THOMAS BARRIER, ANNE-CECILE MATHE ET JORIS MITHALAL

FORMATION INITIALE DES ENSEIGNANTS DU PREMIER DEGRE EN GEOMETRIE : QUELS SAVOIRS ?

Abstract. Initial teacher education in geometry at primary school. The context of the research is initial primary school teacher education in geometry. We study and compare three implementations of a collectively designed training sequence by three trainers with distinct status and/or research interest. We highlight some variations in the knowledge that the trainers institutionalize, with a specific focus on figure visualization. The research background concerns the potential effects of those variations on teacher training.

Résumé. Le contexte de notre recherche est celui de la formation initiale des professeurs des écoles en géométrie. Nous étudions les variations des savoirs institutionnalisés par trois formateurs aux profils différents, concernant notamment la visualisation en géométrie, sur la base d'une séquence conçue collectivement ; et le rôle de leur discours dans le processus d'institutionnalisation. En arrière-plan de ce travail se trouve la question des effets potentiels de ces variations sur la formation des enseignants.

Mots-clés. Didactique des mathématiques ; formation initiale des enseignants ; savoir ; institutionnalisation ; géométrie ; visualisation.

Introduction

Les résultats présentés dans cet article prennent leur source dans les travaux d'un groupe de recherche-action-formation regroupant des formateurs en mathématiques de l'ESPE Lille Nord de France (2013-2014), groupe auquel deux des auteurs de cet article ont participé. Ces travaux ont notamment donné lieu à la production collective d'un document dégageant les grandes lignes d'une séquence de formation en géométrie destinée à des étudiants de première année du Master préparant au métier de professeur des écoles. Ce document a servi de support à plusieurs mises en œuvre de séances, par différents collègues. Certaines d'entre elles ont fait l'objet d'un recueil de données à des fins comparatives (séances filmées, photos, productions d'étudiants). Dans cet article, nous nous intéressons spécifiquement aux mises en œuvre de trois formateurs expérimentés. Le formateur F1 est issu de l'enseignement secondaire, il intervient aussi bien en formation des professeurs des écoles qu'en formation des professeurs du second degré, sur des aspects disciplinaires et didactiques mais aussi transversaux. Le formateur F2 est enseignant-chercheur en didactique des mathématiques, il intervient également en formation des enseignants du primaire et secondaire pour des enseignements disciplinaires et didactiques. Enfin, le formateur F3 est enseignant-chercheur en mathématiques, il intervient essentiellement dans la formation disciplinaire et

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 21, p. 317 - 342.

didactique des professeurs des écoles et, dans une moindre mesure, en dehors du contexte de la formation des enseignants[1].

Un premier retour sur les mises en œuvre de ces séances au sein du groupe de recherche-action-formation nous a conduits à prendre conscience de variations assez importantes dans les enjeux de savoir que ces formateurs attribuent, éventuellement à leur insu, à cette séquence pourtant conçue collectivement. L'objectif de ce texte est d'identifier de manière plus précise la nature de ces variations et d'illustrer le fait que la formation des enseignants en géométrie est lieu de tensions entre différents enjeux. À plus long terme, à travers cette première étude exploratoire, nous souhaitons interroger la manière dont les choix des formateurs, conscients ou non, les amenant à donner plus ou moins de visibilité à certains savoirs sont susceptibles de produire des effets différenciateurs dans la formation des enseignants.

Nous commençons cet article en donnant quelques éléments de contexte sur la formation des professeurs des écoles en mathématiques et les recherches la prenant pour objet. Nous présentons ensuite deux notions théoriques – celle de *visualisation non iconique* et celle de *savoir transparent* – qui nous permettront d'affiner notre problématique. D'un point de vue méthodologique, nous préciserons notamment les raisons pour lesquelles interroger les savoirs mis en avant au cours de cette séquence de deux séances par chacun des trois formateurs concernés nous a amenés à nous focaliser sur des épisodes que nous reconnaissons comme épisodes d'institutionnalisation, y compris inachevés, envisagés comme un contexte privilégié de manifestation de ces enjeux. Nous présenterons enfin une description et analyse croisée des mises en œuvre et formulerons les questions suscitées par la mise en regard des mises en œuvre observées.

1. Formation des professeurs des écoles en mathématiques : quels savoirs visés ?

Rares sont les étudiants se préparant au métier de professeur des écoles à l'aise avec les mathématiques, y compris élémentaires. Un enjeu fort de la formation est de faire évoluer leur rapport à cette discipline tout en leur permettant de s'approprier certains savoirs disciplinaires et didactiques dans la double perspective de la réussite au concours et de la professionnalisation. La situation est donc complexe. Kuzniak (2007) montre par exemple qu'un même support de formation peut conduire des formateurs à mettre en avant des savoirs de nature variée :

1 Ces formateurs ont été choisis pour rendre compte de la diversité des profils des formateurs en mathématiques. Nous ne visons néanmoins ni la représentativité, ni l'exhaustivité (pas de formateurs issus du premier degré par exemple).

mathématiques pour le concours ou pour la classe (contenu, progression, etc.), didactiques ou relatifs à la gestion de classe. Une *stratégie de formation* peut se caractériser par des décisions concernant la gestion de ces savoirs, leur articulation, le degré de responsabilité laissée aux étudiants (Houdement, 2013). Ces décisions sont notamment dépendantes du corpus de savoirs didactiques disponibles et de leur diffusion au sein des institutions de formation comme du volume horaire consacré à la formation en mathématiques. Notre choix de nous consacrer à la première année de formation peut se comprendre à l'aune de cette dernière remarque : elle concentre, dans le cas qui nous intéresse, l'essentiel des heures consacrées aux mathématiques et à leur enseignement (60h pour 84h au total à l'ESPE[2] Lille Nord de France l'année concernée).

Tout le monde s'accorde sur le fait qu'il est nécessaire qu'un enseignant de mathématiques en sache « plus » que ses élèves sur les contenus qu'il enseigne. Pour autant, le sens à donner à ce supplément de contenu est sans aucun doute moins consensuel. Les travaux impulsés par Shulman (1986) ont mis en évidence l'importance des compétences professionnelles des enseignants qui se situent à l'articulation des compétences disciplinaires et des compétences pédagogiques générales et ont creusé les premières tranchées du chantier de leur description. Dans la lignée de ces travaux inauguraux, Ball, Thames et Phelps (2008) ont proposé une typologie des connaissances pour l'enseignement des mathématiques, spécifiques de la discipline. Cette typologie est issue d'une analyse des connaissances en jeu dans les pratiques effectives d'enseignement des mathématiques. Cette typologie s'organise en deux pôles, le premier comprenant des connaissances (sur les) mathématiques et le deuxième des connaissances pédagogiques disciplinaires, tous deux nécessaires à l'enseignement[3].

Le premier pôle (*subject matter knowledge*) est composé des connaissances mathématiques spécifiques aux métiers d'enseignant de mathématiques, des connaissances communes avec d'autres professions ou contextes de mise en jeu des mathématiques, et des connaissances « sur les » mathématiques. Un exemple de connaissance mathématique spécifique à la profession d'enseignant de mathématiques est donné par Chevallard et Cirade (2009). Il s'agit du théorème

2 ESPE signifie École Supérieure du Professorat et de l'Éducation. Il s'agit de l'institution universitaire en charge, notamment, de la formation des enseignants. La formation initiale des enseignants du premier degré s'y déroule en deux ans (Master 1 et Master 2). Les étudiants passe un concours de recrutement au terme de la première année. La seconde année, les étudiants ayant eu le concours deviennent des étudiants-fonctionnaires-stagiaires et ont, entre autres, une classe en responsabilité à mi-temps, toute l'année.

3 Mais pas suffisants : l'attention aux compétences professionnelles liées aux contenus n'a pas vocation à minimiser l'importance des compétences professionnelles transversales.

méconnu selon lequel si un nombre fractionnaire a/b est un nombre décimal alors la division a/b doit s'arrêter au plus tard à la n-ième décimale, n étant le plus petit des entiers k vérifiant $2^k \geq b$. La familiarité avec ce théorème permet (ou permettrait) à un enseignant de mathématique de mieux gérer l'utilisation fréquente en classe de la calculatrice dans l'évaluation de la décimalité des nombres fractionnaires. À un niveau plus élémentaire, on peut aussi penser à la caractérisation des polygones symétriques par la propriété d'être superposable avec leur figure « retournée ». Cette connaissance a notamment une fonctionnalité forte dans le contexte du travail sur les formes géométriques en maternelle (boîte à formes, puzzle, *etc*.). Ces connaissances nous paraissent d'une certaine importance du point de vue de l'enseignement des mathématiques. Elles sont peut-être moins centrales en dehors de ce contexte particulier[4]. Pour ce qui est des connaissances « sur les » mathématiques, nous reprenons à notre compte l'élaboration de Carillo, Climent, Contreras et Munoz-Catalan (2013) qui distinguent la connaissance de la structuration des mathématiques (être en mesure de situer le contenu travaillé au sein des mathématiques) de la connaissance sur la manière dont les mathématiques s'élaborent. Savoir que d'autres ensembles de nombres seront construits à partir des entiers naturels relève de la première catégorie, savoir ce qui constitue un argument acceptable en mathématique relève de la seconde.

Venons-en maintenant au pôle des connaissances pédagogiques disciplinaires (*pedagogical content knowledge*). Ce qui distingue ce pôle du précédent réside dans le fait que les connaissances en jeu ne sont pas à proprement parler des connaissances (sur les) mathématiques, même si elles y sont intiment liées. Ball et al. (2008) considèrent, d'une part, les connaissances sur l'apprentissage des mathématiques. Ceci comprend ce qui concerne le fonctionnement cognitif des élèves (dans leur diversité), leur difficulté d'apprentissage. Les connaissances concernant la résistance modèle additif au moment de l'enseignement de la proportionnalité en sont un exemple. Côté enseignement, d'autre part, ces auteurs identifient des connaissances portant sur le matériel à utiliser pour l'enseignement d'une notion, sur les ressources disponibles, sur les représentations sémiotiques à utiliser, sur les manières de dire. Être en mesure de verbaliser le fonctionnement d'un algorithme de division en lien avec un problème donné et avec ses connaissances en numération relève de cette catégorie. Enfin, une catégorie est réservée à tout ce qui concerne les connaissances curriculaires.

---

4 Cette question mériterait une discussion délicate que nous n'engagerons pas. D'autres auteurs préfèrent se passer de cette distinction difficile à caractériser entre connaissance commune et spécifique à l'enseignement (Carillo, Climent, Contreras, Munoz-Catalan, 2013).

La maîtrise de ces connaissances pour l'enseignement des mathématiques est très certainement un aspect important de la professionnalisation des enseignants. Charalambous (2008) compare par exemple les enseignements de deux professeures dont les connaissances spécifiques pour l'enseignement des mathématiques se sont avérées fortement contrastés après mesure. L'enseignante ayant des connaissances avancées montrant une propension plus importante au maintien des enjeux cognitifs dans les déroulements qu'elle propose à ses élèves. Pour autant, nous n'en savons encore que très peu concernant la manière dont ces connaissances spécifiques, dans toutes leurs variétés, sont apprises et/ou enseignées en formation. L'enjeu est pourtant important du point de vue de la réflexion sur la professionnalisation de l'enseignement des mathématiques. Ce texte a pour objectif d'apporter une contribution à la réflexion sur les contenus de formation et leur gestion par les formateurs.

Dans ce texte, nous utiliserons les notions de *connaissance* et de *savoir* au sens de Margolinas (2014). Un savoir est une production sociale, qui dispose d'une forme textuelle et qui est reconnu et légitimé par une communauté donnée. Une connaissance vit pour sa part dans une situation, elle est locale, contextualisée, propre à un sujet. Toute situation d'enseignement ou de formation met en jeu de nombreuses connaissances chez les étudiants mais seules une partie d'entre elles sont verbalisées, institutionnalisées, c'est-à-dire transformées en savoir *via* un processus de dépersonnalisation, de décontextualisation, qui dans sa forme aboutie conduit à un texte (*processus d'institutionnalisation*). Par ce biais, la connaissance est signalée par le formateur et reconnue par les étudiants comme quelque chose de potentiellement réutilisable dans d'autres circonstances.

Étant donnée la complexité des enjeux de formation et la diversité des ancrages disciplinaires et institutionnels des formateurs[5], il est raisonnable de faire l'hypothèse de variations dans le choix des savoirs mis en avant. Prenons l'exemple de la formation en géométrie : que faut-il que les étudiants apprennent pour réussir le concours de recrutement ? Pour se préparer à en enseigner les contenus ?

---

5 Ancrages initiaux si l'on pense à leur formation initiale, actuels si l'on pense par exemple aux diverses sections CNU qui accueillent les enseignants-chercheurs impliqués dans la formation en mathématiques : 25 – 26 – 70 – 72.

Nous rappelons que le Conseil national des universités, abrégé par le sigle CNU, est une instance consultative et décisionnaire française chargée en particulier de la gestion de la carrière des enseignants-chercheurs. Il est composé de 11 groupes, eux-mêmes divisés en 52 sections, dont chacune correspond à une discipline. La 25e section correspond aux « mathématiques », la 26e section aux « mathématiques appliquées et application des mathématiques » (qui comprend la didactique des mathématiques), la 70e aux « sciences de l'éducation » et la 72e à l' « épistémologie, histoire des sciences et des techniques ».

Différentes œuvres, relatives chacune à leur institution légitimante, pourraient être convoquées pour contribuer à produire une réponse viable en formation (Chevallard & Cirade, 2009). On peut par exemple penser aux réponses plus ou moins toutes faites, ou au contraire à construire, que pourraient apporter les mathématiques et leur épistémologie, la psychologie cognitive, la didactique des mathématiques, voire encore les neurosciences. La construction d'une réponse viable dans les conditions actuelles de formation des professeurs des écoles passe notamment par une discussion sur ces choix d'œuvres de référence, sur leurs apports réciproques. Au sens de la typologie de Ball et al. (2008), il s'agit ainsi de préciser le type de savoir que l'on souhaite mettre en avant. Les éléments de réponses élaborés au sein des mathématiques ou de leur épistémologie relèvent du premier pôle décrit (*subject matter knowledge*), ceux relevant de la psychologie ou des neurosciences du second pôle (*pedagogical content knowledge*). Dans la séquence à laquelle nous nous intéressons dans cet article, divers savoirs sont susceptibles d'être institutionnalisés : des savoirs relatifs aux objets mathématiques et à leurs relations, à l'enseignement scolaire des contenus de géométrie, des savoirs relatifs à l'activité géométrique elle-même, *etc*.

Dans ce texte, nous avons choisi d'interroger en particulier la place donnée par les formateurs aux savoirs relatifs à la visualisation des figures géométriques. Ces savoirs relèvent de la didactique des mathématiques, tout du moins si l'on retient comme critère celui de la communauté de recherche qui en a favorisé l'émergence et la diffusion. Cette communauté lui donne aujourd'hui une place centrale dans ses travaux sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie. Pour autant, et contrairement au cas du théorème portant sur le nombre de décimales d'un nombre décimal écrit sous forme de fraction, les savoirs relatifs à la visualisation auxquels nous nous intéresserons dans ce texte relèvent plutôt du pôle « pédagogique disciplinaire », au sens où leur élaboration est issue d'une analyse cognitive des pratiques des élèves. Nous préciserons cette remarque dans la partie 2 de ce texte.

Notons que notre étude prend appui sur un seul et même document conçu collectivement. Ceci distingue notre recherche de l'exemple donné plus haut par Kuzniak, le document support ayant été apporté par le chercheur, mais aussi de celle de Sayac (2012). Celle-ci analyse les pratiques de six formateurs dans la perspective de décrire une diversité des pratiques de formation en mathématiques dans le premier degré. Comme nous, elle neutralise les composantes institutionnelles des pratiques, au sens de Robert et Rogalski (2002), en faisant la totalité de ses observations au sein de la même institution de formation. Elle s'intéresse alors à l'impact potentiel de la composante personnelle des pratiques (les formateurs ont des profils individuels propres) sur les composantes cognitives (quels savoirs ?) et médiatives (quelles postures pour les formés ?). Nous nous retrouvons dans ce questionnement. Néanmoins, notre recherche se différencie de celle de Sayac par deux aspects importants. Tout d'abord, nous avons fait le choix de nous centrer sur des étudiants n'ayant pas encore passé le concours de recrutement plutôt que sur des étudiants-fonctionnaires-stagiaires. Ceci a des conséquences tant du point de vue des postures médiatives susceptibles d'être adoptées par les formateurs (un étudiant de première année est par exemple moins souvent considéré comme un collègue qu'un étudiant en seconde année ayant eu le concours et exerçant le métier d'enseignants à mi-temps) que de celui des savoirs susceptibles d'être mis en lumière par les formateurs, ne serait-ce qu'en raison du positionnement vis-à-vis de l'épreuve de mathématiques du concours de recrutement. Ensuite, Sayac s'appuie sur des éléments empiriques – observation d'une séance par formateur – dont elle ne contrôle pas à priori les contenus. Ceci pose des difficultés méthodologiques importantes dans la mesure où les travaux sur les stratégies de formation ont montré l'influence des contenus : certains choix stratégiques sont relativement partagés par les formateurs et dépendent d'abord des contenus ; un même formateur est susceptible de changer de stratégie en fonction des contenus (Houdement, 2013, p. 15). Dès lors, il est délicat d'attribuer l'origine de variations dans les pratiques de formation à la composante personnelle des pratiques si ces variations ont été observées lors de séances ne portant pas sur les mêmes contenus. Ceci explique notre choix de ne travailler qu'à partir d'une seule et même séquence.

Sur le plan de la méthode, nous nous focalisons sur la première séance de la séquence de formation (annexe : partie 1 et 2)[6] et nous cherchons, dans le discours de chaque formateur – ce qu'il dit, mais aussi ses gestes, ses tracés – des traces de processus d'institutionnalisation : prise de distance par rapport à la tâche, dépersonnalisation, marques de secondarisation (Coulange, 2014). Nous aborderons ces processus comme un lieu de construction sociale d'une réalité partagée, sur la base des vécus des étudiants. Ces épisodes sont en grande partie marqués par une place prépondérante des déclarations des formateurs, sur lesquelles portera de fait notre attention. Nous nous appuierons alors sur la typologie introduite plus haut pour décrire et analyser les choix opérés par les formateurs.

Nous expliquons dans la suite de ce texte les raisons pour lesquelles nous avons voulu prendre en particulier en considération les savoirs relatifs à la visualisation. Nous reviendrons ensuite sur les raisons pour lesquelles nous concentrons notre attention sur les phases d'institutionnalisation.

---

6 Une version abrégée du document support est proposée en annexe (la mise à l'écrit du travail collectif est due à F2).

2. Géométrie et visualisation

Nous proposons dans ce paragraphe de préciser ce que nous entendons par « savoirs relatifs à la visualisation » en référence aux travaux de Duval (2005). L'apprentissage de la géométrie suppose la mise en place de fonctionnements cognitifs spécifiques coordonnant une activité sur des objets graphiques (les dessins) et d'idéalités géométriques dont ils sont des représentants nécessairement imparfaits. Duval souligne que la pratique géométrique nécessite une articulation délicate entre des compétences de visualisation spécifiques et des compétences discursives (i.e. verbales dans l'acception du terme par ce chercheur). Celui-ci oppose deux types de visualisation. La *visualisation iconique* s'appuie sur la reconnaissance globale de contours fermés, de formes : on reconnaît un carré car il ressemble aux carrés connus. Il en résulte plusieurs obstacles pour la géométrie : non-reconnaissance des figures qui ne sont pas dans une configuration particulière (carré « posé sur sa pointe » ou aux côtés prolongés), difficultés dans l'identification des propriétés géométriques en tant que relations entre des constituants de l'objet géométrique. La *visualisation non iconique* s'oppose à ce mécanisme en ce qu'elle repose justement sur l'identification de constituants de la figure (des sous-figures de même dimension dans le processus de division méréologique, ou des unités figurales de dimensions inférieures dans les processus de déconstruction) et des relations entre ceux-ci. Dans le cas de la déconstruction instrumentale, que nous évoquerons peu ici, ces relations reposent sur un processus de construction permettant de produire le dessin avec des instruments donnés. Duval insiste sur l'importance majeure du processus de *déconstruction dimensionnelle*, pour lequel il ne s'agit plus de reconnaître des objets mais de les reconstruire à partir de l'identification des unités figurales : « Avec la déconstruction dimensionnelle la figure n'est plus qu'une configuration particulière et transitoire parce que contextuellement détachée d'un réseau ou d'une organisation plus complexe, le détachement d'une figure particulière étant commandé par l'énoncé du problème. » (Duval, 2005, p. 26). Un carré n'est alors plus une forme, mais un réseau de segments liés par des propriétés spécifiques, ou encore quatre points liés par des relations géométriques.

Ajoutons ici que la réalisation de tracés auxiliaires joue elle aussi un rôle dans les processus de visualisation non iconique. Un exemple célèbre est donné par Kant lorsque celui-ci considère la question de la valeur de la somme des angles d'un triangle au début de la *Critique de la Raison Pure*. Alors que le philosophe en resterait à l'analyse du concept de triangle, et se trouverait dès lors démuni, le géomètre procéderait par des constructions auxiliaires : se donner un triangle, prolonger un côté du triangle, tracer des lignes parallèles. Ces constructions sont au cœur de l'avancée du travail géométrique via un enrichissement du réseau de droites sous-jacent à la figure initiale laquelle est « reconstruite » à partir de ce réseau (en l’occurrence cet enrichissement permet de mettre en œuvre les connaissances liées aux angles).

Prenons maintenant un exemple en lien avec nos données.

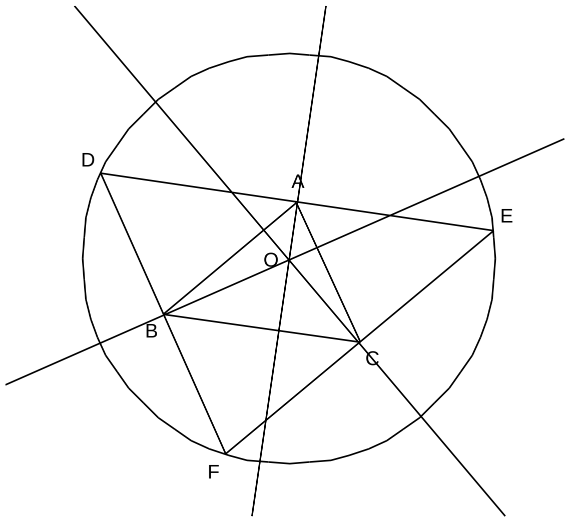


Figure 1

Plusieurs sous-figures peuvent être « détachées » dans la figure 1. Parmi celles qui ne nécessitent pas de tracés auxiliaires, et pour en rester aux formes de dimension 2 (surfaces), on peut repérer des triangles, un cercle (des « portions » de cercle), des parallélogrammes, des trapèzes, et bien d'autres polygones. Néanmoins, les mécanismes à l’œuvre ne sont pas tous équivalents. Ainsi, le disque, les triangles ABC ou DEF sont des contours fermés dont les côtés ne sont pas prolongés : en cela, ils sont « accessibles » à la visualisation iconique. À l'inverse, les parallélogrammes AECB, DACB, BACF seront plus difficilement perçus de cette manière : ils sont chacun constitués de deux sous-figures visuellement identifiables et de nature différente (les triangles) et leurs côtés sont prolongés. On peut donc s'attendre à ce que la visualisation non iconique, et en particulier la déconstruction dimensionnelle soient impliquées pour leur identification.

Imaginons maintenant que l'on ait pour tâche de reproduire cette figure, et que l'on commence à partir du triangle ABC[7]. Pour construire le point E, par exemple, il est très utile de le percevoir comme le point d'intersection entre les parallèles aux côtés

7 Cette tâche est proposée pendant la séquence étudiée (cf. annexe).

(AB) et (BC) passant respectivement par C et par A, comme sommet du parallélogrammes AECB (ou toute chose équivalente). Il faut donc passer d'un regard orienté sur le triangle à un regard orienté sur le parallélogramme par l'intermédiaire d'un réseau de droites parallèles. La suite de la construction procède de la même dynamique consistant à détacher successivement diverses figures. Sans même s'intéresser à une tâche de démonstration, qui supposerait le même type de fonctionnement cognitif au niveau de la visualisation[8]. Le fonctionnement non iconique de la visualisation semble mis en jeu dans cette tâche de reproduction.

Par ailleurs, le rôle de la visualisation (notamment non iconique) doit être pensé dans le cadre d'une dialectique avec la dimension discursive de l'activité géométrique. L'énonciation de relations suppose notamment la disponibilité d'objets susceptibles d'être mis en relation (et de noms d'objets), c'est-à-dire le plus souvent des points et des droites (alignement, parallélisme, etc.). Duval (2005, p. 23) souligne également le caractère fondamentalement discursif de la déconstruction dimensionnelle : « Elle se fait en articulation étroite avec une activité discursive. On pourrait même dire qu'elle est essentiellement d'ordre discursif ». Si dans nombre de contextes, c'est la perception visuelle qui pilote l'identification des objets (par exemple lorsque la visualisation iconique est en jeu), il est fréquent en géométrie que ce soit le discours qui pilote la visualisation. Nous montrerons plus loin que ce type de mécanisme est à l'œuvre lors de l'identification des parallélogrammes de la figure 1 par les étudiants.

L'activité géométrique repose ainsi sur la mobilisation de compétences visuelles (et discursives) spécifiques reposant notamment sur un jeu de regard sur les figures (Duval et Godin, 2005) que nous avons analysé ci-dessus en termes de visualisation non iconique et de déconstruction dimensionnelle. Dans le contexte d'une formation en géométrie de futurs enseignants du premier degré, nous interrogeons le statut qui leur est donné, tant que point de vue de la formation disciplinaire que du point de la formation des étudiants à la didactique des mathématiques. Duval (2005, p. 8) considère par exemple que le développement et la coordination des fonctionnements cognitifs de la visualisation et de la production d'énoncés « doivent être considérés comme des objectifs d'enseignement aussi essentiels que les contenus mathématiques eux-mêmes ». Cette dernière citation de Duval ne concerne pas spécifiquement le contexte de la formation des enseignants. D'un certain point de vue, celui qui considère les formés comme étudiants de mathématiques, il s'agit de connaissances de nature épistémologique portant sur l'élaboration des contenus en géométrie. Leur maîtrise est pour Duval une condition de possibilité pour les apprentissages géométriques. Par ailleurs, ces

8 Pour un exemple, voir par exemple Perrin-Glorian, Mathé et Leclerc (2013).

connaissances peuvent aussi s'appréhender comme des connaissances pédagogiques disciplinaires portant sur l'apprentissage de la géométrie par les élèves, les formés étant cette fois considérés dans une posture de professionnels en formation. Nous considérons que ces connaissances constituent un outil didactique important, que ce soit pour concevoir des situations d'enseignement – voir par exemple Barrier, Hache et Mathé (2014) – ou pour penser la progression des apprentissages sur un temps long (Perrin-Glorian, Mathé et Leclerc, 2013). Ce type de connaissances nous semble enfin d'autant plus fonctionnel sur le plan professionnel si l'on tient compte de l'inflexion récente des nouveaux programmes français des cycles 2 et 3 en géométrie avec un renforcement sensible de la place accordée aux situations de reproduction de figure :

« La reproduction de figures diverses, simples et composées est une source importante de problèmes de géométrie dont on peut faire varier la difficulté en fonction des figures à reproduire et des instruments disponibles. Les concepts généraux de géométrie (droites, points, segments, angles droits) sont présentés à partir de tels problèmes. » (Programme du cycle 2, B.O. spécial n°11 du 26 novembre 2015).

La reproduction d'une figure suppose en premier lieu de la part des élèves une analyse de la figure géométrique à reproduire. Par un jeu sur les figures à reproduire et sur les instruments et supports à disposition, l'objectif du travail autour de la reproduction de figures consiste, à l'école, à amener progressivement les élèves à enrichir leur regard sur les figures, d'une vision iconique à une vision non iconique des figures, dans un mouvement de déconstruction dimensionnelle. Dès lors, disposer de connaissances sur la manière dont les élèves appréhendent les figures nous semble nécessaire pour appréhender les enjeux d'un travail autour de telles situations en classe. Ces connaissances outillent les professeurs des écoles pour penser des progressions autour de ces situations et envisager leur mise en œuvre en classe.

3. Institutionnalisation : lumière et transparence

Revenons à la thématique de l'institutionnalisation. Nous avons souligné plus haut qu'elle était un moyen de mettre en avant un savoir, de légitimer une connaissance en l'ancrant dans une institution de référence. Pour autant, si certains savoirs profitent de la mise en lumière induite par ce processus et se trouvent affichés par le formateur, d'autres restent transparents. Il s'agit des savoirs qui sont effectivement en jeu dans les situations d'apprentissage mais qui restent invisibles dans le jeu didactique (Margolinas & Laparra, 2011). Nous nous inspirons d'une distinction de Perrenoud (1995) entre paradigme de la censure et paradigme de la méconnaissance pour préciser notre propos.

Dans le cadre du paradigme de la censure, le savoir n'est pas à proprement parler transparent pour l'enseignant. Il existe différentes raisons pour lesquelles un enseignant ou une institution peut souhaiter enseigner des savoirs à l'insu des élèves. Nous en retenons une en particulier explicitée par Brousseau (1986) sous une forme paradoxale : l'enseignant ne peut pas simplement dévoiler aux élèves les savoirs qu'il souhaite leur enseigner sans dans le même temps les soustraire aux conditions de possibilité de leurs apprentissages (les élèves ne pourraient plus agir de leur propre mouvement). En d'autres termes, le caractère caché des savoirs est, à un moment donné, une nécessité grammaticale des jeux didactiques (Sensevy 2008). Pour autant, les phases adidactiques des situations didactiques, phases dans lesquelles l'intention du professeur d'enseigner un savoir particulier n'est pas dévoilée, ne se suffisent pas à elles-mêmes. Il est tout aussi nécessaire d'ancrer les connaissances des élèves, ainsi construites, au sein d'une institution. Toute la difficulté pour l'enseignant est alors de lever le voile sur ses intentions, d'articuler les processus de dévolution et d'institutionnalisation, de se ressaisir « des savoirs dont il se départit nécessairement à un moment » (Coulange, 2014, p. 10), alors même que les expériences cognitives effectives des élèves relèvent du privé (nous ne pouvons, au mieux, que faire des hypothèses sur ce que les élèves ont effectivement vécu).

Le paradigme de la méconnaissance offre un regard complémentaire. Les difficultés identifiées ci-dessus se trouvent renforcées si le formateur (l'enseignant) éprouve lui-même des difficultés à identifier les enjeux de savoirs d'une situation didactique, ce qui peut être le cas notamment si les savoirs en question ne disposent pas d'une reconnaissance dans les programmes scolaires ou de formation. Dans ce cas, ces savoirs, bien qu'essentiels dans le fonctionnement adidactique des situations, ne font que rarement l'objet d'une institutionnalisation, et demeurent souvent invisibles tant pour les élèves que pour l'enseignant. L'énumération en est un cas emblématique (Margolinas et Laparra, 2011)[9]. Tout comme les savoirs relatifs à la visualisation géométrique, l'identification de l'énumération comme enjeu d'apprentissage est issu de la recherche en didactique des mathématiques, dont les productions peinent à diffuser dans l'enseignement comme dans la formation.

Notre choix méthodologique de nous concentrer sur les processus d'institutionnalisation dans l'analyse des trois mises en œuvre étudiées s'explique par la volonté d'identifier les savoirs que les formateurs souhaitent que les étudiants retiennent à l'issue de cette séquence de formation. Un ensemble varié de

---

9 Remarquons néanmoins que le terme *énumération* figure désormais dans les programmes de 2015 pour la maternelle, mais sans définition précise.

connaissances étant en jeu dans la séquence, ce type d'analyse nous donne accès à la conception en acte des enjeux de formation par les formateurs. L'hypothèse que nous explorons dans cet article est que l'ancrage disciplinaire des formateurs est susceptible d'avoir des effets différenciateurs sur les savoirs qui sont institutionnalisés.

Nous appuyons notre propos sur les travaux de Searle portant sur les systèmes de pouvoir et de devoir (les institutions sociales) produits par certaines de nos pratiques langagières (Searle, 2010, 2012 ; Dumez, 2010). Dans la continuité des travaux d'Austin sur les actes de langage, Searle insiste sur l'*engagement* des locuteurs. Faire une assertion (*il y a une tasse de café sur mon bureau*), c'est aussi s'engager sur sa vérité dont le locuteur devient redevable, faire une promesse (*je terminerai l'article avant la fin de la semaine*) c'est s'engager à la tenir. Le cas des déclarations nous semble apporter un éclairage sur la discussion précédente. Une déclaration (*je suis votre formateur en mathématiques*) est un acte de langage particulier qui crée une réalité sociale. Ce n'est pas tant les diplômes, les parcours académiques ou professionnels (dont savons qu'ils ont parfois peu en commun) qui confèrent aux individus le statut de formateur qu'un engagement partagé des sujets de l'institution envers ce type de déclaration. Ces engagements se traduisent par des pouvoirs déontiques, c'est-à-dire un système d'attentes réciproques, de droits et de devoirs. La notion de contrat didactique en est une expression dans le contexte de la classe de mathématiques. Parmi les pouvoirs déontiques associés à la fonction de formateur, il y a en particulier la possibilité *via* de nouvelles déclarations de situer l'activité des formés dans des cadre institutionnels donnés, en l'occurrence des systèmes de savoirs dont nous avons décrit plus haut la variété en appui sur la typologie de Ball *et al*. (2008). Les contraintes et possibilités associées à ces systèmes de savoirs dégagés des inclinaisons individuelles procurent de nouvelles possibilités d'agir, ce qui est bien sûr une des finalités d'une formation. Le processus d'institutionnalisation est typiquement le lieu de ce déplacement des vécus individuels et des connaissances mobilisées vers une réalité socialement construite, sous la houlette des déclarations du formateur. Notre étude des variations dans les types de savoirs mis en avant par les formateurs passe donc, sur le plan méthodologique, par une attention aux éléments déclaratifs de leur discours qui opèrent un tel déplacement dans le processus d'institutionnalisation.

4. Mobilisation de connaissances liées à la déconstruction dimensionnelle : exemples

L'ensemble de la séquence s'appuie sur un seul et même dessin (figure 1). Dans une première partie, il est projeté au tableau, puis caché. La tâche des étudiants est alors de le reproduire à main levée. Ils doivent ensuite en proposer une description. Dans une deuxième partie, les étudiants sont invités à écrire des programmes de construction. La troisième et dernière partie de la séquence porte sur la démonstration (et réinvestit les activités précédentes). Nous avons précédemment avancé des arguments selon lesquels le fonctionnement non iconique de la visualisation (déconstruction dimensionnelle notamment) serait potentiellement en jeu dans cette séquence. Nous montrons maintenant qu'il s'agit effectivement d'une facette centrale de l'activité géométrique effective des étudiants.

Commençons par nous intéresser à la première partie de la séquence. Une analyse des déroulements met en évidence des spécificités dans le processus qui a conduit les étudiants à l'identification des parallélogrammes. Ceux-ci ne semblent pas repérés dans les productions à main levée[10] (recueillies pour un seul groupe) et ne font l'objet d'aucune verbalisations spontanées et publiques lors de la phase de description (les trois groupes). Si l'on s'en tient aux figures planes, ce sont tout d'abord les « deux » triangles (ABC et DEF) et le cercle qui sont identifiés, avant les autres triangles, puis, mais seulement lors d'interactions avec le formateur, les parallélogrammes et des trapèzes. Prenons l'exemple de la séance menée par F3. Les étudiants réalisent le tracé à main levée, identifient collectivement divers éléments (triangles, cercle, droites, *etc.*) puis le processus s'épuise. Le formateur est alors amené à relancer l'activité du groupe sous la forme d'une phase dialoguée. Ceci amène une étudiante à repérer des relations de parallélisme et à en « déduire » l'existence des parallélogrammes (« *du coup* on peut voir des parallélogrammes »). Le passage par le registre langagier, registre privilégié du déductif, a selon nous permis à l'étudiante de s'engager dans un processus de déconstruction dimensionnelle, lequel se produit « pour une (re)construction déductive des objets représentés » (Duval, 2005, p. 24). De manière stable au sein des trois groupes, l'identification des parallélogrammes a émergé lors d'interactions verbales entre les formateurs et les étudiants, après épuisement des premières verbalisations. Il s'agit d'un indice fort pour attester du fonctionnement non iconique du processus de visualisation sous-jacent.

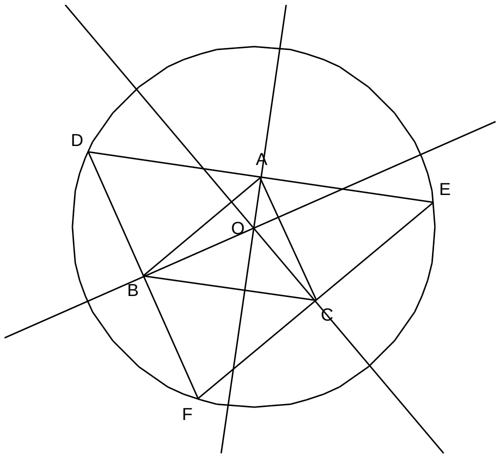
Il est légitime de se demander à quoi attribuer cette régularité dans les modalités d'identification des figures planes composant la figure 1. Nous nous contenterons ici de souligner que la nature des expériences scolaires liées à la visualisation évolue sensiblement du cycle 1 (où commencent à être abordés les triangles et les cercles) au cycle 3 (apparition des parallélogrammes) puis au-delà. La visualisation

10 Sur le plan méthodologique, le recours à de tels tracés est intéressant dans la mesure où il permet de mieux accéder à l'intention des sujets : il est possible de tracer à main levée un petit triangle dont les sommets sont les milieux d'un plus grand sans pour autant tracer les parallélogrammes alors même que les deux constructions sont équivalentes sur le plan mathématique.

iconique devient moins prépondérante, les figures sont petit à petit appréhendées du point de vue de leurs propriétés, dans un registre discursif puis déductif[11].

D'autre part, il est intéressant de repérer que chacun des trois groupes a effectivement connu des difficultés pour rédiger le programme de construction commençant par le « petit » triangle ABC. Comme nous le soulignions plus haut, il est en effet nécessaire de repérer, au-delà des questions de technique de tracé, que le point E est un sommet du parallélogramme AECB et pas seulement un sommet du triangle DEF. Il s'agit pour nous d'un nouvel indice de la présence d'enjeux d'apprentissage liés à la visualisation non iconique dans cette séquence.

Prenons un dernier exemple relevant cette fois de la partie relative à la démonstration.



Dans le prolongement du travail autour des programmes de construction, nous permettant entre autres de mener une réflexion autour du statut des hypothèses en géométrie déductive, nous posons aux étudiants la question suivante (annexe : partie 3, séance 2, exercice 3) :

Soient un triangle ABC et O son orthocentre. Soit $\Delta 1$ la droite perpendiculaire à (OB) passant par B, $\Delta 2$ la droite perpendiculaire à (OA) passant par A, $\Delta 3$ la droite perpendiculaire à (OC) passant par C. On appelle D le point d'intersection de $\Delta 1$ et de $\Delta 2$, E celui de $\Delta 2$ et de $\Delta 3$ et F celui de $\Delta 3$ et de $\Delta 1$. Démontrer que O est le centre du cercle circonscrit à DEF.

Cette démonstration suppose le recours à plusieurs points de vue successifs pour le trait joignant les point A et O (figure 1) : hauteur issue de A dans le triangle ABC, droite perpendiculaire à (BC), droite perpendiculaire à (DE), droite simultanément perpendiculaire à (BC) et (DE), médiatrice de [DE], diamètre du cercle circonscrit à DEF. Il s'agit donc de mettre successivement une même trace graphique en relation avec divers éléments de la figure au cours d'un processus reposant sur la

11 D'autres éléments ont bien sûr pu jouer : le codage, les caractéristiques spatiales de la figure, la proximité de la tâche de description avec la tâche de reproduction, etc.

décomposition de la figure initiale en sous éléments (notamment des droites ou des réseaux de droites).

5. Des mises en œuvres contrastées du point de vue des savoirs

Nous décrivons dans cette partie les choix d'institutionnalisation des formateurs dont nous avons observé la mise en œuvre en nous focalisant sur les deux premières parties de la séquence et en portant une attention particulière à la thématique de la visualisation. Notons que plusieurs passages du document collectif signalent des enjeux liés à la visualisation (objectif et mise en commun de la partie 1A, fin de la synthèse de la séance). Il faut néanmoins distinguer les phases de mise en commun ou de synthèse (qu'avons-nous fait ? comment ? etc.) des phases d'institutionnalisation que nous souhaitons comparer (qu'avons-nous appris qui soit réutilisable ?). Il n'a du reste jamais été question de cette thématique des savoirs et de l'institutionnalisation dans les travaux du groupe ayant produit ce document. Nous présentons maintenant de manière successive ce que nous retenons des trois mises en œuvre analysées en insistant sur leurs spécificités plutôt que sur les points de convergence.

5.1. Première mise en oeuvre

F1 est un formateur expérimenté, intervenant tant dans les aspects disciplinaires, didactiques ou transversaux de la formation professionnelle des professeurs du premier et du second degré. Il est par exemple en charge d'un cours sur le « métier » d'élève, il est donc sensibilisé à l'idée que seule une partie de l'activité des élèves fait l'objet d'une reconnaissance institutionnelle[12]. On peut penser que ce profil particulier est en lien avec un aspect de sa mise en œuvre qui contraste avec celles de F2 et F3 : le temps de la passation des consignes est plus long, F1 procède à des reformulations, explicite l'organisation pédagogique et matérielle des tâches, précise ce que les étudiants vont avoir à faire pour apprendre au-delà de la seule réalisation de la tâche (il est notamment question de la prise de notes). Pour autant, après avoir organisé une phase dialoguée au cours de laquelle les verbalisations de la partie 1 sont collectivement validées et complétées, le formateur poursuit avec la partie 2 relative aux programmes de construction sans que ne soit déclaré ce qui a été travaillé dans la première partie de la séquence. F1 semble considérer cette partie 1 comme un travail préparatoire pour la suite plutôt que comme une activité ayant ses propres objectifs d'apprentissage. Relevons néanmoins le fait qu'un document polycopié récapitulant les définitions et théorèmes usuels de la géométrie

12 Signalons que notre entrée dans cette thématique par l'intermédiaire des savoirs n'est pas la seule possible, ni même la plus courante en formation des enseignants. On peut aussi penser à des attitudes ou des compétences plus transversales que les curricula laissent dans l'ombre pour diverses raisons.

plane sera distribué en fin de séance. On peut y voir une forme de processus d'institutionnalisation minimaliste centré sur des définitions classiques de la géométrie plane dont certaines ont été abordées lors de la première partie. Pour ce qui est de la partie 2, une première prise de distance vis-à-vis de la tâche a lieu après qu'un premier programme de construction, commençant par DEF[13], a été écrit au tableau et collectivement discuté :

F1 : quand j'ai circulé parmi vous au début, vous étiez tous dans le même débat / la difficulté de l'exercice c'est de passer d'une figure statique à un programme qui véhicule une dynamique / c'est-à-dire qu'il faut trouver un début et un enchaînement / et vous avez beaucoup réfléchi sur le début

L'expression « l'exercice » a une valeur générique dans cette intervention et le formateur utilise ensuite beaucoup d'articles indéfinis. L'identification d'un programme de construction suppose une appréhension dynamique et séquentielle explicitant certains liens entre constituants d'une figure. Ceci relève de la déconstruction instrumentale, mais est en lien avec la déconstruction dimensionnelle (Mithalal, 2010). La dimension déclarative de cet énoncé tient au fait que F1 va au-delà de ce qui est effectivement vécu par les étudiants. Néanmoins, le projet didactique de F1 semble piloté par une autre préoccupation. Un étudiant propose un nouveau programme de construction, débutant cette fois par le tracé du cercle. F1 fait alors remarquer que ce deuxième programme est plus élémentaire, mais qu'il permet néanmoins de retrouver par déduction l'ensemble des observations effectuées sur la figure. Il s'ensuit des échanges portant sur la dimension déductive et axiomatique de la géométrie qui sera l'objet de la troisième partie de la séquence. La séance se termine par la distribution du document polycopié évoqué plus haut. F1 en précise alors l'organisation, dans la perspective de son usage dans le travail déductif. Il explicite alors des savoirs relatifs à la gestion des énoncés dans la production d'une démonstration. F1 cible donc implicitement des savoirs de nature épistémologique portant sur la manière dont les mathématiques s'élaborent. Formateur pour les enseignants de mathématiques du second degré, F1 est sans aucun doute conscient des difficultés rencontrées par les apprenants, élèves de collège ou étudiants en master MEEF (Métier de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation) premier degré, au moment de l'entrée dans la démonstration. En revanche, étant donné le rôle que joue la visualisation pour ce passage vers la démonstration, on peut s'interroger sur ce choix de formation : F1 l'a-t-il mise de côté à dessein ? Quelle est la place de la visualisation dans sa conception de l'activité mathématique ?

---

13 Le formateur a fait le choix laisser ouvert le choix de ancrage initial pour la construction.

Le type de savoir mis en avant relève ainsi du pôle des connaissances (sur les) mathématiques plutôt que de celui des connaissances pédagogiques disciplinaires, dans la mesure où les étudiants eux-mêmes rencontrent des difficultés récurrentes avec le mode de raisonnement déductif, et qu'ils n'auront pas à l'enseigner.

5.2. Deuxième mise en œuvre

F2 est un formateur confirmé, par ailleurs chercheur en didactique des mathématiques et familier des concepts de didactique de la géométrie présentés plus haut. Sa mise en œuvre se distingue par des références régulières à la thématique de la visualisation. Par exemple :

F2 : « vous voyez qu'on en voit des choses sur cette figure / on a vu qu'on arrivait d'abord à décomposer cette figure en surfaces, en sous-éléments de surface / deux triangles et puis un cercle / et puis après là depuis tout à l'heure on est en train de décortiquer les postions relatives des sommets de A B C par rapport à D E F et puis ce que sont ces droites-là / ce que représente le point O pour A B C / ce que représente le point O pour D E F / est-ce que vous voyez d'autres choses ? »

Cette intervention vise à relancer la phase de recension des objets et relations perçus dans la figure (partie 1). Bien que contextualisée, elle thématise la visualisation des figures et peut s'interpréter comme un premier pas dans un processus d'institutionnalisation. Par exemple, F2 commence par dire « en surfaces, en sous-éléments de surface » avant de dire « deux triangles et puis un cercle ». F2 poursuit peu après :

F2 : « [...] qu'est-ce qu'on a fait en fait / on a essayé de matérialiser des relations que l'on voyait entre les objets / vous voyez que les contraintes de précision ici moi je m'en fiche / ça n'a pas d'importance / ce qui était intéressant c'était de déconstruire la figure de regarder les sous-éléments de la figure d'essayer de les mettre en relation / C'est ça que je voulais faire apparaître avec vous / ça nous a permis aussi un peu de rappeler les propriétés géométriques de se remettre un peu là-dedans / [...] »

Dans ces extraits, F2 va au-delà d'une simple description d'un état de choses. Il dévoile plus explicitement ses intentions didactiques en inscrivant l'activité des étudiants dans un système de savoirs particulier, les savoirs liés à la visualisation non iconique sont mis en avant, avant même ceux relatifs aux propriétés et définitions géométriques. Contrairement à notre analyse des intentions de F1, il nous semble ici possible d'interpréter les objectifs de formation de F2 comme relevant non seulement d'une mise en lumière du processus d'élaboration des contenus mathématiques, mais aussi d'une volonté de commencer à avancer des savoirs relatifs aux processus d'apprentissage des élèves. Ceci se traduit, lors de la mise en œuvre de la séance, par l'explicitation de savoirs liés à la visualisation, restés transparents dans la mise en œuvre de F1.

Les savoirs mathématiques relevant de la culture commune (propriétés et définitions géométriques) font néanmoins l'objet d'apartés occasionnels, parfois à partir de figures construites pour l'occasion et s'écartant du contexte initial (un polycopié sera également distribué). F2 engage ensuite les étudiants dans la réalisation des programmes de construction. À la manière de F1, il s'appuie sur ces programmes pour mettre au jour certains savoirs relatifs à la structure du discours déductif en géométrie.

5.3. Troisième mise en œuvre

F3 est un formateur expérimenté, par ailleurs chercheur en mathématiques fondamentales. Une originalité de sa mise en œuvre, au regard des deux autres, est d'avoir pris le temps d'une discussion assez fournie autour des droites remarquables des triangles. La figure présente d'ailleurs une configuration classique permettant de travailler sur ces notions (par exemple pour démontrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes). L'extrait qui suit est issu de la partie 1 de la séquence :

F3 : « y a quelque chose sur lequel je voudrais revenir / alors la première 'trois droites passant par le centre du cercle' [il entoure l'expression qui figure au tableau] / et la seconde que j'avais d'ailleurs négligée tout à l'heure qui est 'O est l'orthocentre de ABC' [il entoure également] / je vais m'occuper d'abord des droites sécantes au centre du cercle qui sont en fait les médiatrices / alors je vais faire disparaître progressivement le triangle ABC qui ne m'intéresse pas en l'occurrence [il le fait grâce à un logiciel de géométrie dynamique] [...] »

F3 s'appuie sur les assertions contextualisées des étudiants qui ont été relevées au tableau pour les situer dans son projet didactique. En effaçant certaines parties de la figure grâce au logiciel de géométrie dynamique et en opérant des déplacements de points, F3 procède à une recontextualisation des observations réalisées dans des configurations graphiques plus générales (des déplacements opérés sur les sommets du triangle contribuent par ailleurs à renforcer la généralité). Ceci amorce un processus d'institutionnalisation qui conduira F3 à énoncer et écrire au tableau certains théorèmes classiques sur les droites remarquables du triangle. Bien que le fait de cacher ou de réafficher certains éléments graphiques puisse être interprété comme une forme de modélisation d'une dynamique visuelle ce sont bien plutôt des configurations statiques qui sont étudiées, de manière indépendante. En résumé, une particularité de ce déroulement est d'avoir mis en avant, plus que les autres, des savoirs mathématiques relevant de la culture commune.

Conclusion

À l'instar de Kuzniak (2007), ce travail très prospectif nous a permis de mettre en évidence des variations dans les choix des systèmes de savoirs mis en avant par les formateurs alors même que les grandes lignes et le support de la séquence étudiée avaient été collectivement conçus. Les déroulements ont bien sûr bien des points communs mais celui de F1 se distingue par une centration sur la thématique de la démonstration, celui de F2 par la présence d'éléments relatifs à la visualisation, celui de F3 par une prise en charge plus appuyée des savoirs mathématiques portant sur les droites remarquables du triangle. Ces savoirs relèvent de catégories différentes au sens de la typologie des connaissances pour l'enseignement des mathématiques de Ball et al. (2008). Les savoirs relatifs au mode de raisonnement déductif peuvent être rapprochés des connaissances portant sur le processus d'élaboration des mathématiques (Carillo *et al.*, 2013), ceux portant sur les droites remarquables de la culture mathématique « commune ». Tous deux appartiennent au pôle des connaissances (sur les) mathématiques. Pour leur part, les savoirs portant sur les manières spécifiques dont les figures sont perçues en mathématiques peuvent aussi être rattachés au pôle des connaissances pédagogiques disciplinaires, dans la mesure où elles sont issues d'un point de vue cognitif porté sur l'appréhension des figures géométriques par les élèves (Duval, 2005), les élèves en question étant du niveau scolaire de ceux que les étudiants en formation auront à prendre en charge.

Il nous paraît raisonnable de rapprocher ces choix des profils spécifiques des formateurs, de leurs expériences professionnelles passées et présentes, de leur ancrage disciplinaire, même si nous ne nous sommes pas donnés les moyens d'étudier ces corrélations potentielles plus en détail. Quoi qu'il en soit, il y a bien sûr de bonnes raisons susceptibles de venir justifier tel ou tel choix. Nous ne chercherons pas ici à les mettre en balance les uns par rapport aux autres. La question de la nécessité d'un enseignement de savoirs relatifs à la visualisation géométrique, qui sont impliqués dans la séquence étudiée, reste d'ailleurs pour nous largement ouverte. Cette analyse nous semble malgré tout illustrer le fait que le corpus de connaissances et savoirs visés par la formation des enseignants de premier degré en géométrie est loin d'être stable et partagé, à la fois parce que les institutions susceptibles de les légitimer sont nombreuses et parce que la didactique de la géométrie est très certainement un champ de recherche ayant produit des savoirs encore peu disponibles, souffrant d'une faible diffusion au sein des institutions de formation.

Au-delà de la question des origines possibles des phénomènes mis au jour, l'identification même de ces variations nous invite à interroger le statut à accorder aux connaissances relatives à l'activité mathématique elle-même dans la formation des enseignants en mathématiques, que ces connaissances portent sur l'activité des individus en formation eux-mêmes ou sur l'activité de leurs potentiels élèves. Les stratégies de formation, au sens de Houdement (2013), mises ici en œuvre par les formateurs observés témoignent d'écarts importants quant à la gestion de ces connaissances, et la mise en regard de ces stratégies laisse entrevoir des degrés très variables dans ce qui est laissé à la charge des étudiants quant à l'identification de connaissances nécessaires à l'activité géométrique. Explorer ces stratégies à la lumière de la transparence des savoirs nous conduit à interroger la manière dont ces écarts sont susceptibles de générer des processus de différenciation, au sein même de nos formations. Un prolongement important de ce travail serait certainement d'essayer de saisir les effets des variations mises en évidence sur les pratiques des enseignants. Il s'agit d'un enjeu important dans la mesure où la professionnalisation du métier d'enseignant supposerait l'identification d'objectifs partagés de formation.

Bibliographie

BALL D.L., THAMES M.H. & PHELPS, G. (2008), Content knowledge for teaching: What makes it special?, *Journal of Teacher Education* **59(5)**, 389-407.

BARRIER T., HACHE C. & MATHE A.-C. (2014), Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves, *Grand N* **93**, 13-37.

BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **7(2)**, 33-115.

CARRILLO J., CLIMENT N., CONTRERAS L.C. ET MUÑOZ-CATALÁN M.C. (2013), Determining specialised knowledge for mathematics teaching, dans *Proceedings of the CERME 8* (Eds. B. Ubuz & alii), 2985-2994, Ankara : Middle East Technical Universitiy.

CHARALAMBOUS C. Y. (2008), Mathematical knowledge teaching and the unfolding tasks in mathematics lessons: intergrating two lines of research, dans *Proceedings of PME 32* (Eds. O. Figuras & alii) **2**, 281-288, Morelia : PME.

CHEVALLARD Y. & CIRADE G. (2009), Pour une formation professionnelle d'université. Éléments d'une problématique de rupture, *Recherche et Formation* **60**, 51-62.

COULANGE L. (2014), Les pratiques langagières au cœur de l'institutionnalisation des savoirs mathématiques, *Spirale – Revue de Recherches en Éducation* **54**, 9-27.

DUMEZ H. (2010), Comment le monde social est-il construit ? Le point de vue de John R. Searle, *Le Libellio d'Aegis* **6(4)**, 21-26.

DUVAL R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **10**, 5-53.

DUVAL R. ET GODIN M. (2005), Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N* **76**, 7-27.

HOUDEMENT C. (2013), Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques, Note pour l'habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot.

KUZNIAK A. (2007), Savoir mathématique et enseignement didactique et pédagogique dans les formations initiales du premier et du second degré. Recherche et Formation **55**, 27-40.

MARGOLINAS C. (2014), Connaissance et savoir. Des distinctions frontalières ?, dans Actes du colloque sociologie et didactiques : vers une transgression des frontières (dir. P. Losego), 17-44, Lausanne : Haute École Pédagogique de Vaud.

MARGOLINAS C. ET LAPARRA M. (2011), Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire, dans *La construction des inégalités scolaires* (dir. J.-Y Rochex et J. Crinon), 19-32.

MITHALAL J. (2010), Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle. , thèse de doctorat, Université de Grenoble.

PERRENOUD P. (1995), *Métier d'élève et sens du travail scolaire*, Paris : ESF.

PERRIN-GLORIAN M.-J., MATHE A.-C. & LECLERCQ R. (2013), Comment penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments, *Repères-IREM* **90**, 7-41.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* **2(4)**, 505-528.

SAYAC N. (2013), Pratiques de formateurs en mathématiques dans le 1er degré : les savoirs de formation, *Recherche et Formation* **71**, 115-130.

SHULMAN L. S. (1986), Those who understand: Knowledge growth in teaching, *Educational Researcher* **15(2)**, 4-14.

SEARLE, J. (2010). Making the Social World. The Structure of Human Civilization. Oxford : Oxford University Press.

SEARLE, J. (2012). Qu'est-ce que le langage ? Pratiques, 155-156, 228-250.

SENSEVY, G. (2008). Le travail du professeur pour la théorie de l'action conjointe en didactique : une activité située ? Recherche et Formation, 57, 39-50.

THOMAS BARRIER

LML – Laboratoire de Mathématiques de Lens

Faculté des Sciences Jean Perrin, Université d'Artois

Rue Jean Souvraz SP 18, 62307 Lens Cedex, France

thomas.barrier@espe-lnf.fr

ANNE-CÉCILE MATHÉ

Laboratoire ACTé, ESPE Clermont-Auvergne

Université Blaise Pascal – Clermont Ferrand

36 av Jean-Jaurès CS 20001, 63407 Chamalières Cedex, France

a-cecile.mathe@univ-bpclermont.fr

JORIS MITHALAL

ESPE de Paris

Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR – EA 4434), UPD, UPEC, UCP, U Rouen, U Artois.

Case 7018 - Bâtiment Sophie Germain

75205 PARIS Cedex 13

joris.mithalal@ens-lyon.org

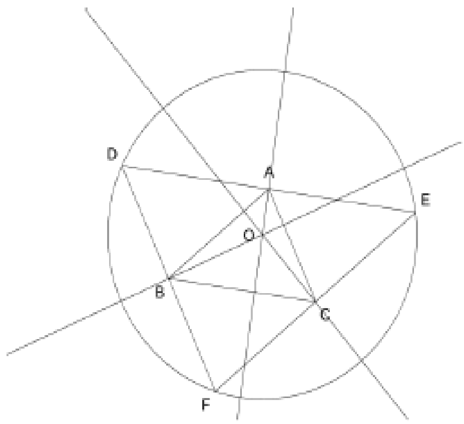
Annexe

Les séances élaborées et expérimentées
(dans le cadre du GRAF « géométrie » ESPE Lille Nord de France)

Séance 1

Partie 1 : Reproduction à main levée, identification perceptive de propriétés géométriques d'une figure donnée

A. Reproduction à main levée d'une figure projetée



Objectifs : identifier des sous-éléments (2D, 1D, 0D) d'une figure donnée, reproduire à main levée les relations perçues entre ces sous-éléments

Choix de commencer par une reproduction à main levée : permettre à la plus grande partie des étudiants de produire quelque chose, pas d'obstacle lié au vocabulaire, à la formulation, montrer aussi la pertinence (didactique) d'un travail sur le tracé à main levée. Aide à la formulation des propriétés et relations entre ces sous-éléments de la figure (être capable de voir avant d'être capable de dire).

Pas d'instrument pour se débarrasser des difficultés de manipulation et d'usage des instruments. Se libérer d'un contrat de précision en géométrie qui mette en échec les étudiants, pas d'attente concernant le soin pour privilégier réflexion sur propriétés et relations.

Déroulement prévu :

La figure ci-contre est projetée quelques minutes au tableau puis cachée.

Consigne : Reproduire la figure à main levée (individuelle, sur feuille isolée)

Mise en commun : Qu'avez-vous représenté ?

Première expression de difficultés des étudiants.

→ Vers l'identification de sous-éléments :

- on peut regarder les triangles DEF et ABC, DAB, BCF, AEF...,
- voir le cercle comme défini en premier ou cercle circonscrit à DEF,
- voir les parallélogrammes, etc...

À l'oral : de premières relations perçues entre ces sous-éléments (de premières formulations, rappels de vocabulaire)

Éventuellement à débattre : distinction dessin figure : quelles sont les propriétés que nous ne prenons pas en compte en géométrie ? Différents dessins représentent une même figure.

Quels types de propriétés prend-on en compte en géométrie ? (position relative de A par rapport à [DE] mais pas position de E, D, F sur le cercle par exemple...pas si simple). En fait, en ne regardant que ce dessin, on ne peut que faire des hypothèses sur les propriétés géométriques caractérisant la figure sous-jacente.

B. Formuler les propriétés perçues

En individuel, figure projetée au tableau. Formulation écrite individuelle

Consigne : «Objectifs : formuler les propriétés / relations que vous voyez dans cette figure. »

Mise en commun : formulation des propriétés géométriques, des relations perçues entre les sous-éléments de la figure, rappels sur le vocabulaire, les formulations des propriétés en géométrie.

Rappels sur les conventions de notation.

Partie 2 : Programme(s) de construction

Trois entrées différentes sont possibles pour rédiger un programme de construction de cette figure : en partant du cercle, en partant du triangle EDF, en partant du triangle ABC.

A. En collectif, construction de la figure sur logiciel de géométrie dynamique en partant du cercle, élaboration d'un premier programme de construction (simple), règles pour élaborer un programme de construction

Qu'est-ce qu'un programme de construction ?

Objet scolaire

But : communiquer une suite d'étapes permettant de construire sans ambiguïté une figure géométrique, caractérisée par des propriétés géométriques.

(→ Les énoncés, le grain, dépend du public visé, des connaissances et outils à disposition tant de celui qui l'émet que de celui auquel il est destiné)

Une suite d'étapes de construction d'une figure géométrique qui ne donne lieu à aucune ambiguïté.

Pas d'évocation des instruments.

Rq. : pour nous : on dira qu'on construit plutôt des points, des segments, des droites, des cercles que des carrés, des parallélogrammes.

Proposition alternative : Rédaction en utilisant des « étiquettes d'instruction ».

B. Individuellement, rédaction d'autres programmes de construction

a) En partant de EDF

b) En partant de ABC

Mise en commun : des étudiants décrivent leur programme de construction (ou affiche). On teste sur logiciel de géométrie dynamique la validité des programmes.

Des programmes de construction possibles

C. Question bonus

Soient A, B, C trois points. Comment construire, à règle et au compas, un triangle EDF tel que A, B, C soient les milieux respectifs de [ED], [DF], [EF].

D. Synthèse possible

Mise en regard des programmes de construction produits : des propriétés différentes, des instruments à utiliser différentes, retour sur le vocabulaire, sur les « règles d'un programme de construction », sur les écarts entre description et programme de construction

Peut-être retour sur des questions liées à la distinction dessin/figure : on reproduit la figure, pas le dessin donc pas de prise en compte des mesures (notamment des mesures des côtés du triangle DEF), on peut par exemple placer les points E, F et D n'importe où sur le cercle.

Retour sur les objets, propriétés, définitions

On peut construire différents regards sur la figure, isoler différents sous éléments, voir de différentes manières ces sous-éléments.

Exemple : Qu'est-ce que le point O ?

O est le centre du cercle.

O est le centre du cercle circonscrit.

O est le point d'intersection des médiatrices du triangle EDF.

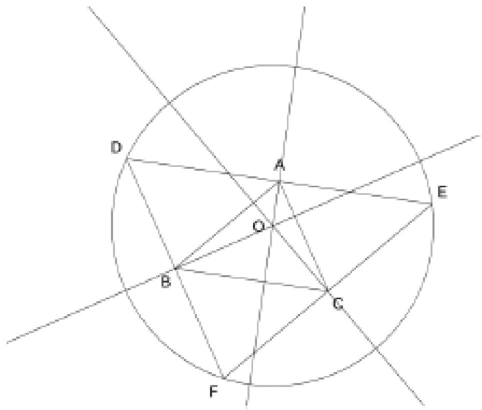
O point de concours des hauteurs de ABC.

On formule les différentes figures englobantes, manières de voir…

Fin de la séance : travail sur tracés à la règle et au compas ; éventuellement : rappels sur des objets géométriques de base, des propriétés, exercices

Séance 2

Partie 3 : Démonstration, construction de preuves



On choisit un programme de construction, donc une définition de la figure. Comment peut-on en déduire des propriétés identifiées en séance 1, convoquées dans un autre programme de construction ?

Autrement dit : On a des propriétés en vrac (partie 1)

Certaines sont suffisantes pour construire, pour définir la figure.

À partir de celles-ci, comment montrer que les autres sont vraies ?

En maths, pour montrer qu'une propriété est vraie, le système de validation repose sur raisonnement hypothético-déductif.

Appui sur banques de propriétés et théorèmes.

Quelques premiers exemples de démonstration. Discussion sur ce qu'est une démo.

Exemple : on part de DEF et A, B, C milieux respectifs. Montrer que ADCB est un parallélogramme.

Exemples :

1) *(On part du triangle ABC)*

Soit *ABC* un triangle quelconque, soit *O* son orthocentre. Soient Δ1 la droite perpendiculaire à (OB) passant par B, Δ2 la droite perpendiculaire à (AO) passant par A, Δ3 la droite perpendiculaire à (OC) passant par C. Δ1 et Δ2 se coupent en D, Δ1 et Δ3 se coupent en F, Δ2 et Δ3 se coupent en E.

Montrer que O est le centre du cercle circonscrit au triangle EDF.

2) *(On part du triangle ABC)*

Soit *ABC* un triangle quelconque, soit *O* son orthocentre. Soit F le point tel que ABFC soit un parallélogramme. Soit E le point tel que ABCE soit un parallélogramme. Les droites (AE) et (BF) se coupent en D. Montrer que O est le centre du cercle circonscrit au triangle EDF.

Activités de prolongement

<u>Exercice 1</u>

Soit (C) un cercle de centre O

On considère trois points D, E et F appartenant à (C). Soient, respectivement A le milieu de [DE], B milieu de [DF] et C milieu de [EF]. Démontrer que O est l'orthocentre du triangle ABC.

<u>Exercice 2</u>

Soit DEF un triangle quelconque et O le centre de son cercle circonscrit. Soient A, B et C milieux respectifs des segments [DE], [DF] et [EF]. Démontrer que O est l'orthocentre du triangle ABC

<u>Exercice 3</u>

Soit ABC un triangle d'orthocentre O. Soit D1 la droite perpendiculaire à (OB) passant par B, D2 la droite perpendiculaire à (AO) passant par A et D3 la droite perpendiculaire à (OC) passant par C. On appelle D le point d'intersection de D1 et de D2, E celui de D2 et de D3 et F celui de D1 et de D3. Démontrer que O est le centre du cercle circonscrit à DEF

<u>Exercice 4</u>

Soit ABC un triangle d'orthocentre O. Soit le point F tel que ABFC est un parallélogramme. Soit le point E tel que ABCE est un parallélogramme. Les droites (AE) et (BF) se coupent en D. Démontrer que O est le cercle du centre circonscrit à DEF