

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

Revue internationale de didactique des mathématiques

Rédacteurs en chef : FRANCOIS PLUVINAGE & ERIC RODITI

IREM de Strasbourg
Université de Strasbourg

Volume 20

2015

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

ISSN 0987 - 7576

Rédacteurs en chef

FRANÇOIS PLUVINAGE
IREM de Strasbourg
7 Rue René Descartes
67084 Strasbourg
fpluvinage@cinvestav.mx

ERIC RODITI
Sorbonne Paris Cité
Université Paris Descartes
Laboratoire EDA (Education Discours
Apprentissages)
eric.roditi@paris5.sorbonne.fr

Conseillers scientifiques

RAYMOND DUVAL – Lille

ALAIN KUZNIAK – Paris-Diderot
ATHANASIOS GAGATSI – Chypre

Comité de rédaction

ALAIN BRONNER – Montpellier 2
LALINA COULANGE – Bordeaux ESPE
ILIADA ELIA – Chypre
CECILE DE HOSSON – Paris-Diderot
INES M^a GOMEZ-CHACON, Madrid UCM
NADIA HARDY - Montréal Concordia
FERNANDO HITT – Montréal UQAM
CATHERINE HOUEMENT – Rouen ESPE
MARIA ALESSANDRA MARIOTTI – Siena

ASUMAN OKTAÇ – Mexico Cinvestav-IPN
LUIS RADFORD – Sudbury Laurentienne
JEAN-CLAUDE REGNIER – Lyon 2
PHILIPPE R. RICHARD - Montréal Udm
MAGGY SCHNEIDER – Liège
DENIS TANGUAY – Montréal UQAM
LAURENT THEIS – Sherbrooke
LAURENT VIVIER – Paris-Diderot
CARL WINSLOW – Copenhagen University
MONCEF ZAKI – Fès FSDM

Responsable de publication

JOSIANE NERVI-GASPARINI – Directrice de l'IREM de Strasbourg

Secrétariat d'édition

BRUNO METZ – IREM de Strasbourg

Éditeur

IREM de Strasbourg
Université de Strasbourg
7, rue René Descartes
F - 67084 STRASBOURG Cedex
irem@math.unistra.fr

Tel. +33 (0)3 68 85 01 30
Fax. +33 (0)3 68 85 01 65
Bibliothèque : +33 (0)3 68 85 01 61

<http://irem.unistra.fr>

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
VOLUME 20 – 2015

SOMMAIRE

ÉDITORIAL.....	7
MAGGY SCHNEIDER, PIERRE JOB, YVES MATHERON, ALAIN MERCIER (Belgique, France) <i>Extensions praxémiques liées aux ensembles de nombres : des complexes aux relatifs.....</i>	9
IRENE FERRANDO, LLUÍS M. GARCÍA-RAFFI, LORENA SIERRA (Espagne) <i>A proposal of action to introduce modelling in secondary classroom.....</i>	47
MIREILLE SABOYA, NADINE BEDNARZ, FERNANDO HITT (Canada) <i>Le contrôle exercé en algèbre : conceptualisation et analyses en résolution de problèmes</i>	61
VIVIANE DURAND-GUERRIER, THOMAS HAUSBERGER, CHRISTIAN SPITALAS (France) <i>Définitions et exemples : prérequis pour l'apprentissage de l'algèbre moderne.....</i>	101
SAMANTHA QUIROZ, FERNANDO HITT, RUTH RODRIGUEZ (Mexique, Canada) <i>Evolution des conceptions de futurs enseignants du primaire sur la modélisation mathématique</i>	149
MAHA ABBOUD-BLANCHARD, ALINE ROBERT (France) <i>Former des formateurs d'enseignants de mathématiques du secondaire : un besoin, une expérience et une question d'actualité.....</i>	181
LAURENT VIVIER <i>Note de lecture : APOS theory, a framework for research and curriculum development in mathematics education...</i>	207
INFORMATIONS POUR LES AUTEURS.....	215

EDITORIAL

Le lecteur qui portera son attention sur la page officielle de ce volume 20 des Annales de Didactique et de Sciences Cognitives y notera des changements de ses instances éditoriales. Deux facteurs sont à l'origine de ces changements. Les chercheurs canadiens avaient souhaité que soit renforcée l'implication de leur pays dans la publication de cette revue internationale de didactique des mathématiques, où les courants d'idées qui les animent trouvent à s'exprimer. Ainsi une preuve récente de cette présence a été le rôle majeur de chercheurs canadiens dans le débat, autour du faire mathématique et du savoir, paru dans le dernier volume (19). Autre marque, s'il en était besoin : Pour la consultation en ligne d'articles des Annales, le site miroir de Montréal <<http://turing.scedu.umontreal.ca/annales/>> s'est en effet ajouté à celui de Paris <http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/annales_de_didactique_et_de_sciences_cognitives/>. Ne le cachons pas : Les consultations en ligne d'articles des Annales, sur l'un de ces deux sites ou sur celui de l'IREM de Strasbourg, contribuent au moins indirectement à son bon classement dans les bases de revues scientifiques ERIH et EMIS (FIZ Karlsruhe), mais n'accroissent pas le tirage de la publication imprimée, lequel reste modeste. Dans les perspectives de la revue, surgit alors la question de savoir s'il convient ou non de viser à adhérer au portail des revues en ligne "revue.org" (<http://www.revues.org/> et <http://www.openedition.org/10824>) qui se développe de plus en plus ; certes, cela changerait les modalités de gestion des articles reçus, mais, au moins après un temps d'adaptation, pourrait faciliter cette gestion.

Cette question du portail des revues a été posée par Alain Kuzniak, qui est aussi au point de départ du changement des instances éditoriales des Annales, ayant souhaité une passation des rênes de corédacteur en chef qu'il tenait. C'est le second des facteurs de changement évoqués plus haut. Eric Roditi a accepté de prendre les rênes de codirecteur partagées avec François Pluvinage, qui assure la continuité. De plus, à l'image d'autres revues scientifiques, la politique générale de publication des Annales est désormais placée sous la supervision de conseillers scientifiques, au nombre de trois. Par ailleurs, pour ne pas dépasser un nombre raisonnable de membres du Comité de rédaction, l'effectif de ceux-ci a été arrêté à 19, tout en veillant à ce que soient correctement représentés les pays dont la contribution à la revue est notable. Cette réorganisation s'est accompagnée du retrait du Comité de chercheurs dont nous voulons souligner ici toute l'estime en laquelle nous les tenons ; en particulier nous exprimons notre gratitude à l'égard du soutien que Viviane Durand-Guerrier et Michalis Kourkoulos ont apporté aux Annales chaque fois que ce soutien a été sollicité.

Il convient d'une manière générale de remercier les arbitres sollicités pour des manuscrits : Comme nous l'a signalé l'un d'entre eux, ils vont souvent jusqu'à

proposer des aménagements souhaitables, à l'égal de correcteurs ou même de directeurs de recherches. Mais que les auteurs ne voient pas cela comme un encouragement à envoyer des manuscrits peu soignés ! Il vaut aussi la peine de souligner que les membres du Comité de rédaction ont un rôle plus large que le seul arbitrage d'articles proposés à la revue. À eux peut revenir en effet de détecter des études en cours susceptibles de donner lieu à un article intéressant et d'inciter les auteurs potentiels à envisager une publication dans les Annales. D'autres contributions sont également possibles ; ainsi le volume 19 des Annales a vu la publication d'un débat, pour lequel des réactions à un article initial ont été sollicitées. Il arrive aussi qu'un ouvrage suscite une note de lecture, comme dans ce volume 20 où Laurent Vivier présente une note de lecture sur un livre traitant de la théorie « APOS », actuellement davantage connue au niveau international que dans la communauté des didacticiens français.

Les articles de ce volume restituent des recherches portant sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ainsi que sur la formation initiale ou continue des enseignants. Ces recherches suggèrent des voies nouvelles pour appréhender les problèmes didactiques posés ou développent des analyses et interprétations s'appuyant sur de riches corpus de données empiriques. Ainsi le premier article propose-t-il la mise en œuvre du concept d'*extension praxémique* pour étudier l'enseignement des nombres relatifs tandis que le troisième développe une analyse théorique de l'*activité de contrôle* en mathématiques puis en illustre sa portée par des exemples d'interprétation d'activités d'élèves en algèbre élémentaire. Le texte suivant porte également sur l'apprentissage de l'algèbre, mais dans l'enseignement supérieur cette fois, avec une perspective de développement d'une *didactique du structuralisme*. Orienté vers des questions relatives à la formation des professeurs, le deuxième article de ce volume développe une proposition d'action pour faciliter l'introduction de la modélisation dans les pratiques d'enseignement des mathématiques au niveau secondaire. Le cinquième focalise sur l'évolution des conceptions des enseignants mexicains en formation à propos de la modélisation. Le dernier article, enfin, détaille un argumentaire pour la formation des formateurs d'enseignants en s'appuyant sur dix années d'expérience de terrain auprès de ce public.

Les auteurs de ces articles sont belges, canadiens, espagnols, français ou mexicains, ce volume témoigne, comme les précédents, d'une ouverture culturelle, linguistique et scientifique internationale et rend ainsi compte du dynamisme de la didactique des mathématiques à travers le monde.

FRANÇOIS PLUVINAGE & ERIC RODITI

MAGGY SCHNEIDER¹, PIERRE JOB, YVES MATHERON & ALAIN MERCIER

EXTENSIONS PRAXEMIKES LIEES AUX ENSEMBLES DE NOMBRES : DES COMPLEXES AUX RELATIFS

Abstract. Praxemic extensions related to sets of numbers: from complex numbers to integers. This paper focuses on the learning and teaching of negative numbers. This topic has been intensively studied using, among others, theoretical frameworks stemming from psychology - we give a summary of those researches in the first part of the paper. It is our aim to point out the peculiarities of a purely didactical approach. We do so using didactic concepts and most notably that of a praxemic extension. This concept will be put to use to bring to light the kind of problems and/or debates teachers and students have to face when dealing with extension of sets of numbers. This is made possible by contrasting negative numbers with complex numbers – hence the title. Lastly we expose the main lines of two didactic engineerings, closely related to the praxemic extensions analyzed above, and show what kind of shape they display when they are cast in contrasting curricular settings.

Résumé. Cet article porte principalement sur l'apprentissage et l'enseignement des nombres relatifs, même si notre analyse fait écho, à titre comparatif, à des travaux concernant les nombres complexes mentionnés dans le titre. Notre propos – qui prend la forme d'une analyse a priori – vise à mettre en lumière la spécificité d'un regard proprement didactique sur un sujet déjà abordé maintes fois dans des cadres d'analyse plutôt psychologiques. Nombreuses sont en effet les recherches portant sur l'apprentissage et l'enseignement des nombres relatifs : nous en rendrons compte dans une première partie de cet article. Nous y décrirons également comment nous envisageons certains concepts didactiques comme outils d'analyse, en particulier celui d'extension praxémique. Ensuite, en dressant un parallèle entre nombres relatifs et nombres complexes, nous montrerons ce qui peut faire a priori débat ou problème lorsque professeur et élèves sont amenés à gérer des extensions d'ensembles de nombres. Enfin, à des fins prospectives, nous décrivons dans les grandes lignes deux ingénieries qui envisagent les extensions praxémiques analysées plus haut dans des perspectives curriculaires très différentes.

Mots-clés : extensions praxémiques, nombres relatifs, nombres complexes, positivisme empirique, ingénierie didactique

Introduction

Les questions d'apprentissage et d'enseignement liées aux extensions d'ensembles de nombres ont été prises en considération très tôt dans l'école dite française de didactique des mathématiques. Des travaux pionniers ont été menés par Brousseau sur les rationnels et décimaux, lesquels prenaient appui sur la notion d'obstacle de

1 Ce travail est un des résultats du séjour de Maggy Schneider à Marseille, comme professeur invité par l'IFE (alors INRP), auprès de l'UMR P3, en avril et mai 2010.

sa Théorie des Situations Didactiques (TSD) : « Puisque le fait de plonger un ensemble dans une extension change ses propriétés et celles de ses éléments que l'on peut désormais utiliser, nous pouvons nous attendre à de grandes difficultés et à des résistances au changement d'emploi lorsque l'habitude jouera un rôle - qu'il s'agisse d'habitudes psychologiques ou culturelles. C'est un des principaux obstacles épistémologiques que l'on rencontre en mathématiques. » (Brousseau, 1998). Ce concept d'obstacle, qu'il soit d'ordre épistémologique ou didactique, a fait l'objet ensuite d'un débat portant précisément sur les nombres relatifs (Glaeser, 1981). Quant aux nombres réels, ils ont été travaillés à des années d'intervalle, d'une part, par Douady dans le cadre de sa dialectique outil/objet (Douady, 1986) et, d'autre part, par Bronner (1997) en termes de rapports personnel et institutionnel à l'idécimalité dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD).

Les outils d'analyse exploités dans cet article se situent à la croisée de plusieurs théories didactiques : le concept d'extension praxémique (Matheron, 2010), développé à la section 1.3, s'inscrit dans la dialectique « ostensifs-non ostensifs » de la TAD (Bosch et Chevallard, 1999) tout en l'articulant à la théorie de la représentation sémiotique de Duval (1995). Mais le positivisme empirique (Job et Schneider, 2014), en tant qu'obstacle épistémologique, amarre la réflexion également à la TSD. Le parallèle fait ici entre nombres complexes et nombres relatifs (section 2) est structuré d'ailleurs par chacun de ces deux pôles : d'un côté, des extensions praxémiques envisagées du point de vue de la congruence ou non congruence de conversions entre registres de représentation ; de l'autre, un même obstacle épistémologique qui permet d'interpréter les résistances des élèves à ces deux extensions numériques.

Nous n'investiguerons pas ici d'autres cadres théoriques, nous contentant d'illustrer ce que notre choix et notre articulation de cadres conceptuels nous permettent de formuler comme hypothèses crédibles en marge de recherches connues concernant les nombres relatifs (sections 1.1 et 1.2).

La section 3 met à l'œuvre le concept d'extension praxémique sous la forme de deux ingénieries contrastées qui tiennent compte de l'obstacle du positivisme empirique.

1. D'un aperçu de recherches sur l'apprentissage et/ou l'enseignement des nombres relatifs à des outils d'analyse didactique

1.1. Des travaux qui se réclament de la dialectique « procédural/structural »

Parmi les nombreuses recherches portant sur les nombres relatifs, plusieurs s'inscrivent dans un cadre théorique plus global formulé par A. Sfard. Rappelons brièvement ce dont il s'agit. Sfard (1991) montre que, dans l'histoire, les diverses sortes de nombres sont apparus d'abord au travers de manipulations et de processus

(de mesure par exemple) avant d'être acceptés comme nouveaux objets indépendants de ces mêmes processus. Cette dialectique, de l'opérationnel à l'objet ou du procédural au structural lui inspire une interprétation des erreurs concernant les relatifs : faute d'avoir été impliqués dans cette dialectique lors de l'enseignement, les nombres négatifs seraient l'objet, pour les élèves, d'une conception pseudo-structurale, en ce sens que ces derniers prendraient le signifiant pour le signifié. S'inscrivant dans ce cadre théorique, Gallardo (1994, 2001 et 2002) et Gallardo & Rojano (1993, 1994) déduisent de leurs analyses de textes historiques une relation entre le langage, les méthodes de résolution de problèmes utilisées et la conceptualisation des nombres négatifs. Et Gallardo définit quatre niveaux d'acception des négatifs : primo, nombre qui soustrait ; secundo, nombre relatif lié à l'idée de quantité opposée dans le domaine discret et à celle de symétrie dans le domaine continu ; tertio, nombre isolé, résultat d'une opération ou solution d'un problème ou d'une équation ; quarto, concept formel de nombre négatif, fruit d'une extension du domaine numérique des naturels aux négatifs. A partir de là, Gallardo et Rojano, (1994) distinguent trois principales fonctions du signe *moins* : unaire (renvoyant au signifiant structural de nombre relatif, de nombre-solution, de nombre-résultat et de nombre négatif formel), binaire (concernant des signifiants opérationnels tels que soustraire en arithmétique ou en algèbre, retirer, compléter, calculer la différence entre deux nombres) et symétrique par référence au signifiant opérationnel qu'est prendre l'opposé d'un nombre. Plusieurs erreurs classiques observées chez les élèves peuvent alors être interprétées par une absence de perception de la polyvalence du signe mais aussi un manque d'« adaptability » du signe aux situations rencontrées (Sfard et Linchevski, 1994).

Parmi ces erreurs ou difficultés, plusieurs surviennent dans la résolution d'équations lorsque celle-ci se base, non sur des méthodes intuitives telles que la méthode de fausse position mais sur des méthodes formelles qui impliquent des principes comme : « tout terme qui change de membre, change de signe ». D'abord, des interviews d'élèves de 12-13 ans montrent que ceux-ci éprouvent des difficultés à accepter des solutions négatives aux équations que ce soit dans un contexte de résolution de problèmes ou même de résolution d'équations arithmétiques (Gallardo, 2001, 2002; Gallardo & Rojano, 1993, 1994). Ces difficultés peuvent être rapprochées sans doute de deux autres observations : les opérations sont perçues, par des élèves de l'école élémentaire, comme des actions à accomplir : un « do something signal » (Kieran, 1981) tandis que l'étape « $x =$ » est vue comme un signal d'arrêt de la procédure en cours et non comme une solution à rapporter soit à l'équation, soit à un problème (Sfard et Linchevski, 1994). Toujours à propos de la résolution d'équations, Filloy & Rojano (1984, 1989) soulignent le côté délicat du passage des équations arithmétiques aux équations algébriques, passage qu'ils appellent pour cette raison « Didactic cut » et dont ils relèvent la trace dans des textes historiques. D'autres erreurs se manifestent dans la réduction de termes

semblables. En particulier, celles qui sont liées à ce que Herscovics et Linchevski (1991) appellent le « detachment from the minus sign » qui consiste à ignorer le signe « moins » précédant un nombre ou une entité littérale et ce, y compris dans une somme numérique algébrique; ce que Vlassis (2004) explique par « l'incapacité de nombreux élèves à utiliser ce signe de manière unaire ». Herscovics et Linchevski (1991) évoquent d'autres erreurs liées à la réduction de termes semblables : par exemple, $19n + 67 - 11n - 48$ deviendra $30n + 19$ car, en rapprochant $19n$ de $-11n$ les élèves utiliseront le signe « plus » situé derrière $19n$ plutôt que le signe « moins » précédant $11n$ (c'est le phénomène de « Jumping off with the Posterior Operation »), tandis que $67 - 48$ deviendra -19 pour cause, *sic*, d'« Inability to select the appropriate operation for the partial sum ». A cela s'ajoutent des difficultés pour percevoir ce qui peut être négatif ou positif dans des expressions littérales. Ainsi, à la consigne (que nous jugeons peu claire) : « Dans l'expression $-18 - 2y + 5a - y$, entoure les nombres entiers négatifs et souligne les entiers positifs », des élèves ne soulignent que les coefficients numériques, d'autres mobilisent des lettres en faisant éventuellement subir aux lettres a et y des sorts différents, d'autres envisagent des termes sans leur signe, ... » (Vlassis, 2004). Quant à la règle des signes portant sur les opérations d'addition et de soustraction, quatre grandes difficultés lui sont associées, d'après Gallardo (1994) :

- Généraliser abusivement des procédés adaptés à certains types d'expressions mais pas à d'autres. Ainsi, considérer comme équivalentes les expressions $-a - b$ et $-a - (-b)$ parce que le signe moins est décodé comme un signe de soustraction et que, par conséquent, le deuxième signe moins à l'intérieur de la parenthèse est jugé inutile par les élèves.
- Penser la présence de parenthèses comme indice que l'opération en jeu est une multiplication : par exemple, effectuer $7 - (3)$ comme $7 \cdot -3$ ou 7.3 ou -7.3 .
- Appliquer la règle des signes de manière inadéquate et parfois cumulative : $-a - b$ devient $a + b$ car « moins par moins donne plus »; remplacer $-5 - (-3)$, d'abord par $5 + (-3)$ car « moins par moins donne plus », puis par $5 - 3$ car « plus par moins donne moins ».
- Accorder une prédominance aux nombres négatifs : $-2 - (-3)$ devient -5 plutôt que 1 , un résultat positif étant considéré comme impossible par les élèves, étant donné le nombre de signes « moins » dans l'expression.

Certaines de ces difficultés semblent indiquer une confusion entre l'addition et la soustraction d'une part, et la multiplication d'autre part. Cela peut évidemment s'expliquer par un glissement langagier dans des expressions telles « moins par moins donne plus ». Et, pour Vlassis (2004), plusieurs d'entre elles ou d'autres analogues témoignent de l'étroite relation qui existe entre la fonction binaire de la soustraction algébrique et l'utilisation unaire du signe « moins » pour former un relatif.

Beaucoup de ces erreurs et leurs interprétations nous paraissent s'intégrer dans un registre plus psychologique que didactique et ce, même lorsqu'elles sont situées en référence à l'histoire des mathématiques. Ainsi, elles sont décrites en termes de « mauvaise perception » ou « d'incapacité à voir ». Nous nous expliquerons plus loin sur notre approche didactique. Mais il nous semble dérisoire de chercher une cohérence psychologique derrière des procédures qui, de toute façon, semblent indiquer que l'élève manipule des écritures sans référence aucune à l'une ou l'autre signification proprement mathématique, et sans la trace d'une quelconque interprétation. Pour notre part, nous parlerions d'« interprétation relevant d'une règle d'action ponctuelle » ou de « manque d'un discours théorique permettant de fonder une interprétation adéquate » en nous référant au travail de Serfati (2005) sur la révolution symbolique. Car, parmi les erreurs citées et analysées ci-dessus, plusieurs sont d'ordre syntaxique et on peut se demander si cette centration excessive sur la dimension syntaxique des opérations est la même lorsque les élèves peuvent les interpréter dans le contexte d'un problème ou d'un modèle. C'est l'objet de la section suivante.

1.2. Un débat sur le rôle des modèles

Outre Gallardo (1994), Putnam et al. (1987) se sont penchés sur cette dernière question. Leurs études respectives convergent vers la même conclusion : les élèves se comportent de manière assez schizophrénique, ne songeant pas à revenir aux contextes significatifs lorsqu'ils manipulent des expressions algébriques et allant même jusqu'à juger non pertinente pour ce traitement la référence à des modèles ou « situations-problèmes ».

Leur observation nous amène aux dispositifs d'enseignement des nombres relatifs et, en particulier, à l'utilisation de ce qu'on appelle des « modèles » de ces nombres; soit, au sens de Janvier (1983), des « *embodiments or iconic representations which are used to convey more concretely some abstract mathematical idea* ». Cette définition nécessite un complément de sens par le biais d'exemples; l'idée même de ce qui est « concret » étant en effet fort relative et, comme Goldin (2001) le précise, les modèles pouvant être des représentations externes, telles que les représentations algébriques, ou des représentations internes, comme les symbolisations personnelles ou conceptions. Vlassis (2004) répertorie trois types de modèles, ainsi nommés par les chercheurs cités : la droite des nombres, le modèle de type « équilibre » (situation « concrète » où les nombres opposés sont représentés respectivement par des billes noires et blanches, des charges positives et négatives, des entrées et des sorties, des gains et des pertes) et un modèle mixte : un ballon qui monte et qui descend sous l'effet de petits sacs qui lui sont attachés et qui le lestent, et de petits ballons qui l'élèvent. Comme cette chercheuse le développe, le recours didactique à des modèles fait débat.

Pour certains auteurs, les modèles seraient indispensables dans l'enseignement car ils permettent aux élèves de « donner une signification » aux relatifs (Küchemann, 1981) ou une signification concrète et intuitive (Linchevski et Williams, 1996, 1998, 1999; Thompson et Dreyfus, 1988; Peled, Mukhopadhyay et Resnick, 1989 et Janvier, 1983 et 1985). En autorisant des représentations, ils seraient un soutien à l'apprentissage (Sfard, 1991 et Goldin, 2001). Pour eux en effet comme pour Duval (1995), la compréhension suppose d'avoir différentes représentations d'un même concept et d'opérer dans différents systèmes. Parmi les chercheurs hostiles à l'utilisation de modèles, Fischbein (1987) rejette tous les modèles concrets connus parce qu'ils ne correspondent à aucun des critères nécessaires à ses yeux : c'est-à-dire, permettre aux élèves de « surmonter les obstacles cognitifs connus », « éviter des conventions artificielles » et « créer une image mentale correcte du concept ». Au mieux, pour lui, ces modèles ne peuvent expliquer que quelques propriétés algébriques de ces nombres. Mais le principal argument contre les modèles se trouve dans l'idée que ceux-ci pourraient constituer un obstacle à une conception formelle des négatifs. C'est, entre autres, l'avis de Glaeser (1981) qui se réfère pour cela à l'issue de la crise des relatifs dans l'histoire des mathématiques – sur laquelle nous reviendrons – et qui, fort de cet appui historique, craint que l'usage de modèles n'entrave l'acceptation par les élèves des nombres formels. Il estime, en outre, qu'un bon modèle pour les propriétés additives risque de créer des blocages pour les propriétés multiplicatives.

Parmi les modèles, celui qui a fait couler le plus d'encre est la droite des nombres sur laquelle nous nous attardons quelque peu. Pour Freudenthal (1973), la droite des nombres est un excellent moyen de visualisation des principales opérations arithmétiques. Elle devrait être utilisée dès les premiers apprentissages arithmétiques et on y représenterait au fur et à mesure les différentes sortes de nombres enseignées : « The real numbers are pre-existent by their intuitive images², and so are the operations, the addition as a shift, the multiplication as dilatation, and the algebraic laws, as obvious or easily visualized phenomena ». Cependant, ce chercheur estime qu'il ne faut pas surexploiter ce modèle, en particulier pour des cas tels que $3 - (-7)$ et $-3 - (-7)$ qui nécessitent une méthode « inductive – exploratoire » : celle-ci consiste à analyser les régularités observées dans les opérations avec les naturels et à en « déduire » des règles dans les négatifs. Par exemple, la suite de calculs : $3 - 2 = 1$, $3 - 1 = 2$, $3 - 0 = 3$, $3 - (-1) = 4$, $3 - (-2) = 5$ se justifie en raison d'une régularité : « A chaque fois que le 2^e nombre descend de 1, la réponse augmente de 1 ». Nous reviendrons plus loin sur la réflexion de Freudenthal concernant les relatifs.

Peled, Mukhopadhyay et Resnick (1989) estiment, quant à eux, que la droite des nombres est un modèle mental spontané pour les négatifs, dès les premières années

² Propos qui n'engage que son auteur

de l'enseignement primaire, en raison du fait que ce modèle est proche de « la vie de tous les jours ». Cependant, pour ces auteurs, les élèves peuvent avoir de la droite des nombres soit une conception correcte de « continuous number line », soit une conception erronée de « divided number line », zéro étant plus souvent associé à l'idée de barrière qu'à celle de nombre. Goldin et Shteingold (2001) insistent, eux, sur le caractère complexe de certains modèles, en particulier la droite des nombres qui requiert la capacité de regarder un nombre soit comme une position sur la droite (un point), soit comme un déplacement (flèche, *sic*). Comme nous le développerons plus loin en accord avec Serfati, ce double regard demande une interprétation fonctionnelle des écritures formelles, et donc une présentation qui ne soit pas seulement ostension des formalismes et de leur manipulation.

1.3. Une approche didactique systémique, outillée du concept d'extension praxémique

Vlassis (2004) situe les recherches précédentes entre deux approches qu'elle distingue de plusieurs points de vue. Ce qu'elle appelle une « approche épistémologique », ou encore « approche de tradition cognitive », dans laquelle elle situe à la fois les recherches qui se sont intéressées au développement historique des nombres négatifs afin d'éclairer les processus d'apprentissage des élèves, ainsi que les recherches relatives à la problématique des modèles et de leur pertinence dans les dispositifs d'enseignement. Et une « approche socioculturelle » basée principalement sur les travaux de Vygotsky, et à laquelle elle associe des recherches qui laissent une large place à la médiation sémiotique, en particulier celles de Radford (1998) et de Kieran (2001). Ces deux approches se différencient, à ses yeux, selon plusieurs critères. D'abord, les recherches épistémologiques renverraient plutôt à des modèles binaires concernant les interactions individu/objet de nature strictement individuelle tandis que les approches socioculturelles, concerneraient des modèles ternaires concernant les interactions individu/objet/contexte social. Ensuite, dans les premières, le moteur du développement est interne, comme chez Piaget qui ne reconnaît la transmission sociolinguistique comme facteur de développement que si les structures cognitives sont déjà présentes et, dans les secondes, l'origine du développement est externe puisque située, comme chez Vygotsky, dans les interactions sociales des individus. Enfin, les approches épistémologiques et les approches socioculturelles se distinguent par leur objet d'étude : l'évolution des concepts et des obstacles cognitifs qui y sont liés pour les premières alors que, pour les secondes, « ce sont le discours et les signes en tant qu'instruments médiateurs qui deviennent les unités d'analyse » (Vlassis, 2004, p. 68). La classification en deux entrées, « approche épistémologique » et « approche socioculturelle », occulte, par son caractère dichotomique, le fait que c'est à l'Ecole que l'on étudie généralement les mathématiques, dont les nombres relatifs. Ce qu'est devenu le savoir à l'issue de son parcours institutionnel

jusque dans une classe, le type de relations qui se nouent autour de lui selon les positions d'élèves et de professeur, la spécificité de la forme scolaire qui dépend aussi de déterminants sociaux externes à cette institution, mais qui influent tant sur le savoir que sur la manière grâce à laquelle il est enseigné et appris, sont des incontournables dont la prise en compte nous apparaît fondamentale.

Un regard didactique. Selon nous, l'approche didactique développée par la Théorie des Situations Didactiques de Brousseau (1986-1998) et par la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard (1998) permet de mieux penser une articulation entre les approches précitées. En effet, si nous considérons ces deux cadres conceptuels comme complémentaires et solidaires à la fois, nous pouvons schématiser cette approche en quelques points, utiles pour notre propos, et qui seront illustrés au fil de cet article :

- La didactique ne peut faire l'économie d'une étude épistémologique, même si elle ne s'y réduit pas, et l'étude des obstacles épistémologiques, ainsi que celle d'une dimension fondamentale du savoir visé, demeurent des préalables incontournables dans la construction de toute ingénierie didactique.
- L'activité mathématique y est modélisée non en termes de concepts, mais par la description des usages d'objets sémiotiques, usages qui sont toujours situés dans une institution donnée, qu'elle soit savante, professionnelle ou didactique. Cette modélisation sert à l'analyse didactique. Elle a revêtu plusieurs formes, selon les questions auxquelles les chercheurs se sont attaqués, mais nous considérerons ici que ces formes relèvent d'une même position épistémologique et sont donc compatibles, sauf à ce que nous rencontrions des questions nécessitant un cadre théorique et des méthodologies aptes à saisir l'action conjointe enseignants-élèves à propos de savoirs (Sensevy et Mercier, 2007).
- Décrire l'activité mathématique suppose une dialectique entre, d'une part, ce que Bosch et Chevallard (1999) nomment des « non-ostensifs » et Brousseau (1998 et 2004) des « connaissances » (les idées, les « concepts » mathématiques : des notions, dans le langage courant) et, d'autre part, ce que Bosch et Chevallard nomment les « ostensifs » et Brousseau des « représentations » (les signes graphiques, scripturaux, gestuels, etc. : des notations dit-on couramment lorsque ces ostensifs sont des graphismes reconnus et stables). Ainsi, pour nous, les notations permettent à la fois d'évoquer les notions et de réaliser le travail mathématique par une manipulation réglée qui est source d'une économie de pensée et d'action.
- La construction des savoirs correspond à un double processus : de définition progressive des notions conduisant à la stabilisation des systèmes de notations et de leurs règles de fonctionnement, d'un côté; de normalisation des systèmes de notations et de réduction de leur coût

d'usage en lien avec la production d'interprétations stables de ces pratiques que sont les notions. Ainsi, la mémoire et l'usage des savoirs sont collectifs, et en quelque sorte contractuels, à l'échelle d'une institution donnée; l'institution étant pour nous le groupe social dans laquelle ce processus trouve les conditions de son développement (c'est-à-dire un corps, au sens de Bourdieu et al., 1983).

- Dans une telle institution didactique, les savoirs et leurs usages sont médiatisés autant par des jeux de langage du professeur et des élèves, permettant un mouvement entre « notions » et « notations », que par les interactions des élèves avec un « milieu » au sens de la TSD dénué d'intention didactique puisque dans ce cas, les élèves eux-mêmes sont porteurs de l'intention d'apprendre quelque chose de leur travail dans le milieu (Sensevy et Mercier, 2007).

Le concept d'extension praxémique. Comme on le voit, cette perspective va au-delà de l'opposition proposée par Vlassis entre dimensions propres aux « approches épistémologiques » et aux « approches socioculturelles » qu'elle permet d'articuler. Elle permet cependant d'intégrer les apports des travaux sur les systèmes sémiotiques que Duval par exemple étudie dans leur fonction cognitive de « cadres de représentations ». Car le jeu entre les systèmes de notations suppose et demande une référence aux actions et un contrôle par les notions associées, et les diverses approches didactiques sont donc, sur ce point, compatibles. Un concept particulier s'y inscrit et s'avère particulièrement utile en matière d'extensions d'ensembles de nombres : il s'agit du concept d'extension praxémique. Le terme de « praxème », au sens de Chevallard (1991), est formé à l'image du terme linguistique de lexème. En didactique, il s'agit d'une *unité minimale de signification* de la pratique du savoir, au sein d'une institution donnée, dotée d'une même signification pour les sujets de cette institution. Par exemple, l'écriture de deux nombres l'un sous l'autre, de telle manière que les chiffres des divers ordres soient exactement superposés, est un praxème, unité minimale de signification qui évoque déjà la pratique « poser une opération en colonnes ». De même calculer un produit, calculer une somme de produits sont des praxèmes dans l'accomplissement de la technique de calcul du produit de deux matrices. C'est à ce concept de praxème que se réfère la notion d'extension praxémique (Matheron, 2010). Cette expression désigne l'utilisation d'un praxème dans le cadre d'une pratique propre à une autre organisation mathématique que celle dont il est originellement issu, et sans que l'on se soit nécessairement enquis de la validité mathématique de cette *extension d'usage*.

L'histoire des mathématiques fournit des exemples célèbres de ce type d'extensions pour lesquelles la validité est soit prouvée au moment où elle s'accomplit, soit trouvée ultérieurement, au cours du développement historique des recherches

et travaux en mathématiques. Par exemple, Newton procède dans sa *Méthode des Fluxions et des Suites infinies* (1671), à l'extension de la division des polynômes numériques dans le système de base dix aux opérations littérales de l'algèbre, la division des polynômes d'une variable. De même qu'un nombre décimal peut égaler la somme de la série des fractions décimales qui permettent son écriture, Newton regarde toute expression algébrique comme égale à un développement en série. Sans se préoccuper de questions de convergence, il convoque par-là toute une série de praxèmes dont la mobilisation est utilisée habituellement dans le cadre

strict de l'arithmétique, ainsi il obtient un développement de $\frac{a^2}{b+x}$ en divisant a^2

par $b+x$ « tout comme »³ il diviserait 1000 par 7, c'est-à-dire en mobilisant les mêmes praxèmes : disposition en potence, pratiques usuelles liées aux dividendes, diviseur et quotient, ... Il s'agit là pour Newton de réaliser une économie de pensée et d'action en songeant à « appliquer à l'Algèbre la doctrine des fractions décimales, puisque cette application ouvre la route pour arriver à des découvertes plus importantes et plus difficiles » (Newton, Ib. p.2). C'est que, comme le souligne Matheron (2010, pp. 102–103) en faisant référence à Serfati (2005) « [...] l'explosion du symbolisme [...] permet, à un coût plus bas, l'engagement et le développement du travail mathématique. Ce symbolisme mathématique, c'est-à-dire ce que l'on nomme les ostensifs scripturaux en didactique des mathématiques, contient une dimension relative à son ergonomie. En cela les ostensifs scripturaux sont porteurs de mémoire : celle des choix multiséculaires faits par les communautés de mathématiciens afin de rendre la pratique des mathématiques plus aisée, générale ou universelle ».

Les extensions praxémiques concernent donc l'usage de systèmes de praxèmes et des notations qui les supportent dans des pratiques nouvelles. Ces usages ne s'accompagnent pas forcément d'un contrôle *a priori* par un discours ou une construction technologique qui viendrait les justifier, comme on l'observe chez Newton. Cependant, en tant que « mémoire du savoir » (Matheron, Ib.), si ces extensions relèvent bien de la *métis*, c'est-à-dire d'une « ruse de l'intelligence », pas plus en classe quand elles sont le fait d'élèves que dans le travail des mathématiciens, elles ne sont ni aléatoires, ni erratiques. Ainsi l'ostensif « dy/dx », créé par Leibniz, rappelle-t-il l'idée du quotient différentiel « $\Delta y/\Delta x$ » dans son extension à la désignation de la limite de ces quotients, alors que sa notation d'intégrale définie est emblématique non seulement de la procédure de sommation à l'origine des calculs d'aires et de volumes mais aussi d'une cohérence relative aux dimensions des grandeurs en jeu. En outre, si les extensions praxémiques donnent accès à de nouveaux non-ostensifs – par exemple la notion de développe-

³ Cette utilisation du praxème dans la nouvelle situation suppose bien sûr des adaptations.

ments en série –, ou encore à un enrichissement des anciens à travers des pratiques nouvelles qui changent le regard qu'on leur portait – par exemple les tangentes, les aires sous l'angle du calcul infinitésimal –, c'est parce qu'elles sont établies de façon contrôlée par leurs auteurs mathématiciens, qui savent qu'ils créent là un calcul sur des objets nouveaux. Ainsi, la « grande conformité » entre les opérations algébriques que Newton s'autorise et les opérations arithmétiques, est évoquée par lui-même dans les termes suivants : « [...] cette ressemblance ou analogie, qui serait parfaite, si les caractères n'étaient pas différents, les premiers étant généraux et indéfinis, et les autres particuliers et définis [...] ». Quant à Fermat, s'il manipule des expressions littérales dans lesquelles sont mobilisés autant des « infinitésimaux » – sujets à caution, en analyse standard, car étant tantôt nuls tantôt non nuls au fil du développement – que des variables, c'est pour s'empresse de contrôler la pertinence de son calcul audacieux en montrant qu'il permet de retrouver des résultats déjà établis par ailleurs.

Les extensions praxémiques peuvent être aussi le fait d'élèves car elles sont de nature anthropologique, Brousseau (2004) ayant montré que les élèves peuvent produire des extensions praxémiques dans une situation d'action, mais aussi des systèmes de représentation et les praxèmes associés dans des situations de formulations relatives à leurs actions propres. Par-là l'usage d'un outil, ou l'outil lui-même, est transformé afin d'accomplir des tâches nouvelles auxquelles il n'était pas destiné. Pour autant, nous verrons qu'il ne s'agit pas d'un détournement de fonction comme dans le bricolage, au cours duquel des objets obsolètes sont cannibalisés. Se spécifiant selon les types différents d'institutions en lesquelles les extensions praxémiques se produisent, elles ne se présentent pas de la même manière au sein d'institutions de production de mathématiques – les institutions de mathématiciens –, et au sein d'institutions didactiques. Dans les classes où l'étude des mathématiques comprend la rencontre de problèmes nouveaux pour les élèves et la recherche de réponses connues à étudier, « l'invention » praxémique conduit souvent à l'extension induite d'une pratique antérieure pour un problème nouveau mais qui présente quelque similitude. Si, dans les institutions de production de mathématiques, elles sont assumées consciemment par les mathématiciens, il n'en va pas forcément de même dans les secondes où, contrat didactique oblige, les « élèves » se risquent à des extensions sans se poser les problèmes de leur validation comme objets mathématiques. Ils se contentent souvent de l'approbation ou la désapprobation du professeur (Fluckiger et Mercier, 2002). On peut mettre dans ce cas de figure les expressions abusives de la linéarité qui correspondent à des extensions non gérées du praxème : $(@ + *)\# = (@)\# + (*)\#$ entre le contexte des ensembles de nombres munis d'une addition et d'une multiplication distributive par rapport à l'addition, et le contexte de l'image d'une somme par une fonction comme somme des images des termes. De même en est-il d'élèves qui, résolvant une équation logarithmique, énoncent qu'ils « simplifient par $\ln$ », parce

que la résolution évoque pour eux une similitude avec la simplification par le facteur commun a non nul lorsqu'il apparaît dans les deux membres d'une équation algébrique. Nous verrons que les extensions praxémiques supposent, au sein d'institutions didactiques, une gestion toute particulière.

2. Les extensions d'ensembles de nombres : enjeux scientifiques et enjeux didactiques

Comme nous l'avons précisé dans l'introduction, notre apport est d'abord constitué d'une analyse a priori des difficultés d'apprentissage et d'enseignement des relatifs. A commencer par un obstacle épistémologique que nous décrirons dans la section 2.1. Nous ferons ensuite, dans la section 2.2, une incursion dans l'univers didactique des nombres complexes pour en tirer, à la section 2.3., des éléments d'analyse sur les relatifs.

2.1. L'obstacle empiriste

Revenons à la dimension épistémologique et aux obstacles du même nom. Les extensions des pratiques qui engagent la notion de « nombre », – le « concept » de nombre, dit-on ailleurs – sont, pour Brousseau (1998), sources d'obstacles épistémologiques : « Puisque le fait de plonger un ensemble dans une extension change ses 'propriétés' et celles de ses éléments que l'on peut désormais utiliser, nous pouvons nous attendre à de grandes difficultés et à des résistances au changement d'emploi lorsque l'habitude jouera un rôle – qu'il s'agisse d'habitudes psychologiques ou culturelles. C'est un des principaux obstacles épistémologiques que l'on rencontre en mathématiques ».

La notion d'obstacle épistémologique peut être envisagée à différentes échelles. A l'instar de Bachelard (1938) qui l'introduit pour étudier comment la connaissance première des choses fait obstacle à sa connaissance rationnelle, et de Schneider (1988) ou Sierpiska (1992) en didactique des mathématiques, nous adopterons ici un regard large en considérant un tel obstacle comme une attitude épistémologique qui oriente inconsciemment le regard sur les choses, faisant ainsi écran à d'autres manières de les penser.

En ce qui concerne les obstacles épistémologiques liés aux nombres relatifs, Glaeser (1981) demeure une référence même si on lui a reproché, lors de colloques, d'avoir parlé de ce type d'obstacles en termes de « difficultés » plutôt que d'avoir analysé à quels types d'erreurs prototypiques ils conduisent. Glaeser (Ib.) décompose l'histoire en trois grandes périodes au cours desquelles, respectivement, les solutions négatives ne sont pas acceptées, sont acceptées dans certains contextes ou émergent comme construction théorique déconnectée de tout référent sensible. Il inventorie six obstacles qu'il qualifie d'épistémologiques : inaptitude à manipuler des quantités négatives isolées, difficulté à donner du sens à des quantités

négatives isolées, difficulté à unifier la droite numérique, l'ambiguïté entre un zéro « origine » et un zéro absolu, la difficulté de s'écarter du sens initial attribué aux êtres numériques et le désir d'un modèle unifiant. Parmi ces difficultés, celle qui pousse à vouloir donner un sens concret aux nombres relatifs relève sans doute du positivisme empirique selon lequel les lois et concepts scientifiques se doivent d'être des reflets exacts des objets du monde physique au lieu de constructions intellectuelles faites par l'homme dans un projet donné qu'il soit de modélisation ou autre, ce qui est le sens donné à la notion d'*expérience première* par Bachelard. Le positivisme empirique est un obstacle dont Schneider (1988) a montré le caractère épistémologique et évalué l'impact important sur les premiers apprentissages de l'analyse mathématique. De manière significative en tout cas, Glaeser insiste sur le fait que la crise des nombres relatifs s'est résorbée quand, en 1867, Hankel s'affranchit de la nécessité de représenter les nombres négatifs par un quelconque modèle « concret » : « La révolution accomplie par Hankel consiste à aborder le problème dans une tout autre perspective. Il ne s'agit plus de déterrer dans la Nature des exemples pratiques qui “ expliquent ” les nombres relatifs sur le mode métaphorique. Ces nombres ne sont plus découverts, mais inventés, imaginés. » (Glaeser, 1981, p. 337).

De cette analyse en termes d'obstacle empiriste, on peut tirer parti soit en faveur, soit en défaveur d'une approche didactique faisant la part belle aux modèles. Tout dépend si l'on considère les élèves capables ou non d'entrer dans la perspective de Hankel. Nous reviendrons à ce débat et à ce que l'histoire peut nous apprendre, une fois clarifiées certaines questions scientifiques et didactiques susceptibles d'éclairer les choix. Nous le faisons ci-après en prenant l'exemple des nombres complexes qui a quelque parenté avec le nôtre, ce qui nous permettra de montrer que le problème didactique traité ici dépasse le seul cas des nombres relatifs.

2.2. Ce que nous apprennent les difficultés d'apprentissage liées aux nombres complexes

Les nombres complexes font leur apparition vers le milieu du XVI^e siècle dans la théorie des équations. En particulier, des algébristes italiens : del Ferro, Cardan, Tartaglia et Bombelli résolvent des équations de degré 3 et introduisent des racines carrées de nombres négatifs qui, parfois, se simplifient pour conduire à des racines entières. Encore appelées entités « imaginaires », ces écritures seront longtemps exploitées avant qu'on ne leur reconnaisse le statut de nombres. Les réserves exprimées à leur encontre sont nombreuses. Par exemple, Berkeley, au XVIII^e siècle, souligne la difficulté à leur octroyer un sens quelconque : « le signe algébrique qui dénote la racine carrée d'un négatif a son usage dans les opérations logiques, quoiqu'il soit impossible de former par lui une idée de quelque quantité que ce soit ». Une avancée notable sera d'ailleurs l'introduction du symbole i pour remplacer la racine de -1 . C'est dans un double registre alliant géométrie et

physique que ces entités acquerront leurs lettres de noblesses au travers de modèles tels que les segments orientés de Wessel (fin du XVIII^e siècle) et, bien sûr, le plan de Gauss (XIX^e siècle) qui fait suite aux travaux d'Argand. Mais, comme le souligne Van Praag (2003), une définition jugée enfin « propre » sera celle donnée par Hamilton pour qui les nombres complexes sont des couples de réels munis des deux opérations que l'on connaît.

Un double mouvement d'analyse-synthèse. On voit, dans cette évolution, se créer un double mouvement : d'abord impliqués dans une extension praxémique de calculs littéraux, les entités dites imaginaires se trouvent ensuite modélisées, l'un de ces modèles fournissant le moyen de les définir à partir des réels qui sont ici des objets ayant déjà un statut mathématique. A partir de ce moment, ils peuvent faire l'objet d'un exposé axiomatique. Un cours dispensé, à raison d'une heure par semaine, à des élèves de terminale littéraire en France, dans les années 1960 (Pitel, Durant & Touyarot, 1968) met en évidence ce double mouvement en s'inspirant de la double démarche « analyse-synthèse » des problèmes géométriques. Dans « l'analyse de la construction » de l'ensemble des complexes, les auteurs montrent que la résolution d'équations telles que $x^2 = -1$ et $(x - m)^2 = r$ avec $r < 0$ fait apparaître la nécessité d'inventer de nouveaux nombres : d'abord i tel que $i^2 = -1$, ensuite des nombres de la forme $a + bi$ où a et b sont des réels. A ce moment, la forme du produit de tels nombres est amenée comme découlant du souhait de conserver pour ces nouveaux nombres les propriétés de la multiplication dans R , en particulier la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Les auteurs concluent cette phase d'analyse de la sorte : « Cette démarche *ne prouve pas l'existence* des nombres complexes. Il faut construire ces nombres, en n'utilisant que des nombres connus, c'est-à-dire les nombres réels. L'expression $a + bi$ n'ayant pas encore de sens, un nombre complexe sera noté à l'aide des seuls nombres réels a , b , qui le caractérisent » (p. 91). Dans la « synthèse de la construction » de l'ensemble des complexes, débutant par l'axiomatique de cet ensemble, les auteurs définissent alors ces nouveaux objets comme couples de réels : « L'analyse de la construction de C nous a conduit à considérer des nombres de la forme $a + bi$ où a et b sont des nombres réels. L'idée originale d'Hamilton fut de pressentir l'importance du couple (a, b) formé des deux nombres. [...] Avec Hamilton nous allons définir l'ensemble C des nombres complexes comme ensemble des couples (a, b) a et b étant des nombres réels ». Et de poursuivre en définissant, dans cet ensemble de couples, l'addition et la multiplication – qui est bien celle conjecturée dans la phase d'analyse – et que les auteurs désignent alors par de nouveaux symboles : les symboles classiquement associés à de telles opérations mais entourés d'un rond. Il ne restera, en fin de parcours qu'à montrer que les réels sont partie des complexes et que r peut être identifié à $(r, 0)$ puis que les imaginaires purs sont de la forme $(0, p)$ et que si l'on note i le nombre $(0, 1)$ on retrouve bien l'équivalence des notations (a, b) et $a + bi$. Cette approche peut

illustrer la dialectique que décrit Sfard (1991) dans la construction des diverses sortes de nombres : d'abord impliqués dans des manipulations formelles et des processus – avec une écriture qui constitue une extension praxémique de ce qui se fait avec les réels – avant d'être définis au sens mathématique du terme. Ce cours était aussi l'occasion – et c'est un des objectifs affichés par leurs auteurs – d'initier les élèves à ce qu'est la démarche axiomatique, ainsi qu'au débat entre intuition et formalisation, en leur proposant la lecture commentée de textes écrits par de célèbres mathématiciens tels que Dieudonné et Bourbaki. Il n'a été professé que deux ans, les programmes ayant changé rapidement sous la pression des professeurs qui n'en saisissaient pas aisément l'intérêt, trop philosophique.

Formalisme versus intuitionnisme. Au cours de leur recherche sur les difficultés d'apprentissage liées aux nombres complexes, Rosseel et Schneider (2003, 2004 et 2011) pointent deux perspectives opposées susceptibles de dicter des enseignements assez différents et analysent leurs retombées. En substance, la première perspective est formaliste et postule que « la non-contradiction est un critère suffisant d'existence » des objets mathématiques, ceux-ci existant par le truchement d'une définition, voire d'une écriture : ainsi, c'est l'expression $i^2 = -1$ qui ferait exister i . La position sous-jacente est que la « pensée mathématique n'a d'existence que dans les systèmes d'écriture qui la manifestent », indépendamment de toute réalité ou de toute intuition (Encyclopædia Universalis, 1980). C'est celle de Bouvier et George (1979) qui donne, des nombres complexes, la définition suivante : « Si i est une racine du polynôme $x^2 + 1$, pour tout nombre complexe z , il existe un unique couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$ tel que $z = a + bi$ » et c'est bien à partir, entre autres, d'un tel postulat d'existence que peut être développée, sur le mode de la non-contradiction, la théorie des nombres complexes. A l'opposé, les mathématiciens du courant intuitionniste insistent, quant à eux, sur la construction de nouveaux objets mathématiques au départ d'objets déjà construits et estiment, par conséquent, que la construction d'objets participe à l'établissement du caractère non-contradictoire d'une théorie; sinon on court le risque que n'existe aucun objet satisfaisant un lot donné d'axiomes et que, par conséquent, une théorie qui en découlerait soit contradictoire. Ainsi, au lieu de définir les nombres réels de manière axiomatique, on s'attachera à les définir par des « opérations » – en un sens large – portant sur les nombres rationnels; soit en les définissant par des « coupures » comme Dedekind, soit par le biais de suites de Cauchy de rationnels comme l'a fait Cantor. Les constructions successives de nombres s'appuient alors sur des « intuitions premières » telle la succession que forment les nombres naturels. Notons que ce débat entre formalistes et intuitionnistes a fait l'objet d'une évolution dont Gilbert (1999) rend compte. Si d'aucuns, tel Dieudonné, ont pu lier la non-contradiction d'une théorie à l'existence, au sens ontologique du terme, des

objets satisfaisant les axiomes de cette théorie, le projet des fondements de la mathématique a fait évoluer la non-contradiction de condition nécessaire d'existence en mathématiques au statut de condition suffisante : « Si l'existence d'un objet n'entraîne pas de contradiction, on peut décider de postuler son existence ». Et de citer Godefroy (1999) : « [...] un concept mathématique nouveau apparaît d'abord comme une chimère. Cependant, s'il répond à un besoin et qu'il est susceptible d'une formalisation cohérente, il est à plus ou moins long terme intégré (en dépit de la routine et des interdits) au corps des mathématiques, et scientifiquement parlant la question est réglée ».

Des extensions praxémiques qui font sens pour les élèves. Le dernier propos cité nous amène à nous demander dans quelle mesure les élèves acceptent d'étudier des chimères et, surtout, en réponse à quel besoin. La recherche de Rosseel et de Schneider (Ib.) apporte des éléments de réponse à cette question. En effet, sur la base d'interviews d'élèves ayant reçu un enseignement algébrique et axiomatique des complexes, ces chercheuses ont montré les limites d'une telle approche en termes de non-sens déclaré par les élèves, en particulier en ce qui concerne les extensions praxémiques que constituent les écritures $a + bi$ et $x^2 = -1$ décodées, en dépit de l'enseignement, comme si l'on travaillait toujours dans les réels. Ainsi, certains élèves estimaient qu'on n'avait pas résolu l'équation $x^2 = -1$ car, pour eux, on n'avait fait que remplacer la lettre x par une autre lettre i qui « n'est pas une solution » (*sic*) et d'autres continuaient de s'étonner, en fin de parcours, qu'on puisse trouver « un nombre dont le carré vaut -1 ». En somme, on retrouve en ce point la difficulté d'accepter de tels objets sans en avoir une interprétation pratique extérieure aux mathématiques qui puisse en donner un modèle; ce qui relève, ici encore, d'une vision positiviste des mathématiques. Quant à l'implication des élèves interviewés dans l'étude des complexes, elle semblait ne tenir qu'au contrat didactique. En bref, ils se rassuraient grâce à la facilité des procédures qu'ils devraient savoir mettre en œuvre : « Les exercices sont un peu plus difficiles que ceux qu'on faisait en 4^e ⁴[Résolution, dans R , d'équations du second degré] avec le discriminant, mais ce n'est pas hyper compliqué; c'est plus facile que les sinus et cosinus. Les exercices qu'on fait, c'est parfait ». Sur la base des résultats de leur recherche, Rosseel et Schneider ont alors construit une ingénierie s'inscrivant dans une perspective intuitionniste, et dans laquelle les nombres complexes sont introduits d'emblée comme des codages algébriques des similitudes dont l'origine du repère est un point fixe, sous forme de couples images de $(1, 0)$ par ces transformations. L'expression de la composition de celles-ci, d'abord sous forme trigonométrique puis sous forme cartésienne, fait apparaître une opération sur ces couples qu'on appellera produit, montrant de la sorte aux élèves l'intérêt de

⁴ 14-15 ans

multiplier ainsi deux couples plutôt que de multiplier « spontanément » leurs composantes. Ce n'est qu'au terme du processus que les couples de réels sont appelés nombres complexes, parce qu'ils s'additionnent et se multiplient; argument utilisé également par Brousseau à propos des rationnels. Mais, comme l'observent ces chercheuses, cela ne suffit pas à faire accepter par les élèves que les couples aient le statut de *nombres*. La plupart des élèves disent avoir affaire à deux nombres et non à un seul. Certains reviennent même sur une signification du non-ostensif « nombre » liée à l'activité de « dénombrement ». S'imposent là un débat collectif et un discours du professeur, sur ce changement de statut et la fantasmagorie qu'il suscite inmanquablement dans les esprits, aujourd'hui tout comme par le passé. Rosseel et Schneider utilisent une notation spécifique pour l'addition et la multiplication des couples, faisant intervenir *in fine* l'égalité $i^2 = -1$ comme une forme réduite de l'égalité entre le produit du couple $(0, 1)$ par lui-même et le couple $(-1, 0)$, après avoir assimilé les couples de la forme $(a, 0)$ aux réels a , ce qui ne suffit pas à régler la question de l'interprétation de ces couples comme nombres.

On voit apparaître dans cet exemple des choix didactiques relatifs à une extension praxémique. Le « besoin » dont parle Godefroy, et auquel répondent les nombres complexes, est déjà l'objet d'un choix : d'un côté, le projet de complétude et de cohérence à l'origine du théorème fondamental de l'algèbre qui octroie aux polynômes un nombre de racines comptées avec leur ordre de multiplicité égal à leur degré; de l'autre, le codage algébrique de transformations géométriques. Un premier critère de choix est l'usage plus ou moins probable que les élèves feront de ces nombres dans leur avenir scolaire : d'une problématique purement algébrique, que rencontreront les élèves qui optent pour des études supérieures en mathématiques, à des usages plutôt propres aux futurs utilisateurs de mathématiques, au carrefour de la géométrie et de la physique où, par exemple, les vecteurs tournants de Fresnel s'inspirent de transformations géométriques pour modéliser les variations de courants alternatifs. Un second critère, sur lequel nous insisterons davantage ici, a trait à la possibilité de mettre sous contrôle d'un système donné, « faisant sens » pour les élèves, les comportements des nouveaux objets créés et, par conséquent, de valider l'extension praxémique qui les fait vivre. Dans le cas présent, Rosseel et Schneider ont évité l'usage *a priori* d'écritures de type $a + bi$ – celles-là même grâce auxquelles Pitel et al. (1968) induisent la forme que devrait avoir le produit de deux complexes – car, comme en témoignent les interviews mentionnées *supra*, ces formes sont sources d'incompréhension. Par contre, le contexte des similitudes, dont le centre est l'origine du repère, semblait à ces chercheuses une entrée en matière abordable pour des élèves ayant un rapport stable et idoine à la trigonométrie élémentaire du cercle, la forme cartésienne du produit de deux complexes découlant alors des formules d'addition : $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$.

En somme, dans leur scénario didactique, l'extension praxémique est l'aboutissement d'un processus d'étude, et non un élément déclencheur de celui-ci, et les similitudes forment un système qui permet de réguler et de valider le comportement des nombres complexes qui en constituent un modèle, au sens de la modélisation intra-mathématique (Chevallard, 1989). Rosseel et Schneider (2011) ont décrit les succès et les limites de leur dispositif au cours duquel elles n'ont rencontré que des élèves ne trouvant guère de sens à une approche formaliste, que ce soit dans des classes « fortes » ou « faibles » en mathématique. Elles n'excluent cependant pas qu'il existe des élèves acceptant de rentrer dans un jeu qui consiste à explorer le comportement de « chimères ». Et de reprendre un dialogue extrait d'un roman de R. Musil, *Les désarrois de l'élève Törless*, où l'on voit deux adolescents prendre des partis opposés sur ce point de vue. Au premier qui persiste à penser, en dépit de l'enseignement reçu, que la racine carrée d'un nombre négatif n'existe pas, le second rétorque : « Précisément : on agit comme si ce n'était pas impossible, en dépit des apparences, en pensant que cela finira bien par donner un résultat quelconque. [...] Je crois que si l'on voulait se montrer trop pointilleux, il n'y aurait pas de mathématiques du tout ». On rejoint là un aspect de la *métis* dont Matheron (2010) souligne l'importance pour la création mathématique non seulement dans les institutions savantes, mais aussi dans les institutions scolaires. Une des clés du problème pourrait être dans le fait que, dans les propositions d'enseignement disponibles, l'extension praxémique est engagée sous l'impulsion du professeur tandis que son contrôle ne peut exister durablement pour les élèves que s'ils en sont les auteurs, l'expertise du professeur consistant alors à accompagner leur production. Nous y reviendrons.

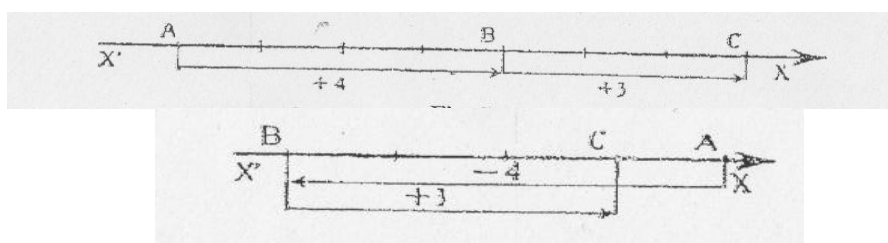
2.3. Des complexes aux relatifs

Ce titre, un peu particulier, indique qu'il y aurait lieu de faire un parallèle entre les difficultés éprouvées par les élèves à propos des nombres complexes et celles concernant les relatifs. Evidemment, un complexe peut être un couple de réels négatifs mais, au moment où ce type de nombre sera enseigné, l'élève est supposé avoir « adopté » les nombres munis d'un signe « - ». Nous ferons en effet cette hypothèse, au risque de certaines illusions. Ce que nous voulons montrer ici, c'est en quoi le cas des nombres relatifs s'apparente à celui des complexes, du point de vue des difficultés d'apprentissage, et en quoi il s'en différencie.

L'obstacle empiriste en commun. D'abord, le même obstacle empiriste est à l'œuvre dans les deux cas, bien que de manière différente. En effet, l'existence des relatifs négatifs ne fait pas l'objet d'un même scepticisme que celle des complexes, en raison de l'usage des premiers dans la culture : codage de températures, de profondeurs sous-marines, niveaux d'ascenseur, échelles de temps, gestion de comptes, etc. Cependant, comme le montrent les recherches citées à la section 1, il n'est pas évident de donner par ce moyen un « sens » acceptable aux opérations et

en particulier à la multiplication. Ainsi, la règle du produit « moins par moins donne plus » semble pâtre, autant que le théorème de Pythagore jadis, d'une réputation de « pont aux ânes » ainsi qu'en témoignent plusieurs réactions d'adultes recueillies par Rosseel et Schneider (2011) : « Là où j'ai commencé à décrocher en math, c'est quand on m'a dit que moins par moins donne plus. Je n'ai jamais compris que, par exemple, -2 fois -3 cela donne $+6$. J'en ai conclu que les maths, c'était pas mon truc ». Comme le montrent ces chercheuses, les raisons de ce malaise seraient bien liées au fait que les règles relatives au calcul des relatifs sont souvent enseignées comme des règles arbitraires et, par-là, que les élèves devenus adultes regrettent de ne pas avoir pu leur associer une signification « concrète ». On en voit des exemples répétés dans certains ouvrages d'enseignement qui proposent tout crument de considérer que $7 + (-3) = 7 - 3$ « parce qu'en pratique, on enlève le $+$ devant une parenthèse », ce qui supprime le signe d'opération $+$ (!) et transforme le signe unaire $-$ en signe binaire.

Des relatifs tantôt états, tantôt opérateurs. Revenons sur une difficulté majeure liée à certains statuts du signe « $-$ » relevés par Gallardo et Rojano (1994) : dans l'expression $-15 - (-37)$, les deux signes « $-$ » associés aux écritures chiffrées 15 et 37 ont une « fonction unaire » alors que le signe « $-$ » du milieu a une « fonction binaire » et doit être interprété comme signe d'opération. Ces deux fonctions renvoient respectivement à ce qu'on appelle communément les deux statuts des nombres (qu'ils soient relatifs ou non) tantôt dénotant des « états », tantôt dénotant des « variations ». Ce dernier statut se prête à son tour à des opérations dont rendent compte des expressions telles que « retrancher 4, puis additionner 3 » et que traitaient d'anciens manuels tel N. J. Schons (1957) où l'on illustre, par la droite des nombres ce que signifie « additionner 4, puis additionner 3 » ou « retrancher 4, puis additionner 3 ».



On peut voir là d'ailleurs un risque lié à l'usage de la droite graduée qui mêle des nombres ayant des statuts différents : soit états, soit variations ou, au contraire, un atout comme le développent (Job et al., 2014) en référence à la scolarité future des élèves lesquels étudieront le taux moyen d'une fonction sur l'intervalle

$[x, x + \Delta x]$ en passant d'un état x de la variable indépendante à l'état $x + \Delta x$ par une variation Δx tantôt additive, tantôt soustractive.

Cette distinction entre états et opérateurs subit un sort particulier dans les jeux d'écriture concernant les relatifs. Pensons en effet à la transformation de $-5 - (-7)$ en $-5 + 7$ dans laquelle deux signes « $-$ » de statuts distincts sont remplacés par un seul signe « $+$ » apparent, opératoire entre -5 et 7 , deux états de signes différents dont l'un est apparent et l'autre non. Qui plus est, se joue ici, de deux manières, la 3^{ème} fonction « symétrique » du signe « $-$ » répertoriée par Gallardo et Rojano (Ib.) : on remplace une soustraction par son opération « opposée » qu'est l'addition en même temps que l'état « -7 » par son « opposé » « $+7$ ».

Le statut « opérateur » des nombres est invoqué dans plusieurs curricula sous le nom de « programmes de calcul ». Mais ceux-ci ont-ils un statut mathématique ? C'était le cas à l'époque des mathématiques modernes. Ainsi, dans Gagnaire (1972), à tout nombre relatif a , « on associe une relation, notée $\oplus a$, de source Z , de but Z , et dont le graphe sera l'ensemble des couples $(x, x + a)$ ». Quant à l'application, relation réciproque de la précédente, elle sera notée $\ominus a$. Cela sous-entend, bien sûr, l'existence d'une opération définie sur ces programmes de calcul : il s'agit de les « composer », de les « combiner », de « faire l'un puis l'autre ». D'où l'idée d'une première piste d'ingénierie dans laquelle les nombres relatifs et leurs opérations constituent un modèle des programmes de calcul et de leur composition. Elle sera décrite à la section 3.1. et elle engage les élèves à rendre compte du comportement de programmes de calcul au moyen de calculs de nombres. Ainsi, on peut modéliser le résultat « ajouter 1, puis ajouter 2 à un nombre revient à lui ajouter 3 », ce qui peut encore s'écrire :

$$a + 1 + 2 = a + 3$$

par le calcul suivant : $1 + 2 = 3$, qui porte sur des opérateurs. Mais comme ce fut le cas depuis le CP, il n'est toujours pas nécessaire d'introduire cette précision, bien au contraire. Un projet nouveau peut alors être formulé sur la base de cette première référence : inventer de nouveaux nombres auxquels on pourrait identifier les programmes de calculs soustractifs. Il s'agit là d'un projet ayant une dimension fondamentale par rapport au savoir visé, mais dont l'organisation didactique qui pourrait la porter, en laissant de la place pour que les élèves rencontrent par eux-mêmes les questions résultant de l'étude et non de la seule volonté du professeur, reste encore à inventer. Il soulève au minimum une difficulté de congruence des écritures.

Des transformations d'écriture congruentes ou non entre système et modèle ? Du point de vue des extensions praxémiques, cette difficulté est de taille et rend l'apprentissage des relatifs plus difficile que celui des complexes. Pour en rendre compte, nous reviendrons à l'approche des complexes décrite à la section 2.3. Dans

cette ingénierie, on l'a vu, les écritures $x^2 = -1$ et $a + bi$ qui constituent de telles extensions surviennent en fin de processus, les couples acquérant seulement alors le statut de nombres en raison du fait qu'on peut les additionner et les multiplier. Avant cela, leur produit est noté avec une notation nouvelle pour les élèves (une croix dans un rond), laquelle fait pendant au signe canonique « o » qui représente la loi de composition de transformations, ici de similitudes dont le centre est l'origine des axes. On peut donc faire une « conversion congruente entre deux registres de représentation » au sens de Duval (1995), l'écriture $s \circ s'$, où s et s' sont des similitudes, devenant l'écriture $(a, b) \times (a', b')$, chaque « entité » de sens de l'une correspondant à une et une seule entité de l'autre, pourvu que l'entité soit le couple (a, b) et non l'une de ses composantes. Pour ce qui est des relatifs, cela se présente assez différemment et c'est là une difficulté entravant la sémiose. D'abord, parce que le codage des programmes de calcul choisi d'entrée de jeu rappelle fortement l'écriture des nombres connus jusque-là par les élèves : « Du point de vue des élèves, un opérateur tel que -2 est en effet codé d'une manière qui se rapproche fortement du souvenir de l'écriture d'un nombre, en vigueur depuis leur entrée à l'Ecole : même si ce nombre possède la particularité nouvelle d'être affecté d'un signe représentant celui d'une opération, dans ce cas une soustraction » (Matheron, 2010). De ce fait, poursuit l'auteur « Les ostensifs conduisent, par un phénomène de proximité engendré par la perception, à une extension de leur usage, au-delà de celui pour lequel ils ont été créés ».

Enfin, les propriétés des complexes relatives à leur produit, ne fût-ce que la forme de ce dernier, se valident complètement à partir du système qu'ils modélisent, soit sur base de connaissances sur les similitudes et leur composition ; par exemple lorsque l'on compose deux similitudes de même centre, leurs angles s'ajoutent et leurs rapports se multiplient.

Les programmes de calcul peuvent-ils, vis-à-vis des relatifs et de leurs opérations d'addition et de soustraction, jouer le même rôle que certaines similitudes vis-à-vis des complexes et de leur multiplication ? C'est-à-dire constituer un système qui régit le comportement d'un modèle en termes de nombres relatifs censés en rendre compte, système dont les éléments sont des objets ayant un statut mathématique, même si les transformations en jeu ne sont vraiment définies, dans les classes concernées, qu'au terme de leur caractérisation algébrique. Pourquoi pas ? Cependant, comment préserver la congruence des écritures entre le système des programmes de calcul et leur modélisation par des nombres relatifs – à supposer que cela soit souhaitable – et en même temps garder la trace qu'il s'agit bien là d'une démarche de modélisation ? Faudrait-il pour cela créer un ostensif particulier pour les programmes de calcul, par exemple $[+ 3]$ pour « ajouter 3 », $[- 2]$ pour « retrancher 2 » et une écriture particulière pour « officialiser » leur composition, au-delà du seul usage du mot « puis » dans des expressions telles que

« additionner 4 puis retrancher 5 » ? Remplacer la lourdeur subséquente des écritures par un calcul plus convivial sur des nombres positifs et/ou négatifs devient alors un projet explicite, le comportement des programmes de calcul additifs et soustractifs fournissant un discours technologique qui justifie les règles du calcul sur les nombres supposé le modéliser.

L'enjeu n'est-il pas effectivement d'engager les élèves dans une extension praxémique entre l'univers des nombres naturels et celui des nombres relatifs tout en freinant en quelque sorte leur *métis*, vite encouragée par une proximité ostensive, et en la mettant sous contrôle ? Ce dernier peut être assumé par le comportement des programmes de calcul, qui servent ainsi de métaphore fondamentale et de technologie pour le calcul sur les relatifs. Mais de quel prix faut-il payer cette dialectique entre système et modèle, au sens de Chevallard (1989) ? En particulier, jusqu'à quel point peut-on alourdir la réflexion des élèves en les encombrant de notions et notations, en particulier la composition de tels programmes, l'opposé d'un programme et les signes associés ? Nous reviendrons à ces questions dans la section 3, après avoir ébauché une autre piste de type algébrique.

Des paramètres tant négatifs que positifs pour fédérer des cas multiples. Cette piste s'appuie sur le rôle joué par les relatifs dans l'algébrisation des problèmes mathématiques qu'ils soient de nature géométrique ou autre. En particulier, ils assurent, selon Freudenthal (1973) une forme de généralité des descriptions algébriques d'objets géométriques : « If straight lines are to be described algebraically in their totality, if curves are to be described in any situation, one cannot but admit negative numbers. The need for general validity of algebraic solution to which the negative numbers owed their existence, is reinforced from the 17th century onward by the need for general validity of descriptions of geometric relations. The second need, more content directed than the formal algebraic one, is the most natural and compelling. It is properly responsible for the success story of negative (and also of complex) numbers. ». C'est ce point de vue qui inspire à Freudenthal sa méthode inductive-exploratoire décrite plus haut par laquelle une même régularité numérique doit s'appliquer aux coordonnées de tous les points d'une droite, que ces coordonnées soient positives ou négatives. Et c'est bien là ce qui a rendu la méthode de Descartes efficace car démontrer, par la méthode analytique, des propriétés de figures géométriques avec du calcul sur des coordonnées et des équations dans un repère donné suppose de choisir ce dernier de manière à simplifier les calculs, ce qui revient souvent à situer les figures en question à cheval sur plusieurs quadrants formés par ce repère. Et ce, même si Descartes lui-même n'utilisait pas de repère.

Cependant, en rejoignant et en extrapolant le modèle épistémologique de référence de Gascon (1993) relatif à l'algèbre élémentaire, nous estimons que la généralité

des modèles algébriques et fonctionnels tient à la possibilité de considérer aussi des paramètres négatifs. Prenons un exemple au carrefour de la géométrie analytique et de l'analyse. Si l'ensemble des paraboles, sous-ensemble des coniques, peut être représenté par un ostensif unique : une équation du type $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ sur les coefficients de laquelle porte une contrainte, c'est parce qu'on considère que les paramètres $a, b, \dots, f$ peuvent dénoter des valeurs numériques tant négatives que positives. Et, quant au sous-ensemble des paraboles dont les axes de symétrie sont parallèles (pour en revenir à un niveau scolaire pas trop élevé), on peut le considérer représenté par la classe des polynômes du second degré : $y = ax^2 + bx + c$ au prix bien sûr du choix d'un axe des ordonnées parallèle à ces axes de symétrie mais aussi au prix d'une variation possible du signe des paramètres a, b et c . On est là en présence d'une démarche dont l'occurrence est grande en mathématiques, à savoir la réduction ostensive d'une variété de cas de figures à une seule formulation qui les englobe tous. Ainsi, la formule de Chasles exprime que la distance algébrique de A à C vaut la somme des distances algébriques respectives de A à B et de B à C , quelles que soient les positions des points A, B et C sur un axe orienté, c'est-à-dire quels que soient les signes de ces distances : le concept de nombre relatif permet ici de réduire quatre cas distincts en une seule écriture. On peut imaginer que la première rencontre des élèves avec cette démarche de réduction soit le travail de la classe des fonctions $y = ax + b$, qui rassemble toutes les droites (sauf celles parallèles à l'axe des ordonnées), dont certaines caractéristiques : croissance et position par rapport à l'origine sont distinguées en fonction des signes respectifs des paramètres a et b , soit la pente et l'ordonnée à l'origine. Ce sera le point de départ d'une ingénierie décrite à la section 3.2.

Cette ingénierie, basée sur l'idée que les expressions littérales *dénotent*, au sens développé par Serfati (2005), débouche sur une combinatoire de sens hypothétiques auquel conduit l'assemblage élémentaire « $a + b$ », suivant les signes des nombres représentés par a et b . Il en ira de même pour les assemblages « ab » et « $a - b$ ». Ce dernier est tout aussi digne d'étude même si, à partir des exemples précédents, on pourrait imaginer qu'on peut se contenter du seul signe « $+$ » comme signe binaire entre deux termes, l'éventuel caractère négatif de ceux-ci pouvant être pris en compte par les paramètres. Ce serait ignorer que les expressions algébriques ont plusieurs formes dont l'intérêt réside dans le sens dont elles sont porteuses : par exemple, $ax^2 + bx + c$ se factorise en $a(x - m)(x - p)$ où les facteurs contiennent le signe « moins » binaire, expression qui donne un accès direct aux racines m et p de la fonction correspondante. Dans cette perspective, l'enseignement des relatifs ne peut faire l'économie ni de la multiplicité des sens octroyés aux sommes et différences de relatifs ou produits, ni de leur discrimination.

3. Aperçu de deux ingénieries contrastées

Mais une analyse a priori comme celle que nous avons faite à la section 2, sur base du concept d'extension praxémique, ne contraint pas complètement le jeu du professeur et encore moins celui du chercheur. Nous l'illustrons par la description de deux ingénieries dont les concep-teurs se réclament grosso modo de cette même analyse. Et, dans une dernière partie conclusive, nous tenterons de résumer ce qui les rapproche et ce qui les différencie.

3.1. Introduction des nombres relatifs à partir de « programmes de calcul »

Pour tenter de sortir de ces difficultés récurrentes, l'équipe (CD)AMPERES de Marseille a expérimenté un dispositif didactique qui tente de faire vivre les nombres relatifs comme réponse à un projet déclaré d'emblée, et susceptible d'interpeller les élèves ⁵

De quoi s'agit-il ? Partant d'une suggestion faite par Chevallard dans son séminaire 2004–2005 pour les PLC2 de l'IUFM d'Aix–Marseille, Matheron et Mercier construisent une ingénierie basée sur la notion de programme de calcul et destinée à initier, chez des élèves de 5^e, une étude des nombres relatifs. On propose aux élèves d'effectuer mentalement des calculs du type $a + b - c$ où a , b et c sont des nombres naturels. Les nombres b et c sont choisis de manière à inciter les élèves à calculer d'abord $b - c = d$ pour remplacer le « sous-programme de calcul » $+ b - c$ qui consiste à « d'abord ajouter b et ensuite retrancher c » au nombre a par un sous-programme de calcul plus simple, $+ d$, qui consiste à « ajouter d ». Les programmes de calcul sont donc les modèles d'opérations définies dans l'espace du langage par des verbes à l'impératif, ce qui permettra d'interpréter les écritures produites tout au long du processus d'extension praxémique dans le cadre d'un espace d'action qui sert de référence. Dans un premier temps, il s'agit du cas où $b > c$. Par exemple, les auteurs choisissent des calculs du type $17 + 21 - 1$ ou $148 + 199 - 99$ pour rendre « tentante » d'emblée la soustraction $b - c$, une variable didactique cruciale étant d'exiger des calculs à la fois mentaux et rapides. Les élèves, à qui l'on a enseigné les années précédentes que les calculs doivent s'effectuer, dans ce cas, de la gauche vers la droite, s'aperçoivent assez vite de l'économie que procure le calcul des deux derniers termes et l'ajout du résultat au premier. De même, dans le cas où $b < c$ le programme de calcul initial est alors remplacé par un programme plus simple qui consiste non pas à ajouter d mais à « soustraire le résultat de l'opération $c - b$ » (ce que l'on ne sait pas, à ce stade, produire par travail sur l'agrégation de symboles initialement donnée, tandis qu'on l'énonce fort bien et qu'on le désigne – d comme sous-programme résultat). Par

⁵ Pour plus de détails, voir http://www.pedagogie.ac-aix-marseille.fr/upload/docs/application/pdf/2013-06/les_nombre_relatifs_en_5e.pdf.

exemple, $4586 + 32 - 33$ sera remplacé par $4586 - 1$, puisque ajouter 32 et soustraire 33 revient à soustraire 1. Dans ce cas encore, les nombres b et c ne sont pas choisis au hasard, ils doivent être suffisamment proches pour engager à l'usage de leur différence. La justification mathématique de cette manière de faire est demandée aux élèves, qui mis face au fait qu'ils ont soustrait 33 de 32 recourent alors au souvenir de la « technique d'emprunt » enseignée à l'école élémentaire pour la soustraction dans le cas d'une retenue. Ainsi : $4586 + 32 - 33 = 4585 + 1 + 32 - 33 = 4585 + 33 - 33 = 4585$. On peut étendre ce travail à des nombres décimaux et on peut envisager des programmes de calculs initiaux plus complexes. Ce qui sera, dans cette expérimentation, l'objet d'un travail ultérieur.

Un type fondamental de sous-programmes de calcul du type $+ b - c$ inclus dans le programme de calcul $a + b - c$, est alors institutionnalisé, avec une notation *ad hoc* : il s'agit d'abord du sous-programme de calcul noté « $- 1$ », présenté comme une écriture économique de sous-programmes plus complexes tels que $+ 124 - 125$ ou $+ 313 - 314$. Et l'on écrit

$$- 1 = + 124 - 125 = + 313 - 314.$$

Ces écritures s'interprètent par leur insertion dans un calcul décrit comme programme agissant sur un nombre initial : « si, à un nombre, on soustrait 1, cela revient à lui ajouter 124 puis retrancher 125 ». Ce que l'on note : $\dots - 1 = \dots + 124 - 125$; les « $\dots$ » jouant le rôle d'un symbole littéral jugé parfois par les professeurs, à ce moment de la scolarité, comme étant « hors programme » (le respect du programme, interprété comme ensemble d'interdits, est considéré comme une règle de conduite à suivre absolument par les professeurs de mathématiques, en France). La familiarité avec cette écriture s'étant installée, elle devient, par souci d'économie : $+ 124 - 125 = - 1$. Ainsi y a-t-il « autonomisation » progressive de ce type d'écritures par rapport au sens donné initialement, qui était trouvé dans la simplification de programmes de calcul énoncés tout d'abord oralement comme des actions ; mais les élèves peuvent y revenir s'ils en éprouvent le besoin. Les élèves n'éprouvent ensuite aucune peine à trouver des programmes de calcul qui reviennent à soustraire 2, 3, 4, etc., en comprenant qu'il s'agit de choisir deux nombres dont la différence est 2, 3, 4, etc., d'ajouter le plus petit et de soustraire le plus grand.

A ce stade, les auteurs du projet ont permis la fréquentation et l'usage par les élèves de nouveaux objets qui n'ont pas encore le statut de nombres : ainsi, $+ 1$ représente la simplification de multiples sous-programmes de calcul qui reviennent tous à « ajouter 1 à un nombre ». Néanmoins, la pratique de ces objets semble assez proche de ce qui se fait avec des nombres : à savoir des calculs dont les résultats, à l'écriture beaucoup plus économique, constituent l'aboutissement. En effet, on a proposé aux élèves de multiples exercices au cours desquels ils éprouvent la commutativité des opérations et rencontrent des programmes de calcul plus variés

contenant deux additions ou deux soustractions successives, trois opérations et aussi des programmes de calcul au cours desquels une étape donne 0. Le fichier en ligne commente ainsi cette phase : « L'idée commence à **vivre** que ce que l'on fait sur les programmes de calcul s'apparente à ce qui se fait avec des nombres. C'est désormais au professeur de dire que l'on "invente" ainsi de nouveaux nombres : les négatifs ». De fait, les nombres relatifs sont à ce moment institutionnalisés comme étant soit des nombres négatifs composés d'un signe « moins » et d'une partie numérique dite « valeur absolue du nombre relatif », soit des nombres positifs précédés d'un signe « plus » et d'une partie numérique qui est elle aussi valeur absolue du nombre relatif, mais cela n'est pas dit car les relatifs positifs ne sont pas différenciés des nombres positifs. Le nombre 0 est présenté comme « un nombre à la fois positif et négatif » car, comme le dit un des professeurs observés, « ajouter 4, puis soustraire 4, ça revient à ajouter 0 [...] tu peux écrire que cela revient à ne rien faire ou à ajouter 0 ». Les pratiques dans lesquelles les élèves ont été engagés – par exemple calculer $+5 - 9 + 6 -$ – sont vues comme des calculs d'un genre nouveau et conduisent à se poser la question : « Ces nombres relatifs sont-ils vraiment des nombres, et au juste comment le sait-on, ou plutôt que fait-on avec des nombres ? » Les élèves répondent à ces questions par le fait qu'on compare des nombres et que l'on opère sur des nombres. Le professeur sélectionne, parmi les propositions des élèves, celles qui relèvent d'une addition ou d'une soustraction; les autres opérations étant au programme de la classe supérieure.

A ce moment certaines écritures subissent une mutation progressive : d'écritures modélisant des sous-programmes de calcul, elles deviennent peu à peu écritures portant sur des nombres, par une extension d'usage qui autorise néanmoins le retour au sens premier si des élèves en éprouvent le besoin.

Nous arrêtons en ce point la description à très gros traits de cette phase de l'ingénierie qui concerne des élèves de 12 à 14 ans. Le travail dans lequel on engage les élèves, pourrait être volontiers désigné du terme de construction mathématique; la nature des savoirs en jeu importe dans ce cas l'organisation didactique choisie. Les élèves instruisent des questions didactiquement transposées, dont les réponses relèvent de la construction du groupe commutatif $(\mathbb{Z}, +)$ totalement ordonné par $\leq$.

L'entrée par les programmes de calcul constitue, pour les chercheurs concernés, un moyen de faire rencontrer par les élèves, à travers un principe fonctionnel d'économie qu'ils éprouvent, des objets nouveaux qui se comportent tout d'abord pour eux, un peu comme des nombres. Et pour lesquels il s'agit de construire, de manière rationnelle, des propriétés de calcul qui vont leur conférer le statut de nombre. Pour cette raison, Mercier estime que les programmes de calcul jouent, vis-à-vis des nombres relatifs, le rôle de « métaphore fondamentale », expression

sur laquelle nous reviendrons dans la conclusion, Matheron préférant parler de « raison d'être » en adoptant le langage de la théorie de la transposition didactique.

La technique didactique consistant à faire advenir des extensions praxémiques fonctionne efficacement dès que le professeur accompagne les élèves qui s'y engagent en leur posant des questions de plus en plus difficiles au fur et à mesure de la confiance que les élèves développent envers leurs inventions. Le propre de telles extensions praxémiques réside dans le fait que les non-ostensifs (les notions) auxquelles réfèrent les ostensifs (les signes, les parenthèses, les symboles d'opérations) doivent être temporairement oubliées, au profit du travail qu'autorisent les ostensifs et qu'ils anticipent; « en se laissant porter » vers les actions qu'ils appellent. Les notions de situation d'action et de formulation permettent de bien suivre le processus et d'en distinguer les étapes. La phase dans laquelle sont plongés les élèves relève du type de celles qui, exploratoires, anticipent l'ébauche de techniques valides (avec la formulation des règles du monde de l'action) et de leurs justifications mathématiques (moment technologique, recherche d'une validation des techniques). Le temps d'une technologie, qui justifiera la validité des résultats ainsi établis, est postérieur et ne se réalisera que si le professeur décide de le faire advenir. Mais pris dans un contrat de type argumentatif, dans les classes observées depuis cinq années, des élèves s'engagent, de leur propre chef, dans la recherche d'une technologie pour les techniques de calcul et de comparaison.

Les élèves savent bien que les opérations sur les nombres ne se limitent pas à l'addition et la soustraction. Cependant, la question de la possibilité de la multiplication des relatifs arrive au programme dans la classe de niveau supérieur (élèves de 13 à 14 ans). Suivant la même logique, on étendra pour la multiplication sa propriété de distributivité par rapport à l'addition et la soustraction. Ainsi rencontre-t-on, lors de divers calculs, ceux du type $3,8 \times (4,7 - 14,7)$. L'extension de la distributivité à gauche permet d'aboutir à $3,8 \times (4,7 - 14,7) = 3,8 \times (-10) = 3,8 \times 4,7 - 3,8 \times 14,7 = 17,86 - 55,86 = -38$; c'est-à-dire au produit d'un positif par un négatif. Le produit d'un négatif par un positif, qui permet de s'assurer de la commutativité, est obtenu de façon analogue en utilisant la distributivité à droite. Des calculs semblables, tels que $(-2,5) \times (-4) = (-2,5) \times [2 - 6] = (-2,5) \times 2 - (-2,5) \times 6 = -5 - (-15) = 10$ permettent d'établir le produit de deux négatifs. La place manque pour décrire avec plus de finesse le processus didactique, mais il repose, lui aussi, sur la dévolution d'extensions praxémiques aux élèves. Ces dernières, fonctionnelles, sont nécessitées par les questions qui surgissent lorsqu'on confronte les élèves à des calculs d'un nouveau type.

3.2. Introduction des nombres relatifs dans un contexte de modélisation de mouvements

Cette ingénierie, qui est celle de l'équipe belge, s'inscrit dans la perspective de la piste algébrique évoquée plus haut et dans laquelle la généralité des modèles algébriques tient à la possibilité de rendre négatifs les paramètres aussi bien que les variables. Le système modélisé est celui de mouvements rectilignes uniformes et l'ingénierie a été expérimentée à plusieurs reprises avec des élèves de 12 ans (Job et al., 2014). Elle est composée des cinq étapes décrites sommairement ci-dessous.

Une première activité de modélisation a pour objectif de faire passer les élèves d'un contexte quotidien – deux voitures qui roulent à même vitesse constante sur des routes droites distinctes et qui se font « flasher » par un radar – au regard du physicien qui, au-delà de circonstances particulières, standardise ces mouvements équivalents par un même tableau numérique et une même formule. Et c'est ce qui est demandé aux élèves. Dans un premier temps, ce modèle qui donne la position p en fonction du temps t , ici $p = 2t$ (La vitesse de 120 km/h a été exprimée en 2 km/min pour préserver une simplicité numérique) est interprété par les élèves, pour des valeurs de p et t positives, en termes d'espace parcouru par rapport au radar plutôt que de position, et de durée plutôt que d'instant. C'est cette confusion, sans conséquence à ce stade, qui leur permet de s'investir dans la tâche de modélisation.

Une deuxième activité leur demande de compléter le tableau numérique pour les voitures qui roulaient déjà à la même vitesse « avant de se faire flasher ». L'enjeu est ici de comparer plusieurs manières de distinguer « avant » et « après » que ce soit au niveau du temps ou de la position : codage par des couleurs différentes, par exemple ... mais aussi codage par des nombres négatifs faisant partie de la culture des élèves qui ont étudié la « ligne du temps » ou qui se réfèrent aux étages d'un immeuble. Dans la foulée, 0 intervient comme instant intermédiaire entre $t = -1$ et $t = 1$ et comme position du radar. Les enjeux de cette deuxième étape sont multiples. Il s'agit en effet, cette fois, de faire apprendre aux élèves à distinguer un espace parcouru qui ne peut être que positif et une position dont le signe permet de situer le mobile « en avant du radar » ou « après le radar », à distinguer pareillement durée et instant et à modéliser les voitures sur la route par des points sur une droite graduée. Les statuts « état » et « variation » des nombres relatifs sont particulièrement bien distingués par le biais de la différence entre « instant » et « durée » ou de celle entre « position » et « espace parcouru ». En outre, et ce n'est pas le moins, cette étape permet de poser une question cruciale aux élèves : garde-t-on ou non la même formule pour modéliser le mouvement « avant » le radar ? Le débat qui s'engage alors débouche sur le choix d'une formule unique pour rendre compte du mouvement dans son ensemble et le professeur explique que ce choix se paie au prix d'une règle qu'on doit imposer au modèle : « moins par plus donne

moins ». En effet, la formule $p = 2t$, donne bien $p = -6$ pour $t = -3$, ce qui suppose que $2 \times (-3) = -6$ en vertu de la dénotation.

Une troisième étape consiste à modéliser d'autres mouvements rectilignes uniformes en faisant varier la vitesse (toujours positive) et se solde par une généralisation de l'ensemble des mouvements étudiés par une même formule, $p = vt$, grâce à l'introduction du paramètre v pour représenter chacune de ces vitesses.

Des mouvements en sens opposés sont envisagés dans une quatrième étape. Il s'agit de rendre compte des mouvements de deux voitures qui roulent à la même vitesse mais en sens opposés sur une même route où elles se font flasher en même temps. Le modèle attendu doit permettre de distinguer les voitures en de mêmes instants. Une formule du type $p = -2t$ est retenue pour la voiture qui va des positions positives vers les positions négatives. Ce choix se solde par une double décision : accepter une vitesse négative ce qui a l'avantage d'indiquer le sens du parcours et instaurer la règle « moins par moins donne plus » qui autorise une dénotation cohérente : le calcul $2 = (-2) \times (-1)$ par exemple rend compte du fait que $(-1, 2)$ figure dans le tableau numérique. A ce stade et moyennant le fait que le paramètre v peut être aussi bien négatif que positif, les mouvements rectilignes déjà envisagés sont modélisés par une unique formule $p = vt$.

Dans une cinquième étape, les élèves sont invités à rendre compte des mouvements respectifs de deux voitures qui roulent à la même vitesse et dans le même sens mais en gardant un même écart entre elles. Les enjeux sont multiples : modéliser tous les mouvements rectilignes uniformes par la formule $p = vt + p_0$ où p_0 est la position du mobile au temps $t = 0$, introduire l'espace parcouru à partir d'une différence de deux positions et définir la valeur absolue comme mesure de cet espace. Et, ce n'est pas le moins non plus, le dernier enjeu est de faire travailler les règles liées à l'addition et la soustraction des nombres relatifs comme règles autorisant la modélisation en construction de ces mouvements. Parmi ces règles, certaines telles la commutativité ne font pas grand bruit. D'autres sont plus étonnantes aux yeux des élèves, comme vu plus haut. Pour donner un exemple, l'écart entre les deux positions positives 5 et 7 s'obtient en retranchant la plus petite de la plus grande, soit $7 - 5 = 2$. Si l'on envisage ensuite les positions -3 et -5 , l'écart de 2 s'obtient de la même manière : $-3 - (-5)$, au prix de la transformation de $-(-5)$, en $+5$. A partir de là, si l'on veut algébriser cette procédure en notant a et b deux positions distinctes sur la route, l'écart est rendu, soit par le calcul $a - b$ si a est supérieur à b , soit par le calcul $b - a$ dans le cas contraire. Et, pour éviter de formuler l'alternative, on introduit le symbole $|a - b|$.

Comme illustré dans cette section, la question de l'existence d'un modèle permettant de travailler à la fois la multiplication des relatifs et leur addition est relative au spectre épistémologique qu'on s'autorise. Comme pour les programmes de calcul, on peut en effet parler aussi des mouvements rectilignes uniformes comme « métaphore fondamentale » introduisant aux nombres relatifs. Nous reviendrons dans la conclusion sur le sens de cette expression pour nous restreindre ici au sens expliqué ci-après. La recherche d'un modèle algébrique unique qui rend compte de tous les mouvements rectilignes uniformes est une raison d'être profonde des relatifs, de leurs opérations et de leurs propriétés. Elle conduit à la méthode inductive–exploratoire de Freudenthal mais la dépasse en ce sens que, ici, c'est le registre algébrique qui commande au registre numérique. Et, qu'en outre, le niveau algébrique visé concerne tout autant les paramètres du modèle, comme v et p_0 que les variables t et p que le modèle met en correspondance. Cet aspect illustre parfaitement bien la réversibilité système/modèle car cette modélisation a des retombées non négligeables sur la manière de regarder le système : en termes d'instants et de positions plutôt que d'espaces parcourus et de durées, avec un sens octroyé aux valeurs négatives de ces variables, mais aussi en envisageant des vitesses dont le signe $+$ ou $-$ va permettre de préciser le sens du parcours. Et c'est bien un tel regard qui est à l'origine de la construction de la vitesse moyenne comme grandeur quotient $\Delta p / \Delta t$ ou de la vitesse instantanée comme dérivée d'une loi de position tout en préparant à sa modélisation vectorielle.

L'extension praxémique est donc sous le contrôle de cette conformité entre le système et son modèle. Elle préserve la congruence des écritures pour autant qu'on pense chacune des lettres de l'expression algébrique comme porteuse de deux informations : la norme de la mesure de la grandeur qu'elle représente et le signe unaire associé à cette même grandeur. Les signes « $-$ » et « $+$ » qui relient ces lettres sont alors les seuls à avoir une fonction binaire : ils désignent donc très clairement les opérations portant sur les nombres relatifs. C'est pareil pour la multiplication qu'elle soit notée d'une « $\times$ » ou signifiée par la juxtaposition de a et b dans l'assemblage « ab ». Comme nous le verrons plus loin, il est symptomatique que les écritures utilisées par Hankel évitent de mélanger des signes « $-$ » et « $+$ » qui ont, tantôt une fonction unaire, tantôt une fonction binaire.

En résumé, cette ingénierie s'inscrit dans une visée socio–constructiviste au sens des épistémologues des sciences : on y présente les théories, concepts, etc. comme des constructions humaines répondant à des projets bien déterminés et non comme des données arbitraires. C'est là une approche qui ne semble pas faire partie, non seulement de l'épistémologie spontanée des professeurs, mais aussi tout simplement de leur culture mathématique, ces derniers ayant sans doute été habitués à devoir accepter d'emblée, sans raison avancée, des axiomes régissant le

comportement des objets mathématiques étudiés. Nous y revenons dans la conclusion.

Analyse conclusive

Chacune des deux ingénieries décrites a donné lieu à des expérimentations dans les classes mais, comme annoncé dans l'introduction, notre propos présent se limite à une analyse a priori de leurs enjeux. Nous ne relèverons donc pas les difficultés rencontrées, ni ne discuterons des potentialités d'adidacticité que chacune de ces ingénieries comporte.

Notre analyse comparative s'appuiera sur la réflexion menée supra à propos d'approches liées aux complexes et analysées à la section 2.2. D'abord, comme ces dernières, les deux ingénieries concernant les relatifs relèvent d'une perspective socio-constructiviste au sens des épistémologues : il s'agit, dans les deux cas, d'un projet de construction des relatifs et de leurs opérations axé sur des raisons d'être explicites qui motivent à la fois la forme des objets construits et leurs propriétés.

Ensuite, dans les deux cas, l'approche est articulée sur une dialectique système/modèle au sens de Chevallard (1989) : dans la première ingénierie, les nombres relatifs sont d'abord des modèles d'un système formé de programmes de calcul et, dans la seconde, ils s'intègrent dans une modélisation algébrique d'un système fait de mouvements rectilignes uniformes. Et, dans les deux, le comportement des relatifs est contraint par le système lui-même qu'il modifie à son tour par un processus de réversibilité entre système et modèle. Ces ingénieries s'apparentent donc à l'approche conçue par Rosseel et Schneider (2011) pour introduire les complexes, ceux-ci constituant un modèle du système formé de similitudes particulières et des propriétés de leur loi de composition.

Enfin, les ingénieries décrites aux sections 3.1. et 3.2. ont toutes deux été qualifiées de métaphores fondamentales et cette dénomination commune appelle un commentaire. Le mot « métaphore » peut renvoyer, comme chez Janvier (1983) cité plus haut et chez Sfard (2000), au discours de l'enseignant pour initier les élèves à des idées mathématiques abstraites au départ d'objets plus concrets. Il renvoie aussi aux métaphores conceptuelles du courant de « l'embodied cognition » en neuro-sciences telles qu'étendues par Lakoff et Nunez (1997) : des métaphores enracinées dans l'expérience sensorielle (grounding metaphors) à celles reliant deux domaines mathématiques (linking metaphors). C'est ce dernier aspect qui est illustré par les deux ingénieries concernées bien qu'avec des nuances : dans l'ingénierie décrite à la section 3.1, on identifie bien le domaine numérique, l'autre domaine mis en relation étant un domaine moins facile à cerner : un sous-domaine du précédent axé sur les programmes de calcul, eux-mêmes pouvant relever ultérieurement, comme on a vu, du domaine des applications. Quant à l'ingénierie décrite à la section 3.2, elle relie un sous-

domaine de la cinématique au domaine algébrique qui, à son tour, conditionne le domaine numérique.

Mais, au-delà du mot « métaphore », nous insistons sur le qualificatif « fondamental » au sens où l'entend Brousseau pour qui les situations fondamentales sont des modèles du savoir mathématique qui est l'objet de l'enseignement en cours en ce sens qu'elles en créent la nécessité. Cela ne préjugeant en aucune manière des potentialités adidactiques de ces situations tant il est vrai qu'un discours de l'enseignant peut, par sa valence heuristique, favoriser d'autres formes d'adidacticité (Mercier, 1995 et 1998, Schneider, 2001 et 2011, Job et Schneider, 2014). Ce caractère fondamental nous éloigne cependant de certains modèles, tel celui des ballons auxquels sont accrochés des sacs, décrits à la section 1.2. qui permettent peut-être de donner une image du comportement des relatifs et de l'une ou l'autre de leurs opérations mais en aucun cas, de déterminer la nécessité d'un tel comportement. Dans les ingénieries décrites plus haut, l'intérêt de ce comportement fait, au contraire, l'objet d'une phase d'analyse, à la manière de Pitel et al. (1968), au cours de laquelle se construit un discours technologique qui le valide.

Au-delà de ce qui les rapproche, ces ingénieries se situent respectivement à des pôles fort différents de l'activité mathématique. Nous en rendrons compte à travers une description succincte de deux manières de justifier la règle « moins par moins donne plus ». D'abord celle de Stevin (1625) qui aboutit à la nécessité d'écrire que $(-b) \times (-d) = bd$ en déterminant de plusieurs manières des aires de rectangles formant un puzzle composite. Ensuite, celle de Hankel (1867) qui justifie les règles de la multiplication, non plus par référence à la modélisation de grandeurs, mais par le respect d'un principe de permanence : la multiplication dans $\mathbb{Z}$ doit prolonger la multiplication dans $\mathbb{N}$ tout en gardant de « bonnes propriétés », entre autres, respecter la règle de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Ce qui l'amène, lui aussi à évaluer le produit de deux nombres positifs à celui de leurs opposés : $a \times b = oppa \times oppb$. Stevin et Hankel considèrent donc tous deux la propriété « moins par moins donne plus », non pas comme une règle décrétée arbitrairement mais comme une règle induite par un projet plus global. On peut dès lors dire, au prix d'un anachronisme, qu'ils s'inscrivent tous deux dans une visée socioconstructiviste, du moins dans cette partie de leur œuvre. Cependant, leurs justifications diffèrent considérablement : Stevin s'appuie sur l'idée que les nombres représentent des grandeurs tandis que Hankel se situe à un niveau plus formel des mathématiques où les extensions des ensembles de nombres se doivent de conserver les propriétés structurelles des nombres existants. Des ingénieries sur les relatifs décrites plus haut, celle misant sur les programmes de calcul se situe plus du côté de Hankel, tout comme le curriculum français qui emprunte à ce dernier sa justification de la règle des signes. Peut-on voir là un héritage du programme qui caractérisait les mathématiques modernes et dans lequel $\mathbb{Z}$ était

présenté dans un projet de symétrisation de $\mathbb{N}$? Ce programme voulait en tout cas rendre compte du travail de fondement et de restructuration de l'ensemble des domaines mathématiques autour des notions d'ensembles structurés et de relations entre ces ensembles. Cette première ingénierie est ainsi inspirée d'une organisation mathématique globale de type « mise en forme déductive », au sens de Schneider, 2008, Job et Schneider, 2014. Par contre, l'ingénierie décrite à la section 3.2. débouche sur ce que les mêmes chercheurs appellent une organisation mathématique de type « modélisation » qui fait la part belle à des validations de type pragmatique ici basées sur l'économie réalisée par le caractère général du modèle algébrique d'un certain type de mouvement.

Cette différence a, en l'occurrence, une répercussion en termes de changements de registres et de congruence des écritures correspondantes entre système et modèle. Dans l'ingénierie basée sur les programmes de calcul, la problématique reste numérique et, comme nous l'avons montré à partir du cas des complexes, les traductions sont non congruentes, le système de notations emmêlant, entre autres, divers statuts du signe « – ». Dans l'ingénierie s'appuyant sur la cinématique, c'est le registre algébrique qui détermine la combinatoire des sens numériques qu'il recouvre, le statut unaire du signe « – » étant encapsulé au départ dans le paramètre littéral.

Globalement, ce parallèle nous a permis de mettre en évidence plusieurs conditions dont l'absence pourrait hypothéquer le bon fonctionnement des extensions praxémiques concernées :

- L'existence d'un système dont les nombres construits constitueront un modèle, système devant être désigné par des jeux de langage et de notations suffisamment consistants surtout pour octroyer au système une valence technologique vis-à-vis des propriétés du modèle à défaut de permettre une traduction congruente entre système et modèle. En effet, comme montré par Mercier (2008), « les jeux de langage [du professeur et des élèves à propos d'un savoir donné] qui produisent les significations nouvelles peuvent s'avérer impossibles, faute par exemple de la disponibilité d'un lexique adéquat et plus généralement faute d'une dialectique disponible entre une notation ou un système de notations et une notion ou un univers cognitif associés. ».
- Celle d'un contrat permettant l'entrée des élèves dans une perspective d'analyse heuristique où, en accord avec le socio-constructivisme des épistémologues, les objets mathématiques sont produits pour satisfaire un projet humain déterminé. Ce contrat doit s'appuyer sur un discours qui rend le projet visible pour les élèves.
- La négociation d'une dialectique entre la construction de ces objets à partir d'objets mathématiques pré-existants, à la manière des intuitionnistes, et l'acception d'un jeu plus formaliste.

Notre propos touche par conséquent au risque dénoncé par Sfard (1991) d'une conception pseudo-procédurale. Il y a bien lieu ici de distinguer virtuosité des élèves à manipuler des calculs sur des nombres relatifs et leur capacité à tenir un discours technologique sur leurs propriétés. Mais il s'agit aussi de freiner en quelque sorte la *métis* des élèves, vite encouragée par une proximité ostensive, en la mettant sous contrôle.

Au-delà de la nécessité d'un cadrage épistémologique large, que notre article illustre nous semble-t-il, il reste un aspect à considérer dans une approche spécifiquement didactique : évaluer le coût des ingénieries concernées en regard de leur espérance en termes de viabilité écologique dans les institutions scolaires. Ainsi, il n'est pas évident pour le professeur *lambda* d'engager ses élèves dans un travail d'analyse, sans doute faute de s'y être déjà essayé pour son propre compte. Plus généralement, la question : « En quoi consiste la production de mathématique ? » semble absente de ce qu'on pourrait appeler une culture de société. De même, la constitution du système et de ses notations adéquates pourrait-elle être jugée trop « onéreuse » en termes de manipulation de symboles et de notions dont la durée de vie scolaire serait peut-être très brève. Une « approche réflexive dans une communauté de pratique d'enseignants » (Parada et al., 2013) devrait ici prendre le relais. A suivre ...

Bibliographie

- BACHELARD G. (1980), *La formation de l'esprit scientifique*, J. Vrin, Paris.
- BOSCH M. & CHEVALLARD Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **19.1**, 77–123.
- BOURDIEU P., CHAMBOREDON J. CL & PASSERON J. CL (1983), *Le métier de sociologue*, 4^e éd., Mouton, Paris.
- BOUVIER A. & GEORGE M. (1979), *Dictionnaire des mathématiques*, PUF, Paris.
- BRONNER A. (1997), Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée », *Recherches en didactique des mathématiques* **17.3**, 55–80.
- BROUSSEAU G. (1998), *La théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- BROUSSEAU G. (2004), Les représentations, Étude en théorie des Situations Didactiques, *Revue des Sciences de l'Éducation* **2**, 241–277.
- CHEVALLARD Y. (1989), Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, *Petit x* **19**, IREM de Grenoble.
- CHEVALLARD Y. (1991), *La transposition didactique – du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **12.1**, 73–112.

- CHEVALLARD Y. (1999), Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **19.2**, 221–265.
- DOUADY R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **7.2**, 5–31.
- DUVAL R. (1995), *Sémiosis et Pensée humaine, Registre sémiotique et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Bern.
- FILLOY E. & ROJANO T. (1984), From an arithmetical to an algebraic thought : A clinical study with 12–13 year olds, in *Proceedings of the Sixth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (Ed. J. Moser), 51–56, Madison, Wisconsin.
- FILLOY E. & ROJANO T. (1989), Solving equations : The transition from arithmetic to algebra, *For the Learning of Mathematics* **9.2**, 19–25.
- Fischbein E. (1987), *Intuition in Science and Mathematics*, Reidel, Dordrecht.
- FLUCKIGER A. & MERCIER A. (2002), Le rôle d'une mémoire didactique des élèves, sa gestion par le professeur *Revue Française de Pédagogie* **141**, 27–35.
- FREUDENTHAL H. (1973), *Mathematics as an educational task*, The Netherlands : Kluwer, Dordrecht.
- GALLARDO A. (1994), Negative numbers in algebra, the use of a teaching model, in *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Eds. J. Pedro da Ponte & J. Filipe Matos), 376–383, Lisboa.
- GALLARDO A. (2001), Historical–epistemological analysis in mathematics education : two works in didactics of algebra, in *Perspectives on school algebra* (Eds. R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins), 121–139, The Netherlands : Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- GALLARDO A. (2002), The extension of the natural–number domain to the integers in the transition from arithmetic to Algebra, *Educational Studies in Mathematics* **49**, 171–192.
- GALLARDO A. & ROJANO T. (1993), Negative solutions in the context of algebraic word problems, in *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (Eds. J. Becker & B. Pence), 121–127, Pacific Grove, CA.
- GALLARDO A. & ROJANO T. (1994), School Algebra, Syntactic difficulties in the operativity, in *Proceedings of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (Ed. D. Kirshner), 159–165, Baton Rouge LA.
- GASCON J. (1993), Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'« arithmétique généralisée », *Petit x* **37**, 43–63.
- GILBERT TH. (1999), *Evolution des concepts d'infini et de continu de la pensée commune aux mathématiques*, Thèse soutenue à l'Université catholique de Louvain.
- GLAESER G. (1981), Epistémologie des nombres relatifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **2.3**, 303–346.
- GODEFROY G. (1997), *L'aventure des nombres*, Odile Jacob, Paris.
- GOLDIN G. & SHTEINGOLD N. (2001), Systems of representations and the development of mathematical concepts, in *The roles of representation in school mathematics – 2001 yearbook* (Eds. A. Cuoco & F. Curcio), 1–23, The National Council of Teachers of Mathematics, Inc, Reston, VA.

- HERSCOVICS N. & LINCHEVSKI L. (1991), Pre-algebraic thinking : Range of equations and informal solution processes used by seventh graders prior to any instruction, in *Proceedings of the Fifteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education II* (Ed. F. Furinghetti), 173–180, Assisi, Italy.
- JANVIER C. (1983), The understanding of directed numbers, in *Proceedings of the Fifth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter II* (Eds. J. Bergeron & N. Herscovics), 295–301, Montréal.
- JANVIER C. (1985), Comparison of models aimed at teaching signed integers, in *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education I* (Ed. L. Streefland), 135–139, Utrecht, The Netherlands.
- JOB P., LICOT A.-F., ROSSEEL H. & SCHNEIDER M. (2014), Comment donner du sens aux nombres relatifs et à leurs opérations grâce à un contexte « concret », *Losanges* **25**, 43–52.
- JOB P. & SCHNEIDER M. (2014), Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of calculus, in *The teaching and Learning of Calculus – In memoriam Arnold Kirsch*, *ZDM The international Journal on Mathematics Education* **46**, Issue 4 (Eds. Chris Rasmussen & Marcelo C. Borba), 635–646, Heidelberg : Springer.
- KIERAN C. (1981), Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies of mathematics* **12**, 317–326.
- KIERAN C. (2001), The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges, *Educational Studies in Mathematics* **46.1–3**, 187–228.
- KÜCHEMANN D. (1981), Positive and negative numbers, in *Children's understanding of mathematics 11–16* (Ed. K. Hart), 82–87, John Murray Publishers Ltd, London.
- LAKOFF G. & NUNEZ R. (1997), The metaphorical structure of mathematics : sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics, in *Mathematical Reasoning : analogies, metaphors and images* (Ed. L. D. English), London : LEA.
- LINCHEVSKI L. & WILLIAMS J. (1996), Situated intuitions, concrete manipulations and the construction of mathematical concepts : The case of integers, in *Proceedings of the Twentieth International Conference for the Psychology of Mathematics Education III* (Eds. L. Puig & A. Guitierrez), 265–280, Valencia, Spain.
- LINCHEVSKI L. & WILLIAMS J. (1998), The situated activity of teaching and learning : the case of integers, in *Situated cognition and the learning of mathematics* (Ed. A. Watson), 143–157, Oxford, UK : Centre for Mathematics Education Research, University of Oxford.
- LINCHEVSKI L. & WILLIAMS J. (1999), Using intuitions from everyday life in "filling" the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers, *Educational Studies in Mathematics* **39**, 131–147.
- MATHERON Y. (2010), *Contribution à l'étude du travail de la mémoire dans les processus d'enseignement et d'éducation*, Note de synthèse pour l'habilitation à diriger des recherches, Université de Provence.
- MERCIER A. (1995), La biographie didactique d'un élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, *Recherches en didactique des mathématiques* **15.1**, 97–142.
- MERCIER A. (1998), La participation des élèves à l'enseignement, *Recherches en didactique des mathématiques* **18.3**, 279–310.
- MERCIER A. (2008), *Une contre-réforme inachevée : que nous apprend l'étude de la transposition didactique des nombres algébriques ou relatifs, ces trente dernières années ?*, Conférence au Séminaire Franco-Italien de Didactique de l'Algèbre (SFIDA), novembre 2008, Nice.
- NEWTON I. (1671), *La méthode des fluxions et des suites infinies*, Blanchard, Paris 1966.

- PARADA S.E., PLUVINAGE F. & SACRISTAN A. I. (2013), Reflexiones en una comunidad de practica de educadores matemáticos sobre los números negativos, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **33.3**, 233–267.
- PELED I., MUKHOPADHYAY S. & RESNICK L. (1989), Formal and informal sources of mental models for negative numbers, in *Proceedings of the Thirteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Eds. G. Vergnaud, J. Rogalski & M. Artigue), 108–111, Paris.
- PUTNAM R., LESGOLD S., RESNICK L. & STERRETT S. (1987), Understanding sign change transformations, in *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* **1** (Eds. J. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran), 338–343, Montréal.
- RADFORD L. (1998), On signs and representations, a cultural account, *Scientia Paedagogica Experimentalis* **1**, 277–302.
- ROSSEEL H. & SCHNEIDER M. (2003), Ces nombres qu'on dit "imaginaires", *Petit x* **63**, 53–71.
- ROSSEEL H. & SCHNEIDER M. (2004), Des nombres qui modélisent des transformations, *Petit x* **64**, 7–34.
- ROSSEEL H. & SCHNEIDER M. (2011), *Ces nombres qu'on dit complexes sont-ils vraiment des nombres ?*, Les Editions de l'Université de Liège.
- SCHNEIDER M. (1988), *Des objets mentaux aires et volumes au calcul des primitives*, Thèse soutenue à l'Université catholique de Louvain.
- SCHNEIDER M. (1991), Un obstacle épistémologique soulevé par des « découpages infinis » des surfaces et des solides, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **11(2.3)**, 241–294.
- SCHNEIDER M. (2001), Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques, A propos d'un enseignement des limites au secondaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **21(1.2)**, 7–56.
- SCHNEIDER M. (2008), *Traité de Didactique des Mathématiques*, Presses universitaires de Liège.
- SCHNEIDER M. (2011), Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel niveau praxéologique ?, in *En amont et en aval des ingénieries didactiques*. (Eds. Margolinas C., Abboud-Blanchard M., Bueno-Ravel L., Douek N., Fluckiger A., Gibel P. et al.), 175–206, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- SCHONS N. J. (1957), *Précis d'arithmétique*, La Procure, Namur.
- SENSEVY G. & MERCIER A. (dir.) (1991), *Agir ensemble : l'action didactique conjointe du professeur et des élèves*, Presses Universitaires de Rennes, Rennes.
- SERFATI M. (2005), *La révolution symbolique*, Ed. Petra, Paris.
- SFARD A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions, *Educational Studies in Mathematics* **22**, 1–36.
- SFARD A. (2001), There is more to discourse than meets the ears : Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning, *Educational Studies in Mathematics* **46 (1.3)**, 13–57.
- SFARD A. & LINCHEVSKI L. (1994), The gains and the pitfalls of reification : The case of algebra, *Educational Studies in Mathematics* **26**, 191–228.
- SFARD A. (2000), Steering (Dis)course between metaphors and rigor : using focal analysis to investigate an emergence of mathematical objects, *Journal for Research in Mathematics Education*, **31.3**, 296–327.

SIERPINSKA A. (1992), On understanding the notion of function, in *The concept of Function*, *MAA Notes* 25, Thompson P. & Dreyfus T. (1988), Integers as transformations (Eds. H. Guershon et E. Dubinsky), *Journal for Research in Mathematics Education* 2, 115–133.

VAN PRAAG P. (2003), Pourquoi des nombres complexes ? Pourquoi des groupes ?, *Mathématique et Pédagogie* 141, 17–38.

VCLASSIS J. (2004). *Sens et symboles en mathématiques, Etude de l'utilisation du signe moins dans les réductions polynomiales et la résolution d'équations du premier degré à une inconnue*, Thèse, Université de Liège, Faculté de Psychologie et des Sciences de l'Education.

M. Schneider

ULg, Département de mathématique, Allée de la découverte 12 (B37),
4000 Sart-Tilman, Belgique,
mschneider@ulg.ac.be

P. Job

ULg, Département de mathématique, Allée de la découverte 12 (B37),
4000 Sart-Tilman, Belgique,
Pierre.Job@ulg.ac.be

Y. Matheron

EA ADEF ; Aix-Marseille Univ.; ENS de Lyon, IFE
13248, Marseille, France
yves.matheron@ens-lyon.fr

A. Mercier

EA ADEF ; Aix-Marseille Univ.; ENS de Lyon, IFE
13248, Marseille, France
alain.mercier@ens-lyon.fr

IRENE FERRANDO, LLUÍS M. GARCÍA-RAFFI, LORENA SIERRA

A PROPOSAL OF ACTION TO INTRODUCE MODELLING IN SECONDARY CLASSROOM

Abstract. The official Spanish program points out the necessity to develop modelling process in real contexts. However, several studies suggest that secondary teachers have difficulties to implement modelling activities in their classes. In this work we present, throughout the description of an experience developed by one of the authors, a proposal of action to introduce modelling in secondary classroom. The final goal of this ongoing work is to design a teaching material that could be easily used by secondary teachers.

Keywords. Beliefs, modelling, classroom experiences, in service teachers.

Résumé. Une proposition d'action pour introduire la modélisation dans l'enseignement secondaire. Le programme officiel d'éducation espagnol insiste sur la nécessité de développer la pratique des processus de modélisation dans des contextes réels. En revanche, diverses études montrent que les professeurs du secondaire ont des difficultés à mener des activités de modélisation dans leurs classes. Dans ce travail on présente, en s'appuyant sur une expérience mise en œuvre dans une classe par un des auteurs, une proposition d'action pour introduire la modélisation dans l'enseignement secondaire. L'objectif final de l'expérience en cours est de développer un matériel didactique utile pour les professeurs du secondaire.

1. Introduction and theoretical framework

Modelling has dominated the human scientific activity since its origin and is deeply related to mathematics. In education, modelling is used to present the main results of science and technology to the students. Usually the process followed to construct the models and to arrive at this depurated knowledge is hidden from the students. However the process of the construction of a model contains very interesting mechanisms that can be used by teachers in order to make sense of different facts of Science. This is especially relevant in the case of mathematics that, immersed in the activity of modelling, appear to be closer to the role of a natural science than being a platonic construction.

During the last thirty years several authors have described mathematical modelling process -see for instance the works of Blum and Niss (1991), Lesh and Harel (2003) or Zbiek and Conner (2006)-. The main purpose of making use of a mathematical model is to tackle problems of the “real world” (or “extra mathematical world”). The modelling process can be divided in several steps: it begins with the interpretation and simplification of a problematic situation (real world problem). If appropriate, real data can be collected to provide more

information about the problematic situation. These data lead to a mathematical problem (mathematical model). Thus, mathematical methods are used to get a mathematical result of the problem. This mathematical result has to be interpreted in relation to the extra mathematical context of the real world problem, thus the solver must validate the model checking if the mathematical solution is reasonable or can be improved. Finally, the solver has to communicate and justify the solution. The entire process of solving a modelling task runs along a series of phases that are reflected in the so-called modelling cycle (Blum et al., 2002). However, this cycle is only a theoretical idealization, since it is not followed in a sequential and unidirectional way (Borromeo, 2006).

In the last years European education policies encourage the introduction of inquiry based learning (IBL) pedagogies in mathematics and sciences (Wake & Burkhardt, 2013). The IBL pedagogy is related to modelling, problem solving or even the use of technology in mathematics. A comparative analysis of French and Spanish secondary programs done by Cabassut and Ferrando (2013) showed that, in particular, modelling appears as a knowledge to be taught (in the sense of the Didactic Transposition, see Chevallard 1985, 1992). However, the changes in the curricula specification or even in the pedagogy that are encouraged in the initial teacher education seem not to be translated in the classroom (Dorier, 2010).

This distance between the official programs and the classroom practice can be explained by the teachers' beliefs. As pointed by Schoenfeld (2010), teachers' knowledge, goals and beliefs have strong effect on their classes because these three aspects are difficult to change. In the same direction Kaiser (2006) remarks that, for German teachers, "their beliefs concerning mathematics must be regarded as essential reasons for the low realisation of application and modelling in mathematics teaching", moreover, she points that innovation required by the curricula can be interpreted by teachers in such a way they fit into their belief system, that is why only the parts of the program that are compatible with the existing beliefs are successfully implemented.

Several studies analyse the obstacles found by teachers when they try to introduce modelling in their teaching practice: "the fear of incompatibility of modelling tasks with the goal of mathematical exactness might be an obstacle for seeing productive learning opportunities in the tasks with higher modelling relevance" (Kuntze, 2011). Another important barrier for implement modelling in classroom relates to the resources; various researches have shown that most of the teachers have difficulties finding or creating didactic material that helps them to change their teaching practice. This can maybe explain the "conservationism" in education pointed by Dorier (2010) because teachers are used to routinize their classes. In consequence, the effective inclusion of modelling in the secondary school classroom entails defining a proposal to be applied in the present situation.

2. Motivation and objectives

The previous results imply that it is necessary to think about how to design a teaching material that can be useful to those teachers who don't feel able to introduce modelling in their classrooms.

Modelling is a tool that is frequently used in science; researchers apply mathematical models to better understand the phenomena that they study. In some cases scientists don't build a new model but they take a known model and they try to adapt it to their situation. We think that this way of work can be exported to the modelling in classroom. That is why our proposal of action includes what we have called "zero model", this means a first model that, in our opinion, could help pupils (and, therefore, teachers) to work with modelling tasks.

Our purpose in this work is to describe an experience done by in-service teacher that is also one of the researchers. This experience is a part of an ongoing research whose objective is to design and to implement a teaching material that could be easily used by teachers without specific formation in IBL, in order to introduce modeling in their classroom. The main objective in this article is to identify the strong and the weak aspects of our proposal of action

The next section is devoted to present the methodology of our research, there we will explain then we will describe the development of the experience in the second section through a quality-descriptive approach. The proposal of action was implement twice: first by one of the authors of this article (who is also a secondary teacher) and then, by two in-service teachers who were not familiar with modelling. The results of both experiences will be explained in the fourth section.

3. Methodology

This research has two differentiated parts: first we have designed a teaching material and then we have implemented it in order to investigate if this material can effectively be used by a teacher that is non-experienced in modelling.

3.1. Teaching material

The first part of the research corresponds to the design of the teaching material that will be implemented in a secondary school classroom. In the following we describe general aspects have been considered in the design process. In section four we will give particular details about one of the activities that was conducted during the experience.

For us, following the theoretical framework showed at the introduction, a modelling practice is an activity which start point is a real situation. The objective of a modelling practice is to introduce new mathematical concepts that emerge during the resolution process of the real problem.

In our experience, the modelling practice will be an activity conducted in small groups of two or three students. In fact, we think that this allows the collaboration between them to deal with the problem, that is, our experience fosters the cooperative work (E.F. Barkley and others 2007). This way of working gives pupils the option to discuss different points of view, compare their results and draw conclusions together, thereby facilitating the integration of students with different academic and cultural levels. The work groups are formed freely, depending on the own choice of students.

For the development of the activity, we have designed the following material:

- A teacher's guide where it is described how to implement the specific modelling practice. The reason for giving this teacher's guide is based on the conclusions stated in the first part of the paper. This teacher's guide is similar to the material used by teachers for traditional lessons: we provide fundamental guidance to develop and to evaluate the practice.
- A student's guide, where a "zero model" is described. This initial model is the starting point of the modelling practice. The purpose of this preliminary model is, from one hand, to help students to face the real problem and to give them the first mathematical tools that are necessities to solve it. On the other hand, this "zero model" can be useful for those teachers that are not used to teach through modelling. More details about the role of this "zero model" will be explained later.

Modelling practices are organized throughout four different types of sessions: collective sessions, tutorial sessions, group sessions and oral presentations. The collective sessions are held during school time, every week during two months, and all students are present. In these sessions, the teacher answer general questions that arise in one group but can be of interest to the rest of the class -otherwise, the question will be answered only to this group-. One of the goals is to promote the collaboration and the debate between the different groups. The objective is also to create a weekly routine, that is, every week the students have to devote time to the modelling practice and also they have a common space with the teacher and their fellows to solve any problems that could arise. The whole sessions take place either in the classroom or in the computer room, where students can look for information and also ask questions that arise when they are using different computer programs.

Tutorial sessions take also place during school time, where every group works together with the teacher that acts only as a supervisor if help is required. At these sessions each group must show to the teacher the state of work and can ask about the doubts or about of which is the approach they could give to the problem. Thus,

if the group is stuck, the teacher can help them to consider possible ways to solve the problem.

Group sessions are held after school, that is, each group meets when they want and in some place chosen by them. The work developed by students in these sessions is difficult to be traced, that is why each group is provided at the beginning of the modelling practice with a diary. In this diary, the group members have to register how many times they have met, who was present in each session and some details about the subjects treated, the produced ideas, the debate inside the group, etc. The delivery of this diary is compulsory for all groups and will allow the teacher to guide the group during development of the practice and also to evaluate the final result.

The last part of the modelling practice corresponds to an oral presentation of the results. This session plays an important role in our modelling practices. The main goal is to give students the opportunity to show the work they have done. This session is carried out in the computer lab or in any classroom with media. The teacher and the rest of the students are present. Each group has about ten minutes to make their presentation. The rest of the students can ask questions at the end of the presentation and the members of the team have to answer them. The teacher acts as a chairman. The main goal of these sessions is to give the opportunity of students of arguing the conclusions and defending the results.

3.2. Research material

The second part of the work corresponds to the analysis of the implementation of the modelling practice. The teaching material described in previous subsection was implemented in two phases. First, during the year 2012, one of the researchers that is also a secondary school teacher, launch the proposal of action with a group of 9th grade students. Then, during the years 2013 and 2014 two different teachers were provided with the teaching material in order to use it also in two groups of 9th grade students. It is important to recall that this work is a part of an ongoing research. That is why, in this article, we will not completely develop the analysis of both experiences. We will mainly focus on some aspects that can help to obtain a preliminary evaluation of our proposal of action.

In order to describe and analyze the experiences the following material is available:

- Teacher's diary which includes all the notes taken by the teacher during the collective and tutorial sessions. These notes can be related to the work of the students and also to the teaching material.
- Working group diary, where the students summarize the work done during the group sessions (held out of the school time).
- Video recordings of the oral presentation.

- Final work presented in paper by the students.

In the following section we will describe the development of one of the modelling practices during the first phase of the experience, in order to give a more detailed explanation of our proposal of action.

4. Description of an experience

In this section, we introduce the experience based on a modelling practice carried out in a 9th grade class in the region of Comunidad Valenciana in Spain. As we claimed in the previous section, the objective of the modelling practice is to use modelling to introduce new mathematical concepts. In the present experience, the mathematical concept of function is on the basis of all the real problems presented to the students for modelling. Functions are present in all courses of compulsory secondary education. During grades 7 and 8, we start with the construction of tables of values and the interpretation of data and graphs, and in grades 9 and 10 students deal with the study of nonlinear functions and their interpretation in the real world.

Some aspects of the experience have been already explained at section 2.1. Here we begin with a general description of the experience and, then, we will give details of a particular modelling practice.

The first session of the experience is developed in classroom and is devoted to the formation of working groups and the presentation of four different modelling practices. All the modelling practices are related with the same mathematical concept but they differ in the real situation that leads to the real problem. During this first session each working group will decide which will be the modelling practice that they will work in.

Once every group has chosen a modelling practice, the teacher gives students the corresponding practice's guide. This is a document where the work they have to develop is described, they can find the necessary material to start the job and it is included the development of a "zero model" or first stage model. With this material, they have to get familiar with the mathematical language, understand the information contained and try to deduce how it has been gathered. To summarize, in this first phase, they have to reproduce and interpret data and results contained in the guide. This will help them to understand a simple example. Then we ask them to create a new model, either applying the one showed in the practice's guide, considering new data or observations or even creating another one totally different but inspired by the previous one.

The completion of the task concludes with a presentation of a document that is a report about the model and an oral presentation by the group members where they show to the rest of students their model and the achieved results. For the

development of these practices, students know how the activity is going to be evaluated since we give them a table where the items considered are listed.

We will illustrate this general description through one of the modelling practices that was proposed in the experience. We have chosen this practice because it was solved by one group of students during each phase of the experience.

4.1. Practical example

We show below the description of one of the modelling practices entitled "Footprints and mathematics" that is inspired by a task proposed in a PISA test (item 1 in 2009 test).

The starting point – the real situation or real problem– of the task is the question “how long a human step is?” and students have to work contents related to linear functions (concept of variable, linear dependency, parameters, etc). This is an open task in the sense that, from the starting point, students should consider other issues and learn how to solve them using the tools they judge necessary.

The task begins with some open questions to arouse curiosity of the students. Some of the questions are, for example: What is the length of your footstep? How many paces can you walk in a minute? How fast are you? These questions are often difficult to answer a priori. That is why, before beginning the modelling task, some ideas and specific easier questions are presented to them. The following table presents real data. It is important to note that the table shows different variables: weight, height, gender and number of steps but students have to decide which of them are relevant.

	Weight (kg)	Height (m)	Age (years)	Number of paces in 10 meters				
Woman	65	1,67	36	13	14	13	13	13
Man	75,7	1,82	35	14	15	13	15	13
Child	26,6	1,28	6	16	17	15	15	16

Table 2: Data extracted from a real experience realized by one of the authors with her own family

Step by step the teacher explains in this “zero model” how to obtain the average length of the step of the woman whose data appear in the table. Then, the pupils have just to apply the same reasoning in order to obtain the lengths of the steps of the man and child. After this short introduction some questions arise: How far can walk women in 10 steps, and in 15 steps, and in 20 steps? At this time students have to distinguish two variables: one independent (the number of steps) and one dependent (distance travelled) and also one parameter: the length of one step. To

visualize the relationship between the variables and the parameter, the teacher asks them to build up a table of values and a graph. Once they have understood the calculations, the table and the graph, students are able to reproduce these calculations with the data provided in the case of the man and the child. After completing this section based on the table other questions arise. For example: “What kind of function have you obtained in each case?”, “Give a mathematical expression that relates the number of steps to the distance travelled.”, “Who is the fastest?”, “Why?” At this point students just have to understand and use the “zero model”. They are not still modelling by themselves, but they are just doing what researchers use to do in science: take a simple model and try to fit it in order to understand a real situation.

Once they have understood the example, the process of developing the modelling task starts. At the beginning, in general, all groups try to repeat the above process using data they have collected by themselves. In order to arouse them to investigate other ways to find the length of a step, the address of several web sites are provided. Therefore they can observe that there is not only a unique valid method for this calculation, in fact they can try to create their own method. Once each group has obtained the step length of each group member, the teacher suggests them to use these data to calculate both distances and speeds. At this point it is important to compare both the estimate and the real measured distances so that they can see how small errors are amplified. It is interesting to notice that, at this moment the students begin to get away from “zero model”, they find other real problems related with the real situation and they will try to solve them using their own strategies.

The end of the work corresponds to some proposals that the workgroups have to choose, for example: to make a study about the pedometers (how they work, what variables are introduced, etc) or conduct research on the relationships that may exist between the length of the footstep and the length of the leg or arm. This section is clearly the most open, since the students have to decide what issues arise from the initial problem.

The task ends whenever each group make an oral presentation of the work to their classmates and teacher but the final mark is based both in daily work, contained in the student’s diary, in a written work and in the oral presentation.

5. Results

In this section we describe the result of the experience in two directions: from one hand we will show what the students did during the resolution of the modelling task previously described, and on the other hand we will comment how different teachers used our teaching material.

5.1. From student's productions

We will present a qualitative description of the results based on the production of the students. We are particularly interested in showing what students are able to do from the “zero model” given at the beginning of the modelling practice.

When students faced the modelling practice “Footprints and mathematics” they did not have difficulties to understand the “zero model”. In fact, they were able to understand the variables given in the real data /weight, height, age, number of paces, the length of one step and the distance travelled, and they distinguished the differences between them. They realized that there is some relation of dependence between the variables.

At this stage, some students tried to obtain an estimate of the length of a foot step by average, counting the number of paces done walking 10m and 20m. This is very interesting because it shows that pupils were able to relate two variables and, moreover, they tried to avoid the experimental error of measuring only one step by using an average.

Other students tried to go further searching for relation between basic human body proportions and the length of a step. This shows that, through the “zero model” they had the intuition of the relation between the height of a person and the length of the step. In order to find the relation they performed experimental measures and also they used Internet. Thus, they conclude that the pace's length of a person corresponds to half the distance of the eyes to the soles of the feet. This shows how the “zero model” has served as basis to obtain a more accurate model of the situation.

Finally, a group of students tried to adapt the methodology learned in the work to other physical activities like running or swimming. The interest of this remains in the fact that students understand a real situation, obtain a mathematical model of the real situation and, then, they try to extrapolate this model to other similar situations. This is exactly the same that happens sometimes in scientific research and we consider that it is a valuable aspect of this experience.

We consider that it is also important to show the reactions of the students after finishing this task. In fact, the students that took part in this experience were not used to face this kind of activities, at least in mathematics classroom. The first part of the modelling practice was similar to the activities they are used to, but when they ask them to go further trying to building their particular model of the real situation, they were, in some cases, lost. At this point it is very important to consider the role of the teacher that implement the modelling practice: if the teacher is not able to guide the students working by themselves, they have serious difficulties to go further. This aspect will be developed in the next section. In the

following lines we show some examples of the comments of some of the pupils that attended to the experience:

- Ana: "I loved the task because I discovered interesting things and it taught us to apply mathematics to everyday things as simple as walking. The work was also too heavy because it required many hours of effort we suffered a lack of time."
- María: "This is an interesting task since we learned things and we learned how to apply mathematics to simple act of walking or swimming. I had fun despite the conflicts that have occurred in this work both in the classroom and in the group. Despite this I liked."

These are only two particular comments but, in general, we have observed that, from students' point of view, it seem motivating to deal with these modelling practices.

5.2. From teacher's point of view

Has we have explained in section 3.2., the modelling practice was implemented in two phases. First, one of the authors that is also secondary school teacher experimented the modelling practice in a 9th grade classroom. Then, in s second phase, two secondary school teachers used the same teaching material to work in their classes. This secondary phase has a great importance for this ongoing work because, in fact, our final objective is to design a teaching material that can be used by those teachers that are not really familiar with modelling.

We just make a preliminary analysis of the second phase of the experience here because, in order to get definitive conclusions, we need to increase the number of teachers that use our modelling practice. In any case, we have already observe some interesting things.

Both teachers that used our teaching material had any problem to implement the first part of the modelling practice, the one that corresponds to the "zero model". In both cases, the teachers were able to make students aware of the different variables that appear in the real situation and the relations therein.

Nevertheless, one of the teachers was not able to manage the work of the students' group in order to build their own models. This aspect is important because, from one hand, it shows the great importance of the first part of the practice, the "zero model" and, on the other hand, it manifest that we have to give a more accurate guide for help teachers to run the second part of the modelling practice.

Conclusions

Several studies show that even modelling is included as knowledge to be taught in official programs of secondary education (in particular in Spain), teachers find huge problems to introduce modelling in their classes. A way to bridge this gap between the programs and the real classroom practice is to propose materials that are easily implementable by teachers.

Our approach is different from other similar (as activities from LEMA project) in the sense that, besides proposing real life problems, it provides students previous knowledge, a “Zero Model” that they can adapt, extend and use to test their own hypotheses. Our methodology tries to mimic the activity of research teams in science as the natural way for the discovery and research, in the sense that the starting point is the knowledge achieved previously by other groups and researchers. This methodology, in our opinion, does not detract the student’s initiative and creativity, moreover, it is inclusive in two aspects: first, regarding student’s diversity (social, cultural, knowledge, etc.) and second, in the sense that it connects more effectively with classical methodologies (lectures, problem sessions, etc) which are customarily followed in the classroom.

From the results of the experiences done until the moment of writing this paper, we conclude that the teaching material based on modelling practice seems motivating for students and help them to learn abstract concepts such as the concept of function, variable or dependence. However we have also realize that, if we want to make a teaching material that is completely useful for teachers that are unaware of modelling, we must try to improve the instructions to deal with the second part of the modelling practice. In summary, zero model seems to be a useful tool to promote in students the modeling, especially in the aspect of being able to generate their own model and to extrapolate it from one real situation to another similar. This “zero model” results also useful for teachers in order to implement the activity in classroom but it results insufficient for helping them to deal with beyond this initial model itself.

Bibliography

- BARKLEY, E. F. ET AL. (2007), *Técnicas de aprendizaje colaborativo*, Ed. Morata, Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid.
- BLUM, W., & NISS, M. (1991), *Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. – State, trends and issues in mathematics instruction*, Educational Studies of Mathematics, 22.1, 37-68.
- BLUM, W. ET AL. (2002), *ICMI STUDY 14: Applications and modeling in mathematics education-Discussion Document*, Educational Studies in Mathematics, 51, 149-171.
- BORROMEO, R. (2006), *Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process*, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38(2), 86-95.
- CABASSUT, R., & FERRANDO, I. (2013), Modelling in French and Spanish programs of secondary education, dans *Proceedings of the 8th Congress of European society for research in mathematics education*, Antalya, Turkey.
- CHEVALLARD, Y. (1985), *La transposition didactique: du savoir savant au Savoir Enseigné*, Ed. La pensée Sauvage, Grenoble.
- CHEVALLARD, Y. (1992), *Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 12(1), 73-112.
- DORIER, J.-L. (2010), *International synthesis report comparing national contexts, pointing out differences, commonalities, and interesting resources and initiatives proper to be adapted to an international use*. <http://www.primas-project.eu/servlet/supportBinaryFiles?referenceId=4&supportId=1247> Accessed 05 June 2015
- KAISER, G. (2006), The mathematical beliefs of teachers about applications and modelling. In: Novotná, J. et al. (Eds.): *Mathematics in the centre. Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Volume 3. Prague: Charles University, 393-400.
- KUNTZE, S. (2011). In-Service and Prospective Teachers' Views About Modelling Tasks in the Mathematics Classroom – Results of a Quantitative Empirical Study. In G. Kaiser et al. (eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 279- 288). New York: Springer. Doi: 10.1007/978 94 007 0910 2.
- LESH, R. & HAREL, G. (2003), Problem solving, modelling and local conceptual development, *Mathematical thinking and learning* 5.2-3, 157-189.

OECD (2010), *PISA 2009 Results: What Students Know and Can Do – Student Performance in Reading, Mathematics and Science (Volume I)*. Retrieved from: <http://dx.doi.org/10.1787/9789264091450-en>, accessed 5th June 2015.

SCHOENFELD, A. H. (2010), *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. New York:Routledge.

WAKE, G. D. & BURKHARDT, H. (2013), *Understanding the European policy and its impact on change in mathematics and science pedagogies*, *ZDM Mathematics Education*, 45, 851-861.

ZBIEK, R. M., & CONNER, A.(2006), Beyond motivation: exploring mathematical modelling as a context for deepening students' understandings of curricular mathematics, *Educational Studies of mathematics*, **63-1**, 89-112.

Official Documents

BOE nº192 (1971). ORDEN de 8 de julio de 1971 sobre actividades docentes de los Institutos de Ciencias de la Educación en relación con la formación pedagógica de los universitarios, 13170.

BOE nº155 (1993). RD850/1993 Real Decreto de 4 de junio, por el que se regula el ingreso y la adquisición de especialidades en los Cuerpos de Funcionarios Docentes a que se refiere la Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo, 19924-19941.

BOE nº226 (1993). Orden de 9 de septiembre de 1993 por la que se aprueban los temarios que han de regir en los procedimientos de ingreso, adquisición de nuevas especialidades y movilidad para determinadas especialidades de los Cuerpos de Maestros, Profesores de Enseñanza Secundaria y Profesores de Escuelas Oficiales de Idiomas, regulados por el Real Decreto 850/1993, del 4 de junio, 27400-27438.

BOE nº106 (2006). LEY ORGÁNICA 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, 17158-17207.

BOE nº174 (2007). ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria, 31680-31828.

BOE nº 312 (2007). ORDEN ECI/3858/2007, de 27 de diciembre por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

IRENE FERRANDO

Dpto. de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Valencia
Facultad de Magisterio, Avda. Tarongers, 4, 46022, Valencia, España
irene.ferrando@uv.es

LORENA SIERRA

IES Vila de Aspe
Calle Cantal de Eraes s/n, 03680 Aspe, España
sierragaldon@gmail.com

LLUIS MIGUEL GARCIA-RAFFI

Instituto Universitario de Matemática Pura y Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia
lmgarcia@mat.upv.es

LE CONTRÔLE EXERCÉ EN ALGÈBRE : CONCEPTUALISATION ET ANALYSES EN RÉOLUTION DE PROBLÈMES

Abstract. Self-control engaged in algebra: analyze of students' productions and a clarification on their conceptualization. Part 1: problem solving. Our reflection takes its roots, first in a theoretical analysis of what constitutes an activity of control when doing mathematics and, on the other hand, in an empirical study conducted on a group of secondary students (14 -15 years). A written questionnaire on various components of algebra, supplemented by individual interviews with some students, forms the basis of the experiment. We examine here more specifically two items of this questionnaire, which proved particularly rich for the analysis. Data analysis reveals many facets about the control activity exercised by the students throughout the process, shedding new light on the conceptualization that we had been able to establish after theoretical analysis.

Résumé. Notre réflexion prend son ancrage, d'une part, dans une analyse théorique de ce que recouvre l'activité de contrôle en mathématiques et, d'autre part, dans une étude empirique conduite auprès d'un groupe d'élèves de secondaire (14-15 ans). Un questionnaire écrit portant sur différentes composantes de l'algèbre, complété par des entrevues individuelles avec quelques élèves, forme la base de l'expérimentation. Nous revenons plus spécifiquement ici sur deux problèmes de ce questionnaire, qui se sont avérés particulièrement riches pour l'analyse. Les multiples facettes qu'ils nous révèlent de l'activité de contrôle exercée par les élèves, tout au long du processus, apportent un éclairage nouveau sur la conceptualisation que nous avons pu établir après analyse théorique.

Mots-clés : contrôle, algèbre, résolution de problèmes, sémantique, syntaxique, anticipation, vérification, perception des erreurs, contradiction, engagement réfléchi.

Introduction

En didactique des mathématiques, quelques chercheurs se sont intéressés au contrôle¹ exercé sur l'activité mathématique, et au rôle fondamental qu'il joue dans la résolution d'une tâche par les élèves, que cette dernière ait trait à la résolution de problèmes (Schoenfeld, 1985, Richard, 1990/1998), aux aspects opératoires liés au calcul (Chaachoua, Nicaud et Bittar, 2005; Artigue, 1993) ou au travail sur les concepts mathématiques (Balacheff et Gaudin, 2002, 2010). Ce contrôle pourrait bien être un enjeu clé de l'apprentissage des mathématiques comme le montrent les

¹ Nous préciserons cette notion de contrôle plus loin. Étymologiquement le terme de contrôle (*contre-role*) renvoie à une idée de « vérification », de registre tenu en double pour la vérification d'un autre.

études portant sur la vérification ou la validation, des processus auxquels ce contrôle est souvent associé (voir notamment Coppé, 1993 ; Margolinas, 1989 ; Chevallard, 1989 ; Balacheff et Gaudin, 2002, 2010).

En algèbre, domaine plus spécifiquement ciblé dans cet article, les difficultés rencontrées par les élèves au regard de la signification du symbolisme (Bednarz et Dufour-Janvier, 1992 ; Booth, 1984), de la manipulation d'expressions algébriques (Matz, 1982 ; Sleeman, 1986 ; Lee et Wheeler, 1989), de la résolution d'équations (Bednarz et Dufour-Janvier, 1992 ; Margolinas, 1989, 1991 ; Chevallard, 1989 ; Lemoyne, 1989), de systèmes d'équations (Sfard et Linchevski, 1994), ou encore de la résolution de problèmes (Lochhead et Mestre, 1988 ; Bednarz et Dufour-Janvier, 1994) interrogent le contrôle que l'élève exerce sur cette activité algébrique. L'apprentissage de l'algèbre semble ici se heurter, en lien avec différentes tâches, au problème du sens attribué à cette résolution par l'élève. Le contrôle exercé par les élèves dans ce domaine apparaît ainsi un enjeu clé à prendre en compte.

Mais que sait-on de ce contrôle exercé sur l'activité mathématique ? Plus spécifiquement en algèbre ? Comment se caractérise-t-il ? Quelles en sont les manifestations ?

Différents travaux, en lien avec la résolution d'équations (Margolinas, 1989, 1991), la validation d'expressions algébriques (Mary, 1999) ou la résolution de problèmes² (Schmidt, 1994 ; Schmidt et Bednarz, 1997), mettent en évidence des situations susceptibles de forcer un tel contrôle : des questions venant par exemple interroger le sens de l'équation et de ce que veut dire résoudre une équation (Margolinas, 1989, 1991 ; Bednarz et Dufour-Janvier, 1992)³, des éléments qui confrontent la validation d'expressions générales (Mary, 1999 ; Lee et Wheeler, 1989). Certains de ces travaux permettent par ailleurs d'identifier deux types de contrôle à l'œuvre en algèbre, notamment en résolution de problèmes, un contrôle sémantique et syntaxique. Ainsi certaines difficultés dans le passage arithmétique-algèbre peuvent être mieux comprises à travers la nature du contrôle exercé dans les deux domaines : la résolution arithmétique avance en prenant appui sur des grandeurs connues et des significations contextuelles, alors que la résolution algébrique doit prendre appui sur des critères autres pour juger de la validité des raisonnements mis en place (nous revenons plus loin sur cette distinction).

Nous nous sommes intéressés de plus près à ce contrôle, et avons cherché à en clarifier davantage les contours. Nous revenons sur cette conceptualisation, issue

² Ces travaux ont cherché à clarifier les continuités et discontinuités dans le passage arithmétique algèbre dans un contexte de résolution de problèmes (Bednarz et Janvier, 1996).

³ Le questionnaire (présenté plus loin) reprend certains de ces items.

d'une analyse de différents travaux de recherche (section 1). Après avoir défini les objectifs de cette étude et ses aspects méthodologiques (section 2), nous dégagons les différentes manifestations de contrôle mises de l'avant par les élèves dans deux tâches touchant à la résolution de problèmes (section 3). Cette expérimentation fait partie d'un projet de recherche plus large, mené en collaboration avec une enseignante du secondaire, centré sur l'élaboration d'une intervention didactique visant le développement du contrôle chez les élèves (voir Saboya, 2010). Nous revenons dans cet article sur l'étude préliminaire à celle-ci, qui a permis de mieux comprendre les manifestations de contrôle par les élèves, et ce avant toute intervention⁴. Ces résultats nous permettent en retour d'enrichir notre conceptualisation du contrôle, en ouvrant sur de nouvelles perspectives (section 4).

1. Une conceptualisation du contrôle sur l'activité mathématique

Ce qu'on appelle contrôle en mathématiques a été notamment abordé sous l'angle de la métacognition et du regard exercé sur le processus de résolution (Schoenfeld, 1985), du recours à des méta-connaissances dans le traitement de situations mathématiques (Robert, 1993 ; Artigue, 1993)⁵ ou encore de la notion de conception (Balacheff et Gaudin, 2002, 2010). Dans ce dernier cas, en partant de préoccupations liées à la modélisation des connaissances des élèves, et notamment du rôle que joue la validation, Balacheff et Gaudin (2002, 2010) proposent une formalisation de la notion de conception (le modèle cK ϕ) dans laquelle apparaît la notion de contrôle. En s'inscrivant dans la lignée de Vergnaud (1991), Balacheff et Gaudin caractérisent une conception par un triplet – une classe de situations-problèmes qui donnent du sens au concept, un ensemble d'opérateurs construits par le sujet dans ces situations, nécessaires pour réaliser les actions, et un ensemble de signifiants associés qui supportent les actions dans cette situation – auquel il ajoute une structure de contrôle sous-jacente aux prises de décision lors de la résolution. Cette formalisation permet de rendre compte de la complexité d'une acquisition conceptuelle, et notamment, du point de vue de l'observateur, de l'efficacité locale d'une certaine connaissance-en-acte. La notion de contrôle apparaît donc ici fortement liée à une construction conceptuelle par l'apprenant : « *the criteria which allow one to decide whether an action is relevant or not, or whether a problem is solved, is a crucial element in understanding a mathematical concept* » (Balacheff et Gaudin, 2010, p. 16) (voir notamment sur le concept de fonction, Balacheff et Gaudin, 2002, 2010, sur les équations et inéquations de degré 1 et le travail formel

⁴ Ce point de départ nous a permis par la suite de mieux comprendre l'évolution des élèves tout au long de l'expérimentation à l'égard du contrôle qu'ils exercent sur l'activité mathématique.

⁵ Cette dernière dimension est une des composantes reprise dans notre conceptualisation du contrôle (voir Saboya, 2010).

en algèbre, Chaachoua, Nicaud et Bittar, 2005). Par la manière dont Balacheff et Gaudin caractérisent cette structure de contrôle, composée de tous les moyens qui permettent de faire des choix, de prendre des décisions et d'exprimer un jugement, sa caractérisation se rapproche de notre propre conceptualisation de l'activité de contrôle, telle que nous la développerons par la suite. Notre idée du contrôle est toutefois plus générale que celle associée à une construction conceptuelle (à une conception liée à un ensemble de problèmes, d'opérateurs et de signifiants), elle cible le processus de résolution de l'élève dans différents types de tâches (et non les conceptions qui s'y construisent) et s'intéresse au contrôle exercé sur ce processus, contrôle pouvant amener éventuellement à la réussite de la tâche⁶.

Que sait-on des contours de cette activité de contrôle exercée par l'élève ? Dans le passage à l'algèbre, comme nous l'avons montré ailleurs (Bednarz et Saboya, 2007), deux types de contrôle sont en jeu : un **contrôle sémantique** qui va s'appuyer par exemple en résolution de problèmes, dans la phase de mathématisation, sur une compréhension des relations entre les données et des notations symboliques associées. Celle-ci requiert « un contrôle sémantique s'articulant sur une signification contextuelle des grandeurs en présence, des relations et des transformations » (p. 148). Cette mathématisation va solliciter, chez l'élève, un ensemble de productions sémiotiques intermédiaires (reformulation de la relation, ordre de grandeur des quantités et de la relation, notations intermédiaires...) qui lui permettent d'organiser et de se construire une représentation des grandeurs et de leurs relations. En ce sens, par les multiples activités intermédiaires qu'elle sollicite, cette mathématisation est le témoignage de ce contrôle sémantique⁷. Au moment de la résolution, un autre type de contrôle

⁶ Nous rejoignons Balacheff sur le fait que le contrôle n'amène pas nécessairement l'élève à la réussite. Pour ce chercheur en effet, la réussite fonctionne seulement dans l'ensemble des problèmes où la conception a été construite. Pour nous, une réussite dans la tâche, pensons par exemple à la résolution de l'équation $x + x/4 = 6 + x/4$, peut être accompagnée de certaines manifestations de contrôle, par exemple syntaxiques (utilisation de règles de transformation des expressions et de transformation de l'équation permettant de garder l'égalité vraie), sans que pour autant il n'y ait engagement réfléchi dans ce processus de résolution, qui dans ce cas devrait mener à voir vite $x=6$. Il peut ainsi y avoir réussite, ou réussite partielle sur certains aspects, sans que cela ne manifeste un contrôle global de l'activité de la part de l'élève.

⁷ Ainsi la relation « il y a 6 fois plus d'élèves que de professeurs », conduisant souvent à une erreur du type $6E=P$ (Lochhead et Mestre, 1988) dans le processus de symbolisation, sollicite une reformulation de la relation en termes numériques (par exemple « le nombre d'élèves est 6 fois celui des professeurs »), une idée de l'ordre de grandeur de chacune de ces quantités, une image mentale de cet ordre de grandeur et de leur relation ; elle peut s'appuyer sur des représentations intermédiaires (par exemple Nombre de professeurs : I, nombre des élèves : IIIII ou encore une illustration par des segments l'un sous l'autre)

est en jeu : « la résolution s'appuie sur un travail sur des expressions algébriques, qui a une certaine signification bien sûr, mais dans un autre registre (des transformations sur des quantités sont ici effectuées de manière à conserver l'égalité) » (p. 148). Cette distinction entre contrôle *sémantique* et *syntactique*, reprise dans d'autres domaines⁸, est une dimension centrale de la conceptualisation du contrôle en algèbre. Elle demeure toutefois très globale. Une analyse de différents travaux de recherche en didactique des mathématiques (non nécessairement spécifiques dans ce cas à l'algèbre) nous a permis d'aller plus loin et de dégager différentes composantes qui relèvent de ce que nous pourrions appeler un contrôle sur l'activité mathématique : un certain type d'engagement dans la tâche, une certaine manière de faire face aux erreurs, un certain regard sur la démarche, la réponse, etc. Une conceptualisation du contrôle en émerge.

Avoir du contrôle se traduit ainsi, pour certains auteurs, par une *anticipation*, et ce avant toute résolution, une anticipation définie souvent comme une estimation de l'ordre de grandeur du résultat (Cipra, 1985). Coppé (1993) va plus loin et élargit cette caractérisation, en précisant que l'anticipation ne relève pas seulement d'une estimation de l'ordre de grandeur mais d'une analyse préalable des propriétés que devra posséder le résultat. Il s'agit ainsi de poser une condition de validité du résultat avant de le connaître. Cette anticipation va souvent conduire à une vérification par la suite (au regard de ces conditions de validité du résultat posées a priori). On retrouve là une autre composante du contrôle mise en évidence dans les recherches, notamment celles portant sur la résolution de problèmes (Richard, 1990/1998).

Cette *vérification* est associée au retour sur la solution trouvée. D'un point de vue méthodologique, elle se retrouve ainsi chez Polya (1945/1965) dans « [l'examen] de la solution obtenue » et chez Mason (1994) dans ce qu'il appelle « la révision ». D'un point de vue interne à l'élève, le contrôle se manifeste par une vérification de la solution trouvée et de la démarche adoptée. Pour Richard (1990/1998), cette vérification prend place après l'exécution, et peut conduire à la découverte d'incohérences entre la solution trouvée et d'autres informations données dans le problème, ou encore à un sentiment pour le solutionneur d'avoir épuisé l'espace de recherche et d'arriver ainsi à une impasse. Autrement dit, la vérification peut conduire à une remise en cause de la représentation construite dans un premier

permettant de contrôler davantage cette mathématisation et le processus éventuel de symbolisation.

⁸ Brousseau l'introduit par exemple en 1986 à propos de la théorie des ensembles : « Pour éviter les erreurs, il ne suffit pas d'appliquer des axiomes, il faut savoir de quoi on parle et connaître les paradoxes attachés à certains usages pour les éviter. Ce contrôle [sémantique] diffère assez du contrôle mathématique habituel, plus « syntaxique ». (Brousseau, 1986, p. 43).

temps, à l'abandon de celle-ci et à la construction d'une autre représentation. Pour Coppé (1993), un élève qui vérifie est un élève qui se questionne sur le caractère vrai/faux du résultat. La vérification implique ainsi un retour sur ce que l'élève a produit. Coppé distingue deux types de vérification, celle qui porte : i) sur le résultat lui-même ; et celle qui porte ii) sur la méthode qui a permis d'arriver à ce résultat et donc sur les critères de choix de cette méthode. Comme Cipra (1985), pour Coppé, vérification et anticipation peuvent aller de pair, la vérification s'effectuant suite à une anticipation déçue.

C'est cette même idée d'un retour sur la démarche que l'on retrouve dans l'analyse du travail du mathématicien (Hadamard, 1945/1975), cette vérification lui permettant de détecter les erreurs (notamment de calcul) qui peuvent être fréquentes et proviennent d'une incertitude, et lui permettant de dépasser le doute. Ce travail de détection des erreurs présent chez les mathématiciens met de l'avant, on le voit dans ce qui précède, une autre composante du contrôle reliée à la **perception des erreurs**. Cette activité de retour sur les erreurs part d'un doute face à la véracité d'un résultat et passe par la question « est-ce que la réponse a un sens? » (Cipra, 1985). L'auteur montre qu'il y a de nombreux moyens de savoir s'il y a une erreur dans le raisonnement, sans savoir pour autant où cette erreur se trouve ni de quel type d'erreur il s'agit. Le questionnement sur le sens de la réponse, l'anticipation de l'ordre de grandeur, le recours à d'autres registres permettant de revenir sur un raisonnement et contribuent éventuellement à dépasser le doute.

Tout aussi important, la **sensibilité à la contradiction** apparaît également une composante centrale de ce contrôle sur le processus de résolution, permettant de revenir sur ce qui est avancé. Les travaux de Piaget (1974), Kargiotakis (1996) et Hitt (2003) se sont intéressés à cette sensibilité à la contradiction et à son dépassement. Cette sensibilité s'exprime souvent chez l'élève par un sentiment de déséquilibre ou de « malaise » (Hitt, 2003, p. 260), par un conflit ressenti (Piaget, 1974) entre une anticipation et un certain résultat non attendu. Pour qu'il y ait un **dépassement de la contradiction**, une action doit être entreprise par l'élève pour rétablir l'équilibre et dépasser ainsi le conflit ressenti. Piaget fait une distinction entre la sensibilité à la contradiction et son dépassement. Ainsi plusieurs élèves sont conscients de l'existence d'une contradiction mais n'arrivent pas à la dépasser, ce dépassement exigeant « un effort supplémentaire de réflexion rétroactive » (Piaget, 1974, p. 11-12)⁹.

⁹ Cette conceptualisation rejoint en partie celle de Balacheff et Gaudin (2010) dans la mesure où elle prend appui sur une idée de déséquilibre/ré-équilibre : « *the first reason d'être of the notion of conception is the need to conceptualize the specific states of equilibrium achieved by the subject/milieu system satisfying some viability constraints of a situation* » (p. 11). Nous nous intéressons aux perturbations manifestées par le sujet, à ces

D'autres composantes du contrôle ont également été mises de l'avant en lien avec le processus de résolution lui-même. Ainsi, l'**engagement réfléchi** s'appuie sur une prise de distance, un arrêt devant le problème avant, en cours et/ou à la fin de la résolution (Kargiotakis, 1996). Ce contrôle est ainsi lié à une réflexion sur l'action, entre autres avant même de s'engager dans la résolution (voir à ce sujet Bednarz et Dufour-Janvier, 1992).

On parle également de **discernement/choix éclairé** au regard de différentes stratégies de résolution possibles. Schoenfeld (1985) insiste ici sur l'importance de lier les caractéristiques d'un problème et la stratégie privilégiée. Ainsi, quand l'élève travaille sur un problème, il peut posséder plusieurs stratégies de résolution, mais toutes ces stratégies ne sont pas nécessairement efficaces. Si l'élève choisit une stratégie peu appropriée et qu'il poursuit avec celle-ci en excluant les autres, alors soit il échouera dans la résolution du problème, soit il arrivera à sa résolution mais avec des procédures difficiles et coûteuses en temps. Ce choix peut donc affecter le processus de résolution d'un problème. Le contrôle se manifeste ainsi par la capacité de voir différentes stratégies pour résoudre le problème et par la capacité de faire un choix pertinent d'une stratégie appropriée, efficace, peu coûteuse en temps en ayant préalablement écarté les stratégies qui sont inappropriées (Schoenfeld, 1985; Krutetskii, 1976).

Une première conceptualisation du contrôle ressort de cette analyse de différents travaux de recherche, à travers 1) deux dimensions de contrôle (syntaxique et sémantique) à l'œuvre dans la résolution de différentes tâches en algèbre, notamment la résolution de problèmes, et 2) différentes composantes sollicitées tout au long du processus de résolution : i) l'anticipation (des conditions de validité du résultat), ii) la vérification (du résultat et de la démarche), iii) la perception des erreurs, iv) la sensibilité et le dépassement de la contradiction, v) l'engagement réfléchi (une prise de distance avant, pendant ou après) et vi) le discernement/choix éclairé (vis-à-vis des différentes stratégies). Dans un travail préalable, d'autres composantes ont également été relevées que nous ne reprenons pas ici, notamment le recours à des méta-connaissances (pour plus de détails sur cette conceptualisation plus globale, voir Saboya, 2010). Nous avons en effet fait le choix de ne rapporter que les composantes liées directement à la résolution de problèmes, et donc en lien avec les tâches expérimentées (voir section 3).

signes de déséquilibre, s'exprimant dans notre cas par une idée de doute, une sensibilité à la contradiction.

2. Objectifs de l'étude et méthodologie

Cette conceptualisation du contrôle constitue un cadre de référence pouvant servir de support au choix de situations à proposer aux élèves, dans lesquelles un contrôle est requis, ou présentant un potentiel en termes de son développement (Saboya, 2010). Toutefois, elle nous renseigne peu sur la manière dont ce contrôle prend forme chez les élèves au regard de différents types de tâches. Notre recherche s'inscrit dans cette perspective et vise à cerner les manifestations du contrôle qui apparaissent chez les élèves.

Un questionnaire écrit a été élaboré, à cette fin, regroupant, d'une part, différentes composantes de l'algèbre et de son apprentissage (résolution de problèmes, résolution d'équations, interprétation du symbolisme et travail sur les expressions algébriques, généralisation à des fins de preuve), et s'appuyant, d'autre part, sur le cadre de référence élaboré précédemment. Cette conceptualisation du contrôle (voir section 1) a ainsi servi de fondement au choix des 13 questions retenues¹⁰ (voir tableau 1 ci-dessous).

Ce questionnaire a été expérimenté auprès d'une classe de secondaire 3 (14-15 ans) comprenant 36 élèves d'une école de la banlieue de Montréal¹¹. De manière complémentaire, dix élèves ont été vus en entrevue individuelle. Ces élèves ont été choisis sur la base des traces de contrôle observées chez ces derniers au questionnaire écrit. Nous avons ciblé deux types d'élèves, des élèves qui exerçaient peu de contrôle au début de l'expérimentation pour arriver à mieux comprendre le possible développement de celui-ci au cours de l'intervention didactique (voir Saboya, 2010) et des élèves qui laissaient apparaître un certain contrôle, et ce de manière à cerner la réflexion accompagnant leurs traces. Ces entrevues ont permis de revenir plus précisément sur quatre questions du questionnaire touchant à différentes composantes de l'algèbre (résolution de problèmes, résolution d'équations, sens des expressions algébriques) et de mieux comprendre les décisions prises par les élèves lors de la résolution et les raisons sous-jacentes.

¹⁰ D'autres composantes étaient également ici ciblées, que nous ne reprenons pas pour les fins de cet article.

¹¹ Il s'agit d'élèves forts, qui font partie du programme d'éducation internationale.

Composantes de l'algèbre Composantes du contrôle	Résolution de problèmes	Résolution d'équations	Sens/travail sur les expressions algébriques	Généralisation à des fins de preuve ¹²
Vérification, retour sur la démarche, sur les calculs, sur la réponse...	Question 1			X
Engagement réfléchi	X	X	X	
Discernement, choix éclairé (de stratégies, d'une écriture)	X	X		
Perception des erreurs,	X	X	X	
Sensibilité à la contradiction, capacité de dépasser la contradiction	Question 5 (également exploitée lors de l'entrevue)	X	X	

 Tableau 1. Le questionnaire, sa composition au regard de l'algèbre et du contrôle¹³

Deux questions, issues du bloc résolution de problèmes, sont reprises pour les fins de cet article – nous les avons situées dans le tableau précédent – ces dernières s'étant révélées riches pour illustrer notre propos. Nous présentons plus précisément ci-dessous ces deux questions ainsi que leur analyse préalable, sous l'angle du contrôle, de manière à mieux faire ressortir les raisons qui ont guidé dans chacun des cas notre choix.

<i>Trains</i>¹⁴ (question 1)	<i>Cafés/croissants</i>¹⁵ (question 5)
Il y a 578 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places, et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que les deux trains ont le même nombre de wagons, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des 2 locomotives? Explique comment tu as fait pour trouver.	Au restaurant, une tasse de café et trois croissants coûtent 2,70\$. Deux tasses de café et deux croissants coûtent 3\$. Trois tasses de café et un croissant coûtent 3,50\$. Trouve le prix d'une tasse de café et d'un croissant. Explique comment tu as fait pour trouver.

¹² Cette composante de l'algèbre étant peu abordée à l'école au moment de l'introduction à l'algèbre, nous ne l'avons pas retenue pour l'analyse.

¹³ Pour le lecteur intéressé par l'expérimentation plus globale, l'ensemble des items du questionnaire est en annexe.

¹⁴ Cette situation, tirée de Bednarz, Janvier, Mary et Lepage (1992), a été modifiée (la relation initiale du problème était il y a 8 wagons de plus dans le train à 16 wagons que dans le train à 12 wagons).

¹⁵ Ce problème provient du travail de thèse de Schmidt (1994).

<i>Analyse préalable (raisons du choix du problème sous l'angle du contrôle)</i> Sollicite une interprétation du résultat au regard du contexte (celui-ci n'étant pas entier). Oblige à un retour au problème de départ (plusieurs stratégies possibles : arrondissement du résultat trouvé, interprétation dans le contexte, par exemple, un wagon ne sera pas plein, etc.).	<i>Analyse préalable (raisons du choix du problème sous l'angle du contrôle)</i> Voir la sensibilité à la contradiction que manifeste l'élève (on est en effet dans une situation dans laquelle l'élève est confronté à des contradictions, les données sont contradictoires) (Kargiotakis, 1996 ; Schmidt, 1994). Voir s'il pourra dépasser éventuellement cette contradiction.
--	---

Tableau 2- Les deux problèmes et leur analyse préalable

Les différentes manifestations de contrôle, qui émergent de l'analyse des stratégies de résolution des élèves dans ces deux problèmes, dépassent considérablement, comme nous le verrons maintenant, cette analyse préalable.

3. Analyse des manifestations du contrôle chez les élèves dans la résolution de problèmes

Avant d'entrer dans cette analyse, deux remarques préliminaires s'imposent. Les manifestations de contrôle relevées ici et là tout au long du processus de résolution par l'élève ne sont pas nécessairement synonymes, comme nous l'avons indiqué précédemment, de réussite à la tâche. Il peut y avoir contrôle partiel sur certains aspects, conduisant à une réussite de la tâche, sans que pour autant cela ne manifeste un contrôle de la part de l'élève au regard d'autres indicateurs importants (voir note 6). Nous ne sommes donc pas dans cette analyse centrés sur la réussite de l'élève aux tâches proposées mais bien sur la manière dont il les aborde à un moment ou l'autre du processus et sur ce que cela nous révèle du point de vue du contrôle. Nous rendons compte de plus, dans cette analyse qualitative, non pas de l'ensemble des raisonnements mis en place par les élèves du groupe, mais bien de différentes solutions retrouvées chez les élèves qui nous permettent d'avancer sur une conceptualisation du contrôle.

3.1. Analyse des manifestations de contrôle exercé par les élèves dans la résolution du problème des trains

Dans cette première tâche, l'analyse préalable pointait la nécessité d'un retour sur la réponse après résolution (voir section 2, tableau 2). Notre analyse montre, comme nous le verrons ci-dessous, que le contrôle exercé par les élèves sollicite bien d'autres éléments et s'avère bien plus riche et complexe que ne le laissait entendre a priori notre choix.

a) Une première manifestation de contrôle avant toute résolution.

L'analyse des traces laissées par les élèves nous amène à relever *un premier indicateur de contrôle, se mettant en place avant toute résolution* (quelque chose que nous n'avions pas anticipé a priori). Il s'exprime sous la forme d'un questionnement portant sur l'énoncé du problème, comme le montrent les deux extraits ci-dessous (figure 1). S'explicitent chez ces deux élèves une *distance critique* face à l'énoncé, prenant son ancrage dans le contexte, non sans conséquence sur la résolution par la suite (dans le premier cas, l'élève travaillera avec 576 passagers s'il exclut les 2 chauffeurs pour trouver le nombre de wagons à placer après chacun des trains; dans le deuxième cas, penser un train ou deux trains, des trains saturés ou non, va affecter bien sûr la nature de la réponse).

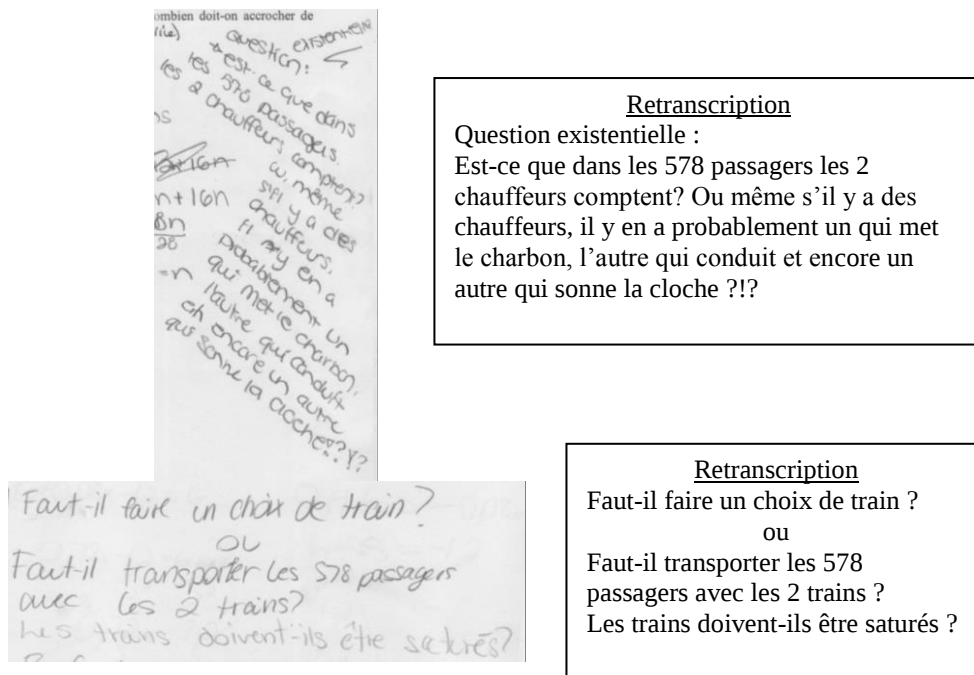


Figure 1. Deux exemples de manifestation de contrôle au tout début du processus

En ce qui concerne la résolution du problème, certains élèves ont procédé algébriquement et d'autres arithmétiquement. La nature du contrôle n'étant pas la même dans ces deux cas de figure, nous distinguerons ces deux résolutions de manière à mieux les comprendre.

b) Différentes manifestations de contrôle dans la résolution algébrique du problème

Comme nous l'avons mentionné précédemment, la résolution algébrique requiert un *contrôle sémantique* qui se met en place notamment au moment de la mathématisation du problème, de la mise en équation. Dans ce processus de symbolisation, différentes grandeurs et les relations qu'elles entretiennent sont sollicitées : un nombre de passagers, un nombre de wagons, un nombre de passagers par wagon (taux) permettant de faire le lien entre ces deux grandeurs. L'élève doit aussi gérer dans cette mathématisation diverses contraintes : i) un nombre total de passagers (connu) ; ii) un nombre de wagons dans les deux trains (inconnu) dont on sait qu'il est le même. Cette signification des grandeurs et de leurs relations, cette prise en compte des contraintes dans cette écriture de l'équation, témoignent d'un *contrôle sémantique sur le processus de symbolisation*.

L'analyse des solutions des élèves montre toute la difficulté associée à ce processus de symbolisation, ainsi que celle associée à la résolution de l'équation formulée. Mais elle nous révèle surtout, à travers les différentes tentatives/constructions dont témoignent ces solutions, la manière dont se met en place **un contrôle progressif** sur ce processus de symbolisation et de résolution. Autrement dit, nous le verrons dans ce qui suit, l'activité de contrôle exercée par l'élève en est bien une qui relève d'un *processus dynamique*.

Nous reprenons en détails trois exemples de solutions d'élèves qui illustrent des aspects différents de la mise en place progressive de ce contrôle. Nous tentons à cette fin de reconstituer, dans chacun des cas, le processus suivi par l'élève.

Handwritten student work showing multiple algebraic attempts to solve a problem. The text includes "578 places", "2 trains", "wagons = 0.12 place", "wagons = 2.16 place", and various equations like $2n + 16n = 578$, $12n + (2n + 4) = 578$, $12n + 16n = 578$, $28n = 578$, and $n = 20.425$. It also shows a final answer "Réponse: 21 wagons".

Figure 2- Exemple d'engagement algébrique témoignant de la construction progressive d'un contrôle sémantique et syntaxique (imbriqués)

Dans le tableau 2bis nous avons reconstitué dans l'ordre chronologique les différentes étapes suivies par l'élève pour résoudre ce problème (voir figure 2). Nous avons procédé ainsi pour les autres copies où suivre la démarche de l'élève n'est pas toujours aisé.

1 ^{re} tentative	2 ^e tentative	3 ^e tentative	4 ^e tentative
$w + (w + 4) = 578$ $12n + (12 + 4)n = 578$ $12n + 12n + 4 = 578$ $-4 \quad -4$ $12n + 12n = 574$ $-12n \quad -12n$ $\frac{12n}{12} = \frac{562}{12}$ $n = 46,8$	$12n + 16x = 578$ $12n + 12(n + 4) = 578$ $12n + 12n + 48 = 578$ $-48 \quad -48$ $12n + \frac{12n}{12} = \frac{530}{12}$ $\frac{530}{12} \quad \frac{12}{12}$ $\frac{-48}{12} \quad \frac{44,1\bar{6}}{12}$ $\frac{-48}{12} \quad \frac{20}{12}$ $\frac{-12}{12} \quad \frac{80}{12}$ $\frac{-72}{12} \quad \frac{80}{12}$	$12n + 16n = 578$ $12n + 16n = 578$ $\frac{16}{12} = \frac{16}{12}$ $12n = 36,125$ $\frac{12n}{12} = 36,125$	$28n = 578$ $\frac{28n}{28} = \frac{578}{28}$ $n = 20,64 \text{ ou } 21$ Réponse : 21 wagons

Tableau 2bis – Reconstitution de la copie de l'élève (voir figure 2) dans l'ordre chronologique qui est celui de l'écriture par l'élève observé

Si nous nous attardons à ce que l'élève a barré (voir tableau 2bis, 1^{re} tentative), nous pouvons noter une difficulté dans la première mise en équation formulée qui montre que ce processus de symbolisation, sollicitant la signification des grandeurs en jeu et de leurs relations, ne va pas de soi. Cette élève a écrit au départ $w + (w + 4) = 578$. Toutefois, elle semble reprendre à son compte dans cette symbolisation l'information à l'effet qu'un des wagons (dans l'un des trains) a 4 places de plus que dans l'autre. Son inconnue w est ensuite remplacée par $12n$ qui décrit certainement le fait qu'il y a un nombre inconnu n de wagons à 12 places. C'est cette substitution qu'elle reprend dans l'expression $w + 4$. La résolution de l'équation (nous y reviendrons) l'amène à trouver $n = 46,8$ qu'elle n'accepte pas comme réponse puisqu'elle barre ce qu'elle a produit. L'élève semble ainsi exprimer un doute face à la réponse et la démarche qui l'a conduit à celle-ci. D'où provient ce doute ? Probablement d'une anticipation, avec un calcul approximatif, du nombre de wagons, mais cela reste une hypothèse. Dans la résolution de cette équation ($12n + 12n + 4 = 578$), nous pouvons noter des difficultés de contrôle syntaxique. L'élève soustrait en effet une même quantité $12n$ (comme elle l'avait fait pour la constante 4 précédemment) à chacun des membres de l'équation (qui sont $12n + 12n$ et 574) et aboutit alors dans le membre de droite à 562 ($574 - 12n = 562$), se ramenant ainsi à une forme qu'elle connaît $12n = 562$ et qu'elle sait résoudre (en divisant par 12 de chaque côté de l'égalité).

Doutant de sa réponse et de la démarche qui précède, elle revient alors sur la mathématisation du problème en écrivant cette fois $12n+16x = 578$ (voir tableau 2bis, 2^e tentative), faisant appel dans cette symbolisation à deux inconnues (un certain nombre de wagons à 12 places et un certain nombre de wagons à 16 places). Guidée par le besoin de se ramener à une équation à une inconnue, l'élève va remplacer $16x$ par $12(n+4)$. On observe dans cette substitution la difficulté à garder un contrôle sur la signification des deux grandeurs en jeu (nombre de places par wagon et nombre de wagons). Comme pour la première résolution, l'élève ressent des difficultés de contrôle syntaxique dans la résolution de $12n+12(n+4) = 578$. Après avoir procédé à la distributivité dans le membre de gauche et au retrait de la constante 48 dans les deux membres de l'égalité, elle divise par 12 un seul des termes de l'équation du membre de gauche : $12n + \frac{12n}{12} = \frac{530}{12}$. Elle obtient 44,16 (6 périodique) comme résultat de la division de $530 \div 12$ (voir figure 2, en haut à droite) qu'elle remet en question puisqu'elle barre de nouveau sa démarche. Là encore si le résultat ne la satisfait pas, c'est sans doute en lien avec l'anticipation du résultat qu'elle avait prévu.

Dans sa troisième tentative (voir tableau 2bis, 3^e tentative), l'élève mathématise le problème, en prenant en compte le fait que le nombre de wagons est le même dans les deux trains (son équation précédente pensée à deux inconnues $12n+16x = 578$ est ainsi ramenée à une inconnue : $12n+16n = 578$). Cependant, les mêmes difficultés d'ordre syntaxique (liées aux transformations à effectuer dans le cas d'expressions comprenant des inconnues, $12n+12n$ précédemment, $12n+16n$ ici) l'amènent à écrire l'équation $12n = 36,125$ (elle divise par 16 les deux membres de l'égalité et obtient : $\frac{12n+16n}{16} = 12n$ dans le membre de gauche). C'est lorsqu'elle se dispose à diviser les deux membres de l'équation $12n = 36,125$ qu'elle s'arrête. Elle a probablement divisé mentalement $36,125/12$ et a pensé que le résultat n'était pas convainquant. C'est à ce moment que cette élève revient sur l'équation de départ $12n+16n = 578$ (voir tableau 2bis, 4^e tentative) et surmonte sa difficulté de résolution (elle ajoute les termes semblables entre eux, avant de diviser par 28), elle dépasse ainsi ses difficultés d'ordre syntaxique, arrivant au résultat $n = 20,64$ qu'elle arrondit à 21, donnant comme résultat 21 wagons. Ce processus d'arrondissement et d'interprétation de la réponse est un autre indicateur de contrôle exercé sur la résolution du problème.

Que ressort-il de cette reconstitution sur le plan de l'analyse ?

La reconstitution qui précède met en évidence une *construction progressive en action* (à travers les traces que laisse l'élève) d'un contrôle sémantique prenant appui sur une intégration graduelle de la signification des grandeurs et de leurs relations, mais aussi d'un contrôle d'un autre ordre, syntaxique, qui s'exprime dans

la résolution de l'équation et dans la manipulation des expressions en jeu (voir tableaux 3, 4, 5 et 6 pour une analyse de cette reconstitution).

Une construction progressive d'un contrôle sémantique (CSé) en action	Une construction progressive d'un contrôle syntaxique (Csy) en action
(CSé1) Une « substitution » (de w devenant $12n$) qui rend compte du passage d'une certaine grandeur (nb de passagers total dans un train) aux autres grandeurs en jeu. (CSé2) Une relation entre ces grandeurs explicitée : Nb de passagers par wagon $\times$ nb de wagons = Nb de passagers total (pour l'un des trains) mais aussi Une difficulté de contrôle sémantique visible dans la symbolisation de la relation entre le nombre de passagers dans chacun des trains (on transfère le 4 passagers de plus dans chaque wagon à l'ensemble des passagers du train)	(CSy1) Une première « règle » en action montrant un certain contrôle syntaxique : on cherche à se ramener à une équation plus simple du type $ax = b$ (qu'on sait résoudre) (CSy2) Une deuxième règle en action : soustraire aux deux membres de l'équation une même quantité (4 et $12n$) ne change rien à l'égalité mais aussi Une difficulté à gérer le traitement des expressions avec inconnues, visible dans l'erreur de concaténation ($572 - 12n = 566$) Un choix non éclairé quant au traitement à faire (pour se ramener à quelque chose de plus simple) des expressions avec inconnues (soustraire $12n$, même si la règle fonctionne, n'est guère ici pertinent)

Tableau 3 - 1^{re} tentative autour de $w + (w + 4) = 578$ (devenant)
 $12n + (12n + 4) = 578$

Une construction progressive d'un contrôle sémantique (CSé) en action	Une construction progressive d'un contrôle syntaxique (Csy) en action
(CSé3) Une relation entre les grandeurs de nature différente étendue aux 2 trains (passant par une symbolisation en termes de deux inconnues qui rend cette symbolisation plus aisée pour l'élève) : $\text{nb de passagers/wagon du 1}^{\text{er}} \text{ train} \times \text{nb de wagons (du 1}^{\text{er}} \text{ train)} + \text{nb de passagers/wagon du 2}^{\text{e}} \text{ train} \times \text{nb de wagons (du 2}^{\text{e}} \text{ train)} = \text{nb de passagers total.}$ Mais <i>Une relation entre les deux trains qui reste difficile</i>, quand on cherche à ramener à une inconnue (le 4 passagers de plus par wagon est ici transféré sur le nombre de wagons)	Csy3) Le traitement des expressions avec inconnues est distingué de celui des quantités connues (il faut diviser par le coefficient de cette inconnue de façon à se ramener à cette inconnue). Mais <i>Des difficultés à gérer cette transformation</i>, visible dans le fait que l'on ne divise qu'une partie de l'expression $(12n + 12n/12 = 530/12)$

Tableau 4 - 2^e tentative autour de $12n+16x = 578$ (devenant)

$$12n+12(n+4) = 578$$

Une construction progressive d'un contrôle sémantique (CSé) en action	Une construction progressive d'un contrôle syntaxique (Csy) en action
(CSé4) la relation entre le nombre de wagons de chacun des trains est prise en compte (permettant de ramener l'équation précédente à une inconnue)	La difficulté d'ordre syntaxique précédente demeure $(12n + 16n/16 = 578/16)$

Tableau 5 - 3^e tentative autour de $12n+16n = 578$

Une construction progressive d'un contrôle sémantique (CSé) en action	Une construction progressive d'un contrôle syntaxique (Csy) en action
(CSé5) Retour sur la réponse obtenue après résolution et interprétation dans le contexte	(Csy4) On réalise qu'il faut opérer sur les expressions inconnues de manière à se ramener à une expression plus simple (de la forme ax) avant de diviser par le coefficient

Tableau 6 - 4^e tentative autour de la même équation

Cette analyse, outre les manifestations diverses de contrôle qu'elle permet d'explicitier (Csé1 à 5 ; Csy1 à 4), nous montre que contrôle sémantique et syntaxique sont profondément imbriqués. Les erreurs dans la manipulation des expressions, lors de la résolution de l'équation, et le doute que l'élève ressent face à la réponse qu'il obtient amènent l'élève à revenir sur la mathématisation du problème. Il y a ainsi une évolution dans le contrôle sémantique qui prend appui sur une prise de conscience de difficultés d'ordre syntaxique. Cette construction progressive fait ressortir, enfin, une composante du contrôle qui apparaît essentielle, celle d'une sensibilité aux erreurs produites. Nous pouvons en effet remarquer que tout au long de la résolution, cette élève est *sensible à ses erreurs*, et ressent un doute face aux résultats obtenus et à la démarche, qui l'amène à revenir sur cette démarche. Finalement, à la fin de la résolution, un *contrôle autour de l'interprétation de la réponse* tel que nous l'avions anticipé se met en place. L'élève arrondit le résultat trouvé à l'entier supérieur et lui donne un sens en contexte. Le schéma ci-dessous rend compte à la fois du dynamisme de cette activité de contrôle et de l'imbrication de ses différentes composantes (figure 3).

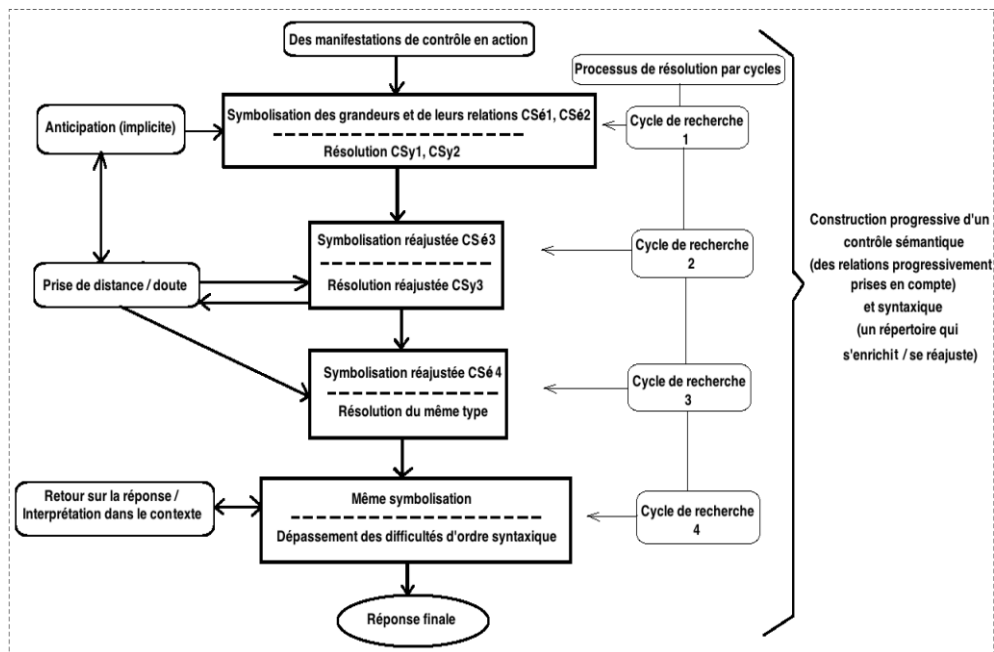


Figure 3. Ce qui ressort de l'analyse de cette première solution sous l'angle du contrôle

Dans le deuxième exemple (voir figure 4), une construction progressive est aussi visible illustrant le caractère dynamique du processus de contrôle qui se met en place. Analysons plus à fond celui-ci.

Explique comment tu as fait pour trouver.

1^{re} tentative: $12n + 16n = 578$
 $\frac{12n}{12} = \frac{36,12}{12}$
 $n = 3$
 Vérification: $3 \times 12 + 3 \times 16 =$

2^e tentative: $12n + 16n = 578$
 $\frac{13n}{13} = \frac{36,12}{13}$
 $n =$

3^e tentative: Nbre de wagons ?
 12 places = n
 16 places = n+4
 $n + n + 4 = 578$
 $-4 \quad -4$
 $2n = 574$
 $\frac{2n}{2} = \frac{574}{2}$
 $n = 287$

4^e tentative: Nbre de wagons : n
 Passagers par wagon : 12
 Passagers par wagon : 16
 $12n + 16n = 578$
 $\frac{28n}{28} = \frac{578}{28}$
 $n = 20,64$
 Réponse : chacun 21 wagons

Figure 4. Un deuxième exemple d'engagement algébrique illustrant la construction progressive d'un contrôle syntaxique

La démarche de l'élève dans l'ordre chronologique est présentée dans le tableau 7.

1 ^{re} tentative	2 ^e tentative	3 ^e tentative	4 ^e tentative
$12n + \frac{16n}{16} = \frac{578}{16}$ $\frac{12n}{12} = \frac{36,12}{12}$ $n = 3$ Vérification : $3 \times 12 + 3 \times 16 =$	$12n + \frac{16n}{16} = \frac{578}{16}$ $\frac{13n}{13} = \frac{36,12}{13}$ $n =$	Nbre de wagons ? 12 places = n 16 places = n+4 $n + n + 4 = 578$ $-4 \quad -4$ $\frac{2n}{2} = \frac{574}{2}$ $n = 287$	Nbre de wagons : n Passagers par wagon : 12 Passagers par wagon : 16 $12n + 16n = 578$ $\frac{28n}{28} = \frac{578}{28}$ $n = 20,64$ Réponse : chacun 21 wagons

Tableau 7 – Reconstitution d'une deuxième copie d'élève (voir figure 4) dans l'ordre chronologique qui est celui de l'écriture par l'élève observé

Dans les quatre tentatives de résolution effectuées par cette élève, trois d'entre elles présentent une mathématisation du problème ($12n + 16n = 578$) indiquant un contrôle sémantique sur le processus de symbolisation : ce dernier rend compte des différentes grandeurs en jeu et de leurs relations, l'inconnue y est explicitée ainsi que chacun des taux (voir figure 4 en bas à gauche ou tableau 7, 4^e tentative). Ce sont ici des difficultés d'ordre syntaxique qui vont amener l'élève à revenir sur sa résolution. Ainsi, dans ce qui est sûrement son premier essai (voir figure 4 en haut

à gauche tableau 7, 1^{re} tentative), l'élève cherche à se ramener à une équation plus simple du type $ax = b$ pour pouvoir résoudre (**Csy1**), elle divise les deux membres de son équation par 16 mais ne divise dans le membre de gauche qu'un des deux termes : $12n + \frac{16n}{16} = \frac{578}{16}$ (on retrouve ici une difficulté présente dans la solution précédente, voir figure 2), puis elle annule ce deuxième terme (faisant comme si $16n/16 = 0$). Elle obtient ainsi comme résultat $n=3$ obtenu à partir de l'équation $12n = 36,12$. L'élève s'aperçoit alors que sa réponse n'a pas de sens en procédant à une *vérification* qui, comme nous l'avons explicité précédemment (voir section 2), est une composante du contrôle (la vérification semble ici être liée à une procédure régulière déjà assimilée dans le processus de résolution de cette élève). Elle remplace pour cela la valeur de n trouvée dans l'équation de départ et constate (probablement avec un calcul mental) qu'elle n'obtient pas les 578 passagers attendus. Ce constat l'amène à revoir sa démarche de résolution. On peut en effet noter une expression de doute puisque l'élève barre cette première démarche. La résolution de l'équation est alors reprise (voir figure 4 en haut à droite ou tableau 7, 2^e tentative), elle procède comme la première fois. La différence/le réajustement réside toutefois dans le résultat de la division de $16n/16$ qu'elle interprète cette fois-ci correctement $\frac{16n}{16} = n$ (faisant apparaître un contrôle syntaxique – **Csy2** – dans la manipulation de l'expression). La poursuite de la résolution l'amène à trouver pour n une valeur similaire à celle trouvée précédemment. Nous pouvons remarquer qu'elle ne se rend pas jusqu'au calcul de n , elle constate rapidement que la réponse n'est pas appropriée. Elle barre alors sa deuxième tentative de résolution et va se donner une équation intermédiaire ($n+n+4 = 578$, voir tableau 7, 3^e tentative), plus simple, lui servant de tremplin à la construction d'un contrôle syntaxique. Cette équation intermédiaire ne traduit pas en effet pour elle la mathématisation du problème (on le voit bien puisqu'elle revient par la suite à l'équation qui a toujours été la sienne depuis le début (figure 4 en bas à gauche ou tableau 7, 4^e tentative). Elle lui permet dans l'action de retrouver les transformations des expressions à faire pour résoudre (enlever une même quantité connue de part et d'autre de l'égalité, **Csy3**, ajouter les deux quantités inconnues, **Csy4**, avant de diviser de part et d'autre de l'égalité par le coefficient de l'inconnue **Csy5**). Ce passage va lui permettre, dans sa 4^e tentative, de revenir sur la mathématisation de départ et de mettre à profit le contrôle syntaxique construit précédemment dans sa résolution. Enfin, comme c'est le cas pour la production précédente analysée, l'élève revient sur la réponse trouvée en l'arrondissant à l'entier supérieur et interprète ce résultat en contexte.

Que se dégage-t-il de cette analyse ?

C'est ici une construction progressive d'un contrôle syntaxique qui se manifeste (comme on peut le voir dans les réajustements et le répertoire de « règles » de transformations des expressions, valides, qui se manifestent dans l'action). Cette

construction prend appui sur un contrôle sémantique dans la mathématisation du problème (qui se manifeste dès le départ et que l'élève maintiendra tout au long du processus de résolution). Il est intéressant de constater la manière dont cette élève arrive à se réajuster dans son contrôle syntaxique de la résolution et de la manipulation des expressions. Elle perçoit à travers une *vérification* que le résultat auquel elle arrive ne fonctionne pas et interroge alors la résolution : elle perçoit ainsi d'abord que sa manipulation sur le monôme $16n$ (qu'elle annule en divisant par n) n'est pas correcte. Elle corrigera celle-ci par n (il y a donc là un premier *repérage d'erreur*) qu'elle ajoutera au $12n$ de l'équation de départ. Elle est alors consciente que la réponse qu'elle a obtenue ne fonctionne toujours pas (puisque'elle est du même ordre de grandeur que la précédente). C'est la résolution de l'équation $n+n+4=578$, une équation intermédiaire, plus simple, qui lui permet de retourner à l'équation de départ et de la résoudre correctement. On retrouve ici un processus mis en évidence par Richard (1990/1998, p. 85), qui consiste pour comprendre à *particulariser un schéma* (voir figure 5 pour les éléments qui ressortent de cette analyse).

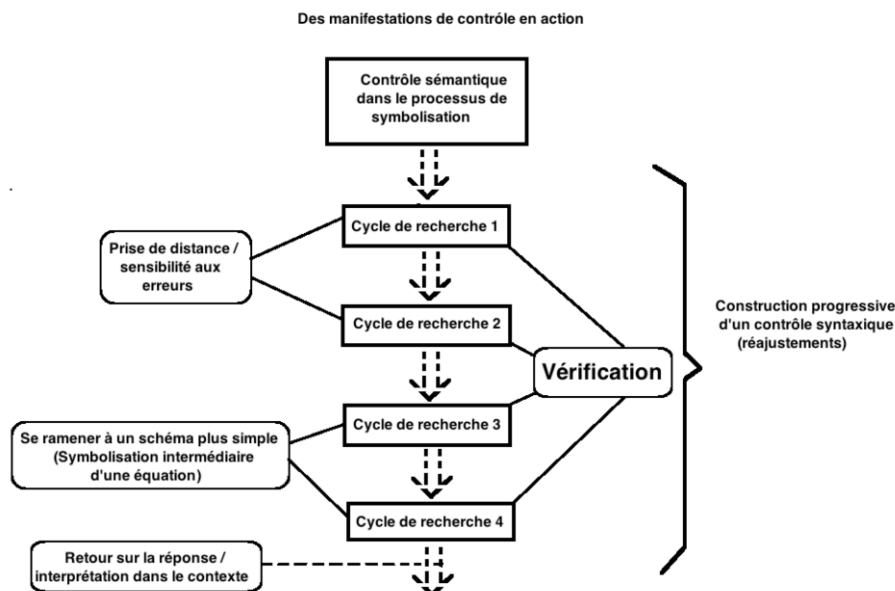


Figure 5. Ce qui ressort de l'analyse de cette deuxième solution sous l'angle du contrôle

Un troisième exemple nous fait entrer dans un processus de symbolisation et de résolution non standards (voir figure 6).

Handwritten student work showing algebraic problem-solving for train seats. The work is organized into several sections:

- Top Left (Crossed out):** nb places par wagon ajouté à chacune des locomotives: $12+16=28$ places
- Top Right:** nb wagon pour chaque locomotive
 1^{re} loco: $257 \div 12 = 21,41 \rightarrow \boxed{21}$
 2^e loco: $321 \div 16 = 20,06 \rightarrow 21$
- Middle Left (Crossed out):** nb places pour chaque wagon: $x=12$, $x+4=16$
 $578 \div (x+x+4) = 578 \div (2x+4) =$
- Bottom Left:** nb places pour chaque locomotive
 1^{re} loco: $x = 256,88 \rightarrow 257$ places
 2^e loco: $x + \frac{1}{4}x = 1\frac{1}{4}x = 1\frac{1}{4} \cdot 256,88 = 321,1 \rightarrow 321$ places
- Bottom Center:** $578 = x + 1\frac{1}{4}x$
 $\frac{578}{2\frac{1}{4}} = \frac{2\frac{1}{4}x}{2\frac{1}{4}}$
 $256,88 = x$

Figure 6. Un troisième exemple d'engagement algébrique non standard

Une première résolution arithmétique	Vers une résolution algébrique
Nbre de places par wagon ajouté à chacune des locomotives : $12+16=28$ places Nbre de places pour chaque wagon : $x = 12$ $x+4 = 16$ $578 \div (x + x + 4) = 578 \div (2x + 4) =$	Nbre de places pour chaque locomotive : 1 ^{re} loco : x 2 ^e loco : $x + \frac{1}{4}x = 1\frac{1}{4}x$ $578 = x + 1\frac{1}{4}x$ $\frac{578}{2\frac{1}{4}} = \frac{2\frac{1}{4}x}{2\frac{1}{4}}$ $256,88 = x$ 1 ^{re} loco : $x = 256,88 \rightarrow 257$ places 2 ^e loco : $x + \frac{1}{4}x = 1\frac{1}{4}x = 1\frac{1}{4} \cdot 256,88 = 321,1 \rightarrow 321$ places Nbre de wagons pour chaque locomotive : 1 ^{re} loco : $257 \div 12 = 21,41 \rightarrow \boxed{21}$ 2 ^e loco : $321 \div 16 = 20,06 \rightarrow 21$

Tableau 8 – Reconstitution de la copie de l'élève de la figure 6 dans l'ordre chronologique qui est celui de l'écriture par l'élève observé

L'élève amorce la résolution de façon arithmétique, en trouvant 28 places (il forme en quelque sorte un grand wagon combinant le wagon à 12 places et le wagon à 16 places, voir tableau 8, résolution arithmétique). Il pourrait ensuite poursuivre cette résolution arithmétique en divisant le nombre de passagers à transporter par 28 pour trouver le nombre de wagons, mais la nécessité qu'il ressent d'y aller algébriquement (effet de contrat, nous sommes en secondaire 3) va le conduire à vouloir introduire une inconnue. Son processus de symbolisation est alors influencé par son raisonnement arithmétique (il s'agit en quelque sorte d'une pseudo stratégie de résolution algébrique). Il pose en effet comme inconnues x et $x+4$, deux valeurs qui sont en fait connues (il écrit d'ailleurs $x=12$ et $x+4=16$) et tente alors une mathématisation du problème sous la forme de $578 \div (x + x + 4)$, qu'il simplifie en $578 \div (2x + 4)$, une symbolisation qui rend compte du raisonnement arithmétique qu'il avait amorcé ($578 \div 28$). Ne sachant comment traiter la dernière expression obtenue qu'il ne peut traduire en équation, l'élève barre cette première tentative de résolution.

L'élève reprend alors la mathématisation du problème en s'appuyant cette fois sur un choix non standard d'inconnue, le nombre de passagers dans le premier train (celui comprenant des wagons à 12 places), et tente alors de reconstruire, à partir de celui-ci, le nombre de passagers qu'on devrait retrouver dans le deuxième train, qu'il identifie comme $x + \frac{1}{4}x$ (voir figure 6 en bas ou tableau 8 la résolution algébrique). Ce $\frac{1}{4}$ exprime en fait que 16 est formé de 12 et de $\frac{1}{4}$ de 12 (l'élève fait ici une erreur, on aurait dû retrouver $\frac{1}{3}$), cette relation entre le nombre de passagers dans chaque wagon se transférant pour l'ensemble des passagers dans chacun des trains puisqu'on a le même nombre de wagons. Les inconnues identifiées, l'élève pose alors l'équation $578 = x + 1\frac{1}{4}x$ (voir figure 6 en bas). Cette équation traduit le fait que le nombre de passagers du premier train et celui du deuxième train donnent le nombre total de passagers, et précise la relation entre le nombre de passagers dans chacun des trains. Cette reconstruction témoigne ainsi d'une grande maîtrise des relations entre les grandeurs (même s'il y a erreur).

Un contrôle *syntactique* est également présent à travers la résolution de l'équation et la manipulation des expressions. L'élève gère ici la résolution avec des nombres fractionnaires qu'il maîtrise parfaitement : $x + \frac{1}{4}x$ est remplacé par l'expression équivalente $1\frac{1}{4}x$; $x + \frac{1}{4}x \frac{1}{4}$ est remplacé par l'expression équivalente $2\frac{1}{4}x$, et on divisera par $2\frac{1}{4}x$ les deux membres de l'égalité pour retrouver la valeur de x , une résolution qui n'est pas standard.

Un retour au problème est également visible mobilisant une interprétation en contexte. L'inconnue x trouvée qui correspond à 256,88, est en effet placée à côté de ce qu'il a identifié comme 1^{er} loco et il calcule pour la 2^e loco, la valeur de $x + \frac{1}{4}x$. Ces nombres trouvés sont arrondis (il s'agit d'un nombre de places).

Finalement et tel que le montre l'élève avec une flèche (voir figure 6 en haut à droite), il trouve le nombre de wagons pour chacun des trains qu'il arrondit également cette fois-ci pour répondre à la contrainte sur le même nombre de wagons dans les deux trains.

L'analyse précédente traduit ainsi, comme dans les autres cas, le caractère dynamique de cette activité de contrôle. Un contrôle sémantique se construit dans l'action à travers un choix véritable d'inconnue, non standard, une maîtrise des relations entre les différentes grandeurs en jeu dans le problème, nourrie par un raisonnement arithmétique préalable. Un contrôle syntaxique est également visible dans la résolution algébrique avec des nombres fractionnaires. De plus, l'élève s'appuie sur une interprétation, un regard sur la réponse et sur les contraintes imposées dans l'énoncé du problème et ce, tout le long de la résolution.

L'analyse des productions des élèves du groupe nous permet d'aller plus loin sur certaines de ces composantes du contrôle, notamment la vérification et le retour au problème.

La vérification va ainsi recouvrir différentes formes. Nous avons vu, dans le deuxième exemple, que la vérification est ici associée à un retour à l'équation initiale (en remplaçant la valeur trouvée dans cette équation) et non à un retour au problème (voir figure 4). Le risque existe dans ce cas d'une vérification qui n'invalide nullement le résultat, lorsque l'équation par exemple ne rend pas compte des relations entre les données du problème (la réponse au problème est fausse mais la vérification qui s'appuie sur un retour à l'équation dira que cela est juste). Dans d'autres cas (voir exemple ci-dessous, figure 7), la vérification va être associée à un retour au contexte de départ. Ainsi cet élève, après avoir résolu l'équation et arrondi le résultat, va remplacer cette valeur dans l'équation de départ et dira explicitement qu'elle ne retrouve pas les 578 passagers de départ à cause de l'arrondi.

passagers : 578
 trains : 2
 Wagon : 16 places
 12 places
 $n = \text{locomotives}$
 $n = \text{nb de wagons par train}$

$$578 = 16n + 12n$$

$$\frac{578}{28} = \frac{28n}{28}$$

$$21 = n$$

$21 \cdot 16 + 21 \cdot 12 = 558 \text{ personnes}$
 cause de l'arrondissement de 20,6 à 21 wagon

J'ai d'abord formulé une formule qui me dirais combien de wagons il faut pour 2 trains pour transporter 578 personnes. Avec le résultat, j'ai calculé si ça fonctionnerait, EH OUI!

Retranscription

$n = \text{nb de wagons par train}$

$$578 = 16n + 12n$$

$$\frac{578}{28} = \frac{28n}{28}$$

$$21 = n$$

$21 \cdot 16 + 21 \cdot 12 = 558 \text{ personnes}$ (à cause de l'arrondissement de 20,6 à 21 wagons).

J'ai d'abord formulé une formule qui me dirais combien de wagons il faut pour 2 trains pour transporter 578 personnes. Avec le résultat, j'ai calculé si ça fonctionnerait, EH OUI!

Figure 7. Un autre exemple de vérification

Qu'en est-il maintenant du retour sur la réponse ? (à la base, rappelons-le, du choix de ce problème). Les trois exemples précédents montrent, chacun à leur façon, un retour au problème suite à l'obtention d'un nombre décimal. La production écrite ci-dessous (voir figure 8) traduit un retour au problème qui va plus loin.

$12x + 16x = 578$
 $\frac{28x}{28} = \frac{578}{28}$

$x = 21$ (10 places de livres en tout)

Retranscription

$$12x + 16x = 578$$

$$\frac{28x}{28} = \frac{578}{28}$$

$$\begin{array}{r|l} 578 & 28 \\ \hline 56 & 21 \\ \hline 18 & \\ \hline 28 & \\ \hline -10 & \end{array}$$

$x = 21$ (10 places de libres en tout)

Figure 8. Interprétation de la réponse en contexte

Après avoir procédé à la mise en équation, l'élève effectue $578 \div 28$ en donnant du sens à l'algorithme de division en contexte (c'est ce que l'interprétation révèle) : il reste 18 passagers à placer et il dispose pour cela d'un grand wagon de 28 places. Il restera alors 10 places. Il y a ici la mise en place d'un contrôle au moment même où l'élève opère.

c) Différentes manifestations de contrôle dans la résolution arithmétique du problème

La résolution arithmétique avance, nous l'avons dit au tout début de ce texte, en prenant appui sur des grandeurs connues et des significations contextuelles. Quelles sont dans ce cas les manifestations plus précises de contrôle qui ressortent de l'analyse des solutions des élèves? Comme nous l'avons précisé, pour résoudre ce problème, une prise en compte de différentes contraintes est nécessaire. Elle constitue une des manifestations du contrôle, non anticipée préalablement, et particulièrement nécessaire dans un engagement arithmétique. C'est à travers des difficultés que nous avons pris conscience de l'importance de cette composante, visible dans l'ensemble des procédures qui procèdent notamment par essais erreurs, mais également dans d'autres cas comme le montre l'exemple suivant (voir figure 9).

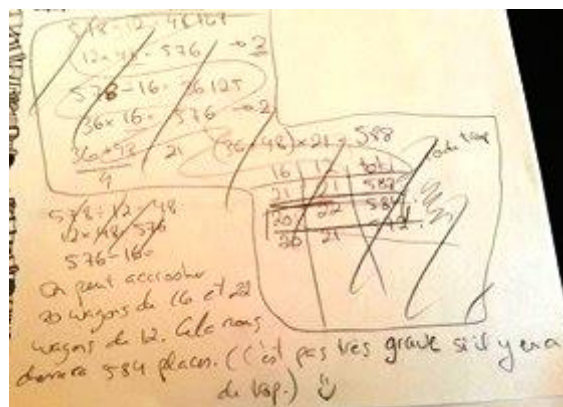


Figure 9. Une solution arithmétique illustrant une construction progressive et des manifestations de contrôle

1 ^{re} tentative	2 ^e tentative												
$578 \div 12 = 48,167$ $12 \times 48 = 576$ $578 \div 16 = 36,125$ $36 \times 16 = 576$ $\frac{36 + 48}{4} = 21$ $(36 + 48) \times 21 =$ <table><tr><th>16</th><th>12</th><th>Total</th></tr><tr><td>21</td><td>21</td><td>588 (10 de trop)</td></tr><tr><td>20</td><td>22</td><td>584</td></tr><tr><td>20</td><td>21</td><td>572</td></tr></table>	16	12	Total	21	21	588 (10 de trop)	20	22	584	20	21	572	$578 \div 12 = 48$ $12 \times 48 = 576$ $576 \div 16 =$ On peut accrocher 20 wagons de 16 et 22 wagons de 12. Cela nous donnera 584 places (c'est pas très grave si il y en a de trop) ☺
16	12	Total											
21	21	588 (10 de trop)											
20	22	584											
20	21	572											

Tableau 9 – Reconstitution de la copie de l'élève de la figure 9 dans l'ordre chronologique qui est celui de l'écriture par l'élève observé

Cet exemple met de l'avant, tout comme précédemment pour la résolution algébrique, le caractère dynamique du contrôle. Si on reconstitue les différentes tentatives de l'élève, nous pouvons remarquer (figure 9 en haut ou tableau 9, 1^{re} tentative) qu'elle suppose en premier que les deux trains ont des wagons à 12 places, elle calcule alors qu'il faudrait 48 wagons pour transporter les 578 passagers (après vérification, 2 passagers ne pourraient alors monter, ce qu'elle identifie par une flèche et un 2). Par la suite, elle se penche sur le cas où les deux trains auraient des wagons à 16 places, il faudrait alors 36 wagons pour transporter 578 passagers (encore là, après vérification, il y aurait 2 passagers qui ne

pourraient prendre place à bord du train, ce qu'elle identifie). Toutefois, on veut deux trains, un avec des wagons à 12 places et un autre avec des wagons à 16 places, l'élève calcule alors la moyenne de wagons qu'il faudrait pour avoir ces deux trains et qu'ils soient équilibrés (48 correspond à 2 trains à 12 places par wagon ; 36 correspond à 2 trains à 16 places par wagon) et arrive au résultat $(48+36)/4 = 21$ wagons par train. Nous pensons que l'élève ressent à ce stade un doute sur le résultat obtenu dû aux 2 passagers « non pris en charge » à chaque cas de figure considéré. Elle procède alors à une vérification en écrivant $(48+36) \times 21$ (une trace montrant une difficulté dans le contrôle des grandeurs ici en jeu) mais ne fait pas le calcul (elle remarque certainement que le résultat est nettement supérieur au nombre de passagers initial).

Elle reprend alors la vérification sous forme de tableau en identifiant dans chaque colonne le nombre de wagons à 16 places, le nombre de wagons à 12 places et le total. C'est en calculant le nombre de passagers total pour les 21 wagons trouvés précédemment que l'élève obtient 588 passagers. Elle semble alors déboussolée, focalisant sur la donnée des 578 passagers qui est pour elle une contrainte stricte à respecter et en oublie celle sur le même nombre de wagons. Cette centration sur les 578 passagers l'amène à procéder à des essais (changement de stratégie) et à considérer un nombre de wagons différent pour chacun des trains. Ses différents essais ne lui permettront pas de retrouver les 578 passagers initiaux. Nous pouvons supposer qu'à ce moment l'élève s'est arrêtée, a regardé ce qu'elle avait produit et constaté qu'elle tournait en rond. Elle a alors barré ce début de deuxième tentative de résolution (voir tableau 9, 2^e tentative), encadré la première démarche de résolution et expliqué qu'on accrochera aux deux trains deux nombres de wagons différents. Elle est consciente qu'elle n'obtient pas ainsi les 578 passagers initiaux mais elle précise que « ce n'est pas très grave s'il y en a trop ».

Que ressort-il de cette reconstitution ?

Le contrôle relève là aussi, tout comme pour la résolution algébrique, d'un processus dynamique : il y a **construction progressive d'un contrôle** vis à vis des grandeurs, de leurs relations, des contraintes, visible à travers les différents réajustements qui s'opèrent. Là s'arrête toutefois la comparaison puisque ce contrôle, on le voit bien dans l'analyse, est avant tout sémantique, il est constamment nourri par la signification contextuelle des grandeurs en présence. La **prise en compte simultanée des contraintes** joue un rôle extrêmement important tout au long du processus, quelque chose qu'on ne retrouvait pas en algèbre puisque une fois la mathématisation posée, la résolution s'appuie sur un contrôle davantage syntaxique et d'autres règles du jeu. Dans cette résolution arithmétique, différentes manifestations du contrôle en action ressortent, qui rejoignent celles qu'on retrouvait en algèbre : **une expression de doute** (face dans ce cas à la réponse, qui est interprétée par exemple au regard des contraintes, il faut arriver à

578 passagers); ***une vérification mais qui n'apparaît pas juste en fin de résolution***. On voit en effet apparaître des vérifications locales en cours de processus (on revient par exemple sur un calcul, $578 \div 12 = 48$, en vérifiant à l'aide de l'opération inverse $48 \times 12 = 576$); ***un retour sur la réponse et une interprétation, qui n'apparaît pas juste en fin de résolution*** mais aussi localement tout au long du processus (par exemple la réponse au calcul $48 \times 12 = 576$ effectué à des fins de vérification, est interprétée en contexte, il y aura 2 personnes qui ne seront pas transportées). Cette analyse vient ainsi nuancer et enrichir certaines composantes du contrôle.

3.2. Analyse des manifestations de contrôle dans la résolution du problème Café/Croissants.

Rappelons ici les raisons qui ont été à la base du choix de ce problème, très différentes de celles présidant au choix du problème des trains : voir la sensibilité à la contradiction que manifeste l'élève et s'il pourra dépasser cette contradiction.

Tout comme dans l'étude menée par Schmidt (1994), on observe que la majorité des élèves ne perçoit pas que les trois équations (contraintes) sont incompatibles, n'interrogeant jamais le système d'équations lui-même (ou les contraintes) et leur compatibilité. Ainsi dans le cas de la résolution algébrique, les étudiants de Schmidt s'engagent dans une résolution et tournent en rond, revenant plusieurs fois sur leurs manipulations. Dans le cas de notre étude, la résolution algébrique conduit à un blocage. Ne possédant pas, en troisième année du secondaire, les connaissances nécessaires pour résoudre un tel système, les élèves vont en effet s'arrêter en général dès le début, ou dans de très rares cas, après avoir amorcé une manipulation. Ils vont alors poursuivre arithmétiquement, ces manipulations donnant lieu, tout comme pour la résolution algébrique des étudiants de Schmidt, à plusieurs essais, dans lesquels les élèves sont convaincus qu'ils arriveraient à un résultat, comme nous le montre les extraits suivants de verbatim (tirés des entrevues avec deux élèves) : « je ferais par essais-erreurs, ça pourrait prendre jusqu'à 1000 essais et puis à un autre moment je l'aurais ». Ou cet autre extrait dans lequel l'élève explique ce qu'il ferait « je pourrais diviser par 2 puis par 6, ça donne... Je ne vois pas autre chose que d'essayer par essais-erreurs, c'est juste long ». À la question de la chercheuse « tu penses que tu finiras par trouver ? », l'élève répond « oui, si j'y passe toute la nuit ».

Par contraste, certains élèves expriment un *malaise*. Celui-ci se traduit par le fait qu'ils ne sont pas convaincus qu'ils vont arriver à trouver des prix pour le café et pour le croissant qui satisfont aux trois énoncés. Comme nous l'avons vu dans la section 2, ce malaise est une manifestation d'une *sensibilité à la contradiction*. Ainsi dans l'exemple ci-dessous (voir extrait de verbatim tiré d'une entrevue), l'élève perçoit une certaine contradiction. Cette résolution arithmétique, outre le

malaise qu'elle exprime, rend compte d'un contrôle sémantique, qui se met en place ici autour de la gestion des trois contraintes.

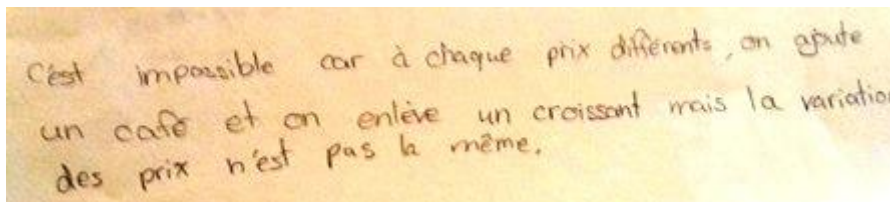
Chercheuse : est-ce que si tu faisais d'autres essais, tu finirais par trouver ?

Élève : Je ne sais pas, ça n'a pas l'air proportionnel.

Chercheuse : qu'est-ce que tu veux dire ?

Élève : je ne sais pas, peut-être qu'il y a des coupons rabais qui font que quand tu achètes 2 croissants, tu as un café à moitié prix, je ne sais pas.

Dans le raisonnement de type arithmétique, un raisonnement sur les écarts permet, avant tout engagement dans la résolution de déceler la contradiction. Pour 1 café et 3 croissants, le prix est de 2,70\$. Pour 2 cafés et 2 croissants, le prix est de 3\$, donc si on achète un café de plus et qu'on prend un croissant de moins, on a une différence de prix de 0,30\$. Si pour 2 cafés et 2 croissants le prix est de 3\$ et pour 3 cafés et un croissant, il est de 3,50\$, le même écart devrait se retrouver puisqu'on ajoute un café et qu'on a un croissant de moins. Or on retrouve ici un écart différent, de 0,50\$! Ce problème n'a donc pas de solution. Dans la production ci-dessous (figure 10), la seule de ce type retrouvée dans le groupe, l'élève démontre un *engagement réfléchi* en s'arrêtant devant l'énoncé du problème avant toute résolution. Il arrive ainsi à percevoir la contradiction et à la dépasser, son raisonnement se basant sur cette idée d'écart.



Retranscription

C'est impossible car à chaque prix différents, on ajoute un café et on enlève un croissant mais la variation des prix n'est pas la même.

Figure 10. Un exemple de production qui montre le dépassement de la contradiction.

Ce qui ressort de l'analyse des productions des élèves à ce problème. Le contrôle se manifeste ici de différentes façons. Sans percevoir pour la majorité des élèves la contradiction entre les trois énoncés, le processus de résolution arithmétique illustre toutefois, dans certains cas, un engagement réfléchi à travers des essais contrôlés qui permettent de réduire le champ des possibles et une prise en compte des trois contraintes. On y relève aussi une sensibilité à la contradiction dans les propos des élèves qui expriment un malaise. Le contrôle se manifeste

également par un dépassement de la contradiction qui s'appuie sur un arrêt sur les données du problème avant toute résolution.

4. Discussion

L'activité de contrôle est souvent associée, nous l'avons vu au tout début de cet article, à la vérification d'un résultat ou à sa validation. Les travaux de recherche nous font également part des problèmes d'apprentissage que les élèves ont en algèbre du point de vue sémantique et/ou syntaxique. Nous avons, dans ce qui précède, abordé le problème du contrôle dans la résolution d'une tâche mathématique d'un point de vue plus large. Nous nous sommes ainsi intéressés tout au long de notre projet de recherche à déceler les différentes manifestations que nous pouvons considérer comme faisant partie d'une activité cognitive, que nous avons désignée par contrôle, exercée par l'élève.

Notre interprétation de diverses recherches nous avait amené à relever, dans un premier temps, différentes composantes de ce contrôle : i) contrôle syntaxique, ii) contrôle sémantique, iii) anticipation, iv) vérification, v) perception des erreurs, vi) sensibilité à la contradiction et son dépassement, vii) engagement réfléchi et viii) discernement/choix éclairé. Celles-ci ont guidé notre choix des deux problèmes (et d'autres questions) qui ont été soumis aux élèves. Ainsi sont illustrées, à travers ces deux tâches plus spécifiquement ciblées dans cet article, certaines composantes théoriques du contrôle, qui ont été confirmées par l'analyse. Toutefois, l'analyse des productions des élèves s'est avérée beaucoup plus riche que l'analyse préalable de ces deux problèmes. Nous reviendrons dans cette discussion principalement sur le regard nouveau qu'amène cette analyse, sur cette conceptualisation du contrôle, avant de s'attarder à la manière dont se manifeste le contrôle en arithmétique et en algèbre et aux différences que nous révèle cette analyse.

Notre analyse contribue tout d'abord à mettre en évidence le *caractère progressif et dynamique du contrôle* (voir figures 3, 5, 6 et 9) et fait ressortir la profonde *imbrication*, dans le cas de la résolution algébrique, des *dimensions sémantique et syntaxique*, qui ne constituent pas deux dimensions disjointes l'une de l'autre. Autrement dit elle remet en question la manière dont est souvent envisagé le travail en algèbre dans un contexte de résolution de problèmes, conçu comme faisant appel de manière linéaire à une phase de mathématisation prenant appui sur le contexte, suivie d'une phase de résolution détachée du contexte qui est reliée à un ensemble de règles syntaxiques, puis d'un retour au contexte dans l'interprétation éventuelle de la réponse. L'analyse ici ressortit l'importance de considérer l'imbrication de ces différents aspects dans la fonction de contrôle exercée sur l'activité de résolution de problèmes en algèbre. Ce contrôle se manifeste à *différents moments* du processus de résolution (par exemple arrêt/ prise de distance avant toute résolution, anticipation, boucles de vérification locales et

d'interprétation, expression de doute en cours de route, vérification et interprétation en fin de processus) et prend *différentes formes*. Elle se manifeste ainsi dans le questionnement sur le contexte avant toute résolution, dans le processus de symbolisation de relations avec des retours sur celui-ci et des réajustements, dans les manipulations d'expressions, dans un choix d'inconnue et un processus de symbolisation non standards, réfléchis, ou encore, en arithmétique, dans un contrôle sur les grandeurs en jeu et leurs relations, dans une prise en compte simultanée des contraintes...

Cette analyse vient *confirmer certaines des composantes* mises en évidence dans notre conceptualisation initiale (anticipation, vérification, perception des erreurs, engagement réfléchi, retour sur la réponse et interprétation, choix éclairé) *tout en les nuancant et les enrichissant considérablement*. Ainsi la *vérification* et le *retour sur la réponse* n'apparaissent pas, par exemple, seulement en fin de processus, mais sont aussi présentes localement en cours de processus. On peut parler de boucles de vérification dans un processus cyclique de construction progressive du contrôle, s'éloignant d'un modèle statique et linéaire. L'analyse nous amène également à voir que cette vérification peut être de différente nature (retour à l'équation initiale, retour au contexte de départ ou à des éléments du contexte, croisement avec une anticipation préalable). Dans le même ordre d'idée, le *choix éclairé* ne réfère pas seulement à un choix de stratégie plus efficace parmi un ensemble de possibles (ce que nous n'avons nullement observé dans l'analyse de ces tâches) mais aussi à une capacité de percevoir, face à l'utilisation de règles syntaxiques dans la résolution d'équations, au delà de leur validité, leur efficience à des fins de résolution (voir tableau 3 à propos de la résolution de $16n+12n=578$).

De *nouvelles composantes* non anticipées, sur lesquelles prend appui cette construction progressive d'un contrôle sémantique et syntaxique, permettent enfin d'enrichir cette conceptualisation théorique, tels *une distance critique face à l'énoncé* (figure 1), *un recours à un schéma intermédiaire (plus simple) utilisé comme tremplin pour dépasser une difficulté* (figure 4) ou encore la *prise en compte de différentes contraintes* dans la résolution de type arithmétique (figure 9).

L'analyse montre enfin *l'interrelation entre ces diverses composantes*, qui s'épaulent l'une l'autre. Ainsi le contrôle conçu comme un processus va prendre appui sur une anticipation (de l'ordre de grandeur de la réponse) et une vérification (au regard de cette anticipation, ou des contraintes de l'énoncé), une sensibilité aux erreurs, une prise de distance face à la réponse ou la démarche, une expression de doute (conduisant à ne pas retenir ce que l'on a fait), un dépassement des erreurs (visible dans les réajustements que fait l'élève). À travers les productions des élèves, dans le problème du train, il est en effet possible de voir comment l'anticipation se révèle une composante du contrôle que les élèves utilisent (même si cela n'est pas explicite dans leurs productions) en cours de résolution, et qui les

conduit à un doute ou une vérification, parce qu'ils observent des incohérences entre ce qu'ils attendent et ce qu'ils obtiennent (voir figure 3). Cela confirme les résultats de Cipra (1985) et de Coppé (1993) à l'effet que la vérification, en plus d'être une stratégie dans la résolution de problèmes, joue un rôle inconscient de surveillance face aux incohérences que l'élève peut retrouver dans le processus de résolution. Dans le même sens, l'*engagement réfléchi* pourrait être en lien avec une « prise en compte des contraintes » et la perception d'erreurs. Cet *engagement réfléchi* permet aux élèves de faire une sélection de chemin au cours du processus, par un discernement ou par une prise de distance, qui pourrait être liés à un doute. Globalement, contrôle sémantique et syntaxique, anticipation, engagement réfléchi, vérification, sensibilité aux erreurs, doute, prise en compte des contraintes, etc., n'apparaissent pas ainsi comme des éléments isolés. Nous devons voir ces *composantes comme un réseau dynamique* : au fur et à mesure que l'élève avance dans la résolution d'un problème, elle/il renforce ce réseau promouvant, en retour, un enrichissement de chacune de ces composantes.

Que dire maintenant du contrôle examiné sous l'angle des approches arithmétiques et algébriques ? L'analyse a permis de repérer des *composantes du contrôle qui sont communes à ces deux approches* (vérification, retour sur la réponse, perception des erreurs, sentiment de doute, engagement réfléchi, etc.) mais aussi des *différences*. Face à une tâche de type algébrique, les restrictions sont prises en compte directement dans la mise en équation, de sorte que « le contexte s'éloigne » et que l'élève se concentre sur le traitement algébrique engageant un contrôle syntaxique. Une fois arrivé à un résultat, c'est le contexte qui émerge à nouveau, et qui détermine s'il faut faire un retour en arrière ou non. Pendant la résolution, lorsque le processus est long ou complexe, un questionnement, un doute peut émerger, et le contrôle syntaxique s'appuie sur une perception des erreurs, conduisant l'élève à se réajuster. Ainsi, une anticipation d'un résultat dans un contexte algébrique est probablement préservé pendant le traitement algébrique, et lorsque l'élève arrive à une réponse, le doute fait appel à cette anticipation et au contexte et va le renvoyer à l'analyse de sa procédure (tableau 2bis et figure 3). À l'opposé, dans le raisonnement arithmétique, le contexte est toujours présent (il interfère constamment avec la pensée de l'élève) de sorte que ce sont les contraintes du problème que l'élève devra prendre en compte (voir procédures et explications de la figure 9). La vérification et le retour sur le problème ne se manifestent pas non plus de la même façon dans l'un et l'autre cas. La vérification semble se faire après la résolution dans le cas de l'algèbre, elle intervient à différents moments en arithmétique dans une résolution qui garde une emprise constante sur la signification contextuelle.

Ce que nous avons montré dans cet article met globalement en évidence à propos du contrôle une activité cognitive exercée par l'élève différente de celle liée aux

connaissances mathématiques (en jeu dans cette résolution) ou aux stratégies de résolution de problèmes, agissant comme « régulateur » de cette résolution. Cette activité cognitive guide les décisions des élèves pendant la résolution de problèmes, et ce tout au long du processus. Pensons par exemple à la vérification qui a été motivée par une anticipation inconsciente, comme celle qui nous avertit quand on va traverser la rue et qu'on décide de la traverser ou de s'arrêter quand on voit une voiture s'approcher. Nous parlons d'une activité cognitive dynamique qui se développe en même temps que l'on progresse dans la résolution d'un problème, une activité cognitive qui est liée aux sentiments, qui va mettre l'élève dans un état de malaise quand l'élève repère une contradiction et qui va disparaître quand la contradiction est dépassée. Avons-nous suffisamment d'informations sur ce type d'activité cognitive ? Nous pensons qu'il faut continuer à faire des investigations qui pourront nous donner plus d'informations sur le sujet. Une analyse des manifestations du contrôle dans d'autres types de tâches en algèbre nous permettra de poursuivre cette réflexion.

Bibliographie

ARTIGUE, M. (1993). Connaissances et métaconnaissances – une perspective didactique. Dans M. Baron A. Robert A. (Dir.), *Métaconnaissances en IA, en EIAO et en didactique des mathématiques* (p.29-54). Cahier de DIDIREM, IREM, Paris.

BALACHEFF, N. ET GAUDIN , N. (2002). Students conceptions: an introduction to a formal characterization. *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, No. 65, <http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/>

BALACHEFF, N. ET GAUDIN , N. (2010). Modeling Students' Conceptions: The Case of Function, in Hitt, F., Holton D. and Thompson P. (Eds.), *Recherche in College Mathematics Education*, Volume VII, p. 207- 234.

BEDNARZ, N. ET DUFOUR-JANVIER, B. (1992). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. Dans A. Daife (Ed) *Actes du colloque sur la didactique des mathématiques et la formation des enseignants* (pp 21-40). Marrakech (Maroc) : École Normale Supérieure de Marrakech.

BEDNARZ, N., JANVIER, B., MARY, C. ET LEPAGE, A. (1992). L'algèbre comme outil de résolution de problèmes : une réflexion sur les changements nécessaires dans le passage d'un mode de traitement arithmétique à un mode de traitement algébrique, *Actes du colloque sur l'émergence de l'algèbre* (pp 17-31). Montréal, CIRADE, Université du Québec à Montréal.

BEDNARZ, N. ET JANVIER, B. (1994). The emergence and development of algebra in a problem solving context: an analysis of problems. In J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the 18th Annual conference of the International group for the psychology of mathematics education* (Vol. II, pp. 64-71), 29 juillet - 3 août, Lisbon, Portugal.

BEDNARZ, N. ET JANVIER, B. (1996). Algebra as a problem solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: perspectives for Research and Teaching* (pp. 115-136). Dordrecht: Kluwer.

BEDNARZ, N., ET SABOYA, M. (2007). Questions didactiques soulevées par l'enseignement de l'algèbre auprès d'une élève en difficulté au secondaire. Dans J. Giroux, D. Gauthier (dirs.), *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Hommage à Gisèle Lemoyne* (pp. 139-166). Montréal : Éditions Bande Didactique.

BOOTH, L. (1984). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit X*, 5, 5-17.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques*, 7 (2), 33-115.

CHAACHOUA, H., NICAUD J-F ET BITTAR M. (2005). Détermination automatique des théorèmes-en-acte des élèves en algèbre. Le cas des équations et inéquations de degré 1. Tchounikine P., Joab M. et Trouche L. (Éds.), *Environnements informatiques pour l'apprentissage humain (Actes de la conférence EIAH 2005, Montpellier, pp. 33-44)*. Lyon : ENS Éditions.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège (2^e partie). *Petit x*, 19, 43-72.

CIPRA, B. (1985). *Erreurs... et comment les trouver avant le prof... »*. Paris : Ed. InterEditions.

COPPE, S. (1993) *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé*. Thèse de doctorat inédite. Université de Lyon.

HADAMARD, J. (1945/1975). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*. Paris : Gauthier-Villars.

HITT, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Vol. 8, pp 255-271.

- KARGIOTAKIS, G. (1996). *Contribution à l'étude de processus de contrôle en environnement informatique : le cas des associations droites-équations*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques inédite. Université Paris VII - Denis Diderot.
- KRUTETSKII, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children* (Translated from Russian by J. Teller, edited by J. Kilpatrick and I. Wirszup). Chicago and London: The University of Chicago Press.
- LEE, L., ET WHEELER, D. (1989). The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematic*, 20, pp 41-54.
- LEMOYNE, G. (1989). La peur de ne pas savoir la réponse: les difficultés d'apprentissage et d'enseignement des mathématiques. Dans J. Gaudreau (Éd.), *Repères, essais en éducation*. (pp 79-101). Montréal: Les publications de la Faculté des sciences de l'éducation.
- LOCHEAD, J. ET MESTRE, J.P. (1988). From words to algebra: mending misconceptions. In A. F. Coxford (Ed.). *The ideas of algebra, K-12*. Yearbook of the national Council of teachers of mathematics (pp. 127-135). Reston : NCTM.
- MARGOLINAS, C. (1989). *Le point de vue de la validation : essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques*. Thèse de doctorat inédite. Université Joseph Fourier, Grenoble 1.
- MARGOLINAS, C. (1991). Interrelations between different levels of didactic analysis about elementary algebra. In F. Furinghetti (Ed.). *Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. II, pp. 381-388). Assisi, Italy : PME Program Committee.
- MARY, C. (1999). *Place et fonctions de la validation chez les futurs enseignants des mathématiques au secondaire*. Thèse de doctorat en éducation inédite. Université de Montréal.
- MASON, J. (1994). *L'esprit mathématique*. Bruxelles : De Boeck Université.
- MATZ, M. (1982). Toward a process model for High school algebra errors. In Sleeman and Browns (Eds.). *Intelligent Tutoring Systems* (pp. 25-50). New York : Academic Press.
- PIAGET, J. (1974). *Recherches sur la contradiction*. Avec la collaboration de A. Blanchet, G. Cellerier, C. Dami. M. Gainotti-Amann, Ch. Giliéron, A. Henriques-Christophides, M. Labarthe, J. De Lannoy, R. Maier, D. Maurice, J. Montangero, O. Mosimann, C. Othenin-Girard, D. Uzan, Th. Vergopoulo. *Les différentes formes de la contradiction. Volume 2*. Paris : Presses Universitaires de France.

POLYA, G. (1945/1965). *Comment poser et résoudre un problème*. Éditions Jacques Gabay.

ROBERT, A. (1993). Présentation du point de vue de la didactique des mathématiques sur les métaconnaissances. In M. Baron, A. Robert (Eds.) *Métaconnaissances en IA, en EIAO et en didactique des mathématiques*. RR Laforia 93/18 (pp. 5-18). Paris : Institut Blaise Pascal.

RICHARD, J.F. (1990/1998). *Les activités mentales : Comprendre, raisonner, trouver des solutions*. Université de Paris VII.

SABOYA, M. (2010). Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire. Thèse de doctorat en éducation. Université du Québec à Montréal.

SCHMIDT, S. ET BEDNARZ, N. (1997). Raisonnements arithmétiques et algébriques dans un contexte de résolution de problèmes: difficultés rencontrées par les futurs enseignants. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 127- 155.

SCHMIDT, S. (1994). *Passage de l'arithmétique à l'algèbre et inversement de l'algèbre à l'arithmétique, chez les futurs enseignants dans un contexte de résolution de problèmes*. Thèse de doctorat en éducation. Université du Québec à Montréal.

SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

SFARD, A. ET LINCHEVSKI, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification - The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 191-228.

SLEEMAN, D.H. (1986). Introductory algebra: A case study of students' misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 25-52.

MIREILLE SABOYA

201, Av. President Kennedy
Montréal, QC., H2X 3Y7
saboya.mireille@uqam.ca

NADINE BEDNARZ

201, Av. President Kennedy
Montréal, QC., H2X 3Y7
nadinebednarz@yahoo.ca

FERNANDO HITT

201, Av. President Kennedy
Montréal, QC., H2X 3Y7
hitt.fernando@uqam.ca

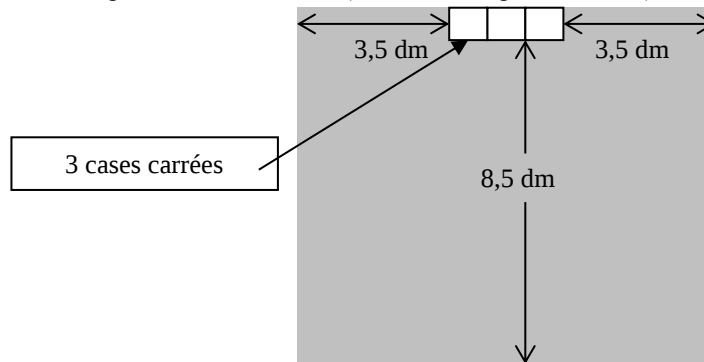
ANNEXE LE QUESTIONNAIRE

Problème 1¹⁶ : Il y a 578 passagers à transporter entre 2 villes. On dispose de 2 trains pour le faire. Un des trains a uniquement des wagons à 12 places, et l'autre uniquement des wagons à 16 places. En sachant que les deux trains ont le même nombre de wagons, combien doit-on accrocher de wagons après chacune des 2 locomotives?

Explique comment tu as fait pour trouver.

Problème 2¹⁷ : Le coffre à jouets

Je veux construire un coffre à jouets. Ce coffre a deux caractéristiques : le fond de mon coffre est carré et dans ce fond, il y a 3 cases carrées dans lesquelles Mathilde va pouvoir ranger ses perles. Voici le plan du fond du coffre (le dessin n'est pas à l'échelle) :



Il manque des dimensions. Peux-tu m'aider à les trouver?

Problème 3¹⁸ :

Trois sortes d'articles de sport ont été comptées dans un entrepôt. Pour les raquettes et les hockeys on a compté en tout 288 articles. S'il y a 5 fois plus de raquettes que de ballons et 48 hockeys de plus que de raquettes, combien y a-t-il d'articles de sport de chaque sorte dans l'entrepôt?

Explique comment tu as fait pour trouver.

¹⁶ Cette situation est tirée et modifiée de Bednarz, Radford, Janvier et Lepage (1992).

¹⁷ Ce problème a été inspiré d'une situation provenant d'un manuel français (Delord, R., Terracher, P.H., et Vinrich, G., 1993, *Mathématiques 3^e*. Hachette Éducation. France) de troisième (élèves de 14-15 ans), modifié après consultation avec les professeurs de la section en didactique des mathématiques de l'UQAM.

¹⁸ Ce problème provient des notes de cours du MAT2028, didactique de l'algèbre (session automne 2004), cours de deuxième année à l'UQAM destiné aux futurs enseignants de mathématiques au secondaire.

Problème 4¹⁹ :

On a donné ce problème à Brigitte : Je vais au magasin et j'achète le même nombre de livres que de disques. Les livres coûtent 2 dollars chacun et les disques coûtent 6 dollars chacun. Je dépense 40 dollars en tout.

- a) Brigitte a résolu le problème et a répondu ceci : $2L + 6D = 40$. Explique dans tes mots ce que signifie cette équation.
 b) Julie a résolu le problème de la façon suivante :

$$2x + 6y = 40$$

Puisque $x = y$, je peux écrire $2x + 6x = 40$ donc $8x = 40$.

Cette dernière équation indique que huit livres coûtent 40\$ donc un livre coûte 5\$.

Trouve ce qui est incorrect dans ce que dit et ce que fait Julie. **Explique pourquoi.**

Problème 5²⁰ :

Au restaurant, une tasse de café et trois croissants coûtent 2,70\$. Deux tasses de café et deux croissants coûtent 3\$. Trois tasses de café et un croissant coûtent 3,50\$. Trouve le prix d'une tasse de café et d'un croissant. **Explique comment tu as fait pour trouver.**

Problème 6²¹ :

Mélanie a-t-elle commis des erreurs en résolvant cette équation :

$$4x + 3 = 2(7x - 1) ?$$

	<u>Dis-moi ce qui est incorrect</u>	<u>Mets ce qu'elle aurait dû écrire</u>
$4x + 3 = 2(7x - 1)$ $4x + 3 = 14x - 1$ $3 = 10x - 1$ $4 = 10x$ $\frac{2}{5} = x$ $2,5 = x$		

¹⁹ Cette situation est tirée de Bednarz et Dufour-Janvier (1992), voir bibliographie.

²⁰ Ce problème provient du travail de thèse de Schmidt (1994), voir bibliographie

²¹ Cette situation a été inspirée par deux livres du secondaire, Breton (1994, page 248, *Carrousel mathématique 2*. Deuxième secondaire, tome 2. Montréal, Québec : Centre Éducatif et Culturel inc.) et Delord, Terracher et Vinrich (1993, exercice 15 page 70).

Problème 7²² :

- a) Résous l'équation suivante : $0,8x - 0,2(0,4x + 6) = 6$
 b) Vérifie que $x = 10$ est solution de cette équation.

Problème 8²³ :

Résous l'équation suivante :

$$x + \frac{x}{4} = 6 + \frac{x}{4}$$

Problème 9²⁴ :

Alexandre a résolu l'équation ci-dessous. Aide-le à continuer.

$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 3(x - 2) - x + 9 \\ 2x + 3 &= 3x - 6 - x + 9 \\ 2x - 3x + x &= -6 + 9 - 3 \\ 0x &= 0 \end{aligned}$$

Problème 10²⁵ :

Résous l'équation suivante :

$$5(2 + x) + 5(2 - x) = 4$$

Problème 11 :

Que vaut $(2r + 1)$ dans l'expression $4(2r + 1) + 7 = 35$.

Explique comment tu as fait pour trouver.

Problème 12²⁶ :

L'énoncé $(a^2 + b^2)^3 = a^6 + b^6$ est-il toujours vrai, jamais vrai ou parfois vrai ?

Explique.

²² Nous nous sommes inspirée de la situation proposée par Hitt (2004), mais l'équation a été adaptée à des élèves de secondaire 3. Référence : Hitt, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. Dans Gisèle Lemoyne (Éd.). *Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : complexité et diversité des cadres d'étude*. Volume 30 (1).

²³ Cette résolution d'équation est tirée de Bednarz et Dufour-Janvier (1992), voir bibliographie.

²⁴ Cette situation a été inventée par les chercheurs.

²⁵ Les chercheurs ont aménagé cette équation afin de vérifier l'engagement réfléchi des élèves quant à l'interprétation de $20 = 4$.

²⁶ Cette situation provient de Lee et Wheeler (1989), voir bibliographie.

Problème 13²⁷ :

Un enseignant donne à ses élèves l'expression algébrique suivante :

$$2(x - 4) - x + 1 - (-x^2 - 5)$$

Les élèves se regardent, perdus.... « Wow ! C'est bien compliqué ! » Élodie s'exclame alors « regardez, je l'ai transformé et je l'ai écrite comme ça : $x^2 + x - 2$ ». Marc répond « ben moi je l'ai transformé aussi et j'ai trouvé $(x - 1)(x + 2)$! »
« C'est super ! » dit l'enseignant. Ce dernier est très content, il te propose à toi de répondre à trois questions.

- Laquelle de deux écritures, celle d'Élodie ou de Marc vas-tu utiliser pour savoir à peu près combien vaut l'expression algébrique quand x vaut 10. Pourquoi ?
- Si tu veux résoudre $2(x - 4) - x + 1 - (-x^2 - 5) = 0$, laquelle des équations vas-tu choisir de résoudre : $x^2 + x - 2 = 0$ (celle d'Élodie) ou $(x - 1)(x + 2) = 0$ (celle de Marc) ? Pourquoi ?
- Si tu veux remplacer x par 1 dans l'expression algébrique de l'enseignant, ça risque d'être long.... Laquelle des deux autres expressions vas-tu plutôt choisir ? Pourquoi ?

²⁷ Cette situation est inspirée de celle présentée par Lenfant (2002). Référence : Lenfant, A. (2002). *De la position d'étudiant à la position d'enseignant : l'évolution du rapport à l'algèbre de professeurs stagiaires*. Thèse de doctorat inédite. Université Paris 7.

VIVIANE DURAND-GUERRIER, THOMAS HAUSBERGER, CHRISTIAN
SPITALAS

DEFINITIONS ET EXEMPLES : PREREQUIS POUR L'APPRENTISSAGE DE L'ALGÈBRE MODERNE

Abstract. Definitions and Examples: Prerequisites for the Learning of Modern Algebra. The aim of this paper is a first didactical study of the learning difficulties of modern algebra concepts in a first degree in mathematics at University. This study is part of a wider research whose goal is the development of a didactics of mathematical structuralism supported on its epistemology. The empirical data analyzed in this paper are taken from a questionnaire, submitted to third year mathematics students at Montpellier University, in order to test the acquisition of notions previously identified as prerequisites to the learning of group theory. First, we develop the epistemological and cognitive aspects on one hand, and the input of logical semantics on the other hand. Next, we present the *a priori* and *a posteriori* analysis of the questionnaire submitted to students, and then return to our research question to provide a first set of elements of response to the problem of the teaching and learning of modern algebra. We end our paper by a general conclusion and new perspectives opened up by this work.

Résumé. L'objectif de cet article est une première étude didactique des difficultés d'apprentissage des concepts de l'algèbre moderne en licence de mathématiques. Cette étude s'inscrit dans le cadre d'un travail plus large visant à développer une didactique du structuralisme en appui sur son épistémologie. Les données empiriques analysées dans l'article proviennent d'un questionnaire, proposé à des étudiants de troisième année de licence à l'Université Montpellier 2, destiné à tester l'acquisition des notions préalablement identifiées comme prérequis à l'apprentissage de la théorie des groupes. Tout d'abord, nous développons les aspects épistémologiques et cognitifs, d'une part, et les apports de la sémantique logique, d'autre part. Nous présentons ensuite les analyses *a priori* et *a posteriori* du questionnaire soumis aux étudiants, puis nous revenons sur notre questionnement et dégageons des premiers éléments de réponses relativement à la problématique de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre moderne. Nous terminons par une conclusion générale et quelques perspectives ouvertes par ce travail.

Mots-clés. Algèbre moderne, structure de groupe, didactique des mathématiques, structuralisme algébrique, définitions axiomatiques, exemples, syntaxe et sémantique.

Introduction

Les difficultés d'apprentissage des concepts de l'algèbre moderne en licence de mathématiques sont bien connues des enseignants du supérieur. Pour autant, peu de travaux ont été conduits sur ces questions. Nous présentons dans cet article les premiers éléments d'un travail en cours que nous conduisons à l'université de Montpellier 2 sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre moderne.

En ce qui nous concerne, nous entendons par algèbre moderne (selon la terminologie introduite par van der Waerden en 1930, par opposition à l'algèbre classique centrée sur les techniques de résolution des équations) l'étude des structures algébriques telles que groupe, anneau et corps. Ces dernières structures sont enseignées de nos jours, en France, en troisième année de licence (L3). Cette algèbre est abstraite au sens où elle étudie les modes d'organisations possibles d'éléments dont la nature est indéterminée.

Les travaux didactiques antérieurs sur l'algèbre de niveau universitaire portent essentiellement sur l'enseignement de l'algèbre linéaire en première et deuxième année de licence (Dorier 1997). En définitive, le terrain de l'algèbre générale reste grandement à défricher, malgré quelques travaux comme, par exemple, ceux de Lajoie et Mura (2004) mettant en évidence les difficultés liées à l'apprentissage de la notion de sous-groupe distingué et de groupe quotient, ou encore ceux de Azrou (2013).

Cet article s'inscrit dans le cadre d'un travail plus large conduit par l'équipe de didactique et épistémologie des mathématiques au sein du laboratoire I3M à Montpellier suivant deux axes principaux. Le premier axe, qui concerne l'étude des difficultés rencontrées par les étudiants dans l'apprentissage de la structure de groupe, fait l'objet de la thèse en cours de Christian Spitalas, co-encadrée par Viviane Durand-Guerrier et Thomas Hausberger. L'analyse fine du rôle joué, dans le processus de conceptualisation, par les définitions et les exemples, ainsi que leurs interactions dialectiques, est au cœur de cette thèse. Le second axe comporte un questionnement épistémologique sur la pensée structuraliste (Hausberger 2012) en vue de développer une « didactique du structuralisme » (Hausberger 2015a). Enfin, ces recherches se nourrissent des travaux de Durand-Guerrier (2013) sur les apports de la sémantique logique pour les études didactiques.

Les données empiriques analysées dans l'article proviennent d'un questionnaire, proposé à des étudiants de troisième année de licence à l'Université Montpellier 2, destiné à tester l'acquisition des notions, tant mathématiques que méta-mathématiques (voir partie 3 ci-dessous), préalablement identifiées comme prérequis à l'apprentissage de la théorie des groupes. Au sein de ce questionnaire, un certain nombre de définitions et d'exemples, à restituer ou à construire, sont notamment demandés aux étudiants. Ces choix sont portés par nos analyses épistémologiques et cognitives soulignant l'importance de ces derniers en tant que prérequis à la construction d'une théorie abstraite des groupes. Les analyses logiques viennent quant à elles enrichir les analyses praxéologiques et éclairer les difficultés rencontrées par les étudiants dans la réalisation de ces tâches.

Dans un premier temps, nous développerons les aspects épistémologiques et cognitifs, d'une part, et les apports de la sémantique logique, d'autre part. Nous présenterons ensuite les analyses a priori et a posteriori du questionnaire soumis

aux étudiants, puis nous reviendrons sur notre questionnement et dégagerons des premiers éléments de réponses relativement à la problématique de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre moderne. Nous terminerons par une conclusion générale et quelques perspectives ouvertes par ce travail.

1. Aspects épistémologiques et cognitifs

Cette section apporte quelques éléments sur la nature épistémologique particulière de l'algèbre moderne et répond à la question suivante : en quoi les définitions d'objets et de structures algébriques (groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels, élément neutre, inversible, irréductible, relation d'équivalence, division euclidienne, etc.) et les exemples de ces objets et structures, *identifiés en tant que tels* en L1 et L2, constituent des prérequis à l'enseignement de l'algèbre moderne en L3, c'est-à-dire au développement en classe d'une théorie abstraite des structures algébriques de groupe, d'anneau et de corps.

1.1. L'algèbre moderne, un savoir FUGS

Les structures algébriques font partie des savoirs identifiés par les didacticiens, sur un plan épistémologique, comme des FUGS, c'est-à-dire des concepts formalisateurs, unificateurs, généralisateurs, simplificateurs (Robert 1987). Les difficultés liées à l'apprentissage de ces concepts peuvent alors être analysées en partie comme une conséquence de leur nature FUGS (Rogalski 1995).

Nous ne détaillerons pas ici ces éléments théoriques. Pour autant, il est utile de rappeler que l'une des stratégies proposée par Dorier et al. (1994) pour favoriser l'apprentissage des savoirs FUGS est la construction d'ingénieries longues, se donnant le temps de construire des savoirs préalables à unifier (consolidant également les prérequis), de les relire dans la théorie unifiée, enfin de mettre en avant des nouveaux problèmes inaccessibles auparavant.

C'est à ce temps d'élaboration des savoirs préalables auxquels les définitions et exemples, objets de cet article, participent. Parce que de telles ingénieries longues sont difficiles à mettre en place, il apparaît comme important, dans la gestion du temps didactique, de bien préparer le terrain en amont. Pour cela, il ne s'agit pas uniquement de fournir les prérequis empruntés à diverses branches et différents cadres (géométrie, arithmétique, etc.), mais de présenter les divers exemples d'une manière propice à une uniformisation future, c'est-à-dire à leur reconnaissance comme des objets ayant une structure commune dont on fera plus tard une théorie abstraite. Un premier pas dans le processus de conceptualisation consiste alors à mettre en parallèle ces définitions abstraites, regardées comme des étiquettes posées sur des boîtes à remplir, avec des classes d'exemples concrets rencontrés au gré des activités mathématiques. Un des objectifs du questionnaire (troisième partie de cet article) est d'évaluer l'acquisition de ce premier niveau de conceptualisation.

1.2. Formes, opérations et objets

Ce paragraphe pose les enjeux et la dynamique de déploiement de la pensée structuraliste en terme du triptyque formes-opérations-objets introduit par Granger (1994). Le questionnement philosophique éclaire également la dynamique du processus de conceptualisation, lorsqu'il s'agit d'accéder ou de faciliter l'accès à ce mode de pensée.

Les mathématiques sont une science formelle dont les objets sont construits essentiellement selon deux dynamiques : certains objets mathématiques proviennent par abstraction du monde sensible (le triangle, les entiers naturels, etc.) alors que d'autres sont nées des nécessités du développement interne de la théorie (les imaginaires, les nombres premiers, etc.). Le processus de reconnaissance des formes est déjà présent chez l'animal : c'est un processus cognitif qui passe par l'identification d'invariants. Granger définit alors la *forme* comme le *cadre invariant à l'intérieur duquel le contenu fonctionne comme porteur d'information*. Les objets mathématiques sont par essence des formes, le fruit d'un processus de symbolisation. Il n'y a pas de forme sans contenu (cela conduirait à une théorie mathématique vide) ni de contenu sans forme (l'exigence de définition des objets mathématiques impose de poser un cadre : souvent, il s'agit de la théorie des ensembles).

L'acte de cognition est pour Granger la *reconnaissance et l'exploitation d'une dualité de l'opération et de l'objet*. Il donne pour exemple la théorie des groupes : « Ainsi la notion de groupe est-elle apparue d'abord comme système de permutations composables et inversibles portant sur des objets numériques – les racines d'une équation algébrique. C'est bien alors le jeu des règles gouvernant les opérations qui est mis en vedette, et par le moyen duquel on parvient à déterminer les objets, dans la théorie de Galois et de Lagrange. Puis la notion de groupe abstrait est dégagée explicitement par Cayley, dans laquelle on considère cette fois un système d'objets quelconques, muni d'une loi de composition. L'extension conceptuelle ouverte par la mise en lumière de cette perspective duale rend possible une synthèse d'idées et de résultats antérieurs, qui constituera l'« Algèbre moderne » » (Granger 1994 p.39).

Il y a en définitive co-détermination des opérations et des objets, ce que les définitions axiomatiques des structures algébriques illustrent bien : ce n'est pas étonnant que ces dernières se présentent essentiellement comme des formalisations de systèmes opératoires (précisément des ensembles munis de lois et vérifiant diverses propriétés). Le groupe symétrique et les groupes issus de la géométrie sont des groupes de transformation : ils opèrent naturellement sur des ensembles. Abstraire la structure de groupe, c'est dégager les conditions internes de leur opérationnalité.

Les théories de structures algébriques sont des théories de formes d'objets mathématiques (lesquels sont déjà des formes). C'est une formalisation au sein du domaine mathématique formel (niveau 1) donc un niveau supérieur d'organisation (niveau 2). Développer une théorie abstraite des groupes, c'est ainsi prendre la forme de groupe pour objet : c'est en développer le contenu formel au sein de ce niveau supérieur d'organisation. En développer les possibilités opératoires conduit naturellement à la description des groupes en terme de générateurs et de relations (c'est historiquement le premier pas vers la structure de groupe abstrait, réalisé par Cayley). Cela conduit également à formaliser l'action de groupe sur un ensemble : les groupes sont faits pour opérer.

La pensée structuraliste se situe encore à un niveau supérieur (niveau 3) : elle vise à reconnaître, relier les diverses structures et à rendre opératoire la notion même de structure. Cette dernière est la forme de l'objet groupe abstrait, qui prend place à côté des anneaux abstraits, des corps et des autres structures algébriques abstraites. Prendre la notion de structure pour objet, c'est développer une méta-théorie des structures comme la théorie des catégories. C'est encore différent de la démarche qui consiste à poser la notion de structure comme principe organisateur des théories algébriques (Bourbaki a développé une pensée structuraliste mais « loupé le coche » de la théorie des catégories).

1.3. Définitions par axiomes et méthode axiomatique

Jadis réservée à la géométrie d'Euclide, la présentation axiomatique des mathématiques a été érigée en méthode par Hilbert et prônée par ses successeurs (dont Bourbaki 1948). Il s'agissait d'une part d'apporter la rigueur dans un contexte de crise des fondements, d'où l'usage logique de la méthode axiomatique : on questionne alors l'indépendance des axiomes, la non-contradiction du système d'axiomes, etc. D'autre part, la présentation axiomatique des objets et théories mathématiques a joué un rôle important pour dégager les structures abstraites : en effet, les définitions par axiomes abstraient la nature particulière des objets et mettent l'accent sur les relations (le logique est en quelque sorte le degré zéro de la structure).

Cet usage immanent de l'axiomatique, au sens où elle permet d'établir des définitions implicites de concepts indépendamment de la nature des objets, est bien visible dans l'histoire des structures algébriques, telle que l'expose, par exemple, Wussing (2007) ou bien Corry (1996) : ainsi Kronecker énonce-t-il très tôt une caractérisation axiomatique d'un groupe abélien fini. De même Dedekind introduit-il les idéaux par une axiomatique, ainsi que les corps, synonymes de corps de nombres (un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ clos sous les 4 opérations¹). Pour autant, il ne

¹ Il s'agit également de demander que le corps soit de dimension finie en tant qu'extension du corps des rationnels (donc en tant que $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel). Cette condition est nécessaire afin de pouvoir

suffit pas d'axiomatiser les concepts clefs de l'algèbre pour parler de mathématiques structurales. Ainsi Kronecker n'a pas fait le lien entre les groupes de permutation et sa présentation axiomatique des classes modulo un entier car il ne poursuivait pas un objectif d'uniformisation. De même, Weber définit groupes et corps sous forme axiomatique dans son exposition de la théorie de Galois mais reste attaché à une vision de l'algèbre comme théorie des équations. En définitive, ce ne sont pas tant les définitions abstraites des concepts que l'architecture de la théorie et le mode de raisonnement utilisé (par construction de concepts et déploiement de ces concepts de façon à faire apparaître leur nature FUGS) qui caractérisent les mathématiques structurales. Un des premiers exemples de telles mathématiques sera donné par Steinitz dans sa classification abstraite des corps.

Cavaillès (2008, p. 512) nous éclaire sur la différence à saisir, à savoir la distance qui sépare l'*idéalis*ation de la *thématis*ation : « Mais la formalisation n'est réalisée que lorsqu'au dessin des structures se superposent systématisées les règles qui les régissent. La thématization prend pour départ l'enchaînement saisi cette fois dans son vol, trajectoire qui se mue en sens. La pensée ne va plus vers le thème créé mais part de la façon de créer pour en donner le principe par une abstraction de la même nature que l'autre, mais dirigée transversalement ».

Dans notre contexte, l'idéalisation est la dynamique qui vise à constituer des espaces généraux de formes abstraites et à laquelle les définitions par axiomes contribuent grandement. Une partie des difficultés cognitives de cette phase est liée à l'acquisition de la méthode axiomatique en tant que démarche faisant sens par rapport aux pratiques mathématiques effectives (liées à la manipulation d'objets). Ainsi les étudiants ont-ils tendance à oublier la définition axiomatique d'espace vectoriel, car elle est en général peu significative en relation avec les tâches usuelles demandées. La mise en avant des définitions par axiomes et la rigueur apportée par la méthode axiomatique constitue un changement de contrat visible dès l'entrée à l'Université. La phase de thématization est, dans l'enseignement supérieur français actuel, réservée en général (c'est le cas à Montpellier) à une deuxième étape, qui est celle de l'apprentissage des structures algébriques abstraites en L3. Le changement de contrat se trouve encore renforcé.

1.4. Rôle des exemples paradigmatiques

La notion de paradigme, sous son acception la plus courante en épistémologie des sciences, est celle introduite par T. Kuhn (1983), sur la base de recherches historiques et sociologiques. Elle est davantage pertinente pour rendre compte du développement des sciences expérimentales. En effet, les changements de paradigme s'accordent peu à l'épistémologie formelle des mathématiques : comme

associer au corps un anneau qui possède des propriétés arithmétiques convenables, en l'occurrence des irréductibles en nombre suffisant.

l'a remarqué Cavaillès (2008), la nécessité interne², l'architecture, neutralise la contingence historique (Cavaillès parle de « cette histoire qui n'est pas une histoire »). Ce serait donc davantage une philosophie du concept qui rendrait compte du développement des mathématiques, par une dialectique interne, en opposition à l'idée de contingence, c'est-à-dire qui trouve ses raisons hors de soi. Pour autant, cette idée de paradigme est intéressante car elle renvoie à une pratique de la science au sein d'une communauté, qui légifère et normalise, qui constitue ses paradigmes. C'est en terme de constitution (et non de changement) que les pensées de Kuhn et Cavaillès se rejoignent : Cavaillès introduit le terme « paradigme » dans son ouvrage *Sur la logique et la théorie de la science*, paru en 1947 pour désigner un processus de pensée synonyme du processus d'idéalisation (voir 1.3), qui justifie son nom en tant qu'il constitue des liaisons-types. Les paradigmes sont donc des abstraits formels chez Cavaillès.

La notion d'exemple paradigmatique sera pour nous une transposition-synthèse de ces deux idées de paradigme : un exemple (ou une classe d'exemples) est paradigmatique lorsqu'il (ou elle) permet de dégager un ensemble de concepts et de processus opératoires qui ont une portée générale et peuvent être mis en œuvre sur d'autres exemples selon le même schéma. En d'autres termes, il se dégage une pratique avec un fort potentiel théorique et une aptitude à « faire école » et donner sens à une élaboration théorique future, pour reprendre le terme de Kuhn, à engendrer une « science normale ».

Il en est ainsi du groupe symétrique en théorie des groupes : cet exemple paradigmatique de groupe non abélien (à plus d'un titre puisque, d'après le théorème de Cayley, tout groupe fini peut être vu comme un groupe de permutations) est le prototype historique de groupe. Il se prête particulièrement bien aux calculs et permet de travailler la notion d'ordre d'un élément, de sous-groupe engendré, de générateur et de relations, de conjugaison, de suite de décomposition, etc. De même, $\mathbb{Z}$ et $K[X]$ sont des prototypes d'anneaux euclidiens, mais l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ des entiers de Gauss est davantage paradigmatique lorsqu'il s'agit d'étendre l'arithmétique de $\mathbb{Z}$ et construire une théorie abstraite de la divisibilité dans les anneaux. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est le prototype de groupe cyclique et d'anneau quotient ; il est un point d'appui important pour l'étudiant lorsqu'il s'agit de calculer dans un corps fini $\mathbb{F}_p[X]/(P)$ ou de conceptualiser un tel quotient. Enfin, à un niveau supérieur d'organisation, la structure d'espace vectoriel longuement travaillée au cours des deux premières années de licence, devient un exemple paradigmatique relativement à la pensée structuraliste : elle met en avant des définitions par

² « Le développement de la mathématique entière se fait suivant un rythme nécessaire : il y a un conditionnement réciproque des notions et des élargissements que provoque leur application obligatoire dans des domaines voisins », Cavaillès 2008.

axiomes et une présentation axiomatique de la théorie, ainsi que des théorèmes de structure (tout espace vectoriel admet une base, etc.).

En ce qui concerne l'apprentissage des structures algébriques, la mise en place de ces exemples paradigmatiques est d'autant plus fondamentale que le mode de pensée conceptuel qui est mobilisé par l'algèbre abstraite constitue un changement de paradigme relativement aux pratiques algébriques antérieures (historiquement, l'algèbre des équations et dans le contexte scolaire, celles du lycée).

1.5. Concepts et conceptualisation

« Mathématique conceptuelle » (*begriffliche Mathematik*) est le terme utilisé par les mathématiciens allemands des XIX^e et XX^e siècles (Riemann, Hasse, Dedekind, Hilbert, Emmy Noether) pour caractériser leur méthode de travail, focalisée sur la formation de concepts. La pensée structuraliste se caractérise donc, plus que par le type d'objet étudié, par une méthodologie et un style spécifique, qui a fait école à Göttingen autour de Noether. Cette école change la manière de prouver en privilégiant les preuves générales limitant les calculs et mettant en avant les concepts. Définir des concepts a pour objectif de reconstruire un domaine sur une nouvelle base, sur la base de concepts plus fondamentaux, plus généraux et plus « simples ». Sous la plume des algébristes, concepts et structures souvent se confondent.

La théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1990) laisse ouverte cette possibilité de prendre les concepts eux-mêmes comme objets. Il s'agit en effet d'une théorie cognitive qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage des connaissances complexes, dont les mathématiques (mais pas seulement). Elle vise en particulier à comprendre les filiations et les ruptures entre connaissances (savoir-faire et savoirs exprimés) (op. cit. p. 133)

La notion d'invariant opératoire est au cœur de ces filiations et ruptures. Vergnaud distinguent trois types logiques fondamentaux³ (pp. 142-145) : 1. des invariants de type *propositions* : ils sont susceptibles d'être vrais ou faux - les *théorèmes-en-acte* sont des invariants de ce type - 2. des invariants de type *fonction propositionnelle* : ils ne sont pas susceptibles d'être vrais ou faux, mais ils constituent des briques indispensables à la construction des propositions. Les *concepts-en-acte* sont de ce type - 3. des invariants de types *arguments* ; ce sont des objets qui permettent de saturer les fonctions propositionnelles : *objets matériels, nombres, fonctions, ensembles, relations, propositions*, etc.

³ L'importance de la prise en compte de ces catégories logiques dans les études didactiques est développée dans Durand-Guerrier (2013)

Les exemples donnés par Vergnaud mettent en valeur le fait que :

« Ces distinctions sont indispensables pour la didactique parce que la transformation des concepts- outils en concepts-objets est un processus décisif dans la conceptualisation du réel. Cette transformation signifie entre autres choses que les fonctions propositionnelles peuvent devenir arguments. La nominalisation est une opération linguistique essentielle dans cette transformation. » (p. 145)

Rappelons que les fonctions propositionnelles modélisent les propriétés et les relations ; celles-ci sont satisfaites ou non par des objets auxquels elles sont susceptibles de s'appliquer. Par exemple : « être un nombre premier » est une propriété modélisée par une fonction propositionnelle de la forme $F(x)$, où x est une variable libre. Ce point de vue s'inscrit dans la perspective sémantique en logique initiée par Frege.

Ceci veut dire que des *concepts* peuvent devenir des objets (des *arguments* pour une nouvelle *fonction propositionnelle*), comme dans l'exemple suivant : « avoir le même cardinal que » est une relation d'équivalence.

Dans l'article de 2002 sur les formes opératoires et les formes prédicatives de la connaissance, Vergnaud écrit :

« La suite naturelle du questionnement théorique concerne les relations entre la forme opératoire et la forme prédicative de la connaissance, notamment entre une règle, un théorème-en-acte et un théorème tout court. La complexité n'est pas que dans le faire, elle est aussi dans le dire. L'énonciation des objets et de leurs propriétés est essentielle dans les processus de conceptualisation. » (Vergnaud, 2002, p. 14).

En 2004, lors du colloque organisé en son honneur, il revient sur cette question en insistant sur la nécessité de ne pas laisser s'installer une rupture entre connaissances opératoires et connaissances prédicatives (Merri, 2007, pp.348-349). Il ajoute à ce propos : « La forme prédicative de la science est évidemment essentielle, justement parce qu'elle est explicite et peut-être partagée, mais une connaissance qui n'est pas opératoire n'est pas véritablement une connaissance. » (p.349)

Nous faisons l'hypothèse que ce cadre théorique élaboré par Vergnaud est pertinent pour penser le processus de conceptualisation de l'algèbre abstraite ; néanmoins un travail important reste à entreprendre afin d'examiner, dans le processus de conceptualisation de l'algèbre abstraite, les invariants opératoires organisant l'action du sujet relativement aux situations qui fondent ces nouvelles pratiques algébriques. Dans ce travail, les définitions et exemples joueront assurément un rôle prépondérant et pleinement élaborateur. De même que Granger insiste sur la co-détermination des opérations et des objets (du point de vue de la connaissance),

la mise en évidence des invariants opératoires est important du point de vue de la conceptualisation des objets structuraux car c'est bien le fonctionnement du concept en relation avec le sujet connaissant qu'il ne faut pas perdre de vue. Il s'agit également de prendre en charge la part de réflexivité qui est inhérente à la démarche algébriste contemporaine et dont la transposition didactique peut se traduire par une mise en situation à caractère méta (démarche entreprise par Dorier et al. (1994) et Dorier (1997) dans le cas de l'algèbre linéaire). Relativement aux définitions et exemples, cela revient à interroger la fonction de ces derniers dans l'élaboration théorique et le rôle des exemples en tant que représentations dans le processus de conceptualisation (en termes mathématiques, ce sont des modèles).

2. Les apports de la sémantique logique

Dans cette section, nous présentons des éléments d'analyses épistémologique et didactique mettant en valeur les éclairages que peut apporter le point de vue sémantique en logique pour éclairer les analyses didactiques (Durand-Guerrier, 2013). Nous nous intéressons en particulier à ce que ce point de vue apporte pour travailler avec les définitions.

2.1. Le point de vue sémantique en logique classique

La sémantique logique a été développée à la fin du XIX^e siècle et au début du vingtième siècle par, en particulier, Frege, Russell, Wittgenstein ou Tarski et elle fut popularisée par Quine. Le point de vue adopté consiste à considérer comme centrale les articulations entre les aspects syntaxiques et sémantiques en logique. Les connecteurs logiques sont définis par leurs conditions de vérité, même lorsque ceci rentre en conflit avec la logique de sens commun, comme c'est le cas pour l'implication entre propositions qui est vrai lorsque son antécédent est faux, et ce quelque soit la valeur de vérité du conséquent (cf. Frege, 1971). D'autre part, la nécessité de prendre en compte les questions de quantification conduit ces auteurs à accorder une place centrale à la notion de prédicat (ou fonction propositionnelle) qui modélise les propriétés ou les relations (cf. Russell, 1903). Ceci conduit Tarski à introduire la notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément de l'univers du discours, introduite afin de pouvoir donner une définition récursive de la vérité (Tarski, 1936a, 1972) via une extension des connecteurs propositionnels : une implication ouverte de la forme « $P(x) \Rightarrow Q(x)$ » est satisfaite par un élément a de l'univers du discours si et seulement si l'implication entre proposition « $P(a) \Rightarrow Q(a)$ » est vraie dans le domaine d'interprétation considéré. L'articulation entre syntaxe et sémantique a conduit en outre ces auteurs à clarifier la distinction, déjà identifiée par Aristote, entre vérité dans une interprétation et validité logique. Ceci est développé dans Wittgenstein (1921, 1993) pour le calcul des propositions et dans Tarski (1936c, 1969) pour la logique des classes et le calcul des prédicats. Quine (1950, 1972) en présente une synthèse et met en valeur la clarification

conceptuelle apportée par la modélisation des énoncés de la langue dans le calcul des prédicats. Durand-Guerrier (2005, 2008) a montré la pertinence de cette approche sémantique pour l'étude didactique du raisonnement mathématique.

2.2 Un point de vue logique sur la notion de définition en mathématique

D'un point de vue logique, une définition est une phrase ouverte, associée à une propriété d'objet (exemple : « être un nombre premier ») ou à une relation entre objets (exemple : « être congruent à »), satisfaite par certains objets d'un domaine donné (éventuellement par un seul objet) et pas par d'autres. Elle n'est donc ni vraie ni fausse. Ce qui est vrai ou faux, c'est le fait qu'un objet satisfasse ou non cette définition (« tombe sous le concept associé », dans le vocabulaire de Frege). Au niveau que nous considérons, la structure logique des définitions est le plus souvent extrêmement complexe. Considérons par exemple la définition d'une famille génératrice d'un espace vectoriel.

« Une famille de vecteurs A d'un K -espace vectoriel E est génératrice dans E si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de A . »

Ici les variables libres sont K , E et A ; on définit ainsi une relation $G(A,E,K)$ par :

$$G(A,E,K) \Leftrightarrow_{\text{def}} [(A \subset E) \text{ et } (\forall u \in E, \exists n \in \mathbb{N}, \exists (l_1, l_2, \dots, l_n) \in K^n, \exists (u_1, u_2, \dots, u_n) \in A^n, u = l_1 u_1 + l_2 u_2 + \dots + l_n u_n)]$$

Une telle définition, comme c'est très souvent le cas en mathématiques, n'est pas une conjonction de propriétés élémentaires ; il s'agit d'une élaboration plus complexe qui fait intervenir des éléments de différente nature (espace vectoriel, corps sous-jacent, loi interne et loi externe, famille de vecteurs, éléments du corps sous-jacent, éléments de l'ensemble sous-jacent) et des quantificateurs : ici les éléments sont associés à des variables liées, les ensembles sont associés à des variables libres.

Une telle définition étant donnée, on peut envisager différents types de tâches en lien avec la relation entre *définition* et *exemples* :

- donner des exemples de triplets satisfaisant cette définition
- déterminer si un triplet donné satisfait ou non cette définition
- élaborer des objets satisfaisant cette définition : on peut pour cela fixer certaines des variables libres : E et K étant donnés, trouver des parties génératrices de E ; éventuellement les trouver toutes ; chercher celles ayant le nombre minimal d'éléments, etc.

- considérer un K -espace vectoriel F ; une partie A de F étant donnée, chercher E tel que A soit une partie génératrice du K -espace vectoriel E ; ceci conduit à la notion de sous espace vectoriel engendré par une partie de F .

Nous faisons l'hypothèse que la complexité logique de cette définition et la variété des types de tâches associées fournissent des indications sur les difficultés que les étudiants sont susceptibles de rencontrer pour la maîtriser, et ce d'autant plus que les types de tâches associées font rarement l'objet d'un travail autonome des étudiants.

2.3. La notion de conséquence logique et la méthodologie des sciences déductives

Dans la suite de son travail sur la définition sémantique de la vérité, Tarski définit la notion de conséquence logique d'un point de vue sémantique. Il introduit pour cela la notion de modèle d'une formule du calcul prédicat : étant donné une formule F et un domaine d'interprétation dont l'univers du discours est non vide, ce domaine est un modèle de F si et seulement si l'interprétation de F est un énoncé vrai du domaine. Par définition, on dira qu'une proposition X suit logiquement d'une classe K de propositions si et seulement si tout modèle de K est un modèle de X (Tarski, 1936b, 1972). Notons que ceci revient à dire que l'énoncé implicatif dont l'antécédent est formé de la conjonction des éléments de K et dont le conséquent est X est vrai dans tout domaine d'interprétation dont l'univers du discours est non vide, autrement dit est un énoncé universellement valide au sens de Quine. Ceci généralise la notion de tautologie développée par Wittgenstein (1921, 1993) : un énoncé du calcul des propositions est une tautologie si et seulement si il prend la valeur vraie pour toute distribution de valeur de vérité. Les tautologies et les énoncés universellement valides du calcul des prédicats sont associés aux règles d'inférence valides utilisées dans le raisonnement mathématique (Quine, 1950, 1972).

Tarski (1936c, 1969) met à profit cette relation entre vérité et validité pour introduire la méthodologie des sciences déductives. Étant donnée une mini-théorie T (il donne l'exemple de la congruence des segments), il dégager la forme logique des axiomes de cette théorie en introduisant autant de lettres de prédicats que nécessaire. Il définit alors le système axiomatique associé au sein du calcul des prédicats qui constitue une classe de propositions. Un théorème de la mini-théorie est un énoncé qui se déduit logiquement des axiomes par des règles de déduction (d'inférence) valides. Un tel théorème est associé à une formule F du calcul des prédicats, qui est une conséquence logique du système axiomatique. Tarski ajoute qu'il est possible en outre d'en donner une preuve purement logique. Ceci fait, Tarski considère d'autres modèles du système axiomatique qu'il vient de dégager. Dans ces modèles, l'interprétation de la formule F précédente est un théorème de la

nouvelle interprétation. Il n'est donc pas nécessaire de refaire une preuve mathématique. Cette construction est le fondement de ce que Tarski appelle « Preuves par interprétation » : pour prouver que dans une théorie donnée, un énoncé n'est pas conséquence logique des axiomes, il suffit de construire un modèle du système axiomatique logique de la théorie dans lequel l'interprétation de la formule associée à l'énoncé est fausse⁴. La méthodologie des sciences déductives entretient des liens étroits avec la méthode axiomatique en mathématique ; ainsi la théorie des groupes peut être considérée, par exemple, comme un système axiomatique de la théorie des substitutions, système axiomatique pour lequel on a enrichi le calcul des prédicats pour disposer, dans le langage formel, des constantes nécessaires pour les définitions des axiomes. Selon ce point de vue, donner un exemple de groupe, c'est en fait donner un modèle du système axiomatique caractérisant la théorie des groupes. Sinaceur (1991) souligne la fécondité de cette approche orientée vers l'action, qui, selon elle, fournit une épistémologie effective pour les mathématiques.

3. Une étude exploratoire sur les prérequis des étudiants de L3

3.1 Motivations, contexte, choix globaux, modalités de passation

Les difficultés que nous avons constatées, relativement à l'apprentissage des structures algébriques telles que les groupes, nous ont amenés à nous interroger sur les origines possibles de ces difficultés. Dans ce cadre, la question des prérequis a été examinée. La théorie des groupes étant une théorie axiomatique abstraite et un de ses principaux intérêts d'étude résidant dans la diversité de ses champs d'application et dans sa dimension unificatrice, la connaissance des différents domaines dans lesquels elle se réalise (ses « modèles ») est donc nécessaire à une bonne compréhension de la théorie. C'est pourquoi la question des prérequis est particulièrement essentielle dans ce contexte. Ont d'abord été distingués les prérequis directement liés à la construction de la théorie des groupes (théorie élémentaire des ensembles, relation d'équivalence, ensemble quotient). Ensuite les prérequis logiques et méta-mathématiques : capacité à produire des définitions, des exemples, et à utiliser les définitions pour s'engager dans une preuve, ainsi que l'utilisation de la quantification. Enfin, ceux nécessaires à l'entrée dans une pensée structuraliste : familiarité avec les définitions axiomatiques, mise en relation des structures avec des objets, expérience antérieure avec une structure algébrique (notamment celle d'espace vectoriel). Seule structure étudiée dans le détail les années antérieures, l'espace vectoriel se présente comme un cadre particulièrement approprié à l'étude des prérequis méta-mathématiques cités ci-dessus. Par ailleurs, le concept de génération est central, et commun à l'étude des structures algébriques

⁴ Pour un exemple élémentaire de l'application de cette méthode, voir Durand-Guerrier, 2005 ou 2008.

généralement étudiées les premières années d'université, telles que les structures d'espace vectoriel, de groupe, d'anneau ou encore de module. D'un point de vue logique, nous avons vu (au paragraphe 2) que la définition très riche et complexe de la notion de partie génératrice permet de considérer la mise en œuvre de nombreux types de tâches différents relatifs aux définitions et exemples. C'est pourquoi nous avons choisi de poser plusieurs questions relatives à cette notion dans le cadre des espaces vectoriels.

Les questions que nous présentons ici sont des items extraits d'un questionnaire plus large donné aux 40 étudiants présents lors de la première séance du module « Arithmétique et algèbre » de la troisième année de licence à l'Université Montpellier 2, durant l'année universitaire 2010-11. Ils furent invités à y répondre durant une heure. Pour chacune des notions interrogées que nous présentons ici, une définition était demandée aux étudiants, ainsi que des exemples qu'ils avaient en tête, avant tout travail sur les concepts considérés. Selon le cas, il s'agissait d'une définition d'objet (élément neutre), de structure (espace vectoriel, groupe), de relation entre objets (relation d'équivalence) ou de procédé (division euclidienne), avec différents niveaux de généralité. On pourrait supposer que ce type de question est élémentaire au niveau considéré, et mobilise essentiellement la mémorisation et la restitution. Cependant, comme nous l'avons illustré sur un exemple au paragraphe 2.2, la structure logique des définitions peut s'avérer complexe, les objets engagés pouvant être de types très différents. Nous faisons l'hypothèse que cette complexité logique peut éclairer certaines des difficultés des étudiants pour l'appropriation des concepts identifiés comme prérequis pour l'apprentissage de l'algèbre moderne. Dans nos analyses, nous avons porté l'attention sur les connaissances mathématiques des étudiants, leurs conceptions, les registres de représentation utilisés et les phénomènes langagiers (syntaxe, sémantique).

3.2. Questions sur les espaces vectoriels et les parties génératrices

Quatre items du questionnaire concernent les concepts d'espace vectoriel et de partie génératrice, dont il est en particulier demandé une définition :

I.1. Définir ce qu'est un espace vectoriel. Donnez-en quelques exemples (variés).

I.2. Soit E un espace vectoriel et $A \subset E$ un sous-espace vectoriel de E . Définir ce qu'est une partie génératrice de A . Donnez quelques exemples.

I.3. Dans chacun des cas suivants, la famille A est-elle génératrice de l'espace vectoriel E ? Justifiez.

a) $E = M_n(\mathbb{R})$ et $A = GL_n(\mathbb{R})$.

b) $E = C^0 \cap C_m^1 \cap P_{2\pi}$ ensemble des fonctions continues, C^1 par morceaux et 2π -périodiques, et $A = (e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, où $\forall n \in \mathbb{Z}, e_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \rightarrow e^{int}$.

I.4. Dans cette question, on considère l'espace vectoriel :

$$E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}.$$

a) Expliquez rapidement pourquoi E est bien un espace vectoriel.

b) Donnez-en une famille génératrice finie. Justifiez votre réponse.

→ *Analyse a priori*

Des aspects praxéologiques sont abordés ici autour de la restitution de définitions et d'exemples, voire de construction d'exemples : dans les questions I.1 et I.2, il est demandé de façon très générale de donner la définition d'une partie génératrice, puis de donner des exemples de partie génératrice. Le choix d'un espace vectoriel E , d'une partie A et d'une famille génératrice de A est à la charge de l'étudiant. Dans les items de la question I.3 les valeurs des variables A et E sont fixées ; dans la question I.4 la valeur de E est fixée. Ceci a un impact sur les types de tâches demandées : il s'agit respectivement de déterminer si des familles données sont génératrices de l'espace vectoriel considéré (question I.3) et de construire un exemple de partie génératrice (question I.4). Comme nous allons le voir, ce sont trois types de tâches différents, qui n'impliquent pas les mêmes présupposés techniques ou technologiques (au sens de Chevallard, 1999).

I.1. Définir ce qu'est un espace vectoriel. Donnez-en quelques exemples (variés).

Deux types principaux de réponses sont attendus, reflétant deux conceptions de la notion d'espace vectoriel : des réponses tentant de donner, de manière plus ou moins correcte et complète, la définition axiomatique d'espace vectoriel et des réponses donnant la définition de sous-espace vectoriel. En effet, dans la pratique, l'on montre généralement qu'un ensemble est un espace vectoriel en vérifiant que c'est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Concernant les exemples, on peut supposer que la plupart des étudiants proposeront les suivants, conformément à ce qu'ils ont été susceptibles de rencontrer les années précédentes : l'espace des vecteurs du plan ou de l'espace de la géométrie usuelle, ou plus généralement le K -espace vectoriel K^n ($n \geq 1$), probablement avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$; le K -espace vectoriel $K[X]$, espace vectoriel des polynômes sur K , probablement avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; le K -espace vectoriel $L(E, F)$ (applications linéaires de E dans F , espaces vectoriels sur K), avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; le K -espace vectoriel $M_n(K)$, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ également ; l'espace des suites réelles ou plus généralement des fonctions réelles, ou encore des fonctions continues.

I.2. Soit E un espace vectoriel et $A \subset E$ un sous-espace vectoriel de E . Définir ce qu'est une partie génératrice de A . Donnez quelques exemples. La définition dont il est question ici est celle d'une propriété d'objet, « être une partie génératrice de A ($\subset E$) » (une fois l'espace vectoriel E et le sous-espace vectoriel A fixés), et non

celle d'un objet mathématique à proprement parler. Une propriété d'objet est modélisée par un prédicat à une place, que l'on note ici $G_{A,E}(x)$. Donner une définition de cette propriété d'objet revient donc à énoncer une phrase ouverte en x , variable libre dont le domaine d'objet est l'ensemble des parties de E , telle que $G_{A,E}(x)$ est satisfaite par une partie P de E (i.e. $G_{A,E}(P)$ est vraie) si et seulement si P est une partie génératrice de A .

La notion de partie génératrice est à l'origine des concepts de base et de dimension rencontrés dès la première année de licence ; on pourrait donc s'attendre à ce que les étudiants soient assez à l'aise avec cette notion en troisième année. C'est pourquoi, après avoir posé une question visant à vérifier qu'ils en connaissent une définition correcte et qu'ils peuvent en donner des exemples, nous avons proposé dans la question I.3 des exercices un peu moins classiques que ceux habituellement proposés à ce sujet.

Dans cette question, les étudiants peuvent penser que l'on attend des exemples de nature très générale. En particulier, pour chaque exemple d'espace vectoriel E et de sous-espace vectoriel A choisis par l'étudiant, cette partie A sera génératrice de A . On peut néanmoins faire l'hypothèse que cet exemple apparaîtra peu, la convention selon laquelle un ensemble est une partie de lui même rentrant en conflit avec l'idée intuitive selon laquelle la partie est plus petite que le tout. D'un point de vue mathématique, l'intérêt d'une famille génératrice est d'autant plus grand que celle-ci est minimale, ce qui dans un espace vectoriel correspond au concept de base. On peut alors attendre que soient proposées des bases de A .

Ceci revient à considérer A et E fixés mais génériques ; les seuls exemples possibles étant alors des exemples eux aussi très génériques, $x = f(A, E)$ dépendant de A et E . Une autre interprétation possible de la tâche (celle généralement attendue dans ce type de question) consiste à considérer qu'il s'agit d'attribuer des valeurs particulières à A et à E pour donner un exemple de triplet satisfaisant la phrase ouverte $G(x, A, E)$, prédicat à trois places, qui modélise la relation ternaire « être une partie génératrice d'un sous-espace vectoriel ... d'un espace vectoriel... ». Or l'on a vu que la définition d'espace vectoriel nécessite la donnée de quatre paramètres (ou variables) : K (le corps de base, avec ses lois), E (l'ensemble de base), $+$ (la loi de composition interne), $*$ (la loi de composition externe). Donc, en toute rigueur, si l'on ne dispose pas d'exemples d'espace vectoriel directement accessibles, pour construire un exemple concret parfaitement satisfaisant de partie génératrice, il faut trouver six objets qui satisferont le prédicat à 6 places $G(x, A, K, E, +, *)$. Ainsi, la tâche de construction d'un exemple nécessite au préalable de donner des valeurs à A et E , et à toutes les variables implicites associées. On s'aperçoit qu'il s'opère ici un changement de contrat significatif entre la question de définition de la propriété, pour laquelle les éléments nécessaires sont introduits dans l'énoncé, et la recherche d'objets satisfaisant cette

définition, pour laquelle les étudiants doivent prendre des initiatives sur un grand nombre de paramètres corrélés. Ce changement de contrat est caché par l'apparente continuité dans la formulation de la question. Le grand nombre de choix à faire pour l'étudiant souhaitant répondre à cette question risque de l'empêcher d'aboutir. Certains étudiants peuvent cependant être suffisamment familiers avec les espaces vectoriels et les familles génératrices pour pouvoir donner directement de tels exemples familiers sans nécessairement en construire, et donc sans préciser toutes les variables logiques K , $+$, $*$, etc. ; par exemple, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et, comme sous espaces vectoriels, des droites ou des plans. Notons, en outre, que cette tâche est inhabituelle, le contrat classique consistant le plus souvent à s'assurer qu'un élément donné satisfait ou non la définition.

I.3. Dans chacun des cas suivants, la famille A est-elle génératrice de l'espace vectoriel E ? Justifiez.

Remarque préliminaire : il est à noter deux difficultés supplémentaires dans cette question. D'abord le terme « partie génératrice » de la question I.2 est remplacé par « famille (génératrice) » dans la question I.3. Ensuite les notations sont différentes dans les questions I.2 et I.3 : en effet dans la question I.2, A est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E , et la partie génératrice à définir n'est pas nommée. Dans la question I.3, l'espace vectoriel à engendrer est noté E (au lieu de A si l'on avait gardé les mêmes notations), et la partie dont il est demandé d'affirmer qu'elle est ou non génératrice de l'espace vectoriel est notée A (au lieu de G par exemple). Même si les étudiants de L3 devraient être habitués à « jongler » entre les changements de notations et de statut des lettres, ces derniers introduisent des difficultés supplémentaires dans la réalisation des tâches qui leur étaient demandées.

Dans cet exercice, le type de tâche demandé est différent de ceux rencontrés à la question 2. L'espace vectoriel à engendrer et la partie sont donnés. Il s'agit ici de décider si un couple (g, E) , où E désigne un espace vectoriel et g désigne une partie de E , satisfait la relation binaire « être une partie génératrice de ». Ainsi, alors que la question I.2 nécessitait une prise d'initiative (chercher des objets adéquats satisfaisant une définition), la question I.3 nécessite d'engager la définition de partie génératrice dans une preuve, ce qui suppose davantage de techniques mathématiques.

La question b) $E = C^0 \cap C_m^1 \cap P_{2\pi}$ ensemble des fonctions continues, C^1 par morceaux et 2π -périodiques, et $A = (e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, où $\forall n \in \mathbb{Z}, e_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \rightarrow e^{int}$ correspond à un exemple d'objet ne satisfaisant pas la définition. Cependant, en raison de la complexité des notions mathématiques en jeu et du trop faible nombre de réponses, cet item ne nous a pas fourni d'information relative à notre questionnement.

a) $E = M_n(\mathbb{R})$ et $A = GL_n(\mathbb{R})$. Cette question est loin d'être classique. La principale difficulté ici est l'utilisation des matrices inversibles dans un contexte additif, et non plus multiplicatif. En effet, l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ forme un groupe pour la multiplication matricielle ; il peut être très déroutant, même pour un mathématicien aguerri, de rencontrer ce groupe dans un contexte additif. Bien que les étudiants ne l'aient peut-être jamais identifié en tant que groupe, ils connaissent néanmoins très bien les propriétés essentielles de cet ensemble : le produit de deux matrices inversibles est inversible, toute matrice dans $GL_n(\mathbb{R})$ possède un inverse (par définition), la multiplication matricielle est associative et possède un élément neutre (la matrice identité). Toutes ces propriétés ont été vues en algèbre linéaire, notamment lors de sa définition. Ici, nous attendons des confusions entre ces deux contextes additifs et multiplicatifs. Cette question étant originale, nous faisons l'hypothèse qu'il sera difficile pour les étudiants d'amorcer un raisonnement si le concept et la définition d'une partie génératrice ne sont pas acquis. Nous n'attendons pas nécessairement que les étudiants sachent entièrement répondre à la question. Il s'agit d'une part de mettre en évidence les conceptions erronées, et d'autre part d'identifier si certains étudiants sont capables de mettre en œuvre un raisonnement adéquat, même si celui-ci n'aboutit pas. Une résolution classique (donnée en annexe), permettant de simplifier la tâche, consiste à engendrer des générateurs connus (ici les matrices de la base canonique). Sans cette idée essentielle de la théorie de la génération, la tâche s'avère d'autant plus ardue.

I.4. Dans cette question, on considère l'espace vectoriel :

$$E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}.$$

Remarque préliminaire : Ici, l'espace vectoriel de référence et la partie que l'on souhaite engendrer sont donnés : E est instancié par $M_3(\mathbb{R})$ et le sous-espace vectoriel A à engendrer est instancié par $\{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$ (noté E dans l'énoncé).

a) *Expliquez rapidement pourquoi E est bien un espace vectoriel.* Il est possible de trouver certaines vérifications à partir de la définition générale d'espace vectoriel, notamment pour les étudiants ayant donné, ou tenté de donner, une définition complète d'espace vectoriel dans la question I.1. Néanmoins, on s'attend plutôt à l'utilisation, complète ou non, de la caractérisation des sous-espaces vectoriels. L'argument le plus élégant est le suivant : l'ensemble E est le noyau de l'application linéaire « trace », donc un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

b) *Donnez-en une famille génératrice finie. Justifiez votre réponse.* Dans cette deuxième partie de la question, les étudiants doivent produire une partie génératrice. Il s'agit donc d'un travail de construction d'exemple (exemple de partie qui engendre un espace vectoriel E singulier donné). Construire un exemple de famille génératrice de E consiste à traduire ce que signifie $\text{tr}(M) = 0$, et ensuite à appliquer la technique, classique (dans $\mathbb{R}^n$), qui permet de passer d'une écriture

avec paramètres à une combinaison linéaire dont ces paramètres sont les coefficients, dans le contexte des matrices (voir annexe A pour une preuve mathématique). Néanmoins, elle n'amène pas une réponse évidente directe. C'est pourquoi il est encore peu probable d'obtenir un grand nombre de réponses.

→ Nous présentons ci-après les principaux résultats issus de l'analyse des réponses des étudiants.

□ Les résultats portant sur les questions I.1 et I.2

I.1. Un seul étudiant donne une définition correcte d'espace vectoriel ; un seul autre oublie un seul axiome. Deux autres en donnent une définition très incomplète comme : « *Un espace vectoriel est un espace munie d'une loi de composition* ». Sur 40 étudiants, 12 (soit 30 %) donnent la définition d'un sous-espace vectoriel ; 3 étudiants en donnent une définition hybride avec des axiomes de la définition d'espace vectoriel et d'autres de sous-espaces vectoriels, par exemple : « *E est un espace vectoriel : - E est muni d'une LCI / - E est muni d'un opérateur externe / - $\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in K(\text{corps}) \lambda x + \mu y \in E$* ». Pourtant, cette notion devrait leur être familière. Plusieurs raisons peuvent expliquer ce phénomène : la définition d'espace vectoriel est longue, axiomatique, et très formelle. D'ailleurs la majorité des étudiants a conscience de ce fait puisqu'ils présentent leur réponse avec des tirets pour énumérer les axiomes dont ils ne se souviennent plus. Un étudiant écrit même : « *Il s'agit d'un espace muni d'une LCI et une LCE qui vérifient 4 axiomes spécifiques* » sans pour autant les donner. De plus, contrairement à la définition d'un groupe, la définition d'espace vectoriel ne s'énonce généralement pas dans le seul langage naturel.

I.2. Concernant la définition de partie génératrice, seules quatre réponses peuvent être considérées comme correctes, par exemple « *P ∈ P(A) est une partie génératrice de A si Vect(P) = A* ». On trouve également une définition incomplète : « *Une partie génératrice de A est un ensemble de vecteurs de E tels que : // $\forall a \in A, a = \sum \lambda_i a_i, \lambda_i \in K$ pour E espace vectoriel sur K // $a_i \in$ partie génératrice de A* ». Il ne précise pas que les vecteurs de la partie génératrice doivent être dans la partie A à générer.

Nous avons classé les réponses des étudiants dans les quatre catégories suivantes :

- les réponses qui font référence à la notion de combinaison linéaire comme la définition incomplète ci-dessus, ou bien « *G est une partie génératrice de A si tout élément de A peut s'écrire comme combinaison linéaire d'éléments de G.* », ou encore « *ensemble des éléments de A dont la C.L. forme E* » (8 copies) ;
- les réponses (5 en tout) qui évoquent l'espace vectoriel engendré par une famille de parties (« Vect »), comme « *Une partie génératrice, est tq Vect(B) =*

A », ou encore « A étant un espace vectoriel (puisque sous espace vectoriel de E), $\exists A' // A' \subset A$ tq $A = \text{Vect} A'$ ».

– les réponses écrites en langage naturel pour lesquels les étudiants ont utilisé différents verbes ou adjectifs tels que « générer », « engendrer », « décrit », « aboutit »... On en recense huit. Par exemple : « *C'est une partie de A telle que cette partie va pouvoir générer tout élément dans A* », ou encore « *C'est une partie qui définit tous les vecteurs de A* » ;

– et enfin les autres réponses (8) pour lesquels il y a en général confusion avec d'autres notions. Par exemple un étudiant écrit « *une partie génératrice de A est une famille libre de vecteurs* », et un autre « *c'est une famille de vecteurs (appelée base de A) qui, par combinaison linéaire quelconque entre ses éléments, "aboutit" toujours sur un élément (ici vecteurs) de l'ensemble A* ». L'expression « toujours sur un élément » employée au lieu de « sur tout élément » (par exemple) laisse penser qu'il y a bien une confusion entre partie génératrice et stabilité, plutôt qu'une erreur de type logique⁵.

□ Concernant les exemples d'espace vectoriel (questions I.1 et I.4 a))

I.1. Dans le premier item, 27 étudiants sur 40 proposent des exemples d'espaces vectoriels. Dix-sept d'entre eux donnent « $\mathbb{R}$ », « $\mathbb{R}^3$ » ou « $\mathbb{C}$ ». Deux donnent des exemples de nature géométrique comme « *plan $\mathbb{Z}$* », quatre en algèbre linéaire ou matricielle : « *ex : $L(E,F) = \text{esp. vect. des applications linéaires de } E \text{ dans } F$* » ou « $M_n(\mathbb{R})$ », deux autres donnent $\mathbb{R}_n[X]$, et six exemples pris en analyse comme « *espace des fonctions continues réelles* ». Enfin sept étudiants donnent des réponses incorrectes, incomplètes comme : « *la droite $2x + 1$* », « $\{(1,0), (0,1)\}$ » ou encore des réponses qui renvoient à une sous-classe comme : « *exemples : espace vectoriel normé // espace vectoriel euclidien* ». Seul un étudiant a précisé les deux lois de composition interne et externe, et un autre a donné une réponse sous forme de couple (« $(\mathbb{R}, +)$ »).

I.4 a) Dans cette question, il s'agit de justifier rapidement pourquoi un ensemble donné est un exemple d'espace vectoriel. Seize étudiants sur 40 ont proposé une réponse à cette question. Leurs réponses se répartissent comme suit : un étudiant invoque que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ et vérifie les axiomes correspondants ; sept étudiants vérifient les axiomes de sous-espace vectoriel sans affirmer qu'il s'agit de la définition de sous-espace vectoriel, parmi lesquels deux seulement vérifient bien que l'ensemble E est non vide ; six étudiants affirment que E est stable par combinaison linéaire sans pour autant le vérifier, parmi lesquels deux seulement évoquent le fait que E doit être non vide ; un

⁵ On ne peut cependant pas écarter complètement une mauvaise appréciation de la portée du quantificateur universelle « toujours » dans la phrase, surtout si l'étudiant est étranger.

étudiant rappelle la définition de la trace sans pour autant répondre à la question ; enfin un étudiant donne un argument incorrect : « E est un sous-ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel, donc E est aussi un espace vectoriel. ». On peut remarquer qu'aucun étudiant ne revient à la définition générale d'espace vectoriel. Cependant les étudiants ne précisent pas en général que les propriétés qu'ils vérifient sont celles qui caractérisent un sous-espace vectoriel et non un espace vectoriel. Ceci peut être mis en relation avec les réponses obtenues à la question I.1 concernant les définitions, et illustre une conception d'espace vectoriel correspondant au concept de sous-espace vectoriel.

□ Concernant les exemples de partie génératrice (questions I.2, I.3 a) et I.4 b))

I.2. Soit E un espace vectoriel et $A \subset E$ un sous-espace vectoriel de E . Définir ce qu'est une partie génératrice de A . Donnez quelques exemples.

Pour la notion de partie génératrice, sept étudiants en proposent des exemples : un exemple dans $\mathbb{C}$: « $\{1, i\} \subset \mathbb{C}$ et $\text{Vect}\{1, i\} = \mathbb{C}$ » ; cinq exemples qui évoquent $\mathbb{R}^2$, du type : « dans $\mathbb{R}^2$ $f(x) = \lambda x$ est génératrice » ; enfin, un étudiant écrit : « Toute base d'un ev E génère E ». Ce dernier cas revient à donner une sous-classe de famille génératrice (les bases), ce qui correspond à une réponse envisagée dans l'analyse a priori (interprétation de la tâche avec E et A génériques).

I.3.a) [...] la famille A est-elle génératrice de l'espace vectoriel E ? Justifiez. $E = M_n(\mathbb{R})$ et $A = GL_n(\mathbb{R})$.

Cette question a été abordée par 6 étudiants sur 40 : un étudiant répond simplement « oui » ; un autre étudiant répond implicitement « oui » en écrivant ceci : « la base de $M_n(\mathbb{R})$ c'est I_n , $I_n \in GL_n(\mathbb{R})$ car inversible. // Toute surfamille $\{M, M \in GL_n(\mathbb{R})\}$ sera génératrice. ». L'étudiant(e) semble affirmer que I_n est une base de $M_n(\mathbb{R})$ et que $GL_n(\mathbb{R})$, contenant cette base, est donc génératrice de $M_n(\mathbb{R})$; trois des six étudiants répondent « non » avec des réponses laissant penser qu'ils n'ont pas compris le concept de partie génératrice. « non car cela signifierait que toute matrice est inversible. » ; on pourrait aussi faire l'hypothèse qu'ils mobilisent le théorème-en-acte « Toute combinaison linéaire de matrices inversibles est une matrice inversible ». Un étudiant propose une réponse adéquate pour ce que veut dire « A engendre E » puisqu'il écrit que cela est équivalent à « toute matrice peut s'écrire comme combinaison linéaire de matrice $\in GL_n(\mathbb{R})$ ». Mais il en conclut que $GL_n(\mathbb{R})$ n'engendre pas $M_n(\mathbb{R})$ en prenant l'exemple de la dimension 2 ; il décompose une matrice à l'aide de la base canonique des E_{ij} :

« $a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et donc là $A, B, C, D \notin GL_n(\mathbb{R})$. //

Faux » (A, B, C, D étant sa désignation des quatre matrices de base, sous des accolades). Ainsi, il semble supposer que la seule décomposition possible est celle

dans la base canonique, et comme les matrices de cette base ne sont pas inversibles, il pense avoir démontré que $GL_2(\mathbb{R})$ ne peut pas engendrer toutes les matrices de $M_2(\mathbb{R})$. Une hypothèse est que cet étudiant projette l'unicité de la décomposition dans une base donnée sur l'unicité de la base.

I.4.b) Dans cette question, on considère l'espace vectoriel : $E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) | \text{tr}(M) = 0\}$. [...] Donnez-en une famille génératrice finie. Justifiez votre réponse.

Seuls 6 étudiants ont répondu à cette question : Trois étudiants donnent la base canonique de l'espace $M_3(\mathbb{R})$. Parmi eux, l'un affirme que cette famille engendre A puisqu'elle engendre E , bien qu'il donne une définition de partie génératrice correcte à la question I.2. Ils ne vérifient pas que les matrices de la base canonique appartiennent bien à A . Deux étudiants s'assurent quant à eux que les matrices qu'ils fournissent sont dans A et ce faisant retirent les trois matrices de la base canonique ayant un 1 sur leur diagonale, conservant les 6 autres. On peut y voir l'application du théorème-en-acte suivant : « *une base d'un sous-espace vectoriel donné s'obtient par intersection de l'ensemble des vecteurs d'une base de l'espace vectoriel initial avec le sous-espace* ». Aucun étudiant n'effectue de contrôle sémantique : par exemple on peut connaître a priori la dimension de E sachant que c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Enfin, un étudiant donne une réponse correcte avec une justification correcte dans le cas $n = 2$ en mettant en œuvre la technique proposée en annexe. On peut supposer qu'il fait ce choix pour alléger les calculs.

En définitive, les résultats obtenus à cette question, qui porte sur la principale structure algébrique étudiée par les étudiants pendant les deux premières années de licence, montrent la fragilité des acquisitions des étudiants par rapport aux prérequis visés, et en particulier pour ce qui concerne la notion de partie génératrice (au sens des espaces vectoriels). Dans la suite, nous quittons ce cadre familier des espaces vectoriels pour nous intéresser aux notions plus spécifiques de la structure de groupe.

3.3. Questions relatives à la structure de groupe

Dans cette partie, nous nous intéressons aux notions directement liées au concept de groupe et aux objets mathématiques et propriétés qui interviennent dans sa définition.

II.1. Savez-vous ce qu'est un groupe (en mathématiques) ? Si oui, donnez-en une définition et quelques exemples.

II.2. Soit $*$ la loi de composition interne définie dans $\mathbb{R}$ par : $x * y = x + y - xy$.

a) Rappeler la définition d'un élément neutre. Montrer que $*$ possède un élément neutre e .

b) Rappeler la définition d'un symétrique d'un élément x . Chercher les éléments de $\mathbb{R}$ admettant un symétrique pour la loi $*$.

→ Analyse a priori

II.1. Il s'agit d'une définition de structure mathématique, tout comme celle d'espace vectoriel demandée dans la question I.1 alors que la question II.2 concerne des objets apparaissant dans la définition axiomatique de cette structure. Cette question vise à donner une idée de la connaissance des étudiants concernant les groupes avant le début de ce cours, sachant que, redoublants mis à part, les étudiants n'ont encore jamais véritablement travaillé la notion en tant que structure définie axiomatiquement. Il ne nous semble donc pas très pertinent de sur-interpréter les résultats relativement à l'exactitude des réponses, contrairement à la théorie des espaces vectoriels par exemple, qui est censée leur être très familière. En revanche, cette question nous permet d'évaluer deux aspects relativement aux questions soulevées dans cet article : d'une part le registre qu'ils préfèrent utiliser entre le langage naturel et le langage algébrique formel. Au langage naturel correspondra toute réponse exprimée avec des mots en langue française, au langage formel correspondra toute définition donnée sous forme d'axiomes principalement exprimés avec les symboles logiques et mathématiques, et le langage mixte regroupera toutes les réponses mêlant à la fois langage naturel et langage formel. D'autre part, nous nous intéresserons aux aspects sémantiques et syntaxiques. Cette question du langage nous semble cruciale, et ce d'autant plus que lors d'entrevues avec les enseignants du module « arithmétique et algèbre » traitant de la notion de groupe, ceux-ci ont noté que les étudiants maîtrisaient insuffisamment la langue française, et que cela pourrait constituer un frein à une bonne compréhension de notions mathématiques comme les groupes.

Nous faisons l'hypothèse que, contrairement au cas des espaces vectoriels, il est peu probable de trouver des réponses reflétant une conception « sous-groupe », c'est-à-dire une vérification des axiomes caractérisant les sous-groupes. En effet la notion de groupe a pu être abordée les années antérieures, mais n'a pas été travaillée en détail : dans la pratique, l'on montre souvent qu'un ensemble est un groupe en montrant que c'est un sous-groupe d'un groupe plus connu, mais si ce type de problème ne s'est pas présenté, il n'y avait aucune raison de s'attendre à une conception en terme de sous-groupe.

On peut imaginer que les groupes proposés seront :

- des groupes de « nombres » associés à un anneau ou à un corps comme $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C}^*, \times)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \times)$, etc. ;

- des groupes quotients (principalement $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +)$ ou $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}})^*, \times)$, avec $n = 2, 3, \dots$ ou n générique) ;
- des groupes de permutations tels que $(S_n, \circ)$ vu à travers l'étude des déterminants (voire $(S(E), \circ)$) ;
- des groupes en algèbre linéaire ou matricielle vus lors de l'étude d'espaces vectoriels, comme $(M_n(\mathbb{R}), +)$, $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$, $((L(E, F), \circ)$ avec E et F des espaces vectoriels) ou $(K[X], +)$;
- ou encore des groupes géométriques (comme le groupe des isométries, ou des déplacements).

II.2. Soit $*$ la loi de composition interne définie dans $\mathbb{R}$ par: $x * y = x + y - xy$

a) Rappeler la définition d'un élément neutre. Montrer que $*$ possède un élément neutre e .

b) Rappeler la définition d'un symétrique d'un élément x . Chercher les éléments de $\mathbb{R}$, admettant un symétrique pour la loi $*$.

Ces questions sont tirées d'une étude de Faiza Chellougui (2003) sur l'utilisation des quantificateurs en première année d'université en Tunisie, auxquelles nous avons ajouté les questions préliminaires de définition, ceci afin de mettre en perspective l'utilisation des quantificateurs dans les définitions proposées et leur mobilisation lors de la vérification de propriété ou la recherche d'éléments satisfaisant la définition. Nous faisons l'hypothèse que ceci est un indicateur de l'obstacle du formalisme en algèbre moderne.

□ Concernant les définitions :

Tout d'abord, précisons que la formulation « un symétrique » dans la question II.2.b) peut prêter à confusion. En effet, le symétrique d'un élément x n'est *a priori* pas unique. Or l'existence d'un neutre (à droite et à gauche) implique son unicité.

Les syntaxes logiques des deux définitions demandées sont différentes, ce qui se retrouve dans la formulation des questions. En effet, « être un élément neutre » est une propriété universelle : e est élément neutre *si et seulement si* $\forall x \in \mathbb{R}, x * e = e * x = x$). Cela confère à e un statut particulier, celui de constante dans le langage des prédicats pour la théorie des groupes (voir par exemple Cori et Lascar, 1993). En revanche, « être symétrisable (ou inversible) » est une propriété existentielle : x est inversible $\Leftrightarrow \exists y_x \in \mathbb{R}, x * y_x = y_x * x = e$. Cependant, seule la formulation de la question a) de définition induit l'utilisation d'un quantificateur.

□ Concernant la recherche d'éléments satisfaisant la définition :

Les formulations des deux questions de définition induisent deux types de tâche distincts impliquant des procédures de résolution différentes. En effet, la deuxième

partie de la question II.2.a) commençant par « Montrer que », les étudiants n'ont pas à questionner l'existence de l'élément neutre mais à s'engager directement dans la démonstration de cette existence. Ainsi, ils peuvent essayer, pour quelques valeurs possibles de e , de vérifier la condition $\forall x \in \mathbb{R}, x * e = e * x = x$. En outre, la solution ($e = 0$) correspond à la valeur du neutre dans les groupes de nombres additifs usuels. L'on s'attend donc à ce que beaucoup d'étudiants proposent directement la valeur 0 pour le neutre sans nécessairement engager un raisonnement par analyse et synthèse. A l'inverse, la question II.2.b) est très ouverte (« Chercher... ») ; il s'agit de déterminer les éléments de l'ensemble S suivant : $S = \{x \in \mathbb{R} | \exists y \in \mathbb{R} x * y = y * x = e\}$. Ceci renvoie à la structure logique des définitions de neutre et de symétrique évoquée ci-dessus.

Le caractère universel de l'élément neutre peut ramener la recherche de ce dernier soit à une simple vérification lorsque la valeur peut s'obtenir par une heuristique ou une intuition, comme c'est le cas ici, soit à un raisonnement par analyse et synthèse menant à l'égalité $x + e - xe = x$, puis $e(1 - x) = 0$, égalité devant être vérifiée pour tout x réel. Le choix d'une valeur de x (différente de 1) et l'intégrité de l'anneau $\mathbb{R}$ suffisent pour trouver la seule valeur de e possible ($e = 0$) ; la vérification de la satisfaction de la propriété universelle est ensuite immédiate. En revanche, dans la recherche des éléments qui ont un symétrique, le raisonnement par analyse et synthèse s'avère incontournable. Précisément, le réel x a un symétrique si et seulement si l'équation $x + y - xy = 0$ admet une solution réelle (le symétrique de x). Il s'agit donc de déterminer les conditions d'existence d'une solution d'une équation à une inconnue avec un paramètre, en fonction de ce paramètre. L'équation étant de degré 1 en y , la résolution est aisée : on obtient $y(x - 1) = -x$. Ainsi x admet un symétrique pour $x \neq 1$, donné par $y = \frac{-x}{x-1}$. De plus, 1 n'admet pas de symétrique car l'équation devient $0 = -1$ dans le cas $x = 1$. L'ensemble solution est donc $S = \mathbb{R} - \{1\}$. La symétrie en x et y apparaissant dans l'égalité $x + y - xy = 0$ masque en fait la dissymétrie du statut de ces deux variables : x est une constante quelconque (instanciation universelle de Copi (1954)), un paramètre, alors que y symbolise l'inconnue. Ainsi, à ce stade, la compréhension de la dépendance de y en x est indispensable pour achever le raisonnement. D'un point de vue praxéologique, ces deux types de tâches, apparemment semblables, impliquent donc des difficultés de mise en œuvre très différentes. Dans la première il y a une élimination d'un quantificateur à opérer (choisir une valeur particulière pour x permet de trouver la seule valeur possible pour e), alors que la deuxième nécessite de recourir à des techniques de résolution d'équations à paramètre.

Enfin les questions a) et b) ne sont pas indépendantes : Répondre correctement à la deuxième implique d'avoir trouvé un élément neutre à la première.

→ Résultats

II.1

□ Concernant la définition d'un groupe :

Nous avons observé trois aspects dans les réponses des étudiants : la syntaxe (le signe est abordé en ce qu'il peut être inséré dans des séquences d'autres signes selon certaines règles de combinaisons), la sémantique (le signe est conçu dans sa relation à ce qu'il signifie) et la pragmatique (le signe est perçu en fonction de ses origines, et des effets qu'il a sur les destinataires, les usages que ceux-ci en font)⁶, en tenant compte également du registre de représentation utilisé par les étudiants. Ainsi, la syntaxe, dans le langage naturel, correspondra à une bonne utilisation des règles grammaticales du français et, dans le langage formel, à une bonne utilisation des symboles logiques (par exemple des quantificateurs). La sémantique correspondra au sens d'une phrase donnée en langage naturel : une phrase pourra n'avoir aucun sens tout en étant correcte d'un point de vue grammatical. Dans le langage formel, certaines erreurs syntaxiques comme l'absence de quantification peuvent difficilement être interprétées au niveau sémantique. Enfin l'analyse pragmatique doit être interprétée ici comme une analyse ayant pour objectif d'identifier, d'un point de vue sémantique, l'adéquation entre la définition demandée (celle de groupe) et la réponse que l'étudiant a effectivement donnée, et ce en faisant abstraction (lorsque c'est possible) des éventuelles erreurs syntaxiques et sémantiques. Le niveau pragmatique correspondra donc à l'adéquation entre la question demandée et la réponse donnée : une réponse pourra être syntaxiquement et sémantiquement correcte mais ne correspondra pas à la définition d'un groupe.

Pour illustrer notre méthode de classement, considérons les réponses suivantes à cet item données par les étudiants :

- « *Un groupe est un ensemble muni d'une loi [...]* » est un exemple de réponse en langage naturel syntaxiquement incorrect (confusion participe passé / adjectif), ce type d'erreur sera toutefois considéré comme mineur car ne gênant pas la compréhension de la réponse.
- « *groupe : $0 \in E$ // muni de la loi associative, commutative // muni d'une inverse sur $*$ // muni d'un neutre* » est une réponse en langage naturel ou aucune phrase n'est construite, donc incorrecte syntaxiquement.
- « *Un groupe est un pair $(E, *)$ avec E un ensemble et $*$ un loi tel que $(x * y) * z = x * (y * z)$ $x, y, z \in E$ // $\exists e \in E$ tel que $e * x = x * e = x \forall x \in E$ // $\exists e \in E$ tel que $x * x' = e \forall x \in E$* » est une réponse en langage mixte, à la fois sémantiquement incorrecte dans la partie écrite en langage naturel (« *est un pair*

⁶ Nous empruntons ces définitions à Eco (1980) qui lui-même les reprend de Morris (1938).

$(E,*)$ ») et dans la partie écrite en langage formel (quantificateur universel placé à la fin).

– Considérons enfin la réponse suivante :

C'est une
réponse
considérée
comme

$(A,*)$ • $a*b = b*a$ symétrie
 $\forall a, b \in A$ • $a*e = e*a = a$ élément neutre
 • $a*a^{-1} = e$ inverse

écrite dans le langage formel (les 4 mots en français sont uniquement utilisés pour nommer les propriétés explicitées dans un premier temps). Compte tenu de l'absence du quantificateur existentiel, elle est incorrecte d'un point de vue syntaxique, et aussi du point de vue sémantique. De plus, même en corrigeant ces erreurs de quantification, la réponse ne correspond pas à la définition d'un groupe (il manque l'axiome, d'associativité de $*$ alors que la commutativité n'est pas requise) ; elle est donc en inadéquation avec la question posée, ce qui correspond à une erreur au niveau pragmatique.

Notons d'abord que 5 étudiants n'ont pas donné de réponse et que, parmi les autres, 15% d'entre eux ne produisent pas une phrase construite.

Le registre de langue préféré est le langage naturel (19 étudiants sur les 35 qui ont répondu), dont environ les deux tiers (63%) donnent une réponse correcte du point de vue de la syntaxe si l'on ne tient pas compte d'erreurs de formulation n'affectant pas le sens de la phrase. Le langage symbolique est très peu et très mal utilisé (deux étudiants l'utilisent, tous deux de manière incorrecte). Moins d'un quart des étudiants s'étant exprimés dans un langage mixte (3 sur 14, soit 21%) donne une définition correcte d'un point de vue syntaxique. Sur l'ensemble des réponses, la moitié des étudiants ayant répondu utilisent une syntaxe correcte, exclusion faite des erreurs n'affectant pas la signification de la phrase.

En ce qui concerne l'articulation entre syntaxe et sémantique, des difficultés spécifiques au langage utilisé apparaissent : l'usage de la quantification pose plus de problèmes dans le langage formel que dans le langage naturel. À l'inverse, l'application inappropriée à un objet mathématique (comme un ensemble) d'une qualité (comme l'associativité) s'appliquant à un autre objet qui lui est liée (comme la loi) est un phénomène présent presque exclusivement dans le langage naturel (erreur de type métonymique comme « *Un groupe est un ensemble associatif* [...] »). Les deux étudiants ayant utilisé le langage formel n'arrivent à aucune réponse satisfaisante, et ce sur aucun des trois niveaux d'analyse (syntaxique, sémantique et pragmatique). Ces résultats montrent que, pour notre population, le registre de langue naturelle est généralement utilisé par les étudiants pour lesquels les contours du concept sont demeurés flous. Les autres donneront plus volontiers une réponse en langage mixte. Néanmoins, le nombre d'étudiants donnant une

réponse mathématiquement satisfaisante reste faible : seuls 2 étudiants sur 14 pour ceux qui répondent en langage mixte et 2 sur 19 pour ceux qui répondent en langage naturel. Aucun des deux étudiants répondant en langage formel ne donne une réponse mathématiquement satisfaisante.

Du point de vue lexical, nous avons relevé les mots clés utilisé(e)s par les étudiants dans leur réponse (voir annexe C pour le tableau des relevés statistiques), ou à défaut les propriétés lorsqu'elles n'ont pas été nommées (dans le langage formel par exemple). Nous avons obtenu les résultats suivants concernant les concepts intervenant dans le concept de groupe : « ensemble/espace » est apparu dans 23 réponses sur les 35 réponses obtenues ; « loi/opération » dans 30 copies, l'associativité apparaît à 25 reprises, l'élément neutre dans 29 copies, et le symétrique dans 28 copies. Par ailleurs, la commutativité et la distributivité apparaissent chacune dans 3 réponses, la « loi de composition externe » ou la présence de 2 lois dans 2 copies. Enfin la transitivité, l'addition et le terme de structure apparaissent chacun une fois.

De plus des liens semblent émerger : ainsi 21 des 23 étudiants qui citent le concept d'ensemble évoquent également une loi (de composition interne). De même un lien très fort entre élément neutre et symétrique apparaît : toutes les réponses (sauf une) évoquant l'existence d'un élément neutre évoquent également l'existence d'un symétrique (pour chaque élément). L'associativité est le concept le moins cité.

Dix étudiants donnent les 5 concepts clés caractérisant un groupe et uniquement ceux-là. Parmi eux, deux étudiants donnent une réponse en langage naturel correcte, alors que seulement 2 des huit réponses en langage mixte le sont. Donc sur un total de 10 copies, 4 donnent une réponse correcte. Les autres font généralement une mauvaise utilisation des quantificateurs, comme par exemple la réponse déjà donnée plus haut : « *Un groupe est un pair $(E, *)$ avec E un ensemble et $*$ une loi tel que $(x * y) * z = x * (y * z)$ $x, y, z \in E // \exists e \in E$ tel que $e * x = x * e = x \forall x \in E // \exists e \in E$ tel que $x * x' = e \forall x \in E$* ».

▢ Les exemples :

Au total, douze étudiants sur 40 proposent des exemples : aucun exemple relatif au groupe symétrique, à l'algèbre linéaire (ou matricielle) ou à la géométrie, n'a cependant été cité, malgré un premier semestre de L3 dédié à l'algèbre linéaire. Voici les exemples qui sont apparus : 7 étudiants donnent un exemple de groupe de « nombres », principalement $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, mais aussi $(\mathbb{Q}^*, \times)$ (une fois), et « $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ et $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ » (une fois) ; 4 étudiants sur 40 mentionnent $(\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, +)$, un seul étudiant proposant la famille $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +)$, avec n générique, alors que ces groupes ont été étudiés en deuxième année de licence à l'université Montpellier 2, dans le cadre d'un cours d'arithmétique (entiers naturels, divisibilité, congruences, construction

de corps finis) et que l'anneau $(\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}, +, \times)$ est au programme des classes préparatoires MP-MP* (voir extrait du programme en annexe B) d'où proviennent certains étudiants. Enfin, figurent 3 réponses incomplètes, incorrectes et/ou incohérentes.

II.2.a) Soit $*$ la loi de composition interne définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$x * y = x + y - xy.$$

Rappeler la définition d'un élément neutre. Montrer que $*$ possède un élément neutre e . Nous avons repris les niveaux d'analyse de Chellougui (2003) sur l'utilisation des quantificateurs, en les adaptant à notre contexte.

En ce qui concerne la définition d'élément neutre, nous distinguons les types de réponses suivants :

- *présence du quantificateur universel uniquement* : dans 21 copies, le quantificateur est explicitement présent, qu'il soit correctement introduit ou non ; dans 4 réponses, sa présence est implicite, par exemple avec l'introduction d'un élément générique (« soit x réel ») ;
- *présence des deux quantificateurs universel et existentiel dans un énoncé clos* : par exemple « $\exists ! e \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall x \in \mathbb{R} x * e = e * x = e$ » (3 réponses) ;
- *absence de quantificateur* : aucun signe de quantification détecté, par exemple « $x * e = e * x = e$ » (6 réponses) ;
- *pas de réponse* : 3 copies.

En ce qui concerne la recherche effective d'un élément neutre, nous pouvons noter :

- *présence du quantificateur universel uniquement* : 5 réponses (dont 4 de manière explicite et une de façon implicite) ;
- *présence des deux quantificateurs universel et existentiel dans un énoncé clos* : aucune réponse ;
- *absence de quantificateur* : 24 réponses ;
- *pas de réponse* : 11 copies.

Il est remarquable que, lors du passage de la définition générale d'un élément neutre à la vérification d'existence effective, la nécessité d'utiliser un quantificateur ne semble plus évidente pour les étudiants. De fait, dans cette question, la non utilisation de la quantification ne semble pas avoir empêché la réponse à la deuxième partie de la question de manière significative, puisque 22 étudiants donnent la bonne réponse pour l'élément neutre ($e = 0$). Parmi eux, un seul a utilisé le quantificateur (universel) dans la définition et dans la recherche d'un élément neutre, 10 ont utilisé la quantification dans la définition et pas dans la recherche effective, ceci conformément à ce qui avait été indiqué dans l'analyse a priori, 2

dans la recherche de l'élément neutre et pas dans la définition, et enfin 9 étudiants ne font pas du tout usage de la quantification.

De plus, 12 des 21 bonnes réponses sont données directement, la recherche de l'élément neutre n'étant pas explicitée.

II.2. b) Rappeler la définition d'un symétrique d'un élément x . Chercher les éléments de $\mathbb{R}$ admettant un symétrique pour la loi $$.* Sur 40 étudiants, 34 ont traité cette question, partiellement ou totalement. Nous avons demandé aux étudiants de souligner les termes dont ils ne connaissaient pas le sens. Leurs réponses montrent que, pour la plupart, la notion de symétrique a déjà été rencontrée : en effet, seuls trois étudiants indiquent ne pas comprendre le mot « symétrique ».

Comme nous l'avons expliqué dans l'analyse a priori, la question de définition n'appelait pas une utilisation de quantificateur. De fait, 2 étudiants restituent l'axiome d'existence d'un symétrique pour chaque élément (de la définition de groupe) sans répondre à la question.

La grille d'analyse qu'avait utilisée Chellougui (Chellougui 2003) s'appuyait uniquement sur l'utilisation des quantificateurs, ce qui ne permet pas une analyse assez fine pour l'étude qui nous intéresse ici. En effet, nous souhaitons, par exemple, analyser ici un éventuel lien entre la maîtrise de la quantification dans la définition et la production effective d'un exemple, c'est-à-dire entre la première partie de la question et la deuxième ; de plus, une corrélation entre les réponses aux questions a) et b) pourra ainsi être observée. Nous avons donc distingué plusieurs niveaux dans la résolution de l'exercice :

- Niveau 0 : Seule une définition erronée ou incertaine est proposée : par exemple, la définition de la commutativité est donnée (à la place de celle de l'élément symétrique), ou encore « *symétrique y de $x \Leftrightarrow y*x = -x$* // *pas sûr de ça. Peut être que c'est $y*x = 1$, y inverse de x* » (3 réponses).
- Niveau 1 : Seule une définition est proposée, énoncée de manière plus ou moins rigoureuse. Par exemple : « *$x^{-1}*x = x*x^{-1} = 1_*$* » ou encore « *$x^{-1}$ est symétrique de x si et seulement si $x^{-1}*x = x*x^{-1} = e$* » (12 réponses). Nous distinguons les étudiants qui avaient trouvé un élément neutre dans la question a) (5 copies) et les autres (7 copies).
- Niveau 2 : Les définitions sont traduites en terme d'équation avec le neutre trouvé à la question a), mais ne donnent pas lieu à une expression de l'inverse. On peut citer : « *Un symétrique d'un élément x est un élément donnant le neutre par composition à droite et à gauche avec x . // $x + y - xy = 0 \Leftrightarrow x + y = xy$* », ou encore « *$x*y = e$ avec y symétrique de x . // $\Rightarrow x + y - xy = 0$* ». (13 réponses.)

– Niveau 3 : Une expression correcte de l'inverse est proposée, avec la condition explicite $x \neq 1$ (1 copie), ou non (4 copies) « $\forall x, \exists x' tq x * x' = x' * x = e, x' \text{ est dit symétrique de } x. // x * y = x + y - xy = 0. // \text{ Je cherche } y, \text{ symétrique de } x. // x * y = 0 \Rightarrow x + y - xy = 0 // y(1 - x) = -x \Rightarrow y = \frac{x}{x-1}$ ». « $\forall x \in G, \exists ! y \in G \text{ tel que } x * y = e // x * y = x + y - xy \Rightarrow x + y - xy = 0 \Rightarrow y(1 - x) = -x \Rightarrow y = \frac{x}{x-1} \text{ avec } x \neq 1$ ». (5 réponses.)

– Niveau 4 : Une réponse correcte à la question est donnée sous la forme d'ensemble, obtenu via l'expression du symétrique (sans condition $x \neq 1$ explicite). Le cas $x = 1$ n'est pas justifié (1 copie) : « C'est un élément x' tel que $x * x' = e$. // On a : $x + x' - xx' = 0 \Leftrightarrow x = xx' - x' \Leftrightarrow x = x'(x - 1) \Leftrightarrow x = x'(x - 1) \Leftrightarrow x' = \frac{x}{x-1}$. Donc l'ensemble de ces éléments est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ».

– Niveau 5 : Une réponse totalement correcte est donnée (aucune réponse).

Pour i de 1 à 3, le niveau $i + 1$ implique un traitement correct au niveau i , aux exceptions suivantes près : 4 étudiants du niveau 1, proposent une réponse pour la deuxième partie de la question sans explication. « Je ne vois que 2 » ou « Il n'existe pas », ou encore « pour $x \neq 0$ ».

Regardons maintenant, avec ces niveaux d'analyse, les liens entre définitions du symétrique et recherche effective des éléments inversibles. Dans les niveaux 3 et 4, six étudiants ont su engager une procédure pour déterminer explicitement l'inverse d'un élément x (même si la condition d'existence n'est pas toujours énoncée). Au niveau 2, treize étudiants ont su interpréter la définition générale de symétrique dans le cadre de l'exercice en écrivant l'égalité $x + y - xy = 0$, mais n'ont pas su finir leur recherche. Huit transforment d'ailleurs cette expression en $x + y = xy$, mais sans nécessairement conclure. Trois étudiants concluent avec une réponse du type « Ce sont tous les éléments qui vérifient l'équation $x + y = xy$ », soit l'introduction de l'élément y n'est pas explicite, soit de la manière suivante : « avec $x \in \mathbb{R}$ ». Un étudiant conclut « $x = 0 = x^{-1}$ ». Un autre arrive à $\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 1$ et conclut « seul 2 vérifie cela, $2 * 2 = 0$. » Toutes ces réponses semblent confirmer la non identification des statuts respectifs de x et y . Enfin, au niveau 1, cinq étudiants ont trouvé une valeur pour l'élément neutre à la question précédente, et ont donné la définition d'un symétrique, mais ne traduisent pas $x * y = e$ de la définition générale en $x + y - xy = 0$.

Finalement, 18 étudiants sur 23 sont capables de restituer la définition de symétrique, et ont tous les éléments pour le traduire dans le cadre de l'énoncé, mais ne sont pas capables de le faire. Ceci semble être dû à une mauvaise compréhension du statut des lettres. L'on peut faire l'hypothèse qu'il s'agit là d'un obstacle didactique : dans l'enseignement supérieur, la différence de statut des

lettres n'est pas systématiquement traduite par un changement de notation, une explication étant que le statut des lettres dans un même problème peut changer (par exemple dans la résolution d'un système linéaire, les inconnues n'apparaissant pas comme variable pivot vont devenir les paramètres à partir desquelles l'ensemble des solutions va s'exprimer). Ainsi le symbole x est souvent utilisé comme inconnue, mais aussi indifféremment comme paramètre, variable ou élément générique. Dans cette question x est un paramètre, en fonction duquel il s'agit de déterminer si l'équation $x*y = e$ est résoluble, et non une inconnue, ce qui bloque l'étudiant dans son processus de résolution. Du fait de l'habitude d'introduire une lettre différente (par exemple a) lorsqu'il s'agit d'un paramètre, l'utilisation de la lettre a au lieu de x dans la formulation de la question aurait probablement facilité la résolution en clarifiant la situation. Un argument fréquemment avancé par les enseignants du supérieur est que la systématisation d'une telle prise en charge didactique nuit au développement de la flexibilité (ici au niveau des changements de statut des lettres) requise au niveau de l'enseignement supérieur. Les résultats obtenus à cet item indiquent que cette flexibilité n'est pas effective pour de nombreux étudiants de notre population.

D'un point de vue de l'impact de l'utilisation de la quantification sur la capacité à s'engager dans un processus de résolution, nous observons les faits suivants :

- En premier lieu, il n'y a conjointement aucune réponse parfaitement satisfaisante d'un point de vue mathématique (qui traite par exemple tous les cas) ni aucune réponse faisant un bon usage des quantificateurs à la fois dans la définition et la résolution.
- Ensuite, sur les 18 étudiants (13 du niveau 2 + 5 du niveau 1) ayant proposé une définition et un élément neutre à la question précédente, seuls deux ont utilisé explicitement des quantificateurs, alors que sur les 5 étudiants ayant trouvé une expression des symétriques, 2 ont utilisé des quantificateurs. Ce point est à nuancer puisque, comme nous l'avons expliqué, l'utilisation des quantificateurs n'était jamais totalement correcte.
- Enfin, en analysant les copies dans lesquelles une procédure de résolution a été engagée (ce qui se traduit par au moins une manipulation de l'égalité de départ), on observe le fait intéressant qu'aucune des réponses qui n'ont pas abouti ne présentait de quantification, alors que la quantification apparaît dans 2 des 5 copies qui proposent l'expression d'un inverse.

Le dernier point pourrait laisser penser que l'utilisation des quantificateurs permet un meilleur engagement dans un processus de résolution. Néanmoins, la faiblesse des effectifs nous incite à la prudence, même si ceci recouvre les résultats trouvés par Chellougui (2003). En outre, dans une analyse qualitative des réponses, nous pouvons observer que les 2 étudiants dont il est question font un mauvais usage des

quantificateurs en donnant un énoncé clos correspondant à l'axiome d'existence d'un inverse de la définition d'un groupe : « $\forall x \in G, \exists ! y \in G$ tel que $x*y = e$ ».

Cette situation est différente de la question a), où l'absence de la quantification n'a pas semblé avoir d'influence significative dans la possibilité de répondre ou non à la question. Ceci met bien lumière la différence de traitement dans les problèmes d'existence universelle (de la forme il existe - quel que soit) et d'existence relative (de la forme quel que soit - il existe) d'éléments, évoquée dans l'analyse a priori.

En définitive, les résultats obtenus à ces deux questions montrent la difficulté des étudiants à articuler les définitions formelles avec des exemples familiers. Ils confirment également les difficultés liées à la quantification identifiées par Chellougui (2003), en lien avec une instabilité du statut des lettres qui empêche les définitions d'être opératoires.

3.4. Questions autour du quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'objet paradigmatique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (exemple paradigmatique de groupe abélien cyclique d'ordre fini et d'anneau quotient). Il a été rencontré par les étudiants ayant suivi un module d'arithmétique en deuxième année à l'UM2, ainsi que par les étudiants issus des classes préparatoires aux écoles d'ingénieur.

III.1. Définir ce qu'est une relation d'équivalence sur un ensemble et les classes d'équivalence associées. Donnez quelques exemples.

III.2. Donner la définition d'une division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

III.3. Définir l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Quelle est sa structure ?

→ Analyse a priori

L'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ peut être défini comme l'ensemble des classes d'équivalence de la relation sur $\mathbb{Z}$: $xRy \Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}$. Une manière moins formelle d'exprimer cela est la suivante : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation d'équivalence « être congrus modulo n », ou encore « avoir le même reste dans la division euclidienne par $n \in \mathbb{N}^*$ ». C'est une manière plus commode et opératoire d'introduire cette notion. Alors que la première définition permet de décider si deux éléments appartiennent à la même classe, la division euclidienne permet de plus de décider dans quelle classe sont ces éléments (les entiers de 0 à $n-1$ étant le système privilégié de représentants qui est choisi).

C'est à l'aide de la division euclidienne que l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a été défini à l'Université Montpellier 2 en deuxième année de licence.

III.1. Il s'agit ici d'une définition de relation entre objets. La relation d'équivalence est de plus une notion de théorie des ensembles avec laquelle les étudiants

devraient être familiers. En effet, c'est une notion qui a été théorisée en première année et qui est transversale à plusieurs autres notions : en géométrie élémentaire où le vecteur est défini comme classe d'équivalence de bipoints, en arithmétique (« être congrus modulo n » est une relation d'équivalence), en algèbre linéaire (les classes de similitudes pour les matrices sont intimement liées à la diagonalisation), etc. Elle est en fait rencontrée par les élèves dès l'école primaire dans toutes les tâches de classement d'objets, par exemple selon leur taille ou leur couleur ; elle contribue également à donner du sens au concept de nombre cardinal. C'est par ailleurs une notion indispensable à la théorie des groupes : en effet, une manière incontournable de présenter le groupe quotient est de le définir comme ensemble des classes d'équivalence d'une relation d'équivalence modulo un sous-groupe, puis de le munir de lois induites qui seront bien définies si et seulement si le sous-groupe est distingué.

Il convient de regarder ici à nouveau l'articulation entre les aspects syntaxiques et sémantiques, ainsi que la pragmatique, notamment la capacité des étudiants à en fournir des exemples « concrets » (des modèles), qu'ils ont fréquentés dans leur cursus. L'on peut faire l'hypothèse que, à l'instar de la définition de groupe, un nombre significatif d'étudiants préférera utiliser le langage naturel, évitant ainsi l'explicitation des propriétés formelles.

Concernant la définition des classes d'équivalence, on s'attend à trouver une écriture ensembliste du type $\bar{a} = \{x \in E \mid x \sim a\}$ (définition habituellement donnée dans les manuels), ou une écriture en langage naturel comme « la classe de a est l'ensemble des éléments équivalents à a ».

Parmi les relations d'équivalence usuelles, on peut mentionner la relation d'égalité des produits en croix sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dont les classes sont les nombres rationnels, ou encore l'équipollence sur l'ensemble des bipoints d'un espace affine, dont les classes sont les vecteurs, ou tout simplement l'équivalence logique ou encore l'égalité. La relation de congruence modulo n permettant de définir les classes d'entiers modulo n (donc les éléments du quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) devrait être fréquemment citée, ayant été rencontrée au deuxième semestre de la deuxième année de licence. Les classes d'équivalence proposées devraient a priori être liées aux relations d'équivalence données. Nous devrions donc fréquemment retrouver les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, avec $n = 2, 3, \dots$ ou n générique.

III.2. Nous traiterons ici uniquement le cas de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, en lien avec la construction du quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui nous intéresse.

On s'attend ici à ce que les étudiants énoncent un théorème de division euclidienne, en assurant l'existence, sans formaliser davantage la nature de l'objet division euclidienne (dans le langage de la théorie des ensembles, c'est une application, voir ci-dessous) :

Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$:

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Il existe un couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $a = bq + r$, $|r| < |b|$.

Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ avec l'unicité du couple (q, r)

Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$.

On peut voir la division euclidienne comme une application de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ dans $\mathbb{Z}^2$, qui à un couple (a, b) en associe un (unique) autre (q, r) ; ou alors comme un procédé, un algorithme, utilisé lorsque l'on met en œuvre le processus de division. Il est très probable que les étudiants assimilent la division euclidienne au théorème permettant d'en établir l'existence.

De plus, outre les erreurs de formulation liées à la syntaxe, l'on pourrait trouver des oublis : par exemple omettre de mentionner que l'élément b doit être non-nul, ou encore oublier la ou les valeurs absolues et écrire : « $0 \leq r < b$ ». Ceci peut être lié à une confusion entre la division euclidienne dans l'ensemble des entiers relatifs et la division euclidienne dans l'ensemble des entiers naturels où la valeur absolue est inutile.

III.3. En plus des définitions déjà évoquées, l'on pourra trouver des écritures ensemblistes du type « $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{n-1}\}$ » qui seront plus ou moins explicitées. Il s'agit d'une définition dite en extension qui consiste à énumérer tous les objets satisfaisants la définition. Ce type de définition n'est pas toujours possible.

La formulation de la deuxième partie de la question peut sembler étrange : d'un point de vue rigoureusement mathématique, un ensemble seul n'a pas de structure (algébrique). Ce choix d'énonciation est cependant volontaire. En effet, le but de cette partie de la question est notamment d'interroger les conceptions des étudiants relativement à la notion métamathématique de structure : cette dernière joue-t-elle, à l'entrée du L3, un rôle organisateur (ou architectonique pour parler comme Bourbaki) des différentes classes d'objets et théories mathématiques (notamment algébriques) ? $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il conceptualisé comme un ensemble quotient muni d'opérations ? Si c'est le cas, les exemples paradigmatiques $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ et $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \times)$, de groupe cyclique d'ordre n , d'anneau quotient et de corps fini (pour p un nombre premier) respectivement sont-ils disponibles ? De ce point de vue, préciser davantage la question aurait éventuellement induit une sorte d'effet Topaze en donnant trop d'indication sur la réponse attendue.

L'usage du terme *structure* n'est pas institutionnalisé : l'étudiant ne dispose pas d'une liste de structures données par l'enseignant, il confectionne sa propre liste et fait sens éventuellement de la notion de structure, qui n'est jamais mathématiquement définie (voir Hausberger 2013, paragraphe III), à travers sa

propre analyse du discours, de nature méta, de l'enseignant. De ce fait, on peut faire l'hypothèse que l'on trouvera des réponses plus ou moins vagues ne faisant pas appel au vocabulaire des structures algébriques usuelles, du type : « c'est un quotient de l'ensemble des entiers par l'ensemble des multiples de n », ou encore « c'est le quotient de $\mathbb{Z}$ par $n\mathbb{Z}$ », ou encore « c'est un quotient » ou « c'est une structure quotient ».

→ Résultats

III.1.

□ Définition d'une relation d'équivalence :

Vingt-sept étudiants sur 40 ont tenté de donner une définition d'une relation d'équivalence. Aucun étudiant n'a donné une réponse correcte et complète (c'est-à-dire en explicitant formellement les propriétés lorsqu'elles sont nommées). Cependant, six étudiants énoncent une définition correcte en langage naturel du type : « Une relation d'équivalence est une relation binaire symétrique, réflexive et transitive. ». Cinq étudiants énoncent formellement les propriétés d'une relation d'équivalence mais n'utilisent aucun quantificateur. Voici un tel exemple : « Une relation d'équivalence est une relation vérifiant // $x \sim x$ // $x \sim y \Rightarrow y \sim x$ // $x \sim y$ et $y \sim z \Rightarrow x \sim z$. ». Contrairement à ce que nous aurions pu penser, aucune confusion avec la définition d'une relation d'ordre n'a été constatée. Nous notons dans cinq copies des confusions avec d'autres notions : deux étudiants évoquent l'associativité (« une relation d'équivalence vérifie : // la transitivité, la symétrie, et est associative »), un autre étudiant évoque les espaces vectoriels pour définir la relation d'équivalence (« soit $g, g', g'' \in E$ un espace vectoriel [...] »), un autre confond relation d'équivalence et équivalence logique, enfin un étudiant définit une relation d'équivalence comme « une partie de $E \times E$ » (la relation binaire vue comme un graphe ?). Presque un tiers des étudiants ayant répondu (8 étudiants sur les 27) donne une réponse sans faire une phrase. Nous en avons déjà cité deux. Un autre exemple est le suivant : « relat d'équivalence, =transitive, réflexif, symétriques. ». Quatre étudiants donnent des réponses insuffisantes du type : « 1) transitive // 2) réflexive // 3) ? ».

□ La définition de classe d'équivalence :

Huit étudiants sur les 40 (soit 20 %) ont tenté de donner une définition d'une classe d'équivalence. L'un d'entre eux en donne une définition correcte et complète en utilisant le registre ensembliste comme suit : « soit x un singleton. On note X sa classe d'équivalence // $X = \{y \in E | x \sim y\}$ ». Un étudiant donne une réponse se rapprochant d'une définition correcte en utilisant le langage naturel : « Les classes d'équivalence d'un point x st tous y tq $x \sim y$ ». Deux étudiants donnent une réponse peu claire ou maladroite : « les classes d'équivalence sont les objets qui sont tous

en relation entre eux. » et « Classe d'éq= $\{a_i \in A/a_i \sim a_j\}$ ». Enfin il est à noter qu'un étudiant semble confondre classe d'équivalence et normes équivalentes⁷. Il écrit en effet : « Une classe d'équivalence est un ensemble d'éléments où 2 éléments x_1 ou x_2 sont équivalents s'il existe $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ tq $c_1 x_1 \leq x_2 \leq c_2 x_1$ ».

▣ Les exemples de relation et de classe d'équivalence :

Quatre étudiants entreprennent de donner un exemple de relation d'équivalence. Voici leur réponse :

- « Exemple : $\sim$ est une relation d'équivalence sur $L^1_{\square}(E, A, \mu)$ où $f \sim g$ si $f = g\mu - pp$ »

- « L'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ avec les classes d'équivalence associées (les suites vérifiant $x_i = \lambda g_i$) ».

- « "Appartiennent au même espace vectoriel" est une relation d'équivalence »

- « exple la relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence et $\bar{x} = \{y \in E/y \leq x\}$ »

Les deux premiers exemples sont très élaborés. Le troisième exemple mériterait d'être précisé : faut-il comprendre la relation d'équivalence « appartiennent au même espace vectoriel E (fixé) » ou bien « appartiennent à un même espace vectoriel » ? Le dernier exemple est en revanche un exemple de relation d'ordre et non de relation d'équivalence, alors qu'aucune confusion n'apparaît dans la définition.

Citons également deux étudiants qui écrivent : « $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ », certainement en guise d'exemple de classe d'équivalence.

Il est étonnant que les seules relations d'équivalence correctes proposées soient des relations d'équivalence aussi élaborées, les relations d'équivalence élémentaires que nous avons proposées dans l'analyse *a priori* n'apparaissant pas. Les exemples mobilisables, cités effectivement par les étudiants, sont ceux rencontrés très récemment au premier semestre du L3 et probablement identifiés par l'enseignant en tant que tels.

III. 2. Vingt-trois étudiants ont proposé une définition de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ mais aucun n'a su donner une définition complète et correcte. Par exemple, aucun étudiant n'a placé une valeur absolue, ni pour r , ni pour b dans l'énoncé du théorème de division euclidienne ; tous les étudiants ont ainsi implicitement considéré la division euclidienne comme s'effectuant dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. De plus, aucun étudiant n'indique que le « diviseur » b dans $\mathbb{Z}$ doit être

⁷ Deux normes N_1, N_2 définies sur un espace vectoriel E sont équivalentes si il existe deux constantes strictement positives C_1, C_2 telles que pour tout $x \in E$ $C_1 \cdot N_1(x) \leq N_2(x) \leq C_2 \cdot N_1(x)$.

non nul. Un seul étudiant indique les ensembles d'appartenance des différents éléments, de façon incorrecte : « $\forall (n, k) \in \mathbb{Z}^2, \exists (q, r) \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = qk + r$ ». En revanche, certains le font partiellement : par exemple « Soit A et B : la div euclid. est : $\exists! (r, q) \in \mathbb{Z}^2 // 0 \leq r < BA = qB + r$ ».

La plupart des étudiants donnent des réponses « synthétiques » comme celle-ci : « $a/b : a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$ », ne précisant, ni les ensembles, ni les quantificateurs. Cinq étudiants n'indiquent pas que le reste doit être positif ou nul.

Trois étudiants montrent une confusion dans la condition d'inégalité sur le reste : « La division euclidienne d'un élément x de $\mathbb{Z}$ par un élément y de $\mathbb{Z}$ donne (a, r) où $x = ay + r$ avec $0 \leq a < r$ ». En définitive, l'examen des copies fait apparaître sur ce point un faible contrôle des hypothèses du théorème ainsi qu'une faible aptitude à l'expression formelle.

Les résultats obtenus à cette question sont donc assez décevants. Un facteur explicatif pourrait être la prépondérance de la dimension outil de la division euclidienne, la tâche de définition mettant en avant la dimension objet. Dès le lycée, la division euclidienne est plutôt présentée comme un procédé effectif permettant une certaine décomposition. Le lien entre ce procédé et la définition formelle très générale se fera beaucoup plus tard (en troisième année de licence ou en première année de master). C'est probablement dans ce cadre très unifié que la division euclidienne accédera au statut d'objet. Le passage de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$ est déjà la visée d'une telle généralisation, d'où en partie les difficultés rencontrées à donner une définition dans ce cadre élargi (par rapport à $\mathbb{N}$).

III.3.a) Trois aspects sont abordés dans cette question : le registre de représentation choisi dans la réponse, le type de conception des étudiants sur la nature de l'objet $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ que l'on peut inférer à partir des réponses données, et enfin la qualité de la réponse (correcte, incomplète, incohérente, etc.).

Nous nous intéressons d'abord au registre de représentation choisi par les étudiants. Les deux registres préférés pour cette question sont les registres ensembliste tel que « $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\lambda \in \mathbb{Z} / (\lambda \bmod n) \in \{0, \dots, n-1\}\}$ » (cela concerne 12 étudiants sur les 31 qui ont répondu, soit 38,7%) et du langage naturel comme « C'est l'ensemble des multiples de n » (11 étudiants, soit 35,6% des étudiants qui ont répondu). Ainsi les trois quarts des étudiants qui ont répondu ont utilisé ces registres de représentation. Trois étudiants utilisent le registre algébrique comme « $k \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \Rightarrow k \equiv p[n]$ », et 3 étudiants utilisent au moins deux registres différents.

Dans ce qui suit, nous nous proposons d'analyser les types de conceptions présents relativement à cet ensemble. Nous nous sommes fiés à certains indices pour effectuer notre classification : il s'agit des signifiants utilisés par l'étudiant dans sa réponse. C'est en effet un des composants qui définissent un concept selon

Vergnaud (1990). Ils constituent donc de bons indicateurs pour déterminer le type de conceptions que les élèves ont à propos de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: soit comme un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$, soit comme un ensemble de classes d'équivalence. Mis à part les copies où il n'y a pas de réponse (« SR »), nous avons distingué 3 grandes catégories :

- les réponses dans lesquelles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ semble être considéré comme un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$; l'on distingue les réponses où ceci est implicite (réponses du type « $\{0, \dots, n-1\}$ », ou « ensemble des "restes" modulo n ») ou explicite : « $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\lambda \in \mathbb{Z} / (\lambda \bmod n) \in \{0, \dots, n-1\}\}$ » ou « $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$. Il est composé [...] ».
- Les réponses dans lesquelles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ne semble pas être considéré comme un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$; l'on distingue les réponses où ceci est implicite (« $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \bar{n}\}$ ») ou explicite (les réponses font généralement référence à des « classes » comme ici : « C'est l'ensemble des classes d'équivalence mod n des éléments de $\mathbb{Z}$ »).
- Les réponses trop « pauvres » où il n'est pas possible de décider, comme la réponse suivante : « modulo $[n]$ ».

Nous obtenons les résultats suivants.

Conceptions	explicite/ implicite	Signifiants	Nb d'étudiants	%
Sous-ensemble de $\mathbb{Z}$	explicite	Ss-ens/ss-gp	3	7,5
		Élém. $\in \square$	2	5,0
	implicite	Restes modulo	3	7,5
		Autres	2	5,0
«Classe» / «Quotient» / «Rel. d'Equivalence»	explicite	Classes/RE	8	20,0
		Congruence/Quo	2	5,0
	implicite	$\{\bar{0}, \bar{1}, \dots\}$	7	17,5
Indéterminé			4	10,0
Sans Réponse (SR)			9	22,5
Total			40	100

Ces résultats montrent que chez 10 des 27 étudiants dont on a pu identifier une de ces deux conceptions, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est vu comme un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$. Ce n'est pas étonnant, car le choix de représentants privilégiés a justement pour but d'identifier les classes à des éléments particuliers. L'intérêt de la conceptualisation des classes

comme des sous-ensembles (notamment à travers l'homomorphisme $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) ne sera visible pour l'étudiant que tardivement dans l'élaboration théorique.

Pour autant une conception en termes de classes d'équivalence n'implique pas nécessairement une réponse correcte à la question : en effet, au total, seuls 3 étudiants sur 40 sont capables de donner une définition satisfaisante de cet ensemble étudié l'année précédente, un quart en donnant une réponse incomplète.

III.3.b) Si l'on excepte les étudiants qui n'ont pas répondu (SR), nous avons classé les autres copies suivant que les réponses mentionnent que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe, un anneau ou un corps si (et seulement si) n est premier. Ces trois catégories constituent les réponses qui peuvent être considérées comme correctes bien que les lois considérées demeurent implicites. Certains étudiants mentionnent que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est toujours un corps ; d'autres réponses sont trop imprécises, comme « *structure d'ensemble quotient* ». Ceci représente les réponses qui ne peuvent pas être considérées comme correctes. Voici les résultats obtenus :

	Structure	Nb d'étudiants	%
Réponse correcte	Groupe	5	12,5
	Anneau	5	12,5
	Corps si n premier	5	12,5
Réponse incorrecte	Corps	2	5,0
	Autre	4	10,0
Réponse imprécise	« Quotient »	1	2,5
Sans Réponse (SR)		21	52,5

Nous observons ainsi que plus de la moitié des étudiants n'a pas répondu à cette question (21 étudiants sur 40). Aucun étudiant n'évoque à la fois que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe et un anneau, et parmi les réponses de « corps si et seulement si n est premier », une seule évoque dans le même temps la structure de groupe de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et deux qu'il s'agit d'abord d'un anneau. Seuls 10 étudiants affirment que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède une structure de groupe ou d'anneau.

Parmi les autres réponses, 5 évoquent une structure de groupe, 5 une structure d'anneau, et 5 une structure de corps si (et seulement si) n est premier. Les autres étudiants ne répondent pas à la question (21 étudiants sur 40), ou donnent des réponses incorrectes (6 sur 40).

En définitive, bien que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ait été rencontré par nos étudiants, en tant que groupe et anneau, dans le cadre des enseignements d'arithmétique de l'année antérieure, cet objet semble trop peu familier aux étudiants pour pouvoir jouer le rôle d'exemple paradigmatique de groupe abélien cyclique d'ordre fini et d'anneau quotient. Ceci est renforcé par le fait que les étudiants n'ont pas produit à la première question les

exemples de classes d'équivalence associées à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (« avoir le même reste dans la division euclidienne par n » ou « être congru modulo n »). Ainsi, on peut penser que le mode de pensée mathématique qui consiste à identifier une relation d'équivalence pertinente sur un ensemble donné et à considérer l'ensemble obtenu par « passage au quotient » n'est pas disponible chez les étudiants que nous avons interrogés.

3.5 Synthèse des résultats

Nous présentons ci-dessous une synthèse des principaux résultats qui se dégagent de nos analyses :

1. Le corpus recueilli met en lumière les difficultés des étudiants à articuler les définitions formelles abstraites avec les domaines concrets d'objets et les invariants opératoires auxquelles ces définitions renvoient, ce qui se manifeste en particulier par l'incapacité des étudiants à produire des exemples, à l'exception d'exemples complexes rencontrés récemment. Ceci est le cas en particulier pour les relations d'équivalence.
2. On observe dans un certain nombre de réponses l'absence de quantificateurs dans les définitions formelles, ce qui induit une incertitude sur le statut logique des lettres (variable libre, variable liée, élément générique, élément singulier), dont on peut faire l'hypothèse que ceci empêche les étudiants de s'engager dans les preuves, ou encore d'interpréter les résultats des calculs conduits. Ceci apparaît principalement dans les exercices sur les groupes.
3. Concernant l'exemple paradigmatique $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, seuls 40% des étudiants interrogés donnent une définition renvoyant explicitement à la notion d'ensemble quotient, et ce quoique cet aspect soit « visible » dans la notation de cet ensemble. Nous faisons l'hypothèse que le point de vue « ensemble quotient » étant peu explicité en Algèbre Linéaire dans les cours de Licence 1^{ère} et 2^{ème} années, les étudiants ne disposent pas d'une référence permettant d'identifier cet aspect crucial. Ceci montre que pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ joue son rôle d'exemple paradigmatique, il est nécessaire de le retravailler dans cette perspective, d'en faire une reprise, en adaptant pour le niveau qui nous intéresse cette notion introduite par Larguier (2012). Par ailleurs, seuls 50% des étudiants répondent à la question sur la structure de l'ensemble. Ceci confirme ce que nous avons indiqué dans l'analyse a priori, à savoir que tant que le terme de structure n'est pas institutionnalisé, il ne joue pas son rôle organisateur.
4. L'analyse logique des exercices sur la notion de partie génératrice fait apparaître une complexité qui avait été sous-estimée lors de l'élaboration du questionnaire et qui peut expliquer pour partie les difficultés rencontrées par les étudiants. Nous faisons l'hypothèse que ceci vaut pour d'autres définitions axiomatiques pour lesquelles le nombre de termes primitifs est important. Ceci met

en lumière la pertinence de la prise en compte l'analyse logique des énoncés dans les analyses a priori des tâches proposées (Durand-Guerrier, 2013).

5. L'analyse lexicale effectuée sur la définition de groupe montre des liens conceptuels très forts chez les étudiants ; par exemple entre ensemble et loi de composition interne, ou encore entre existence d'un élément neutre et d'un symétrique pour tout élément. Mais ces liens ne suffisent pas pour autant à restituer la définition correctement (notamment à cause d'une mauvaise utilisation des quantificateurs) ce qui rejoint les résultats des travaux de Chellougui (2003)).

Conclusion

Nous nous proposons dans ce travail de conduire une première exploration sur la disponibilité chez les étudiants de troisième année de licence à l'université Montpellier 2 des prérequis nécessaires à l'apprentissage de la théorie abstraite des groupes. L'analyse épistémologique met en évidence le rôle fondamental de l'articulation entre définitions axiomatiques et exemples. Nos résultats montrent que cette articulation est peu disponible chez les étudiants que nous avons interrogés, y compris pour des notions relativement élémentaires comme celle de « relation d'équivalence ». On peut faire l'hypothèse que cette faiblesse dans la capacité à articuler définitions et exemples est un obstacle à la restitution de définitions axiomatiques formelles, les étudiants ne disposant pas des contrôles sémantiques fournis par les exemples. En outre, l'analyse logique montre une complexité réelle dans la construction effective des exemples dans le cas des définitions axiomatiques.

Il ressort de nos analyses que les étudiants sont mal préparés à aborder l'étude de la théorie abstraite des groupes, sous la forme habituelle où elle est enseignée en troisième année de licence à l'Université Montpellier 2.

Nos travaux se poursuivent suivant deux directions :

- Approfondissement de l'étude didactique de l'articulation entre définitions et exemples et propositions de pistes pour la travailler (thèse en cours de C. Spitalas).
- Étude épistémologique et didactique du processus de construction d'une théorie structurelle en faisant fonctionner dans le cadre de l'élaboration d'une mini-théorie (au sens de Tarski 1969) les dialectiques concret/abstrait, objet/structure, syntaxe/sémantique, définitions/preuves (Hausberger 2015b).

Annexes

A. Une proposition de réponse aux questions I.3.a) et I.4.b)

I.3. Dans chacun des cas suivants, la famille A est-elle génératrice de l'espace vectoriel E ? Justifiez.

a) $E = M_n(\mathbb{R})$ et $A = GL_n(\mathbb{R})$.

La famille des matrices $(E_{ij})_{i,j=1\dots n}$ (où les coefficients de la matrice E_{ij} sont tous nuls, sauf à la place (i, j) où la valeur est 1) est une base de E .

Or A engendre chacune de ces matrices. En effet, notons $(P_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la famille de matrices de A définies par : $\forall i, j, P_{ij} = E_{ij} + I_n$, où I_n est la matrice identité ; on vérifie immédiatement que ces matrices sont triangulaires inférieures (si $i \geq j$) ou supérieures (si $i \leq j$) de coefficients diagonaux tous non nuls, donc elles sont toutes dans A . On a alors : $\forall i, j, E_{ij} = P_{ij} - I_n$, avec P_{ij} et I_n dans A , ce qui signifie que la famille $\{(P_{ij})_{i,j=1\dots n}, I_n\}$ engendre la famille $(E_{ij})_{i,j=1\dots n}$ donc engendre E . Donc A est une famille génératrice de E .

I.4. Dans cette question, on considère l'espace vectoriel : $E = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$.

a) Expliquez rapidement pourquoi E est bien un espace vectoriel.

b) Donnez-en une famille génératrice finie. Justifiez votre réponse.

Soit $M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. On a : $\text{tr}(M) = 0 \Leftrightarrow a + e + j = 0 \Leftrightarrow j = -a - e$.

D'où : $M \in E \Leftrightarrow \exists a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}, M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & -a - e \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \exists a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$

$M = a(E_{11} - E_{33}) + bE_{12} + cE_{13} + dE_{21} + e(E_{22} - E_{33}) + fE_{23} + gE_{31} + hE_{32}$
(où E_{ij} désigne la matrice usuelle de la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à la i -ème ligne et j -ème colonne qui vaut 1).

Or les matrices $(E_{11} - E_{33})$, E_{12} , E_{13} , E_{21} , $(E_{22} - E_{33})$, E_{23} , E_{31} et E_{32} sont toutes dans l'espace vectoriel E , et toute matrice dans E s'écrit comme combinaison linéaire de ces matrices.

Ce qui signifie précisément que la famille

$$\{(E_{11} - E_{33}), E_{12}, E_{13}, E_{21}, (E_{22} - E_{33}), E_{23}, E_{31}, E_{32}\}$$

est génératrice de E . Remarque : elle en est même une base.

B. Extrait du programme de classes préparatoires MP-MP*

1402 | L.E.S.O.
N°3
29 AVRIL
2004
HORS-SÉRIE

PROGRAMMES DES CPGE

MP

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Le programme est organisé autour des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire : espaces vectoriels, applications linéaires, sous-espaces vectoriels supplémentaires, sommes directes, projecteurs ; bases, dimension et rang ; formes linéaires, formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques ; valeurs propres et sous-espaces propres d'un endomorphisme. Le programme met en œuvre les méthodes de l'algèbre linéaire pour la résolution de problèmes issus, non seulement des autres secteurs de l'algèbre, mais aussi de l'analyse et de la géométrie. Il comporte en outre quelques compléments d'algèbre et d'arithmétique : groupes cycliques, idéaux de l'anneau $\mathbb{Z}$, anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, idéaux de l'anneau $K[X]$.

La maîtrise de l'algèbre linéaire en dimension finie et, notamment, de l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et points) et le point de vue matriciel, constitue un objectif essentiel. Le programme combine, de façon indissociable, l'étude des concepts de l'algèbre linéaire avec celle des problèmes linéaires (indépendance linéaire, équations linéaires, réduction des endomorphismes et des matrices, approximation des fonctions, propriétés affines et métriques des configurations et des transformations géométriques...).

Le programme d'algèbre et géométrie comporte la construction, l'analyse et l'emploi d'algorithmes numériques (issus de l'arithmétique ou de l'algèbre linéaire) ainsi que l'emploi du logiciel de calcul symbolique et formel.

I. ALGÈBRE GÉNÉRALE

1- Groupes

a) Groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Structure des sous-groupes de $\mathbb{Z}$.

Relation de congruence modulo un entier $n > 0$, notation $a \equiv b$ modulo n . Compatibilité avec l'addition ; groupe quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, morphisme canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Générateurs du groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Tout autre exemple de groupe quotient est hors programme.

Étant donné un élément a d'un groupe G , morphisme $k \mapsto ka$ (ou $k \mapsto a^k$) du groupe $\mathbb{Z}$ dans G ; noyau et image d'un tel morphisme. Le sous-groupe de G engendré par a est isomorphe à $\mathbb{Z}$ si ce noyau est réduit à $\{0\}$; il est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si ce noyau est $n\mathbb{Z}$.

Définition d'un groupe cyclique G (groupe fini admettant un générateur a) ; isomorphisme de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sur G , où n est l'ordre de G . Application au groupe U_n des racines n -ièmes de l'unité.

b) Groupes

Il s'agit d'introduire quelques notions de base sur les groupes et de les mettre en œuvre sur les groupes figurant au programme (groupe symétrique S_n , groupe linéaire, groupe orthogonal et leurs sous-groupes), en relation étroite avec l'algèbre linéaire et la géométrie. Il convient notamment d'étudier des exemples simples de réalisations géométriques de groupes finis par des groupes d'isométries.

Définition du produit de deux groupes.

Définition d'une partie génératrice d'un groupe.

L'étude générale des groupes, ainsi que celle des groupes finis, est hors programme.

On donnera des exemples de parties génératrices issus de l'algèbre et de la géométrie.

2- Anneaux et corps

Les notions d'anneau quotient et d'anneau principal sont hors programme.

a) Idéaux d'un anneau commutatif

Définition d'un morphisme d'anneaux, d'un isomorphisme.

Noyau et image d'un morphisme d'anneaux commutatifs.

Définition d'un idéal d'un anneau commutatif A .

Dans un anneau intègre A , définition de la relation de divisibilité $x|y$.

Définition de l'idéal Ax (ou xA) engendré par un élément x de A .

Pour que x divise y , il faut et il suffit que $Ay \subset Ax$.

C. Relevé statistique de l'analyse conceptuelle de la définition de groupe

Copie	Langage	Ensemble/ Espace	L(C)/ Opération	Asso- ciativité	Elém. neutre	Symétr. Opposé	Commutat. "symétrique"	Distributivité	LCE	2 lois	Transi- tivité	Addition	Structure	TOTAL
2		1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
3		1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
5		0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	3
6		1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	7
7	LM	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
8	LN (correct)	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
9	LM	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
10		0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	4
11		1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	4
12		1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	4
13		0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	5
14	LM	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
15	LN (correct)	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
16	LM (correct)	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
17		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
19		1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
20	LM	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
21		1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	5
22		0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	3
24		1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3
25		1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	6
26		0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	4
27	LM (correct)	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
28		0	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	5
29		1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	4
30		0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	6
31		1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	4
33	LM	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
34		0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	3
35		1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	3
36		0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	4
37		1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	6
38		0	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	4
39	LM	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	5
40		0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	3
TOTAL		23	30	25	29	28	3	3	2	2	1	1	1	

BIBLIOGRAPHIE

- AZROU, N. (2013), Proof in Algebra at the University Level : Analysis of Students' Difficulties. In Ubuz, B., Haser, C., Mariotti, M.-A. (eds). *Proceedings of CERME 8 - Eighth Congress of the European Society of Research on Mathematics Education*, Antalya : Turkey (2013), Middle East Technical University Ankara Turkey, pp. 76-85.
- BOURBAKI, N. (1948), L'architecture des mathématiques. Dans Le Lionnais F. (ed.) (1948, rééd. 1997) *Les grands courants de la pensée mathématique*. Paris : Hermann.
- CAVAILLES, J. (2008), *Œuvres complètes de Philosophie des Sciences*. Paris : Hermann.
- CHELLOUGUI, F. (2003), Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques dans l'enseignement tunisien, *Petit x* 61, p. 11-34.
- CHEVALLARD, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *RDM* 19/2, La Pensée Sauvage.
- COPI, I. (1954), *Symbolic logic*. New York : Macmillan.
- CORI, R. & LASCAR, D. (1993), *Logique mathématique*. Collection Axiomes, Masson.
- CORRY, L. (1996), *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*. 2nd edition. Basel : Birkhäuser, 2004.
- DORIER, J.-L., ROBERT, A., ROBINET, J. & ROGALSKI, M. (1994), L'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG première année, essai d'évaluation d'une ingénierie longue et questions, dans Artigue, M. et al. *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France - Hommage à Guy Brousseau et à Gérard Vergnaud*. (1993), Grenoble : La Pensée Sauvage, 328-342
- DORIER, J.-L. (ed.) (1997), *L'algèbre linéaire en question*, collection Bibliothèque de Recherches en Didactique des Mathématiques, Grenoble : La Pensée Sauvage Éditeur.
- DURAND-GUERRIER, V. (2005), *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*. Note de synthèse pour l'habilitation à Diriger les Recherches (HDR), Université Lyon 1, IREM de Lyon.
- DURAND-GUERRIER, V. (2008), Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM Mathematics education* 40, 373-384.

- DURAND-GUERRIER V. (2013), Quelques apports de l'analyse logique du langage pour les recherches en didactique des mathématiques, dans A. Bronner et al. (eds.), *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, Grenoble : La Pensée sauvage.
- ECO U. (1980), Segno. Milan : A. Mondadori. *Le signe*. Traduction française 1988. Bruxelles : Editions Labor.
- FREGE G. (1971), *Ecrits logiques et philosophiques*, Points Essais. Paris : Seuil.
- GRANGER G.-G. (1994), *Formes, opérations, objets*. Collection mathesis, Vrin.
- HAUSBERGER T. (2012), Le challenge de la pensée structuraliste dans l'apprentissage de l'algèbre abstraite : une approche épistémologique. Dans *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^e siècle* - Actes du colloque EMF2012 (2012), 425-434.
- HAUSBERGER T. (2013), On the concept of (homo)morphism : a key notion in the learning of abstract algebra, in Ubuz, B., Haser, C., Mariotti, M.-A. (eds). *Proceedings of CERME 8 - Eighth Congress of the European Society of Research on Mathematics Education*, Antalya : Turkey (2013), Middle East Technical University Ankara Turkey, pp. 2346-2355.
- HAUSBERGER T. (2015a), *Vers une didactique du structuralisme : le cas de l'algèbre abstraite*. Article en préparation.
- HAUSBERGER T. (2015b), *The 'theory of banquets': a mini-theory to teach mathematical structuralism*. Article en préparation.
- KUHN, T. (1983), *La structure des révolutions scientifiques*. Collection Champs, Flammarion.
- LAJOIE, C. & MURA, R. (2004) *Difficultés liées à l'apprentissage des concepts de sous-groupe normal et de groupe quotient*, RDM Vol. 24/1, pp 45-80.
- LARGUIER, M. (2012) *La connaissance des différents types de nombres : un problème de la profession en seconde*, Recherches en Didactique des Mathématiques, 31/1, 101-144.
- MERRI, M. (2007), *Activité humaine et conceptualisation. Hommage à Gérard Vergnaud*, Presses Universitaires Toulouse le Mirail.
- QUINE, W.V.O. (1950), *Methods of logic*, New York: Henry Holt. Traduction française Armand Colin, 1972.
- ROBERT, A. (1987), De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire. *Cahier de didactique des mathématiques* n°47, IREM de Paris 7.

- ROGALSKI, M. (1995), Que faire quand l'enseignement d'un type de connaissances tel que la dialectique outil-objet ne semble pas marcher et qu'il n'y a apparemment pas de situation fondamentale ? L'exemple de l'algèbre linéaire. *Séminaire DidaTech* n°169, pp. 127-162, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- RUSSEL, B. (1903), *Les principes de la mathématique*, traduction française in Russel B. *Ecrits de logique philosophique* (1989). Paris : PUF
- SINACEUR, H. (1991), Logique : mathématique ordinaire ou épistémologie effective ? In *Hommage à Jean-Toussaint Desanti*, Trans-Europ-Repress
- TARSKI, A. (1936a), Le concept de vérité dans les langages formalisés. Traduction Française G.G. Granger, in *Logique, sémantique et métamathématique*, 1972/1. Paris : Armand Colin, 157-269.
- TARSKI, A. (1936b), Sur le concept de conséquence. Traduction Française G.G. Granger, in *Logique, sémantique et métamathématique*, 1972/1. Paris : Armand Colin, 141-152.
- TARSKI, A. (1936c), *Introduction à la logique*. Traduction française 1969, Paris-Louvain : Gauthier-Dillard.
- VERGNAUD, G. (1990), *La théorie des champs conceptuels*. Recherches en didactique des mathématiques, 10/2.3, 135-170, Editions La pensée Sauvage.
- VERGNAUD, G. (2002), Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance. In J. PORTUGAIS (Ed.), *La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analyse didactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation*. Actes du colloque GDM 2001, 6-27.
- WAERDEN, B.L. VAN DER (1930), *Moderne Algebra*. 2 vols. Berlin : Springer.
- WITTGENSTEIN, L. (1921), Tractatus logico philosophicus. *Annalen der Naturphilosophie* ; Leipzig. Traduction Française par G.G. Granger (1993), Paris : Gallimard.
- WUSSING, H (2007), *The Genesis of the Abstract Group Concept: A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory*. Dover Publications.

VIVIANE DURAND-GUERRIER

THOMAS HAUSBERGER

CHRISTIAN SPITALAS

IMAG, UMR 5149, CNR-UM

Université Montpellier 2

Place Eugène Bataillon

34095 Montpellier cedex 5

Viviane.Durand-Guerrier@univ-montp2.fr

Thomas.Hausberger@univ-montp2.fr

Christian.Spitalas@univ-montp2.fr

SAMANTHA QUIROZ, FERNANDO HITT, RUTH RODRIGUEZ

EVOLUTION DES CONCEPTIONS DE FUTURS ENSEIGNANTS DU PRIMAIRE SUR LA MODELISATION MATHEMATIQUE

Abstract. Evolution of prospective school teachers' conceptions on mathematical modelling. This article related to a doctoral research project deals with the conceptual processes of mathematical modelling of elementary school preservice teachers in a Mexican educative institute. Based on the Theory of the Conceptual Fields, we analyze and explain the initial *conceptions* of the preservice teachers regarding to mathematical modelling. Through a methodology that combines the *lesson study* and the notion of *hypothetical learning trajectories* for organizing the lesson, we realize the evolution of conceptions in both different planning and implementing cycles. The study put forward an innovative theoretical-methodological approach as regards a collaborative inquiry between the researcher and the preservice teachers.

Resumen. Evolución de las concepciones de futuros docentes de la primaria sobre la modelización matemática. El presente estudio, realizado en una institución educativa mexicana en el marco de una tesis doctoral, trata sobre los procesos de conceptualización de la modelación matemática en la formación inicial de cinco docentes de educación primaria. El estudio se apoya en la Teoría de los Campos Conceptuales para analizar y explicar las *concepciones iniciales* ligadas a modelación matemática de los docentes en formación. Además, mediante una metodología que combina el *estudio de lecciones* y la noción de *trayectoria hipotética de aprendizaje* para la organización de la lección, se analiza la evolución de dichas concepciones en los diferentes ciclos de planeación e implementación. El estudio apuesta a un acercamiento teórico-metodológico innovador sobre la investigación en colaboración entre investigador y docentes.

Résumé.

Cette étude, menée dans le cadre d'une thèse, examine les processus de conceptualisation de la modélisation mathématique dans la formation initiale de cinq enseignants du primaire, à partir de leurs leçons dans un établissement d'enseignement du Mexique. L'étude est basée sur la théorie des champs conceptuels pour analyser et expliquer les *conceptions initiales* des enseignants en formation liées à la modélisation mathématique. En outre, en utilisant une méthodologie qui combine *l'étude de leçon* et la notion de *trajectoire hypothétique d'apprentissage* pour l'organisation de la leçon, l'évolution de leurs conceptions dans les différents cycles de planification et de mise en œuvre est analysée. L'étude met l'accent sur une approche théorique et méthodologique innovante pour la recherche collaborative entre les chercheurs et les enseignants.

Mots-clés. Modélisation mathématique, conceptions, formation des enseignants, enseignement du premier degré.

1. Introduction

La recherche dans le XXe siècle a mis l'accent sur l'analyse de l'erreur faite par les élèves et leur rôle dans l'apprentissage des mathématiques; la détection des obstacles épistémologiques et leur dépassement ont conduit à une meilleure compréhension des problèmes d'apprentissage des mathématiques (Brousseau, 1998; Goupille et Thérien, 1988). Les efforts visant à surmonter un obstacle épistémologique selon l'approche de Brousseau, se sont éloignés des propositions du "problem solving", en créant ainsi une nouvelle approche de situations problèmes, la TSD (Théorie des Situations Didactiques). En approfondissant autour de la compréhension de l'activité mathématique des mathématiciens, cela a donné lieu à la naissance d'un autre type d'approche « situations de recherche de classe » de Grenier et Payan (1998), où la modélisation mathématique a été au cœur de l'activité même. Ces situations ainsi que celles proposées par Brousseau ont promu l'importance de la co-construction des connaissances dans la classe de mathématiques et donc la nécessité pour les chercheurs de clarifier la notion de conception initiée par Brousseau (1976/1983). Ce processus de caractérisation a dû attendre le développement de la Théorie des Champs Conceptuels (TCC) de Vergnaud (1990), et la précision de la notion de conception (Balacheff et Gaudin, 2002, 2010).

D'une certaine façon, la résolution de situations problèmes a encouragé l'étude de la modélisation mathématique, dont la recherche est devenue un défi pour certains chercheurs dans l'enseignement des mathématiques (Niss, Blum et Galbraith, 2007; Pytlak, Rowland et Swoboda, 2011). Ainsi, à partir de la recherche d'une description du type de recherche (Kaiser, Blomhøj et Sriraman, 2006), ou sur les aspects détaillés concernant le type de processus cognitifs des élèves (Blum et Borromeo, 2009) ou de l'enquête sur le rôle de la technologie dans les processus d'apprentissage (Confrey et Maloney, 2007), les études sur ce sujet ont mis en évidence les questions clés pour la gestion dans les classes de différents niveaux d'enseignement.

La reconnaissance de l'éducation primaire comme pilier sur lequel la plupart des concepts mathématiques et de concepts sont formés a conduit à la création d'études qui mettent en évidence les multiples avantages que la modélisation prévoit spécifiquement chez les élèves de 6-12 ans. Y compris la promotion d'un lien clair entre les mathématiques et la réalité de l'élève, la recherche permanente pour la construction de la connaissance et le travail de discussion entre pairs (Aravena et Caamaño, 2009; Lombardo et Jacobini, 2009).

Bien que les chercheurs sont convaincus de l'importance de la modélisation mathématique en classe, les programmes scolaires n'ont pas suivi cette approche, non plus la formation des enseignants. Pourtant Doerr (2007), Lesh et Zawojewski (2007) et Rodriguez (2010) mettent l'accent sur la nécessité d'inclure l'étude de la

modélisation mathématique dans la formation des enseignants, en insistent sur l'importance d'étudier les situations dans différents contextes comme l'a reconnu la mathématique réaliste depuis sa naissance (approche connue comme « Realistic Mathematics Education »).

Si la modélisation mathématique est considérée comme une notion qui doit être apprise par les enseignants dans leur formation, il est nécessaire, comme point de départ, de connaître les conceptions qu'ils possèdent comme fruit de leur expérience dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Les travaux de Vergnaud (1990) permettent une première approche sur les conceptions et une précision pourra se dégager des travaux de Balacheff (2004) et Balacheff et Gaudin (2002, 2010) afin de fournir une plus grande clarté et de détails à ce processus.

Conformément à ce qui précède, les questions qui guident cette étude sont les suivantes :

- Quelles conceptions ont les futurs enseignants sur la modélisation mathématique dans la dernière session de ses études?
- Comment faire évoluer les conceptions des futurs enseignants concernant la modélisation mathématique dans un environnement collaboratif?

2. Cadre contextuel

La présente étude ayant été réalisée au Mexique, nous précisons ici les caractéristiques du système éducatif mexicain. L'enseignement primaire au Mexique se compose de six années de scolarité et s'adresse aux élèves âgés de six à douze ans. Les résultats des tests nationaux et internationaux dans l'évaluation des mathématiques à ce niveau n'ont pas été très favorables. Selon l'Organisation de Coopération et de Développement Économiques (OCDE, 2010), le Mexique est positionné au bas des pays affiliés par rapport aux acquis des élèves en mathématiques selon le test PISA 2003 (Programme international d'évaluation des étudiants). À noter cependant que l'évaluation PISA 2012 montre une amélioration pour le Mexique. L'évaluation nationale mexicaine du rendement dans les institutions scolaires (ENLACE) montre que 63% des élèves dans les écoles primaires au Mexique ont des connaissances rudimentaires, insuffisantes pour l'apprentissage des mathématiques (Ministère de l'Éducation Publique, 2011).

Dans le contexte mexicain, les enseignants de l'école primaire font leurs études à l'École Normale. Le programme de formation a été rénové avec la réforme du niveau supérieur en 1997. Donc, les futurs enseignants observés ont été diplômés sous cette réforme. Dans ce plan, deux cours concernent la didactique des mathématiques, où l'approche pédagogique proposée est constructiviste, et l'accent principal est mis sur la résolution de problèmes. Dans ces cours, la modélisation n'est pas abordée ; cependant, divers éléments de ces cours ne sont pas en

opposition complète avec les questions abordées par les enseignants en formation, par exemple, le travail d'équipe et le rôle de l'enseignant comme guide des élèves dans leur processus d'apprentissage.

3. Cadre théorique

3.1. La modélisation mathématique

Si nous prenons en considération le travail de Pollak (1969, 2007), Blum et Niss (1990) Niss, Blum et Galbraith (2007); et Lesh et Zawojewski (2007), nous pouvons définir la modélisation mathématique comme un processus cyclique qui consiste à attaquer un problème en contexte et à construire un modèle mathématique qui permettra de donner une réponse au problème posé.

La description graphique du cycle de la modélisation a été présentée par différents auteurs en fonction de perspectives spécifiques. Cela inclut le travail de Blomhøj et Jensen (2003), qui ont été les premiers à décrire la modélisation comme un processus cyclique. Avec plus de détails, nous avons le graphique présenté par Blum et Leiss (2006) qui montrent d'un point de vue cognitive, les étapes de la modélisation. En accord avec les objectifs spécifiques de ce document, nous empruntons le modèle proposé par Rodríguez (2007, 2010) et montrons en détail chacune de ses composantes.

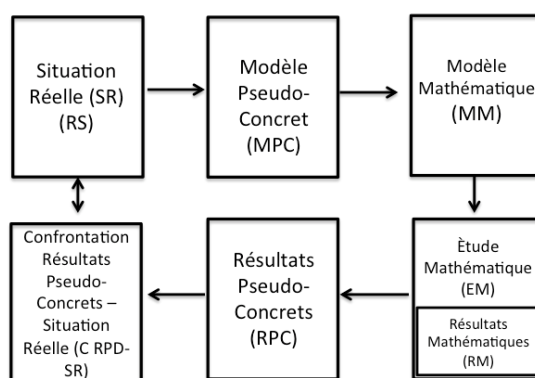


Figure 1. Cycle de la modélisation mathématique (Rodríguez, 2007, 2010)

- a) Situation réelle. Le cycle commence avec la proposition d'une situation basée sur un contexte réel, où la manipulation des objets est importante. Les situations peuvent à leur tour être fondées sur des contextes pseudo-concrets, c'est à dire, des contextes qui décrivent la réalité.
- b) Modèle Pseudo-Concret. Après la lecture du problème posé, les élèves réalisent une première approche vers un modèle mathématique en

proposant un modèle pseudo-concret. Des abstractions, des simplifications et des hypothèses sont faites.

- c) **Modèle Mathématique.** Ici, les élèves proposent un modèle mathématique qui modélise la situation réelle présentée. On reconnaît dans cette étape le modèle avec ses représentations graphiques, numériques et analytiques.
- d) **Étude Mathématique / Résultats Mathématiques.** Les élèves travaillent avec le modèle mathématique déjà établi. C'est lors de ce cycle que les algorithmes émergent.
- e) **Résultats Pseudo-Concrets.** Les résultats mathématiques doivent être analysés dans les termes où la situation réelle a été posée.
- f) **Confrontation Modèle-Résultats réels.** Finalement, les élèves doivent valider leur réponse ainsi que le modèle face à la situation réelle et en vue de son amélioration dans des situations similaires.

Le parcours des étapes précédentes a montré l'impact sur le développement d'un certain nombre de compétences sur la modélisation mathématique. Celles-ci comprennent les compétences pour comprendre la situation et proposer un modèle mathématique, comme le signalent entre autres (Singer, 2007; et Maass, 2006). De plus, quelques initiatives liées à la modélisation mathématique dans le programme de formation des enseignants mentionnent l'étude de Blomhoj et Hoff Kjeldsen (2006), qui présentent une expérience significative dans l'apprentissage des mathématiques de la modélisation avec des enseignants en service. Leurs résultats montrent l'importance de continuer dans la direction de la formation initiale des futurs enseignants.

3.2. Analyse des conceptions sur la modélisation mathématique

L'étude sur l'acquisition d'une conception est au centre de la théorie des champs conceptuels (TCC), cadre théorique sur lequel repose la présente recherche. Du point de vue cognitif, l'apprentissage de la modélisation mathématique ne peut être réduit à sa définition, puisque la signification va être acquise à travers un ensemble de situations et de problèmes qui sont destinés à être résolus (Vergnaud, 1990).

Alors que la TCC a commencé comme une théorie visant l'étude des objets mathématiques, selon le même Vergnaud (1990) elle a été utilisée dans divers domaines comme la physique, l'histoire, la géographie et même la biologie. Notre propos est de montrer son efficacité dans le domaine de l'enseignement des mathématiques, en étudiant des conceptions autour de la « modélisation mathématique » chez les enseignants du primaire en formation.

Selon Vergnaud (1990) une conception se compose d'une série de problèmes, d'un ensemble d'opérateurs et d'un système de signes. Le schème est la structure

cognitive qui sert à résoudre une classe de problèmes donnés. Les schèmes s'expriment à travers diverses représentations symboliques telles que le langage, ou par des expressions écrites ou picturales (Vergnaud, 1990). L'importance de l'étude des conceptions en observant le sujet dans une classe de situations a été notamment reconnue par Brousseau (1998), Douady (1986) et Artigue (1988).

Dans notre étude, nous avons adapté l'approche théorique de Vergnaud, en considérant l'ensemble des situations à lesquelles les enseignants vont faire face, l'ensemble des opérateurs ainsi que les processus de communication, et les systèmes de signes associés aux situations. La structure cognitive produite par l'enseignant face aux situations forme la conception. Notre hypothèse est que le schème lié à la conception se développera à travers la pratique et par l'analyse de vidéos de la pratique en classe de mathématiques.

À cet égard, nous présentons une proposition pour étudier les conceptions des futurs enseignants par rapport à la modélisation mathématique en accord avec le cadre théorique :

- a) Proposition d'une situation que l'on doit modéliser mathématiquement (Situation).

La situation choisie devrait être une activité intéressante et riche qui donne envie d'apprendre. Considérant ce qui précède, la situation devrait être sélectionnée comme la plus appropriée pour le programme d'enseignement d'un contenu mathématique donné. Afin de choisir un contenu spécifique pour cette recherche, on a réalisé une étude praxéologique des manuels pour identifier où l'on trouve le plus d'éléments du processus de modélisation mathématique dans une certaine leçon. Après l'étude praxéologique, le contenu choisi dans notre cas a été le "calcul de la probabilité d'occurrence dans une expérience aléatoire."

- b) Analyse des schémas pendant la résolution de la situation. (Schémas).

Pour l'analyse d'un schème, Vergnaud (1990) propose l'étude des principaux éléments constitutifs: objectifs et sous-objectifs, concepts en acte et propositions qui sont prises comme vraies par les sujets, donc qui fonctionnent comme de véritables théorèmes (en action). Soutenus par des études qui mettent l'accent sur des conceptions non mathématiques, spécifiquement la recherche de Boyer et Vergnaud (1998), nous prenons en compte les propositions vraies (théorèmes en acte initiaux) des enseignants en formation quand ils ont fait un choix des activités pour la planification et la mise en œuvre d'une leçon. En outre, différents aspects trouvés dans la littérature analysée nous signalent des points critiques pour la modélisation mathématique, en correspondance avec les concepts en acte, à savoir : a) le rôle de l'élève, b) le rôle de l'enseignant, c) les contextes réels, d) les conceptions de l'élève, e) la collaboration, f) la logique de la réponse; g) la connaissance mathématique, h) les méthodes mises en œuvre. Nous recherchons

quel objectif et quels sous-objectifs sont poursuivis par les enseignants en formation et sur quels concepts émergents leurs propositions s'appuient.

c) Étude des représentations symboliques (Représentations symboliques).

En faisant référence à l'ensemble des formes linguistiques et non linguistiques qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement, nous définissons le signifiant des conceptions. C'est lorsque s'expriment leurs représentations qu'il est possible de connaître les schèmes des sujets. Les productions des enseignants en formation, que nous avons prises en compte pour l'analyse des systèmes de modélisation mathématique, sont leurs expressions, leurs discussions et les arguments (formes linguistiques) ainsi que des annotations, des dessins et des diagrammes (représentations non linguistiques) qu'ils utilisent dans la planification et lors de la mise en œuvre de la leçon.

d) Reconnaissance de la façon dont les actions des enseignants sont perçues par eux-mêmes comme importantes (Structure de contrôle)

Ce quatrième élément vise à reconnaître les schèmes que les sujets mettent en marche avec une série de jugements visant la validité de ces actions. C'est grâce à cette structure de contrôle que les sujets estiment plausibles leurs hypothèses en utilisant certains schémas ou bien décident de les modifier (Balacheff, 2004; Balacheff et Gaudin, 2010). Dans notre investigation, nous cherchons les arguments des enseignants qui permettent la critique du choix des activités jugées importantes dans la planification de la leçon. Les décisions sont étayées par les expressions linguistiques que les sujets utilisent, en association avec des représentations symboliques.

Pour une présentation de l'analyse, les conceptions des enseignants en formation (à partir de maintenant nous allons les appeler simplement enseignants) seront situées dans chacune des étapes du cycle de modélisation mathématique précédemment décrit. Il est prévu qu'à partir de la situation (planification et mise en œuvre de la leçon en classe de mathématiques) les enseignants montrent par diverses représentations symboliques leurs schémas concernant chacune des parties du processus de modélisation. Les conceptions que les enseignants ont sans l'intervention du chercheur ont été nommées "conceptions initiales".

3.3 Choix des éléments pour étudier l'évolution des conceptions

Selon Vergnaud (1990) les changements de conceptions individuelles exigent des actes de médiation, en particulier l'utilisation de situations didactiques idéales qui encouragent les sujets à une rupture. Les idées de rattachement et les ruptures sont liées l'assimilation et l'accommodation selon Piaget.

Avec cette idée directrice, nous analysons l'évolution des conceptions sur la modélisation mathématique des enseignants confrontés à différentes situations qui provoquent des ruptures cognitives. Les situations correspondent à un objectif spécifique visant la réflexion sur les éléments cruciaux dans le processus de la modélisation mathématique et l'intégration de ces éléments dans leurs planifications de leçon.

3.3.1. Apprentissage en collaboration

Pour Hitt (2003), en plus de la proposition d'une situation qui génère une rupture, le changement de conception nécessite un travail dans un environnement collaboratif (voir Figure 2). Pour exploiter cette idée avec une planification par cycles de co-construction, nous nous conformons à l'*Étude de leçon* (Lewis et Tsuchida, 1998) et dans l'organisation, nous utilisons une approche liée à une *Trajectoire hypothétique d'apprentissage* (Simon, 1995; Simon et Tzur, 2004). Il est imposé que la planification et la mise en œuvre de la leçon soient le fruit d'un travail de co-construction des 5 enseignantes en formation.

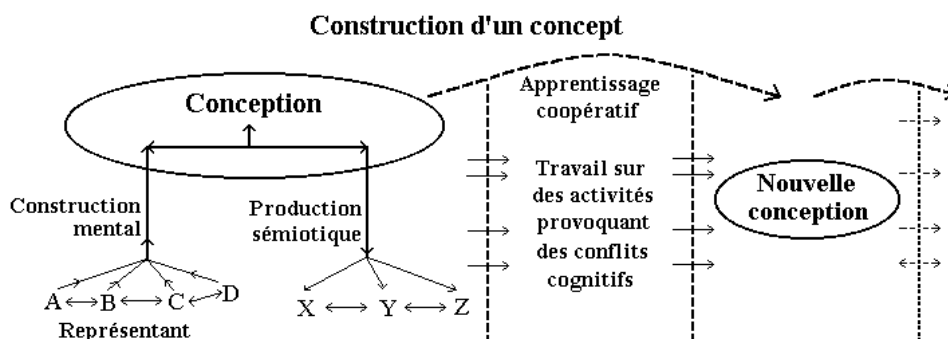


Figure 2. Évolution des conceptions (Hitt, 2003, p. 269)

3.3.2 Recherche collaborative

Dans notre recherche, nous sommes intéressés à deux aspects importants de la recherche collaborative. Le premier, déjà signalé, a trait à la formation des enseignants sur le modèle de l'enseignement et de l'apprentissage appelé l'*Étude de leçon* (Lewis et Tsuchida, 1998):

Les leçons de recherche sont soigneusement planifiées, généralement en collaboration avec un ou plusieurs collègues. Dans une école que nous avons étudiée, les quatre enseignants de troisième année se sont régulièrement réunis pendant plusieurs mois pour discuter comment promouvoir "l'initiative" des élèves dans l'étude des sciences. Quand ils ont conclu que poser des questions productives était une clé, les enseignants en sont venus à des stratégies visant à encourager de telles questions. Ils ont perfectionné leurs stratégies en visionnant mutuellement leurs leçons et en les discutant. A la fin, l'un des enseignants a présenté comme

leçon de recherche leur nouvelle approche à toute la faculté, tandis que les autres enseignants enregistraient la session et distribuaient des documents présentant les faits saillants de leurs mois de travail commun. (p. 14) [Traduit de l'anglais]

D'autre part, nous considérons la proposition faite par Simon (1995), Simon et Tzur (2004) pour l'organisation d'une leçon. Cette proposition prend un modèle appelé « Trajectoire hypothétique d'apprentissage » (THA de Simon, 1995):

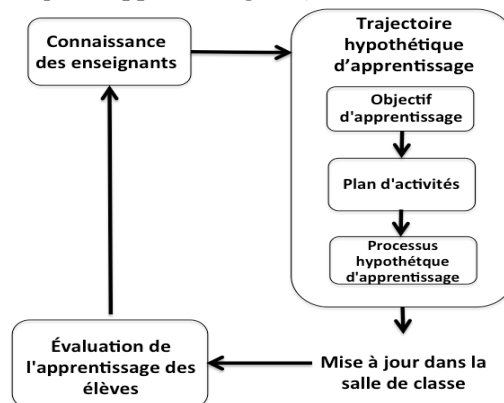


Figure 3. Cycle d'enseignement des mathématiques proposé par Simon (1995)

L'approche pédagogique de Simon (1995) et Simon et Tzur (2004) indique le développement d'un concept et les prévisions des enseignants des mathématiques sur le choix approprié d'organisation d'une leçon pour mieux promouvoir leurs activités d'apprentissage. Dans un cycle, comme celui indiqué sur la Figure 3, Simon (1995) montre que les connaissances des enseignants génèrent une THA, celle-ci provoque une transformation des objectifs et des activités ; ce processus d'apprentissage hypothétique, selon lui, aidera leurs élèves. Cependant, jusqu'à ce qu'on mette en pratique la THA dans la classe, l'enseignant peut réfléchir et donc évaluer la possible modification de la THA. Le cycle s'arrête lorsque l'enseignant estime que vraiment ses élèves ont atteint l'apprentissage visé.

3.3.3 Élaboration des situations

En reprenant les notions définies ci-dessus, le processus d'évolution des conceptions a été prévu comme suit:

- a) Planification conjointe (dans notre cas, une chercheuse avec cinq enseignantes en formation) d'une classe de mathématiques en connexion avec le calcul des probabilités d'un phénomène aléatoire.
- b) Mise en œuvre de la leçon planifiée dans une école primaire par une enseignante en formation. Les quatre autres enseignantes et la chercheuse sont des observatrices dans la classe.

- c) Réflexion sur ce qui s'est passé dans la classe, lors d'une autre réunion avec les cinq enseignantes. Au cours de cette séance d'échanges et de discussion, la chercheuse met en pratique une THA (de la part de la chercheuse) afin de créer des ruptures dans les conceptions initiales des enseignantes.
- d) Mise en œuvre du plan de la nouvelle leçon dans une école différente par une deuxième enseignante d'école primaire. Les quatre autres enseignantes et la chercheuse observent.
- e) Répétition du cycle (pour précision, voir section 3.3.1.3, 3.3.1.4 et 3.3.1.5) cinq fois, de sorte que chacune des cinq enseignantes puisse mettre en œuvre la leçon dans une école primaire.

3.3.4 Rôle de la chercheuse et des enseignantes dans la méthodologie

Nous devons reconnaître qu'il existe trois acteurs principaux de la recherche: la chercheuse, les enseignantes en formation et les élèves des écoles primaires. Chacun de ces acteurs a différents objectifs, qui seront décrits en détail dans ce qui suit:

a) La chercheuse

Le principal objectif de la chercheuse est de promouvoir une évolution des conceptions des enseignantes en formation concernant la modélisation mathématique (voir Figure 4).

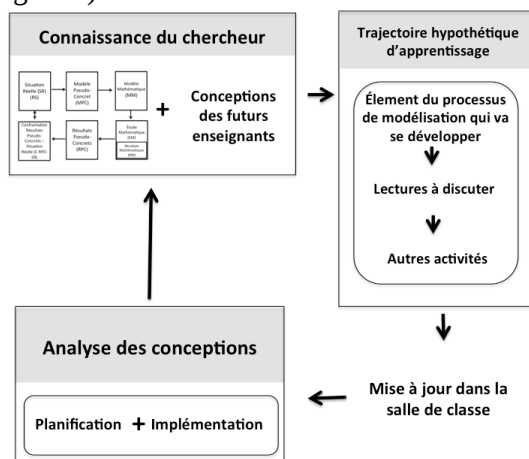


Figure 4. THA de la chercheuse

Pour atteindre cet objectif, la chercheuse a produit une THA, constituée de la lecture et la discussion de divers documents avec les enseignantes en formation, de telle sorte que certains éléments du cycle de modélisation mathématique sont incorporés dans la planification. Après la première leçon, la chercheuse analyse ce

qui est arrivé, pour déceler les conceptions des enseignantes et remodeler la THA en incorporant des éléments pertinents pour une réflexion autour de la modélisation mathématique.

b) Les enseignantes en formation

Le principal objectif des enseignantes est que les élèves apprennent à calculer la probabilité d'un phénomène aléatoire. Pour atteindre cette expérience, les enseignantes doivent générer une THA, où elles spécifient les activités qui doivent être utilisées avec les élèves du primaire, afin qu'ils apprennent à calculer la probabilité d'un phénomène aléatoire. Après l'expérience en classe a lieu une réunion où les cinq enseignantes réfléchissent et discutent de façon plus approfondie des éléments de la modélisation mathématique, qui doivent être intégrés dans la planification restructurée de la leçon suivante. Les enseignantes en formation reformulent leurs THA grâce à l'incorporation d'un plan d'activités pour la nouvelle leçon (voir Figure 5).

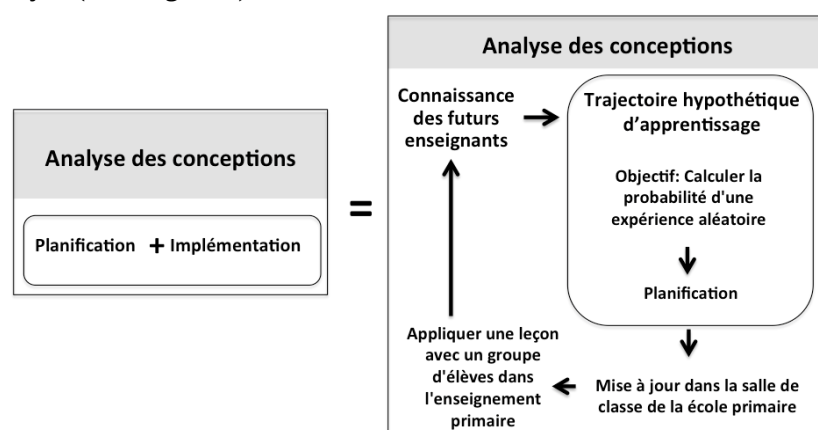


Figure 5. THA des enseignantes

3.3.5 Proposition de cycle imbriqué du travail pour l'évolution des conceptions des enseignantes

Le cycle des enseignantes en formation est intégré dans le cycle de la chercheuse (boucle imbriquée). Le processus composé de deux cycles décrits ci-dessous sera nommé «Cycle de évolution des conceptions » (Figure 6).

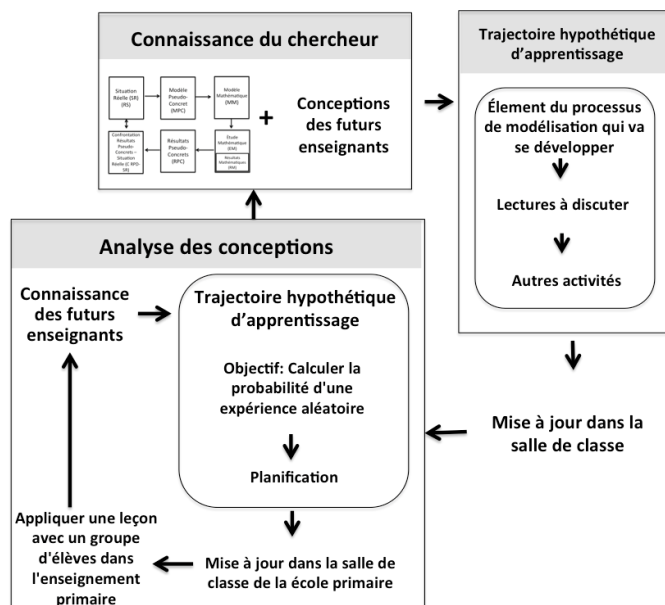


Figure 6. Cycle d'évolution des conceptions

Un total de cinq cycles est envisagé par la chercheuse selon la méthode de Lewis et Tsuchida. Ceux-ci produiront, tour à tour, les cycles imbriqués des enseignants en formation. L'analyse et l'échange d'idées dans chaque cycle est une proposition qui sous-tend le travail de la chercheuse, qui doit être relié en tout temps au travail des enseignantes, et c'est par ce travail de co-construction qu'il sera possible de faire évoluer les conceptions des enseignantes et ainsi, à améliorer l'enseignement à l'école primaire.

4. Objectifs

Les objectifs que poursuit cette investigation sont :

- Identifier et caractériser les conceptions initiales des enseignants en formation autour de la modélisation mathématique dans la dernière étape de leurs études pour obtenir le diplôme d'enseignant au primaire.
- Identifier et caractériser l'évolution de leurs conceptions initiales autour de la modélisation mathématique dans un milieu collaboratif.

5. Méthodologie

La présente recherche s'inscrit dans le cadre d'une méthodologie qualitative. Dans celle-ci, nous avons choisi comme échantillon cinq enseignants en formation qui répondent aux caractéristiques suivantes : être étudiant du dernier semestre du

diplôme en éducation élémentaire et travailler comme enseignant auxiliaire dans une école primaire. L'École Normale sélectionnée a élu les cinq enseignantes en formation (toutes de sexe féminin) qui se sont finalement prêtées à l'étude.

Pour la prise de données, on a utilisé trois types d'instruments. Les deux premiers sont deux guides d'observation qui ont été élaborés, l'un pour le moment de la planification de chaque leçon et l'autre pour la mise en œuvre. Un troisième instrument consiste en une grille d'analyse de documents, spécifiquement faite pour la planification de la leçon. Enfin, on a eu recours à des entretiens semi-structurés lorsque cela était jugé nécessaire pour clarifier n'importe quel événement. Les instruments ont été validés par un jugement d'experts.

Les données recueillies ont été analysées en utilisant la stratégie proposée par Yin (2003), qui consiste à examiner, classer, catégoriser, tabuler, évaluer ou recombinaison des observations toujours guidées par les propositions initiales de l'étude. Une triangulation a été faite pour confronter les observations directes avec les registres en utilisant la méthodologie et la théorie revisitée (Stake, 2005). La validation des conceptions présentées est réalisée en utilisant la technique montrée par Grenier et Payan (1998), qui consiste à confronter ses conceptions avec les faits observables, à la fois par la même chercheuse et à l'aide d'autres chercheurs si nécessaire.

Comme décrit dans le paragraphe précédent, l'approche de la recherche combine une étude des leçons (Lewis et Tsuchida (1998) avec les chemins hypothétiques d'apprentissage de Simon (2005). Grâce à l'aide de cette combinaison méthodologique, la présente recherche permet l'analyse de l'évolution des conceptions des enseignants en formation, à travers la mise en œuvre de la THA par le chercheur lorsque les enseignants planifient, conduisent une leçon et la restructurent pour une nouvelle application. Cinq cycles sont parcourus, comme indiqué sur la Figure 7.

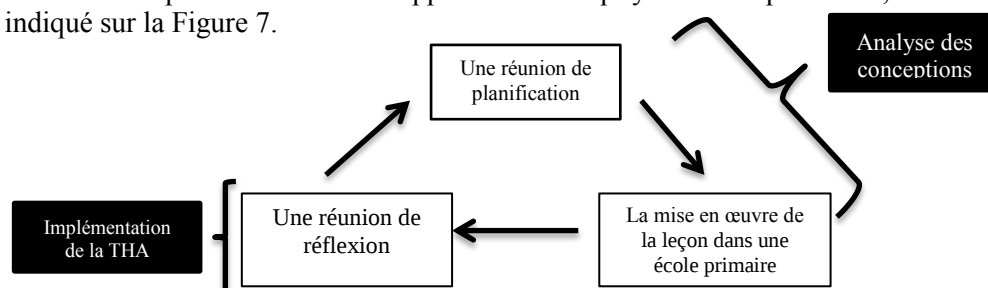


Figure 7. Plan de recherche

6. Présentation des résultats

Les résultats sont présentés en cinq étapes, correspondant aux cinq cycles décrits dans la section précédente. Dans chaque étape, on met l'accent sur l'analyse

effectuée pour obtenir les conceptions autour de la modélisation mathématique de chacune des cinq enseignantes en formation (E1, E2, E3, E4, E5).

6.1 Premier cycle

Au cours de la première réunion, même si la chercheuse savait l'importance du diagramme de la modélisation mathématique, sa priorité était la découverte des conceptions initiales des cinq enseignantes en formation, c'est pourquoi sa première THA a été limitée à l'observation sans participation. Il fut possible de reconnaître que pendant le 1^{er} cycle, le but poursuivi par les cinq enseignantes en tout temps a été de trouver la meilleure façon d'expliquer aux élèves ce qu'est la probabilité et comment on doit la calculer.

Dans une première intervention, l'enseignante 3 (E3) a proposé d'initier la leçon avec un problème lié à un contexte réel. Toutefois, sa proposition n'a pas réussi à être considérée dans la discussion, puisque E4 a proposé une activité qui permettrait à l'enseignante d'expliquer aux élèves ce qu'est la probabilité. L'activité sélectionnée par les cinq enseignantes consistait en l'adaptation d'un problème du manuel de l'élève autour du *lancement de pièces de monnaie*. L'activité a été menée comme suit dans la classe: « E1 a guidé le lancement des pièces de monnaie des élèves. E1 a fait un seul lancement, elle pensait que cela était nécessaire pour garder l'ordre et la discipline dans la salle. Son intention était d'expliquer clairement l'idée de la probabilité. »

Comme deuxième activité lors de la planification, E5 a proposé d'utiliser les dés que le manuel de l'élève propose. L'intervention d'E3 a été déterminante : *l'ordre et la durée de l'activité seront affectés négativement si les élèves sont autorisés à utiliser les dés*. Par conséquent, il a été décidé que seule l'enseignante responsable devrait montrer les caractéristiques d'un dé, en plus de poser le problème, de faire le calcul et de donner une explication. Dans les dialogues enregistrés, fréquemment on utilisait des expressions comme :

E1: Comment pensez-vous que ce soit plus facile que l'enfant comprenne ? Pourrions-nous expliquer la probabilité avant?

E5: Nous pouvons mettre cinq exercices pour que cela soit plus clair ce qui est plus probable. Ils vont faire des erreurs, il sera donc nécessaire de répéter.

De ce dialogue deux activités se dégagent pour la planification de la leçon qui avait été mise en œuvre par E1 en classe. E1 a montré aux élèves un dé en donnant une description de ses caractéristiques. A aucun moment la manipulation n'a été autorisée. En formulant des questions comme « *Si je lance, quel est la probabilité d'obtenir trois?* », E1 a expliqué comment calculer la probabilité pendant que les élèves observaient et écoutaient.

À la fin de la planification de la leçon, c'est encore E3 qui affirme que l'on pourrait demander aux élèves une réflexion concernant la relation avec la vie quotidienne. Les autres enseignantes ont donné leur accord et ont proposé des exemples de situations qui pourraient être nommés : paris, jeux de loterie, entre autres. Cette action dans la classe a été menée d'une manière superficielle.

Selon la discussion les enseignantes semblent poursuivre trois sous-objectifs. Premièrement, elles sont à la recherche d'une activité où l'enseignante peut expliquer les concepts aux enfants, deuxièmement elles cherchent à créer une activité où après l'explication, les élèves doivent faire des exercices ; et enfin il s'agit de promouvoir une petite réflexion (disons superficielle) pour se connecter à la vie quotidienne. Grâce aux dialogues mentionnés, nous avons précisé dans le tableau 4 les concepts en acte et les propositions prises comme vraies (théorèmes en acte) de la part des enseignantes dans ce 1^{er} cycle (Tableau 1):

Concepts en acte	Propositions considérées comme vraies (Théorèmes en acte)
Rôle de l'enseignante	L'enseignante possède les connaissances. L'enseignante donne des explications aux élèves.
Rôle de l'élève	L'élève ne possède pas de connaissances et il les accumule.
Rôle de l'enseignante Connaissance mathématique	L'enseignant dirige les travaux autour du contenu mathématique. La répétition est nécessaire pour s'approprier du contenu.
Rôle de l'enseignante Conceptions de l'élève	L'enseignante met fin aux doutes et signale les erreurs des élèves.
Rôle de l'enseignante	Les élèves font des erreurs parce qu'ils ne possèdent pas les connaissances de l'enseignante
Contextes réels	L'enseignante explique la relation entre ce qui a été appris et divers contextes réels où son utilisation est possible.

Tableau 1 *Concepts et propositions jugées vraies*

La façon de valider le bon choix des activités déterminait la structure de contrôle des enseignantes. Trois aspects ont été trouvés dans cette validation :

- *Durée de l'activité requise*. Si le temps nécessaire pour la mise en œuvre de l'activité est réduit, alors l'activité est faisable
- *Discipline*. L'activité ne doit pas déclencher le désordre dans la classe, le silence doit témoigner de cet aspect.
- *Rôle de l'enseignante*. L'enseignante doit toujours être active, en expliquant ses connaissances aux élèves.

À travers les réflexions présentées, nous montrons ci-dessous six conceptions initiales des enseignantes en formation, en les plaçant dans les différentes étapes de la modélisation mathématique (Figure 8).

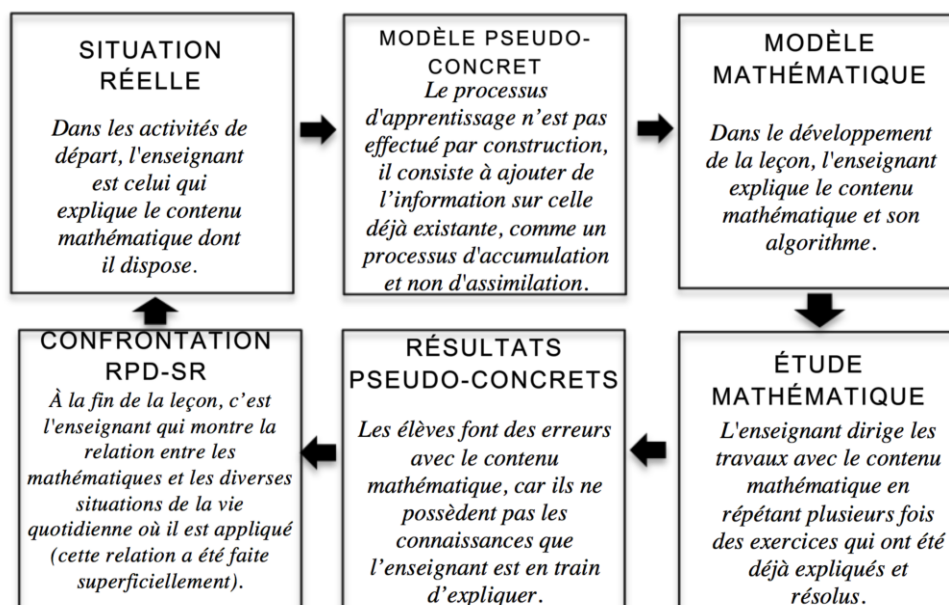


Figure 8. Conceptions initiales sur la modélisation mathématique

Ces conceptions initiales sont formées en accord avec l'expérience passée des enseignantes, en déterminant ainsi une structure cognitive comme signalé dans les premières sections sur notre adaptation de l'approche théorique de Vergnaud. Selon la méthodologie, une nouvelle situation se met en pratique avec l'intention de modifier et faire évoluer cette structure cognitive. Nous sommes conscients que la répercussion, même si elle s'insère dans une démarche de travail collaboratif, ne sera pas la même pour chaque enseignante.

6.2 Deuxième cycle

Dans le deuxième cycle, la chercheuse considère le diagramme général sur la modélisation ainsi que les conceptions initiales des enseignantes lors de la première réunion. Par conséquent, la THA était liée aux activités déjà choisies, en se concentrant en particulier sur l'activité de départ et sur l'importance de poser un problème de la vie réelle des élèves. On y parviendrait grâce à la réflexion sur ce qui avait été fait dans la phase d'enseignement lors du premier cycle et en s'appuyant sur la lecture et l'analyse des documents suivants :

- Introduction du livre de Niss, Blum et Galbraith (2007),
- Moins de craie, moins de discours, moins de symboles ... plusieurs contextes, plus d'action (Alsina, 2007)
- Modélisation mathématique, une conversation avec Henry Pollak (Pollak, 2007)

a) Poser une situation réelle

Lors de la deuxième réunion, il y a eu deux propositions sur l'amélioration de l'activité pour commencer la leçon. E2, E3 et E5 ont proposé comme départ un problème réel, en particulier à travers un jeu qui implique le hasard. En revanche, E1 et E4 argumentaient pour continuer à utiliser l'activité du premier cycle, où l'enseignante donne les explications.

Les principaux arguments de E2, E3 et E5 pour débiter la leçon avec un jeu étaient qu'il pouvait servir à motiver les élèves, car ainsi ils rencontreraient une situation quotidienne où appliquer ce qu'ils avaient appris. Les enseignantes ont également évoqué la diversité des situations qui pourraient permettre de parler de probabilité :

E5: Je dis que nous pouvons poser un jeu au début, parce que toi tu l'amènes [l'élève] jusqu'à ce qui est la théorie, pas exclusivement la théorie, mais que toi tu l'amènes à l'ensemble de données, et non l'inverse comme quand tu expliques et qu'il applique. C'est ce qui s'était passé, nous avons voulu d'abord expliquer ce qu'est la probabilité et ensuite l'appliquer. Mais ce qui est correct, c'est que nous nous appuyions sur un jeu, c'est-à-dire une application, puis que les élèves questionnent le pourquoi.

C'est le premier groupe d'enseignantes qui a montré les arguments plus convaincants. Par conséquent, E2 dans le 2^e cycle d'enseignement a posé « On marque 13 cartes avec des numéros de 1 à 13. On distribue deux cartes par équipe. Puis on lance deux dés et l'équipe qui a la somme des nombres sortis marque un point. Le dé est lancé 20 fois. La question posée aux enfants est : Pourquoi le sept gagne-t-il? »

Nous pouvons remarquer un changement dans le but des enseignantes. Cette fois, elles ont cherché à favoriser l'apprentissage de la probabilité à partir d'un contexte quotidien de l'élève; cependant, après cela, c'est encore l'enseignante qui devrait expliquer le contenu mathématique. Les sous-objectifs qui ont guidé les enseignantes ont consisté dans le choix d'une situation problème où la probabilité est mise en jeu dans un contexte quotidien, suivi d'une explication par l'enseignante sur le contenu mathématique.

b) Réflexion sur la situation réelle

Le dernier élément du processus de modélisation a également subi des changements dans les discussions des enseignantes. Bien qu'elles aient déjà envisagé de promouvoir la réflexion sur l'apprentissage et le contexte de la vie quotidienne, cette fois-ci la question posée n'a pas été superficielle, puisque la question était liée au jeu. Ainsi, à la fin de la leçon, l'enseignante a demandé aux élèves: « Si nous recommençons le jeu, quel nombre choisiriez-vous? » Grâce à cette remise en question, il était prévu que la réponse mathématique permette une réflexion dans le contexte dans lequel la problématique a émergé.

Les concepts et propositions émergents pris comme vrais qui ont été modifiés sont présentés dans le Tableau 2. Il est important de signaler que ces modifications ont été réalisées par E2, E3 et E5.

Concepts en acte	Propositions considérées comme vraies (Théorèmes en acte)
Contextes réels	Au début de la leçon, l'enseignante pose une situation problème basée sur un contexte quotidien pour l'élève et où le contenu mathématique soit inclus.
Rôle de l'enseignante	À la fin de la leçon, une réflexion entre la réponse mathématique et le contexte du problème posé est menée.

Tableau 2 *Concepts et Théorèmes en acte modifiés dans le deuxième cycle*

On a observé que ce sont les enseignantes E2, E3 et E5 qui pour valider leurs décisions (structure de contrôle) ont avancé des raisons :

- Contexte réel. L'activité relie les mathématiques aux contextes quotidiens.
- Le rôle de l'enseignante doit toujours être actif, en expliquant les connaissances aux élèves.

Soulignons le fait que pour trois enseignantes le temps et la discipline comme structure de contrôle des enfants ont cessé d'être importants et qu'elles se sont concentrées sur des réflexions plus intéressantes. Nous présentons dans la Figure 9, les deux ruptures avec les conceptions initiales décrites plus haut. Nous utilisons la notation de Boyer et Vergnaud (2005).

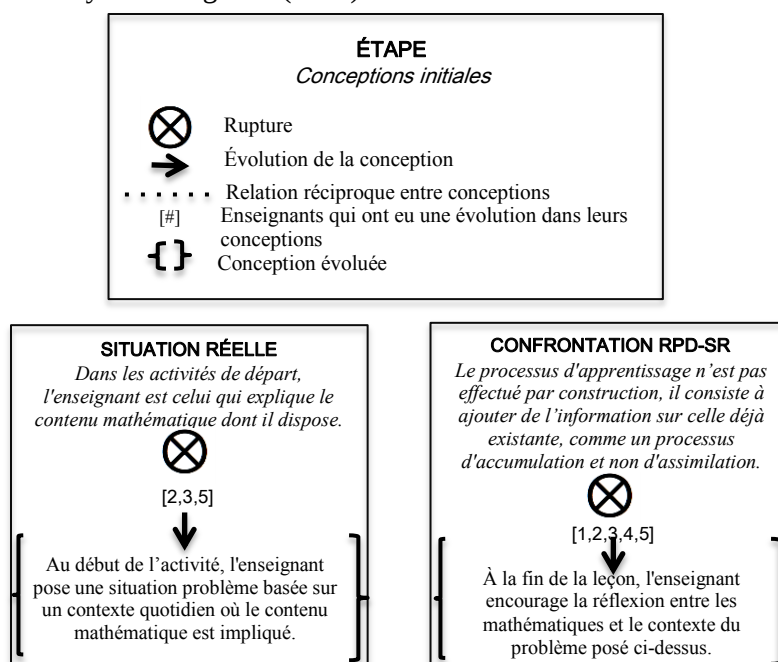


Figure 9. Évolution des conceptions lors du deuxième cycle.

À cause de la nouvelle situation expérimentée selon notre méthodologie, quelques enseignantes ont modifié leur structure cognitive. Les enseignantes ont inséré cette nouvelle situation dans leur ensemble de situations et semblent avoir assimilé la nouvelle expérience pour faire évoluer leur conception.

6.3 Troisième cycle

Sur la base de l'évolution des conceptions qui se sont produites dans le cycle précédent, la chercheuse a mené une THA qui a cherché à répondre à un élément du processus de modélisation mathématique: « Création d'un modèle mathématique ». Plus précisément, la chercheuse a promu une réflexion sur les activités menées à l'école primaire à la lumière de la lecture et l'analyse des documents suivants:

- Modélisation mathématique : Peut-on l'enseigner et l'apprendre? (Blum et Borromeo, 2009).
- Analyse des praxéologies didactiques dans la gestion de processus de modélisation mathématique dans l'école infantile (Ruiz-Higueras et García, 2011).

a) Création d'un modèle mathématique

La discussion lors de la planification a suggéré une nouvelle modification de la leçon initiale du plan. Quatre enseignantes (E1, E2, E3 et E5) ont signalé qu'après l'énoncé du problème, les équipes devraient disposer d'un laps de temps, pour les laisser chercher différentes démarches vers l'obtention d'une réponse. Les principales raisons qu'elles ont données sont :

E4: Après le jeu, il faut trouver la façon de leur faire prendre conscience du numéro qui sort de plus dans le jeu. J'ai pensé que nous pourrions donner une feuille et poser la question : quel est le nombre qui sort le plus? Et pourquoi? Et, je ne sais pas, leur donner une feuille pour qu'ils essayent d'expliquer le « pourquoi » et alors il y aura différentes procédures et pas seulement celle que nous avons donnée.

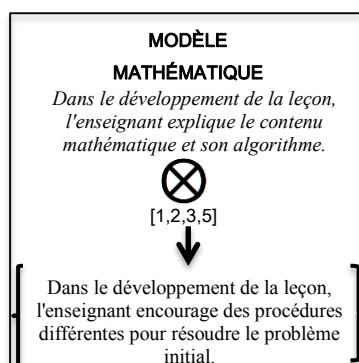
Bien que E4 ne soit pas complètement d'accord, elles ont décidé de permettre aux étudiants de proposer différentes procédures pour la résolution du problème à travers le jeu, plutôt que l'enseignante donne la réponse. Cela a été fait dans la leçon correspondant au 3^e cycle par E3. Toutefois, après que les élèves ont généré diverses procédures, c'est l'enseignante qui devrait mentionner quelle procédure était l'idéale. Les concepts en acte et les propositions admises comme vraies qui ont changé pendant la discussion des enseignantes sont présentés dans le Tableau 3.

Concepts en acte	Propositions considérées vraies (Théorèmes en acte)
Rôle de l'enseignante	L'enseignante favorise la résolution du problème dans chaque équipe.
Rôle de l'élève	L'enseignante est à l'écoute des diverses procédures des élèves pendant la résolution du problème.
Diversité de procédures	

Tableau 3 *Concepts et théorèmes en acte*

En analysant les arguments des enseignantes, il a été possible de trouver des éléments de contrôle, par exemple : Si l'activité favorise la diversité des procédures, on peut la choisir.

Dans la Figure 10, la rupture n'a pas été observée en ce qui concerne la création d'un cycle de modèle mathématique observée dans cette conception initiale.

Figura 10. Évolution des conceptions dans le 3^e cycle.

6.4 Quatrième cycle

A cette occasion, la chercheuse a exploré à trouver une THA autour d'une réflexion des enseignantes sur un point important : le processus d'apprentissage comme un processus d'assimilation plutôt que d'accumulation. Il était prévu que les enseignantes discutent du rôle de l'élève en tant que constructeur du modèle mathématique et du rôle actif de l'enseignant dans le travail d'accompagnement. D'autre part, on savait que cela aurait des implications pour le rôle de l'enseignante comme guide qui accompagne le processus d'apprentissage, et non comme pilote qui explique au préalable la procédure à suivre. Les lectures qui furent proposées pour favoriser une telle réflexion sont :

- Planification d'activités d'un cours sur l'acquisition des compétences dans la modélisation mathématique et utilisation de calculatrice à affichage graphique (Hitt et Cortés, 2009).
- Modélisation pour la vie : les mathématiques et l'expérience des enfants (Greer, Verschaffel et Mukhopadhyay, 2007).

- a) Travail avec le modèle mathématique et situation du modèle pseudo-concrète.

Dans cette section, nous identifions une différence entre le moment de la planification et la mise en œuvre. Dans la planification, le principal a été fait par E3. La réflexion a conduit les enseignantes à reconnaître l'utilité d'analyser les idées des élèves par équipe et à proposer des moyens de surmonter les difficultés si nécessaire. De plus, les enseignantes avaient proposé qu'après la discussion en grand groupe, l'on puisse retourner au travail en équipe avant le processus d'institutionnalisation. Voici un extrait du dialogue entre les enseignantes :

E5: Quand ils [les élèves] arrivent à visionner les combinaisons comme une procédure appropriée, tu pourrais leur dire de proposer diverses manières de faire des combinaisons et leur faire remarquer qu'ils peuvent le faire chacun à sa façon, sans imposer une méthode.

E3: Tu peux même faire le décompte total ; s'il ne coïncide pas avec ceux des élèves, il faut analyser pourquoi ils n'ont pas pu y arriver, et là il faut jouer notre rôle de facilitateur en demandant : « Écoutez les enfants, combien dois-je prendre pour obtenir 8 ? Combien de combinaisons ? »

Encore une fois, les arguments ont été avancés par E1, E2, E3 et E5. L'enseignante 4 a montré de nombreuses inquiétudes et des doutes, car c'était elle qui devrait conduire la leçon à cette occasion.

Les concepts en acte et les propositions reprises comme vraies par les enseignantes sont les suivants (Tableau 4):

Concepts en acte	Propositions considérées vraies (Théorèmes en acte)
Rôle de l'enseignante	L'enseignante guide le processus de construction des connaissances de l'élève.
Rôle de l'élève	L'élève apprend dans un processus d'assimilation.
Conceptions de l'élève	Les idées émergentes des élèves et la variété des procédures doivent être reprises par l'enseignante pour pouvoir guider l'apprentissage.

Tableau 4 *Concepts et Théorèmes en acte*

Les aspects que les enseignantes ont considérés pour valider la sélection d'activités sont:

- L'activité permet aux élèves de construire leurs connaissances.
- L'activité favorise que l'enseignante puisse guider les processus d'apprentissage via leur construction.

Cependant, il est nécessaire de préciser ce qui est arrivé au moment de la mise en œuvre de la leçon par E4. Lors de l'application, E4 a demandé un travail d'équipe pour résoudre les problèmes qui découlaient du jeu, mais confrontée aux différentes réponses des élèves, E4 a décidé de donner la procédure correcte, de

répondre aux questions et de donner le contenu mathématique. E4 n'a pas pris en compte la planification du groupe. Elle n'a pas écouté les idées des élèves et elle n'a pas déclenché une nouvelle discussion avant l'institutionnalisation.

Ainsi l'évolution des conceptions que nous montrons dans la suite, en décrivant les ruptures détectées, est reprise seulement par E1, E2, E3 et E5 au moment de la planification, mais pas par E4 au moment de la mise en œuvre de l'activité d'enseignement. Comme nous l'avons dit auparavant (à la fin de la section 6.1), une nouvelle situation est proposée pour favoriser un changement de structure cognitive chez l'enseignante (Figure 11), et ce changement pourra ou non se produire. Par analogie, les activités sont conçues par Brousseau dans sa TSD avec l'intention de faire en sorte que l'élève soit confronté à un obstacle épistémologique donné, mais cela ne garantit pas que l'élève surmonte cet obstacle.

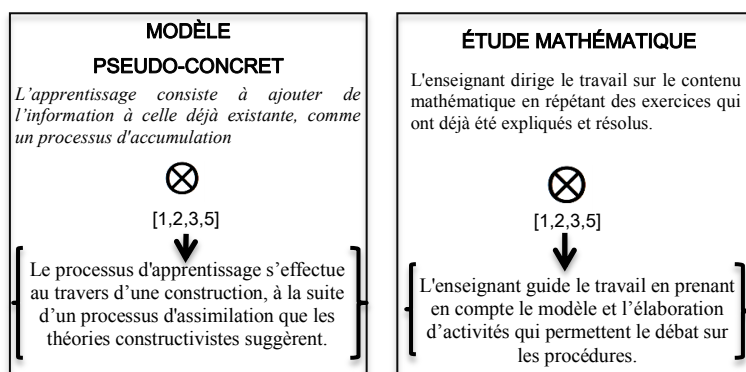


Figure 11. Évolution des conceptions pendant le 4^e cycle.

6.5. Cinquième cycle

L'énorme écart entre ce qui était planifié et ce qui est arrivé dans le quatrième cycle a motivé la chercheuse à planifier une THA incluant l'activité et des lectures :

- Proposer une discussion à propos de ce qui était planifié et ce qui s'est passé réellement dans la salle avec les élèves.
- Proposer une réflexion plus profonde sur l'importance des idées des élèves et leur prise en compte, à travers la lecture suivante: Les obstacles et les problèmes épistémologiques en mathématiques (Brousseau, 1999).
- S'appuyer sur la réflexion sur les réponses données par les élèves dans le 4e cycle, et garder l'intention de promouvoir l'idée qu'une conception n'est pas erronée, mais plutôt que c'est une connaissance mal adaptée à une situation donnée. Penser à la faire évoluer en utilisant la lecture : Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques (Joshua et Dupin, 1993).

a) Réflexion à propos de situation pseudo-concrète

Au cours de la discussion, les enseignantes ont d'abord parlé de ce qui est arrivé pendant l'application de la leçon 4 avec E4, notamment autour de sa décision de donner aux élèves la procédure correcte sans discussion. La réponse d'E4 était:

E4: Puisque je n'ai pas eu de réponse correcte de la part des équipes, je n'ai pas su quoi faire et alors j'ai expliqué.

Les enseignantes ont souligné la nécessité pour les enseignants en général de ne pas considérer les différents processus des élèves comme uniquement erronés, mais comme des conceptions qui pourraient évoluer avec leur aide. L'un des principaux arguments des élèves pour expliquer le numéro gagnant dans le jeu était « la mauvaise construction des dés ». Face à cette réponse, les enseignantes ont proposé:

E3: Et parce que dès le début on peut donner différents dés à chaque équipe, et pour le 1^{er} lancement, au lieu de faire nous-mêmes le lancer avec les grands dés, demander à une équipe de le faire et montrer son résultat. Puis à une autre équipe, encore une autre, en enregistrant les résultats ; comme ça, on ne peut pas incriminer les dés.

Sur la mise en œuvre, E5 était attentive à chacune des recommandations planifiées pour le 4^e et 5^e cycle. Dans le plan de la leçon 5, les enseignantes mettent des indications précises sur les interventions de E5, spécifiant les activités déjà proposées dans les autres planifications.

Les concepts et les propositions prises comme vraies modifiées par les enseignantes sont indiquées dans le Tableau 5 suivant.

Concepts en acte	Propositions considérées comme vraies (Théorèmes en acte)
Rôle de l'enseignante Conceptions de l'élève	Les élèves ont des idées préconçues (conceptions) qui dirigent les procédures choisies pour répondre au problème. C'est la tâche de l'enseignante de <i>faire changer</i> telles conceptions.

Tableau 5 *Concepts et Théorèmes en acte*

Pour valider ces changements dans les activités, les enseignantes reprennent les mêmes aspects que dans la leçon précédente, mais dans la planification et surtout dans l'application en portant la plus grande attention aux points suivants :

- L'activité permet aux élèves d'acquérir des connaissances,
- L'activité favorise le guidage des processus d'apprentissage par l'enseignante.

La conception qui a évolué dans ce cycle est représentée sur la Figure 12.

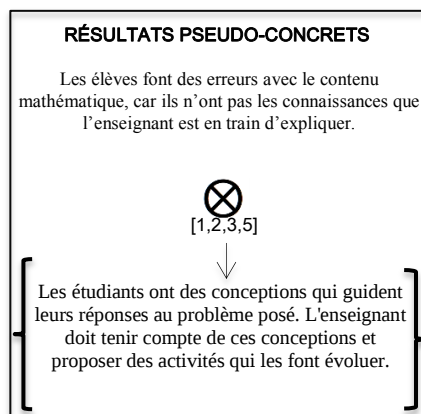


Figure 12. Évolution de conceptions pendant le 5^e cycle.

6.6 Évolutions des conceptions

L'analyse réalisée dans le 1^{er} cycle a montré que les enseignantes en formation avaient à propos de la modélisation mathématique six conceptions initiales, qui étaient très éloignées des postulats théoriques proposés. Pour les enseignantes, le processus d'apprentissage consistait à ajouter de l'information de façon accumulative dans la pensée des élèves, plutôt que de les faire participer à son évolution.

Le rôle de l'enseignante était de transmettre des connaissances en guise d'explication à l'élève, et celui de l'élève de les recevoir passivement. Les enseignantes concevaient les mathématiques comme un corpus statique de notions achevées qui doivent être transmises aux élèves. Dans cette perspective, les possibles points de vue des élèves étaient repris comme erronés et en conséquence l'enseignante devait directement les corriger.

Dans la dernière analyse du cycle, il a été possible de constater que les activités ont changé en raison d'une évolution des conceptions initiales des enseignantes. Les changements dans chaque cycle ont permis de déboucher à la fin sur une planification de la leçon complètement différente de ce qui avait été fait lors des cycles précédents.

Les conceptions finales des enseignantes montrent une plus grande affinité avec les buts de notre investigation sur la modélisation, selon le cycle proposé comme modèle général (voir Figure 13). Pour les enseignantes en formation, le processus d'apprentissage n'est plus lié à l'accumulation de l'information, mais plutôt à une construction où l'élève a besoin de déstabiliser ses idées initiales, d'assimiler et d'adapter ses structures mentales.

A partir de cette prémisse, les enseignantes ne donnent plus comme rôle à l'enseignante en charge de la leçon de faire exclusivement un exposé, mais leurs préoccupations sont plutôt liées à l'élaboration de situations qui guident le processus d'apprentissage des élèves. Ces situations commencent en partant d'un problème dans un contexte quotidien, avec comme but de déstabiliser les idées initiales des élèves, de permettre une pensée diversifiée en produisant dans un apprentissage collaboratif des procédures de résolution.

Dans l'élaboration des activités que les enseignantes ont réalisées, la discussion d'idées qui permettaient la création d'un modèle mathématique était planifiée. Les conceptions initiales des enseignantes en formation sur la modélisation mathématique ont évolué, ce qui leur a permis d'avoir une approche différente de la mathématique, comme quelque chose qui pourrait être construit et reconstruit par les élèves (Figure 13).

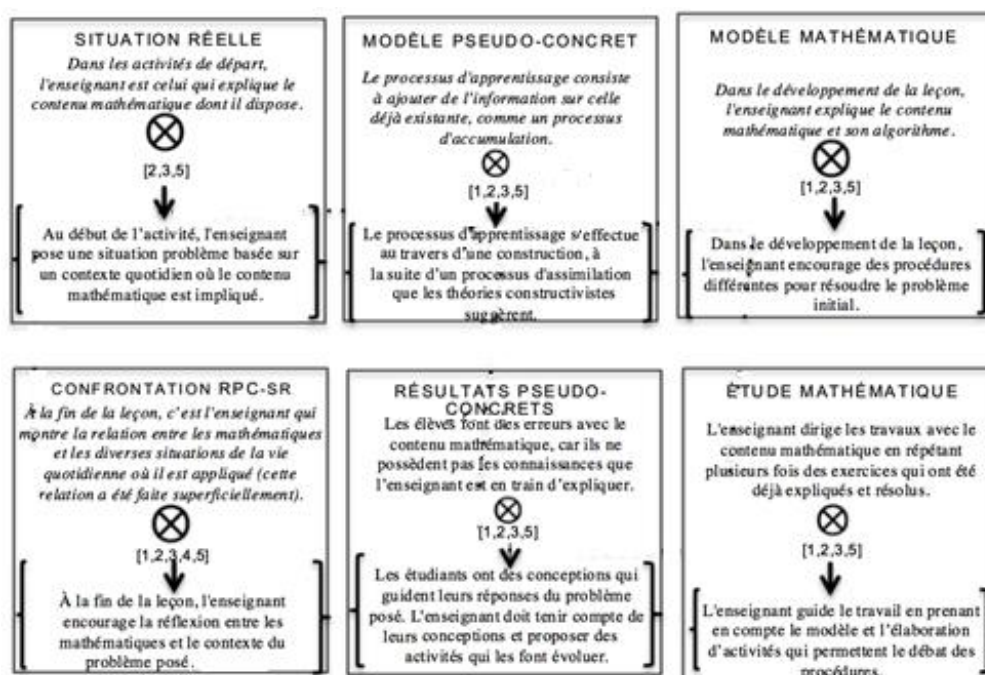


Figure 13. Conceptions finales des enseignantes pendant le 5^e cycle.

Au fur et mesure que les conceptions des enseignants émergeaient, notre obligation était de construire une THA, où grâce à la réflexion de lectures *ad hoc* (par exemple Brousseau, 1999), leurs réflexions devenaient plus profondes autour des obstacles cognitifs et/ou épistémologiques. Ainsi, nous pouvons affirmer que sous cette programmation, nous avons promu des changements dans chaque cycle et en

même temps, chaque THA nous a permis d'analyser l'évolution des conceptions des enseignantes.

Deux aspects clés sont mis en évidence pour le succès d'une THA. En premier lieu, travailler sur les éléments de « design » de leçons a permis aux enseignantes de mettre en œuvre un plan et de l'exécuter cinq fois ; à chaque fois a été observé, enregistré et analysé ce qui s'est passé. L'expérience d'observation des processus d'enseignement de leur propre leçon a soulevé des arguments significatifs en profondeur qui ont déclenché l'évolution de leurs conceptions dans chaque cycle.

Deuxièmement, le travail en collaboration avec discussion a permis l'émergence de ruptures dans les argumentations des enseignantes, un processus de validation s'est déroulé, comme un défi entre elles permettant une évolution des conceptions, ainsi que Hitt l'a établi (2003). Parfois, ces ruptures n'avaient pas été considérées par la chercheuse dans son THA originale. En prenant en compte leur langage dans leurs discussions, leurs planifications et la mise en œuvre, nous avons pu avoir une approche de leurs schémas.

Il est important de souligner que les ruptures constatées ne se sont produites en même temps pour toutes les enseignantes. Par exemple E4 dans le 4^e cycle, malgré le dialogue continu, n'a pas pu faire évoluer ses idées, comme cela est apparu à son tour d'enseigner la leçon planifiée en équipe.

7. En manière de conclusion

Le processus de conceptualisation dans l'apprentissage est un axe de recherche majeur en didactique des mathématiques. Cependant, ce processus a été peu étudié quand il s'agit de la formation des enseignants. Dans cette recherche nous présentons les conceptions initiales qu'ont cinq futures enseignantes de l'enseignement primaire, pour guider leur façon de planifier et réaliser une leçon sur un contenu mathématique du programme.

Une nouveauté de cette recherche, liée à notre premier objectif d'investigation est l'utilisation de la TCC de Vergnaud (1990), des travaux de Brousseau sur la TSD (1976/1983) et de ceux de Balacheff et Gaudin (2002, 2010) pour une analyse détaillée des conceptions initiales sur le processus de modélisation mathématique des enseignantes de notre échantillon. Ainsi que cela est stipulé dans notre cadre théorique, nous avons fait une adaptation de ce que Vergnaud, Balacheff et Gaudin signalent comme conception, en prenant en compte les « *situations et expérience du groupe face à la leçon dans la classe de mathématiques* » au lieu de l'« *ensemble de problèmes* ».

L'étude conclut que les conceptions initiales qu'avaient les futures enseignantes de l'enseignement primaire ont guidé la façon de planifier et réaliser leurs activités quotidiennes dans l'enseignement des mathématiques. L'analyse du premier cycle a

montré que les enseignantes stagiaires avaient six conceptions initiales de la modélisation mathématique très éloignées de leurs postulats théorico-pratiques. Ainsi, il a été reconnu que la première planification a mis l'accent sur la transmission de l'information (en limitant la manipulation d'objets afin d'éviter la perte de temps) et sur un lien superficiel entre le calcul de probabilités et ses applications dans la vraie vie.

Une autre nouveauté, liée à la méthodologie, a été l'utilisation de l'« *Étude de leçon* » (Lewis et Tsuchida, 1998). Les « *Trajectoires hypothétiques d'apprentissage* » (Simon, 1995; Simon et Tzur, 2004) ont fourni une base théorique et méthodologique permettant d'expliquer l'évolution des conceptions des enseignantes en formation. Le deuxième objectif de notre recherche est ainsi pris en compte. L'étude sur l'évolution des conceptions initiales dans les divers éléments de la modélisation a été constamment prise en charge selon le modèle par cycles de Rodriguez (2007, 2010).

Les résultats présentés permettent de conclure que les conceptions de quatre des cinq enseignantes en formation ont subi un changement extraordinaire et stable. Toutefois, l'évolution de la cinquième enseignante (E4) a été moindre, ou plus lente. Dans le 5^e cycle en effet, elle a eu l'opportunité de reconsidérer ses conceptions initiales qui avaient semblé solidement ancrées, ce qui l'a conduite à un changement qui pourrait n'être qu'éphémère (on ne sait pas).

L'évolution des conceptions des futures enseignantes concernant la modélisation mathématique s'est reflétée dans la conception et la mise en œuvre des différentes activités, en particulier dans la 5^e leçon du 5^e cycle. Dans ce cycle s'est concrétisée la création d'un environnement qui a permis la manipulation d'objets, l'expérimentation, l'émergence de conjectures et la validation dans un processus de communication.

Il convient de noter que la formation initiale des enseignants au Mexique laisse très peu de place à une réflexion critique. L'enseignement est fondé sur la transmission des connaissances et il y a peu d'ouverture vers une pratique d'enseignement où la construction des connaissances mathématiques soit prise en charge par les élèves.

Nous croyons que nos résultats, en plus de satisfaire aux objectifs énoncés dans notre recherche, ouvrent un chemin vers la co-construction de connaissance entre le chercheur et les enseignants, en proposant une dialectique entre l'expérience prioritaire de l'enseignant qui nourrit le chercheur, et les éléments théoriques du chercheur qui permettent la réflexion des enseignants. Peut-on considérer notre expérience comme une contribution en faveur de la présence de la recherche collaborative en formation des enseignants ?

Remerciements. Nous remercions le groupe de recherche GRUTEAM de l'UQAM pour l'aide que ses membres ont apportée pendant un stage de recherche de l'auteure principale effectué en 2014.

8. Références

- Andrews, P., et Hatch, G. (2012). A comparison of Hungarian and English Teachers' Conceptions of Mathematics and Its Teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 43(1), 31–64.
- Aravena, M. D., et Caamaño, C. E. (2009). Mathematical models in the secondary Chilean education. Dans M. Blomhoj et S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (pp. 159–176). Dinamarca: Roskilde University.
- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 9(3), 241–285.
- Balacheff, N. (2004). Marco , registro y concepción. *EMA à expliciter* , 10(1), 181–204
- Balacheff, N., et Gaudin, N. (2002). Students conceptions : an introduction to a formal characterization, *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz*, 65 (1), 1–21.
- Balacheff, N. et Gaudin N. (2010). Modeling Students' Conceptions: The Case of Function. Dans Hitt, F., Holton D. and Thompson P. (Eds.), *Research in College Mathematics Education*, Volume VII, p. 207- 234
- Blomhøj, M. et Hoff Kjeldsen, T. (2006). Teaching mathematical modelling through project work. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 38(2), 163-177.
- Blum, W., et Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling : Can It Be Taught And Learnt? *Mathematical Modelling*, 1(1), 45–58.
- Blum, W. et Leiss, D. (2005). "Filling Up" – the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. Paper for the CERME4 2005, WG 13 Modelling and Applications.
- Blum, W., et Niss, M. (1990). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects. State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 37–68.
- Boyer, C et Vergnaud, G. (1998). *Conceptualisation de la reproduction végétale à l'école primaire*. (Thèse de doctorat) Université Paris VII.
- Brousseau G. (1976-1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 4(2), 165-198.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

- Brousseau, G. (1999). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165–198.
- Confrey, J., et Maloney, A. (2007). A theory of mathematical modelling in technological settings. Dans Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, H.W. y Niss, M. (Eds.), *The 14th ICTMI study: Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 57-68). Berlin:Springer.
- Da Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. Dans J. P. Da Ponte et J. F. Mateos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Lisbon: University of Lisbon.
- Doerr, H. M. (2007). A theory of mathematical modelling in technological settings. Dans Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, H.W. y Niss, M. (Eds.), *The 14th ICTMI study: Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 69-78). Berlin:Springer.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et didactique outil-objet. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 7(2), 5–31.
- Ernest, P. (1988). The impacts of beliefs on the teaching of mathematics. In P. Ernest (Ed.), *Mathematics Teaching: The State of the art* (1st ed., pp. 249–254). Londres, Inglaterra.
- Golafshani, N. (1998). Teachers' conceptions of mathematics and their instructional practices. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 18(1), 1–14.
- Goupille C. et Thérien L. (Éds). (1988). Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique. CIAEM39. Sherbrooke: Les Éditions de l'Université de Sherbrooke.
- Greer, B., Verschaffel, L., et Mukhopadhyay, S. (2007). Modelling for life: mathematics and children's experience. Dans Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, H.W. y Niss, M. (Eds.), *The 14th ICTMI study: Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 89-98). Berlin:Springer.
- Grenier, D. et Payan, C. (1998), Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 18 (1), 59-99.
- Hernández, R., Baptista, P., et Fernández, C. (2010). *Metodología de la investigación*. México, D.F.: McGraw-Hill.
- Hitt, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 8(1), 255–271.
- Hitt, F., y Cortés, J. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Educación e Internet*, 10(410), 41–55.

- Kaiser, G., Blomhøj, M., et Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 38(2), 82–85.
- Lesh, R. et Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester, Jr. (Ed.). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 763-804). National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Lewis, C., et Tsuchida, I. (1998). A lesson is like a swiftly flowing river. *American Educator*, 1(1), 1–8.
- Lombardo, D. H., et Jacobini, O. R. (2009). Mathematical modelling: From classroom to the real world. Dans M. Blomhøj et S. Carreiro (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (1^o ed., pp. 35–46). Dinamarca: Roskilde University.
- Maass, K. (2006). What are modelling competencies ? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*, 38(2), 113–142.
- Ministère de l'Education Publique. (2011). *Plan de Estudios 2011* (1^o ed., p. 92). México.
- Niss, M., Blum, W. et Galbraith, P. (2007). Introduction. Dans Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, H.W. y Niss, M. (Eds.), *The 14th ICTMI study: Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 3-32). Berlin:Springer.
- Pollak, H. (1969). How can we teach applications of Mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, 2(2), 393–404. doi:10.1007/BF00303471
- Pollak, H. (2007). Mathematical modelling- A conversation with Henry Pollak. Dans Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, H.W. y Niss, M. (Eds.), *The 14th ICTMI study: Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 109-120). Berlin:Springer.
- Pytlak M., Rowland T. et Swoboda E. (2011) Application and modelling. *Proceedings of the 7th congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Poland.
- Rodríguez, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation d ' élèves en Terminale S*. Sciences-New York. (Thèse de doctorat) Université Joseph Fourier Grenoble I.
- Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13(4-1), 191–210.
- Ruiz-Higueras, L. et García F. (2011). Análisis de las praxeologías didácticas: implicaciones en la formación de maestros. In M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier

(Eds.), Un panorama de la TAD (pp. 431-464). CRM Documents, vol, 10. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*. 26(2), 114-145.

Simon, M. et Tzur R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning : An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.

Singer, M. (2007). Modelling both complexity and abstraction: A paradox? In Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, H.W. y Niss, M. (Eds.), *The 14th ICTMI study: Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 225-232). Berlin:Springer.

Stake, R. (2005). Qualitative Case Studies. In N. Denzin y Y. Lincoln (Eds.), *The Sage Handbook of Qualitative Research* (3^o ed., pp. 443–466). California: Sage Publications.

Thompson, A. (1992). Teacher's beliefs and coneptions: a synthesis of the research. In *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Nueva York, Estados Unidos de América: Macmillan.

Organisation de Coopération et de Développement Économiques. [OCDE]. (2010). L'étude PISA.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique Des Mathématiques*, 10(2), 133–170.

Yin, R. (2003). *Case Study Research* (p. 116). California: Sage Publications.

Samantha Quiroz <samanthaq.rivera@gmail.com>:

Departamento de Matemáticas
Tecnológico de Monterrey

Fernando Hitt <hitt.fernando@uqam.ca>:

Département de Mathématiques
Université du Québec à Montréal

Ruth Rodriguez <ruthrdz@itesm.mx>

Departamento de Matemáticas
Tecnológico de Monterrey

FORMER DES FORMATEURS D'ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES
DU SECONDAIRE : UN BESOIN, UNE EXPÉRIENCE ET UNE
QUESTION D'ACTUALITÉ

Abstract. Training trainers of secondary school mathematics teachers: a need, an experience and a current question. It seems obvious that teacher educators should themselves be trained. Nevertheless, rare are research studies that consider this issue. In this paper we trace the history and present the theoretical background of a university program for training trainers of secondary mathematics teachers, established since 2004, grounded on a master degree of didactics of sciences. We first situate this experience in comparison to other similar ones and present its guidelines and discuss opinions of teachers who participated in it. We then develop the research that underpinned this program and its interrelation with the training hypotheses, including assumptions made on the development of teaching practices. We finally discuss why and how such training, made in a university context by researchers, could have an impact on teachers' professional development and what questions it raises for the research in this field.

Résumé. Il paraît évident de dire qu'il faudrait former des formateurs, cependant rares sont les recherches en didactique des mathématiques qui s'attaquent à cette question. Dans cet article nous relisons l'histoire d'une formation de formateurs d'enseignants de mathématiques du second degré, créée en 2004, adossée à un master de didactique des disciplines scientifiques. Nous situons d'abord ce cas par rapport à d'autres expériences analogues, nous le décrivons à grands traits et nous évoquons quelques éléments d'appréciation des enseignants l'ayant suivi. Nous développons ensuite les recherches à l'origine de l'entreprise, leurs liens avec les formations et notamment les hypothèses admises sur le développement des pratiques enseignantes. Nous discutons enfin de l'intérêt d'une telle formation, dans un cadre universitaire diplômant et assurée par des enseignants chercheurs et mettons en avant les questions de recherche que de telles formations soulèvent.

Mots-clés. Formation de formateurs, pratiques, enseignants, mathématiques, didactique.

Introduction

Même si la formation des enseignants a toujours occupé une place importante dans la littérature de recherche et la littérature professionnelle, la formation des formateurs reste rarement abordée. D'ailleurs nous en savons très peu sur comment se construit l'identité d'un formateur et sur ce qui participe à sa formation et à son développement professionnel (Krainer, 2015). Les recherches traitant ce thème sont souvent qualitatives, portant sur un nombre restreint d'enseignants à former et conduites par des chercheurs étudiant leurs propres dispositifs de formation (Adler et al., 2005). Depuis quelques années cependant on assiste à un intérêt croissant

pour la diffusion d'expériences de formation de formateurs à travers des colloques ou des ouvrages collectifs relatifs à des contextes variés, basées sur des fondements théoriques divers (cf. par exemple Jaworski et Huang (dir.), 2014 ; Lunenberg, Dengerink et Korthagen (dir.), 2014 ; Swennen et Van der Klink (dir.), 2009).

La plupart de ces études mettent en avant un questionnement central autour de trois axes : les apports de la recherche sur les pratiques des enseignants dans la formation des pratiques de formateurs ; l'équilibre à trouver dans la formation entre les entrées théoriques et celles méthodologiques/pratiques ; le double rôle du chercheur qui intervient dans la formation, mais en même temps en profite pour améliorer sa propre connaissance des pratiques à former.

De plus, dans le contexte institutionnel français, nous voyons se développer actuellement des projets de prise en charge par les ESPE¹ de la formation des formateurs et une réflexion accrue sur le rôle de cette formation et ses retombées directes sur la formation des enseignants, notamment la formation initiale et l'accompagnement à l'entrée dans le métier des jeunes enseignants.

Dans ce contexte, dix ans après l'article consacré à la formation des enseignants dans cette même revue (Robert, 2005), où nous suggérions déjà l'intérêt d'une telle formation, il nous a semblé intéressant de présenter notre expérience de plus de dix ans de formation de formateurs d'enseignants du secondaire et de la situer par rapport aux problématiques, actualisées, que pose la formation de formateurs aussi bien sur le plan institutionnel que sur celui de la recherche.

1. Un master de formation de formateurs

1.1. Un premier descriptif

Cette formation est menée à l'Université Paris-Diderot dans le cadre d'un master 2 professionnel, intitulé « métier de formateur d'enseignants de mathématiques ou de sciences physiques (lycée & collège) », adossé au master 2 de didactique des disciplines scientifiques. Ce master professionnel a été créé en 2004 d'abord pour les mathématiques² puis pour la physique chimie (et récemment pour la géographie).

Des masters de formation de formateurs d'enseignants existent certes depuis plusieurs années (voir par exemple ce qui est discuté dans Leclercq et Marchive (2007)), mais relèvent en général des sciences de l'éducation, ce qui n'est pas notre cas. En effet, ce master 2 ne s'adresse qu'à des enseignants des disciplines concernées en tant que spécialistes de l'enseignement de la discipline ; d'où son

¹ Ecoles Supérieures de Professorat et de l'Education.

² Faisant suite à un DU annuel de l'université de Versailles St Quentin, créé en 2002 pour les mathématiques (grâce aux liens entre cette université et l'IUFM de Versailles).

inscription assumée dans le champ de la didactique des disciplines scientifiques. D'ailleurs pour y être admis, il faut justifier d'au moins 5 ans d'ancienneté après les concours de recrutement du second degré (CAPES, agrégation).

Il est intéressant de souligner que seuls quelques formateurs, enseignant d'ailleurs encore devant des élèves une partie du temps, s'y sont inscrits, ce qui est une originalité par rapport à d'autres masters comme ceux décrits dans l'article de Viaud (2007) qui dresse un panorama du développement de sept de ces diplômes universitaires. Cependant nombre de participants sont conseillers pédagogiques, mais ne se considèrent pas comme formateurs à ce seul titre, même s'ils déclarent vouloir « améliorer » cette partie de leur pratiques³. Les autres formateurs considèrent vraisemblablement que leur formation, faite sur le tas, est suffisante. Cela dit, il s'agit clairement d'une *formation initiale de formateurs*, où les participants viennent suivre toutes les séances à l'université. Il n'y a évidemment pas de décharge pour suivre cette formation, sauf très rarement, ce qui explique son étalement organisé sur deux, voire trois ans, notamment pour les mathématiciens. Ce sont des enseignants-chercheurs, essentiellement en didactique⁴, qui assurent cette formation.

1.2. Hypothèses et premières questions

Le recrutement des formateurs issus du terrain (professeurs eux-mêmes) était jusque très récemment effectué dans la majorité des cas par les inspecteurs pédagogiques régionaux (IPR). Il semblait reposer sur l'appréciation par ces derniers d'une réelle aisance professionnelle, d'un investissement dans l'institution et d'une attirance vers la formation (souvent de jeunes collègues) des collègues pressentis. Or notre réflexion didactique, et notamment nos recherches sur les pratiques (Robert 2008, Robert et Hache 2013, Abboud-Blanchard 2013, Abboud-Blanchard et Robert 2013) nous amènent à poser l'hypothèse que la formation d'enseignants demande des « compétences »⁵ spécifiques, qui dépassent celles du « très bon enseignant ». Certes, elles peuvent se développer sans formation particulière de formateurs mais leur acquisition peut être « facilitée » par une formation explicite. Nous avons ainsi supposé qu'une telle formation permet d'assurer un début d'acquisition de ces compétences, et de les faire partager entre formateurs, grâce à un vocabulaire et à des références communes. Pour nous, en effet, enrichir ou même installer des pratiques enseignantes en mathématiques ne relèvent pas des mêmes processus qu'enseigner les mathématiques à des élèves. L'omniprésence de l'exercice du métier dans les pratiques à former, qui contraint

³ D'autres masters créés depuis, avec des parties disciplinaires s'inspirant partiellement du nôtre, notamment pour le premier degré, et au sein des IUFM (puis des ESPE), recrutent bien davantage des « déjà » formateurs.

⁴ En sociologie pour la partie correspondante.

⁵ Au sens banal.

ces pratiques, et engage à la fois l'expérience, les acquis mathématiques, les représentations de l'individu et le contexte de son engagement professionnel, modifie le rôle des connaissances « strictes » au sens de l'enseignement (même si on élargit au pédagogique par exemple).

Cela dit, comment des éléments issus de recherches en didactique des mathématiques peuvent-ils alimenter de telles formations de formateurs, en particulier des formations qui n'ont pas l'ambition de préparer les participants à faire des recherches en didactique ? Une réponse possible à cette interrogation est celle que nous avons choisie pour le dispositif/master que nous décrivons et analysons dans cet article, avec ses limites et les questions qu'il soulève.

1.3 Arrière-plan théorique

En effet, nous nous sommes basées pour la conception et le développement de ce dispositif sur nos recherches relatives aux pratiques enseignantes inscrites dans le cadre de la double approche didactique et ergonomique (Robert et Rogalski, 2002) et ses développements (Robert *ibid.*, Abboud-Blanchard et Robert *ibid.*). Nous en donnons un premier aperçu ci-dessous, qui sera développé par la suite (en partie 4).

Nos recherches nous ont d'abord amenées à circonscrire ce que nous pensions pouvoir contribuer à enrichir dans les pratiques des enseignants, à savoir les choix liés aux contenus à enseigner (locaux et globaux) et aux déroulements correspondants des séances. Ce sont les activités provoquées en classe chez les élèves, sources d'apprentissage, qui sont au centre des analyses des chercheurs et qui pilotent les analyses de pratiques correspondantes des enseignants. Les résultats obtenus dans nos recherches en termes de variabilités des pratiques⁶ indiquent qu'effectivement il y a une certaine palette de choix de contenus et de déroulements possibles, compatibles à la fois avec les contraintes, notamment institutionnelles, que respectent tous les enseignants, et avec les objectifs d'apprentissages. Cela concerne les choix que les enseignants sont tout le temps amenés à faire, peut-être implicitement : scénarios d'enseignement globaux (ensemble des cours, exercices et évaluation sur un chapitre), tâches précises et déroulements associés, sur lesquels certains acteurs pensent qu'il n'y a pas d'alternatives.

Nous introduisons, pour travailler ces choix, un intermédiaire : des analyses de séances de classe, transposées des analyses utilisées en recherche, mais simplifiées, plus isolées, non systématiques (Robert et Vivier, 2013), qu'il s'agit ainsi, de partager avec les futurs formateurs. En effet nos recherches amènent à poser que la complexité des pratiques ne se laisse aborder par des formations sous forme de

⁶ Ce qui peut varier dans les pratiques compte tenu des contraintes incontournables, des diversités relevées et des objectifs d'apprentissage précisés par les didacticiens.

« cours » suivis « d'exercices » (ou pas seulement en tout cas)... Il est nécessaire de trouver des modalités spécifiques qui assurent un travail mettant en jeu les pratiques elles-mêmes.

Nos recherches nous ont également conduites à constater que les pratiques des enseignants expérimentés, comme le sont les participants à la formation de formateurs, sont stables et même très stables, en particulier en ce qui concerne les choix de gestion, ce qui renforce l'importance d'un ancrage (amorce) efficace, convaincant, des formations. Cela nous amène à chercher dans notre cadre théorique des moyens spécifiques pour s'appuyer sur cette expérience tout en permettant de la dépasser. Notre réponse a été d'opérationnaliser l'hypothèse, que nous reprenons en l'adaptant à notre propos, de l'efficacité en formation de formateurs (et aussi d'enseignants) d'un travail dans ce que nous appellerons la Zone Proximale de Développement des Pratiques. Nous reprenons à Vygotski le terme qu'il utilise pour le développement des connaissances (Zone proximale de développement). Cela se traduit par un travail permettant le rapprochement entre ce qu'expriment les participants lors d'analyses de séances de classe, et notamment leurs besoins ressentis, et les besoins supposés par les formateurs sur les choix en jeu dans les pratiques.

Ajoutons que la durée de la formation nous semble une condition nécessaire aux développements attendus en formation de formateurs, d'autant qu'il s'agit aussi de donner des moyens à ces derniers de provoquer ensuite eux-mêmes ces enrichissements chez les enseignants à former.

Nous basant sur ces hypothèses, ces développements théoriques et ces résultats de recherches, nous avons travaillé à la mise au point d'un scénario⁷ de formation, comportant des analyses de séances menant à un travail sur les choix correspondants des enseignants et assurant la transmission d'éléments de nos recherches sur les pratiques pouvant leur servir à élaborer de nouveaux scénarios de formation pour les enseignants dont ils auront à s'occuper. L'idée essentielle est de créer des conditions pour que le travail organisé en séances de formation mette en jeu le plus possible les pratiques elles-mêmes, dans leur complexité, même sur un court moment, permettant aux interventions du formateur d'être proches de ces pratiques évoquées, réelles ou au moins questionnées, et de donner des pistes pour les enrichir ; nous y reviendrons.

De fait, les formations d'enseignants auxquelles prépare la formation de formateurs sont pensées assez proches de celle-ci, notamment en termes de modalités, mis à part la durée. Toutefois, les contenus travaillés en formation de formateurs auront

⁷ Dans cet article, le mot scénario est utilisé soit pour l'enseignement soit pour la formation. Lorsqu'il s'agit de formation, cela correspond à des dispositifs mis en œuvre en termes de contenus travaillés et de modalités des séances de formation.

certainement à être retravaillés pour les différentes formations que ces formateurs auront à assurer (double transposition). Nous pensons par exemple que les formateurs auront à leur tour, moins systématiquement sans doute et en s'adaptant aux thèmes particuliers en jeu, à partager certaines analyses de séances avec les enseignants qu'ils auront à former, à les faire discuter et à les compléter. Cela justifie une certaine homologie mise en œuvre en formation de formateurs : les participants vivent dans une certaine mesure ce qu'ils auront à faire vivre (en l'ajustant) à chaque formation.

Dans ce qui suit, nous revenons ainsi d'abord sur une description plus détaillée du master professionnel, en nous focalisant sur les modules les plus spécifiques des questions de formation (première année et début de la deuxième année ciblé sur l'intégration des technologies dans les pratiques enseignantes⁸). Des modules complémentaires et transversaux, non évoqués ici, viennent aussi enrichir le parcours⁹. Nous évoquons quelques appréciations de participants et décrivons les contenus et les modalités de cette partie de la formation. Nous revenons alors sur les raisons de notre entreprise, en reprenant et en précisant les résultats des recherches sur les pratiques menées depuis 2005. Nous explicitons ensuite les liens avec les recherches et les hypothèses adoptées. Nous abordons aussi la question des enseignants universitaires qui assurent cette formation¹⁰ et nous terminons par une discussion soulevant et mettant en perspective des questions de recherche relatives à la formation.

2. Une réponse réussie à une vraie demande : la formation vue par les participants

Ce master a eu depuis sa création un succès certain au moins en termes de participation (en moyenne 20 inscrits par an choisis parmi 150 candidats les premières années), avec une baisse amorcée en 2008-2009, et des effectifs entre 10 et 15 depuis 2009-2010.

Afin d'avoir des éléments d'explication de la demande du public potentiel d'une telle formation et des appréciations *a posteriori*, nous avons soumis en 2010 un questionnaire aux 156 inscrits à ce master depuis sa création ; 67 réponses écrites ont été ainsi recueillies. Nous avons également effectué en 2014 une série d'entretien avec des enseignants de mathématiques ayant suivi le master.

Les réponses au questionnaire révèlent différentes raisons de l'inscription au master, en particulier des besoins ressentis de nouvelles connaissances

⁸ Module mis en place selon ce format depuis 2010.

⁹ Des modules de sociologie (dispensés à Paris 8), d'histoire des sciences et de modélisation.

¹⁰ Dont les auteures de cet article.

personnelles, liées aux pratiques professionnelles, et/ou pour seulement un petit tiers de ceux qui ont répondu, liées à un engagement visé dans la formation d'enseignants, que ce soit comme conseillers pédagogiques¹¹, ou pour encadrer la formation initiale ou encore pour animer des stages en formation continue (Robert et Masselot, 2012, p.312). Quant au devenir des participants après obtention du master, environ un tiers de ceux qui ont répondu sont devenus formateurs¹², quelquefois pour le premier degré – quelques échecs à un tel recrutement sont toutefois signalés, avec une certaine incompréhension. Généralement, les réponses montrent une satisfaction certaine et indiquent une prise de conscience de changements durables importants intervenus dans les pratiques de ces enseignants, dans environ 80% des cas. D'ailleurs, une hypothèse peut être faite ici concernant le profil des enseignants qui s'inscrivent dans ce master, à savoir l'existence préalable d'une sorte de disponibilité, voire de curiosité pour apprendre « quelque chose de nouveau », pour faire évoluer leurs pratiques, pour se cultiver... La formation vient ainsi répondre à une certaine attente, explicitement précisée ou non.

Les réponses aux entretiens apportent un éclairage plus qualitatif sur les effets de la formation sur le développement professionnel des participants, qu'ils soient ou non devenus formateurs. Elles soulignent en premier lieu une prise de conscience de ce qui se passe dans la classe (*« des choses que je faisais spontanément mais maintenant j'arrive à les voir et à avoir une vision plus large »*), rendue explicitable par l'acquisition d'outils et de vocabulaire pour l'analyser et pour communiquer avec autrui. Ils mettent en avant également le fait que cette formation les a amenés à apprendre à lire des *« ressources pour l'enseignement »* et à en avoir un regard critique. De plus, revient régulièrement l'idée d'un apprentissage incident : savoir travailler avec les autres, avec de fait une augmentation revendiquée du travail avec les collègues ainsi qu'une tendance à devenir enseignant référent dans son établissement (*« les collègues savent que j'ai suivi ce master alors ils viennent parfois me demander conseil sur telle ou telle notion, ils considèrent en quelque sorte que je suis allé chercher des réponses à leur place »*).

Ainsi, nous relevons dans l'ensemble des réponses une appropriation de ce que nous mettons au cœur de la première année de la formation et du début de la deuxième et qui en fait l'originalité. En effet l'essentiel du cursus de ces deux périodes vise d'abord à outiller l'analyse de séances de classe, centrée sur l'activité mathématique des élèves, amenant à réfléchir à la palette des possibles pour

¹¹ Ce n'est pas comptabilisé dans le nombre de ceux qui sont devenus formateurs après la formation.

¹² Le mot formateur désigne ici celui qui va exercer dans des formations regroupées, pas seulement sur le terrain.

l'enseignant. Cela peut se traduire par un enrichissement des pratiques en classe, avec une attention accrue à la qualité des tâches proposées aux élèves et à leurs activités mathématiques, en relation avec ce que propose l'enseignant.

Du côté des manques qui sont signalés en réponse aux questions correspondantes du questionnaire, on trouve l'organisation concrète des stages, l'accompagnement et les visites des enseignants débutants, les prises de parole, la gestion d'un groupe d'adultes. Cela rejoint notre réflexion sur le fait que la formation initiale attestée par le master aura à être encore complétée pour les futurs formateurs, notamment pour ajuster chaque formation réelle aux contraintes institutionnelles qui la formatent. Un séminaire « post-master-pro » a été créé à l'IREM¹³ de l'université Paris 7, pour répondre un peu à ce besoin de suivi de la formation, qui permet à la fois de faire circuler les résultats des recherches en didactique en cours et d'offrir quelques occasions de réunion et de confrontation de pratiques de formation aux collègues ayant suivi le master. Plusieurs d'entre eux participent régulièrement à ce séminaire et considèrent ces moments de regroupement comme une façon de « poursuivre la formation ».

3. Objectifs généraux et organisation de la formation

Notre ambition est de donner aux participants à cette formation un bagage solide, validé par un diplôme universitaire, qui les aiderait à élaborer leurs formations futures, quelles qu'elles soient. Cela passe à notre avis par un travail sur les pratiques suffisamment outillé et approfondi pour qu'un formateur formé puisse appréhender diverses pratiques et n'ait pas seulement son propre modèle à proposer en référence (Abboud-Blanchard et Emprin, 2009). La formation que nous avons mise en place est directement liée à l'exercice quotidien de la profession, et nous nous y appuyons, pour remplir nos objectifs, sur des analyses de séances de classe, grâce à des vidéos tournées en classe. La caméra dans ces vidéos est placée au fond de la salle, face au tableau, c'est l'enseignant qui est principalement entendu. Pour avoir plus de précisions sur cette modalité de formation, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage collectif (Robert, Penninckx et Lattuati, 2012) qui en retrace les détails, ainsi qu'à la note de lecture correspondante parue récemment dans cette revue (Pluvinage, 2013).

Nous plaçons ainsi au centre de notre projet l'idée de faire acquérir aux formateurs, comme préalable pour aborder n'importe quelle formation, une certaine disponibilité à la fois pour apprécier des pratiques et pouvoir intervenir à bon escient. Mais nous devons ici préciser notre définition de ce travail sur les pratiques, qui n'est envisagé directement ni comme une analyse « réflexive » ni comme un travail sur les différents types de connaissances supposées nécessaires aux enseignants (Shulman, 1987). En effet, c'est la recherche de la relation étroite

¹³ Institut de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques.

entre les contenus en jeu, les déroulements et les activités des élèves qui est au centre de ce travail. Cela nous distingue en particulier des analyses de pratiques décrites par exemple par Faingold dans son article sur la formation de formateurs (2006), centrées sur le retour de chaque participant sur sa propre pratique. Cela n'empêche cependant pas une certaine réflexivité de se développer chez les participants.

La première année se découpe ainsi en trois temps, assez distincts. Le premier trimestre est principalement consacré à la préparation des analyses d'extraits de vidéos, à l'exercice de la lecture d'articles de la littérature professionnelle et à la présentation des principaux résultats tirés des recherches sur les pratiques enseignantes et leur développement. Ainsi, après une « initiation » aux analyses de tâches dont on aura besoin ensuite presque à chaque séance, on analyse les premiers extraits de vidéos apportées par le formateur en s'intéressant aux déroulements. Les vidéos permettent une observation en temps réel et une certaine immersion partielle, simulée, dans l'espace de la classe. Plus précisément ce sont les mises en fonctionnement attendues des connaissances mathématiques des élèves qui organisent ces analyses de tâches (cf. annexe). Les analyses de déroulements sont conçues pour donner accès à la comparaison entre les activités attendues des élèves, déduites des tâches, et les activités possibles des élèves, déduites de ce qui est provoqué en séance (et visionné). Pour nous, les activités des élèves sont en effet au cœur de leurs apprentissages, objectifs ultimes de l'enseignement, et elles découlent non seulement des tâches proposées mais tout autant de la manière dont les élèves les travaillent.

C'est ainsi le (double) travail de l'enseignant en classe et pour la classe (préparation) qui est au cœur du regard sur les pratiques. Il s'agit à la fois d'apprécier les pratiques enseignantes en relation avec les activités mathématiques des élèves, et, suite au travail en séance, d'envisager des alternatives et une palette de pratiques possibles en relation avec les différents contextes et les différentes personnalités.

En effet nous expliquons aussi que le travail de l'enseignant n'est pas déterminé par les seuls objectifs d'apprentissages. Il est contraint, notamment par l'institution, par les élèves dont la prise en compte s'impose, par les collègues, en somme par l'exercice même du métier d'enseignant.

Les articles proposés à la lecture donnent lieu à un résumé formaté par un « guide de lecture ». Ils sont mutualisés en séance. Ils portent sur des expériences d'enseignement ou sur des recherches et complètent les éléments donnés en séance.

D'autres compléments sur la didactique des mathématiques et sur l'enseignement en ZEP¹⁴ sont apportés à un moment ou un autre de ce trimestre.

Pendant le deuxième trimestre, chaque participant propose l'analyse en séance d'un extrait de vidéo tourné dans sa classe, en animant la discussion comme il le ferait en formation d'enseignants, suivant le format installé au premier trimestre. Cela nous semble fondamental, pour que chacun aille jusqu'au bout de la démarche et puisse engager des interrogations, aidé par la collectif et le formateur, malgré la stabilité supposée de ses pratiques.

Une enquête de chaque participant sur l'opinion de quelques collègues enseignants sur des formations qu'ils ont suivies permet de reprendre le thème des formations réelles, des démarches possibles et des contraintes à respecter. La synthèse des résultats de ces enquêtes permet aux participants d'avoir un regard plus concret sur les attentes potentielles de leurs futurs « stagiaires » et sur les critiques qui peuvent émerger notamment quant aux modalités des formations d'enseignants.

C'est ensuite à l'élaboration (en petits groupes) d'un scénario de formation « virtuel » qu'est consacré le troisième trimestre. Chaque groupe choisit un thème et, à la fin de l'année, présente pendant la soutenance (collective) les éléments clefs de son scénario global, les principaux choix et leur justification, et l'animation « en vraie grandeur » d'un moment particulier. Complétant les enquêtes, l'élaboration de ce scénario permet aux participants de se rendre compte de la diversité dans les déroulés (et les appréciations) des formations et de passer du « mythe de l'existence » d'une bonne façon de mener une formation vers un travail à partir d'éléments « générateurs » de scénarios de formation.

Enfin, en début de deuxième année, au cours du module consacré à l'enseignement avec les technologies, un nouveau scénario de formation (qui peut être articulé avec le précédent, de première année) est élaboré (toujours en petits groupes). Sa spécificité est d'être basé sur l'utilisation d'une vidéo d'une/des séance/s TICE réalisée/s dans les classes des participants. Les analyses des tâches élèves et des déroulements viennent appuyer et alimenter ce nouveau scénario de formation (Abboud-Blanchard et Robert, 2013). Un pas de côté par rapport à sa propre pratique est nécessaire pour permettre de concevoir un tel scénario, à la fois basé sur sa propre pratique et assez décontextualisé pour s'adresser à des stagiaires n'ayant pas le même vécu. Ce saut est rendu en général possible grâce aux acquis de la première année de formation.

Pour finir cette présentation évoquons l'évaluation des modules décrits (première année et module TICE), sous forme de contrôles continus, peu discriminants, où

¹⁴ Zone d'Education Prioritaire, c'est-à-dire correspondant à des établissements fréquentés majoritairement par des élèves défavorisés socialement.

sont pris en compte la présence et les travaux écrits rendus (résumés, enquêtes, scénarios de formation). De fait, que pourrait vouloir dire évaluer autrement une telle formation ?

4. Recherches et formation

4.1. Les derniers développements dans nos recherches sur les pratiques

Dans l'article consacré aux pratiques publié dans cette revue (Robert, 2005), était exposé l'émergence de notre cadre théorique de référence, la double approche, et les premiers résultats qui nous ont amenés à faire des propositions pour la formation des enseignants. Le développement des recherches sur les pratiques, menées à partir de séances en classe et dans ce même cadre théorique, a produit et a approfondi nombre de résultats et de réflexions qui intéressent de nouveau les formations.

Citons d'abord l'approfondissement de l'idée de stabilité des pratiques individuelles pour un enseignant expérimenté en régime de croisière, déjà évoquée dans des travaux antérieurs (Crahay, 1989 ; Bolon, 1996 ; Roditi, 2003). Plusieurs travaux (par exemple Robert, 2007 ; Abboud-Blanchard et Chapet-Paries, 2008) mettent en évidence que c'est la composante médiative des pratiques qui est décisive, en relation forte avec la composante personnelle, pour assurer cette stabilité d'une séance à l'autre dans une même classe ou dans des classes comparables. Cette idée a notamment permis d'interpréter des études de pratiques d'enseignants voulant intégrer des technologies, en révélant que les difficultés rencontrées pouvaient venir non seulement des instruments et des tâches adaptées à l'utilisation de ces instruments, mais bien aussi de questions de gestion de classe (Abboud-Blanchard, 2013).

On a aussi pu montrer en utilisant ce même cadrage (cf. par exemple les travaux de Horoks, 2008 ; Chesnais, 2014) que les régularités inter-individuelles, dont certaines avaient déjà été repérées, sont formatées en bonne partie par les contraintes des programmes et des horaires, des établissements (cf. composantes institutionnelle, sociale et cognitive), alors que les diversités, plus locales, liées aux investissements différenciés des marges de manœuvre, sont plus attachées à des choix de contenus précis et de gestion (cf. composantes personnelle et médiative des pratiques).

La complexité des pratiques et le lien fort entre leurs divers aspects, décrits par les composantes, a enfin été précisée par l'idée de niveaux d'organisation (Massetot et Robert, 2007). Ils permettent d'accéder systématiquement et de manière non indépendante aux projets de l'enseignant (niveau global), à ses routines et automatismes (niveau micro), et à son travail au quotidien, en classe (niveau local). Ce dernier niveau convoque à la fois les préparations (niveau global) et les

improvisations, facilitées par le recours à des automatismes adaptés (niveau micro). Avec cet outil d'analyse, on peut interpréter un certain nombre de difficultés des enseignants débutants et de leurs résistances aux formations un peu décontextualisées, en termes de « surcharge du niveau local ». Cette expression fait référence à l'insuffisance de leurs automatismes au niveau micro, et de leurs projets globaux, encore parcellaires. En reprenant cette idée de niveaux d'organisation, un nouveau modèle théorique relatif à l'utilisation des technologies a vu le jour : les genèses d'usages des technologies (Abboud-Blanchard et Vandebrouck, 2013). La prise en compte de ces genèses et de leurs dynamiques a par ailleurs un intérêt direct dans les formations que nous assurons.

Tous les résultats et la réflexion explicite sur leur éventuelle transposition en formation ont amené trois types de développements. D'abord l'idée de l'intérêt d'une *double transposition*, pour les formateurs puis pour les enseignants permet de mieux apprécier les objectifs de différentes formations, dont celle des formateurs. C'est ainsi à la première étape d'une telle transposition, calibrée pour des formateurs, qu'est consacré cet article. Puis, enrichissant la réflexion sur les éléments intervenant dans les transpositions, *un travail de précision sur ce qui pourrait être enrichi* par les formations que nous proposons a été mené. En effet, ces formations sont partielles, réservées à leur partie professionnelle. Il nous a semblé important d'en préciser les contours. En fait c'est le travail des enseignants en classe et pour la classe que nous visons, en lien direct avec nos analyses de pratiques centrées sur les activités mathématiques possibles des élèves et sur les contraintes de tous ordres qui formatent tout projet d'enseignement. Quelques éléments sont donnés ci-dessous. Enfin, nous précisons encore *le spectre de ce sur quoi nous pouvons raisonnablement prévoir d'intervenir*. Nous avons repris les régularités et diversités trouvées dans les travaux déjà menés en précisant ce que nous appelons variabilités et en donnant de grandes lignes.

4.2. Le travail de l'enseignant : Quelles « variabilités » viser ?

Certes le travail enseignant n'est jamais entièrement prévisible, ni totalement descriptible – cela peut se vérifier par une incomplétude des descriptions obtenues dans la méthode du sosie (Clot, 1999). On ne peut penser donner des solutions toutes faites, des séances clefs en main. Ce travail n'est pas évaluable directement : trop de paramètres individuels non accessibles et encore moins quantifiables interviennent qui influent sur les résultats des élèves. Plus général encore, il y a des phénomènes qui se passent « à l'insu » des acteurs (positifs et négatifs...), voire à l'insu d'observateurs éventuels, et on serait bien en peine de décrire précisément ce qui dépend finalement de l'enseignant pour un élève donné. Toutefois, nos recherches nous permettent de décrire les activités possibles de l'enseignant pendant les trois phases suivantes, en partie indépendantes et en partie liées, plus

ou moins développées selon les cas, qui seront « visées » par les formations (cf. Robert, Penninckx et Lattuati, 2012, p.130-132) :

- Penser, à chaque nouveau chapitre, le scénario à adopter, avec l'ordre et les relations entre les cours, les exercices et les évaluations – en lien plus ou moins explicite avec le « relief » sur la notion. Des contraintes liées à l'organisation de contrôles communs ou aux examens de fin d'année peuvent aussi intervenir. Ce relief sert à préciser les contenus à enseigner et la manière de les aborder. Il est établi, en recherche, à partir de la prise en compte simultanée des spécificités mathématiques de la notion (voire de son histoire), des programmes et documents d'accompagnement permettant de déterminer un ensemble de tâches à résoudre en utilisant la notion à un niveau donné, et des difficultés répertoriées des élèves. D'un point de vue didactique local cela met en jeu les objets et outils associés, les différents cadres et registres pouvant être mobilisés, le niveau de rigueur attendu. Cela amène à dégager le niveau de conceptualisation visé¹⁵, à choisir des introductions adaptées au type de notion et à anticiper des dynamiques entre cours et exercices.
- Élaborer les tâches précises, en travaillant les énoncés et en tenant compte de la variété à proposer et des difficultés supposées des élèves. Cela se fait souvent juste avant chaque cours, et c'est facilité par l'anticipation permise par la connaissance de la classe particulière concernée, qui joue de manière importante dans cette phase¹⁶. La possibilité d'analyser précisément ce qui est attendu des élèves, en relation avec ce qui a précédé en cours, peut enrichir à la fois l'expression même des tâches et les déroulements associés.
- Gérer les déroulements à chaque séance¹⁷, avec l'objectif que les activités des élèves en classe soient le plus proche possible des activités attendues à partir des tâches. On sait bien la difficulté d'improviser à partir des préparations, d'ajuster, d'adapter, voire de renoncer à une partie de ce qui avait été prévu, en essayant de rester le plus près possible des activités prévues pour les élèves. Sont alors en jeu pour l'enseignant la disponibilité de ses propres connaissances mathématiques et didactiques et les gestes professionnels, automatiques ou décidés dans l'instant, qu'il a habitude de

¹⁵ Défini par un ensemble de tâches sur lesquelles est attendue une disponibilité des connaissances tant outils qu'objets, dans les différents cadres et registres concernés, avec un niveau de rigueur et des modes de raisonnement précisés, et comprenant aussi la réorganisation de ces connaissances dans toutes les autres connaissances des élèves.

¹⁶ Les deux premières phases mettent en jeu ce que nous avons appelé les composantes cognitives et institutionnelles des pratiques, et le niveau global de leur organisation.

¹⁷ Cela met en jeu les composantes médiatives et sociales, et les niveaux local et micro.

mettre en acte. Ce faisant il doit constamment concilier le fait que « la classe doit tourner », que les élèves réussissent à court et moyen terme et qu'à terme ils apprennent ! Objectifs là encore liés mais en partie indépendants.

Nous nous centrons ainsi dans la formation sur le travail pour la classe et en classe, avec les mises en acte décrites ci-dessus, même s'il reste à « faire passer », faire approprier ce que nous pourrions apporter. De fait, le travail sur le relief, coûteux en temps, non immédiat, est souvent réservé à certains (dont par exemple les auteurs de manuels), il est espéré qu'ils en tiennent compte, au moins au niveau des contenus mathématiques présentés, même si c'est rarement explicite (cf. absence de livres du professeur). C'est souvent l'expérience qui contribue à donner aux enseignants une certaine vision, pragmatique, stable, de ce relief. Cependant une sensibilisation à la prise en compte des spécificités des notions à enseigner, renseignées par le relief – même établi par quelqu'un d'autre que soi-même, peut enrichir les choix de scénario.

Enfin, les résultats sur les régularités et les diversités constatées dans ce travail amènent à l'idée de retenir que certaines dimensions peuvent être privilégiées pour ce qui est développé en formation professionnelle, associées à ce que nous appelons variabilités des pratiques (cf. plus haut) : elles sont à l'intersection de ce qui peut varier dans les pratiques entre enseignants, au moins dans un contexte national donné, compte tenu des contextes, et de ce que les didacticiens voudraient voir varier. Il y a là encore un travail de transposition à faire en formation d'enseignants pour déterminer ces variabilités sur chaque contenu, sur les choix de scénarios d'enseignement, sur les tâches précises et les déroulements associés (concernant un travail avant et pendant la classe).

Ces variabilités contextualisées aux notions des programmes et aux différents environnements scolaires inspirent les formations.

4.3. Éléments de transposition

Nous l'avons dit, des recherches, et particulièrement en didactique des mathématiques, irriguent cette formation. Mais, contrairement par exemple à ce qui est préconisé dans un certain nombre de pays pour former les enseignants (Bednarz et al., 2011), ce n'est pas en faisant « faire de la recherche » aux futurs formateurs, ni en les associant à des recherches particulières, précises, que cela se réalise ici. Même si certaines caractéristiques associées à la posture de chercheurs sont travaillées, comme les analyses et les critiques, ou encore la recherche et l'appréciation, voire l'appropriation de ressources.

Il s'agit davantage de transmettre aux participants des outils, issus de la recherche, leur permettant d'analyser des tâches et des activités en classe en leur faisant

adopter la posture d'analyse correspondante, nécessairement associée à des questionnements. La mise en place d'une telle posture est sans doute un objectif commun aux démarches de formation collaborative et aux nôtres, que ce soit pour les formateurs ou pour les enseignants, à des degrés divers. C'est cette posture qui amène, lors de l'analyse de vidéos de classes, à apprécier, hors jugement, les activités des élèves qu'on peut attendre à partir des tâches proposées et des déroulements organisés par l'enseignant, compte tenu d'éléments du contexte à convoquer, programmes, établissements... Nous escomptons que l'expérience des participants facilite l'installation de ce type de posture, à la fois pour supporter le questionnement et pour adopter ce type d'outils, relativement inhabituels. Pour forcer le trait, au lieu de se demander « est-ce que mes élèves vont pouvoir résoudre cet exercice, ou bien, est-il facile ou difficile ? », il s'agit de se demander « quelles connaissances du cours (anciennes ou nouvelles) mes élèves vont devoir adapter pour résoudre cette question, quelles aides leur apporter pour leur laisser le bénéfice de ces adaptations ? ». Nous joignons en annexe la grille d'analyse des tâches et des adaptations des connaissances distribuée aux participants et utilisée toute l'année. En termes d'aides, par exemple, en reprenant la typologie introduite par Robert (2008), un des choix possibles est d'indiquer, directement ou indirectement, une démarche à suivre, un théorème à utiliser, par exemple par une question (aide à fonction procédurale). On peut aussi s'appuyer sur ce qu'ont trouvé les élèves pour le renforcer en dégagant ce qui est général dans cette solution, ou en rappelant la justification de sa validité (aide à fonction constructive). Ce sont les conséquences sur les activités correspondantes possibles des élèves qui sont en ligne de mire. Les vidéos sont ainsi travaillées selon un même format : analyse a priori des tâches en jeu dans l'extrait choisi ; chronologie des activités ; visionnement de l'extrait ; analyse du déroulement en relation directe avec la tâche et les activités des élèves attendues ; échanges entre les participants et interventions du formateur.

Toutes ces analyses et ces discussions débouchent sur une réflexion sur des alternatives possibles, y compris dans plusieurs contextes, et sur des questions dépassant le cadre de la classe où a été tournée la vidéo – en relation avec la nature des notions en jeu, les programmes, les difficultés répertoriées des élèves compte tenu des contextes, voire les manuels, les ressources, les processus en œuvre dans les apprentissages, etc. Il faut souligner que les outils d'analyse, même s'ils sont issus de la recherche, ne sont pas utilisés comme en recherche (Robert et Vivier, 2013), cela ne s'inscrit pas dans une méthodologie associée à une problématique précise. Par exemple les analyses de tâches sur un exercice filmé ne sont pas inscrites dans des analyses plus générales préalables, de programme par exemple (cf. relief), au mieux elles précèdent de telles analyses, qui restent souvent limitées. En ce sens il y a une véritable *transposition de la recherche vers la formation* (Elalouf, 2012). Toutefois, dans la mesure où les analyses sont décontextualisées

d'une pratique effective, décalées dans le temps (après les séances), il y a bien une démarche se distinguant de la pratique quotidienne. Même si cet exercice, qui prend du temps, n'est en effet pas envisageable au quotidien pour toutes les tâches proposées aux élèves, il reste, qu'à l'avoir pratiqué longtemps, tout au long de cette année de formation, cela devient familier et peut s'inscrire dans les pratiques, pour les tâches sensibles par exemple ou en formation (Robert, Penninckx et Lattuati, 2012). C'est une de nos hypothèses concernant la formation de formateurs, nous allons y revenir maintenant.

4.4. Un choix de chercheurs : une formation « à l'envers » !

Comme nous l'avons expliqué plus haut, le montage adopté pour la formation de formateurs est basé sur plusieurs hypothèses, en partie issues elles-aussi de nos recherches, notamment sur les pratiques des enseignants. Cependant il s'agit moins ici de transposition explicite que de sources d'inspiration pour construire la formation, même si plusieurs éléments sur les pratiques et leur développement font l'objet de présentations explicites, comme nous l'avons déjà indiqué. Nous développons ci-dessous ce qui a été esquissé en §1.3.

Rappelons d'abord que nos propres analyses de pratiques en classe, en recherche, nous amènent à penser qu'il serait possible d'installer des pratiques d'enseignants enrichies, notamment par l'adoption d'un travail enseignant un peu différent de ce qui est souvent pratiqué, renouvelé par une réflexion intégrant des éléments de didactique appropriés et adaptés. Cela peut, répétons-le, concerner à la fois l'élaboration du scénario global d'enseignement, le choix précis des tâches et la gestion de séances.

Toutefois, il est important que les outils travaillés dans la formation dispensée soient appropriés par les participants (futurs formateurs dans notre cas, enseignants ensuite) en termes de pratiques, que cela ne reste pas au niveau du « c'est bien intéressant mais ça ne me sert à rien, ou c'est trop difficile, ou ce n'est pas adapté à mes classes », refrain bien connu, découragé et décourageant... Il faut que la formation intéresse les participants, tant tout au long des séances qu'en termes de « gain » final. Nous tenons ainsi à ce que ce qui est discuté tienne compte explicitement des contraintes autres que celles directement liées aux seuls apprentissages, à ce que les réalités du métier ne soient pas ignorées ni considérées seulement comme des paramètres, à ce que les différences individuelles aient toute leur place. C'est ce qui nous a conduites à adopter en formation de formateurs un ordre non ordinaire, du particulier au général, « à l'envers » par rapport à la

tradition universitaire¹⁸. Ceci nous permet de nous appuyer sur l'expérience des participants, sur leurs besoins ressentis et exprimés, pour présenter les besoins supposés associés aux objectifs ci-dessus, avec les outils qui permettent de les décrire (Abboud-Blanchard et Robert, 2013).

Nous mettons ainsi en pratique l'hypothèse vygostkienne, déjà signalée, de l'efficacité d'un travail dans une zone proximale de développement des pratiques (ZPDP), qui nous semble essentielle pour ces formations de formateurs et même d'enseignants... C'est ce qui a inspiré le mode de travail, choisi pour tenir compte de la complexité des pratiques, avec l'imbrication des objectifs liés aux apprentissages des élèves et de la nécessité de tenir compte des contraintes diverses du métier. C'est qu'avoir une classe qui tourne au quotidien et faire réussir les élèves sont déjà deux objectifs un peu dissociés, qui ne se confondent absolument pas avec les faire apprendre – mais on peut les retrouver et les discuter à partir des choix « en vraie grandeur », sur une séance. Il en est de même du double travail de l'enseignant, entre préparation et gestion de la classe, fait de mises en scène de connaissances, d'anticipation par rapport à la classe, d'improvisation-ajustement en classe, qu'on peut reconstituer à partir de ce qui en est étudié en classe, qui en constitue l'expression finale, celle qui va jouer sur les activités des élèves et sur leurs apprentissages.

Notons pour finir que nous ne développerons pas plus avant dans cet article, faute de place, les conceptions sur la formation professionnelle des enseignants qui sous-tendent cependant aussi notre entreprise.

5. Formations de formateurs : caractéristiques globales et encadrement

5.1. Les caractéristiques

Quatre caractéristiques de cette formation de formateurs en précisent encore la nature particulière en relation avec ce qui précède : outre qu'elle est longue, elle est pensée inductive, holistique, aléatoire et fortement collective.

Inductive parce que, dès qu'on analyse des vidéos, à partir du milieu du premier trimestre et tout au long du deuxième, les apports du formateur s'appuient directement sur ce qui a émergé des participants eux-mêmes, de leurs propres analyses et de leurs discussions. Ce n'est que dans le deuxième temps des séances, après les échanges, que sont présentés des éléments organisés sur tel ou tel aspect de ce qui est à enseigner (cf. travail impliquant des pratiques enseignantes).

¹⁸ On pourrait plus classiquement partir d'une notion à enseigner, dérouler les programmes, les obstacles et erreurs d'élèves et en arriver, logiquement, à l'élaboration du scénario et à son passage en classe...

Holistique parce que ces analyses et ces discussions portent sur tout ce qui peut être dit à partir des extraits de séances visionnés, concernant les contenus travaillés, les déroulements organisés, mais aussi les notions enseignées, les programmes, les élèves, la classe, l'établissement et son environnement, l'influence des collègues, voire des parents, et encore l'enseignant lui-même avec ses conceptions, son expérience, ses connaissances (cf. respect de la complexité)... Insistons sur l'imbrication, que nous jugeons fondamentale, des analyses de tâche et de déroulement, qui interdisent un travail sur les énoncés seuls ou la gestion seule en mettant les activités des élèves au centre.

Aléatoire parce qu'il y a une part de hasard dans les contenus des vidéos analysées, en particulier pour celles qui sont tournées dans les classes des participants et analysées en première année et en début de la deuxième. C'est une forme de préparation à la disponibilité visée déjà évoquée plus haut.

Collective enfin, parce que fondée sur les discussions, les échanges, qui sont suscités presque à chaque séance, qui sont même partie prenante du format adopté dans les analyses de vidéos (cf. travail sur des pratiques « proches » de celles des participants). Ce sont des éléments moteurs de la mise en place de questionnements partagés et de prises de conscience, notamment pour apprécier les diversités, élément très important pour saisir la complexité des pratiques à former. Ils permettent la mise en place d'un vocabulaire commun, adopté dans la « promotion » de chaque année. Arriver à se décentrer de ses propres modèles (stables), à concevoir qu'il existe dans la classe des phénomènes qui ont lieu à l'insu de l'enseignant, à accepter que tout ne dépend pas de ce dernier mais qu'il peut quand même avoir une certaine influence notamment par ses choix de tâches et de déroulement (cf. §4.2), sont autant de qualités nécessaires au futur formateur. Ce travail indispensable de décentration est facilité, voire approfondi, par des analyses et des discussions collectives à partir des séances de classe. Notons qu'implicitement on retrouve des idées générales très présentes chez les didacticiens, dont les recherches présupposent l'existence de régularités dans les relations entre enseignement et apprentissages, par-delà les diversités. Mais le parti pris ici est de donner toute leur place aux expressions singulières de ces régularités, et d'y remonter à partir des interventions des participants, grâce au formateur-chercheur, dépassant les diversités et permettant de dégager des variabilités à partir des contenus mathématiques en jeu.

5.2. L'encadrement

Un double élément mérite enfin d'être discuté, celui du principe même d'une formation de formateurs et celui de l'appartenance institutionnelle de leurs formateurs – en l'occurrence ici des enseignants chercheurs.

Le fait que des enseignants chercheurs didacticiens forment des (futurs) formateurs permet à nos yeux de jouer sur une transposition des résultats des recherches en deux étapes, chacune adaptée à son public spécifique. En formation de formateurs la transposition à l'œuvre donne lieu à la transmission d'outils généraux. Peu de scénarios d'enseignement précis, sur une seule notion à un seul niveau scolaire, sont travaillés par exemple. Il n'y a pas besoin, pour les enseignants-chercheurs, de connaître tous les manuels disponibles à tous les niveaux, ni tous les programmes de toutes les filières, mais ils ont besoin de savoir analyser n'importe quel manuel, avec une connaissance de l'économie globale des programmes, ce qui est de fait dans leur bagage. Cela permet aux enseignants chercheurs de s'appuyer sur leur propre domaine des connaissances et même, encore plus important presque, de l'accroître en profitant des connaissances des participants, et de l'expression de leurs besoins. Dans Abboud-Blanchard & Robert (2013), nous écrivons que le rôle du formateur-chercheur est double, dans sa posture de chercheur, il s'appuie certes sur des recherches mais ne se limite pas à la diffusion de résultats ou d'outils d'analyse, il contribue à les compléter en fonction de l'usage qui en est fait et des interactions tout au long de la formation. Le co-apprentissage correspondant est fondamental pour déterminer la ZPDP de chaque participant et en apprécier ce qui pourrait être commun à tous, pour s'y appuyer, pour conserver aussi l'idée de la palette des possibles, non prescriptive. Il s'agit « d'apprendre des enseignants (futurs formateurs) tout en en leur apprenant » !

Le fait que nous installions des questionnements, le fait que nous partagions tous des outils d'analyse communs, apportés par le formateur, le fait qu'il y ait un certain co-apprentissage incident entre futurs formateurs et formateurs-chercheurs, le fait que le jugement et la prescription sont bannies des analyses, nous rapprochent dans une certaine mesure des recherches collaboratives organisées pour ou sur des séances de classe (Proulx, 2013), voire d'une démarche de recherche, à plusieurs différences près : nous travaillons avec de futurs formateurs qui ne se connaissaient pas avant la formation et seront de fait ensuite séparés¹⁹, ils sont regroupés dans un même lieu hors établissement (à l'université), nous n'avons pas de projet précis commun de recherche, même si plusieurs travaux demandés permettent de poser des questions renouvelées.

Les démarches collaboratives de formation mettent en général en face directement chercheurs et enseignants, au sein de communautés de pratiques, souvent en partie dans les établissements des enseignants, sans former des formateurs (Bednarz, Fiorentini et Huang (dir.), 2011), ce qui constitue une autre réponse à la question de la formation des enseignants. À ce sujet, le fait que dans notre formation, nous travaillons sur une palette de possibles pour la classe, que nous soyons plus en mesure de discuter les pratiques, voire de mettre en garde sur des pratiques pouvant

¹⁹ Même s'ils se retrouvent régulièrement via le séminaire post master pro (cf. plus haut).

avoir des inconvénients que d'assurer la transmission d'une « bonne pratique », est sans doute plus facile en formation de formateurs. En revanche pour des formations d'enseignants, souvent plus précises, très ciblées, on l'a dit, des formateurs issus du terrain, voire eux-mêmes encore en partie en poste, peuvent être davantage sensibles aux besoins ressentis des participants, aux diversités et variabilités liées directement à l'exercice du métier et de fait davantage acceptés, plus légitimes d'une certaine manière, tant par ce qu'ils partagent avec les enseignants que parce qu'ils leur apportent quelque chose de nouveau, issu de leur formation.

De plus former des formateurs, que ce soit par des enseignants-chercheurs en didactique ou non, permet d'élargir notablement, à terme, le cercle des enseignants partageant une culture commune, en relation avec des formateurs formés. Cela permet notamment d'avoir des relais pour les stages que les débutants ont à faire avec des discours cohérents entre théorie et pratiques de terrain. Ceci nous semble particulièrement important dans une période où chacun semble « faire son marché » dans la multiplicité des injonctions institutionnelles, non accompagnées, mettant en danger les groupes professionnels et leur expérience précieuse, voire les remplaçant par des groupes générationnels ou fondés sur des goûts partagés.

6. Discussion

Commençons cette dernière partie en revenant sur le cadre théorique qui a servi de toile de fond à notre entreprise : la théorie de la double approche. Cette théorie a été élaborée parce que des analyses de pratiques liées aux seuls apprentissages des élèves apparaissaient « insuffisantes » au vu des ambitions didactiques et de leur manque de diffusion. Elle met délibérément le métier y compris dans ses aspects contingents, liés à l'exercice réel, quotidien, en classe, dans la prise en compte explicite de la complexité. D'une certaine manière, nous considérons que ce qui est « attendu » de l'analyse des pratiques des enseignants côté chercheurs doit pouvoir être utilisé (transposé) pour alimenter les formations. Mais, répétons-le, nous faisons aussi l'hypothèse que ce n'est pas par transmission directe que cela peut se jouer mais bien par un travail spécifique directement lié aux pratiques. C'est ainsi dans une imbrication très étroite entre des connaissances variées, utilisées simultanément, et les exigences médiatives contingentes de la classe que se jouent les formations, avant un raffinement de plus en plus contextualisé des connaissances. Il y a un côté « holistique » dans les pratiques elles-mêmes, à respecter en formation, comme nous l'avons dégagé ci-dessus. Dit autrement encore, les besoins ressentis par les enseignants ne font pas intervenir les différentes connaissances « toutes seules », classées, mais un mélange qui se traduit mieux en termes de composantes et de niveaux. Même si pour le chercheur, voire pour le formateur, faire des diagnostics avec des catégorisations de connaissances introduites par exemple dans le cadre des PCK (Shulman, 1987 ; Ball, Thames et Phelps, 2008) peut être efficace.

En réalité, les analyses de pratiques et l'utilisation qu'on en fait en formation, quel qu'en soit le cadre théorique, sont souvent liées à un objectif global, à plus ou moins long terme, d'enrichissement, de modification, si ce n'est d'installation²⁰ des pratiques enseignantes. Cela passe par une certaine compréhension de leur complexité (même si le mot n'y est pas toujours) et de leur développement. Les différences entre recherches tiennent alors en partie à l'appréciation de ce qu'on doit mettre dans l'étude pour obtenir une compréhension « suffisante » de la complexité, en relation avec une éventuelle intervention ultérieure, elle aussi variable. Mais que veut dire « suffisante » ? Quel lien fait-on entre compréhension, diagnostic et intervention ? Quelle complexité est retenue ?

Partant d'hypothèses, résultats et interrogations sur le plan théorique, la question se pose sur le choix à faire pour former les formateurs. Entre l'association du développement professionnel des formateurs à des dispositifs collaboratifs avec les enseignants, rencontrés davantage dans les pays anglo-saxons où les formateurs sont souvent les chercheurs (Jaworski et Huang, 2014), l'initiation à des analyses réflexives de pratiques ou aux différents types de connaissances pédagogiques et mathématiques générales et déclinées par contenus et autres formations « institutionnelles » de formateurs, nous avons fait un choix. Ce choix est celui d'une formation universitaire initiale de formateurs que nous avons présentée ici et qui se justifie par des éléments théoriques que nous avons exposés tout au long de cet article. Cette formation est longue mais raisonnable institutionnellement, elle a un certain succès, et alimente directement des échanges entre enseignants-chercheurs et enseignants-futurs formateurs, ce qui est pour nous un gage d'efficacité – et le fait que cette condition est très souvent présente dans les autres dispositifs de formation nous semble en attester. Rappelons-en des traits essentiels. Les contenus travaillés pendant la première année et repris en début de deuxième année, inspirés de recherches en didactique, ont pour objectifs d'outiller les participants à apprécier des séances de classe à partir des activités mathématiques des élèves et à concevoir des palettes de possibles pour les enseignants. Cela se fait en grande partie à partir d'analyses de vidéos de classe, en s'appuyant sur l'expérience des participants. Questionnements, prises de conscience et ouvertures émergent de la discussion et du partage des analyses, dans le respect des diversités (travail dans la zone proximale de développement des pratiques). Charge au formateur (enseignant-chercheur) de repérer les besoins exprimés « localement » et de dégager des échanges, en mettant en place un vocabulaire professionnel précis, les régularités sur les grandes variables en jeu. Celles-ci sont associées à un enrichissement potentiel des choix des enseignants (à utiliser dans les formations ultérieures à assurer) : spécificités des notions à enseigner, mises au point de

²⁰ Même si tout le monde admet qu'il y a des éléments en germe même chez les débutants – notamment des représentations.

scénarios d'enseignement et imbrication des tâches proposées et de la gestion de la classe. Bref, tout ce qui nous a conduites à qualifier ci-dessus notre dispositif de formation « à l'envers » !

Terminons en soulignant une difficulté récurrente pour tout processus de formation de formateurs, voire d'enseignants, celle de l'évaluation de ce processus par-delà les bilans d'opinions et les convictions. Déjà les effets des pratiques sur les apprentissages ne sont pas très accessibles aux recherches qualitatives – trop d'éléments entrent en jeu pour donner lieu à des mises en relations sérieuses. À la limite on a davantage d'informations sur ce qu'il ne faudrait pas faire que sur le contraire, vu les combinaisons compliquées de choix différents qui peuvent se compenser en termes d'apprentissages. C'est d'ailleurs une des conclusions des enquêtes TIMSS²¹. Le choix du moment de l'évaluation reste une source de frustration constante, évaluer tôt ne prouve pas qu'un apprentissage est robuste mais évaluer tard peut ne rien prouver non plus. Même chose pour les conditions de production d'une évaluation. Alors évaluer les formations de formateurs devient une véritable gageure. Des éléments de quatre chantiers devraient ainsi être renseignés, celui des scénarios de formation et de leur inscription institutionnelle, celui des formateurs et de leurs pratiques de formation, celui des pratiques des formés et celui des apprentissages de leurs élèves... De plus ne nous voilons pas la face, la généralisation de formations de formateurs correspond à un « pari » institutionnel, celui d'une modification « massive » des pratiques des enseignants qui impacterait directement l'amélioration des apprentissages. C'est ce que rappelle Krainer (2015) dans son article synthétisant les différentes approches de formation à grande échelle au niveau international et c'est à un phénomène analogue que nous assistons en France via l'installation des masters d'ingénierie de formation²². Gagner ce pari nécessite d'avoir un regard évaluatif sur ces formations. Ce regard ne peut être fait qu'à travers un ancrage théorique qui permet d'assurer une distance nécessaire entre les chercheurs impliqués dans ces formations et l'objet de leur action. Des constructions théoriques restent à inventer pour à la fois approfondir l'étude et la conception de ces formations et évaluer leur impact et les conditions de leur viabilité...

²¹ Highlights From the TIMSS 1999 Video Study of Eighth-Grade Mathematics Teaching p. 11 (NCET).

²² Parcours PIF (ingénierie de formation) dans le cadre des masters mis en place dans les ESPE.

Bibliographie

Abboud-Blanchard M. & Chappet-Paries M. (2008), L'enseignant dans une séance de géométrie dynamique. Comparaison avec une séance de géométrie papier-crayon. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 261-292). Toulouse : Octarès.

Abboud-Blanchard M. & Emprin F. (2009), Pour mieux comprendre les pratiques des formateurs et de formations TICE. *Recherche et Formation*, **62**, 125-140.

Abboud-Blanchard M. (2013), *Les technologies dans l'enseignement des mathématiques. Etudes des pratiques et de la formation des enseignants. Synthèses et nouvelles perspectives*. Note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches. Université Paris Diderot.

Abboud-Blanchard M. & Robert A. (2013), Strategies for training Mathematics teachers. The first step: Training the trainers. Dans F. Vandebrouck (dir.), *Mathematics Classrooms: Students' Activities and Teachers' Practices* (pp. 229–245). The Netherlands: Sense Publishers.

Abboud-Blanchard M. & Vandebrouck F. (2013), De l'analyse d'usages des TICE à une articulation de cadres théoriques pour l'étude des pratiques enseignantes. In J.B. Lagrange (Ed.), *Les technologies numériques pour l'enseignement : usages dispositifs et genèses* (pp. 111-128). Toulouse : Octarès.

Adler J., Ball D., Krainer K., Lin F. L., & Novotna J. (2005), Reflections on an emerging field: researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, **60** (3), 359–381.

Ball D.L., Thames M.H., & Phelps G. (2008), Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, **59**(5), 389-407.

Bednarz, N., Fiorentini, D. & Huang, R. (dir.) (2011), *International approaches to professional development for mathematics teachers*. Canada : University of Ottawa Press.

Bolon J. (1996), *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école-collège*. Thèse de doctorat, Université Paris 5.

Chesnais A. (2014), *Enseigner les mathématiques en ZEP – recherches sur la géométrie en sixième*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

Clot Y. (1999), *La fonction psychologique du travail*. Paris : PUF.

Crahay M. (1989), Contraintes de situations et interactions maître-élèves : changer sa façon d'enseigner, est-ce possible ? *Revue française de pédagogie*, **88**, 67-94.

Elalouf M.L. (2012). Usages des recherches en didactique dans les formations. Dans M.L. Elalouf et al. (dir.) *Les didactiques en questions, un état des lieux* (pp. 281-285). Belgique, Bruxelles: de Boeck.

- Faingold N. (2006). Formation de formateurs à l'analyse de pratiques. *Recherche et formation*, **51**, 89-104.
- Horoks J. (2008). Les triangles semblables en classe de seconde : de l'enseignement aux apprentissages. *Recherches en didactique des mathématiques*, **28(3)**, 379-416.
- Jaworski B. & Huang R. (dir.) (2014 a), Interactive practices in promoting professional development of didacticians and teachers of mathematics: an international perspective. *ZDM*, **46-2**.
- Krainer K. (2015), Reflections on the increasing relevance of large-scale professional development. *ZDM* **47**, 143–151.
- Leclercq V. & Marchive A. (2007), Les formations professionnalisantes en Sciences de l'Education : état des lieux et évolutions. *Recherche et formation*, **54**, 47-62.
- Lunenberg M., Dengerink J. & Korthagen, F. (dir) (2014), *The Professional Teacher Educator. Roles, Behaviour, and Professional Development of Teacher Educators*. The Netherlands : Sense Publisher.
- Masselot, P. & Robert, A. (2007), Le rôle des organisateurs dans nos analyses didactiques de pratiques de professeurs enseignant les mathématiques. *Recherche et Formation*, **56**, 15-31.
- Pluinage F. (2013), Note de lecture de l'ouvrage : Une caméra au fond de la classe de mathématiques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **18**, 215-218.
- Proulx J. (2013), Réflexions épistémologiques sur la recherche collaborative en didactique des mathématiques : possibilités et excès. Dans N. Bednarz (dir.). *La recherche collaborative en action : un autre regard pour la didactique* (pp327-350). France : L'Harmattan.
- Robert A. & Rogalski J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, **2(4)**, 505-528.
- Robert A. (2005), De recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **10**, 209 – 249.
- Robert A. (2007), Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en didactique des mathématiques*, **27(3)**, 271 - 312.
- Robert A. (2008), La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques et une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In F. Vandebrouck (dir.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 45-68). Toulouse, France : Octarès.

Robert A. & Masselot P. (2012), Formations des enseignants au travail en classe de mathématiques. Dans M.L. Elalouf & al. (dir.) *Les didactiques en questions, un état des lieux* (p. 303-312). Bruxelles, Belgique : de Boeck.

Robert A., Penninckx J. & Lattuati M. (2012), *Une caméra au fond de la classe de mathématiques. (Se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos*. France, Besançon : Presses Universitaires de Franche-Comté.

Robert A. & Hache C. (2013), Why and How to understand what is at stake in a mathematics class, Dans F. Vandebrouck (dir.), *Mathematics Classrooms: Students' Activities and Teachers' Practices* (pp. 23-74). The Netherlands: Sense Publishers.

Robert A. & Vivier L. (2013), Analyser des vidéos sur les pratiques des enseignants du second degré en mathématiques : des utilisations contrastées en recherche en didactique et en formation de formateurs – quelle transposition ? *Éducation et didactique*, 7-2, 115-146.

Roditi, E. (2003). Régularité et variabilité des pratiques ordinaires d'enseignants. Le cas de la multiplication des nombres décimaux en sixième. *Recherches en didactique des mathématiques*, 23/2, 183-216.

Shulman L. S. (1987), Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22.

Swennen A. & Van der Klink, M. (dir) (2009), *Becoming a teacher educator*. The Netherlands: Springer.

Viaud M.L. (2007), Une pratique pionnière à l'université, le cas des masters de formation de formateurs d'enseignants. *Recherche et formation*, 54, 63-85.

Annexe

La grille utilisée pour l'analyse de tâches : connaissances et adaptations dans les mises en fonctionnement dans des exercices

Les énoncés proposés aux élèves portent sur des connaissances qui peuvent être *anciennes*, ou *en cours d'acquisition*. De plus, ces connaissances peuvent être ou non *indiquées* (directement ou indirectement, par exemple par leur place dans un chapitre) : on parle alors de fonctionnement de type *mobilisable* ou *disponible*. Si le travail consiste à appliquer une propriété sans calcul supplémentaire ni reconnaissance (remplacer les données générales par des données particulières) on parle *d'application simple et isolée ou immédiate* : est mise en jeu une seule fois une application immédiate d'une propriété donnée en cours, et d'une seule. Dans le cas contraire, sept types d'adaptation se dégagent, qui peuvent intervenir simultanément, qui ont chacun un spectre assez large (et encore une fois relatif) :

A1. *Les reconnaissances* (plus ou moins partielles) *des connaissances à utiliser et de leurs modalités d'application* ... Cela peut aller de conjectures, mettant ou non

en jeu des expériences préalables, à des reconnaissances de propriétés, de formules, de méthodes, ou de les conditions d'applications de théorèmes, ou de variables, et de notations.

A2. *L'introduction d'intermédiaires* – notations, points, expressions, calcul, tracé, etc.

A3. *Les mélanges* de plusieurs cadres ou notions..., la modélisation, les changements de points de vue, les changements ou jeux de cadres ou de registres (modes d'écriture), *les substitutions, mises en relation, traductions ou interprétations.*

A4. *L'introduction d'étapes, l'organisation* des calculs ou des raisonnements (cela va d'utilisation répétée d'un même théorème à un raisonnement par l'absurde faisant intervenir le théorème) Les étapes peuvent être classiques (étude d'une fonction) ou à imaginer. *Il y a souvent des énoncés très découpés qui minimisent ce type d'adaptations.*

A5. *L'utilisation de questions précédentes dans un problème, la critique de résultats ou des méthodes mis en relief les uns avec les autres.*

A6. *L'existence de choix* – forcés (un seul convient finalement) ou non.

A7. *La détection d'un manque de connaissances adaptées.*

MAHA ABBOUD-BLANCHARD

Université Cergy-Pontoise

LDAR, Université Denis Diderot

maha.blanchard@u-cergy.fr

ALINE ROBERT

Université Cergy-Pontoise

LDAR, Université Denis Diderot

aline.robert@u-cergy.fr

LAURENT VIVIER

NOTE DE LECTURE SUR *APOS THEORY, A FRAMEWORK FOR
RESEARCH AND CURRICULUM DEVELOPMENT IN MATHEMATICS
EDUCATION*

1. Présentation générale

La théorie APOS, pour Action, Processus, Objet, Schéma¹, est une théorie du développement cognitif. Elle a été élaborée par Ed Dubinsky dans les années 1980 (Dubinsky, 1984). L'idée fondamentale est de développer un modèle de l'apprentissage des notions mathématiques en s'appuyant sur le constructivisme de Piaget et notamment sur le mécanisme mental d'abstraction réfléchissante (*reflective abstraction*) que la théorie APOS décline. La théorie ne prétend pas rendre compte des apprentissages autres que ceux relatifs aux notions mathématiques.

À la suite de Dubinsky, de nombreux chercheurs ont contribué au développement de la théorie APOS. C'est une théorie connue et reconnue internationalement (APOE en espagnol), mais qui ne semble que peu représentée dans les recherches en France². Les auteurs de ce livre sont des chercheurs qui ont beaucoup contribué au développement de la théorie, aux États-Unis d'Amérique, en Israël et au Mexique.

Le livre (Arnon et al., 2014) présente l'état actuel de la théorie, les auteurs précisent souvent que la théorie est encore en construction, en évolution, que des points sont encore à éclaircir. De nombreux exemples sont présentés. Ils sont principalement issus des thèmes sur lesquels la théorie s'est construite : les fonctions, les fractions, les rationnels en écriture décimale (*repeating decimals*), l'algèbre linéaire, les groupes. Les références internes à l'ouvrage sont nombreuses et utiles. Dans ce livre, on peut déceler plusieurs blocs :

¹ *Action, Process, Object, et Schema* en anglais. Un terme avec une majuscule désigne exclusivement la structure mentale.

² Les seules références en France que j'ai pu trouveres sont l'article de Trigueros et Oktaç (2005), un atelier du colloque DIDIREM animé par Maria Trigueros (2009) et une session de l'atelier 7 du colloque en hommage à Michèle Artigue animé par Maria Trigueros et Asuman Oktaç – (Trigueros & Oktaç, 2012) pour le poster en espagnol, la session d'atelier n'a pas fait l'objet d'une publication.

- une partie *introductive* incluant le développement de la théorie et les fondements piagétien (chapitres 1 et 2),
- une présentation de la théorie (chapitres 3, 4, 7 et 8),
- des utilisations de la théorie en recherche (chapitre 6) et dans l'enseignement des mathématiques (chapitre 5 et, plus spécifiquement pour le premier degré sur le thème des fractions, chapitre 9),
- une partie conclusive incluant des réponses aux questions fréquentes (chapitre 10), et une rapide conclusion de 5 pages (chapitre 11),
- les références dont une très intéressante bibliographie annotée (chapitre 12) des principales références de la théorie APOS ; un index est également présent, moins utile pour une version électronique.

Le livre est écrit en spirale, en revenant régulièrement sur des notions introduites rapidement pour discuter de certains points plus en profondeur ce qui permet de bien comprendre le fonctionnement de la théorie. Par exemple, la notion de « Schéma » est avancée rapidement dès le chapitre 3 et est reprise plus en détail au chapitre 7. Néanmoins, il me semble que les retours récurrents à la théorie de Piaget entravent parfois la dynamique du livre. Les fondements sont bien expliqués au chapitre 2, mais les auteurs reviennent régulièrement sur les liens avec la théorie de Piaget ce qui ne contribue finalement pas toujours à la compréhension de la théorie.

Il est à noter également le chapitre 5 qui propose une pause dans la présentation de théorie pour exposer le cycle ACE (*Activities, Class discussions, Exercises*) d'enseignement ainsi que le langage de programmation ISETL utilisé. Ce langage de programmation³ est avancé avec sa spécificité (proche du langage des mathématiques), mais la présentation, un peu longue et quasi-exclusive, est un peu gênante : ne peut-on pas atteindre les mêmes objectifs avec d'autres langages ? De plus, un usage en algèbre linéaire est développé mais en s'appuyant non pas sur les corps usuels comme $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ mais sur les anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Même si cela n'est pas mentionné, on comprend bien pourquoi : il est possible d'énumérer tous les cas et l'informatique est alors performante. Mais la spécificité de ce travail en mathématiques discrètes n'est pas discutée. Les auteurs avancent l'intérêt d'écrire des programmes en référence à la théorie APOS afin de favoriser les transitions entre *stages*⁴. Si l'on suit aisément les auteurs sur ce point, il est surprenant qu'il

³ Il peut être téléchargé à : <http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/isetl>.

⁴ *Stage* est le terme anglais (qui peut se traduire par « stade ») utilisé pour désigner les structures mentales, Action, Processus, Objet, Schéma. Ce terme insiste sur la progression entre ces quatre structures mentales, chaque *stage* est un passage obligé pour accéder au suivant.

soit développé un thème, *repeating decimals*, pour lequel on donne les programmes tout faits aux étudiants. Est-ce par méconnaissance des algorithmes⁵ ou parce que ces algorithmes, hors curriculum, demanderaient du temps pour être compris et appris ?

Par ailleurs, le cycle ACE s'appuie sur le travail collaboratif entre pairs. Sans que ce soit contradictoire avec les idées de Piaget, des références aux travaux de Vygotsky auraient été bienvenues (il n'est cité qu'une seule fois, de manière anecdotique, pour la ZPD, en page 96).

Si le livre me paraît toutefois réussi sur le plan des objectifs fixés, il est important de savoir qu'il ne s'agit pas exclusivement d'un livre de recherche. Le cœur d'une lecture centrée sur la recherche est constitué des chapitres 3, 4 et 7 (qui doivent être lus dans cet ordre) pour la compréhension de la théorie ainsi que du chapitre 6 sur la méthodologie de recherche (mentionnant le rôle très important des entretiens) et du chapitre 2 pour les fondements piagétien. On peut néanmoins déplorer le manque d'une relecture fine de l'ensemble, avec parfois des discussions sur des items mathématiques qui ne sont pas les bons, ou encore la répétition d'une même séquence de programmation alors qu'il doit manifestement y avoir des modifications. Cela gêne la compréhension.

À la suite, je présente, en commentant, la théorie APOS avec les structures et mécanismes mentaux (section 2) et la décomposition génétique (section 3). Je finis cette note de lecture par une discussion sur le chapitre 8, proposant l'introduction d'un nouveau *stage* pour les processus infinis.

2. Structures et mécanismes mentaux

La présentation de la théorie, l'organisation en *stages* ainsi que la décomposition génétique, pourrait laisser penser qu'il s'agit d'une théorie fortement linéaire et donc éloignée de la réalité des apprentissages. Les auteurs mettent en garde contre cette interprétation linéaire de APOS, certains éléments viennent étayer cette mise en garde, notamment certains mécanismes mentaux liés aux Processus et aux Schémas.

Les structures mentales, aussi appelées *stages*, sont : Action, Processus, Objet et Schéma. Des niveaux (*levels*) sont parfois considérés entre deux *stages*, sans que l'on en perçoivent bien la nécessité ou l'intérêt car il s'agit souvent d'avoir des critères pour savoir si un sujet est au début d'un *stage*, sans développer aucun aspect du *stage* suivant, en cours vers le *stage* suivant ou presque au *stage* suivant. Le critère principal est le nombre d'occurrences des deux *stages* en question dans

⁵ Dans leurs travaux, Rittaud et Vivier (soumis) ont retrouvé la présentation de ces algorithmes au XVIII^e siècle (Marsh, 1742). On peut en voir une présentation dans Vivier (2015, partie 2, section 4).

les entretiens. En revanche, ces niveaux entre *stages* prennent tout leur sens lorsqu'ils sont liés aux notions mathématiques, comme au chapitre 9 sur les fractions. Si les *stages* sont des passages obligés dans l'apprentissage, les niveaux, eux, ne le sont pas (les auteurs avancent également le fait que le passage par un niveau peut être très rapide et donc non visible).

Le *stage* de l'Action est caractérisé par l'effectivité des actions sur des objets, qu'ils soient concrets ou abstraits – on suit une *recette* pas à pas, étape par étape, sans rien changer, sans sauter d'étape. La faculté de penser les actions, sans les effectuer, est spécifique du *stage* du Processus (*intériorisation*⁶ des actions). La possibilité d'agir sur un Processus est le signe d'une *encapsulation* de ce Processus en Objet (reprenant Sfard (1991) et son concept de *réification*, les auteurs affirment qu'il s'agit de l'étape la plus difficile).

Un Objet peut être *désencapsulé* pour retrouver le Processus (comme une fonction f que l'on désencapsule pour retrouver le processus qui permet de calculer $f(x)$).

Un Processus peut être *inverse* (*reversal*) comme lorsque l'on cherche l'antécédent d'un nombre par une fonction.

La *coordination* est le mécanisme mental par lequel deux Processus donnent lieu à un troisième Processus. Les auteurs donnent l'exemple de la composition de deux fonctions : pour accéder à *fog* (on doit appliquer le Processus de f à l'Objet g), on désencapsule les Objets f et g , on coordonne les deux Processus pour avoir un nouveau Processus que l'on encapsule dans le nouvel Objet *fog*.

Il est à noter que deux niveaux d'Objets sont considérés sans que, malheureusement, cela soit explicite : un niveau d'exemple, comme la fonction $f(x)=3x+5$, et un niveau plus général, l'Objet fonction.

Il est assez difficile de comprendre ce qu'est un Schéma et il faut tous les exemples du chapitre 7 pour y parvenir (fonction, espace vectoriel et plan cartésien). Un Schéma peut être thématisé (la *thématisation*) pour devenir un Objet sur lequel on peut faire des Actions (cela peut relancer une séquence APOS), mais une seule étude est présentée sur ce mécanisme mental.

Un Schéma est un ensemble cohérent de structures mentales organisées qu'un sujet a construit et qu'il peut appliquer à une situation. Cela est approfondi au chapitre 7 où la notion de triade de Piaget est reprise pour mieux comprendre le développement des Schémas : au niveau *intra*, les structures A-P-O sont isolées les unes des autres, perçues de manière séparée (par exemple, considération d'un seul type de fonctions) ; au niveau *inter*, des liens sont faits entre A-P-O avec des

⁶ Les mécanismes mentaux sont écrits en gras et italique à leur première occurrence, dans une version francisée, le terme en anglais est mentionné lorsque les mots sont éloignés.

regroupements (par exemple, il est possible de construire de nouvelles fonctions à partir de fonctions connues) ; au niveau *trans*, le Schéma devient cohérent, la portée du Schéma est perçue (cela permet de considérer des anneaux ou des espaces vectoriels de fonctions).

La notion de Schéma est, dans la théorie, ce qui permet de rendre compte du dynamisme de la construction des connaissances, en référence aux notions de rééquilibration, assimilation et accommodation de Piaget. Un Schéma peut **assimiler** d'autres Objets ou d'autres Schémas. La section 7.6 présente une intéressante **coordination** de deux Schémas pour en former un nouveau sur le thème des graphiques en analyse.

La figure suivante (page 18 dans le livre) synthétise l'ensemble de ces structures et mécanismes mentaux, hormis ceux impliquant les Schémas, ce qui est dommage. Mais bien entendu, la présentation qui est proposée ici est beaucoup trop rapide, et il est nécessaire de lire plus en détail le livre pour comprendre finement et fidèlement la théorie APOS.

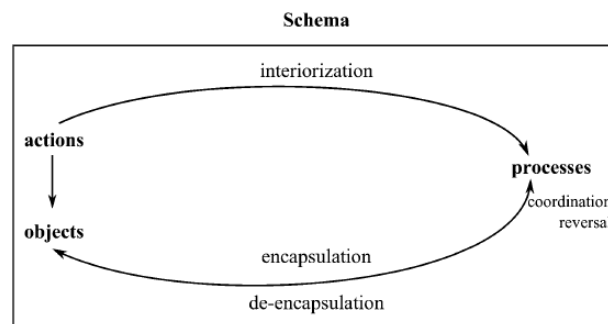


Figure : structures et mécanismes mentaux

3. Décomposition Génétique

APOS n'a pas pour but de classer les étudiants, d'ailleurs une des hypothèses fondamentales de la théorie est que tout individu peut apprendre n'importe quelle notion mathématique pourvu que les prérequis soient construits. Il s'agit d'une théorie qui cherche à identifier les processus cognitifs d'apprentissage. Comment, à partir des structures et mécanismes mentaux exposés de manière générale peut-on apprendre une notion mathématique ?

C'est le rôle d'une décomposition génétique : proposer une organisation, un modèle hypothétique, en Action, Processus, Objet permettant de rendre compte des apprentissages. De même qu'il n'y a pas une unique manière d'apprendre, il n'y a pas unicité d'une décomposition génétique pour une notion. Il s'agit d'un

instrument pour le chercheur, pour tester et prédire, ainsi qu'un outil pour élaborer des séquences d'enseignement.

L'objectif est d'obtenir une décomposition génétique (voire plusieurs mais une seule recherche fait état de deux décompositions génétiques, en algèbre linéaire) qui permette de comprendre comment la majorité des individus apprend une certaine notion mathématique. Après l'élaboration d'une décomposition génétique préliminaire ou *a priori*, elle est mise à l'épreuve par une étude expérimentale. Cette dernière peut confirmer la décomposition génétique, l'infirmer ou, et c'est le cas le plus général, montrer la nécessité de la réviser, de l'adapter. Un exemple important est constitué par le thème des limites de fonctions où, après expérimentation, il s'est avéré qu'il fallait considérer deux processus ($x \rightarrow a$ et $f(x) \rightarrow l$ avec la composition du premier par f).

Les décompositions génétiques sont parfois exposées avec un diagramme et parfois sans. On ne comprend pas pourquoi. Le diagramme est utile pour embrasser rapidement la décomposition génétique, mais on ne sait pas comment en construire un pour représenter une décomposition génétique.

4. Totalité : un nouveau *stage* ?

Je trouve que certaines affirmations de l'ouvrage mériteraient d'être discutées plus en détail car d'autres interprétations pourraient être suggérées. Cette réserve ne remet pas en question la théorie exposée dans le livre, elle invite à une discussion locale, normale dans le fonctionnement scientifique, et je laisse le lecteur se faire lui-même son idée.

Je vais juste développer une discussion sur le chapitre 8 qui est un peu à part dans l'ouvrage car il fait état d'une idée récente. Pour les notions mathématiques impliquant l'infini, un *stage* entre Processus et Objet serait à considérer. Les auteurs nomment ce *stage* *Totalité*. Ce *stage* marquerait le passage d'un infini potentiel à un infini actuel. Cette idée provient notamment des recherches sur le thème des *repeating decimals* que je développe sur le cas spécifique de $0,999\dots$ et de sa comparaison avec 1 :

- Action : $0,999\dots$ est perçu avec un nombre fini de chiffres (les actions doivent être réellement effectués), d'où l'inégalité par la structure des décimaux ;
- Processus : on ajoute toujours un « 9 » à droite, ça ne s'arrête jamais, donc on s'approche de 1 mais sans jamais l'atteindre, d'où l'inégalité.
- Objet : $0,999\dots$ est perçu comme un Objet sur lequel on peut faire des Actions comme $(0,999\dots \times 10 - 0,999\dots) / 9$ pour obtenir 1.

Le nouveau *stage*, Totalité, consisterait à, avant de pouvoir considérer $0,999\dots$ comme un Objet, pouvoir considérer la *totalité* des décimales.

Pour ma part, je ne pense pas que la théorie ait besoin d'un nouveau *stage* pour le thème des rationnels. La question me semble plus être de savoir quel Objet est encapsulé. L'encapsulation de ce processus mène, naturellement, à l'objet période⁷. C'est un Objet effectif que des étudiants sont capables de considérer par eux-mêmes (Vivier, 2015, partie 2, section 4). On se retrouve alors avec un Schéma, au niveau intra, qui est constitué par des écritures décimales auxquelles on accole à droite une période. Ce Schéma serait à coordonner avec les autres Schémas numériques pour pouvoir aboutir à l'Objet nombre visé.

Cela est dit très rapidement et nécessiterait d'être approfondi. Mais je pense que la complexité est en partie masquée par l'insertion d'un nouveau *stage* qui ne paraît pas nécessaire, pour ce thème des rationnels, à la lecture de ce chapitre. La coordination des Schémas devrait permettre de rendre compte de la complexité et aussi des erreurs comme $0,\bar{5} + 0,\bar{7} = 1,\bar{2}$ par une assimilation dans un Schéma des nombres décimaux (ou « à virgule »).

Je voudrais aussi pousser plus loin la réflexion : qu'en est-il des nombres réels ? On remarque que, si les recherches avec APOS se centrent sur les nombres rationnels, avec une préoccupation importante constituée par leurs écritures décimales illimitées périodiques, rien n'est dit sur les nombres réels. En particulier, quel Processus permettrait d'atteindre le stage de l'Objet pour un nombre réel ?

Le Processus ne peut consister en l'ajout successif des décimales d'un nombre réel définies par ce nombre (i.e. la suite $E(10^n x)/10^n$) car cela suppose d'avoir le nombre comme Objet. À partir de l'écriture décimale, j'envisage deux possibilités :

1. le fait d'ajouter des décimales à droite, aléatoirement ou arbitrairement. Mais que construisons-nous ? est-ce un Processus au sens de APOS ? quelles actions peut-on imaginer sur ces Processus ?
2. le fait de considérer une suite de Cauchy, ou deux suites adjacentes, avec un contrôle des décimales (i.e. des erreurs), ce qui permet d'avoir effectivement un Processus, et de savoir que l'on construit un Objet lié à ces suites (la limite).

Cela serait à approfondir et peut-être que, dans le cas général des nombres réels, le nouveau *stage* Totalité prendrait tout son intérêt, car il n'y aurait plus d'interférence avec l'objet période.

⁷ À ce propos, on peut voir une différence dans les notations : $0,333\dots$ insiste plus sur le Processus alors que $0,\bar{3}$ insiste plus sur l'Objet.

Bibliographie

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS theory, a Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*, Springer.

Dubinsky, E. (1984). The cognitive effect of computer experiences on learning abstract mathematical concepts, *Korkeakoulujen Atk-Uutiset*, 2, 41–47.

Marsh, J. (1742). *Decimal arithmetic made perfect; or, the management of infinite decimals displayed*, London.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects on different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36.

Trigueros, M. & Oktaç, A. (2005). La théorie APOS et l'enseignement de l'algèbre linéaire, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol. 10, 157 – 176.

Trigueros, M. (2009). Modélisation de situations réelles et utilisation d'une théorie de construction de la connaissance dans l'enseignement des mathématiques universitaires, *Actes du colloque DIDIREM, Approches plurielles en didactique des mathématiques*, Université Paris Diderot, LDAR, 83-101.

Trigueros, M. & Oktaç, A. (2012). Análisis teórico de conceptos del álgebra lineal y su uso didáctico apoyado en situaciones de modelación, *Colloque en hommage à Michèle Artigue, atelier 7, Didactique de l'analyse et des mathématiques de niveau post-obligatoire*, 51-53. <<https://sites.google.com/site/colloqueartigue/short-proceedings>>

Vivier, L. (à paraître). *Sur la route des réels*, note d'Habilitation à Diriger les Recherches.

LAURENT VIVIER

Institut de Modélisation et Mathématiques de Montpellier (I3M), Université de
Montpellier

Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR), Université Paris Diderot
laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

INFORMATIONS AUX AUTEURS

Les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives sont une revue annuelle éditée par l'IREM de Strasbourg, Université Louis Pasteur. Elle a été fondée en 1988 par R. Duval et F. Pluvinage.

La revue publie des articles de recherches propres à développer et à stimuler la réflexion sur l'enseignement des mathématiques en direction de tous les types de publics : écoliers, lycéens, étudiants et adultes en formation. Les présentations de recherches concernant la formation initiale et continue des enseignants et sur l'enseignement dans des contextes socioculturels variés sont les bienvenues.

Les articles peuvent être de nature théorique en relation étroite avec une expérimentation dans le cadre d'un enseignement. Ils peuvent être aussi des comptes rendus d'une expérience d'enseignement appuyée sur un cadre théorique explicite. Les domaines théoriques de références sont issus de la didactique des mathématiques. Lorsqu'ils s'insèrent dans une problématique d'enseignement des mathématiques, les travaux peuvent aussi prendre appui sur la psychologie cognitive et sur la linguistique.

Les articles ne doivent généralement pas dépasser vingt pages mais exceptionnellement ils peuvent être plus longs et permettre ainsi à l'auteur de développer un point de vue original et émergeant dans le champ de recherche. Il est aussi possible de présenter une synthèse des recherches menées dans un domaine particulier de la didactique des mathématiques. Les articles proposés sont soumis à un arbitrage avant publication. Le cas échéant, des demandes de modifications, aménagements ou compléments des textes présentés seront adressées aux auteurs.

La langue de la revue est le français. Des articles peuvent être publiés dans d'autres langues (notamment anglais et espagnol) ; ils seront alors précédés d'une présentation analytique rédigée en français par l'auteur ou par l'équipe de rédaction.

Les articles proposés pour publication dans les *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* de l'IREM de Strasbourg peuvent être transmis sous forme de documents attachés à des messages électroniques. Il convient d'adresser ces messages à l'un des rédacteurs en chef, à son adresse électronique qui est indiquée dans ce volume.

Un modèle d'article au format des Annales se trouve sous forme de fichier *word* accessible par un lien, depuis la page des Annales à l'adresse URL :

<http://mathinfo.unistra.fr/irem/publications/adsc/>

Après ouverture et enregistrement sous un nouveau nom, il permet d'introduire par copier-coller aux emplacements appropriés, en respectant les fontes de caractères et les tailles :

- le nom de du ou des auteurs ;

- le titre complet ;
- le titre éventuellement abrégé, figurant dans l'en-tête des pages impaires ;
- le bloc « abstract – résumé – mots clés » ;
- le texte proprement dit de l'article proposé ;
- la bibliographie sous forme normalisée (s'inspirer du modèle où apparaissent les différents cas pour la présentation des références).

Pour composer un article sans utiliser le modèle, par exemple en recourant à LaTeX, voici des précisions sur le format des pages et les caractères utilisés.

Feuille A4 portrait, avec les marges suivantes :

Haut :	3 cm
Bas :	8 cm
Gauche :	4 cm
Droite :	4 cm
Reliure :	0 cm
En tête :	2 cm
Pied de page :	7 cm

Caractères :

- Auteur(s) en première page : Arial 12 points, gras, petite capitale, Centré ;
- Titre en première page : Arial 14 points, petite capitale, Centré ;
- Abstract – Résumé – Mots clés : Times New Roman 10 points ;
- En-tête : Arial 9 points ;
- Corps de texte : Times New Roman 11 points.

Pour la pagination d'un article proposé, commencer par le numéro 1.

Adresses électroniques :

- pour des commandes de volumes, mailto :

bibirem@math.unistra.fr

- pour des propositions d'articles, mailto :

fpluvinage@cinvestav.mx
eric.roditi@paris5.sorbonne.fr

Imprimerie et reprographie
Direction des affaires logistiques intérieures
Université de Strasbourg
Dépôt légal au 4^e trimestre 2015