième cas, le souci de la formatrice étant alors de jouer sur le potentiel d'un tel environnement sur un long terme, de même que sur l'explicitation concernant l'exigence d'un tel travail. Avec ce cas, on se rapproche des travaux en cognition située. À titre d'exemple, des parallèles intéressants pourraient être faits avec la conceptualisation de l'instrument chez Rabardel (1995). Dans le troisième cas, c'est plus la métaphore de « **bricolage d'un contexte** », **sur le coup**, qui nous vient en tête en réaction à un événement qui se produit dans la classe, une idée qu'on retrouve dans de nombreux travaux autour des situations d'enseignement (dans Vergnaud (2002) et Rogalski (2003) par exemple). Ces travaux, développés pour parler de la classe, auraient donc également du potentiel du point de vue de l'analyse des dispositifs de formation des maîtres.

Qu'il s'agisse de l'un ou l'autre aspect, nous touchons là à des composantes essentielles, et complémentaires, de la pratique des enseignants. Ceux-ci sont en effet appelés, en amont du travail en classe, à choisir des situations appropriées pour aborder un contenu donné avec les élèves ou encore à concevoir une progression sur le long terme. Travailler « avec les contextes », ou « en contexte », s'attaque à ce travail essentiel de conception de l'enseignant, lié à la planification de son enseignement, ou d'anticipation de ce qui pourrait arriver avec les élèves. Dans le travail en classe, toutefois, l'enseignant doit aussi, et même surtout, réagir sur le moment, dans l'action, aux propos, aux erreurs et aux productions des élèves. Nous sommes alors sans doute plus près de l'idée d'un contexte bricolé, « sur le tas », de manière à rejoindre à la fois l'élève et le contenu abordé dans le cours. À travers ces différents moments, les exigences au regard de l'utilisation de contextes ne sont pas nécessairement les mêmes, et les exemples présentés soulignent à leur façon les différences dans les manières d'aborder ce travail avec les futurs enseignants.

Des nuances importantes émergent également de l'analyse des trois cas autour de la contextualisation. En voici quelques éléments.

Une première conceptualisation se présente en termes de problème « à contexte »

dans lequel l'opération mathématique apparaît comme une modélisation d'une situation de référence plus ou moins réaliste. Cette conceptualisation se complexifie par la prise en compte des modèles conceptuels sollicités, des nombres en jeux et de leurs rôles. Ces éléments montrent bien la dimension didactique de nos réflexions comme formateurs, celles-ci étant ancrées dans une analyse liée aux mathématiques, à leur apprentissage et à leur enseignement. Ces éléments peuvent être considérés comme contextes (conceptuels, numériques) pour l'opération qui nous intéresse, leur coordination dans ou avec la situation de référence contribuant à faire du travail de composition de problèmes une activité riche du point de vue de la formation. Cette richesse émerge, tout particulièrement à ce stade, du croisement entre, d'une part, une demande du PFEQ (programme de formation de l'école québécoise) à plonger les élèves dans des situations « proches de la vie réelle » et, d'autre part, une analyse didactique révélant des insuffisances du côté des problèmes tirés des manuels scolaires (concernant par exemple les modèles conceptuels de l'opération qui y sont sollicités ou encore le type de nombres en jeu). Un enjeu important apparaît concernant le développement d'un regard critique par cet enseignant face à cette « commande » institutionnelle. Cet enjeu n'est pas spécifiquement lié à la contextualisation, mais il prend prétexte d'une certaine manière de la contextualisation pour être mis en lumière. Une analyse de ceci du point de vue ergonomique de Rogalski (2003) serait particulièrement pertinente dans l'analyse des tensions en présence.

Un second regard sur l'idée de contexte a mis l'accent sur l'idée de progression à travers des contextualisations aux exigences variables où on parle plus justement d'un travail « en contexte » sur l'opération, par exemple en faisant appel au matériel didactique ou à la verbalisation. Penser alors en matière d'environnements contextuels permet d'intégrer ces éléments (matériels, communicationnels) à ceux précédemment identifiés (aspects référentiels, conceptuels, numériques), et de mettre en valeur l'imbrication profonde de ces composantes dans le travail mathématique. C'est alors la fécondité du point de vue du sens qui apparaît comme l'élément central, avec ses variations possibles et son développement potentiel dans le temps. Ces mouvements font apparaître de manière vivante un enjeu pour la formation, soit celui de contextualiser et recontextualiser sous un angle où la formulation de problèmes à contexte n'est qu'une possibilité parmi d'autres. Une attention grandissante portée sur le travail mathématique envisagé nous conduit à voir l'environnement contextuel en tant que support (au raisonnement, par exemple). L'enjeu de formation est alors pour nous du côté du développement d'une habileté à prendre appui sur les éléments de contextualisation pour penser l'activité mathématique. Les travaux en théorie de l'instrumentation évoqués plus haut (Rabardel, 1995) pourraient enrichir cette analyse du point de vue du potentiel pour l'action.

Notre troisième cas a été l'occasion d'examiner le travail de contextualisation

d'étudiants en formation où le côté dynamique des environnements contextuels se manifeste de manière très fine. Contextualiser se révèle alors en tant que mouvement continu de mise à contribution de différents éléments, de raffinement, d'enrichissement, de complexification ou de simplification d'un environnement contextuel. Le travail mathématique prend forme, s'inscrit, s'écrit dans/avec différentes traces qui composent alors un « texte » d'où l'on cherche à dégager une certaine cohérence (le mot contexte vient du latin *com*, 'avec, ensemble' et *texere*, 'faire, tisser'). Celle-ci peut être envisagée de différents points de vue : du côté mathématique, extra-mathématique, ou dans cette zone un peu floue qui les réunit, où on cherche à faire sens mathématiquement d'observations du quotidien (le partage de bonbons ou de barres de chocolat) ou à faire sens en regard du quotidien de phénomènes mathématiques (le fonctionnement d'un algorithme). Les nécessaires va-et-vient et la perméabilité entre différents points de vue dans l'action font apparaître le défi inhérent posé par le jeu d'ouverture et de contrainte au cœur de la contextualisation elle-même, dont les possibilités d'action et les limites débordent toujours, dans l'action, l'analyse que l'on peut en faire *a priori*. Ceci nous amène à mettre en évidence un enjeu pour la formation, soit le développement d'une capacité à improviser, à réagir sur le vif par rapport à la fécondité d'une contextualisation en émergence où l'on souhaite pouvoir aussi bien se détacher que se rattacher à différents aspects. C'est le défi de développer une certaine aisance à faire (re)-émerger, dans l'action, un environnement contextuel porteur à partir des éléments en présence. Des travaux récents autour de l'improvisation pourraient fournir ici des pistes intéressantes afin d'approfondir cet aspect (p. ex. Holdhus *et al.*, 2016).

Des éléments des contextes traversent les trois cas, notamment les modèles conceptuels de l'opération et les aspects numériques, qui constituent des points d'ancrage au travail fait avec les étudiants. Là encore, des nuances émergent de cette analyse. Une posture analytique sous-tend le travail mené avec les contextes dans le premier cas. La formatrice cherche à isoler les différents modèles conceptuels, les nombres en jeu (leur nature, leur statut, la grandeur relative du diviseur par rapport au dividende, etc.), de manière à ce que l'enseignant développe une sensibilité à la complexité des éléments en jeu et à ce qu'il puisse éventuellement prendre appui sur cette analyse pour faire des choix adéquats. Dans le deuxième cas, la limite d'un certain modèle conceptuel émerge et conduit à passer à un autre modèle plus approprié aux opérations qu'on cherche à aborder, en cernant la fécondité d'un tel modèle. C'est aussi davantage dans le passage et la transformation d'un nombre à l'autre que se joue le développement recherché. C'est ici le jeu d'un modèle à l'autre, d'un nombre à l'autre, qui constitue le point d'ancrage au travail des futurs enseignants. Dans le troisième cas, le modèle conceptuel mis en œuvre par les étudiants de manière émergente est vivant ; implicitement, on passe d'un modèle à l'autre sans en être conscient, sans s'en rendre compte. C'est ce même jeu qu'on retrouve dans le travail sur les nombres ; on passe du travail sur des nombres à un

travail sur des quantités de palettes de chocolat ou de bonbons sans nécessairement en être conscient. Un certain chevauchement et une certaine ambiguïté dans l'action caractérisent cette contextualisation émergente qui sert de point d'ancrage pour rejoindre l'élève, pour dépasser l'erreur, mais aussi pour rejoindre l'idée mathématique en jeu (ici l'algorithme de division). L'enseignant s'ancre dans ce contexte, avance, crée en quelque sorte un certain modèle conceptuel. Cette émergence dynamique peut être vue comme un apport potentiel aux travaux sur les champs conceptuels (p. ex. Vergnaud, 2002).

Enfin, d'autres aspects ressortent des deuxième et troisième cas, le contexte n'étant pas limité dans ces cas au modèle conceptuel, au jeu sur les nombres ou à une histoire de référence. En effet, dans ces deux autres cas, le contexte renvoie également à un matériel, une illustration, une verbalisation. L'imbrication forte des différents éléments est sans doute caractéristique du caractère fécond de cet environnement contextuel, point d'ancrage possible d'une activité mathématique. Or, le troisième cas permet de montrer que cette imbrication en action ne va pas de soi. On assiste plutôt dans ce cas à des chevauchements de l'un et de l'autre dans le temps. Notons aussi que si le réalisme du contexte est un enjeu important dans le premier cas, de manière à ce que celui-ci puisse être parlant pour les élèves (pour qu'ils y raccrochent un sens au regard de ce qu'ils savent faire, voir le texte de Boaler, 1993), c'est davantage l'idée d'installer un terrain de familiarité qui sous-tend le travail en contexte mené sur la division dans le deuxième cas. On cherche ici en effet à ce que des analogies puissent se faire, à ce qu'un pont possible s'installe entre ce que l'on fait sur une division avec des nombres spécifiques et d'autres. En ce sens, on peut parler dans les deux premiers cas de situations de référence parlantes, imaginables. Dans le dernier cas, à l'image d'une improvisation que construit l'enseignant sur le moment, le contexte devient concevable, capable d'être saisi, puis travaillé.

5. Conclusion

L'analyse de la notion de contexte dans ces pratiques de formation nous a conduits à une complexification graduelle de l'idée de contextualisation par laquelle, loin d'épuiser la question, nous nous trouvons plutôt à la créer, pour ainsi dire, à l'exploser (Skovsmose, 2012). Ainsi, si le recours aux contextes apparaît d'emblée comme un point essentiel dans le travail et la formation de l'enseignant de mathématiques, ce *point* prend rapidement texture et dimension, devenant un objet aux détails complexes. Mais voici bientôt que cet objet se met en mouvement et ne nous intéresse plus seulement en raison de ses propriétés propres, mais aussi du point de vue du pouvoir d'action qu'il révèle : ce qu'on peut en faire, et tout particulièrement en ce qui a trait au mouvement qu'on peut lui associer. Nous sommes donc en présence d'un objet non statique et, pour ainsi dire, à géométrie variable.

Enfin, nous rapprochant de situations où cette contextualisation est effectivement rencontrée, nous réalisons que cette mobilité et ces complications ne sont pas simplement celles d'une mécanique très fine, mais l'animation et la complexité même du vivant, où l'imbrication d'une multitude d'éléments ressemble plutôt aux évolutions d'un organisme en interaction constante avec des écosystèmes auxquels il participe.

En introduction, nous avons évoqué plusieurs travaux autour de la notion de contexte, parmi lesquels des divergences sur le plan épistémologique peuvent être devinées. En distinguant le travail « avec » des contextes du travail « en contexte » et du travail de « contextualisation », on comprend mieux où se situent ces différents travaux, et les nuances qui peuvent être faites concernant leurs apports. Nous avons mis l'accent sur le potentiel de la contextualisation à l'égard de l'activité mathématique elle-même, en faisant voir des enjeux du point de vue mathématique. C'est cette dimension qui nous intéresse particulièrement. Maintenant que nous l'avons mise en évidence, nous la reconnaissons dans les travaux de chercheurs qui nous ont précédés. Nous pensons ici par exemple aux travaux de Lave (1988), Boaler (1993) et Noss (2002), qui ont permis de faire des nuances concernant l'utilité des contextes hors de la classe. Nous pensons aussi à ceux de Gravemeijer et Doorman (1999), Webb (1984) et Van den Heuvel-Panhuizen (2003), qui ont porté de différentes manières sur le potentiel des contextes du point de vue mathématique, de même qu'à ceux de Cotnoir (2010) et Corriveau (2013), qui ont abordé la question de l'intérêt de certains contextes en tant que ressources pour les enseignants. Cependant, malgré les efforts de conceptualisation des uns et des autres, il nous apparaît que la question des contextes n'est pas encore tout à fait réglée ...

Quand Jacques Derrida (1971) note « l'insuffisance théorique du concept courant de contexte [...] tel qu'il est reçu dans de nombreux domaines de recherche, avec tous les concepts auxquels il est systématiquement associé », il évoque la manière dont tout énoncé, toute proposition, est dans un rapport à une « réalité », se produit dans un mouvement sans fin de contextualisation et de recontextualisation, où le « sens propre paraît plus problématique que jamais » (p. 2). D'une certaine manière, parler de contextualisation n'est pas simple, en partie parce que nous sommes toujours « en contexte », et que chacune de nos propositions (mathématique, didactique, etc.) est à la fois contextualisée et contextualisante. Les différentes dimensions du travail de contextualisation mises en lumière ici nous informent sur les rôles que nous faisons jouer à ces mouvements au fil de la formation à l'enseignement des mathématiques dans nos programmes. Même si elle est loin d'être exhaustive, cette analyse permet de repousser les frontières du connu en matière de contextualisation.

Bibliographie

- ALTET, M. (2002). Une démarche de recherche sur la pratique enseignante : l'analyse plurielle. *Revue française de pédagogie*, **138**, 85-93.
- BALL, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, **21**, 132-144.
- BEDNARZ, N. (2001). Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas de l'Université du Québec à Montréal. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, **1(1)**, 61-80.
- BEDNARZ, N., GATTUSO, L. & MARY, C. (1995). Formation à l'intervention d'un futur enseignant en mathématiques au secondaire. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec*, **35(1)**, 17-30.
- BLAIS, M. & MARTINEAU, S. (2006). L'analyse inductive générale : description d'une démarche visant à donner un sens à des données brutes. *Recherches qualitatives*, **26(2)**, 1-18.
- BOALER, J. (1993). The Role of Contexts in the Mathematics Classroom: Do They Make Mathematics More « Real »? *For the Learning of Mathematics*, **13(2)**, 12-17.
- BOULET, G. (1998). La nature dichotomique de la division : une analyse didactique. *Bulletin de l'AMQ*, **38(2)**, 14-22.
- COTNOIR, G. (2010). *Évolution de l'utilisation des contextes dans les chapitres introductifs à l'algèbre dans les manuels scolaires québécois de 1960 à nos jours*. Mémoire de maîtrise en éducation, Université de Sherbrooke.
- COOPER, B. & HARRIES, T. (2002). Children's responses to contrasting « realistic » mathematics problems: Just how realistic are children ready to be? *Educational Studies in Mathematics*, **49(1)**, 1-23.
- CORRIVEAU, C. (2013). *Des manières de faire des mathématiques comme enseignants abordées dans une perspective ethnométhodologique pour explorer la transition secondaire-collégial*. Thèse de doctorat en éducation, Université du Québec à Montréal.
- DENZIN, N. (1989). *Interpretative Interactionism*. London : Sage.
- DERRIDA, J. (1971). Signature, événement, contexte. Communication au Congrès international des Sociétés de philosophie de langue française (Montréal, août 1971). <http://laboratoirefig.fr/wp-content/uploads/2016/04/SIGNATURE.pdf>
- FISCHBEIN, E., DERI, M., NELLO, M. & MARINO, M. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, **16**, 3-17.

GRAEBER, A., TIROSH, D. & GLOVER, R. (1986). Preservice teachers' beliefs and performance on measurement and partitive division problems. Dans G. Lappan et R. Even (dir.), *Proceedings of the Eighth Annual Psychology of Mathematics Education-North America Conference* (262-267). East Lansing, MI.

GRAVEMEIJER, K. & DOORMAN, M. (1999). Context problems in Realistic Mathematics Education: A calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, **39**(1-3), 111-129.

HOLDHUS, K., HØISÆTER, S., MÆLAND, K., VANGSNES, V., ENGELSEN, K. S., ESPELAND, M., & ESPELAND, Å. (2016). Improvisation in teaching and education—roots and applications. *Cogent Education*, **3**(1), 1-17.

HOUGH, S. & GOUGH, S. (2007). Realistic Mathematics Education. *Mathematics Teaching Incorporating Micromath*, **203**, 34-38.

LAJOIE, C. (2009). Les jeux de rôles : une place de choix dans la formation des maîtres du primaire en mathématiques à l'UQAM. Dans J. Proulx et L. Gattuso (dir.), *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles* (101-113). Sherbrooke : Éditions du CRP.

LAJOIE, C. & BEDNARZ, N. (2012). Évolution de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques au Québec : un parcours sur cent ans des programmes et documents pédagogiques. *Revue canadienne en enseignement des sciences, de la technologie et des mathématiques*, **12**(2), 178-213.

LAJOIE, C. & BEDNARZ, N. (2016). La notion de situation-problème en mathématiques au début du 21^e siècle : rupture ou continuité ? *Revue canadienne d'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, **16**(1), 1-27.

LAJOIE, C. & MAHEUX, J.-F. (2013). Richness and complexity of teaching division: prospective elementary teachers' roleplaying on a division with remainder. *Proceedings of the Eight Congress of European Research in Mathematics Education* (256-261).

LAJOIE, C. & MURA R. (1995). La division par zéro ou le danger d'un trop grand attachement au concret. *Instantanés mathématiques*, **31**(4), 7-15.

LAJOIE, C. & PALLASCIO, R. (2001). Role-play by pre-service elementary teachers as a means to develop professional competencies in teaching mathematics. *Proceedings of SEMT '01 - International Symposium Elementary Mathematics Teaching*.

LAVE, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics and culture in everyday life*. Cambridge University Press.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION, DU LOISIR ET DU SPORT (MELS) (2003). *Pro-*

gramme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, premier cycle. Québec : Gouvernement du Québec.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION, DU LOISIR ET DU SPORT (MELS) (2005). *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire deuxième cycle.* Document de travail aux fins de validation. Québec : Gouvernement du Québec.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (MEQ) (2001). *Programme de formation de l'école québécoise. Version approuvée, éducation préscolaire, enseignement primaire.* Québec : Gouvernement du Québec.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DU QUÉBEC (MEQ) (1988). Guide pédagogique. Primaire. Mathématique. Résolution de problèmes, orientation générale. Fascicule K (document 16-2300-00). Québec : Ministère de l'Éducation, DGDP, Gouvernement du Québec.

NGUALA, J.B. (2006). Faire varier le contexte pour aider à la résolution de problèmes. *La nouvelle revue de l'adaptation et de la socialisation*, **33**, 177-185.

NOSS, R. (2002). Mathematical epistemologies at work. *Proceedings of PME-26*, **1**, 47-63. Norwich, England : PME.

RABARDEL, P. (1995). *Qu'est-ce qu'un instrument ? Appropriation, conceptualisation, mises en situation.* En ligne : <http://www.cndp.fr/archivage/valid/13420/13420-1126-1194.pdf>

RASMUSSEN, C.L. ET KING, K.D. (2000). Locating starting points in differential equations: a realistic mathematics education approach. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, **31(2)**, 161-172.

ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne d'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, **2(4)**, 505-528.

RODITI, E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique.* Paris : L'Harmattan.

RODITI, E. (2013). Une orientation théorique pour l'analyse des pratiques enseignantes en didactique des mathématiques. *Recherches en didactiques*, **1**, 39-60.

ROGALSKI, J. (2003). Y a-t-il un pilote dans la classe ? *Recherches en didactique des mathématiques*, **23(3)**, 343-388.

SKOVSMOSE, O. (2012). Explosive problems in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, **32(2)**, 4-5.

- SIMON, M. A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, **24**, 233-54.
- STREEFLAND, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education. A paradigm of Developmental Research*. Dordrecht : Kluwer.
- TREFFERS, A. (1993). Wiskobas and Freudenthal Realistic Mathematics Education. Dans L. Streefland (dir.), *The legacy of Hans Freudenthal* (89-108). Springer.
- VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education : An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, **54(1)**, 9-35.
- VERGNAUD, G. (2002). La prise en compte de l'enseignant dans la théorie des champs conceptuels. Dans Bessot, A. (dir.), *Formation des enseignants et étude didactique de l'enseignant* (3-20). <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01528050/document>
- WEBB, N. (1984). Content and context variables in problem tasks. Dans C. Golding et C. McClintock (dir.), *Task variables in mathematical problem solving* (69-102). Philadelphie : The Franklin Institute Press.
- WUBBELS, T., KORTHAGEN, F. & BROEKMAN, H. (1997). Preparing Teachers for Realistic Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, **32(1)**, 1-28.

CAROLINE LAJOIE

Université du Québec à Montréal
Montréal, Québec, Canada
lajoie.caroline@uqam.ca

LAURENT MOUTET

ANALYSE D'UNE SÉQUENCE D'ENSEIGNEMENT DE LA RELATIVITÉ RESTREINTE : L'APPORT DU MODÈLE DE L'ETM ÉTENDU

Abstract. Analysis of a special relativity teaching sequence: The contribution of the extended MWS. The aim is to analyse the tasks performed during the modelling process of a special relativity teaching sequence in a “Terminale S” class in France (grade 12). Didactic engineering will be the methodological framework chosen for this study. Three theoretical frameworks will be used (DST, ADT and extended MWS) during the *a priori* analyses of the tasks to be performed in this sequence. The extended MWS framework will only be used for *a posteriori* analyses.

Résumé. Il s'agit d'analyser les tâches mises en œuvre lors du processus de modélisation d'une séquence d'enseignement de relativité restreinte en terminale S en France (grade 12). L'ingénierie didactique sera le cadre méthodologique retenu pour cette étude. Trois cadres théoriques vont être utilisés (TSD, TAD et ETM étendu) lors des analyses *a priori* des tâches à réaliser dans cette séquence. Le cadre de l'ETM étendu sera uniquement retenu lors des analyses *a posteriori*.

Mots-clés. Espace de travail mathématique étendu, mathématiques, physique, relativité restreinte.

Introduction

La mise en place des nouveaux programmes de sciences physiques en terminale S en 2012 a fait apparaître des éléments de savoir relevant de la théorie de la relativité restreinte. Les notions d'événement, d'invariance de la vitesse de la lumière dans un référentiel galiléen et de caractère relatif du temps (avec l'introduction de la notion de durée propre et du phénomène de dilatation des durées) sont maintenant au programme.

Les travaux de Walter (1996) illustrent, lors de la description de la genèse de la théorie de la relativité restreinte, l'apport des mathématiciens à cette théorie avec en particulier l'influence de Poincaré et de Minkowski. L'étude historique de la genèse de la théorie de la relativité restreinte par Walter (1996) montre ainsi un lien important avec les mathématiques, en particulier avec les diagrammes d'espace-temps.

D'un point de vue à la fois cognitif et sémiotique, les travaux de Duval (1993) ont montré que la compréhension d'un concept est améliorée lorsqu'au moins deux registres de représentation sont mobilisés et lorsque les traductions entre registres sont favorisées. Ainsi un registre sémiotique basé sur les diagrammes nous a paru

mobilisable pour des séquences d'enseignement. Les diagrammes de Minkowski (1909a, 1909b), présentés la première fois lors de la conférence de Cologne en 1908, sont intéressants, car ils sont associés à la genèse de la théorie de la relativité restreinte. De plus, en parcourant les notions et les compétences exigibles du programme de sciences physiques en terminale S (MEN, 2011), on s'aperçoit qu'il n'y a pas d'allusion à l'aspect graphique, néanmoins la présentation du programme parle de « constructions graphiques » comme un support d'informations possible.

Nous avons émis l'hypothèse qu'une manière de donner plus de sens aux concepts utilisés en relativité restreinte pourrait être de les mobiliser dans le cadre d'espaces diagrammatiques et il serait ainsi intéressant d'évaluer l'impact d'une telle séquence auprès d'élèves de terminale S. Nous nous sommes également inspirés des travaux de Cazes et Vandebrouck (2014). Ils ont étudié l'impact d'un logiciel de géométrie dynamique, GeoGebra, sur le déroulement d'une séquence visant à un apprentissage des fonctions dans un contexte de cinématique classique. Notre étude s'appuiera donc sur ce logiciel afin de représenter et d'utiliser des diagrammes d'espace-temps.

Une séquence de classe a été conçue en utilisant les principes méthodologiques de l'ingénierie didactique décrite par Artigue (1988) : analyses préalables, conception et analyse *a priori*, expérimentation, analyse *a posteriori* et validation. Trois cadres théoriques ont été utilisés pour effectuer les analyses *a priori* : la théorie des situations didactiques (TSD), la théorie anthropologique du didactique (TAD) et le cadre théorique de l'espace de travail mathématique étendu (ETM étendu) qui a été développé dans le cadre de cette étude. Il permet d'analyser spécifiquement les interactions entre le plan cognitif et les plans épistémologiques de la physique ou des mathématiques. La séquence d'enseignement développée par Moutet (2016) est destinée à des élèves de terminale S sur le thème de la relativité restreinte à la suite des travaux de de Hosson, Kermen et Parizot (2010).

La conception de notre ingénierie didactique nous a conduits à réaliser des analyses préalables sur les éléments épistémologiques et didactiques associés aux diagrammes d'espace-temps et à la théorie de la relativité restreinte. La conception de séances pilotes et leurs analyses *a priori* et *a posteriori* nous ont amenés à adapter le cadre théorique de l'ETM (Kuzniak et al., 2016) en ETM étendu (Moutet, 2016) et à évaluer son intérêt par rapport à l'utilisation de deux autres cadres théoriques (TSD et TAD). Une nouvelle séquence a ainsi été conçue puis expérimentée. Les analyses *a priori* et *a posteriori* basées sur l'étude des tâches effectuées par quelques élèves ont ensuite été effectuées.

Deux questions de recherche ont guidé ce travail :

- Comment le cadre de l'ETM étendu permet-il d'analyser les jeux de cadres de rationalité entre les mathématiques et la physique lors d'une séquence traitant de la relativité restreinte avec des élèves de terminale S via une approche géométrique ?
- Dans quelle mesure l'analyse de l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique par le cadre de l'ETM étendu permet-il de montrer qu'il favorise une conceptualisation chez les élèves ?

1. Présentation des cadres théoriques utilisés

La théorie des situations didactique (TSD) a été mise au point par Brousseau (1998) dans les années 1980. Cette théorie propose une modélisation du savoir, des situations d'enseignement et du rôle du professeur et des élèves en classe. Le rôle du professeur est de réaliser une transposition didactique des savoirs savants afin que ses élèves puissent être acteurs de leurs apprentissages et s'approprier les situations proposées qui doivent être motivantes, contextualisées et personnalisées. Selon Brousseau, un professeur doit concevoir un problème préservant le sens de la connaissance visée. Il s'agit de la situation fondamentale. Ses élèves s'approprient le problème dans une étape de dévolution, dans laquelle le professeur s'efface temporairement, puis doivent le résoudre dans une étape qualifiée de situation d'action. L'élève agit pour cela sur le milieu avec qui il est en interaction permanente et qui lui permet de faire évoluer sa stratégie de résolution. L'élève doit expliciter ses actions sur le milieu en dialoguant avec le système mis à sa disposition par le professeur (le milieu ou un autre élève). Il s'agit de la situation de formulation. La phase de proposition de résolution du problème par l'élève correspond à une situation de validation s'il y a une phase de discussion avec un autre élève ou une équipe adverse afin de prouver ou réfuter sa conjecture. Dans les phases d'action, de formulation et de validation, le professeur n'intervient pas pour proposer des connaissances, mais il s'assure que l'élève est en situation d'apprentissage. Ces règles de fonctionnement relatives à l'apprentissage du savoir constituent le contrat didactique dans une situation qualifiée d'a-didactique. Le professeur s'assure enfin, dans une partie d'institutionnalisation, de la décontextualisation et de la dépersonnalisation des connaissances acquises afin qu'elles puissent prendre le statut de savoir scolaire. Cette dernière partie correspond à la situation didactique (figure 1).

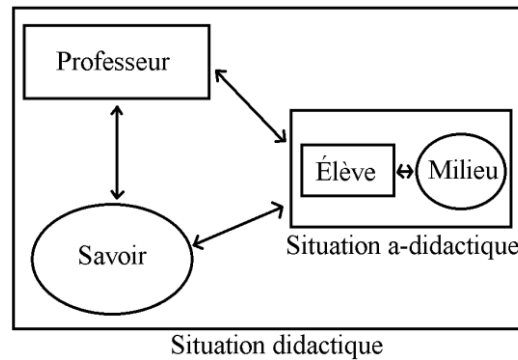


Figure 1. La TSD de Brousseau (tiré de Brousseau, 1998)

La théorie anthropologique du didactique (TAD) a été développée par Chevallard (1999). Elle situe l'activité mathématique dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales. Toute activité humaine peut être décrite par une praxéologie. Un type de tâche, noté T , nécessite une technique τ afin d'être menée à bien. Le bloc $[T/\tau]$ de la praxéologie s'appelle le bloc pratico-technique et il est associé à ce qui est généralement appelé un savoir-faire. La technologie, notée θ , permet de décrire « rationnellement » la technique utilisée en s'assurant que la tâche T est bien traitée. Enfin la théorie, notée Θ , permet de justifier théoriquement le discours de la technologie. Le bloc $[\theta/\Theta]$ est identifié à un savoir. La praxéologie associée à un type de tâche T peut donc être décrite par une tâche T , une technique τ , une technologie θ et une théorie Θ , le tout noté $[T/\tau/\theta/\Theta]$. La TAD permet de mettre en valeur la dynamique praxéologique du monde institutionnel. En effet, des praxéologies vieillissent, certains composants théoriques et technologiques sont moins utilisés alors que de nouvelles technologies apparaissent, ce qui conduit à abandonner des techniques ou d'en développer de nouvelles afin d'accomplir certains types de tâches. La TAD étudie des questionnements associés à l'accomplissement de tâches particulières. Cela conduit au développement de nouvelles praxéologies dont l'efficacité peut être évaluée.

L'espace de travail mathématique (ETM) a été développé afin de mieux comprendre les enjeux didactiques autour du travail mathématique dans un cadre scolaire (Kuzniak, Tanguay et Elia., 2016, figure 2). L'ETM comporte deux niveaux : un de nature cognitive en relation avec l'apprenant et un autre de nature épistémologique en rapport avec les contenus mathématiques étudiés. Le plan épistémologique contient un ensemble de représentations (signes utilisés), un ensemble d'artéfacts matériels (instruments de dessins ou logiciels) ou symboliques (instruments techniques et algorithmes) et un ensemble théorique de référence (définitions et propriétés). Le plan cognitif contient un processus de visualisation (présentation de l'espace dans le cas de la géométrie), un processus de

construction (fonction des outils technologiques utilisés) et un processus discursif (argumentations et preuves). Le travail mathématique résulte d'une articulation entre les plans cognitifs et épistémologiques grâce à une genèse instrumentale (opérationnalisation des artefacts), une genèse sémiotique (basée sur le registre des représentations sémiotiques) et une genèse discursive (présentation du raisonnement mathématique). Les différentes phases du travail mathématique associées à une tâche peuvent être mises en évidence par la représentation de trois plans verticaux sur le diagramme de l'ETM. Les interactions de type sémiotique-instrumental conduisent à une démarche de découverte et d'exploration d'un problème scolaire donné. Celles de type instrumental-discursive privilégient le raisonnement mathématique en relation avec les preuves expérimentales. Enfin, celles de type sémiotique-discursive sont caractéristiques de la communication de résultats de type mathématique.

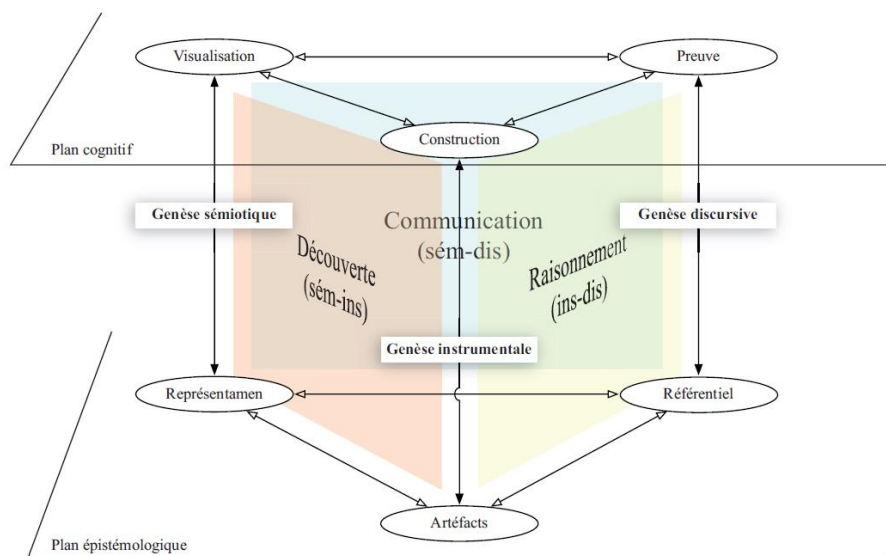


Figure 2. Le cadre des ETM (Kuzniak et al., 2016).

Pour que le travail réalisé sur des résolutions de problèmes en mathématiques soit utilisable en sciences physiques, il convient d'étudier au préalable un modèle d'analyse de processus de conceptualisation mettant en jeu des relations entre processus mathématiques et processus physiques. Un tel exemple de mise en lien a été développé par Malafosse, Lerouge et Dusseau (Malafosse et Lerouge, 2000; Malafosse et al., 2000). Son étude portait sur la loi d'Ohm, ce qui explique l'importance qu'il a consacrée aux relations algébriques. Il a ainsi défini la notion de cadre de rationalité comme un ensemble cohérent du fonctionnement de la

pensée culturelle ou familière caractérisé par quatre composantes : l'ensemble des objets « conceptuels », le type de procédé de validation, les éléments de rationalité, qui constituent les règles de traitement et de validation, ainsi que les registres sémiotiques qui sont supports à la conceptualisation et à la communication.

Dans l'exemple ci-après, trois cadres de rationalité sont étudiés : le cadre de rationalité des mathématiques, le cadre familial et celui de la physique (tableau 1). Des objets conceptuels et des éléments de rationalité ont été explicités à chaque fois.

Exemples d'objets conceptuels et d'éléments de rationalité

	Cadre de rationalité des mathématiques	Cadre de rationalité familial	Cadre de rationalité de la physique
Objets conceptuels	La droite, la croissance, la continuité, l'additivité, la dérivée, le point, etc.	Le chaud et le froid, la lumière, les fées, la peur, le point, etc.	L'énergie, la vitesse, la résistance électrique, l'électron, le point, etc.
Éléments de rationalité	La déduction logique, le raisonnement par récurrence, l'analyse combinatoire, l'infini, etc.	La validation par constat (fréquence de répétition, mesurage sur dessin), la ressemblance, la déduction, etc.)	L'homogénéité des formules, la réfutabilité, la validation par induction, la déduction logique, etc.

Tableau 1. Les cadres de rationalité. Extrait de Malafosse et Lerouge (2000).

La comparaison des processus de conceptualisation entre les mathématiques et les sciences physiques peut être réinvestie à l'aide des notions de cadre de rationalité et de registre sémiotique (figure 3).

Couplage entre les notions de cadre de rationalité et de registre sémiotique

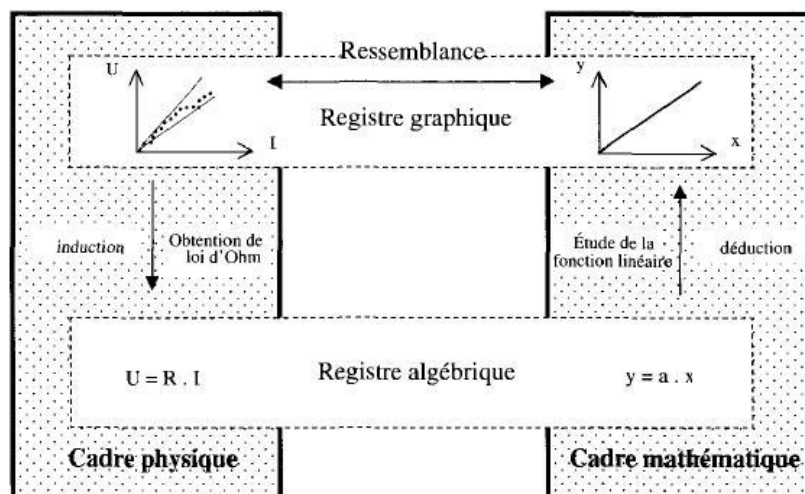


Figure 3. Cadres de rationalité et registres sémiotiques (tiré de Malafosse et Lerouge (2000)).

Le diagramme des ETM a été adapté (Moutet, 2016) en rajoutant pour la première fois un plan épistémologique correspondant au cadre de rationalité de la physique (figure 4). Il a été choisi de ne garder qu'un seul plan cognitif. Nous avons fait l'hypothèse que les conceptions des élèves en mathématiques et en physique peuvent être mises en évidence à l'aide d'un ETM étendu personnel de l'élève. Le fonctionnement des schèmes (Vergnaud, 2013) propre à ces conceptions pourrait apparaître lors de l'activation des différentes genèses. Les conceptions en mathématiques seraient mises en évidence par l'activation de genèses entre le plan cognitif et le plan épistémologique de mathématiques, celles en physique seraient mises en évidence par l'activation de genèses entre le même plan cognitif et le plan épistémologique de physique. Un seul plan cognitif serait donc suffisant pour décrire les conceptions en mathématiques et en physique. Le terme « preuve » est conservé, mais il prendra dans le cas de l'ETM étendu un sens plus restreint de justification ou de raisonnement. Le cadre de l'ETM étendu permet d'analyser finement les interactions entre les différents cadres de rationalité et le plan cognitif de l'élève puis de qualifier la nature du travail réalisé par l'élève ou celui qui lui est demandé. Lors de l'analyse *a priori* des doubles flèches noires sont utilisées pour décrire les genèses mobilisables. Lors de l'analyse *a posteriori*, un code supplémentaire permet de caractériser les genèses : flèches noires pour une genèse conforme à l'analyse *a priori*, en pointillé pour une présence non conforme et noires barrées pour une absence.

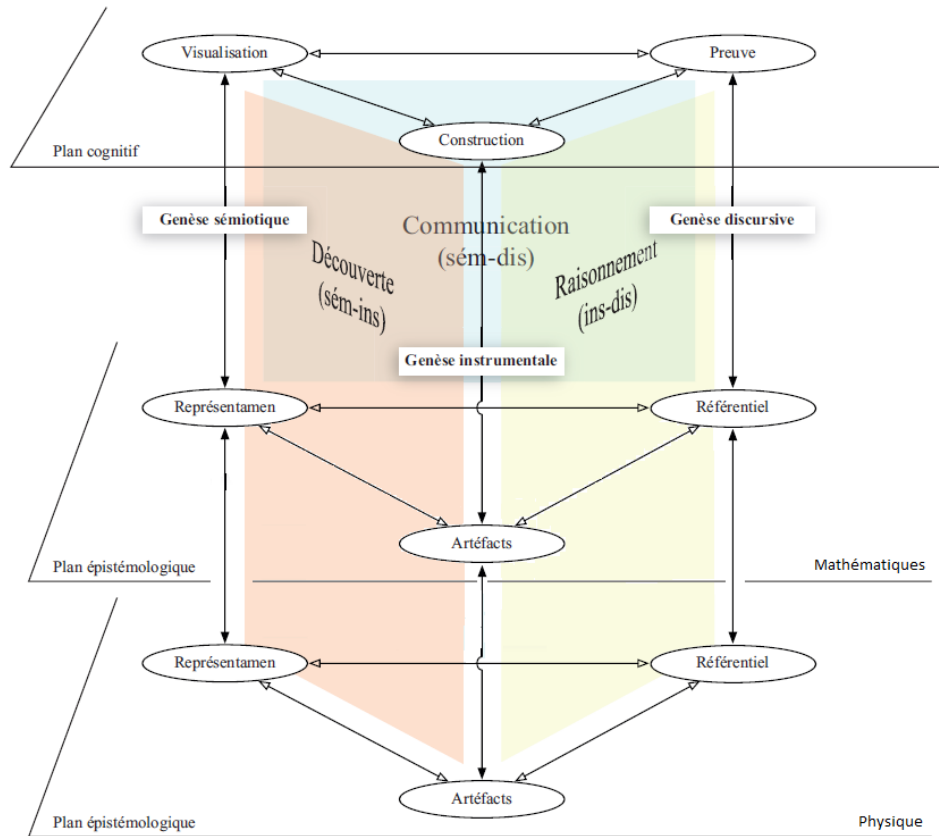


Figure 4. Modèle de l'ETM étendu.

2. De la « situation modèle » aux « résultats réels »

Nous nous sommes basés sur un cycle de modélisation (Blum et Leiss, 2005, figure 5) pour analyser une séquence d'enseignement (Moutet, 2016) portant sur le changement d'ordre chronologique d'événements en fonction du référentiel dans le cadre de la relativité restreinte (de Hosson et al., 2010).

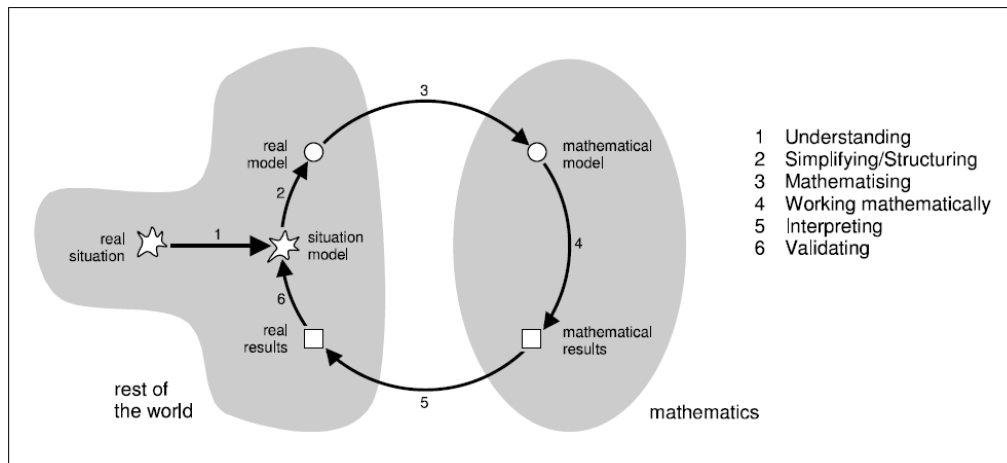


Figure 5. Cycle de modélisation de Blum et Leiss (2005)

La séquence d'enseignement est destinée à des élèves de terminale S (grade 12). Deux référentiels liés à deux observateurs, Armineh et Daniel, sont utilisés. Armineh conduit une voiture se déplaçant à une vitesse proche de la vitesse de la lumière par rapport à Daniel. Ce dernier se trouve sur le bord de la route à côté de trois flashes lumineux S_1 , S_2 et S_3 associés à trois événements particuliers, et initialement connus dans le référentiel de Daniel (figure 6, activité détaillée en annexe).

Le diagramme de Minkowski (figure 7) est un diagramme d'espace-temps permettant de connaître les coordonnées spatio-temporelles d'un événement dans un repère du référentiel d'Armineh ou de Daniel. Le diagramme de Minkowski permet de représenter le repère $(xOx.t)$ relatif au référentiel de Daniel et le repère $(x'Ox'.t')$ relatif au référentiel d'Armineh. Dans ce diagramme, la droite $x = 0$ est décrite par l'axe $(Ox.t)$ dans le repère du référentiel de Daniel. De même la droite $x' = 0$ est décrite par l'axe $(Ox'.t')$ dans le repère du référentiel d'Armineh. Les projections sur ce type de diagramme se font parallèlement aux axes. L'axe (Ox') est le symétrique de l'axe $(Ox.t')$ par rapport à la droite $x = c.t$. C'est la même chose pour les axes (Ox) et $(Ox.t)$. Les droites (Ox) ou (Ox') correspondent à la route dans les référentiels de Daniel ou d'Armineh.

Le diagramme d'espace-temps de Minkowski a été construit par les élèves et utilisé en classe à l'aide d'une activité papier-crayon préliminaire relativement guidée par l'enseignant afin qu'ils puissent s'approprier le modèle mathématique (figure 7) et comprendre les liens qu'il a avec le modèle réel (figure 6). Il nous fallait réinvestir les notions vues par les élèves dans un contexte différent avec cette fois-ci une large autonomie. Le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra a ainsi été choisi afin de réinvestir le diagramme d'espace-temps de Minkowski. La 2^{cv} conduite par

Armineh se déplace initialement à la vitesse v de 0,6 fois la vitesse de la lumière dans le vide (on considère que la vitesse de la lumière dans le vide est à peu près égale à celle dans l'air) par rapport à Daniel suivant un axe (Ox) (figure 6).

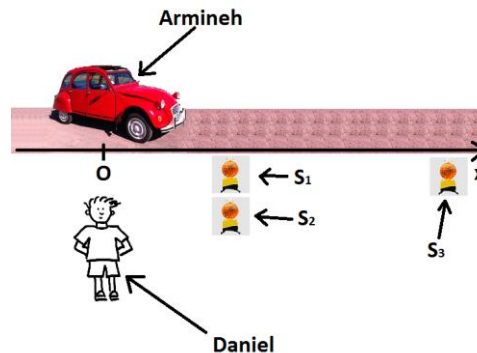


Figure 6. Le « modèle réel » de la situation

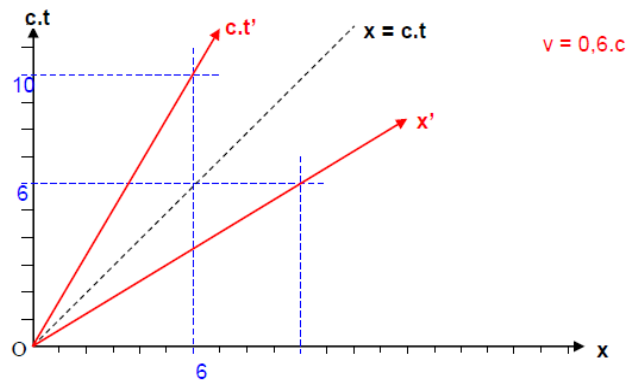


Figure 7. Le « modèle mathématique » : Diagramme de Minkowski pour $v = 0,6.c$

GeoGebra permet d'utiliser un curseur modifiant les conditions expérimentales en changeant la vitesse v . Les axes Ox' et $Oc.t'$ sont modifiés en fonction de la vitesse v , ces deux axes se rapprochent de la droite $x' = c.t'$ lorsque la vitesse v se rapproche de c . Les droites $x = c.t$ et $x' = c.t'$ sont confondues. Elles correspondent à la traduction graphique du second postulat d'Einstein (invariance de la vitesse de la lumière dans des référentiels inertiels), car elles sont les bissectrices des angles formés par les axes Ox et $Oc.t$ ou par les axes Ox' et $Oc.t'$. Le logiciel GeoGebra permet aux élèves de conclure sur l'ordre chronologique des événements suivant

les référentiels d'Armineh ou de Daniel (figure 8 et lien hypertexte ci-après : https://drive.google.com/file/d/0B_f8SgBLz2P0N0xfazFC5mU3MHM/view).

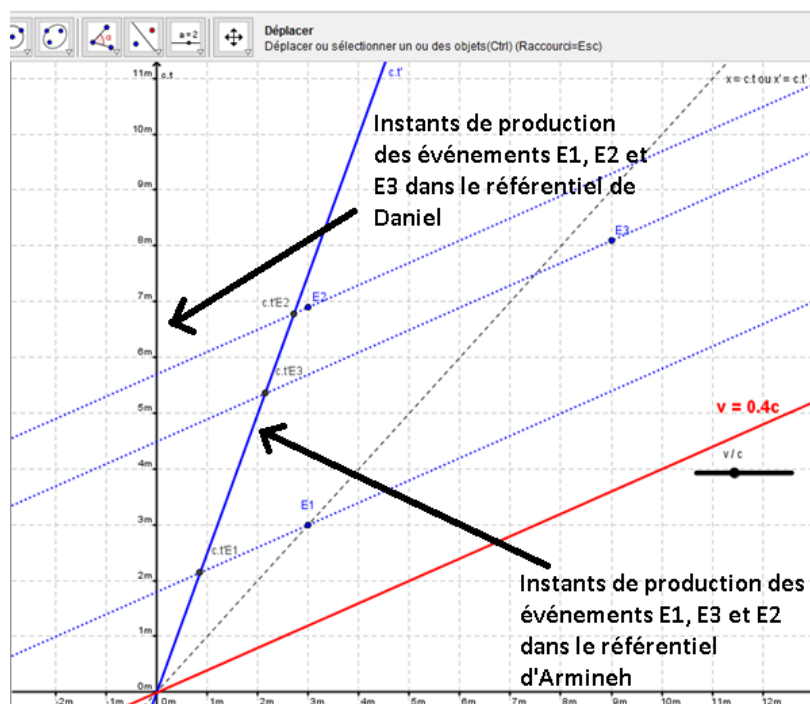


Figure 8. Les « résultats réels » : Diagramme de Minkowski avec GeoGebra

Le travail à réaliser par les élèves peut être décrit par les opérations ci-après. Il s'agit de tracer la droite $x = c.t$ ou $x' = c.t'$ en entrant à l'aide de la barre de saisie de GeoGebra l'équation $y = x$ et en renommant la droite obtenue. Il faut placer également les trois événements E_1 , E_2 et E_3 . Ils doivent éventuellement recadrer l'échelle du repère orthonormé initialement présent. C'est un repère du référentiel lié à Daniel. Ils nomment les axes Ox (axe Ox sur GeoGebra) et $Oc.t$ (axe Oy sur GeoGebra) avec éventuellement une unité en mètre. L'axe $Oc.t'$ est ensuite construit en entrant sur la barre de saisie de GeoGebra l'équation $y = \frac{x}{0.6}$ si par exemple la vitesse d'Armineh par rapport à Daniel est $v = 0.6c$. L'axe Ox' est construit en traçant le symétrique de l'axe $Oc.t'$ par rapport à la droite $x = c.t$ à l'aide de la fonctionnalité « symétrie axiale » de GeoGebra ou en entrant sur la barre de saisie l'équation $y = 0.6x$. Cela permet de construire un repère du référentiel lié à Armineh. Les élèves tracent les parallèles à l'axe Ox' passant par les différents événements et coupant l'axe $Oc.t'$ à l'aide de la fonctionnalité « droite parallèle » de GeoGebra. Les ordonnées $c.t'$ des différents événements

dans un repère lié à Armineh sont repérés à l'aide de la fonctionnalité « intersection entre deux objets ». Les élèves tracent éventuellement les parallèles à l'axe $Oc.t'$ passant par les différents événements et coupant l'axe Ox' également à l'aide de la fonctionnalité « droite parallèle » de GeoGebra. Les abscisses x' des différents événements dans un repère lié à Armineh sont repérées à l'aide de la fonctionnalité « intersection entre deux objets ». Les élèves peuvent également représenter les abscisses et les ordonnées des différents événements dans un repère du référentiel lié à Daniel. Ensuite, il faut introduire, par exemple, un paramètre ε compris entre 0 et 1 tel que $\varepsilon = \frac{v}{c}$. L'équation de l'axe $Oc.t'$ est modifiée en changeant $y = \frac{x}{0,6}$ en $y = \frac{x}{\varepsilon}$. La valeur de v peut également être affichée. L'utilisation de la fonction « curseur » du logiciel permet de faire varier les conditions expérimentales en changeant la vitesse d'Armineh par rapport à Daniel en modifiant la valeur de ε . Les diagrammes de Minkowski obtenus sont ensuite exploités pour traiter l'ordre chronologique relatif des événements en fonction du référentiel.

3. Analyse *a priori* de la séquence d'enseignement à l'aide de la TSD

L'activité papier-crayon permet aux élèves de s'approprier le diagramme de Minkowski puisque chaque élève est amené à le construire pas à pas à l'aide de leur enseignant. Une nouvelle activité est ensuite donnée en utilisant un logiciel de géométrie dynamique qui permet de modifier le milieu dans lequel les élèves vont devoir travailler (voir en annexe). Les deux référentiels Armineh et Daniel, et les trois événements considérés E_1 , E_2 et E_3 sont les mêmes. Les élèves doivent construire le diagramme de Minkowski à l'aide de GeoGebra. La fonctionnalité « curseur » qui est évoquée dans la consigne donnée aux élèves doit leur permettre de faire varier la vitesse d'un référentiel par rapport à un autre. Il est indiqué qu'ils doivent utiliser le modèle mathématique (le diagramme de Minkowski) pour en déduire des résultats. Les élèves travaillent cette fois-ci en binôme afin de favoriser les échanges entre pairs, au début dans le cadre d'un travail à faire à la maison et ensuite en salle informatique afin de finaliser leur travail. L'enseignant se contente de s'assurer que le travail des élèves est effectif et il donne des indications techniques sur l'utilisation du logiciel ou sur la construction du modèle mathématique. Il laisse ainsi ses élèves en autonomie dans une situation de dévolution. Lors de l'utilisation du modèle mathématique, les élèves sont amenés à utiliser le curseur et à s'apercevoir de l'évolution du diagramme de Minkowski lorsque la vitesse d'Armineh par rapport à Daniel est modifiée. Le tâtonnement afin de construire et utiliser le diagramme de Minkowski à l'aide de GeoGebra correspond à la situation d'action. Un dialogue permanent s'instaure à l'intérieur de chaque binôme afin de comprendre la signification physique des résultats obtenus par le modèle mathématique, en particulier l'inversion de l'ordre chronologique des événements dans le référentiel d'Armineh en fonction de sa vitesse par rapport

à Daniel. Nous nous trouvons ici dans une situation de formulation. Chaque élève doit enfin enregistrer sur un fichier MP3 ce qu'il a retenu de l'ensemble de la séquence d'enseignement (activité papier-crayon et activité GeoGebra) lors d'une situation également de formulation. La situation de validation ne peut pas être observée puisque l'étude ne se focalise pas sur l'évolution des confrontations d'idées entre membres de binômes ou entre binômes (conjectures suivies de preuves ou de réfutations). Une concertation générale de la classe avec l'enseignant permet de construire ensuite un nouveau savoir sur la notion d'événement, sur le lien entre eux et sur la notion d'ordre chronologique relatif en fonction du référentiel considéré.

La TSD permet d'analyser et comprendre l'organisation générale de la séquence d'enseignement, mais l'ingénierie didactique ne se focalise pas sur les échanges langagiers entre les membres des binômes ou entre les binômes tout au long de l'activité avec GeoGebra.

4. Analyse *a priori* de la séquence d'enseignement à l'aide de la TAD

Trois moments associés à trois types de tâches sont étudiés dans la séquence d'enseignement. L'appropriation de l'utilisation de GeoGebra avec le début de la construction du diagramme de Minkowski, pour une vitesse d'Armineh fixe par rapport à Daniel (axes Ox et $Oc.t$), puis le placement des trois événements E_1 , E_2 et E_3 correspond à la tâche T_1 . La finalisation de la construction du diagramme de Minkowski avec la construction des axes Ox' et $Oc.t'$ correspond à T_2 . T_3 est associé à l'utilisation du curseur de GeoGebra afin d'obtenir la modification du diagramme de Minkowski lorsque la vitesse d'Armineh est modifiée par rapport à Daniel. Le modèle mathématique est ensuite utilisé pour étudier l'influence de la modification des conditions expérimentales de vitesse.

La tâche T_1 a déjà été réalisée par les élèves lors d'une séance préliminaire dans laquelle le diagramme de Minkowski a été construit sur feuille. La technique τ_1 est partiellement la même ici puisque même s'il faut utiliser un logiciel de géométrie dynamique, la méthode de construction demeure identique. La technologie θ_1 est identique aux technologies θ_2 ou θ_3 . Il s'agit des règles de construction et de fonctionnement du diagramme de Minkowski qui est un diagramme d'espace-temps. Enfin la théorie Θ_1 est également la même que Θ_2 ou Θ_3 : il s'agit de la théorie de la relativité restreinte.

La tâche T_2 correspond à la construction des axes $Oc.t'$ et Ox' . Cette tâche a également été effectuée lors de la séance papier-crayon. Il faut écrire l'équation de l'axe $Oc.t'$ avec son coefficient directeur lié à la vitesse d'Armineh par rapport à Daniel puis prendre son symétrique par rapport à la droite $x=c.t$ pour construire

l'axe Ox' . La technique τ_2 a également été partiellement travaillée lors de l'activité papier-crayon, il faut la retranscrire avec le logiciel de géométrie dynamique.

La tâche T_3 permet aux élèves de travailler sur la modification du diagramme de Minkowski lorsque le paramètre de la vitesse change. En ce qui concerne la description de la technique τ_3 , les élèves utilisent ensuite la fonctionnalité « curseur » proposée par GeoGebra afin de changer les conditions de vitesse d'Armineh par rapport à Daniel. Ils sont amenés à changer l'équation de l'axe $Oc.t'$ en introduisant un paramètre qui va dépendre de la vitesse. Ils doivent également tracer la projection des trois événements sur l'axe $Oc.t'$ parallèlement à l'axe Ox' . Le modèle mathématique est ensuite utilisé en affichant les ordonnées ct' des différents événements pour que l'ordre chronologique des événements dans le référentiel lié à Armineh soit observable.

La TAD permet d'analyser les différents temps forts associés aux trois types de tâches que doivent réaliser les élèves lors de la séquence d'enseignement. Les techniques mises en jeu sont proches de l'activité préliminaire de type papier-crayon, mais il faut les adapter au logiciel GeoGebra. Les cadres de rationalité mis en jeu ne sont pas en revanche bien clarifiés.

5. Analyse *a priori* de la séquence d'enseignement à l'aide de l'ETM étendu

GeoGebra donne une genèse sémiotique différente de l'activité préliminaire papier-crayon grâce au côté dynamique du logiciel qui permet de voir plus facilement l'évolution du diagramme de Minkowski lorsque les conditions expérimentales sont modifiées. La genèse instrumentale est également modifiée, car les élèves manipulent un logiciel à la place d'instruments de géométrie. Enfin, la genèse discursive change, car les élèves concluent plus facilement sur l'ordre chronologique des événements suivant les deux référentiels qu'avec une activité de type papier-crayon avec laquelle il faudrait reconstruire plusieurs diagrammes de Minkowski avec des conditions expérimentales différentes. Cela permet de montrer que les tâches à traiter par les élèves avec GeoGebra ne sont pas les mêmes que celles de l'activité papier-crayon.

Les trois moments étudiés sont associés aux trois mêmes types de tâches que lors de l'analyse *a priori* par la TAD : l'appropriation de l'utilisation de GeoGebra avec le début de la construction du diagramme de Minkowski, la finalisation de la construction du diagramme de Minkowski avec la construction des axes Ox' et $Oc.t'$ et enfin l'utilisation du curseur de GeoGebra afin d'obtenir la modification du diagramme de Minkowski avec les conditions expérimentales de vitesse puis l'utilisation du modèle mathématique.

Le premier moment de l'activité correspond à une tâche mettant en jeu initialement majoritairement une démarche de découverte (genèses sémiotique-instrumentale)

lors de l'utilisation du logiciel GeoGebra dans le contexte de la relativité restreinte (figure 9). C'est tout d'abord le cadre de rationalité des mathématiques qui est mobilisé.

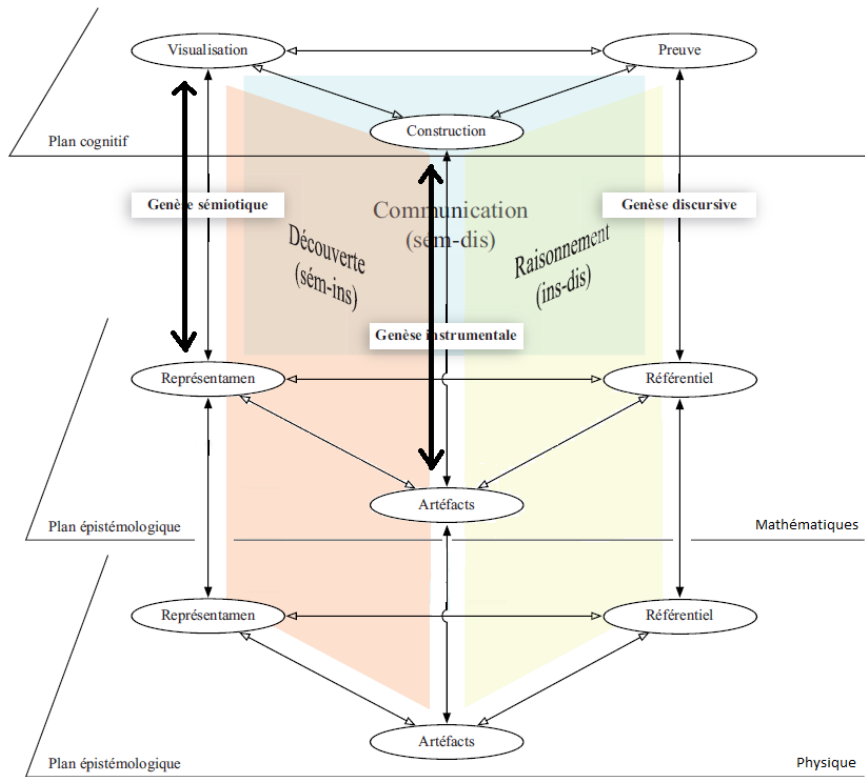


Figure 9 : Analyse du début de l'activité

C'est ensuite majoritairement une démarche de raisonnement (genèses instrumentale-discursive) qui est mise en jeu lors de la finalisation de la construction du diagramme de Minkowski grâce aux fonctionnalités du logiciel. C'est encore le cadre de rationalité des mathématiques qui est mobilisé (figure 10).

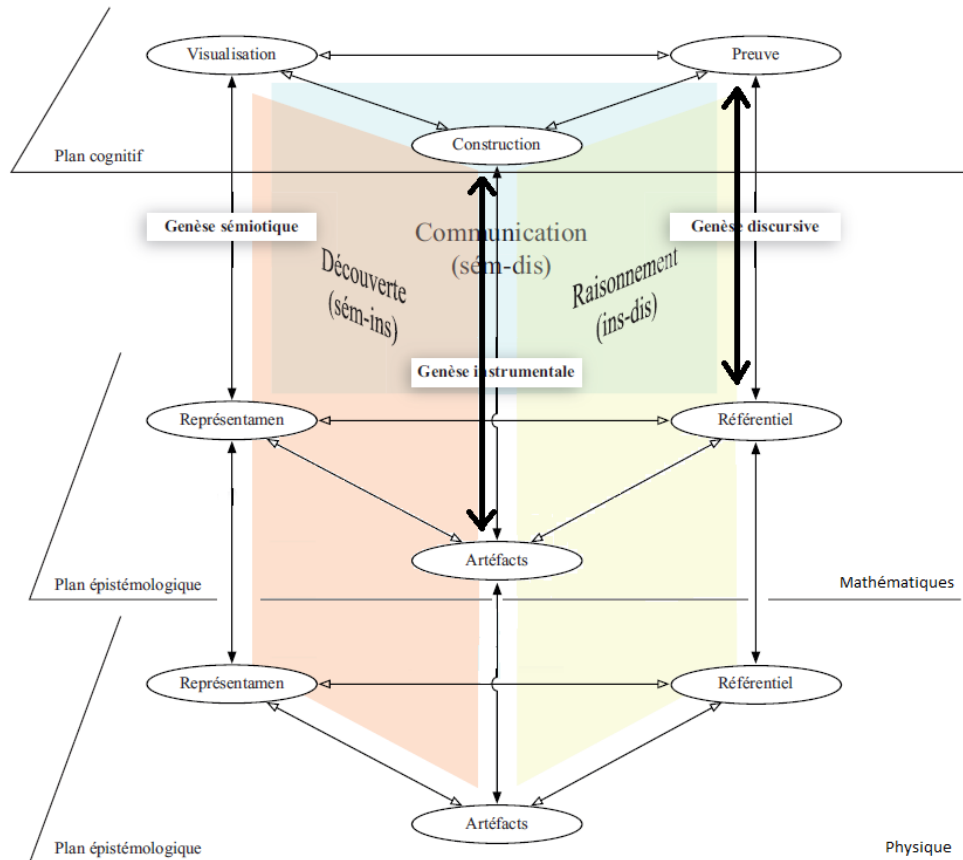


Figure 10 : Analyse de la fin de la construction du diagramme de Minkowski

Dans un dernier temps, ce sont les cadres de rationalité de la physique et des mathématiques qui sont mobilisés. Ce sont des génèses de type sémiotiques et instrumentales qui sont associées au cadre de rationalité des mathématiques lorsque les élèves doivent adapter le diagramme de Minkowski aux conditions expérimentales. C'est une démarche associée au cadre de rationalité de la physique, qui est mise en jeu lorsque les élèves étudient la modification de la vitesse d'Armineh par rapport à Daniel et en concluent des résultats physiques sur l'ordre chronologique des événements en fonction du référentiel utilisé. Ce sont des génèses de type sémiotiques et discursives qui sont alors mobilisées (figure 11).

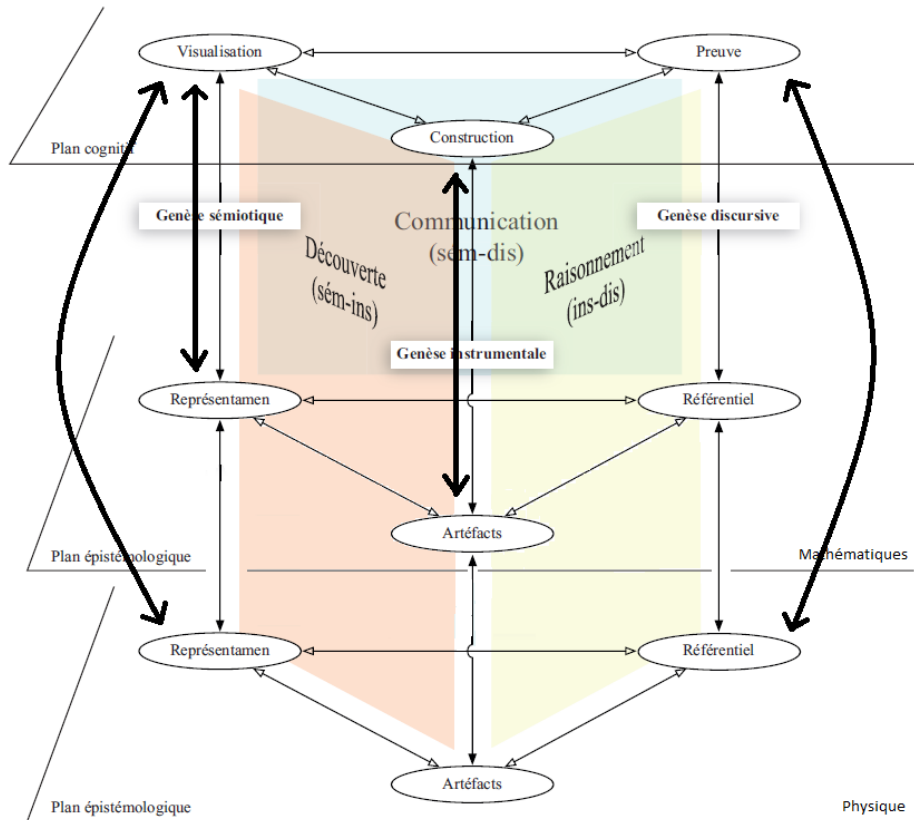


Figure 11. Analyse de l'utilisation du curseur avec GeoGebra

Le modèle de l'ETM étendu nous a permis de réaliser l'analyse a priori de chaque type de tâches à effectuer par les élèves. La contribution des cadres de rationalité des mathématiques et de la physique est bien explicitée à chaque fois. Les types de tâches sont également décrits par trois genèses. Les élèves sont amenés à utiliser plusieurs registres sémiotiques (registre algébrique, registre géométrique) traduits par une genèse sémiotique. Les constructions géométriques sont représentées par une genèse instrumentale. Enfin les phases de raisonnement sont illustrées par une genèse discursive. Le niveau de difficulté de chaque type de tâche peut être apprécié en regardant la part des genèses instrumentale-discursive, plus difficiles, par rapport aux genèses sémiotique-instrumentale.

6. Analyse a posteriori de la séquence d'enseignement

Nous avons choisi d'utiliser par la suite le cadre de l'ETM étendu, car il nous permet d'étudier les types de tâches à effectuer par les élèves tout en tenant compte

des cadres de rationalités des mathématiques et des sciences physiques ainsi que des genèses mises en œuvre.

Une classe de 34 élèves de terminale S a suivi le cours de relativité avec la recherche et la correction d'exercices proposés par le manuel scolaire. Une première séance papier-crayon a été effectuée afin de construire et d'utiliser le diagramme de Minkowski avec un guidage fort de l'enseignant. L'activité, correspondant à la seconde séance, a été ensuite donnée en devoir à réaliser à la maison. Les conditions de vitesses étaient différentes d'un binôme à l'autre. La très grande majorité des élèves n'avait pas utilisé le logiciel GeoGebra au lycée. Ils ont rendu une première version de leur devoir maison puis ils ont travaillé deux heures en demi-classe en salle informatique afin de finaliser leur fichier GeoGebra (seconde version). Chaque élève a réalisé également un enregistrement MP3 permettant de résumer la totalité de la séquence qui a duré cinq heures en tout. Quatre élèves représentatifs de la classe ont été choisis (deux filles A, B et deux garçons C, D). A et D avaient de très bons résultats scolaires alors que B et C avec des résultats scolaires décevants. Ils ont cependant tous eu le baccalauréat série S, spécialité sciences physiques à la fin de l'année.

6.1. L'élève A

Le groupe de l'élève A a représenté avec le logiciel GeoGebra un diagramme de Minkowski complet avec la fonctionnalité curseur qui est opérationnelle pour changer la valeur de $\frac{v}{c}$. Les trois événements ont leur abscisse qui est représentée sur l'axe Ox' dans le référentiel d'Armineh. Les notions d'événements et de référentiel sont mobilisées puisque les trois événements sont présents ainsi que les repères des deux référentiels. La notion d'ordre chronologique relatif n'est pas bien prise en compte par les élèves puisque ce sont les abscisses x' des événements qui sont représentés et pas les ordonnées ct' (figure 12).

Sur la seconde version retravaillée en classe (aide personnalisée de l'enseignant pour préciser la signification de l'axe $Oc.t'$), ce sont les ordonnées sur l'axe $Oc.t'$ qui sont représentées afin de pouvoir mettre en évidence plus facilement l'inversion de l'ordre chronologique d'événements dans le référentiel d'Armineh. Ce travail met en évidence des interactions de type sémiotiques-instrumentales (découverte du logiciel GeoGebra) ainsi qu'instrumentales-discursives (raisonnement élaboré afin de construire le diagramme de Minkowski et d'utiliser convenablement la fonctionnalité curseur). L'enregistrement audio de l'élève A montre qu'il utilise correctement le diagramme de Minkowski pour conclure sur l'ordre chronologique relatif des événements (genèse discursive avec le plan épistémologique de la physique), même si la visualisation des ordonnées ct' n'était pas présente dans la première version de leur travail (genèse sémiotique inadéquate avec le plan épistémologique de la physique, figure 13).

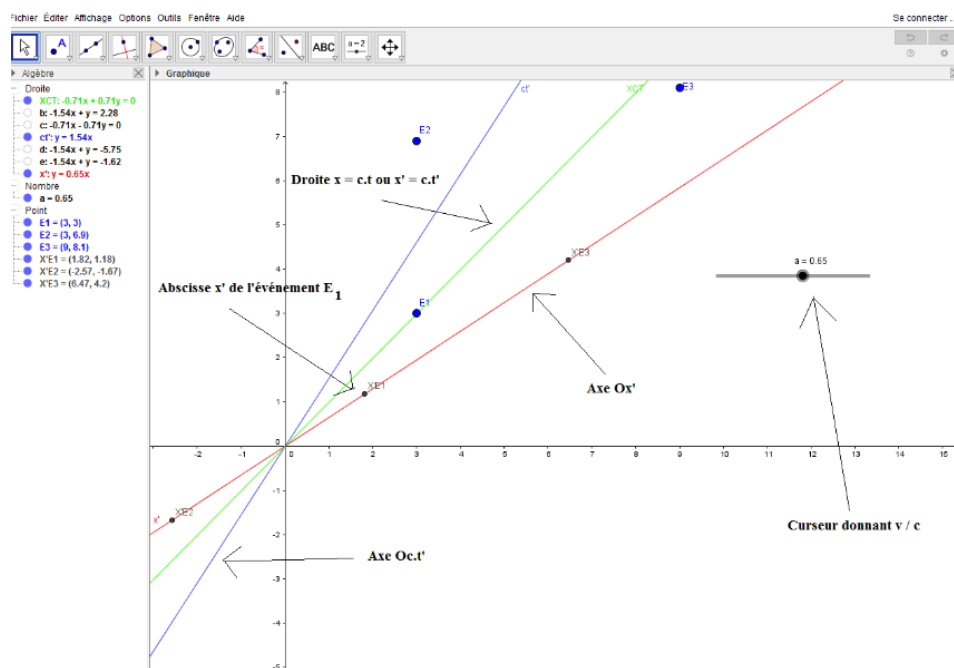


Figure 12 : Copie d'écran de la première version GeoGebra de l'élève A

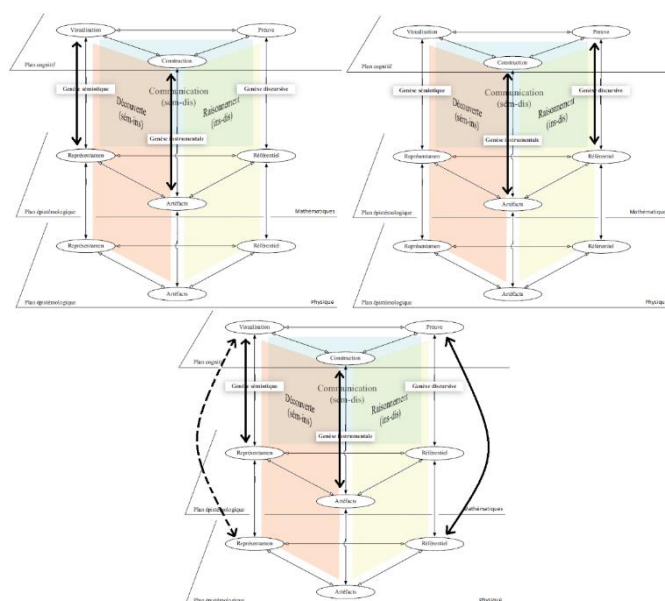


Figure 13 : Analyse *a posteriori* des tâches effectuées par l'élève A

6.2. L'élève B

Le diagramme de Minkowski comporte les trois événements, les axes Ox , $Oc.t$, $Oc.t'$, la droite $x = c.t$, et des projections parallèlement à l'axe $Oc.t'$ coupant un axe Ox' qui n'est pas correctement placé. De plus, le curseur n'apparaît pas. La notion d'événement semble mobilisée ainsi que celle de référentiel puisque les deux repères apparaissent explicitement même si cela demeure imparfait. La notion d'ordre chronologique relatif ne semble pas acquise (figure 14).

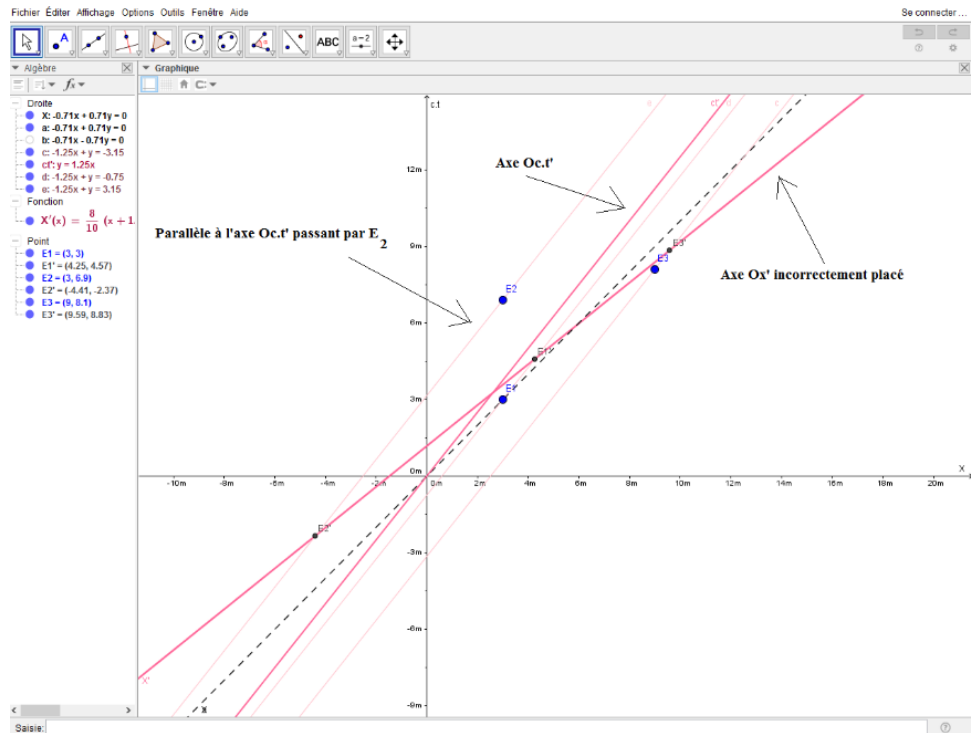


Figure 14 : Copie d'écran de la première version GeoGebra de l'élève B.

La seconde version retravaillée en classe (aide personnalisée de l'enseignant pour amener des informations techniques sur le curseur et sur la signification des droites $x = c.t$ ou $x' = c.t'$) comporte les différents éléments qui manquaient dans la première version. L'axe Ox' est bien placé, le curseur permettant de changer la valeur de $\frac{v}{c}$ apparaît et les ordonnées $c.t'$ des différents événements également. Des parallèles à l'axe $Oc.t'$ ou à l'axe Ox' passant par les différents événements sont aussi représentées.

Ce travail met en évidence des interactions de type sémiotiques-instrumentales et de façon plus épisodique des interactions instrumentales-discursives car des

confusions importantes sont mises en évidence avec l'enregistrement audio sur la construction de la droite $O.c.t'$ avec un coefficient directeur incorrect (coefficient directeur de 0,6 au lieu de $\frac{1}{0,6}$). L'enregistrement audio montre que l'élève B énonce des résultats sans utiliser véritablement le diagramme de Minkowski ou alors de façon élémentaire. Des confusions subsistent sur le but de l'activité (consistant à comparer des vitesses d'après l'élève B) ou sur la notion de vitesse d'un système dans un référentiel donné (B parle plutôt de la vitesse d'un référentiel). Les explications du tracé de la droite $x = c.t$ sont vagues ainsi que les positions des ordonnées $c.t'$ des différents événements (figure 15).

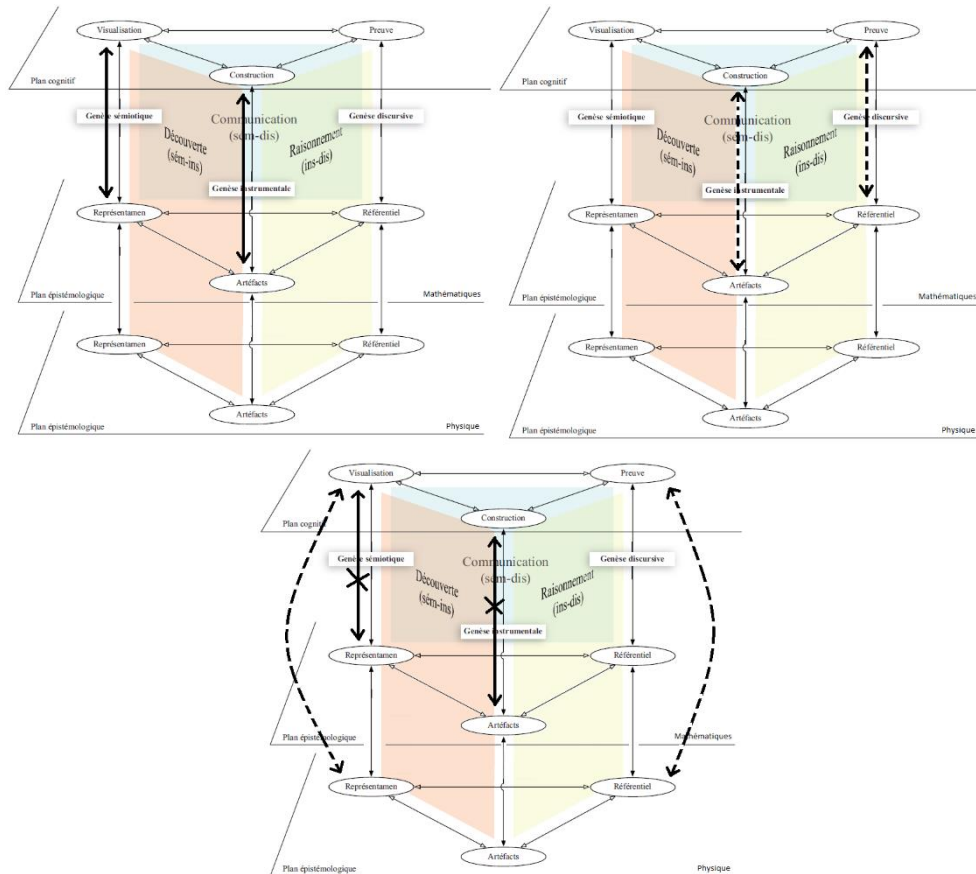


Figure 15 : Analyse *a posteriori* des tâches effectuées par l'élève B

6.3. L'élève C

Le diagramme de Minkowski comporte les trois événements correctement positionnés, les différents axes, la droite $x = c.t$, et des projections parallèlement à l'axe $Oc.t'$ coupant l'axe Ox' . Néanmoins les différents éléments ne sont pas nommés sur GeoGebra et le curseur n'apparaît pas. La notion d'événement semble mobilisée. Celle d'ordre chronologique relatif n'est pas traitée, le curseur permettant de changer la vitesse n'apparaît pas, les coordonnées des événements sur l'axe $oc.t'$ non plus (figure 16).

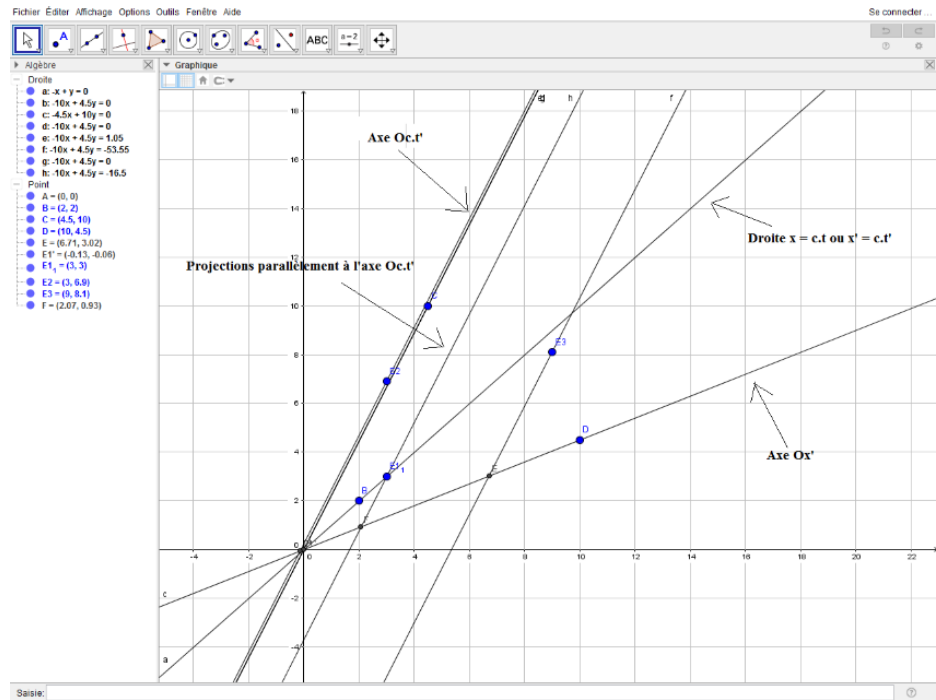


Figure 16 : Copie d'écran de la première version GeoGebra de l'élève C.

La seconde version retravaillée en classe (aide personnalisée de l'enseignant pour donner des informations techniques sur le curseur et la façon de nommer des éléments sur GeoGebra) comporte les différents éléments qui manquaient dans la première version et il est possible maintenant de traiter la notion d'ordre chronologique relatif.

Ce travail met en évidence des interactions de type sémiotiques-instrumentales ainsi que des interactions instrumentales-discursives. L'enregistrement audio de l'élève C montre des erreurs de physique (confondre le référentiel d'Armineh et de Daniel, se tromper dans l'ordre chronologique des événements, figure 17).

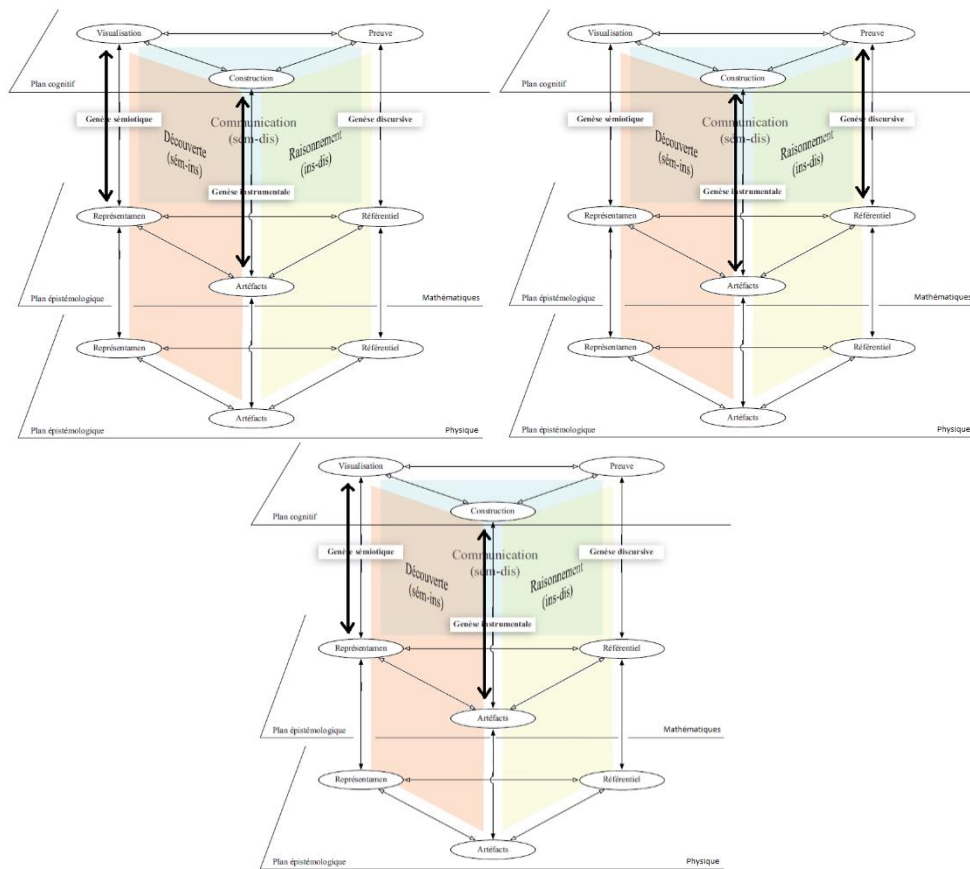


Figure 17 : Analyse *a posteriori* des tâches effectuées par l'élève C

6.4. L'élève D

Le groupe de l'élève D a représenté un diagramme de Minkowski contenant les trois événements, la droite $x = c.t$, les quatre axes Ox , $Oc.t$, Ox' et $Oc.t'$ ainsi que les projections des trois événements parallèlement à l'axe $Oc.t'$ sur l'axe Ox' . Les noms des différents axes n'apparaissent pas. Le curseur est utilisable, mais les axes ne correspondent pas à Ox' et $Oc.t'$ et la droite $x = c.t$ n'est pas la bissectrice de l'angle formé par les deux droites ainsi créées. La valeur affichée par le curseur n'est pas rattachée à la valeur de la vitesse d'Armineh par rapport à Daniel (figure 18).

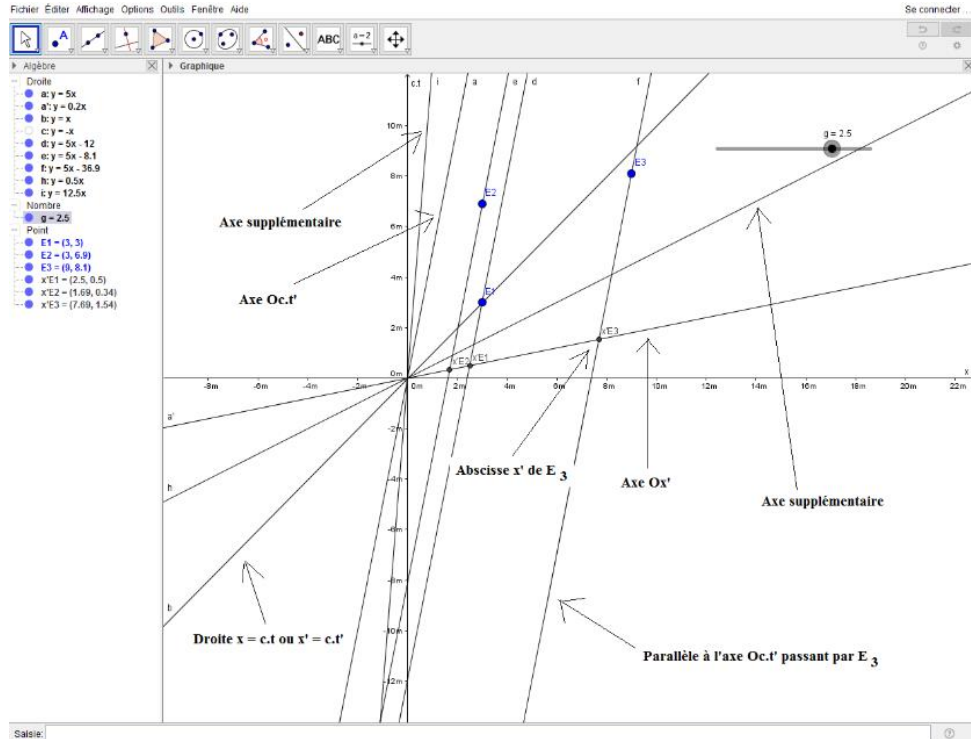


Figure 18 : Copie d'écran de la première version GeoGebra de l'élève D.

Sur la seconde version retravaillée en classe (aide personnalisée de l'enseignant pour préciser les significations de l'axe $Oc.t'$ et des droites $x = c.t$ ou $x' = c.t'$) les ordonnées des événements sur l'axe $Oc.t'$ sont représentées. Elles sont nommées y_{E1} , y_{E2} ou y_{E3} . Les abscisses des événements sur l'axe Ox' sont nommées A, B ou C. Les noms des axes Ox' , $Oc.t'$ et de la droite $x = c.t$ ne sont toujours pas représentées. Bien qu'imparfait, ce travail met en évidence des interactions de type sémiotique-instrumentale ainsi qu'instrumentale-discursive.

L'enregistrement audio de l'élève D montre des erreurs d'interprétation du diagramme de Minkowski lors de la description des différentes positions d'Armineh au cours du temps dans le référentiel de Daniel et lorsqu'il semble penser que les événements sont en mouvement. L'ordre chronologique relatif des événements est en revanche bien traité (figure 19).

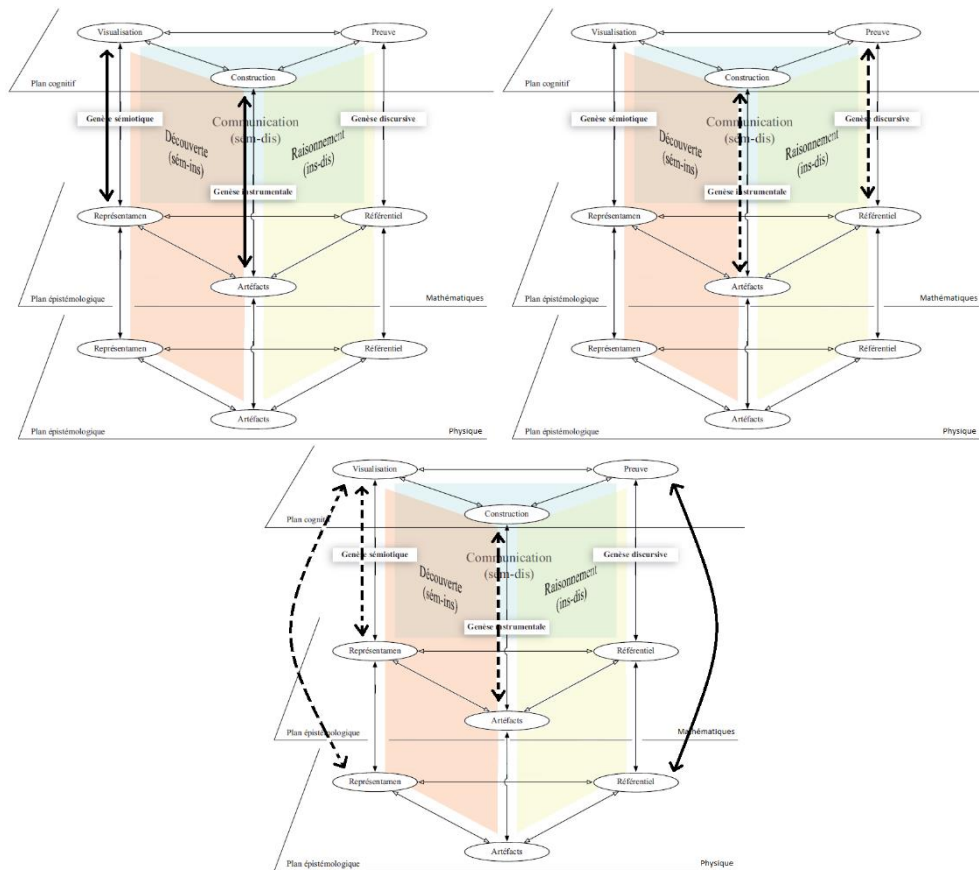


Figure 19 : Analyse *a posteriori* des tâches effectuées par l'élève D

7. Bilan des quatre analyses

Les analyses précédentes ont permis d'étudier les tâches dévolues aux élèves et celles réellement réalisées par eux en tenant compte des cadres de rationalité des mathématiques et de la physique. Cette étude préliminaire s'est focalisée sur les liens entre les plans épistémologiques et le plan cognitif. Elle a permis de mettre en évidence les jeux de cadres de rationalité lors de la résolution de ce problème de relativité restreinte traité par une approche diagrammatique. Le logiciel de géométrie dynamique GeoGebra permet de mettre en œuvre ici une genèse sémiotique supplémentaire avec son aspect dynamique. Le curseur favorise le changement des conditions de vitesses d'un référentiel par rapport à un autre et l'élève voit le résultat directement sur l'écran. Une genèse instrumentale différente de l'activité papier-crayon est également mise en jeu lors de la construction du

diagramme de Minkowski. Enfin nous émettons l'hypothèse que GeoGebra, en permettant de tirer plus facilement des conclusions sur l'ordre chronologique relatif des événements, permet l'activation d'une genèse discursive originale. L'enregistrement audio des élèves leur permet de communiquer sur le diagramme de Minkowski sans le mettre en œuvre directement. C'est le signe d'interactions sémiotiques et discursives favorisant une conceptualisation des notions de relativité restreinte.

Conclusion

Nous avons utilisé trois cadres théoriques (TSD, TAD et ETM étendu) afin de réaliser l'analyse *a priori* des tâches mises en œuvre lors de la séquence d'enseignement. Le cadre de l'ETM étendu nous a permis de réaliser une analyse plus complète et une meilleure évaluation des types de tâches associés à certaines étapes du cycle de modélisation. Il permet la prise en compte de la mobilisation des plans épistémologiques des mathématiques ou de la physique pour chacune des tâches. Le cadre de l'ETM étendu nous a également permis de montrer que le logiciel GeoGebra développe des genèses spécifiques par rapport à une activité papier-crayon. Une nouvelle genèse sémiotique conduit à une visualisation du changement des coordonnées temporelles des événements en fonction de la vitesse v d'Armineh par rapport à Daniel. Une nouvelle genèse instrumentale correspond à la manipulation du logiciel de géométrie dynamique avec la fonctionnalité curseur permettant de changer simplement les conditions expérimentales. Enfin une nouvelle genèse discursive permet de conclure sur l'ordre chronologique des événements en fonction du référentiel d'étude et de la vitesse v . Le modèle de l'ETM étendu conduit à la réalisation de l'analyse *a priori* de chacune des tâches à effectuer par les élèves et à tester avec succès l'analyse *a posteriori* du travail effectué par eux. Nous envisageons, par la suite, d'analyser grâce au modèle de l'ETM étendu ou à une de ses évolutions, les tâches mises en œuvre à chacune des étapes du cycle global de modélisation lors d'autres séquences utilisant la relativité restreinte. Des résultats préliminaires tendent à montrer que les genèses ainsi que les plans épistémologiques des mathématiques et de la physique ne sont pas mobilisés de la même façon en fonction de l'étape du cycle de modélisation. Un nouveau cadre de rationalité est également à l'étude avec la chimie.

Bibliographie

- ARTIGUE, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*. Grenoble, La pensée Sauvage éditions, **9(3)**, 281-308.
- BLUM, W., LEISS, D. (2005). « Filling up » - the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In M. Bosch (Ed.) *Proceedings for the CERME 4*, Spain. 1623-1633.
- BROUSSEAU, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*. Grenoble, La pensée Sauvage éditions, **19(2)**, 221-266.
- CAZES, C., VANDEBROUCK, F. (2014). Vil Coyote rattrapera-t-il Bip - Bip ? Un exemple d'introduction de fonctions à partir d'une situation concrète. *Repères. Irem.* **95**, 5-22.
- DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives de l'IREM de Strasbourg*, **5**, 37-65.
- DE HOSSON, C., KERMEN, I. & PARIZOT, E. (2010). Exploring students' understanding of reference frames and time in Galilean and special relativity. *European Journal of Physics*, **31**, 1527-1538.
- KUZNIAK, A., TANGUAY, D. & ELIA, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM mathematics Education*, **48**, 721-737.
- MALAFOSSE, D., LEROUGE, A. (2000) Ruptures et continuités entre physique et mathématiques à propos de la caractéristique des dipôles électriques linéaires. *Aster*, **30**, 65-85.
- MALAFOSSE, D., LEROUGE, A. & DUSSEAU, J.M. (2000) Étude, en inter didactique des mathématiques et de la physique, de l'acquisition de la loi d'Ohm au collège : espace de réalité. *Didaskalia*, **16**, 81-106.
- MINISTERE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (MEN) (2011). Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de physique-chimie. Classe terminale de la série scientifique. *Le Bulletin Officiel*, **Spécial n°8**.
- MINKOWSKI, H. (1909a) Raum und Zeit. *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **18**, 75-88.
- MINKOWSKI, H. (1909b) Raum und Zeit. *Physikalische Zeitschrift*, **10**, 104-111.

MOUTET, L. (2016). *Diagrammes et théorie de la relativité restreinte : une ingénierie didactique*, Thèse de doctorat de l'université Paris Diderot, France.

VERGNAUD, G. (2013). Pourquoi la théorie des champs conceptuels ? *Infancia y aprendizaje*, **36(2)**, 131-161.

WALTER, S.A. (1996) *Hermann Minkowski et la mathématisation de la théorie de la relativité restreinte*. Thèse de doctorat de l'université Paris Diderot, France.

LAURENT MOUTET

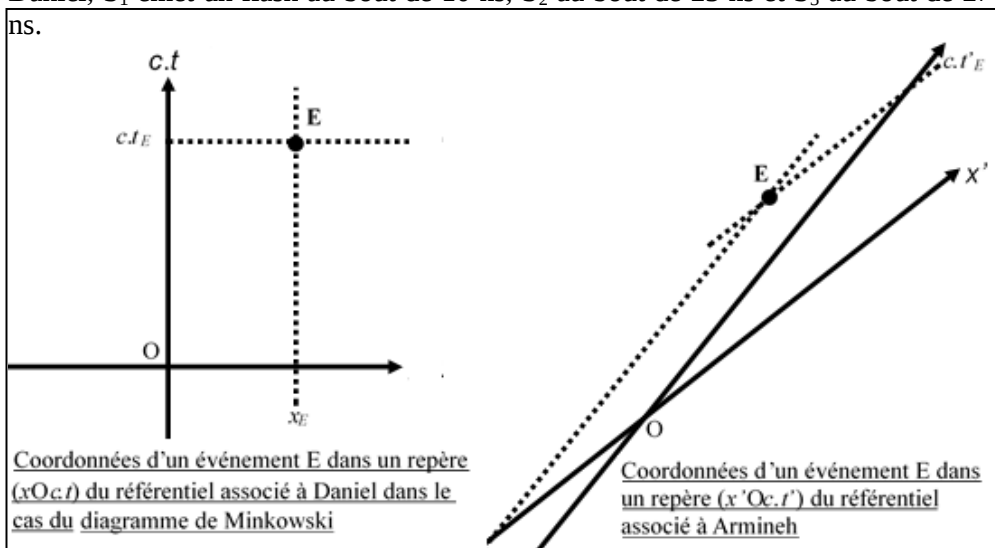
Laboratoire de Didactique André Revuz
UFR de mathématiques – Université Paris Diderot
laurent.moutet@ac-amiens.fr

Annexe Activité proposée : Relativité restreinte et géométrie

Note : Le but de l'activité proposée est de modéliser une situation par un diagramme de Minkowski à l'aide du logiciel GeoGebra, de repérer trois événements E_1 , E_2 et E_3 dans le repère des référentiels associés à deux personnages, nommés Daniel et Armineh, et d'utiliser le modèle mathématique lorsque l'on fait varier la vitesse d'Armineh par rapport à Daniel à l'aide de l'outil curseur.

Une route horizontale comporte trois dispositifs émettant des flashes lumineux afin de repérer un danger. Daniel est immobile sur le côté de la route qui peut être modélisée par une droite Ox orientée. Une voiture conduite par Armineh se déplace à une vitesse de $+0,6c$ sur la route à côté de Daniel et se dirige vers les dispositifs lumineux.

L'origine des dates et des positions correspond à l'événement pour lequel les coordonnées de Daniel et Armineh coïncident. Dans le référentiel associé à Daniel, les deux premiers dispositifs notés S_1 et S_2 se trouvent à $+3$ mètres de Daniel et le troisième, noté S_3 , se trouve à $+9$ mètres de lui. Dans le référentiel associé à Daniel, S_1 émet un flash au bout de 10 ns, S_2 au bout de 23 ns et S_3 au bout de 27 ns.



Document 1 : Coordonnées d'un événement E

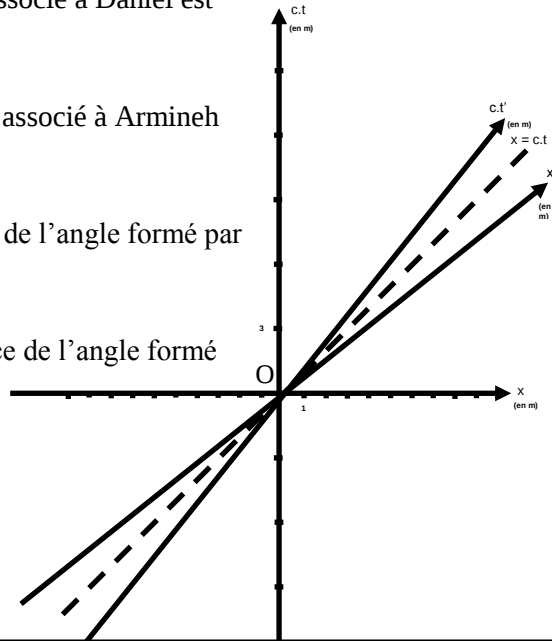
La durée propre, notée Δt_p , correspond à la durée entre deux événements A et B ayant les mêmes coordonnées spatiales, dans un référentiel galiléen donné. Cette durée est mesurée par une horloge unique, fixe dans ce référentiel, et ayant les mêmes coordonnées spatiales que les deux événements

Une durée impropre, notée Δt_m , correspond à la durée entre les deux mêmes événements A et B n'ayant pas les mêmes coordonnées spatiales, dans un référentiel galiléen donné. Cette durée est mesurée par deux horloges, fixes dans ce référentiel et situées à la même coordonnée spatiale de chaque événement.

Les durées Δt_m et Δt_p sont reliées par la relation suivante : $\Delta t_m = \gamma \cdot \Delta t_p$.

Document 2 : Dilatation des durées, durée propre et durée impropre

- Le repère $(xOc.t)$ du référentiel associé à Daniel est orthonormé.
- Le repère $(x'Oc.t')$ du référentiel associé à Armineh n'est pas orthonormé.
- La droite $x = c.t$ est la bissectrice de l'angle formé par les axes Ox et $Oc.t$.
- La droite $x' = c.t'$ est la bissectrice de l'angle formé par les axes Ox' et $Oc.t'$.



Document 3 : Diagramme de Minkowski

Donnée : $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$. c représente la vitesse de la lumière dans le vide. Le coefficient de dilatation des durée γ est défini par l'expression suivante :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Correction de l'activité

Une proposition de résolution est donnée avec le lien suivant.

https://drive.google.com/file/d/0B_f8SgBLz2P0N0xfazFCSmU3MHM/view

GÜNHAN CAGLAYAN

COORDINATING REPRESENTATION REGISTERS: LINEAR ALGEBRA
STUDENTS' UNDERSTANDING OF ORTHOGONAL LEGENDRE
POLYNOMIALS IN THE INNER PRODUCT SPACE $\mathbb{P}_n$ IN A
TECHNOLOGY-ASSISTED LEARNING ENVIRONMENT

Abstract. The purpose of this research study was to understand how linear algebra students in a university in the United States make sense of the orthogonal Legendre polynomials as vectors of the inner product space $\mathbb{P}_n$ in a DGS (Dynamic Geometry Software)-MATLAB facilitated learning environment. Math majors came up with a diversity of innovative and creative ways in which they coordinated semiotic registers (Duval, 1993, 2006) for understanding inner products of Legendre polynomials along with other notions inherent in the inner product space, such as Triangle Inequality, Pythagorean Theorem, Parallelogram Law, Orthogonality and Orthonormality, Coordinates Relative to an Orthonormal Basis. Research participants not only produced such creative inner product space visualizations of the Legendre polynomials with the associated integral inner product $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ on the DGS, but they also verified their findings both analytically and visually in coordination. The paper concludes by offering pedagogical implications along with implications for mathematics teaching profession and recommendations for future research.

Keywords. Semiotic registers, linear algebra, Legendre polynomials, inner product space, visualization, dynamic geometry software, orthogonality.

Résumé. Coordonner des registres de représentation : compréhension par les étudiants des polynômes orthogonaux de Legendre dans l'espace euclidien $\mathbb{P}_n$ au sein d'un environnement technologique. Le but de cette étude était de comprendre comment les étudiants en algèbre linéaire d'une université américaine donnent un sens aux polynômes de Legendre orthogonaux en tant que vecteurs de l'espace euclidien $\mathbb{P}_n$ dans un environnement d'apprentissage facilité par DGS (Dynamic Geometry Software)-MATLAB. Les étudiants en mathématiques ont trouvé une variété de moyens novateurs et créatifs dans lesquels ils ont coordonné des registres sémiotiques (Duval, 1993, 2006) pour comprendre les produits scalaires des polynômes de Legendre ainsi que d'autres notions inhérentes à l'espace euclidien, telles que l'inégalité triangulaire, le théorème de Pythagore, la loi des parallélogrammes, l'orthogonalité et l'orthonormalité, les coordonnées dans une base orthonormée. Les participants à la recherche ont non seulement produit de telles visualisations créatives de l'espace euclidien des polynômes de Legendre pour le produit scalaire intégral associé $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ sur le DGS, mais ils ont également vérifié leurs résultats à la fois analytiquement et visuellement en coordination. L'article conclut en offrant des implications pédagogiques ainsi que des implications pour la profession d'enseignant en mathématiques et des recommandations pour de futures recherches.

Mots-clés. Registres sémiotiques, algèbre linéaire, polynômes orthogonaux de Legendre, espace euclidien, visualisation, logiciel de géométrie dynamique, orthogonalité.

1. Introduction

The Legendre polynomial P_n of order n satisfies the 2nd-order ODE (Legendre differential equation) $\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + n(n+1)y = 0$. Named after the French mathematician Adrien-Marie Legendre (1752-1833), the set $\{P_0, P_1, P_2, \dots\}$ forms an orthogonal set of polynomials with the associated integral inner product $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. This article presents the results of a qualitative research that shows how mathematics majors in a university in the United States made sense of the integral inner product in the vector space $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ of polynomials of degree $\leq n$ with real coefficients – the mapping $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ defined via $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ for $f, g \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ – in a DGS/MATLAB-facilitated learning environment. The mathematics major research participants explored the defining properties (symmetry, linearity, positive definiteness) of the integral inner product along with other notions inherent in the inner product space, such as norm, distance, orthogonal projection, Cauchy-Schwarz Inequality, Triangle Inequality, Pythagorean Theorem, Parallelogram Law, orthogonality and orthonormality, orthonormal basis, and coordinates relative to an orthonormal basis. The article also demonstrates the diversity of original and innovative ways through which mathematics majors visualized and made sense of the Legendre polynomials as an orthogonal basis for the inner product space $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ in a technology-assisted learning environment. Student thinking was analyzed within representation registers and interplay between registers theoretical perspective (Duval, 1993, 2006).

1.1. Teaching and Learning Linear Algebra

Researchers have investigated the teaching and learning of linear algebra from an educational perspective since the mid-eighties (Dorier, 1991, 1995, 2000; Dreyfus & Hillel, 1998; Harel, 1985, 1987; Pavlopoulou, 1993; Robert & Robinet, 1989; Rogalski, 1994; Sierpiska, 1995, 2000; Sierpiska, Dreyfus & Hillel, 1999). In 1990, educators across mathematics departments in the United States formed the linear algebra curriculum study group (LACSG) whose goal was to “initiate substantial and sustained national interest in improving the undergraduate linear algebra curriculum” (Carlson, Johnson, Lay & Porter, 1993, p. 41). The LACSG recommended that linear algebra curricula consider “the needs and interests of students as learners;” and “utilize technology in the first linear algebra course” (p. 45). LACSG further recommended that the core syllabus of a first course in linear algebra encompass matrix addition and multiplication, systems of linear equations,

determinants, properties of $\mathbb{R}^n$, eigenvalues and eigenvectors, orthogonality, and supplementary topics (pp. 43-44). In particular, eigenvalue-eigenvector topics would include characteristic polynomial, algebraic multiplicity, eigenspaces, geometric multiplicity, similarity and diagonalization, symmetric matrices, orthogonal diagonalization, and quadratic forms (p. 44).

Harel and Kaput (1991), and Harel (1985, 1990) formulated the concreteness principle, as a fundamental approach for the teaching and learning of linear algebra, originated from Piaget's (1977) idea of conceptual entities. According to this principle, "for students to abstract a mathematical structure from a given model of that structure the elements of that model must be conceptual entities in the student's eyes; that is to say the student has mental procedures that can take these objects as inputs" (Harel, 2000, p. 180). Concreteness principle requires that "students build their understanding of a concept in a context that is concrete to them" (p.182). He recommends MATLAB as a tool that would help students visualize vectors and matrices as concrete mathematical objects, in accordance with the concreteness principle. Harel (2000) proposed a first course in linear algebra as a "natural continuation of what students have learned in high-school," which would "build on rich concept images of linear algebra already possessed by students" (p. 188).

1.2. Vector Spaces in Linear Algebra

Although there are no prior research studies in linear algebra with primary focus on inner product spaces and orthogonal polynomials in particular, mathematics education researchers investigated university students' understanding of vector spaces (Dorier, 1995, 1988; Dorier, Robert, Robinet & Rogalski, 2000; Parraguez & Oktac, 2010) and subspaces of $\mathbb{R}^n$ in linear algebra (Wawro, Sweeney & Rabin, 2011). It is also possible to highlight past research that has dealt with such neighboring topics as span, linear independence and basis (Dogan-Dunlap, 2010; Hannah, Stewart & Thomas, 2013; Wawro et al., 2012); eigenvalues and eigenvectors (Sinclair & Gol Tabaghi, 2010; Thomas & Stewart, 2011; Gol Tabaghi & Sinclair, 2013; Caglayan, 2015); use of geometry in linear algebra (Dorier & Sierpinska, 2001; Gueudet-Chartier, 2006); representations in $\mathbb{R}^n$ and the multi-representational aspect of linear algebra (Andrews-Larson, Wawro & Zandieh, 2017; Dorier, Sierpinska, 2001; Hillel, 2000); diagonalization (Zandieh, Wawro & Rasmussen, 2017).

Dorier (2000) highlights epistemological causes for students' difficulties (formalism). Hillel (2000) argued that students' difficulties in linear algebra are primarily proof related: "not understanding the need for proofs nor the various proof techniques; not being able to deal with the often implicit quantifiers; confusing necessary and sufficient conditions; making hasty generalizations based on very shaky and sparse evidence" (p.191). Dorier and Sierpinska (2001) suggested that

“the use of geometrical representations or language is very likely to be a positive factor, but it has to be controlled and used in a context where the connection is made explicit” (267). These researchers also outlined several reasons for why students consider linear algebra as a cognitively and conceptually difficult area to master: (i) axiomatic approach and the level of sophistication in the abstraction (e.g., “the concept of vector space being an abstraction from a domain of already abstract objects like geometrical vectors, n -tuples, polynomials, series of functions” (p. 257); (ii) the language of linear algebra (e.g. “the geometric language of lines and planes, the algebraic language of linear equations, n -tuples and matrices, the abstract language of vector spaces and linear transformations”); (p. 270) (iii) the registers of the language of linear algebra (e.g., graphical, tabular, symbolic, etc.); (iv) variety of representation systems (e.g. Cartesian, parametric, etc.); (v) cognitive flexibility “in moving between the various languages, viewpoints and semiotic registers” (p. 270).

Research studies taking into account the diversity of representation registers (not only restricted to linear algebra) and interplay between registers that inform the present report are important (Ramírez-Sandoval, Romero-Félix & Oktaç, 2014). A general reference concerning general representation registers is Duval (1993, 2006). Among other things, the main representation registers are: algebraic, formal, geometric, graphical, numerical, symbolic, verbal, visual. Some other work also includes other semiotic resources like gestures and artifacts (Radford, 2002; Arzarello, 2006). The question of representation registers with respect to the notion of integral is central in the work by McGee and Martinez-Planell (2014). Finally, Oktaç and Vivier (2016) also highlight the importance of the interplay between different registers to favour understanding: in the particular case of analysis, they also conclude on the importance of the graphical register as a visual aid to favour understanding.

Dorier (2000) and Grenier-Boley (2014) further highlighted the following students' difficulties in relation with linear algebra: (i) difficulties with prerequisites in logic, set theory and geometry; (ii) difficulties in using the first notions of linear algebra; (iii) difficulties in seeing the link with familiar situations; and (iv) difficulties in flexibly converting between registers. It is also worth noting the interpretation of several difficult concepts by the students at the beginning of university as FUG (formalizing, unifying, generalizing) concepts (Dorier, 2000; Vandebrouck, 2013): when first introduced to students, such notions introduce greater generality by unifying earlier objects through a new formalism. Examples of such concepts are given by basic notions of linear algebra (vector space, vector subspace, vector subspace spanned by vectors) and basic notions of real analysis such as the formal definitions of limit (and maybe the integral). In the case of linear algebra, the formalism is intrinsically difficult as it is inherent to its generalization and

unification (Dorier, 2000). Recent research about the teaching of linear algebra takes into account an interpretation of some of its concepts as FUG concepts (see for example Grenier-Boley, 2014).

In a research study on students' conceptualization of subspaces of $\mathbb{R}^n$, Wawro et al. (2011) identified the three factors associated with students' concept imagery: "Geometric Object (e.g., subspace is a plane in a space), Part of a Whole (e.g., subspace is contained within a space), and Algebraic Object (e.g., subspace is a collection of vectors)" (p. 7). They also observed the "technically inaccurate "nested subspace" conception that $\mathbb{R}^k$ is a subspace of $\mathbb{R}^n$ for $k < n$ " (p. 1). Framed in APOS theory, Parraguez and Oktac (2010) focused on students' coordination between the vector addition and the scalar multiplication operation associated with the vector space structure in relation to other concepts such as spanning sets and linear independence. They developed a genetic composition of the vector space notion in an attempt to predict "how students might construct the vector space concept as a schema" (p. 2123). The purpose of the present report is to understand how linear algebra students make sense of the orthogonal Legendre polynomials as vectors of the polynomial inner product space $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ with the associated integral inner product. Of particular interest are innovative and creative ways in which mathematics majors coordinate visual and analytic approaches in understanding inner product properties of orthogonal Legendre polynomials and their connections to the other concepts of linear algebra.

1.3. Motivation for the Study

This article deals with students' understanding of the family of orthogonal Legendre polynomials and some of their properties associated with the inner product spaces $\mathbb{P}_n$ or $\mathbb{P}$ for a certain inner product defined by an integral. These properties are either algebraic or geometric and particularly related to the orthogonality or orthonormality of this family with respect to the inner product $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. This subject is at the crossroads of both bilinear algebra and functional analysis and is therefore crucial for the continuation of students' studies. From an algebraic point of view, this subject is related to the understanding of basic bilinear algebra (and not only linear algebra) when the considered bilinear form is symmetric positive definite on a vector space E over $\mathbb{R}$. In this case, the inner product considered endows E with a structure of euclidian space (if $\dim_{\mathbb{R}} E$ is finite) or inner product space (in general). In the article, $E = \mathbb{P}_n$ or $\mathbb{P}$ is endowed with a structure of inner product space for a form defined via an integral. The properties studied in this article are therefore natural attributes related to this form, some of which having a geometric interpretation; it is also based upon basic linear algebra.

From an analytical point of view, the inner product considered in the article is in fact that of $L^2(I)$ where I is an open interval of $\mathbb{R}$ and the inner product is defined by $\langle u, v \rangle = \int_I u(x)v(x)dx$. Then $L^2(I)$ endowed with this inner product is a Hilbert space. Moreover, the orthogonality of the family of Legendre polynomials for this inner product precedes the notion of Hilbert basis. In the article, the research is part of a project which focuses on connections between three branches of advanced mathematics by means of Computer Algebra Systems (CAS) or DGS: geometry, real analysis and linear/abstract algebra. As highlighted above, the study of this subject is clearly related to these three branches. In this aspect, and aligned with the LASCG recommendations (Carlson et al., 1993), the chosen subject (Legendre polynomials) in relation to the connections between these different branches certainly reveals itself as a crucial motivation for the study.

2. Theory and Method

2.1. Registers of Semiotic Representations

Representations are central to mathematics teaching and learning. “A representation is something that stands for something else” (Duval, 2006, p. 103). The guiding theoretical framework used to frame the present report is Duval’s theory of registers of semiotic representations (1993, 2006). According to Duval, the mathematical knowledge object is not to be confused with the representation of the object itself: “the distinction between an object and its representation is a strategic point for understanding mathematics” (Duval, 1993, p. 37). Object-representation duality is prone to lead to the notion of cognitive paradox of mathematical thought: “on the one hand, the apprehension of mathematical objects can only be a conceptual apprehension and, on the other hand, it is only by means of semiotic representations that an activity on mathematical objects is possible” (p. 38). Duval (2006) further posits the requirement that, from a cognitive point of view, the three important characteristics be considered in the analysis of a mathematical activity: (1) [The paramount importance of semiotic representations] It runs through a transformation of semiotic representations, which involves the use of some semiotic system; (2) [The large variety of semiotic representations used in mathematics] For carrying out this transformation, quite different registers of semiotic representations can be used; (3) [The cognitive paradox of access to knowledge objects] Mathematical objects must never be confused with the semiotic representations used, although there is no access to them other than using semiotic representation (p. 126).

Not all semiotic systems are registers; for a system of representation to be considered as a register of representation, the representation must permit three fundamental cognitive activities: (1) The *formation* of an identifiable representation as a representation in a given register; (2) The *processing* (treatment) of a representation (i.e., the internal transformation taking place in the same register where it was

formed); (3) The *conversion* of a representation (i.e., the transformation of this representation into a representation of another register while retaining all or part of the content of the representation) (Duval, 1993, pp. 41-42). It is worth noting that treatments and conversions stand as two types of transformations of semiotic representations that are radically different (Duval, 2006, p. 111). On the one hand, a treatment is a transformation of representations that happen within the same register: “The treatments, which can be carried out, depend mainly on the possibilities of semiotic transformation, which are specific to the register used” (p. 111). On the other hand, a conversion is a transformation of representation consisting of “changing a register without changing the objects being denoted” (e.g., passing from the definite integral (algebraic) notation of an inner product $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ to its graphic representation (as the area between the curve and the x -axis). In this vein, a conversion as a representation transformation is “more complex than treatment because any change of register first requires recognition of the same represented object between two representations whose contents have very often nothing in common” (p. 111).

What does it mean to understand in mathematics then? Although using signs and semiotic representations is the only way to access mathematical objects and to deal with them, “mathematical objects must never be confused with the semiotic representations that are used” (Duval, 2006, p. 106). Treatments and conversions, in that aspect, are fundamental transformations leading towards mathematical comprehension. As fundamental is the “simultaneous mobilization of at least two registers of representation, or the possibility of changing at any moment from one register to another... conceptual comprehension in mathematics involves a two-register synergy, and sometimes a three-register synergy” (p. 126). The focus of the present report is restricted largely to graphical (visual) and algebraic (analytical) semiotic registers of representations with an analysis in terms of coordination and conversion between different representation registers.

2.2. Data Collection and Analysis

Qualitative-descriptive interview data (Patton, 2002) were collected over three years in a university in the United States, as part of a research project which was designed for the purpose of enhancing mathematics and mathematics education majors’ content knowledge of advanced mathematics, with particular focus on geometry-calculus/analysis-linear/abstract algebra triad and connections within branches of advanced mathematics using technology. Qualitative interview sessions on advanced mathematical thinking were videotaped using one camera, with primary focus on students’ constructions and cursor-gestures on the MATLAB and GeoGebra DGS along with hand gestures and inscriptions.

The data for the analysis of inner product space concept came from the videotapes of interview sessions in a computer lab that included a total of sixteen mathematics majors who successfully completed a one-semester-long linear algebra course with course grades ranging from C to A (6A, 7B, 3C), who were interviewed by the author individually on separate days. The university linear algebra course students took had covered the first eight chapters of the textbook “Elementary Linear Algebra 7th Edition” by Ron Larson (2013). Students were familiar with the MATLAB and DGS as they had already used them during the preceding interview sessions on linear algebra topics; they were not provided any training or instructional help during the interviews. The qualitative interviews were based on a semi-structured interview model (Bernard, 1994; Kvale, 2007) in the course of which the interviewer – who is also the author of this article – followed-up with probes and questions on the interviewees’ responses. Students were asked to respond to a variety of interview questions with primary focus on orthogonal Legendre polynomials and inner product properties¹.

Students had already known the definition of an inner product [*Let $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, and $\mathbf{w}$ be vectors in a vector space V , and let c be any scalar. An inner product on V is a function that associates a real number $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ with each pair of vectors $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ and satisfies the axioms listed below.* 1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ 2. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ 3. $c\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle c\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ 4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$, and $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$ if and only if $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (Larson, 2013)] in general, and applied this textbook definition in various contexts of inner product spaces, for instance, to determine whether a certain given function satisfies the four axioms of an inner product. They were also familiar with other notions of relevance such as vector norm (length), distance between vectors, angle between vectors, orthogonal vectors and orthogonal projections in inner product spaces, and geometric type inequalities and theorems. Prior to the exploration of orthogonal Legendre polynomials, apart from various inner products (e.g., the Euclidean inner product) defined on vector spaces $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^n$; students also had previously learned and explored the Frobenius inner product $\langle A, B \rangle = \sum_{i,j} A_{ij}B_{ij} = \text{tr}(B^T A)$ for real $m \times n$ matrices A and B in the vector space $\mathbb{R}^{m \times n}$; along with the polynomial inner product $\langle p, q \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + \dots + a_nb_n$ for polynomials $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ and $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ in $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ in a similar DGS-MATLAB facilitated learning environment. In all these inner product spaces, students had also explored various inner product properties including orthogonality and orthonormal bases, along with other relevant topics of linear algebra such as span and spanning sets, linear independence and basis, coordinates relative to an orthogonal/orthonormal basis, change of basis, transition matrices.

¹ Most of the time, the students did not really investigate beyond $\mathbb{P}_3$ or $\mathbb{P}_4$. Appendix lists the interview outline (with tasks and sample probing questions) students explored during the interviews.

During the interviews, students were asked to think aloud, to clearly indicate their problem solving procedure, and to explain their reasoning in detail. Students were also granted access to scratch paper along with MATLAB and DGS to facilitate and clarify their explanations. All interview tasks were designed in such a way that they could be explored via both algebraic (analytical) and graphical (visual) approaches, in accord with the guiding theoretical framework used in the study. Though it was optional, all students were very eager and passionate about using MATLAB and DGS, primarily for checking their work, visualizing analytic approaches, testing conjectures, or providing examples and counter-examples. Analysis of data, which consists of videotaped qualitative interviews along with MATLAB-DGS work and inscriptions, was carried out using thematic analysis (Boyatzis, 1998) along with the theory of registers of semiotic representations (Duval, 1993, 2006). These analytical frameworks were primarily used to describe how research participants came up with a diversity of innovative and creative ways in which they coordinated and converted among various representation registers for understanding orthogonal Legendre polynomials and the inner product properties. After transcribing all interview videos, the original transcripts were reviewed line by line to gain access to the strategies (e.g., algebraic, geometric, graphical/visual, numerical, symbolic/notational, verbal/natural language, gestural semiotic registers) embraced by students as they explored Legendre polynomials and its relationship to other core concepts of linear algebra, in accordance with the research objective. The last cycle of data analysis process consisted of a holistic review of the corpus of data multiple times, in accordance with constant comparative methodology (Glaser & Strauss, 1967).

2.3. A-Priori Analysis: A Study of Semiotic Registers of Representation: The Case of Orthogonal Legendre Polynomials

Aligned with the constructs of the theoretical framework, a DGS/MATLAB-based exploration of Legendre polynomials in the polynomial inner product space was crucial, primarily to gain access into students' thinking and multiple ways of representing this very important content, which is at the crossroads of linear algebra and analysis. This section outlines a diversity of representation registers and their relationships that could come to interplay when Legendre polynomials are considered as vectors of the inner product space $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ with the associated definite integral inner product $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ for $f, g \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ in a technology-assisted learning environment.

2.3.1. Analytic/Algebraic Register

This seems to be the most widespread semiotic register in dealing with Legendre polynomials, which, in turn, is prone to a diversity of representations. To name a few, we have: (i) the implicit expression representation of the sequence of Legendre polynomials via the recurrence relation $(2n + 1)xP_n = (n + 1)P_{n+1} + nP_{n-1}$ with

$P_0 = 1$ and $P_1 = x$; (ii) the explicit expression representation of the sequence of Legendre polynomials via the Rodrigues' formula $P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ for all $n \geq 0$; (iii) When the Pythagorean Theorem is considered, for example, the equivalence of the algebraic expansion representation of $\|P_n + P_m\|^2$ in terms of inner products to the algebraic expansion representation of $\|P_n\|^2 + \|P_m\|^2$ within the algebraic register; (iv) When the coordinates representation $[\mathbf{p}]_{\mathcal{B}}$ of an arbitrary polynomial $\mathbf{p}$ relative to the orthonormal basis $\mathcal{B}$ of normalized Legendre Polynomials are considered, for instance, the equivalence of the squared norm representation $\|\mathbf{p}\|^2$ (with respect to the definite integral inner product) to the squared norm representation $||[\mathbf{p}]_{\mathcal{B}}|^2$ (with respect to the ordinary Euclidean inner product) within the algebraic register.

2.3.2. Visual/Graphical Register

Possible representations are: (i) [in coordination with 2.3.1(i)] an equivalent implicit expression representation of the sequence of Legendre polynomials via the recurrence relation $P_{n+1} = \frac{-nP_{n-1} + (2n+1)xP_n}{n+1}$ with $P_0 = 1$ and $P_1 = x$ which may come handy in the graphical approach, for example, when graphing using the input bar in *Graphics View* or using the cells in *Spreadsheets View*; (ii) The y-axis / origin symmetry representation of the product function $P_n P_m$ when $n + m = \text{odd} / \text{even}$ within the graphical register; (iii) The “always above the x-axis over the interval $[-1, 1]$ ” visualization of the product function $P_n P_m$ when $n = m$ within the graphical register; (iv) [in coordination with 2.3.2(iii)] When modelling the Parallelogram Law for $n \neq m$, for instance, the realization of the (vector sum) squared norm $\|P_n + P_m\|^2$ graphical representation and the (distance between vectors) squared norm $\|P_n - P_m\|^2$ graphical representation as “each other's y-axis symmetric graphical representations” within the graphical register.

2.3.3. Symbolic Register

Closely related to algebraic/analytic representation register, symbolic register could be thought of as encompassing signs or symbols in general (not necessarily solely pertaining to algebra). Examples of representations in this register include: (i) The squared norm representation $\|P_n\|^2 = \langle P_n, P_n \rangle$ in relation to the inner product notation in the symbolic register; (ii) The vector norm representation $\|P_n\| = \sqrt{\langle P_n, P_n \rangle}$ in relation to the square root of the inner product notation within the symbolic register; (iii) When the Triangle Inequality or the Pythagorean Theorem is considered, for example, an accurate labeling of the sides of the drawn triangle using the vector norm representation $\|P_n\|$ within the symbolic register; (iv) Using the chain of symbols $m \neq n \Rightarrow P_n \perp P_m \Rightarrow \langle P_n, P_m \rangle = 0$ in representing orthogonality of a pair of Legendre polynomials; (v) Use of various signs or symbols (not only relevant to algebra) in general.

2.3.4. Geometric Register

Possible representations are: (i) A right triangle drawn representation modelling the orthogonality of a pair of orthogonal Legendre polynomials within the geometric register; (ii) The “obvious cancelling areas resulting in zero net area between the curve and the x -axis over the interval $[-1,1]$ ” visualization of the product function $P_n P_m$ when $n \neq m \wedge n + m$ odd within the geometric register; (iii) [in coordination with 2.3.2(iii)] The “positive area between the curve and the x -axis over the interval $[-1,1]$ ” visualization of the product function $P_n P_m$ when $n = m$ within the geometric register; (iv) The “nontrivial zero net area between the curve and the x -axis over the interval $[-1,1]$ ” visualization of the product function $P_n P_m$ when $n \neq m \wedge n + m$ even within the geometric register; (v) [in coordination with 2.3.2(iv)] When modelling the Parallelogram Law for $n \neq m$, for instance, the equivalence of the “area between the curve $(P_n + P_m)^2$ and the x -axis over the interval $[-1,1]$ ” and the “area between the curve $(P_n - P_m)^2$ and the x -axis over the interval $[-1,1]$ ” as “equality in areas” geometric representation within the geometric register.

2.3.5. Numerical Register

Examples of representations in this register include: (i) When the case $m + n$ odd ($m \neq n$ sous-entendu) is considered, for instance, the equivalence of the inner products $\langle x^m, x^n \rangle$ and $\langle P_m, P_n \rangle$ in zero numerical value; (ii) When the case $m = n$ is considered the equivalence of the inner products $\langle x^m, x^n \rangle$ and $\langle P_m, P_n \rangle$ in numerical value (both having the $\frac{2}{2n+1}$ numerical value representation within the numerical register; (iii) [in coordination with 2.3.3(iii)] When the Triangle Inequality or the Pythagorean Theorem is considered, for example, an accurate labeling of the sides of the drawn triangle using the numerical value representation $\sqrt{\frac{2}{2n+1}}$ of the vector norm (e.g., for $n = 2$, the numerical value of $\|P_n\|$ is $\sqrt{2/5}$) within the symbolic register.

2.3.6. Verbal (Natural Language) Register

Plenty of representations in this category are possible: (i) P_n is an even / odd function for n even / odd (and contains only even / odd powers of x) accordingly its graph is symmetric with respect to the y -axis / origin; (ii) In the context of orthogonal Legendre polynomials, Cauchy-Schwarz Inequality $\langle P_n, P_m \rangle \langle P_n, P_m \rangle \leq \langle P_n, P_n \rangle \langle P_m, P_m \rangle$ can be verified by merely noting that the right-hand side is always positive whereas the left-hand side is either zero or equal to the right-hand side; (iii) In establishing Legendre polynomials as an orthogonal basis for $\mathbb{P}_n$, it is sufficient to use orthogonality to test for a basis.

2.3.7. Gestural Register

In coordination with graphical or geometric representation registers, for instance: (i) Finger gestures pointing to the lower and upper integration limits when the definite integral inner product is considered; (ii) [in coordination with 2.3.2(ii)] Finger gestures pointing to the pairs of cancelling areas in the graphical representation of the definite integral of the product function $P_n P_m$ when $n + m = \text{odd}$.

2.3.8. Artifactual Register

In coordination with geometric or symbolic representation registers, for instance: (i) Modelling a relationship of Legendre polynomials as a triangle or a parallelogram artifact; (ii) Modelling the inner product $\langle P_n, P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_n P_m dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$ as a diagonal matrix model, the Gramian matrix artifact, with generic diagonal entry of the form $2 \int_0^1 P_n P_n dx$; (iii) When the normalized Legendre polynomials are considered, modelling the completeness relation $\langle \mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j \rangle = \int_{-1}^1 p_i p_j dx = \delta_{ij}$ as a special diagonal matrix, the Gramian matrix, with n^2 entries consisting of the n^2 inner products, within the artifactual register.

2.3.9. Interplay Among Registers

In a DGS/MATLAB-facilitated investigation of the family of Legendre polynomials, *conversions* of a representation can occur in a variety of ways. Some examples are: (i) Changing from the algebraic/analytic register to the graphical register in the exploration of the inner product of two Legendre polynomials: passing from the algebraic definite integral inner product $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ to the graphical definite integral inner product as the area between the curve and the x -axis over the interval $[-1,1]$; (ii) Passing from the implicit algebraic representation of the sequence of Legendre polynomials via the recurrence relation $(2n+1)xP_n = (n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}$ with $P_0 = 1$ and $P_1 = x$ to the implicit graphical representation of the sequence of Legendre polynomials via the recurrence relation $P_{n+1} = \frac{-nP_{n-1} + (2n+1)xP_n}{n+1}$ with $P_0 = 1$ and $P_1 = x$.

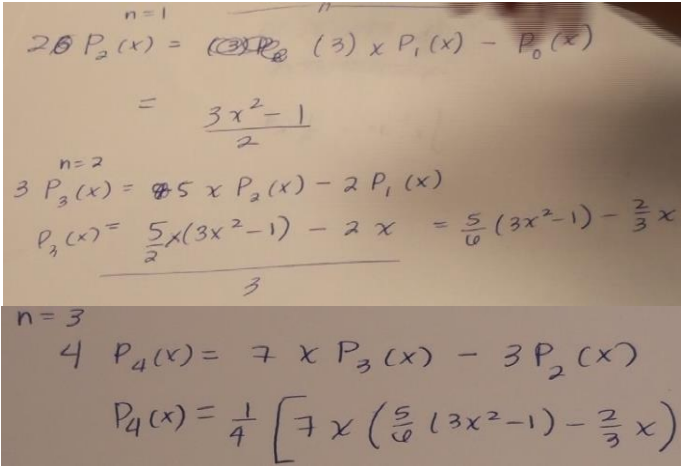
Treatments, that is, representations happening within the same register can be observed in many ways: (i) The equivalence of the inner products $\langle x^m, x^n \rangle$ and $\langle P_m, P_n \rangle$ in numerical value when the case $m + n$ odd is explored, within the numerical register; (ii) The equivalence of the vector norms $\|P_n + P_m\|$ and $\|P_n - P_m\|$ in the investigation of Paralleogram Law within the algebraic register, or within the geometric register as either norm representing the length of either one of the congruent diagonals of a special parallelogram, that is, a rectangle.

3. Results

This section presents the findings on math majors' representations of Legendre polynomials and integral inner product properties in a MATLAB-DGS assisted learning environment. Overall, research participants provided a diversity of visual and analytic representations in their exploration of the orthogonal set $\{P_0, P_1, P_2, \dots\}$ of Legendre polynomials with the associated integral inner product $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$. The first part of the analysis focuses on students' evaluation and interpreting of inner products $\langle P_m, P_n \rangle$ for $m = n$ and $m \neq n$, parity relationships and comparison of inner products $\langle x^n, x^m \rangle$ and $\langle P_m, P_n \rangle$ [3.1-3.3]. The section then concludes with students' establishing of the orthogonality via analytic and visual approaches, followed by the verification of Cauchy-Schwarz Inequality, Triangle Inequality, and Pythagorean Theorem [3.4-3.5].

3.1. Generating Legendre Polynomials $\{P_n\}$ Recursively or Explicitly

Students began their exploration of the Legendre polynomials $\{P_n\}$ by actually obtaining the sequence of Legendre polynomials $\{P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = \frac{3x^2-1}{2}, P_3 = \frac{5x^3-3x}{2}, \dots\}$ either recursively via the recurrence relation $(2n+1)xP_n = (n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}$ with $P_0 = 1$ and $P_1 = x$ (e.g., fig.1); or explicitly using the Rodrigues' formula $P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$ for all $n \geq 0$ (e.g., fig.2).



Handwritten recursive formula for Legendre polynomials:

$$\begin{aligned}
 n=1 \quad 2P_2(x) &= (3) \cdot x P_1(x) - P_0(x) \\
 &= \frac{3x^2-1}{2} \\
 n=2 \quad 3P_3(x) &= 5x P_2(x) - 2P_1(x) \\
 P_3(x) &= \frac{5x(3x^2-1) - 2x}{3} = \frac{5}{6}(3x^2-1) - \frac{2}{3}x \\
 n=3 \quad 4P_4(x) &= 7x P_3(x) - 3P_2(x) \\
 P_4(x) &= \frac{1}{4} \left[7x \left(\frac{5}{6}(3x^2-1) - \frac{2}{3}x \right) - \frac{3x^2-1}{2} \right]
 \end{aligned}$$

Figure 1. Gaby's Recursive Formula

$$P_n(x) = P_n(x) \cdot (-1)^n$$

$$P_2(x) = \frac{1}{4 \cdot 2!} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^2$$

$$\frac{2(x^2 - 1) \cdot 2x}{4 \cdot 3 - 4x}$$

$$\frac{12x^2 - 4}{8} = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

Figure 2. Andy's Rodrigues' Formula

In either group, students made use of analytic and visual approaches in a coordinative manner. Whereas analytic approach proved easy and straightforward for the most part, the visual approach offered a diversity of creative and innovative visualizations of Legendre polynomials using the Geogebra Dynamic Geometry Software (DGS). Among those who visualized Legendre polynomials on the DGS, one group of students including Andy and Kyra graphed the Legendre polynomials by typing the formula of each Legendre polynomial that was obtained recursively algebraically (fig.3 and 4). Another group of students used the spreadsheet feature of the DGS and obtained the expression for each Legendre polynomial for $n \geq 2$ by using the recurrence relation $P_{n+1} = \frac{-nP_{n-1} + (2n+1)xP_n}{n+1}$ with $P_0 = 1$ and $P_1 = x$. There were also those who used the Rodrigues' formula $P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ to obtain all Legendre polynomials $n \geq 0$ using spreadsheet functionalities.

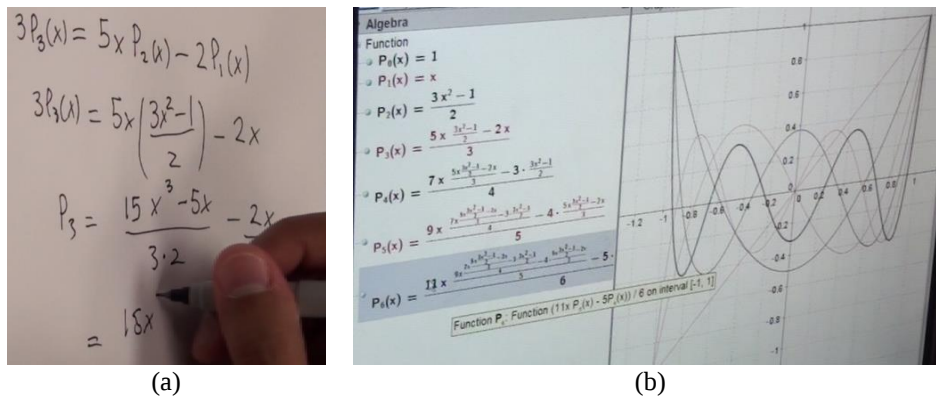
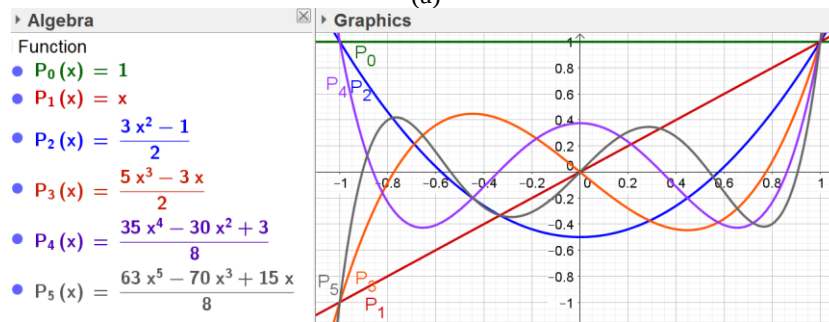


Figure 3. Andy's Analytic and Visual Approaches

$P_0(x) = 1$
 $P_1(x) = x$
 $(1-x)P_1(x) = 1(1-x) + xP_1(x) - xP_0(x)$
 $2P_2(x) = 3x(x) - 1 \rightarrow P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$
 $3P_3(x) = 5xP_2(x) - 2P_1(x)$
 $3P_3(x) = 5x\left(\frac{3x^2 - 1}{2}\right) - 2x \rightarrow P_3(x) = \frac{5x^3 - 3x}{2}$
 $4P_4(x) = 7(5x^3 - 3x)P_1(x) - 3P_2(x)$
 $4P_4(x) = 7x\left(\frac{5x^3 - 3x}{2}\right) - 3\left(\frac{3x^2 - 1}{2}\right)$

(a)



(b)

Figure 4. Kyra's Analytic and Visual Approaches

Because the integral inner product for the Legendre polynomials is defined over the interval $[-1, 1]$, several students including Liz and Dana used the piecewise defined function syntax to graph these polynomials. To graph P_2 and P_3 over the interval $[-1, 1]$, for instance, Dana respectively typed **P_2=Function[(3x^2-1)/2,-1,1]** and **P_3=Function[(5x^3-3x)/2,-1,1]**. Dana then used the syntax **Integral[P_2*P_3,-1,1]** to verify the orthogonality of P_2 and P_3 (fig.5a). To calculate the squared norms $\|P_2\|^2$ and $\|P_3\|^2$, she respectively typed **Integral[P_2*P_2,-1,1]** and **Integral[P_3*P_3,-1,1]** (fig.5b-c).

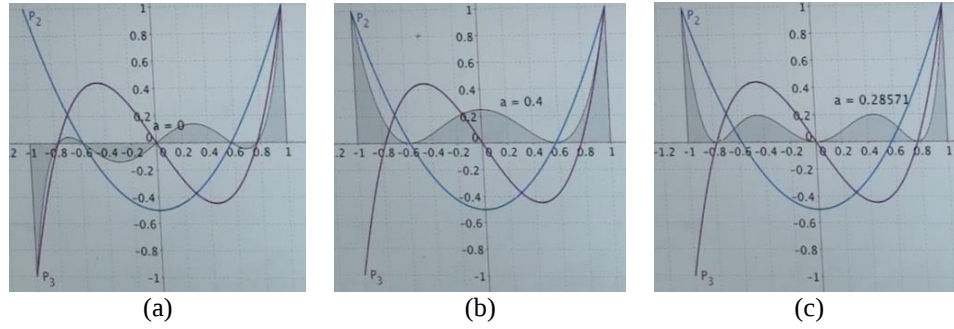


Figure 5. Dana's Piecewise Defined Function Syntax for Graphing Legendre Polynomials

Students in either group came up with various discoveries regarding the behavior of the Legendre polynomials along with graphing strategies associated with the DGS: (i) Every time a Legendre polynomial's expression is obtained in *Spreadsheet View*, the graph corresponding to the Legendre polynomial immediately appeared in *Graphics View*; (ii) The “**Simplify**” syntax proved crucial in obtaining the sought Legendre polynomials; (iii) Some other DGS related strategies such as “Zoom out” or “Scale Change” played an important role in the analysis of Legendre polynomials (e.g., in establishing the fact that the Legendre polynomial of order n has n roots, or the orthogonality of two Legendre polynomials via the cancelling areas argument), especially for $n \geq 4$; (iv) P_n is an odd function for n odd (and contains only odd powers of x) whence its graph is symmetric with respect to the origin; (v) P_n is an even function for n even (and contains only even powers of x) accordingly its graph is symmetric with respect to the y -axis; (vi) Some students came up with the parity equation $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ designating the odd/even case all at once; (vii) The discovery of **Derivative(<Function>, <Variable>, <Number>)** syntax took some time for some of the students who embraced the Rodrigues' Formula approach; (viii) For the case n odd, $P_n(0) = 0$; (ix) For the case n even, $P_n(0)$ is alternately positive and negative as in the sequence of numbers $1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, -\frac{5}{16}, \frac{35}{128}, -\frac{63}{256}, \dots$; (x) Each Legendre polynomial P_n has n distinct roots in the interval $[-1, 1]$.

3.2. Evaluating and Interpreting $\langle P_m, P_n \rangle$ for $m = n$ and $m \neq n$

Once Legendre polynomials were generated algebraically and visually, students moved to the task of evaluating inner products. At first, all students made use of basic calculus integration properties in evaluating inner products $\langle P_m, P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_m P_n dx$ for $m = n$ and $m \neq n$ (e.g., fig.6 and 7).

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 \left(\frac{3x^2-1}{2} \right) \left(\frac{3x^2-1}{2} \right) dx \\
 & \frac{1}{4} \int_{-1}^1 9x^4 - 6x^2 + 1 dx = \frac{1}{4} \left[\frac{9}{5}x^5 - \frac{6}{3}x^3 + x \right] \Big|_{-1}^1 \quad \begin{array}{l} P_0 = 0 \\ P_1 = x \\ P_2 = \frac{3x^2-1}{2} \end{array} \\
 & \frac{1}{4} \left[\frac{9}{5} - 2 + 1 + \frac{9}{5} - 2 + 1 \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{18}{5} - 2 \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{18}{5} - \frac{10}{5} \right] \\
 & = \frac{1}{4} \left[\frac{8}{5} \right] = \boxed{\frac{2}{5}} \\
 \\
 & \int_{-1}^1 x \left(\frac{3x^2-1}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 3x^3 - x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right] \Big|_{-1}^1 \\
 & \frac{1}{2} \left[\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}(0) = \boxed{0}
 \end{aligned}$$

Figure 6. Gaby's Integrations for the Inner Products $\langle P_m, P_n \rangle$

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 P_3 P_3 dx &= \int_{-1}^1 \frac{(5x^3-3x)^2}{4} dx = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 25x^6 - 30x^4 + 9x^2 dx \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{25x^7}{7} - 6x^5 + 3x^3 \right] \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{4} \left[\frac{25}{7} - 3 - \left(-\frac{25}{7} + 3 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[\frac{50}{7} - 6 \right] = \frac{1}{4} \left(\frac{8}{7} \right) = \frac{2}{7} \\
 \\
 \int_{-1}^1 P_2 P_4 dx &= \int_{-1}^1 \frac{(3x^2-1)(35x^4-48x^2+9)}{24} dx = \int_{-1}^1 \frac{(3x^2-1)(35x^4-48x^2+9)}{48} dx \\
 &= \frac{1}{48} \int_{-1}^1 105x^6 - 144x^4 + 27x^2 - 35x^4 + 48x^2 + 9 dx = \frac{1}{48} \int_{-1}^1 105x^6 - 179x^4 + 75x^2 + 9 dx \\
 &= \frac{1}{48} \left[15x^7 - \frac{179x^5}{5} + 7x^3 + 9x \right] \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{48} \left[15 - \frac{179}{5} + 7 + 9 - \left(-15 + \frac{179}{5} - 7 - 9 \right) \right] \\
 &= \frac{1}{48} \left[31 - \frac{179}{5} - \left(-\frac{179}{5} - 31 \right) \right] = \frac{1}{48} \left[-62 - \frac{358}{5} \right] = \frac{1}{48} \left[\frac{-668}{5} \right] = \frac{-668}{240}
 \end{aligned}$$

Figure 7. Kyra's Integrations for the Inner Products $\langle P_m, P_n \rangle$

Because the powers of x repeatedly appeared in the integrand, many students came up with a formula which they thought would become handy in simplifying calculations. Among those who realized this fact were Val, Gaby, Liz, and Macy, who developed a formula for the inner product $\langle x^m, x^n \rangle$ for the two particular cases where $m+n$ is odd or even, respectively (fig.8-11). Gaby, for instance, explained: “If $m+n$ is even then $m+n+1$ is odd for which the inner product equals the fraction $\frac{2}{m+n+1}$; otherwise zero, meaning they are orthogonal.” Andy referred to the odd/even function properties in his explanation for why the inner product $\langle x^m, x^n \rangle$ would vanish for the case where the integrand is an odd function when the lower and upper limits of integration are -1 and 1 . Liz was among those who made use of the even integrand property to simplify $\int_{-1}^1 x^{m+n} dx$ as $2 \int_0^1 x^{m+n} dx$ before ultimately evaluating the definite integral (fig.5c). In this aspect, Andy and Liz can be considered to have adopted a simplified definite integral representation within the symbolic register for why the inner product $\langle x^m, x^n \rangle$ should vanish, or should be simplified as $2 \int_0^1 x^{m+n} dx$, respectively, in terms of the representation registers theory (Duval, 1993, 2006). Overall, students seemed to have made use of a diversity of Calculus properties in their exploration of the defining properties of the integral inner product $\langle P_m, P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_m P_n dx$ in general, and $\langle x^m, x^n \rangle = \int_{-1}^1 x^m x^n dx$ in particular.

$$\int_{-1}^1 x^{m+n} dx = \frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} \Big|_{-1}^1$$

Consider $m+n = 2j+1$.

$$\frac{x^{2j+2}}{2j+2} \Big|_{-1}^1 = \frac{1^{2j+2}}{2j+2} - \frac{(-1)^{2j+2}}{2j+2}$$

$$= \frac{1^{2j+2}}{2j+2} - \frac{1^{2j+2}}{2j+2} = 0$$

Consider $m+n = 2j$

$$\frac{x^{2j+1}}{2j+1} \Big|_{-1}^1 = \frac{1^{2j+1}}{2j+1} - \frac{(-1)^{2j+1}}{2j+1}$$

$$= \frac{1^{2j+1}}{2j+1} + \frac{(-1)^{2j}}{2j+1} = \frac{1}{2j+1} + \frac{1}{2j+1}$$

$$= \frac{2}{m+n+1}$$

Figure 8. Val's Formulas for $\langle x^m, x^n \rangle$

$$\int_{-1}^1 x^{m+n} dx = \frac{1}{m+n+1} x^{m+n+1} \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{m+n+1} (1)^{m+n+1} - \frac{1}{m+n+1} (-1)^{m+n+1}$$

if $m+n$ is even, then $m+n+1$ is odd

$$\frac{1}{m+n+1} - \left(\frac{-1}{m+n+1} \right) = \frac{1+1}{m+n+1} = \frac{2}{m+n+1}$$

$$3 P_3(x) = (3x^3 - 3x)/2$$

Figure 9. Gaby's Formulas for $\langle x^m, x^n \rangle$

$$\langle x^m, x^n \rangle = \int_{-1}^1 x^{m+n} dx = 0 \quad \text{where } m+n = \text{odd}$$

$$= 2 \int_0^1 x^{m+n} dx = \frac{2}{m+n+1} \quad \text{where } m+n = \text{even}$$

Figure 10. Liz's Formulas for $\langle x^m, x^n \rangle$

$$\frac{2}{m+n+1} = \int_{-1}^1 x^{m+n} dx = \frac{x^{m+n+1}}{m+n+1} \Big|_{-1}^1 = \frac{1^{m+n+1} - (-1)^{m+n+1}}{m+n+1}$$

0 when $m+n$ is odd

$$\frac{1}{m+n+1} - \frac{-1}{m+n+1} = \frac{1+1}{m+n+1} = \frac{2}{m+n+1}$$

Figure 11. Macy's Formulas for $\langle x^m, x^n \rangle$

Upon coming up with such formulas for the inner products $\langle x^m, x^n \rangle$, many students made use of defining properties of inner product (e.g., symmetry, linearity) in progression towards an understanding of the expansion of inner products $\langle P_m, P_n \rangle$ in terms of the inner products $\langle x^m, x^n \rangle$. In this sense, all students appeared to progress organically toward generalizations by way of a formula they just discovered: Coming up with a formula for the inner products $\langle x^m, x^n \rangle$ was a significant one. The other remarkable achievement was students' ability to actually apply this formula in various inner products involving Legendre polynomials. Among those were Val, Jill, Gaby, Liz, Suzan, and Andy who primarily made use of the linearity and symmetry of the integral product $\langle P_m, P_n \rangle = \int_{-1}^1 P_m P_n dx$, which is what enabled them to involve the formula for $\langle x^m, x^n \rangle$ throughout their calculations (fig.12-16). In Duval's terms, this can be thought of as an expanded sum representation of $\langle P_m, P_n \rangle$ in the symbolic register as a linear combination of inner products $\langle x^m, x^n \rangle$.

$$\langle p_2, p_2 \rangle = \int_{-1}^1 (p_2(x))^2 dx = 0.4$$

$$\langle p_2, p_3 \rangle = \int_{-1}^1 p_2(x) p_3(x) dx$$

$$\langle \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x, \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \rangle = \int_{-1}^1 (\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x)(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 (\frac{15}{4}x^5 - \frac{9}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{3}{4}x) dx$$

$$= \frac{15}{4} \int_{-1}^1 x^5 dx - \frac{9}{4} \int_{-1}^1 x^3 dx - \frac{5}{4} \int_{-1}^1 x^3 dx + \frac{3}{4} \int_{-1}^1 x dx$$

$$= \frac{15}{4} \cdot \frac{2}{6} - \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{4} - \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{2} = 0.4$$

because the cross products are from the $x^2 x^2$ and $x^3 x^3$ and

Figure 12. Val's Written Work

$$\langle p_2, p_2 \rangle = \int_{-1}^1 (\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x)(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 (\frac{9}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x) dx$$

$$= \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{5} - \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{2} = 0.4$$

Figure 13. Suzan's Written Work

$$\langle \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}x^0 \rangle$$

$$= \int_{-1}^1 (\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x)(\frac{35}{8}x^4 - \frac{30}{8}x^2 + \frac{3}{8}x^0) dx$$

$$= \int_{-1}^1 (\frac{175}{16}x^7 - \frac{105}{8}x^5 - \frac{105}{16}x^5 + \frac{9}{4}x^3 - \frac{45}{8}x^3 + \frac{9}{16}x) dx$$

$$= \frac{175}{16} \cdot \frac{2}{8} - \frac{105}{8} \cdot \frac{2}{6} - \frac{105}{16} \cdot \frac{2}{6} + \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{4} - \frac{45}{8} \cdot \frac{2}{4} + \frac{9}{16} \cdot \frac{2}{2} = 0$$

Figure 14. Gaby's Written Work

$$\langle p_2, p_3 \rangle = \int_{-1}^1 (\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x)(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 (\frac{15}{4}x^5 - \frac{9}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{3}{4}x) dx$$

$$= \frac{15}{4} \cdot \frac{2}{6} - \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{4} - \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{2} = 0$$

Figure 15. Jill's Written Work

$$p_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad p_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$\langle p_2, p_3 \rangle = \int_{-1}^1 (\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2})(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 (\frac{15}{4}x^5 - \frac{9}{4}x^3 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{3}{4}x) dx$$

$$= \frac{15}{4} \cdot \frac{2}{6} - \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{4} - \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{2} = 0$$

Figure 16. Andy's Written Work

3.3. Parity Relationships : Students' Comparison of $\langle x^n, x^m \rangle$ and $\langle P_m, P_n \rangle$

Upon generating Legendre polynomials recursively (both analytically and visually), Gaby first verified orthogonality of Legendre Polynomials visually. As an example, she used P_2 and P_3 ; she indicated that the inner product $\langle P_2, P_3 \rangle = \int_{-1}^1 P_2 P_3 dx$ would vanish, while emphasizing the integration limits as -1 and 1 with finger gesture (fig.17a). She further stated that the inner product might not have vanished had she used different integration limits. Gaby also visually showed that the inner products $\langle P_2, P_4 \rangle$ and $\langle P_3, P_4 \rangle$ both vanish, respectively (fig.17b-c). She also illustrated the nonvanishing case with the inner products $\langle P_2, P_2 \rangle$ and $\langle P_3, P_3 \rangle$, respectively (fig.17d-e). Gaby's gestures accompanied with verbal explanations for the vanishing inner product recount the diversity of representation registers (symbolic, gestural, visual, verbal) that are available at this particular instantiation, and the interplay among these registers in an attempt to discover an important fact about Legendre polynomials family.

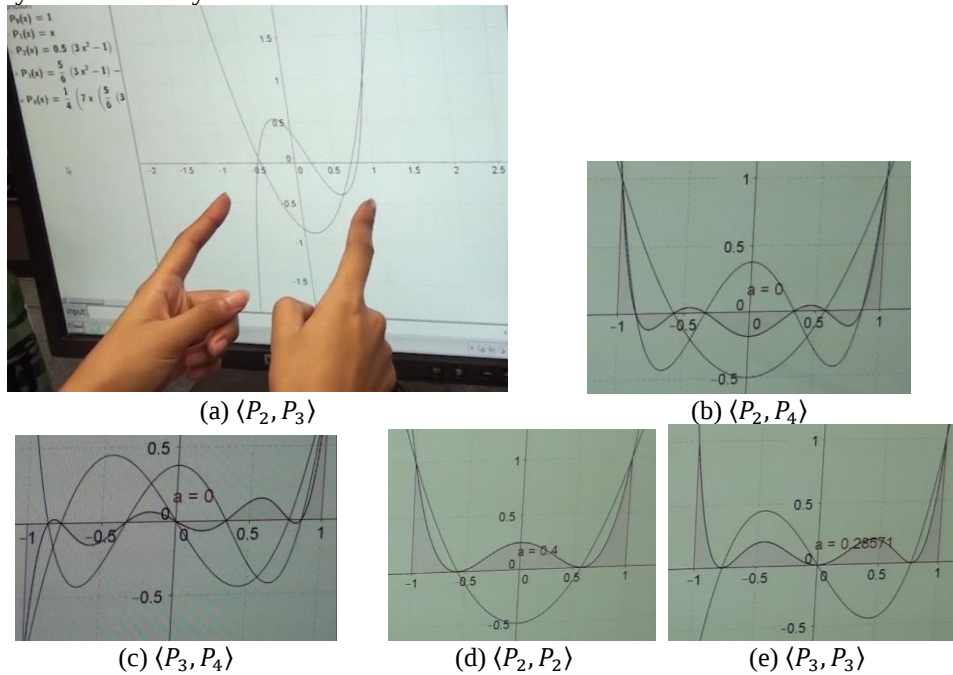


Figure 17. Interplay between Graphical and Gestural Registers

It is important to compare and contrast Gaby's visual arguments about $\langle P_2, P_4 \rangle$ and $\langle P_3, P_4 \rangle$, since these two vanishing inner products cannot be visualized in the same way. As was also articulated by many students including Gaby, the orthogonality of P_2 and P_3 can be visualized in a convincing way by observing that the algebraic product of the functions P_2 and P_3 itself is an odd function; so the orthogonality is a

consequence of the fact that the center of the interval $[-1, 1]$ is zero². It is also worth noting the very different situation with P_2 and P_4 , for which there is no equivalent argument (since the orthogonality of these polynomials does not come from the oddity of the algebraic product anymore). In this case, the values -1 and 1 are of crucial importance, not the fact that they are opposite values. Taking opposite values for the bounds of the interval may still simplify the visualization (since P_2P_4 is an even function), but the main issue looks more like an educated guess of the value of a number b for which positive and negative areas defined by P_2P_4 in the interval $[-b, b]$ cancel out. Unfortunately, Gaby's finger gestures do not seem to indicate an understanding of this difficult case.

Several students indicated that the inner product $\langle x^m, x^n \rangle$ becoming zero for the case $m + n$ odd would be analogous to the inner product $\langle P_m, P_n \rangle$ becoming zero for the case $m + n$ odd as well. Suzan, for instance, stated that when $m + n$ is odd, then this would require that $m \neq n$ which implies $P_m \neq P_n$, therefore, the zero inner product $\langle P_m, P_n \rangle = 0$. As shown above, an important stage was students' realization that the inner product $\langle x^m, x^n \rangle$ could be easily calculated via the formula $\langle x^m, x^n \rangle = \begin{cases} \frac{2}{m+n+1}, m+n \text{ even} \\ 0, m+n \text{ odd} \end{cases}$. That said, the realization that the inner product $\langle P_n, P_m \rangle$ could too be easily calculated by way of a similar formula was not immediate. Liz's first conjecture was that the inner product $\langle P_n, P_m \rangle$ would be nonzero for the case $m + n$ even, just as how it was for the inner product $\langle x^m, x^n \rangle$ for which she had discovered a formula earlier. She suggested the same formula she had established earlier for the inner product of Legendre polynomials as $\langle P_n, P_m \rangle = \frac{2}{m+n+1}$ and used it to calculate several inner products (fig.18a). She was very happy to see that her visual approach was in agreement with her formula for the calculations of $\langle P_2, P_2 \rangle$ and $\langle P_3, P_3 \rangle$, both pertaining to the case where $m + n$ is even (fig.18b-c). She then visualized more inner products as she graphed $\langle P_2, P_3 \rangle$ and noted that it vanished (fig.18d). Liz further deduced that just because $\langle x^m, x^n \rangle$ does not vanish for the case $m + n$ even would not necessarily imply that $\langle P_m, P_n \rangle$ should not vanish for the case $m + n$ even as well. She offered the pair $\langle x^2, x^4 \rangle = \frac{2}{7}$ and $\langle P_2, P_4 \rangle = 0$ as an example to illustrate her thinking. She further stated that the only time the inner product $\langle P_m, P_n \rangle \neq 0$ occurs is when $m = n$. She concluded her explanation by referring to the visualization that

² Although she did not generalize her interpretation for any interval of the form $[-a, a]$ in her work with Legendre polynomials, in a follow-up study with the exploration of the orthogonal Hermite polynomials with the associated improper integral inner product $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)g(x)dx$, Gaby often made use of such balls on the x -axis centered at zero as $[-5, 5]$, $[-10, 10]$, $[-100, 100]$, etc. In that aspect, Gaby's finger gestures can be thought of as emphasizing this symmetry.

the nonvanishing inner products $\langle P_2, P_2 \rangle = 0.4 \neq 0$ and $\langle P_3, P_3 \rangle = 2/7 \neq 0$. Her final comment was that her formula would work only for the case where $m = n$, irrespective of the parity of $m + n$.

The more they explored inner products involving Legendre polynomials, all students eventually discovered that $\langle P_m, P_n \rangle$ would equal zero for $m \neq n$. For the case $m = n$, upon observing the emerging pattern $\langle P_1, P_1 \rangle = \frac{2}{1}, \langle P_2, P_2 \rangle = \frac{2}{3}, \langle P_3, P_3 \rangle = \frac{2}{5}, \langle P_4, P_4 \rangle = \frac{2}{7}, \langle P_5, P_5 \rangle = \frac{2}{9}, \dots$ within the numerical register, students suggested the formula $\langle P_n, P_n \rangle = \frac{2}{2n+1}$ in compact form and frequently used it in the rest of their explorations.

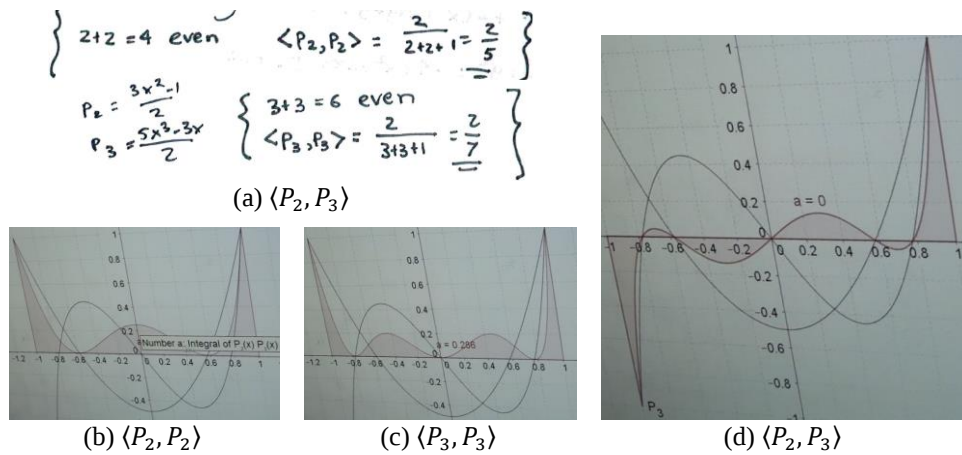


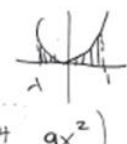
Figure 18. Liz's Conjecture $\langle P_n, P_m \rangle = \frac{2}{m+n+1}$ Tested

3.4. Establishing Orthogonality via Analytic and Visual Approaches

Students used a diversity of techniques in establishing orthogonality of Legendre polynomials both analytically and visually. Within the analytic approach, odd/even integrand Calculus properties were among the more frequently utilized ones. As an example, in his analytic approach, Andy conjectured that the integral $\langle P_1, P_2 \rangle$ would vanish because the integrand would be an odd function. He algebraically verified his conjecture, and even came up with an odd function generic representation of the graph of the integrand (fig.19a). He further explained that all inner products of the form $\langle P_n, P_n \rangle$ would result in an even integrand, $(P_n)^2$, whose graph is always above the x -axis, producing a nonzero integral. As an example, he worked out the inner product $\langle P_3, P_3 \rangle$; he indicated that the integrand would be even so the integral would not vanish. He also drew an even function generic representation for the integrand as well (fig.19b).

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 P_1(x)P_2(x)dx &= \int_{-1}^1 x \left(\frac{3x^2-1}{2} \right) dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left(\frac{3x^3}{2} - \frac{x}{2} \right) dx \\
 &= \left[\frac{3x^4}{8} - \frac{x^2}{4} \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{3}{8} - \frac{1}{4} - \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4} \right) = 0
 \end{aligned}$$


(a)

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 P_3(x)P_3(x)dx &= \int_{-1}^1 \left(\frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2} \right) \left(\frac{5x^3}{2} - \frac{3x}{2} \right) dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left(\frac{25x^6}{4} - \frac{15x^4}{4} + \frac{9x^2}{4} \right) dx \\
 &= \left[\frac{25x^7}{28} - \frac{30x^5}{20} + \frac{9x^3}{12} \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{25}{28} - \frac{30}{20} + \frac{9}{12} - \left(-\frac{25}{28} + \frac{30}{20} - \frac{9}{12} \right) \\
 &\Rightarrow \frac{25}{28} - \frac{30}{20} + \frac{9}{12} + \frac{25}{28} - \frac{30}{20} + \frac{9}{12} \\
 &= \frac{25}{14} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \\
 &= \frac{25}{14} - \frac{30}{14} + \frac{9}{14} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}
 \end{aligned}$$


(b)

Figure 19. Andy's Reference to Odd/Even Function Properties

Andy's drawn representations are reminiscent of the notion of "content of a representation" in a treatment. Although the integrand $P_1P_2 = 1.5x^3 - 0.5x$ (the actual object) is a vertically stretched cubic polynomial with three x -intercepts, what Andy drew seems to be *his* generic representation of an odd function within the graphical register. Similarly, the integrand $P_3P_3 = (5x^3 - 3x)^2/4$ is a polynomial of degree 6, yet Andy's drawn representation communicates a different content – that of x^2 . The difference between the content of the representation and the actual object in either case (integrand P_1P_2 and integrand P_3P_3) does not seem to pose an obstacle for Andy's explanation for $\langle P_1, P_2 \rangle = 0$ and $\langle P_3, P_3 \rangle \neq 0$, respectively. It is also worth noting that Andy did not recognize the most difficult case (the case $\langle P_m, P_n \rangle (m \neq n)$ with m and n both even or both odd)³.

³ The case $m \neq n$ with even integrand did not catch Andy's attention. Only Liz and Val recognized this situation.

When the interviewer asked Liz her thoughts about the inner products she evaluated (fig.18a-d), she further explored the three inner products $\langle P_2, P_3 \rangle$, $\langle P_2, P_2 \rangle$, $\langle P_3, P_3 \rangle$ respectively. Regarding the graph of $\langle P_2, P_3 \rangle$, she commented: “Something seems wrong with it... Like I am not... It does not seem like what I was expecting to see. Like, the value [meaning the value of the inner product $\langle P_2, P_3 \rangle$] seems right but the way that it... I don't know I just... I did not expect that shape [respectively pointing to the areas below and above the x-axis that cancel for the inner product $\langle P_2, P_3 \rangle$ she just calculated (fig.20a)] For some reason I was just trying to combine the shapes not really multiply them.” Her reaction about how the shape she obtained was not what she was expecting to see made the interviewer probe further on her response. The interviewer asked her thoughts about the shapes of the inner products $\langle P_2, P_2 \rangle$ and $\langle P_3, P_3 \rangle$ as well. She redid $\langle P_2, P_2 \rangle$ and commented: “You are multiplying that [meaning P_2] by itself so some type of... I don't think it will actually be orthogonal to itself... I don't expect the ending value to be zero.” Upon visualizing the inner product $\langle P_2, P_2 \rangle$, she pointed to the area under curve always being above the x-axis as the reason for the nonzero inner product (fig.20b). She provided a similar explanation for the nonvanishing inner product $\langle P_3, P_3 \rangle$ (fig.20c).

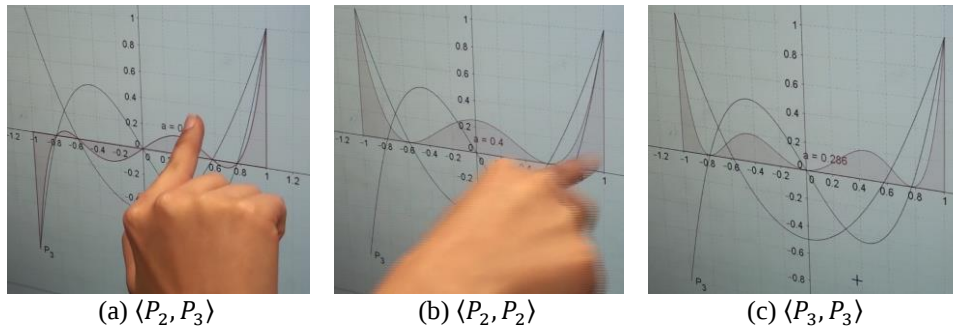


Figure 20. Liz's Visualization of the Inner Products $\langle P_2, P_3 \rangle$, $\langle P_2, P_2 \rangle$, $\langle P_3, P_3 \rangle$

Like Liz, Val did not seem to be bothered with the shape of nonvanishing inner products. However, for vanishing inner products, she was surprised just as how Liz was surprised regarding the shapes that emerged. Val thought aloud: “So like... I was just thinking... What does it mean for two polynomials to be orthogonal to each other cuz that's like kind of weird because I guess having the property of being orthogonal is normally a geometric thing instead of an algebraic thing... but it's being defined as the inner product is equal to zero I guess... because I tried to zoom out and I tried to see like maybe they look orthogonal but they don't look orthogonal to me.”

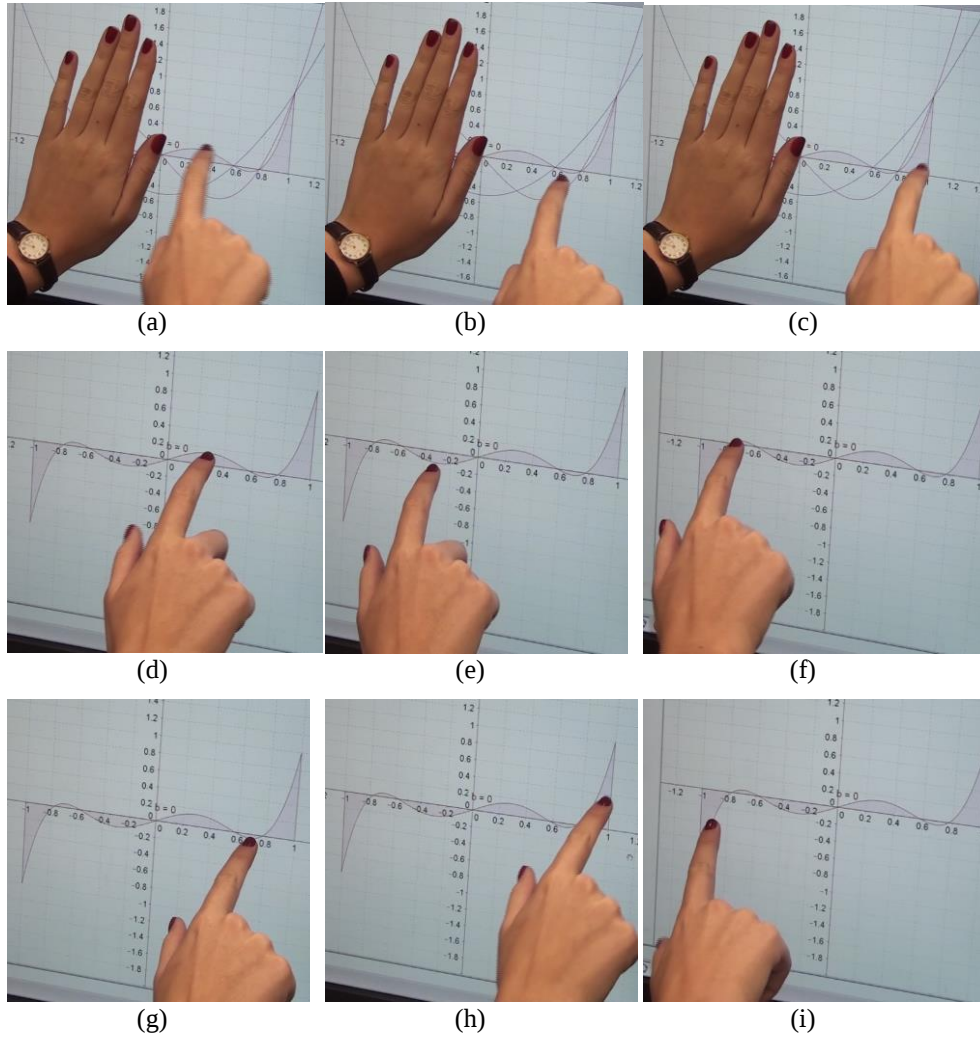


Figure 21. Val's Visualization of the Inner Product $\langle P_2, P_3 \rangle$

Upon completing her algebraic work showing the orthogonality of two Legendre polynomials, P_2 and P_3 (fig.16a), Val then thought aloud again: “and how is the inner product defined? The integral of the product of the two functions [typed **Integral[P_2*P_3,-1,1]** and obtained the definite integral that showed $b=0$ value] and how does this tell me that they are orthogonal... is it because it's symmetric cuz if you cover this side [hand gesture covering the left part of the graph] and cuz it's symmetric with respect to the origin that's why... no way!!! [very excitedly] okay yeah so if you cover this side then the area under the curve are these [covering the left part of the graph with left hand while respectively finger-pointing to the area

pieces on the right (fig.21a-c)] and it's symmetric with respect to the origin so it's zero."

To clarify her thinking further, she hid the original function graphs and worked with the area pieces only. She emphasized that she focused on the area under the curve of the product of the two Legendre polynomials [pointing to P_2 and P_3 on the Algebra Sideview]: "I think it mainly has to do with P_3 .. because P_3 is odd so it's symmetric with respect to the origin so I think this one called the shots [highlighting the curve of P_3] in the relationship because this one makes the integral also symmetric with respect to the origin and then because of that fact that means that it's equal to zero because these two cancel out and then these two sections cancel out and then these two cancel out [respectively pointing to the three pairs of congruent pieces (fig.21d-i)]." Val's visualization could be thought of as the manifestation of the well-known functional parity property which says that the product of an odd function by an even function is an odd function.

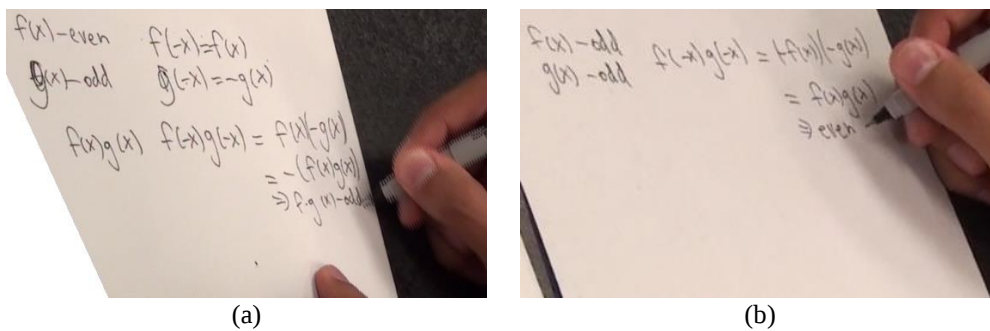


Figure 22. Andy's Analysis of the Parity of the Product Function

Val's visualization is closely related to Andy's analytic approach via which he established this fact. Upon referencing parity relationships in his analysis of inner products involving Legendre polynomials (fig.22), Andy was certain that the product of a pair of even functions produces an even function, hence, the resulting integrand would be symmetric with respect to the y-axis; he did not feel the need to prove this. He disregarded the even/even case as he thought he already knew that the integrand would be an even function. Nevertheless, he was very eager to prove the other two cases where: (i) one function is even and the other is odd (fig.22a); (ii) both functions are odd (fig.22b).

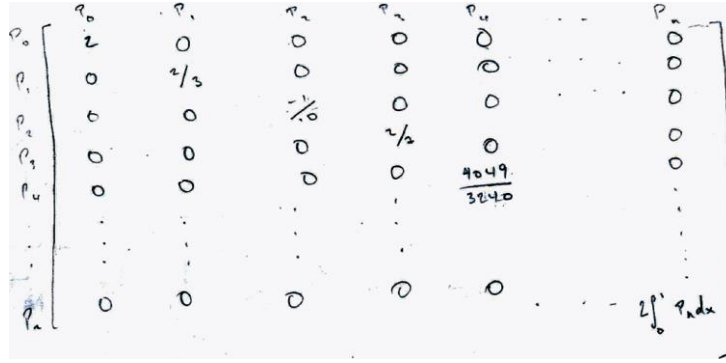
As shown above, graphing inner products involving $\{P_n\}$ was prone to further student observations regarding their connections to various Calculus properties. Val concluded her interpretation of orthogonality of Legendre polynomials with further insight, with particular attention to the inner product of two orthogonal Legendre polynomials with an integrand that is not symmetric with respect to the origin: "So if the inner product between two functions is symmetric with respect to origin then

that means that their inner product is equal to zero but probably if they are not symmetric with respect to origin like let's say.. there's probably some weird functions that are not symmetric with respect to origin but are orthogonal [offers the inner product of P_2 by P_4 as an example] so they are always orthogonal as long as it's not the inner product with respect to itself."

Why did Liz and Val seem to get surprised when they saw geometrically the graphs of the vanishing inner products? This is a very important and highly relevant question which can be addressed within the representation registers theoretical framework (Duval, 1993, 2006). On the one hand, there is the notion of geometric orthogonality – which students are already familiar with – within the geometric register. Having already explored geometric orthogonality in the context of Euclidean inner product spaces $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$, it can be postulated that perhaps these students were expecting some kind of geometric type objects (like line segments or triangles or polygons) in which perpendicularity could be observed geometrically. On the other hand, there is the notion of functional orthogonality which is principally defined as a definite integral inner product in the context of polynomial inner product spaces within a totally different semiotic register – a combination of graphical, visual, algebraic representation registers. A cognitive conflict, perhaps, can be thought of as arising as a result of the clash of registers, in particular that of geometric vs. analytic/graphical registers. Liz's confusion "*I did not expect that shape...For some reason I was just trying to combine the shapes not really multiply them*" and Val's confusion "*I tried to see like maybe they look orthogonal but they don't look orthogonal to me*" could be explained with this notion of registral conflict. Liz perhaps wanted to have a linear combination of some objects kind of like how she used to express a certain given inner product as an expansion of certain number of other inner products. As for Val, she perhaps was searching for some kind of perpendicular looking objects, as corroborated by her statement "*kind of weird because I guess having the property of being orthogonal is normally a geometric thing instead of an algebraic thing*" These two students' confusions seemed to be addressed and resolved at the end by their willingness to make sense of the situation via some sort of bridge-building strategies in which they formed a synergy of multiple representation registers that are meaningfully connected to one another.

To summarize, students' successful conversions between the analytic and graphical semiotic registers resulted in the discovery of the following three aspects of inner products $\langle P_m, P_n \rangle$ involving Legendre polynomials: (1) $m + n$ odd $\Rightarrow m \neq n$ so the inner products $\langle x^m, x^n \rangle$ and $\langle P_m, P_n \rangle$ should behave in a similar way, that is, they must both vanish – the result (possibly noticed only for the particular case of P_2 and P_3) that $\langle P_m, P_n \rangle = 0$ whenever m is odd and n even (or m even and n odd), proved by the fact that $P_m P_n$ is an odd function; (2) if $m + n$ is an even number, then there are two possibilities, that is, $m = n$ or $m \neq n$; (2a) When $m + n$ is even and $m = n$

then the inner products $\langle x^m, x^n \rangle$ and $\langle P_m, P_n \rangle$ behave in a similar way, that is, they both equal $\frac{2}{n+m+1}$ in value – the fact that $\langle P_n, P_n \rangle$ is strictly positive for any n , visually proven by the fact that the curve $(P_n)^2$ always remain above the x -axis; (2b) When $m+n$ is even and $m \neq n$ (the case m and n both even or both odd (and different from each other), the most difficult one) then the inner products $\langle x^m, x^n \rangle$ and $\langle P_m, P_n \rangle$ differ in behavior, that is, while the inner product $\langle x^m, x^n \rangle$ equals $\frac{2}{n+m+1}$ in value, the inner product $\langle P_m, P_n \rangle = 0$.



(a)

```
>> syms x
>> P0=1; P1=x; P2=(3*x^2-1)/2; P3=(5*x^3-3*x)/2;
>> syms x
>> P0=1; P1=x; P2=(3*x^2-1)/2; P3=(5*x^3-3*x)/2; P4=(35*x^4-30*x^2+3)/8;
>> [int(P0*P0,x,-1,1) int(P0*P1,x,-1,1) int(P0*P2,x,-1,1) int(P0*P3,x,-1,1) int(P0*P4,x,-1,1);
int(P1*P0,x,-1,1) int(P1*P1,x,-1,1) int(P1*P2,x,-1,1) int(P1*P3,x,-1,1) int(P1*P4,x,-1,1);
int(P2*P0,x,-1,1) int(P2*P1,x,-1,1) int(P2*P2,x,-1,1) int(P2*P3,x,-1,1) int(P2*P4,x,-1,1);
int(P3*P0,x,-1,1) int(P3*P1,x,-1,1) int(P3*P2,x,-1,1) int(P3*P3,x,-1,1) int(P3*P4,x,-1,1);
int(P4*P0,x,-1,1) int(P4*P1,x,-1,1) int(P4*P2,x,-1,1) int(P4*P3,x,-1,1) int(P4*P4,x,-1,1)]

ans =

[ 2, 0, 0, 0, 0]
[ 0, 2/3, 0, 0, 0]
[ 0, 0, 2/5, 0, 0]
[ 0, 0, 0, 2/7, 0]
[ 0, 0, 0, 0, 2/9]
```

(b)

Figure 23. Kyra's Matrix Model for Orthogonality of Legendre Polynomials

This section concludes with Kyra's modeling of the orthogonality condition in coordination with her analytic and numerical/symbolic approaches in MATLAB. Upon establishing that the inner product $\langle P_n, P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_n P_m dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}$ would be nonzero for $m = n$ only, she proposed a diagonal matrix model, the Gramian matrix, with generic diagonal entry of the form $2 \int_0^1 P_n P_n dx$. Like Liz, Kyra can be said to embrace a simplified definite integral representation within the symbolic

register, that is, the equivalence of $\int_{-1}^1 x^{m+n} dx$ and $2 \int_0^1 x^{m+n} dx$, for the particular case $m = n$. She separately calculated each diagonal entry one by one, and drew the matrix model as shown (fig.23a). She then switched to MATLAB and calculated all the entries (including off-diagonal ones) to confirm the orthogonality condition (fig.23b). This approach helped her go back to her written work and fix some of the incorrectly calculated fractions.

3.5. Visualizing Further Inner Product Properties : Cauchy-Schwartz, Triangle Inequalities, Pythagorean Theorem, Parallelogram Law

3.5.1. Cauchy-Schwarz Inequality

Students found the Cauchy-Schwarz Inequality (CSI) $\langle P_n, P_m \rangle \langle P_n, P_m \rangle \leq \langle P_n, P_n \rangle \langle P_m, P_m \rangle$ straightforward to explain. Especially after establishing parity relationships involving inner products $\langle x^n, x^m \rangle$ and $\langle P_n, P_m \rangle$ for the case $m + n$ even / odd, students analyzed the CSI in two cases: (i) $m \neq n \Rightarrow P_n \perp P_m \Rightarrow \langle P_n, P_m \rangle = 0$ so the LHS would be of the form $0 \cdot 0$ and the RHS would be the product of positive numbers so CSI is verified; (ii) $m = n \Rightarrow$ the LHS would equal the RHS so the CSI is once again verified. A typical student work looked like the numerical verification for the case where $m \neq n$ (fig.24a).

$$\begin{aligned} \langle P_2, P_3 \rangle &= 0 \\ \langle P_2, P_2 \rangle &= 0.4 = \frac{2}{5} \\ \langle P_3, P_3 \rangle &= 0.28571 = \frac{2}{7} \\ 0.0 &\leq \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} \\ 0 &\leq \frac{4}{35} \quad \checkmark \end{aligned}$$

(a)

$$\begin{aligned} \|P_3 + P_4\| &= \sqrt{\int_{-1}^1 (P_3 + P_4)^2 dx} \\ &= \sqrt{\int_{-1}^1 (P_3^2 + 2P_3P_4 + P_4^2) dx} \\ &= \sqrt{\int_{-1}^1 P_3^2 dx + \int_{-1}^1 P_4^2 dx} = \sqrt{\frac{2}{5} + \frac{2}{7}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{5} + \frac{2}{7}} \leq \sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{2}{7}} \end{aligned}$$

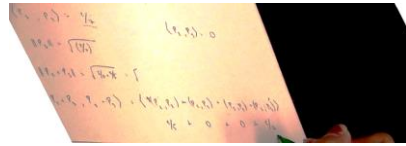
(b)

$$\begin{aligned} \|P_1 + P_2\| &\leq \|P_1\| + \|P_2\| \\ \left\| x + \frac{3x^2-1}{2} \right\| &\leq \|x\| + \left\| \frac{3x^2-1}{2} \right\| \\ \sqrt{\int_{-1}^1 \left(x + \frac{3x^2-1}{2} \right)^2 dx} &= \sqrt{\int_{-1}^1 \left(x^2 + x(3x^2-1) + \frac{(3x^2-1)^2}{4} \right) dx} \\ &= \sqrt{2 \int_0^1 \left(x^2 + \frac{(3x^2-1)^2}{4} \right) dx} = \sqrt{\int_{-1}^1 (x^2 + 3x^4 - 6x^2 + 1) dx} \\ &= \sqrt{\int_{-1}^1 (3x^4 - 5x^2 + 1) dx} = \sqrt{\frac{8}{15}} \\ \frac{8}{15} &\leq \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{2}{5}} \end{aligned}$$

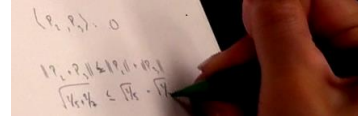
(c)

Figure 24. Students' Verification of Cauchy-Schwarz (a) and Triangle (b-c) Inequalities

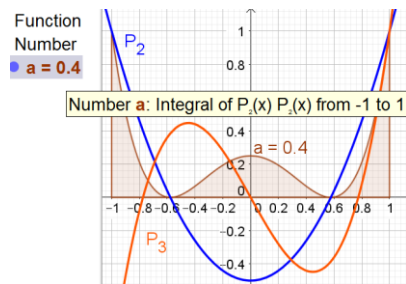
In the verification of inner product properties such as Triangle Inequality (TI), Pythagorean Theorem (PT), and Parallelogram Law (PL), most students dropped the long way of calculations and referenced the inner products involving powers of x . As was the case for the CSI, students thought of TI as a trivial property of inner products to verify. Andy was one of the few who verified TI both via the short way (fig.24b) and the long way (fig.24c), algebraically.



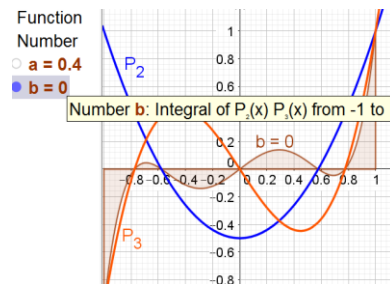
(a)



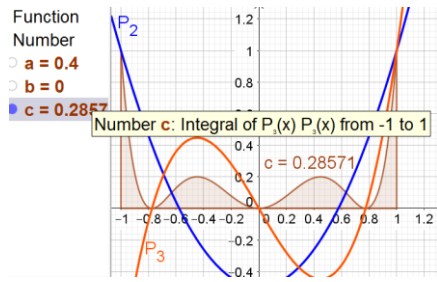
(b)



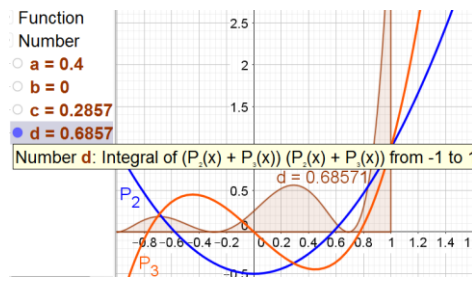
(c)



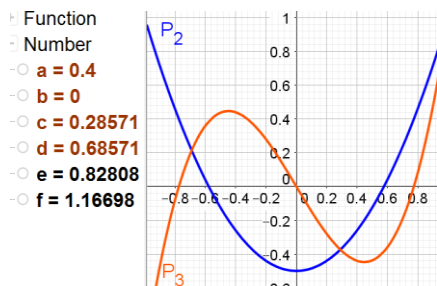
(d)



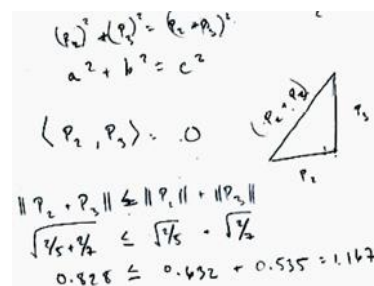
(e)



(f)



(g)



(h)

Figure 25. Kyra's Verification of Triangle Inequality $\|P_2 + P_3\| \leq \|P_2\| + \|P_3\|$

3.5.2. Triangle Inequality

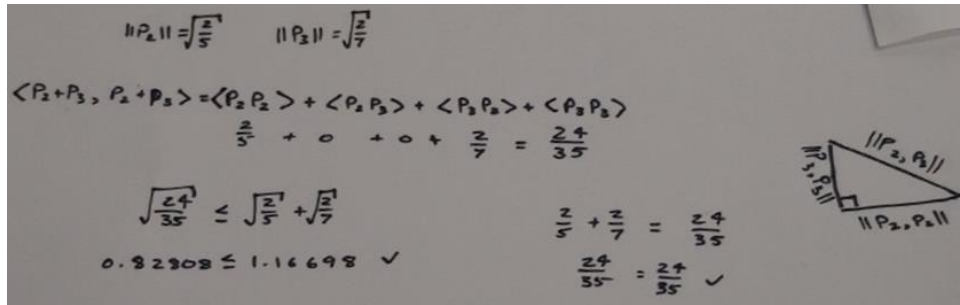
Kyra explored Triangle Inequality in four main steps: (i) Writing the inner product $\langle P_2 + P_3, P_2 + P_3 \rangle$ as a sum of inner products as $\langle P_2, P_2 \rangle + \langle P_2, P_3 \rangle + \langle P_3, P_2 \rangle + \langle P_3, P_3 \rangle$; (ii) Evaluation of the inner product pieces $\langle P_2, P_2 \rangle, \langle P_2, P_3 \rangle, \langle P_3, P_2 \rangle, \langle P_3, P_3 \rangle$; (iii) Evaluation of the norms $\|P_2 + P_3\|, \|P_2\|, \|P_3\|$; (iv) Verification that $\|P_2 + P_3\| \leq \|P_2\| + \|P_3\|$ (fig.25a-b). In the verification of the inequality involving square roots, she made use of the software and visually obtained these values as definite integrals (fig.25c-g). Her thoughts about the Triangle Inequality was: “*The inequality is saying that the length of this vector here [highlighting the hypotenuse of the right triangle she just drew] is shorter than the sum of these two [highlighting the legs of the right triangle (fig.25h)].* In the calculation of $\langle P_2, P_3 \rangle$ and $\langle P_3, P_2 \rangle$ via the analytic and visual approaches, she only calculated $\langle P_2, P_3 \rangle$ as she explained that $\langle P_2, P_3 \rangle = \langle P_3, P_2 \rangle$ by the defining property (symmetry) of inner product. To verify the inequality, she respectively typed **e=sqrt(d)** and **f=sqrt(a)+sqrt(c)**, which she recorded numerically as well (fig.25g). Upon the interviewer’s probing why she drew a right triangle and not another type of triangle, she responded: “*it has to be a right triangle in this case because P_2 and P_3 are orthogonal.*”

3.5.3. Pythagorean Theorem

Common approach used to explain the Pythagorean Theorem $\|P_n + P_m\|^2 = \|P_n\|^2 + \|P_m\|^2$ was a quick reference to the previously explored Triangle Inequality $\|P_n + P_m\| \leq \|P_n\| + \|P_m\|$. To verify the Pythagorean Theorem, most students simply referred to the right triangles they had previously drawn in the modeling of Triangle Inequality (fig.26a). As an example, to explain the Pythagorean Theorem $\|P_2 + P_3\|^2 = \|P_2\|^2 + \|P_3\|^2$, Gaby stated: “*It’s the same equation except no square roots and it’s equal to instead of being less than or equal to.*” For further clarification, she also made use of a familiar example, the 3-4-5 right triangle, to verify both the Triangle Inequality and the Pythagorean Theorem (fig.26b).

All students basically offered a statement similar to Gaby’s to explain how they deduce Pythagorean Theorem from Triangle Inequality for a pair of Legendre polynomials P_n and P_m where $n \neq m$. In an attempt to come up with a generalization for the Pythagorean Theorem for any pair of Legendre polynomials, Andy first worked out the inner products for the LHS and the RHS and verified the Pythagorean Theorem for $n \neq m$ by concluding $\frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2m+1} = \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2m+1}$ (fig.26d). Curious about the case $n = m$, he showed that the sum $\|P_n\|^2 + \|P_m\|^2$ could no way equal $\|P_n + P_m\|^2$ for the case $n = m$ – otherwise he would obtain the impossibility $\frac{2}{2n+1} \cdot 2 = 4 \left(\frac{2}{2n+1} \right)$. He further concluded that this impossibility would correspond to not having a triangle by drawing two congruent parallel vectors: “*You can think of it as*

this same vector [draws two congruent parallel vectors] and since they are parallel there is no triangle made (fig.26c).”



Handwritten mathematical work for part (a):

$$\|P_2\| = \sqrt{\frac{2}{5}} \quad \|P_3\| = \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$\langle P_2 + P_3, P_2 + P_3 \rangle = \langle P_2, P_2 \rangle + \langle P_2, P_3 \rangle + \langle P_3, P_2 \rangle + \langle P_3, P_3 \rangle$$

$$\frac{2}{5} + 0 + 0 + \frac{2}{7} = \frac{24}{35}$$

$$\sqrt{\frac{24}{35}} \leq \sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{2}{7}}$$

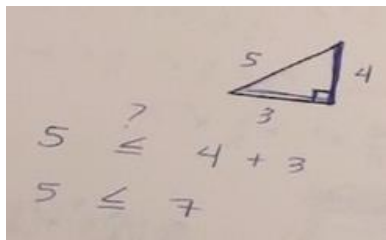
$$0.82302 \leq 1.16698 \quad \checkmark$$

$$\frac{2}{5} + \frac{2}{7} = \frac{24}{35}$$

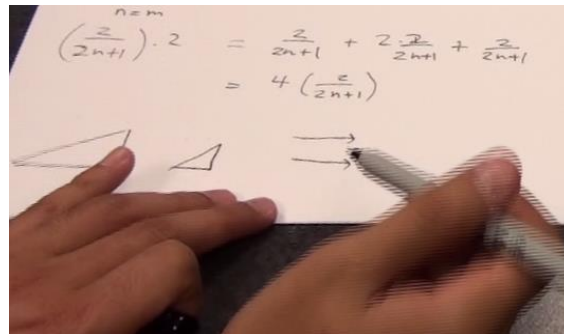
$$\frac{24}{35} = \frac{24}{35} \quad \checkmark$$

A diagram on the right shows a triangle with sides labeled $\|P_2\|$, $\|P_3\|$, and $\|P_2 + P_3\|$. The angle between $\|P_2\|$ and $\|P_3\|$ is marked as a right angle.

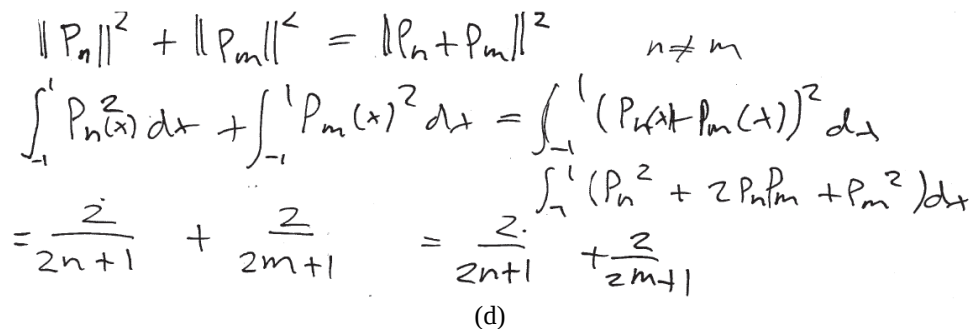
(a)



(b)



(c)



Handwritten mathematical work for part (d):

$$\|P_n\|^2 + \|P_m\|^2 = \|P_n + P_m\|^2 \quad n \neq m$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x)^2 dx + \int_{-1}^1 P_m(x)^2 dx = \int_{-1}^1 (P_n(x) + P_m(x))^2 dx$$

$$= \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2m+1} = \frac{2}{2n+1} + \frac{2}{2m+1}$$

The integral on the right is expanded as $\int_{-1}^1 (P_n^2 + 2P_nP_m + P_m^2) dx$.

(d)

Figure 26. Students' Modeling of the Pythagorean Theorem

In her exploration of the Triangle Inequality $\|P_2 + P_3\| \leq \|P_2\| + \|P_3\|$, Val first calculated all three norms she needed algebraically (fig.27a). She then wanted to draw a triangle with sides corresponding to the norms she just evaluated, but she was not sure what type of triangle to draw so she first planned to draw a triangle with sides approximated as 0.5, 0.6, and 0.8. Upon drawing a triangle made of tick-marks, she first conjectured that it would be an acute triangle that is almost a right triangle

(fig.27b). In this sense, Val's verification was similar to Gaby's with the slight difference that instead of the familiar 3-4-5 right triangle, she made use of a 5-6-8 triangle she obtained as an approximation of the sides corresponding to the three norms $\|P_3\|$, $\|P_2\|$, $\|P_2 + P_3\|$ respectively.

$$\langle P_3, P_3 \rangle = \int_{-1}^1 (P_3(x))^2 dx = \frac{2}{2(3)+1} \delta_{33} = \frac{2}{6+1} = \frac{2}{7}$$

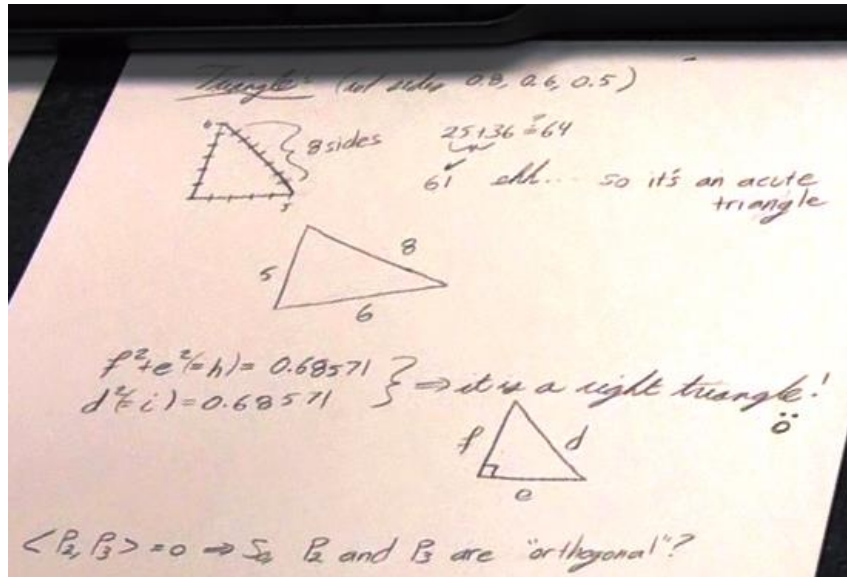
$$\|P_2(x)\| = \left(\int_{-1}^1 P_2^2(x) dx \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{2 \cdot 2 + 1} \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{5} \right)^{1/2} = 0.63246$$

$$\|P_3\| = \left(\frac{2}{6+1} \right)^{1/2} = \left(\frac{2}{7} \right)^{1/2} = 0.53452$$

$$\|P_2(x) + P_3(x)\| = \left(\int_{-1}^1 (P_2 + P_3)^2 dx \right)^{1/2} = 0.82808$$

$$0.82808 \stackrel{d}{\approx} 0.63246 \stackrel{f}{+} 0.53452 \stackrel{e}{=} 1.16698 \stackrel{g}{\approx}$$

(a)



(b)

Figure 27. Val's Verification of the Pythagorean Theorem $\|P_2 + P_3\|^2 = \|P_2\|^2 + \|P_3\|^2$

Comparative analysis of Gaby, Liz, and Val's approaches indicate the discrepancy between the orthogonality of the (P_n) s and the orthogonality of the sides of the 3-4-5 triangle: the visualization of the former involves algebraic areas representations (i.e. the standard geometrical interpretation of integrals) whereas the visualization of the latter relies on perpendicular segments representations. Hence, these semiotic

registers rely on very different concepts. In particular, the triangle in Figure 27b shows that Liz's interpretation of norms is not really satisfactory (since she writes inscriptions like $\|P_3, P_3\|$ instead of $\|P_3\|$ for the length of a side). An important question to address is the following: Do the students really get the common structure lying behind geometric orthogonality and functional orthogonality, or is it for them nothing more than a handy analogy, helpful to remind some theorems (like the Triangle Inequality) but without any fundamental importance? Whereas an awareness of the functional orthogonality, as shown above, is a product of a thorough understanding of a vanishing integral in the realm of a graphical semiotic register, an awareness of geometric orthogonality could be thought of as a result of a successful interpretation of the notational (inscriptive) semiotic register. Figure 27b is especially interesting in this context, with the quotation marks on the word "orthogonal" followed by a question mark that indicates Val's progress in the understanding of the theoretical definition of orthogonality. It can be postulated that at the expense of various registral clashes occurring at various instantiations do the students eventually appear to associate these two concepts (the geometric orthogonality and the functional orthogonality) in a reconciliatory manner via conversion between the graphical and the inscriptive semiotic registers.

3.5.4. *Parallelogram Law*

Parallelogram Law $\|P_n + P_m\|^2 + \|P_n - P_m\|^2 = 2\|P_n\|^2 + 2\|P_m\|^2$ required the calculation of distance between vectors $\|P_n - P_m\|$. Similar to Kyra's exploration of the Triangle Inequality (in which she had calculated the norm of vector sum $\|P_n + P_m\|$), Ted followed a step-by-step approach in which he made use of the defining properties of inner products (symmetry and linearity) to calculate $\|P_0 + P_1\|^2$ and $\|P_0 - P_1\|^2$. In his calculation of $\|P_0 + P_1\|^2$, $\|P_0 - P_1\|^2$, $\|P_0\|^2$, $\|P_1\|^2$, Ted used f and g to denote P_0 and P_1 , respectively (fig.28a-d). To verify the equality $\|P_0 + P_1\|^2 + \|P_0 - P_1\|^2 = 2\|P_0\|^2 + 2\|P_1\|^2$ at the last step, he respectively typed **a+b** and **2c+2d**, which appeared on the Algebra Sideview as **e=5.333** and **h=5.333**, respectively. He explained that the equality $\|P_0 + P_1\| = \|P_0 - P_1\|$ would occur only for a pair of orthogonal vectors. When asked to draw a parallelogram illustrating the Parallelogram Law, he drew a rectangle with sides representing the norms $\|P_0\|$ and $\|P_1\|$. He concluded his verification by stating that the two diagonals of the rectangle correspond to the norm of vector sum $\|P_0 + P_1\|$ and the distance between vectors $\|P_0 - P_1\|$, respectively.

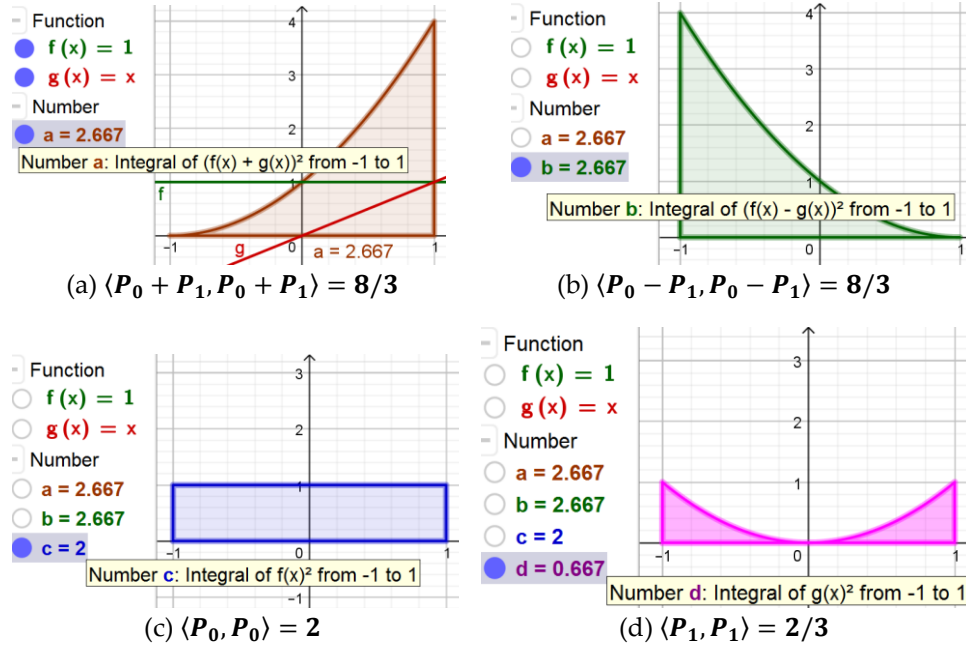


Figure 28. Exploring Parallelogram Law

4. Discussion and Conclusions

4.1. Teaching and Learning Legendre Polynomials

Coordination of multiple representation registers, the visual and the analytic registers in particular, played a significant role in university linear algebra students' learning and understanding of orthogonal Legendre polynomials in the polynomial inner product space with the associated integral inner product, along with its interrelationships with the previously mastered concepts of linear algebra, analysis, or even geometry. In such a multi-representational setting, students not only strengthened their own understanding of inner product properties and inner product spaces in general, but came up with certain other conjectures and properties in a high-tech environment as well. Such practices include but not limited to: (i) Adoption of a simplified definite integral representation within the symbolic register, which helped in understanding why a certain inner product of the form $\langle x^m, x^n \rangle$ should vanish, or be simplified as $2 \int_0^1 x^{m+n} dx$; (ii) Ability to expand inner products $\langle P_m, P_n \rangle$ involving Legendre polynomials as a linear combination of elementary inner products $\langle x^m, x^n \rangle$ involving powers of x within the symbolic and algebraic registers; (iii) Awareness of the two important notions about Legendre polynomials family (the geometric orthogonality and the functional orthogonality); (iv) Distinction between the geometric orthogonality and the functional orthogonality by

way of representation registers within which these notions are interpreted (the geometric orthogonality within the geometric register vs. the functional orthogonality within a combination of graphical, visual, algebraic representation registers); (v) Ability to overcome potential cognitive conflicts (e.g., as a result of registral clash) by forming a synergy of multiple representation registers.

4.2. Implications and Directions for Future Research

The present report proposes the visual-analytic strategy coordination as an appropriate strategy for the teaching and learning of Legendre polynomials and the integral inner product properties in linear algebra. Moreover, the findings of the present report proposes DGS besides MATLAB as an important environment for visualizing linear algebraic structures in action, in particular, inner product spaces in linear algebra. An important inference from the above analysis concerns the availability of multiple semiotic registers of representations. The constant interplay among these registers could be thought of as having a great impact on students' learning and understanding of the orthogonal family of Legendre polynomials as vectors of the polynomial inner product space, along with a thorough and meaningful interpretation of certain geometric type inequalities and theorems coming to interplay. As Duval (1993) put it, the mathematical object and its representation are not the same thing – only by way of multiple representations and by way of richness of the interplays taking place among them could students improve their understanding in such a way that this understanding will eventually converge to knowledge. An awareness of all these pieces satisfactorily working in different semiotic registers and meaningfully connecting to each other could be thought of evidence of learning and knowledge in the framework of representation registers (Duval, 1993, 2006).

The study revealed important findings on university mathematics majors' understanding and sense-making of Legendre polynomials and integral inner product properties. Having illustrated many properties inherent in inner products by exploring the inner product space $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ with the integral inner product $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$ offered the linear algebra students opportunities to explore polynomials defined on a closed interval as vectors, and to make up for and strengthen, where appropriate, vector space and subspace properties associated with polynomials. In almost every situation were students able to investigate such properties in analytic and visual modes in a coordinative manner. As shown above, students came up with important discoveries as a consequence of successful coordination of visual-analytic approaches in the DGS-MATLAB environment. There still seems to be need for further research to clarify certain aspects of inner product spaces, in particular, the integral inner product in the vector space $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ of polynomials of degree $\leq n$ with real coefficients. Potential avenue for future

investigation could focus on math majors' understanding and interpretation of $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ and the inner product space properties by using an improper integral inner product $\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)g(x)dx$ with particular emphasis on Hermite polynomials, just as the same way Legendre polynomials with the integral inner product $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$ have been investigated in a VA-pedagogy.

Bibliography

ANDREWS-LARSON C., WAWRO M. & ZANDIEH M. (2017), A hypothetical learning trajectory for conceptualizing matrices as linear transformations, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **48.6**, 809-829.

ARZARELLO F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking, 267-299.

BERNARD H. (1994). *Research methods in anthropology* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

BOYATZIS R. (1998). *Transforming qualitative information: Thematic analysis and code development*. Thousand Oaks, CA: Sage.

CAGLAYAN G. (2015). Making sense of eigenvalue-eigenvector relationships: Math majors' linear algebra – geometry connections in a dynamic environment. *Journal of Mathematical Behavior*, **40**, 131-153.

CARLSON D., JOHNSON C.R., LAY D.C. & PORTER A.D. (1993). The linear algebra curriculum study group recommendations for the first course in linear algebra. *College Mathematics Journal*, **24**, 41-46.

DOGAN-DUNLAP (2010). Linear algebra students' modes of reasoning: Geometric representations. *Linear Algebra and its Applications*, **432.8**, 2141–2159.

DORIER J.-L. (1991). Sur l'enseignement des concepts élémentaires d'algèbre linéaire à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **11.2/3**, 325-364.

DORIER J.-L. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **29.2**, 175-197.

DORIER J.-L. (1998). The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. *Linear Algebra and its Applications*, **275.27**, 141-160.

DORIER J.-L. (2000). *On the teaching of linear algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

DORIER J.-L., ROBERT A., ROBINET J. & ROGALSKI M. (2000). On a research programme concerning the teaching and learning of linear algebra in first year of

French science university. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **31.1**, 27-35.

DORIER J.-L. & SIERPINSKA A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In D. Holton, M. Artigue, U. Krichgraber, J. Hillel, M. Niss & A. Schoenfeld (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp.255-273). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

DREYFUS T. & HILLEL J. (1998). Reconstruction of meanings for function approximation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **3.2**, 93–112.

DUVAL R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **5.1**, 37-65.

DUVAL R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **61**, 103-131.

GLASER B.J. & Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. Chicago: Aldine.

GOL TABAGHI S. & SINCLAIR N. (2013). Using dynamic geometry software to explore eigenvectors: The emergence of dynamic-synthetic-geometric thinking. *Technology, Knowledge and Learning*, **18**, 149-164.

GRENIER-BOLEY, N. (2014). Some issues about the introduction of first concepts in linear algebra during tutorial sessions at the beginning of university. *Educational Studies in Mathematics*, **87(3)**, 439-461.

GUEUDET-CHARTIER, G. (2006). Using geometry to teach and learn linear algebra. In F. Hitt, G. Harel and A. Selden. *Research in Collegiate Mathematics Education VI* (pp. 171-195). Washington, DC: American Mathematical Society.

HAREL G. (1985). *Teaching linear algebra in high school*. Unpublished doctoral dissertation, Ben-Gurion University, Israel.

HAREL G. (1987). Variations in linear algebra content presentation. *For the Learning of Mathematics*, **7**, 29-32.

HAREL G. (1990). Using geometric models and vector arithmetic to teach high-school students basic notions in linear algebra. *International Journal for Mathematics Education in Science and Technology*, **21**, 387-392.

HAREL G. (2000). Principles of learning and teaching mathematics, with particular reference to the learning and teaching of linear algebra: Old and new observations. In J. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 177–189). Dordrecht: Kluwer.

- HAREL G. & KAPUT J. (1991). The role of conceptual entities in building advanced mathematical concepts and their symbols. In D. Tall (Ed), *Advanced mathematical thinking* (pp.82-94). Dordrecht: Kluwer.
- HANNAH J., STEWART S. & THOMAS M.O.J. (2013). Emphasising language and visualization in teaching linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, **44.4**, 475-489.
- HILLEL J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 191-207). Dordrecht: Kluwer.
- KVALE S. (2007). *Doing interviews*. London: Sage.
- LARSON R. (2013). *Elementary Linear Algebra*. Cengage.
- MCGEE, D. L., & MARTINEZ-PLANELL, R. (2014). A study of semiotic registers in the development of the definite integral of functions of two and three variables. *International Journal of Science and Mathematics Education*, **12(4)**, 883-916.
- OKTAÇ, A. & VIVIER, L. (2016). Conversion, Change, Transition... in Research about Analysis. In B. Hodgson, A. Kuzniak & J.-B. Lagrange (Ed.), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues* (pp. 87-121). Springer International Publishing.
- PARRAGUEZ M. & OKTAÇ A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, **432.8**, 2112-2124.
- PATTON M.Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- PAVLOPOULOU K. (1993). Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, **5**, 67-93.
- PIAGET J. (1977). *Epistemology and psychology of functions*. Dordrecht, Netherlands: D. Reidel Publishing Company.
- RADFORD, L. (2002). The seen, the spoken, and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, **22(2)**, 14-23.
- RAMÍREZ-SANDOVAL, O., ROMERO-FÉLIX, C. F. & OKTAÇ, A. (2014). Coordinación de registros de representación semiótica en el uso de transformaciones lineales en el plano. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **19**, 225-250.
- ROBERT A. & ROBINET J. (1989). Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire en première année de DEUG. *Cahier de Didactique des Mathématiques*, **53**. IREM de Paris VII.

- ROGALSKI M. (1994). L'enseignement de l'algèbre linéaire en première année de DEUG A. *La Gazette des Mathématiciens*, **60**, 39-62.
- SIERPINSKA A. (1995). Mathematics: "in Context", "Pure" or "with Applications"? A contribution to the question of transfer in the learning of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, **15.1**, 2-15.
- SIERPINSKA A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers
- SIERPINSKA A., DREYFUS T. & HILLEL J. (1999). Evaluation of a teaching design in linear algebra: The case of linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19.1**, 7-41.
- SINCLAIR N. & GOL TABAGHI S. (2010). Drawing space: Mathematicians' kinetic conceptions of eigenvectors. *Educational Studies in Mathematics*, **74.3**, 223–240.
- THOMAS M.O.J. & STEWART S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: Embodied, symbolic and formal thinking. *Mathematics Education Research Journal*, **23.3**, 275-296.
- VANDEBROUCK, F., (Ed.) (2013). *Mathematics classrooms: students' activities and teacher's practices*. Université Paris Diderot. Rotterdam: Sense Publisher.
- WAWRO M., SWEENEY G. & RABIN J.M. (2011). Subspace in linear algebra: Investigating students' concept images and interactions with the formal definition. *Educational Studies in Mathematics*, **78.1**, 1-19.
- WAWRO M., RASMUSSEN C., ZANDIEH M., SWEENEY G. & LARSON C. (2012) An inquiry-oriented approach to span and linear independence: The case of the magic carpet ride sequence. *PRIMUS*, **22.8**, 577-599.
- ZANDIEH M., WAWRO M. & RASMUSSEN C. (2017). An example of inquiry in linear algebra: The roles of symbolizing and brokering. *PRIMUS*, **27.1**, 96-124.

GÜNHAN CAGLAYAN

New Jersey City University Mathematics Department
2039 Kennedy Boulevard JC 07305 NJ USA
gcaglayan@njcu.edu

Appendix

Item/Task	Generating Legendre Polynomials: (i) Recursive Approach: $(2n+1)xP_n = (n+1)P_{n+1} + nP_{n-1}$ with $P_0 = 1$ and $P_1 = x$ to determine the polynomial sequence $\left\{P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = \frac{3x^2-1}{2}, P_3 = \frac{5x^3-3x}{2}, \dots\right\}$ for $n \geq 2$; (ii) Rodrigues' Formula: $P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n$ for all $n \geq 0$.
Sample Probing Questions	What does it mean for P_n to be an odd / even function? Does this have anything to do with n being odd / even? How is this related to the fact that for the case n odd / even, P_n contains only odd / even powers of x ?
Item/Task	Evaluating and Interpreting Inner Products $\langle P_m, P_n \rangle$ for $m = n$ and $m \neq n$:
Sample Probing Questions	What does it mean for Legendre polynomials to be of same / different parity? How does this manifest in the calculation of inner products $\langle P_n, P_m \rangle$ for Legendre polynomials of different parity, analytically? visually? How do you reconcile the orthogonality condition $\langle P_n, P_m \rangle = \frac{2}{n+m+1} \delta_{nm}$ with the visual approach? What does it mean for the inner product $\langle P_n, P_m \rangle$ to be zero or nonzero, analytically? visually?
Item/Task	Parity Relationships: Establishing Orthogonality via Analytic and Visual Approaches
Sample Probing Questions	What are the conditions for $\langle P_n, P_m \rangle$ to result in a zero / positive inner product? What does this have to do with P_n and P_m being of different / same parity, analytically? visually? How do elementary Calculus properties play out in such analyses and visualizations?
Item/Task	Geometry Connections : Cauchy-Schwartz, Triangle Inequalities, Pythagorean Theorem, Parallelogram Law
Sample Probing Questions	How do you prove / verify the Cauchy-Schwartz Inequality / Triangle Inequality / Pythagorean Theorem / Parallelogram Law? How do you reconcile your analytic and visual approaches? How does orthogonality manifests for such geometric inequalities and theorems, analytically? visually? How would you model the Cauchy-Schwartz Inequality / Triangle Inequality / Pythagorean Theorem / Parallelogram Law in a drawing? Why did you draw a right triangle? How would you label / interpret the sides of your triangle? How does orthogonality manifest itself in your model?
Item/Task	Orthogonal / Orthonormal Bases for $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$
Sample Probing Questions	What do you propose as an orthogonal / orthonormal basis for $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ / $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ / $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ using the Legendre polynomials? What does it mean for a polynomial in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ / $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ / $\mathbb{P}_4(\mathbb{R})$ to be written as a linear combination of Legendre polynomials (or normalized Legendre polynomials), visually? analytically? How would you analyze / visualize inner product of Legendre polynomials (or normalized Legendre polynomials)? How would you reconcile the two approaches? How does coordinates relative to an orthogonal / orthonormal basis manifest themselves analytically? visually? How would you reconcile the two approaches?

FABIEN EMPRIN

LES APPORTS D'UNE ANALYSE STATISTIQUE DES DONNÉES
TEXTUELLES POUR LES RECHERCHES EN DIDACTIQUE :
L'EXEMPLE DE LA MÉTHODE REINERT

Abstract. How statistical analysis of texts can help research in didactics: the example of Reinert's method. In this paper, we analyse statistical analysis of texts' potential for researchers in didactics. We focus in Reinert's method. Research methodologies lead us to analyze corpus with large amount of text. Without making it the only tool of analysis we show on two specific examples how this statistical treatment makes it possible to access corpuses hardly accessible otherwise or to make hypotheses facilitate then the human analysis. First we present the foundations and techniques related to this kind of analysis and then we develop the analysis around two examples: the processing of exchanges between trainers and trainees through a digital portfolio and the analysis of the mathematics primary school curricula in France since 1976.

Résumé. Dans cet article nous analysons les potentialités offertes aux didacticiens par l'analyse statistique des données textuelles au moyen de la méthode Reinert. Les méthodologies de recherche nous amènent en effet à analyser des corpus comportant de grandes quantités de texte. Sans en faire l'unique outil d'analyse, nous montrons sur deux exemples spécifiques comment ce traitement statistique permet d'accéder à des corpus difficilement accessibles sinon ou d'émettre des hypothèses pour faciliter ensuite l'analyse « manuelle ». Nous commençons par exposer les fondements et les techniques liés à ce type d'analyse puis nous développons l'analyse autour de deux exemples : le traitement des échanges formateurs/stagiaires au travers d'un portfolio numérique et l'analyse des programmes de mathématiques de l'école primaire en France depuis 1976.

Mots clés. Statistiques textuelles, Recherches en didactique, Mondes lexicaux,

Introduction

L'arrivée depuis des dizaines d'années des outils numériques : documents numériques, échanges par courriels, MOOC, plateformes de cours en ligne, blogues, espaces de dialogues... rend accessible aux chercheurs en didactique une masse de données qui n'existait pas auparavant. En effet, là où il fallait enregistrer puis transcrire les échanges entre un étudiant et son formateur, lire et retranscrire les annotations des enseignants sur les copies, une partie importante des échanges transite maintenant par des canaux numériques. Ils sont facilement accessibles sous réserve des autorisations d'usage. Ces données, pour beaucoup textuelles, sont un « gisement » d'informations nouvelles pour les recherches en didactiques.

De plus, qu'il fasse des analyses de cas ou des analyses à grande échelle, le chercheur peut se trouver également confronté à des corpus de données comportant de grandes quantités de texte. Si cela peut sembler une évidence pour les études à grande échelle, notamment lorsqu'elles comportent des questionnaires avec des champs de saisie de texte libre, cela peut apparaître plus surprenant pour les études de cas. Pourtant, ces études amènent le chercheur à enregistrer des temps de classes ou des entretiens qui, une fois transcrits, forment un corpus textuel parfois encore plus volumineux que pour des études à plus grande échelle. Par exemple (Labbé & Labbé, 2012, p. 5) qui analysent les questions ouvertes des sondages d'opinion, dénombrent entre 86 et 108 mots par répondant à ce type de question. Pour obtenir un corpus de 78 813 mots, l'échantillon de départ était de 1010 personnes (727 ayant accepté de répondre à la question ouverte). Par comparaison nous avons obtenu 79 298 mots en transcrivant les paroles des formateurs et des stagiaires durant 5 formations (Emprin, 2007).

Comment alors exploiter ces données textuelles ?

Nous avons cherché à savoir comment étaient analysées les données textuelles dans les recherches en didactique des mathématiques. En nous basant sur le classement des revues établi par la European Society for Research in Mathematics Education (Toerner & Arzarello, 2012, p. 52-53) nous avons consulté les articles publiés dans les sept revues de catégorie A* et A. Une recherche selon les mots clefs « textual analysis » nous a permis d'extraire quarante-sept articles. La consultation des résumés et des bibliographies fait apparaître que les textes y sont traités par des analyses de contenus, des classifications basées sur des analyses grammaticales, syntaxiques, sémiotiques, pédagogiques, sociologiques, psychanalytiques, des tâches mathématiques ou des mathématiques enseignées. Toutes ces méthodes sont basées sur la lecture et la catégorisation par un chercheur ce qui les rend très coûteuses quand le corpus de données est très grand. En tant que chercheur en didactique, nous avons été confrontés à ces types de corpus et nous avons utilisé des systèmes d'analyse et de classifications du corpus basés sur des lectures successives. Les biais d'interprétation des textes liés au lecteur peuvent être réduits par un codage en double aveugle, mais il rend le travail d'analyse encore plus coûteux.

Pour résoudre ces difficultés, des réponses existent dans d'autres champs de recherche comme celui de l'analyse en management stratégique :

« L'Analyse de Données Textuelles (A.D.T.) regroupe les méthodes qui visent à découvrir l'information « essentielle » contenue dans un texte, et le foisonnement de nouveaux outils auquel on peut assister aujourd'hui est à la conjonction de deux demandes différentes :

- d'une part une demande des entreprises, qui peuvent aujourd'hui collecter très facilement une grande quantité de textes avec Internet (articles, brevets, dépêches, rapports, études, mais aussi courriels, messages de forums, enquêtes clients, fiches de centres d'appel, descriptifs de produits...). [...]

- et d'autre part une demande des chercheurs, qui ont besoin d'une alternative est à de traditionnelles analyses de contenu jugée trop subjective, soit à de simples analyses par mots-clés jugées trop pauvres (Bournois et al., 2002). » (Fallery & Rodhain, 2007, p. 2)

Ce type d'analyse existe également dans les champs de la politique ou la littérature. (Mayaffre, 2005) en fait le constat : « Depuis sa constitution à la fin des années 1960, la lexicométrie politique a connu en France une heure de gloire pour aujourd'hui s'essouffler. [...]. Dans le même temps, notons que le développement d'une lexicométrie littéraire, dont on date les premiers balbutiements dès l'après-guerre avec les travaux de Busa (voir l'historique dans Busa, 1998) puis de Guiraud (Guiraud, 1954), a connu le même désenchantement [...] ».

Nous avons alors souhaité confirmer que ce type de méthodes était peu utilisé en didactique et dans le domaine des recherches en éducation en général par une recherche dans la base de données ERIC (Education Resources Information Center¹).

- Les mots clés « analyse » « données » « textuelles » renvoient quatre réponses dans le champ de la littérature et de la linguistique ;
- « textual data analysis » renvoie cinq réponses dont deux sont en relation avec des problématiques d'éducation ;
- « lexicométrie » en anglais et en français donne trois résultats, dont un en relation avec l'éducation ;
- « text mining » permet d'obtenir 196 résultats dont seulement 17 sont classés dans les recherches en éducation.

Ces éléments nous amènent à nous demander si les outils statistiques d'analyse de données textuelles permettraient d'accompagner le travail du chercheur en didactique, d'analyser des corpus inaccessibles en raison de leur taille et de fiabiliser les analyses par lecture.

Une méthode a particulièrement retenu notre attention : la détermination de mondes lexicaux au moyen de l'analyse statistique des cooccurrences (Reinert, 2007, 1986), elle-même basée sur l'approche fréquentiste ou l'analyse géométrique

¹ <https://eric.ed.gov>

de données (Benzécri, 1973 ; Benzécri & Benzecri, 1984). Cette méthode est implémentée à l'origine dans le logiciel ALCESTE² (Analyse des Lexèmes Cooccurents dans les Énoncés Simplifiés d'un Texte), mais également dans le logiciel IRaMuTeQ³ (Interface de R pour les Analyses Multidimensionnelles de Textes et de Questionnaires). Nous privilégions ici ce dernier, car il est libre, multilingue et possède des versions pour les trois grands types de systèmes d'exploitation (Windows®, Mac OS® et Linux).

Nous examinons donc, dans cet article, les apports méthodologiques de ce type d'analyse statistique des données textuelles aux recherches en didactique en prenant comme appui la didactique des mathématiques.

Après une description de la méthode statistique utilisée, nous en explorons les potentialités au travers de deux usages : traiter des échanges entre formateurs et stagiaires et analyser des textes des programmes d'enseignement des mathématiques à l'école primaire française depuis les années 1970.

1. De l'analyse statistique à la détermination de mondes lexicaux

1.1. Posture de recherche

Dans notre approche il ne s'agit pas de réduire la méthode d'analyse des données textuelles à un traitement informatique, mais bien d'intégrer dans nos méthodes des résultats statistiques. Cela ne nous dispense pas d'avoir un regard sur les points de vue épistémologiques sous-jacents à ces traitements, sans pour autant en faire nos propres fondements. Les résultats statistiques sont pris ici comme un indicateur parmi d'autres. Nous considérons que nous pouvons interpréter les informations statistiques comme la présence ou l'absence significative d'un terme dans un corpus ou les cooccurrences (des présences conjointes de plusieurs termes dans des portions de textes définies) significatives avec nos cadres habituels comme la double approche (Robert, 1999) pour les pratiques enseignantes, les genèses instrumentales (Rabardel, 1995) pour analyser l'introduction d'un artefact numérique ou non. Cette démarche est bien dans la lignée des recherches sur le langage par exemple géométrique (Barrera Curin, Bulf & Venant, 2016, p. 73) qui combinent analyse didactique avec d'autres types d'approches comme l'analyse sémantique, discursive.

² CNRS-PRINTEMPS.

³ Développé au sein du Laboratoire d'Études et de Recherches Appliquées en Sciences Sociales de l'Université de Toulouse 3 – Paul Sabatier (LERASS) au sein de l'équipe REPERE (Représentations et Engagements Professionnels, leurs Evolutions : Recherches et Expertises) du CREFI-T (Centre de Recherche en Éducation, Formation et Insertion de Toulouse)

1.2. Premier traitement des textes et statistiques textuelles

Le traitement statistique des corpus textuels par un « simple » comptage des formes graphiques des mots peut apporter un certain nombre d'informations de base, mais il confronte l'utilisateur à des problèmes liés notamment aux variations de chaque mot : singulier, pluriel, masculin, féminin. Par exemple si l'on conteste l'usage du mot « formateur » il faut regarder « formateur », « formatrice », « formateurs », « formatrices » et parfois « maître-formateur »... Les logiciels comme IRaMuTeQ proposent un premier traitement permettant de simplifier le corpus : la lemmatisation « est une autre technique de normalisation : pour chaque forme déclinée d'un mot dans un document ou une recherche est identifiée une forme de base : le lemme. Les bénéfices de la lemmatisation sont les mêmes que pour la racinisation. De plus, en utilisant les formes de base des mots, le chercheur peut faire correspondre une clef de recherche exacte à une clé indexée » (traduit⁴ de Korenius et al., 2004).

Le procédé de lemmatisation est une réduction à une forme canonique de la multitude de formes (flexions ou conjugaisons). Son utilisation permet de faire apparaître des occurrences d'utilisation de mots quels que soient la variante : masculin, féminin, pluriel et le temps pour les verbes.

Comme toute réduction elle masque un certain nombre d'informations (sans toutefois les perdre complètement, nous le voyons plus loin avec IRaMuTeQ), mais elle rend l'extraction de statistiques significatives plus aisée.

Lors du cours de statistiques pour la recherche dans le master MEEF (métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation) pour les professeurs d'Éducation Physique et Sportive (EPS), nous leur avons fait soumettre à IRaMuTeQ les programmes d'enseignement de l'EPS au collège et au lycée en vigueur en 2014. Le tableau 1 fournit la liste des douze premiers lemmes classés par occurrence décroissante.

⁴ “is another normalization technique: for each inflected word form in a document or request, its basic form, the lemma, is identified. The benefits of lemmatization are the same as in stemming. In addition, when basic word forms are used, the searcher may match an exact search key to an exact index key” (Korenius, Laurikkala, Järvelin & Juhola, 2004).

Lemme	occurences	Types
niveau	196	nom
compétence	103	nom
élève	88	nom
activité	88	nom
physique	80	adj
enseignement	76	nom
eps	73	nr
projet	57	nom
performance	56	nom
réaliser	55	ver
meilleur	49	adj
pratique	48	adj

Tableau 1. les douze lemmes les plus occurrents dans le corpus : forme, nombre d'occurrences, nature grammaticale.

Ce corpus comporte au total 15111 occurrences et 1633 lemmes ont été détectés à partir de 2156 formes.

Ce qui a surpris des étudiants stagiaires, c'est la présence en premier du mot « niveau », mais surtout le classement du mot « performance » en dixième place avant « pratique » par exemple. Ils ont donc cherché à savoir comment ce mot était utilisé en accédant à ce qui est nommé dans IRaMuTeQ c'est-à-dire le contexte d'utilisation du mot dans le corpus. On peut y lire : « niveau 4 pour produire la meilleure *performance*, se préparer et récupérer efficacement... ». Sans entrer dans une analyse plus approfondie, le traitement donne une information qui n'était pas accessible aux étudiants sinon : un lecteur lit plus de fois le mot *performance* que le mot *pratique* quand il lit le programme d'EPS du collège. L'analyse doit être approfondie, mais il révèle des éléments que la lecture seule n'avait pas mis en évidence.

De même lorsque nous avons commencé à travailler avec des collègues spécialistes en relations internationales sur la comparaison des discours de l'état de l'union de Georges W. Bush et Barack Obama (Baillat, Emprin & Ramel, 2016) nous avons commencé par analyser les comptages de mots, de lemmes, de phrases, de mots par phrase dans les textes pour vérifier s'il existait des différences dans la façon de s'exprimer des deux présidents. Est-ce que les phrases utilisées par Georges W. Bush sont moins élaborées (nombre de mots, richesse du vocabulaire utilisé...) que

celles de Barack Obama ? Il s'avère que les phrases des discours de G. W. Bush font en moyenne 18,2 mots alors que celle de B. Obama en font 17. En revanche les discours du premier sont plus courts et moins riches en lemmes (en moyenne 4900 mots et 3526 lemmes contre 7000 et 4592 lemmes pour B. Obama). Ces premiers éléments ne permettent pas à eux seuls de construire une analyse, mais ils fournissent là encore des données objectives permettant de commencer la réflexion en caractérisant le corpus de données et de mettre à distance certains *a priori* (l'image de G. W. Bush par rapport à celle de B. Obama laissait penser à des phrases plus simples donc plus courtes pour le premier).

1.3. Les unités de contexte et les cooccurrences

Ces éléments statistiques aident également l'utilisateur à définir les unités de contexte : « Nous entendons par « unités de contexte » (u.c.), tout segment de texte pouvant servir de support à l'étude des représentations envisagées. Généralement la segmentation du corpus en u.c. suit la segmentation « naturelle » de sens : proposition, phrases, paragraphes, réponses, etc. » (Reinert, 1986). La méthode de traitement que nous utilisons nécessite de segmenter le texte en unités d'une taille préétablie, plus la taille de ces unités est proche de la réalité du texte plus les résultats fournis pourront être significatifs. Si on considère qu'un paragraphe correspond à une idée et que pour les discours de l'état de l'union il y a en moyenne quatre phrases par paragraphe avec une taille de phrase moyenne de 18 mots, on peut faire le choix de paramétrer les unités de contexte à 70 mots. Pour un dialogue en classe où les échanges font en moyenne 4 phrases de 10 mots on choisira une taille d'unités de contexte de 40 mots.

La définition de la taille des unités de contexte est d'autant plus importante que pour aller plus loin dans l'analyse des textes, le concept de *cooccurrence* est mobilisé. Il s'agit de compter le nombre de fois où des mots apparaissent ensemble, dans la même unité contextuelle. Une hypothèse de base de ce travail est que « pour pouvoir énoncer, le sujet énonçant doit se représenter ce qu'il va dire dans un certain espace mental (qui lui sert de "référence"). Le choix de cet espace référentiel, de ce "lieu" – qui ne dépend pas forcément d'une opération consciente – implique le choix d'un type d'objet : il implique, par là même, un type de vocabulaire. En conséquence, l'étude statistique de la distribution du vocabulaire dans les différents énoncés d'un corpus doit permettre une discrimination de ce vocabulaire révélatrice des différents choix référentiels effectués par l'énonciateur. » (Reinert, 1993, p. 2)

La méthode Alceste consiste à redécouper le corpus en unités de contexte élémentaires (UCE), plus petites que l'unité de contexte, fournies par les textes (comme les phrases) et établir un tableau de comptage des cooccurrences entre les mots lexicaux (que l'auteur nomme à l'époque de la création de la méthode mots

pleins), c'est-à-dire à l'exclusion des mots grammaticaux comme les prépositions, les pronoms (appelés par l'auteur mots outils). En effet « les mots pleins ont cependant la faculté de susciter des contenus en tant qu'ils stabilisent nos visions du monde, mais le contenu n'est pas dans le mot ; il est dans l'acte, dont le mot est une trace. » (Reinert, 2008, p. 982). Ce tableau que l'on peut imaginer avec en ligne les mots lexicaux lemmatisés et en colonne les UCE est ensuite traité au moyen d'une analyse factorielle des correspondances (AFC) illustrée figure 1.

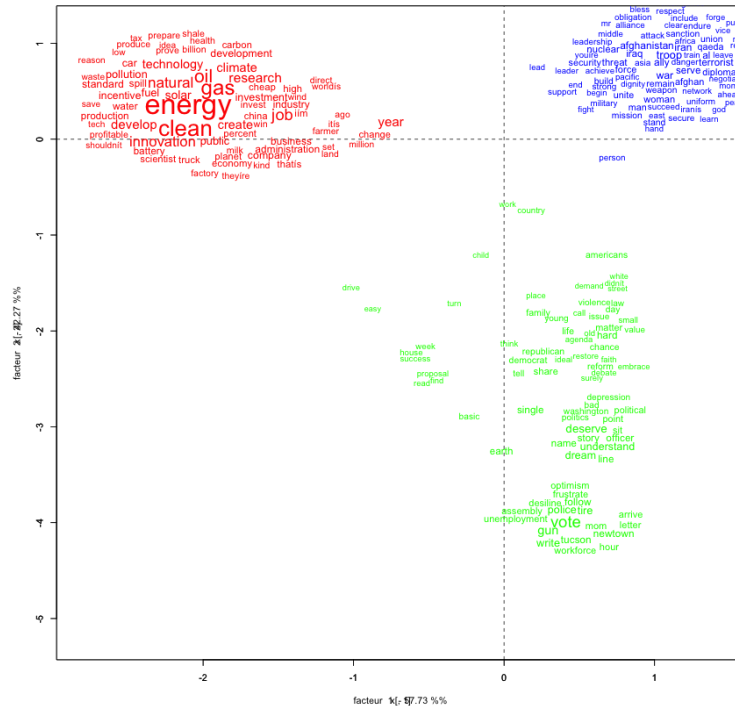


Figure 1. Représentation de l'AFC des cooccurrences des mots lexicaux lemmatisés dans les discours de l'état de l'union de B. Obama

Par essence, l'AFC permet d'identifier si des UCE se ressemblent du point de vue de la distribution des mots. Nous ne décrivons pas en détail le procédé de calcul des AFC, mais uniquement ses spécificités ayant un impact sur l'analyse finale. Tout d'abord le tableau des UCE n'est pas traité directement, mais en relation avec un tableau équiprobable par la métrique du χ^2 normalisé. En conséquence ce ne sont pas les cooccurrences les plus fréquentes qui sont mises en avant, mais celles qui se distinguent le plus d'une répartition aléatoire. On recherche ensuite la factorisation optimale de la matrice, c'est-à-dire que le premier axe factoriel est celui qui représente le plus (en termes de χ^2) les données de la matrice initiale, puis le second axe factoriel... On parle alors, pour chaque axe, du pourcentage de

variance exprimé. Ainsi en représentant les données dans un espace à deux dimensions suivant les deux premiers axes factoriels, ce graphique exprimera un certain pourcentage des données initiales.

1.4. Classification hiérarchique descendante et mondes lexicaux

Ensuite est effectuée une classification hiérarchique descendante :

« 1. une analyse factorielle des correspondances (A.F.C.) est menée sur le tableau, puis pour toutes les partitions possibles le long du 1er facteur de l'AFC, l'inertie inter-classe est calculée. Une première coupure intervient pour la partition qui maximise l'inertie inter-classe.

2. Chaque unité du tableau est permutée d'une classe à l'autre et l'inertie inter-classe est recalculée. Si celle-ci est supérieure à l'inertie inter-classe précédente, la permutation est conservée. Cette partie de l'algorithme boucle jusqu'à ce qu'aucune permutation n'augmente l'inertie inter-classe.

3. Les formes spécifiques d'une classe (au sens du χ^2) sont retirées de l'autre. » (Ratinaud & Marchand, 2012, p. 837).

Les classes ainsi obtenues, si elles résistent à des variations de découpage des UCE, révèlent des mondes lexicaux : « Ce modèle simplifié de représentation statistique d'un discours suffit à mettre en évidence, du moins dans l'analyse de certains corpus, une tendance du vocabulaire à se distribuer dans des mondes lexicaux stabilisés... » (Reinert, 2008, p. 982).

C'est cette méthode qui est implémentée et adaptée dans IRaMuTeQ, notamment au niveau de construction des matrices qui, dans le cadre de ce type d'analyse, sont principalement constituées de zéros.

« Par ailleurs, les adaptations réalisées sur l'algorithme de classification rendent possible l'utilisation de la méthode ALCESTE classique (avec la double classification sur u.c.) sur des corpus de plusieurs dizaines de millions d'occurrences, tout en travaillant sur un nombre important de formes pleines. La procédure que nous avons suivie pourrait également permettre d'améliorer la recherche de stabilité dans l'analyse des gros corpus en utilisant les classifications sur les formes moins fréquentes pour préciser le contour des classes obtenues sur les classifications des formes fréquentes. » (Ratinaud & Marchand, 2012, p. 844)

1.5. Les outils pour le chercheur

Les textes soumis à l'analyse peuvent être de différentes natures : ils peuvent provenir d'un même auteur (discours, texte d'un auteur), de plusieurs auteurs (Bush vs Obama, échange sur une plateforme en ligne, transcription des séances de formation) ou être une œuvre collégiale (les programmes...). Les textes soumis

peuvent aussi appartenir à différents contextes (blogues différents, différentes années, dates...). Il est important que l'analyse puisse tenir compte de ces paramètres sans pour autant qu'ils influent sur le traitement statistique. Les lignes étoilées d'IRaMuTeQ permettent de réattribuer, *a posteriori*, ces paramètres aux différents mondes lexicaux.

Au début de chaque portion de texte soumise, le chercheur introduit une ligne étoilée « **** » et indique les paramètres, par exemple le sexe du locuteur : sexe_F ou sexe_M, son nom loc_Arne ou l'année de production annee_2009. Ces paramètres sont définis par le chercheur, de même que les valeurs possibles, celles qui suivent le « _ ». Ces lignes ne sont pas incluses dans l'analyse factorielle, mais elles sont conservées pour la restitution. Elles permettent donc de vérifier des hypothèses et attribuer certains mondes lexicaux à l'un ou l'autre des paramètres. Dans le travail sur les discours de l'état de l'union, nous avons dans un premier temps soumis l'ensemble des textes en choisissant les paramètres suivants discours_bush/discours_Obama et annee_xxxx. Notre première question était de savoir si les mondes lexicaux pouvaient être communs aux deux présidents et si certaines années (par exemple 2011, suite au 11 septembre) pouvaient marquer des changements dans les discours. Le premier résultat de l'analyse par IRaMuTeQ a été de mettre en évidence deux classes stables illustrées par les deux premières branches du dendrogrammes (figure 2) : l'une attribuée à G.W. Bush de façon significative (en termes de χ^2 comme le montre la copie d'écran du logiciel en figure 3) et l'autre à B. Obama.

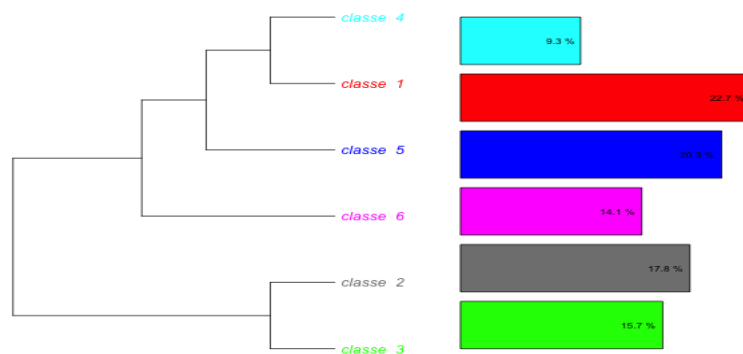


Figure 2. Dendrogramme présentant l'analyse IRaMuTeQ pour les discours de l'état de l'union de G. W. Bush et B. Obama. La première branche principale est révélatrice des discours de B. Obama et la seconde de G.W. Bush

num	eff. s.t.	eff. total	pourcentage	chi2	Type	forme	p
359	11	44	25.0	2.93	sw	his NS (0...	
360	4	12	33.33	2.82	sw	we'll NS (0...	
361	63	339	18.58	2.61	sw	are NS (0...	
362	8	31	25.81	2.42	sw	since NS (0...	
363	2	5	40.0	2.23	sw	wherever NS (0...	
364	2	5	40.0	2.23	num	6 NS (0...	
365	9	37	24.32	2.11	sw	another NS (0...	
366	3	9	33.33	2.11	sw	further NS (0...	
367	60	119	50.42	116.35		date_2003 < 0,0001	
368	188	711	26.44	107.64		discours_Bush < 0,0001	
369	36	83	43.37	50.35		date_2002 < 0,0001	
370	28	99	28.28	12.51		date_2004 0.00040	
371	23	78	29.49	11.68		date_2007 0.00063	
372	18	83	21.69	2.34		date_2008 NS (0...	

Figure 3. Copie d'écran des tableaux fournis par IRaMuTeQ montrant la significativité en termes de χ^2 de la modalité Bush pour la variable discours pour les classes 2 et 3

La thématique des « États voyous » (rogue nations) est réactivée dans le discours de G. W. Bush après le 11 septembre 2001. Alors même que ce terme n'apparaît qu'une seule fois dans le corpus « on le retrouve cependant en filigrane des discours de Bush Jr. grâce aux nombreuses cooccurrences entre ces pays et un vocabulaire associé à la menace et à la défense de la démocratie » (Baillat et al., 2016, p. 234). Le traitement des lignes de paramètres a mis en évidence que les mondes lexicaux des deux présidents étaient distincts au regard de cette méthode et que pour aller plus loin il nous fallait reprendre le traitement séparé des deux corpus, ce que nous ne détaillons pas ici.

Nous avons précisé que les tableaux de contingences ne prenaient en compte que les mots lexicaux. Cela ne veut pas dire que les formes supplémentaires, les mots grammaticaux soient perdus. Comme pour les lignes étoilées, elles sont réintégrées à l'analyse et peuvent être interprétées. Par exemple, dans l'analyse des discours de B. Obama une classe fait apparaître de façon cooccurrence les mots « school », « teacher », « child », « education ». Nous donnons dans le tableau 2 un extrait du tableau des χ^2 ordonné suivant la classe 3. Ce qui est intéressant c'est que cette classe est caractérisée par la présence des formes « every » et « each ». Le fait de pouvoir intégrer *a posteriori* ces formes supplémentaires sans influencer le traitement statistique permet de compléter l'analyse.

À chacune des étapes, le logiciel permet de retrouver les UCE où se trouvent les mots ou les cooccurrences. Cet outil, nommé *concordancier* et illustré par la capture d'écran en figure 4, permet en permanence au chercheur de revenir au texte et donc à l'acception dans laquelle un terme donné est utilisé.

Comme dans toute méthode statistique le logiciel fournit également des données calculées permettant d'analyser les résultats. Le pourcentage de segments classés est un de ces paramètres, qui permet de savoir quelle part du corpus est effectivement prise en compte dans la classification.

D'autres outils sont également disponibles pour permettre de représenter, de façon graphique, les résultats obtenus : les nuages de mots, les représentations graphiques de AFC... Nous en donnons quelques illustrations dans les exemples qui suivent.

	classe 1	classe 2	classe 3	classe 4	classe 5
school	-2,97	-8,327	118,959	-1,662	-13,78
teacher	-4,314	-5,039	102,578	-2,273	-10,124
college	-3,891	-4,545	91,356	-1,884	-9,131
child	-1,412	-2,164	75,582	-4,754	-8,273
student	-0,52	-4,545	68,606	-1,884	-9,131
education	-1,715	-6,54	54,558	1,636	-13,139
...					
every	-0,626	1,278	14,883	-2,7	-4,077
...					
each	-4,314	-0,296	11,879	-0,839	0,023
...					
possible	0,129	-3,566	10,944	-0,139	-0,989

Tableau 2. Tableau des χ^2 ordonné suivant la classe 3 pour l'analyse des discours de B. Obama

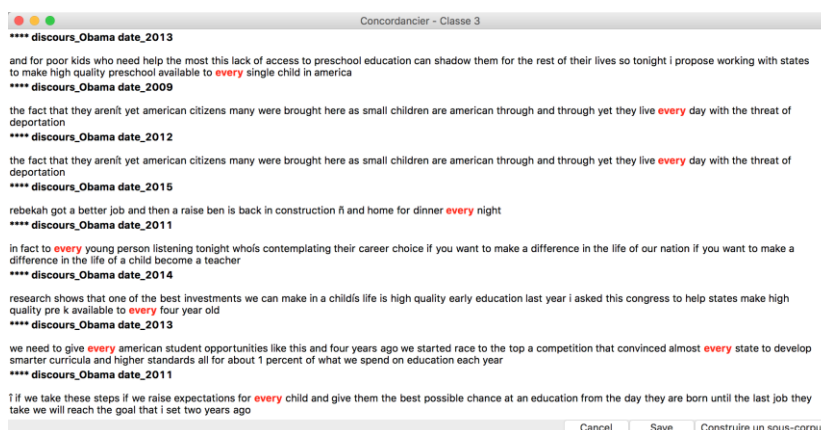


Figure 4. Copie d'écran du concordancier pour la forme supplémentaire « every » dans l'analyse des discours de B. Obama

1.6. Conclusions sur la méthode Alceste

La méthode Alceste implémentée dans le logiciel IRaMuTeQ est donc un outil pour mettre en évidence des mondes lexicaux stabilisés dans nos corpus de données textuelles. Cette mise en évidence n'est pas une fin en soi, mais elle vise à donner des éléments de réflexion au chercheur en s'appuyant sur les traces purement langagières laissées dans le texte par les locuteurs. Par ailleurs, IRaMuTeQ fournit

des outils complémentaires permettant d'approfondir l'analyse qualitative des données ainsi obtenues.

2. Deux exemples pour mettre en évidence les potentialités de ces outils statistiques

Nous prenons maintenant deux exemples issus de nos travaux pour illustrer comment l'usage de ce type d'outil peut contribuer au travail du didacticien.

Le premier consiste à traiter un corpus de grande taille pour lequel nous disposons de nombreux paramètres. Il s'agit d'échanges entre les formateurs et les stagiaires autour d'un portfolio centré sur l'évaluation des compétences professionnelles. Nous disposons donc de plusieurs paramètres comme l'année scolaire, la discipline dans laquelle le travail a été rendu, le site de formation du stagiaire. Le traitement statistique nous permet, dans ce cas, de répondre à des questions de significativité des résultats obtenus.

Le second part d'un corpus déjà existant : les textes des programmes officiels. Il permet de montrer comment l'analyse par des statistiques textuelles peut mettre en évidence des questions *a priori*.

2.1 Le portfolio numérique : analyse d'une grande quantité de texte et croisement des méthodologies

Dans une recherche menée en 2011, notre objectif était de comprendre l'évolution des usages d'un portfolio numérique au sein de l'IUFM de Reims Champagne Ardenne (Connan & Emprin, 2011). Pour accéder aux usages, nous disposons de deux types de traces :

- des enquêtes de l'observatoire des formations, structure organisant l'évaluation des formations par les étudiants et les formateurs ;
- les échanges au travers du carnet de bord informatisé (CBI) : le portfolio numérique, passage obligé de toutes les évaluations des fonctionnaires stagiaires.

Ces derniers devaient faire la preuve, par le dépôt de traces (textes d'analyse de séances, travaux d'élève...) de l'acquisition des compétences professionnelles attendues en fin de formation initiale. Ces dépôts donnaient lieu à des échanges entre stagiaires et formateurs autour des compétences acquises et des travaux déposés. Nous revenons, ici, plus en détail sur l'analyse de ce dernier corpus comportant 6823 textes (433870 mots, dont 16489 mots distincts) écrits par les formateurs et les formés pendant quatre années (de septembre 2006 à août 2010). Au départ nous avons 12255 échanges desquels ont été uniquement supprimés les échanges quasi-vides : « merci », « bien reçu », « vu », « laisser votre message ici »... pour obtenir les 6823 textes finalement analysés.

Le traitement statistique a d'abord l'intérêt de pouvoir traiter rapidement ces textes, mais également de déterminer si certains phénomènes sont attachés à des paramètres. Les questions que nous nous posions étaient en premier lieu de savoir si les échanges avaient évolué dans leur contenu (échanges techniques, administratifs, évaluatifs, formatifs...) entre 2006 et 2010 mettant ainsi en évidence une forme d'évolution des usages de l'artefact numérique. Une autre question portait sur les spécificités disciplinaires ou locales : est-ce que certains usages étaient révélateurs d'une spécificité disciplinaire ou de pratiques liées à un site de formation ? Les textes ont été indexés par leur année universitaire d'émission, la discipline du formateur, le site de formation du stagiaire et du formateur. Le traitement informatique permet alors de mettre en évidence des présences statistiquement significatives d'échanges provenant d'un paramètre ou de l'autre.

Le traitement par le logiciel ALCESTE identifie quatre classes stables, en hiérarchisant 8213 unités de contexte élémentaire (UCE) avec 1371 formes analysées qui correspondent à 93% des UCE classées (figure 5). Le premier résultat est que l'année n'apparaît de façon significative dans aucune des classes. L'hypothèse d'une évolution de la nature des échanges au cours des années n'est pas vérifiée par l'analyse des mondes lexicaux. Les autres paramètres tels que la discipline n'apparaissent qu'anecdotiquement au niveau des mondes lexicaux. Les échanges formateurs/stagiaires sont donc indépendants du site et de la discipline d'enseignement. Les classes sont interprétées par les chercheurs de la façon suivante :

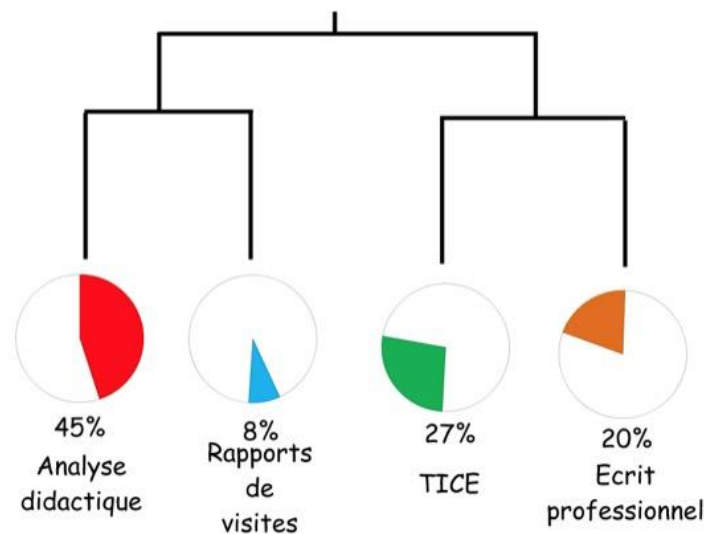


Figure 5. Analyse et interprétation des classes Alceste

L'analyse de ce corpus par la méthode Reinert met en évidence la correspondance entre les quatre mondes lexicaux et les quatre types de travaux que les stagiaires avaient à déposer sur les CBI. Ce résultat montre qu'il y a une forme de dissociation dans les différentes formes d'évaluation : l'analyse didactique demandée dans le cadre de la formation, les rapports de visites correspondant à l'évaluation du stage, l'évaluation des usages du numérique et l'écrit professionnel. Ce constat permet de contester les différences entre les échanges sur l'analyse de travaux didactiques (première catégorie) et ceux sur l'analyse des usages des technologies (troisième catégorie) : « La classe 3 regroupe les commentaires liés aux TICE ; on y voit apparaître des termes dédiés tels que « fichier », « FOAD » (Formation Ouverte A Distance), « mutualisation », « ressources » « informations » ainsi que des listes de compétences du C2i® 2e (dépôts effectués à la fois dans le cadre du référentiel métier et de celui du C2i® 2e). Les absences significatives sont celles des termes de la classe 1, par exemple « élève » ou « séance » ainsi que celles des adjectifs en général. Il y a donc une véritable singularité. » (Connan & Emprin, 2011, p. 14)

Une analyse de la classe 2 montre qu'elle est constituée d'échanges réduits (ce que confirme son poids de 8 %). Dans la mesure où un rapport détaillé est associé à ces échanges, on peut supposer que des éléments plus formatifs y sont indiqués. Le dialogue sur la plateforme entre le formateur et le stagiaire est donc réduit.

Ce premier exemple montre le rôle de ce type d'analyse :

- la mise en évidence d'une dissociation des différentes formes d'évaluation du point de vue des échanges formateurs/stagiaires. Elle permet de donner des éléments de discussion pragmatiques et dépersonnalisés pour engager une réflexion par exemple sur l'évaluation de la formation des fonctionnaires stagiaires.
- L'hypothèse d'évolution des pratiques n'est pas confirmée en termes de transformation des mondes lexicaux. Si l'on veut regarder l'évolution des pratiques, il ne faut donc vraisemblablement pas la chercher dans les discours formateurs/formés, mais dans la perception de l'outil. Le travail sur les questionnaires (évaluation des formations par les stagiaires et les formateurs) montrera, par exemple, que l'outil est de plus en plus perçu comme simple d'utilisation, facilitateur d'échanges entre formateurs et stagiaires, mais également comme outil d'évaluation et non pas de formation. Ce dernier point met en évidence l'importance de croiser les méthodologies d'analyses.

La méthode Reinert a été utilisée seule, sans lecture complète du corpus par un chercheur, mais elle a permis de mettre en évidence des faits statistiques utiles pour mieux comprendre les pratiques liées au portfolio. Elle a également invalidé certaines hypothèses de recherche comme la présence de spécificité locale.

Le second exemple choisi illustre un usage plus exploratoire d'un corpus textuel. Il ne s'agit pas cette fois de répondre à une question, mais d'explorer les données à la recherche d'hypothèses.

2.2. Traiter un corpus et émettre des hypothèses : analyse des programmes officiels

Nous avons été sollicités en 2015 par le conseil supérieur des programmes (CSP), comme beaucoup d'autres chercheurs en didactiques, pour contribuer à la réflexion sur les programmes de 2016⁵. Les questions posées portaient notamment sur une analyse des programmes de 2002 et de 2008. Cette demande nous a incité à regarder si, d'un point de vue lexical les programmes des différentes années présentaient des singularités. Après la parution des programmes, nous avons continué notre analyse en partant des programmes de 1976 jusqu'à ceux actuels (mis en œuvre à la rentrée 2016). Le choix de commencer l'analyse en 1976 correspond au fait que ce sont les premiers programmes post « réforme des mathématiques modernes ». Cette dernière marquait une rupture telle que nous avons fait le choix de ne pas l'inclure dans l'analyse.

Notre corpus comporte donc la partie mathématique des programmes officiels de 2016, 2008, 2002, 1995, 1985, 1980, 1976 à 1978 (programmes par année). Ce corpus comporte 48715 mots.

Nous avons paramétré notre corpus par l'année d'émission des programmes et le cycle concerné. Ce concept de cycle est anachronique en ce qui concerne les programmes des années 1970 ; de plus il a changé dans les derniers programmes officiels : le cycle 2 intègre maintenant le CE2 et le cycle 3 la 6^{ème}. Comme les programmes des années 2000 sont décrits par cycle, nous avons conservé le paramétrage en cycle sans pouvoir extraire le CE2 du cycle 3. En revanche pour les programmes libellés par année nous avons associé le CE2 au cycle 2. Nous devons donc en tenir compte dans l'analyse.

Le traitement est réalisé par la méthode Reinert implémentée dans IRaMuTeQ : une double classification sur RST (regroupement de segments de textes), permet de classer 58 % des formes et fait apparaître 6 classes décrites en figure 6.

⁵ A consulter sur la page <http://www.education.gouv.fr/cid82307/le-conseil-superieur-des-programmes-contributions-des-experts-sollicites-par-les-groupes-charges-de-l-elaboration-des-projets-de-programmes.html>

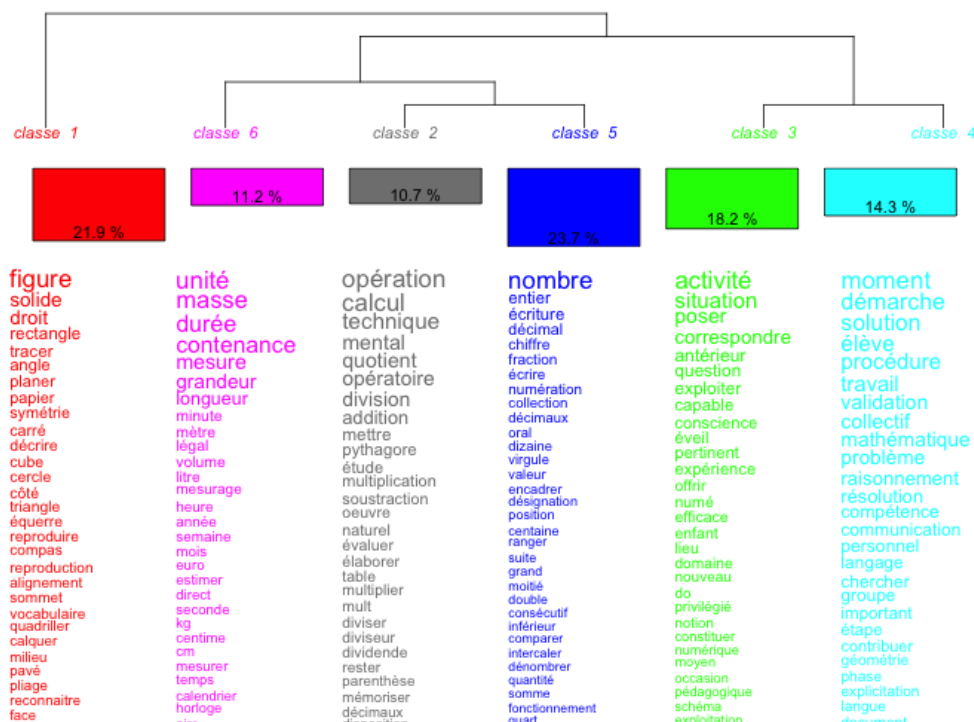
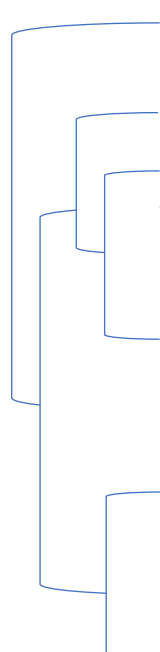


Figure 6. Dendrogramme des classes dans l'analyse des programmes d'enseignement des mathématiques à l'école primaire depuis 1976

Nous avons réalisé une analyse des classes en nous basant sur les listes de mots cooccurentes, sur les paramètres significatifs dans les classes et les formes supplémentaires qui n'apparaissent pas dans le dendrogramme.

Des hypothèses peuvent être émises suite à cette analyse (58 % des UCE - unités de contexte élémentaire- traitées) :

- Il semble y avoir une spécificité du vocabulaire employé pour parler de géométrie. Ce monde lexical (classe 1) se distingue des autres classes. Cette classe est présente de façon significative dans les programmes de 2008 et de 2016.
- Les programmes de 2002 se distinguent par l'emploi d'un vocabulaire autour des démarches d'apprentissages, des procédures et des raisonnements des élèves.
- Les programmes de 76 à 80 insistent sur les apprentissages des techniques opératoires et les savoirs, mais également sur les activités dans lesquelles les mathématiques apparaissent.
- Les programmes de 2016 sont spécifiques par l'importance portée aux apprentissages liés à la mesure.



Niv.	Classe	Mode lexical	Programmes	Formes supplémentaires
	Classe 1	la géométrie	2008 et 2016, Cycle 2	
	Classe 6	la mesure	2016, cycle 2	
	Classe 2	opération techniques et de calcul	1976/78 et 1980	Savoir
	Classe 5	nombre en écriture décimal et travail sur la numération	2002, 2008, cycle 3	
	Classe 3	activités (manuelles, d'éveil...), situations (conçues par l'enseignant)	1976/78 et 1980 1995 et cycle 3	Devoir, permettre (aux enfants de développer des attitudes de recherche), pouvoir
	Classe 4	démarche, procédure, résolution	2002	

Tableau 3. Interprétation des mondes lexicaux issus de l'analyse des programmes d'enseignement des mathématiques à l'école primaire depuis 1976, suivant la classification hiérarchique

- Le cycle 1 n'apparaît pas spécifiquement dans les classes, mais les cycles 2 et 3 sont caractéristiques de certaines. S'il n'est pas étonnant, par exemple, pour que classe 5 où apparaît le vocabulaire spécifique aux nombres décimaux soit spécifique du cycle 3 il est plus surprenant que cycle 2 soit significativement présent dans la classe 1, centrée sur la géométrie. Cette faible particularité des cycles peut être intéressante à questionner alors même que les programmes des différents cycles peuvent être rédigés par des « équipes » différentes. Par ailleurs lorsque l'on analyse les programmes année par année, le vocabulaire autour du cycle 1 ressort comme spécifique avec l'usage du mot *enfant* à la place du mot *élève*. Là encore, il faut tenir compte du fait que seulement 58 % du corpus est interprété ici.

Le logiciel IRaMuTeQ permet donc de mettre en évidence des phénomènes liés spécifiquement au langage employé dans la rédaction de programmes. Ces phénomènes permettent de construire des hypothèses pouvant ensuite être traitées par d'autres méthodologies et croisées avec d'autres entrées. Ainsi l'analyse des manuels scolaires pourrait être révélatrice de la réception de ces programmes et de leur interprétation par les auteurs de ces outils. L'usage que nous avons fait, ici, du traitement des données textuelles est rendu rentable par la mise à disposition, au format numérique d'une grande quantité de textes.

3. Conclusions sur les potentialités et les limites de l'analyse statistique.

En constatant que les méthodes d'analyse de données textuelles ne sont que très peu utilisées dans les recherches en didactique alors qu'elles le sont dans d'autres champs, nous avons voulu explorer une méthode particulière d'analyse statistique des données textuelles pour en dégager les potentialités et les limites. En partant de deux exemples détaillés nous avons identifié deux fonctions : vérifier des hypothèses émises au préalable grâce à des données pragmatiques et avoir une approche inductive de l'analyse d'un corpus.

La première limite est liée aux fondements épistémologiques mêmes de la méthode. Il faut admettre que le ou les locuteurs laissent des traces de leurs intentions au travers du choix des mots utilisés : quand l'enseignant fait la classe, que le formateur interagit avec les stagiaires, lors de la production d'écrits professionnels, la réponse à une enquête ou la production d'un écrit officiel. Nous résolvons ce problème en ne faisant pas du traitement statistique des cooccurrences le fondement de notre analyse, mais un fait statistique à analyser, et à comprendre aux moyens d'autres cadres théoriques tels que la double approche (Robert et Rogalski, 2002) pour l'analyse des pratiques enseignantes.

Une seconde limite est la méthode statistique elle-même qui perd une partie de l'information en raison de la factorisation et de la projection d'un nuage de points dans un espace à n dimensions (les n axes factoriel) sur un espace à deux dimensions ainsi que de l'utilisation de formes réduites lemmatisées. Il faut donc tenir compte de cette perte d'information dans l'analyse.

La méthode de découpage du corpus, par des segments de longueur fixe, rend également le découpage des UCE potentiellement risqué, notamment quand de grandes unités de contextes sont mêlées à des unités plus petites. Le choix de la taille des UCE est alors important et doit être manié avec précaution. En modifiant ce paramètre, il n'est pas rare de perdre une part importante du corpus dans la classification.

Les exemples pris montrent également l'importance de croiser les méthodologies pour répondre aux questions de recherche posées. Dans le cas du travail sur le

portfolio, le questionnaire permet d'accéder à des éléments subjectifs : la perception des stagiaires sur l'outil, ou plus précisément la façon dont les stagiaires veulent informer l'institution de leur perception de l'outil. Les stagiaires et les formateurs ressentent l'outil comme de plus en plus simple au fil des années. Si cela peut être facilement expliqué pour les formateurs qui majoritairement restent les mêmes tous les ans, les stagiaires eux changent. Leurs perceptions de la simplicité de l'artefact sont donc vraisemblablement liées aux interactions avec des formateurs de plus en plus aguerris dans l'usage du portfolio.

L'analyse des programmes permet d'émettre des hypothèses tirées non pas de présupposés ou d'impressions, mais d'éléments objectifs. En effet, le logiciel « ne sait pas lire », il traite les mots sans relation avec leur sens et lorsqu'il montre par exemple que les programmes de 2002 sont caractérisés par un monde lexical lié à la démarche et aux procédures des élèves il le fait sans aucun préjugé sur le contexte. Lorsque l'on travaille sur les cooccurrences, il faut être conscient que le logiciel classe dans la même catégorie un texte qui dirait : « il faut prendre en compte les procédures des élèves » et « il ne faut pas prendre en compte les procédures des élèves ». Le traitement statistique montre que les deux textes sont liés par le fait qu'ils parlent des « procédures », des « élèves » et de « prise en compte ». D'autres logiciels de lexicométrie ou de textométrie fonctionnant avec d'autres modèles d'analyse pourraient fournir une analyse croisée pertinente.

Le traitement statistique ouvre donc la possibilité au chercheur d'accéder à des corpus nouveaux comportant de grandes quantités de textes. Une entrée progressive dans ces corpus est alors possible en se concentrant sur des mondes lexicaux qui émergent.

Bibliographie

BAILLAT A., EMPRIN F. & RAMEL F. (2016), chapitre 12 – des mots et des discours. in *Méthodes de recherche en relations internationales* (p. 227- 246). Presses de Sciences Po.

BARRERA CURIN, R., BULF, C., & VENANT, F. (2016). Didactique, sémantique et métaphores : analyse de langages en classe de géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **21**, p. 73-78.

BENZECRI, J.-P. & BENZECRI, F. (1984), *Pratique de l'analyse des données. Analyse des correspondances and classification*. Exposé élémentaire. 2e éd. Paris : Dunod.

BENZECRI, J.-P. (1973), *L'analyse des données* (Vol. 2). Paris : Dunod.

BOURNOIS, F., POINT, S., VOYNNET-FOURBOUL, C. (2002), L'analyse de données qualitatives assistée par ordinateur : une évaluation, *Revue française de Gestion*,

137.

BUSA, R. (1998). Dernières réflexions sur la statistique textuelle, in S. Mellet (éd.), *JADT 1998, 4e Journées internationales d'analyse des données textuelles*, UNSA-CNRS, Nice, p. 179-183.

CONNAN, P.-Y. & EMPRIN, F. (2011), Le portfolio numérique : quelles évolutions des usages et des représentations chez les formateurs d'enseignants ? *Revue Sticef.org*, **14**, 10.

EMPRIN, F. (2007, décembre 14), *Formation initiale et continue pour l'enseignement des mathématiques avec les TICE : cadre d'analyse des formations et ingénierie didactique*. Université Paris-Diderot - Paris VII. Consulté à l'adresse <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00199005>

FALLERY, B., & RODHAIN, F. (2007). Quatre approches pour l'analyse de données textuelles: lexicale, linguistique, cognitive, thématique. In *XVI ème Conférence de l'Association Internationale de Management Stratégique AIMS* (pp. 1-16). AIMS.

GUIRAUD, P. (1954). *Les caractères statistiques du vocabulaire*. Presses universitaires de France.

KORENIUS, T., LAURIKKALA, J., JÄRVELIN, K. & JUHOLA, M. (2004), Stemming and lemmatization in the clustering of finnish text documents (p. 625 - 633). *Proceedings of the thirteenth ACM international conference on Information and knowledge management*, ACM.

LABBE, C. & LABBE, D. (2012), *Analyser les questions ouvertes dans les sondages. In Comment convaincre ? Analyse scientifique de la campagne électorale 2012*. Grenoble.

MAYAFFRE, D. (2005), *De la lexicométrie à la logométrie*. Astrolabe, 1- 11.

RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin, pp. 239. <hal-01017462>.

RATINAUD, P. & MARCHAND, P. (2012), Application de la méthode ALCESTE à de « gros » corpus et stabilité des « mondes lexicaux » : analyse du « CableGate » avec IRaMuTeQ. *Actes des 11eme Journées internationales d'Analyse statistique des Données Textuelles*, 835 - 844.

REINERT, M. (1986), Un logiciel d'analyse lexicale. *Les Cahiers de l'analyse des données*, **11(4)**, 471- 481.

REINERT, M. (1993), Quelques problèmes méthodologiques posés par l'analyse de tableaux 'Énonces x Vocabulaire'. *Actes des secondes journées internationales d'analyse statistique des données textuelles*. Montpellier, 21- 22.

REINERT, M. (2007), Postures énonciatives et mondes lexicaux stabilisés en analyse statistique de discours. *Langage et société*, 3, 189- 202.

REINERT, M. (2008), Mondes lexicaux stabilisés et analyse statistique de discours. *Actes de la JADT 2008*, 981- 993.

ROBERT, A. (1999). Recherches didactiques sur la formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré et leurs pratiques en classe. *Didaskalia*, 15, 123-157.

ROBERT, A. & ROGALSKI, J. (2002). « Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche », *Canadian Journal of Science, Mathematics and technology Education* (La revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies), 2(4), p. 505-528.

TOERNER, G., & ARZARELLO, F. (2012). Grading mathematics education research journals. *Newsletter of the European Mathematical Society*, 86, 52-54.

FABIEN EMPRIN

Laboratoire CEREP

Université de Reims Champagne Ardenne

fabien.emprin@univ-reims.fr

INFORMATIONS POUR LES AUTEURS

Présentation de la revue

Les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives est une revue annuelle fondée en 1988 par Raymond Duval et François Pluvinage, actuellement sous la responsabilité de François Pluvinage, Philippe R. Richard et Laurent Vivier.

Cette revue internationale est dédiée à la diffusion de la recherche en didactique des mathématiques et des domaines connexes. Il s'agit d'une revue francophone de référence sur les recherches portant sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Les articles sont principalement écrits en français, mais peuvent également être publiés en espagnol ou en anglais.

La revue fait l'objet d'un classement scientifique par l'organisme européen ERIH et par l'HCERES en France. Elle est également répertoriée dans des bases de données de référence comme MathEducDataBase ou Google Scholar. Ces différents référencement ajoutent une valorisation des publications dans les Annales pour les auteurs. Les articles sont en accès libre sur le site au bout d'un an.

La revue est ouverte à tout type de recherche. Les articles peuvent être de nature théorique, en relation étroite avec une expérimentation dans le cadre d'un enseignement, ou constituer des comptes rendus d'expériences d'enseignement appuyées sur un cadre théorique explicite. Il est également possible de présenter une synthèse de recherches menées dans un domaine particulier de la didactique des mathématiques, ou de proposer des notes de lectures d'ouvrages scientifiques du domaine. Les articles peuvent concerner tous les cadres d'enseignement dans des contextes socioculturels variés et aussi s'intéresser à la formation, initiale et continue, des enseignants.

Outre la publication du numéro annuel, la revue offre la possibilité d'éditer un numéro spécial sur la base d'un projet clairement formulé.

Cette revue s'adresse principalement aux chercheurs en didactique. Elle intéressera également les formateurs d'enseignants soucieux d'appuyer leurs formations sur la recherche en didactique des mathématiques.

Site internet de la revue : <http://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/adsc>.

Instructions aux auteurs

La revue est ouverte à tout type de recherche, que ce soit un essai didactique ou un rapport d'étude impliquant de la recherche empirique. Il est également possible de présenter une synthèse des recherches menées dans un domaine particulier de l'enseignement des mathématiques ou d'un domaine connexe (physique, algorithmique, etc.), ou de proposer des notes de lectures d'ouvrages scientifiques. Les domaines théoriques de références sont issus de la didactique des mathématiques. Lorsqu'ils s'insèrent dans une problématique d'enseignement des mathématiques, les travaux peuvent aussi prendre appui sur la psychologie cognitive ou sur la linguistique.

Les articles ne dépassent généralement pas vingt pages, mais exceptionnellement, ils peuvent être plus longs et permettre ainsi à l'auteur de développer un point de vue original qui émerge dans le champ de la recherche.

Les articles peuvent être écrits en français, en espagnol ou en anglais. Lorsque l'article est écrit en espagnol ou en anglais, il est attendu que les auteurs proposent également un résumé en français. Si l'une des trois langues de la revue n'est pas comprise par les auteurs, merci de le préciser lors de la soumission.

Les articles sont à soumettre par courrier électronique à mai-adsc@unistra.fr.

Avant tout envoi, nous vous prions de vérifier que votre article respecte bien les consignes éditoriales suivantes :

- Le format de la revue est respecté : voir le fichier de styles¹ pour les auteurs ;
- Le niveau de langue utilisé est soigné et bien travaillé.
- L'article proposé est original. Il n'a ni déjà été publié ailleurs ni envoyé à une autre revue pour publication. Il ne s'agit pas non plus d'une simple traduction d'un article déjà publié.
- L'article ne contient aucun plagiat et il est dûment référencé.
- En décidant d'envoyer un article à la revue des Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, vous autorisez la mise en ligne de votre article sur le site de la revue, un an après sa publication.

Pour composer un article sans utiliser le modèle, par exemple en recourant à LaTeX, voici des précisions sur le format des pages et les caractères utilisés.

1

https://mathinfo.unistra.fr/fileadmin/upload/IREM/Publications/Annales_didactique/adsc_style-auteur.doc

Feuille A4 portrait, avec les marges suivantes :

- Haut : 3 cm Bas : 8 cm
- Gauche : 4 cm Droite : 4 cm
- En tête : 2 cm Pied de page : 7 cm
- Reliure : 0 cm

Caractères :

- Auteur(s) en première page : Arial 12 points, gras, petite capitale, Centré ;
- Titre en première page : Arial 14 points, petite capitale, Centré ;
- Abstract – Résumé – Mots clés : Times New Roman 10 points ;
- En-tête : Arial 9 points ;
- Corps de texte : Times New Roman 11 points.

Pour la pagination d'un article proposé, commencer par le numéro 1.

Procédures de sélection des textes

Les articles proposés sont soumis à un arbitrage, en double aveugle, par trois évaluateurs avant publication. Une synthèse sera envoyée aux auteurs par les rédacteurs en chef. Le cas échéant, des demandes de modifications, aménagements ou compléments des textes présentés seront adressées aux auteurs.

Les articles sont reçus par les rédacteurs en chef de la revue. Ils sont emmagasinés sur une plateforme de partage privée uniquement accessible aux rédacteurs en chef, aux conseillers scientifiques et à la conseillère éditoriale.

Une première appréciation de l'adéquation de l'article avec les objectifs de la revue est faite par les rédacteurs en chef. Cette première évaluation peut aboutir à un refus de l'article s'il ne correspond pas à la ligne éditoriale de la revue ou s'il pose un problème éthique. Il peut également être renvoyé aux auteurs pour effectuer des modifications avant l'envoi aux évaluateurs, par exemple, pour une remise en forme ou une correction linguistique. En cas de nécessité, les conseillers scientifiques peuvent être consultés.

Les rédacteurs en chef se consultent pour le choix et la sollicitation des évaluateurs qui ont, au plus, deux mois pour renvoyer leur évaluation. Ils suivent le bon déroulement du processus d'évaluation et ils sont attentifs aux dates de retour afin de prévoir la publication. Un fichier privé aux fonctions de partage et de synthèse est tenu à jour.

Une fiche d'évaluation est proposée aux trois évaluateurs. Selon le retour de ces derniers, une synthèse est envoyée aux auteurs incluant leurs évaluations. Quatre cas de figure sont envisagés : (A) publication acceptée en l'état ; (B) publication acceptée avec des modifications mineures à effectuer, sans nécessité d'une nouvelle évaluation ; (C) Publication possible sous réserve de modifications

majeures à effectuer et nécessitant une nouvelle évaluation ; (D) refus de l'article. Selon l'éventualité, le traitement est le suivant :

- Cas A, l'article est transféré à la conseillère éditoriale et au secrétaire d'édition pour préparer la publication.
- Cas B, les rédacteurs en chef demandent le retour des modifications par les auteurs dans un délai maximum d'un mois.
- Cas C, les auteurs ont deux mois pour renvoyer leur nouvelle version. Par la suite, les trois relecteurs initiaux sont sollicités avec un délai de 2 mois pour faire la relecture (délai pouvant être ramené à 1 mois si cela permet de publier l'article dans le numéro de l'année).
- Cas D, un retour circonstancié est envoyé aux auteurs par les rédacteurs en chef. Si nécessaire, les conseillers scientifiques peuvent être sollicités.

Généralement, les articles envoyés l'année n et acceptés sont publiés dans le numéro de l'année $n + 1$.

Imprimerie et reprographie
Directions des affaires logistiques intérieures
Université de Strasbourg

Dépôt légal 4^{ème} trimestre 2018