

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

Revue internationale de didactique des mathématiques

Rédacteurs en chef : ALAIN KUZNIAK & FRANÇOIS PLUVINAGE

IREM de Strasbourg
Université de Strasbourg

Volume 19

2014

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
ISSN 0987 - 7576

Rédacteurs en chef

ALAIN KUZNIAK
Université Paris-Diderot,
UFR de Mathématiques- Case 7018
Laboratoire de didactique André Revuz
75205 PARIS Cedex 13
alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr

FRANÇOIS PLUVINAGE
IREM de Strasbourg
7 Rue René Descartes
67084 Strasbourg
fpluvinage@cinvestav.mx

Comité de rédaction

ALAIN BRONNER – Montpellier
VIVIANE DURAND-GUERRIER – Montpellier
RAYMOND DUVAL – Lille
CECILE DE HOSSON – Paris
ATHANASIOS GAGATSIS – Chypre
FERNANDO HITT – Canada
CATHERINE HOUEMENT – Rouen
MICHALIS KOURKOULOS – Crète

MARIA ALESSANDRA MARIOTTI – Italie
ASUMAN OKTAÇ – Mexique
LUIS RADFORD – Canada
JEAN-CLAUDE REGNIER – Lyon
ÉRIC RODITI – Paris
MAGUY SCHNEIDER – Belgique
CARL WINSLOW – Danemark
MONCEF ZAKI – Maroc

Responsable de publication

JOSIANE NERVI – Directrice de l'IREM de Strasbourg

Secrétariat d'édition

BRUNO METZ – IREM de Strasbourg

Éditeur

IREM de Strasbourg
Université de Strasbourg
7, rue René Descartes
F - 67084 Strasbourg CEDEX
Tel. +33 (0)3 68 85 01 30

Fax. +33 (0)3 68 85 01 65
Bibliothèque : +33 (0)3 68 85 01 61
<http://irem.u-strasbg.fr>
irem@math.unistra.fr

SOMMAIRE

ÉDITORIAL	7
Éric RODITI (France) <i>Sujet, savoir, activité : une articulation en discussion</i> (Débat : ouverture).....	9
Jean-François MAHEUX et Jérôme PROULX (Canada) <i>Vers le faire mathématique : essai pour un nouveau positionnement en didactique des mathématiques</i> (Débat : article initial).....	17
Sophie RENE DE COTRET (Canada) <i>Peut-on ou doit-on vraiment se passer de la référence au savoir pour appréhender le faire?</i> (Débat : réaction).....	53
Lalina COULANGE (France) <i>Le faire mathématique : une nouvelle ouverture théorique et méthodologique pour étudier les connaissances et les savoirs ?</i> (Débat : réaction).....	63
Jean-François MAHEUX et Jérôme PROULX (Canada) <i>Faire mathématique : un débat porteur</i> (Débat : réponse).....	71
Elizabeth MONTOYA DELGADILLO et Laurent VIVIER (Chili, France) <i>Les changements de domaine dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique</i>	73
Claire GUILLE-BIEL WINDER (France) <i>Étude d'une situation de reproduction de figures par pliage en cycle 2 : le PLIOX</i>	103
Zahid ELM'HAMED (Maroc) <i>Effets d'un apprentissage empirique sur la compréhension du concept de moyenne arithmétique</i>	129
Nathalie SAYAC et Nadine GRAPIN (France) <i>Evaluer par QCM en fin d'école : stratégies et degrés de certitude</i>	169
Britta Eyrich JESSEN (Danemark) <i>How can Study and Research Paths contribute to the teaching of mathematics in an interdisciplinary setting?</i>	199
Osiel RAMÍREZ-SANDOVAL, César F. ROMERO-FÉLIX et Asuman OKTAÇ (Mexique) <i>Coordinación de Registros de Representación Semiótica en el Uso de Transformaciones Lineales en el Plano</i>	225
Maria del Rocio JUAREZ, Adelina ARREDONDO et François PLUVINAGE (Mexique, France) <i>Etude comparée de la formation initiale de professeurs de mathématiques en France et au Mexique</i>	251
INFORMATIONS POUR LES AUTEURS	287

EDITORIAL

Ce volume 19 des ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES comporte une innovation : Ses premiers articles correspondent à un débat, autour du “faire” et du “savoir” des élèves en mathématiques. En point de départ, il y a eu une proposition d'article de nos collègues canadiens Jean-François Maheux et Jérôme Proulx, laquelle a donné lieu de la part des arbitres sollicités pour sa relecture à des réactions vives, pour ou contre sa publication. Ces réactions ne surprendront pas si l'on note que dès l'introduction, les auteurs déclarent par exemple : « Nous éloignant progressivement des perspectives dans lesquelles le “savoir” mathématique est l'élément de référence, nous nous sommes pour ainsi dire rapprochés des contextes dans lesquels les élèves font des mathématiques ».

Faire des mathématiques pourrait-il ainsi s'opposer à les connaître ? Notre position comme éditeurs scientifiques devant cette proposition d'article n'était pas évidente. L'accepter, n'était-ce pas la cautionner ? La refuser, n'était-ce pas se priver de l'écoute d'une position qui présente un intérêt ? Certes, le volume 18 des mêmes Annales avait publié un article de Jérôme Proulx qui est issu de ce point de vue, mais qui se limite à une thématique (résolution mentale d'équations) et une mise en œuvre de méthodologie acceptables indépendamment de lui. Peut-être d'ailleurs cet article du volume 18 pourra amener le lecteur à se rendre compte qu'en définitive la teneur des propos de Maheux et Proulx est moins iconoclaste qu'il ne pourrait paraître en première lecture. Mais plutôt que de nous donner le dernier mot en tant qu'éditeurs scientifiques, nous avons vu dans les questions soulevées l'occasion de donner la parole à plusieurs intervenants et ainsi de publier un débat avec pluralité des points de vue présentés.

Pour ce débat, Eric Roditi a très volontiers accepté la charge de le présenter et l'organiser, en décidant de faire appel à deux intervenantes, l'une de la nationalité des auteurs de l'article original et l'autre de l'école française. Le débat nous semble bien introduit quand Eric Roditi écrit notamment : « notre propos invite à s'arrêter respectivement sur trois objets – le sujet, le savoir et l'activité – dont la prise en compte dans les recherches en didactique des mathématiques marque épistémologiquement ces recherches ».

Hormis sa portée en termes de contenus, le débat présente aussi l'intérêt de refléter des relations entre francophones, en l'occurrence québécois et français. Cette relation est marquée par le relais que désormais le site de l'Université de Montréal assure aux Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Mais une telle relation n'est qu'un petit maillon de la grande chaîne que la francophonie représente pour l'enseignement mathématique : 2015 est une année d'organisation de la

conférence EMF (Espace Mathématique Francophone), laquelle aura lieu en Algérie en octobre, sous l'égide de l'IMU (International Mathematical Union). Nous sommes certains que plusieurs des études présentées dans les articles de ces Annales, en particulier dans le présent volume, trouveront des échos dans ce colloque, dont nous invitons vivement le lecteur à consulter le site Internet.

Toutefois l'international serait lui-même étrié s'il se réduisait à la francophonie. Deux types de relations sont privilégiés, avec l'Europe d'une part qui nous amène à une pratique multilingue, avec le monde hispanique d'autre part dont nous nous sentons proches par de nombreux aspects. L'école française a longtemps fourni des modèles dans bien des pays du monde hispanophone, par exemple au travers d'initiatives comme le mouvement Freinet ou en formation des enseignants avec les Écoles Normales. Aujourd'hui, la collaboration et les échanges d'idées se font dans les deux sens à l'occasion des projets de recherche qui amènent des coopérations avec l'Amérique Latine. Les précédents volumes des Annales ont déjà contribué à nourrir ces réflexions croisées notamment autour des Espaces de Travail Mathématique, des registres de représentation sémiotiques, de la socioépistémologie, des approches collaboratives... Ce volume en porte à nouveau la marque, avec la présence parmi les articles, en plus du français, de la langue anglaise et du castillan. Par son ouverture linguistique et théorique, notre revue continue ainsi à tracer un chemin que nous souhaitons original et ambitieux dans le monde de la didactique des mathématiques.

ALAIN KUZNIAK & FRANÇOIS PLUVINAGE

ÉRIC RODITI

SUJET, SAVOIR, ACTIVITE :
UNE ARTICULATION EN DISCUSSION

(Débat : ouverture)

Abstract. Subject, Knowledge and Activity: Discussing their articulations. In this text we introduce a scientific discussion about how some objects are taken into consideration within research on mathematics education. The subject, knowledge and activity, along with how they are intertwined, are the objects that constitute the core of the proposed reflection. Many researchers base their studies and issues on theoretical frameworks some of which are outside the field of didactics. Indeed the debate focuses on the question of the nature of this scientific field and of its results.

Résumé. Ce texte vise à ouvrir une discussion scientifique sur la nature de la prise en considération de certains objets dans les recherches en didactique des mathématiques. Trois objets et leur articulation sont particulièrement au cœur de la réflexion proposée : le sujet, le savoir et l'activité. De nombreux didacticiens des mathématiques fondent théoriquement leurs travaux ou problématisent leurs questions en sortant des cadres usuels de la didactique. La discussion proposée ici pose, d'une certaine manière, la question de la délimitation de l'aire de notre champ scientifique ainsi que de la nature des productions issues des recherches qui y sont menées.

Mots-clés. Activité, didactique, savoir, sujet, théorie.

Introduction

Réfléchir collectivement sur les objets de recherche de la didactique des mathématiques n'est pas une nécessité nouvelle, sans doute même s'agit-il d'une nécessité permanente, notamment en France où un travail particulièrement important a été mené pour fonder théoriquement ce champ de recherche. Les chercheurs prennent position, développent des arguments, et la didactique des mathématiques évolue parfois en conséquence.

Dans trois parties successives, notre propos invite à s'arrêter respectivement sur trois objets – le sujet, le savoir et l'activité – dont la prise en compte dans les recherches en didactique des mathématiques marque épistémologiquement ces recherches et, à travers elles, le champ tout entier. Nous nous proposons ainsi d'ouvrir une discussion avec deux autres chercheuses, Lalina COULANGE et Sophie RENE DE COTRET, au sujet d'un article de Jean-François MAHEUX & Jérôme PROULX publié dans le présent volume et qui n'offre rien de moins que d'inviter les didacticiens à considérer l'activité des élèves, non seulement indépendamment

des savoirs mathématiques en jeu dans les tâches qui leur sont proposées, mais encore des connaissances qu'ils mobilisent pour leur réalisation !

À la suite de ce texte et de l'article des deux auteurs, le lecteur trouvera, dans ce même numéro de la revue, deux discussions critiques de l'article qui sont signées COULANGE pour la première et RENE DE COTRET pour la seconde, ainsi que la réponse des auteurs à ces critiques. C'est donc l'inauguration d'une rubrique « Débats » que proposent, par ces publications, les *Annales de didactiques et des sciences cognitives*.

1. Sujet

Le fait que MAHEUX et PROULX proposent de considérer ce que font les élèves indépendamment des savoirs et des connaissances, conduit à s'interroger d'abord sur la place que « l'élève » occupe théoriquement en didactique des mathématiques. Un rappel pour commencer : « *avant que les didactiques ne s'imposent comme champs de recherches spécifiques, la tendance (dans les écrits pédagogiques) était de réserver le terme « didactique » à la délimitation des contenus d'enseignement et à leur programmation* » (REUTER 2007, p. 212). Et une remarque pour continuer : aujourd'hui encore, notamment dans des milieux où l'objectif est la prescription ou la commercialisation, le terme « didactique » reste réservé aux contenus, à leur programmation, ainsi qu'aux méthodes, aux ressources et aux outils d'enseignement d'une discipline.

Ces observations visent à souligner l'importance du *système didactique* pour caractériser les recherches menées dans notre champ : ce système est composé de trois sous-systèmes – savoir, enseignant et enseigné – et c'est son fonctionnement qu'étudient les didacticiens dans les relations qu'entretiennent ses trois sous-systèmes. Par l'introduction du concept de « situation didactique », BROUSSEAU (1986) est parvenu à doter la didactique des mathématiques (voire plus généralement les didactiques) d'un outil théorique permettant d'étudier l'apprentissage, en analysant non seulement les activités des protagonistes du système didactique (même si l'enseignant reste souvent éclipsé derrière le milieu), mais aussi les phénomènes que ces activités engendrent.

Pour autant, la question n'est pas réglée de savoir ce que recouvrent précisément les deux sous-systèmes enseignant et enseigné. Le fait de proposer de s'interroger ici sur le « sujet » en didactique des mathématiques est une manière de poser cette question, même si les choix épistémologiques indiqués précédemment ne facilitent pas le fait de considérer l'un des sous-systèmes isolément. En se restreignant au sous-système enseigné, il s'agit donc de se demander ce qu'un travail scientifique, inscrit en didactique des mathématiques, retient de l'élève, peut en retenir ou ne peut manquer d'en retenir. Le désigner comme « sujet » permet de discuter de caractéristiques qui ne sont pas toujours étudiées dans notre champ.

Dans le sillage de l'épistémologie génétique piagétienne et des travaux de VERGNAUD (1991), la didactique des mathématiques a adopté, au sujet de l'élève, une position constructiviste et interactionniste où son activité mathématique, en situation didactique, constitue à la fois la source et le critère de ses connaissances. CHEVALLARD (1992) propose en outre de considérer simultanément les sous-systèmes didactiques et les institutions auxquelles ils appartiennent. L'élève est alors considéré « personnellement » lorsqu'il s'agit de considérer ses apprentissages propres, et « institutionnellement » lorsque ces apprentissages découlent d'une intention institutionnelle ; cela correspond, en théorie anthropologique du didactique, aux modifications respectives du *rapport personnel* ou du *rapport institutionnel* de l'élève (sujet d'une institution) à l'objet de savoir enseigné. De nombreux didacticiens qui se réfèrent aujourd'hui à la théorie de l'activité (notamment ROBERT & ROGALSKI 2008) réaffirment la position constructiviste et interactionniste originelle, tout en appréhendant les sujets (élèves et enseignants) dans les contextes de leur activité. Ces auteurs actualisent ainsi le lien entre didactique et psychologie en tenant compte des développements scientifiques liés à l'œuvre de VYGOTSKI.

Il ne peut être ici question d'approfondir beaucoup plus longuement cette discussion sur la question du sujet en didactique des mathématiques, mais quelques positions, bien que moins développées actuellement, ne peuvent être ignorées. D'abord celle, déjà ancienne, de BLANCHARD-LAVILLE (1989) qui a choisi de considérer le maître et l'élève comme de véritables sujets, au sens de la psychanalyse, c'est-à-dire comme des acteurs humains dotés d'une subjectivité et d'un psychisme. Ses nombreux travaux menés avec des didacticiens des mathématiques confirment l'intérêt scientifique d'une telle approche clinique d'orientation psychanalytique. Il faut mentionner ensuite les travaux qui sont menés au carrefour de la sociologie et des didactiques (ROCHEX & CRINON 2011 ; BROCCOLICHI & RODITI 2013) pour étudier l'impact des contextes institutionnels, locaux et socio-familiaux sur les processus même d'apprentissage, en fonction des pratiques d'enseignement. D'autres perspectives encore paraissent délaissées par « l'école française de didactique des mathématiques » alors qu'il semblerait scientifiquement important qu'elle s'en saisisse : la lecture des programmes des grandes manifestations internationales en *mathematics education* ne peut manquer de faire remarquer en effet que les didacticiens francophones s'engagent encore assez peu dans des travaux à grande échelle (nombre d'élèves, étendue du curriculum, durée d'enseignement, etc.), dans l'étude des effets des stéréotypes liés au sexe sur les apprentissages mathématiques, ou encore dans les travaux qui se développent actuellement et qui portent sur des élèves souffrants de dysfonctionnements neurocognitifs.

Comment donc penser l'élève en didactique des mathématiques sans le supposer aux prises avec les savoirs que son professeur a l'intention de lui enseigner ? Je propose cette question au lecteur de l'article de MAHEUX & PROULX et lui suggère de mettre en regard, au fil de sa lecture, le sujet élève sous-jacent à leur texte et celui qui est au cœur de notre champ de recherche.

2. Savoir

L'article des deux auteurs conduit aussi à s'interroger sur la façon de prendre en compte la question du savoir et des connaissances dans la recherche en didactique des mathématiques. Revenant sur la place du savoir en psychologie, BRUN (1994) développe une analyse dans laquelle il souligne l'étape décisive franchie par PIAGET du fait de la dimension épistémologique de son œuvre qui conduit à interroger l'accroissement des connaissances plutôt que la nature des connaissances. Mais il indique aussi que le « sujet épistémique » apparaît essentiellement comme le sujet d'une connaissance normative, marquée surtout par des grandes catégories de connaissances. VERGNAUD (1991), avec la théorie des champs conceptuels, apporte une réponse didactique à la psychologie. Cette théorie permet de se référer au savoir mathématique constitué plutôt qu'aux structures logiques ou logico-mathématiques, elle permet aussi d'articuler les connaissances mobilisées dans les schèmes d'une part, et les concepts sous-jacents aux situations dans lesquelles ces schèmes sont mis en œuvre d'autre part. La théorie des situations didactiques (BROUSSEAU, 1986) propose, quant à elle, une articulation dynamique entre savoirs et connaissances puisque les connaissances anciennes des élèves sont utilisées dans les interactions avec le milieu pour en construire de nouvelles, en correspondance avec les savoirs en jeu. Elle en propose également une articulation critique qui conduit, lors de l'identification d'un « effet Jourdain » par exemple, à relativiser la reconnaissance de savoirs dans les actions des élèves.

La question des savoirs n'est pas réglée pour autant. D'abord parce que les savoirs enseignés ne correspondent pas exactement aux savoirs mathématiques constitués : CHEVALLARD (1985) a montré comment ces derniers sont transposés à des fins d'enseignement. Ensuite parce que la question de la relation entre « savoir » et « faire » qui renvoie à celle du lien entre théorie et pratique, est suffisamment générale et fondamentale pour que les didacticiens aient besoin de s'y pencher régulièrement au gré des évolutions scientifiques. DOUADY (1986) a produit à ce sujet une avancée théorique fondamentale qui dépasse largement le cadre de la didactique des mathématiques. Elle permet de n'envisager l'activité mathématique ni dans un lien de subordination avec les savoirs ni dans une relation d'indépendance avec ces derniers, mais dans une relation dialectique : les concepts mathématiques jouant alternativement le rôle d'outils dans l'activité de résolution de problème et d'objets qui prennent une place (pas forcément définitive) dans la construction d'un savoir organisé.

Non loin de notre champ scientifique, et en relation avec lui, la question de la relation entre « savoir » et « faire » est traitée par RABARDEL (1995) à propos des technologies : il développe pour cela une approche instrumentale où, sans qu'il soit possible ici de la développer davantage, il distingue artefact et instrument d'une part, instrumentalisation et instrumentation d'autre part. Pour l'étude de la transmission des pratiques professionnelles, PASTRE (2011) s'est confronté à la même question. Il commence par discuter de la séparation que les philosophes grecs opéraient entre la *metis* (intelligence rusée qui, en dehors de toute conceptualisation, parvient à tirer son épingle du jeu dans des situations particulièrement embrouillées) et l'*epistèmè* (ce qui est objet de science). De cette discussion et des études qu'il a menées sur les pratiques professionnelles et leur formation, il conclut à la nécessité d'écarter ce paradigme traditionnel, il choisit de considérer la connaissance comme inscrite dans l'activité, et il propose de procéder à une analyse interne de cette dernière pour mettre au jour ce qu'elle comporte de conceptualisation.

Faut-il alors lire le texte de MAHEUX & PROULX comme invitant à un recours à la *metis* pour interpréter le travail de l'élève ? Je propose cette deuxième question au lecteur et lui suggère de considérer les conséquences de leur position théorique sur celles qui ont déjà été développées dans notre champ scientifique.

3. Activité

Le troisième concept que leur texte invite à discuter est celui d'activité. Bien que le terme apparaisse plus de soixante fois dans leur article, les auteurs proposent de le remplacer par le « *faire mathématique* » pour mieux passer d'une conception « acquisitionnelle » à une conception « participative » de l'apprentissage, et mettre ainsi de côté les idées de savoirs et de connaissances que véhicule le terme « *activité* ».

Si, indépendamment des termes utilisés et des différences théoriques que les choix de termes impliquent, l'activité de l'élève possède une place essentielle en didactique des mathématiques, c'est que les didacticiens partagent une hypothèse fondamentale selon laquelle un savoir ne peut se transmettre ni directement ni intégralement. Parmi toutes les activités de l'élève, celle qui consiste à résoudre des problèmes mathématiques a particulièrement retenu l'attention des didacticiens. La proposition qui nous est faite de rompre avec une telle perspective impose de revenir, même sommairement, sur les apports des didacticiens à ce propos.

D'abord il faut préciser qu'on aurait tort de penser que les didacticiens ne considèrent que les connaissances et les savoirs en jeu pour analyser ce que font les élèves. C'est, entre autres, ce qui les différencie d'auteurs comme BARUK (1985) qui écrit, en quatrième de couverture de son ouvrage : « *Sur un bateau, il y a 26 moutons et 10 chèvres. Quel est l'âge du capitaine ?* Cette célèbre question pose

aussi celle du sens, et de ce qui ne s'en transmet pas, dans l'enseignement des mathématiques. » Reprenant une étude menée dans un IREM, l'auteure attribue à un défaut de prise de sens le fait que nombre d'élèves d'une dizaine d'années totalisent l'effectif des moutons et celui des chèvres pour déterminer l'âge du capitaine. Ce qu'apporte la didactique, c'est justement le moyen de comprendre que ces élèves ne cherchent pas seulement à répondre à une question mathématique, mais plutôt qu'ils obéissent à ce qu'ils pensent être une obligation dans ce contexte institutionnel particulier qui est celui de la classe de mathématiques : répondre par un calcul à la question posée. Ainsi, la situation qui est la leur n'est pas seulement composée d'un problème (avec les savoirs mathématiques disponibles ou à construire pour le résoudre), mais bien à la fois d'un problème et d'un contrat qui traduit les obligations réciproques réelles ou supposées de l'enseignant et des élèves. On doit à BROUSSEAU (1986) d'avoir théorisé la notion de contrat didactique et celle de situation didactique dont les différents types (action, formulation, validation, etc.) sont caractérisés par les possibilités d'apprentissage qu'ils offrent, c'est-à-dire par les types de connaissances qu'ils permettent de construire relativement à un même savoir (modèle implicite, langage, théorème, etc.).

Certains didacticiens se sont bien sûr particulièrement attachés à concevoir des outils théoriques pour l'étude des savoirs et de leur mise en œuvre dans les activités. Avec cette perspective, CHEVALLARD (1992) propose une modélisation qui met en lumière les techniques, technologies et théories éventuellement engagées dans la réalisation d'un type de tâche. Il distingue différents moments de l'étude auxquels des apprentissages différents sont associés. Il réfère les objets d'étude à une échelle de codétermination didactique permettant aux analyses de s'affranchir des institutions dans lesquelles les situations didactiques sont inscrites et auxquels les partenaires de ces situations sont assujettis. D'autres auteurs comme ROBERT & ROGALSKI (2008) ont davantage cherché à fonder leurs analyses des activités des élèves en se référant simultanément à des critères concernant les savoirs ainsi qu'à d'autres critères qui sont personnels (leurs conceptions, leurs motivations, etc.) ou relatifs aux contextes de leur activité (institutionnel, social, etc.), en tenant compte notamment des interactions entre pairs ou avec l'enseignant.

Que nous proposent donc MAHEUX & PROULX quand ils déclarent vouloir mettre de côté les savoirs et les connaissances pour analyser le « *faire mathématique* » des élèves ? Ils expliquent, par exemple, que certains élèves résolvent une équation qui s'écrit comme une égalité de deux quotients en renversant numérateurs et dénominateurs, mais sans mobiliser de connaissances relatives à l'inverse d'un nombre réel. S'agit-il d'une ouverture supplémentaire qui permettrait, par exemple, de rendre compte du fait que ces élèves tentent de calquer leur travail sur des exemples vus auparavant, c'est-à-dire de faire comme leur enseignant, mais sans

chercher à identifier les fondements de ce qu'il avait fait ? Cela pourrait alors faire écho à des recherches conjuguant des approches sociologiques et didactiques mettant en évidence certains malentendus entre les enseignants et des élèves qui n'ont pas la connaissance des réquisits scolaires (ROCHEX & CRINON 2011). Cela pourrait permettre d'analyser leur activité en classe en tenant compte des dispositions qu'ils construisent du fait de leur origine socio-familiale, de leur histoire et des réseaux relationnels auxquels ils appartiennent. Il ne semble pas que l'ambition des auteurs soit celle-là ; il semble au contraire, comme l'indique le titre de leur article, qu'ils souhaitent développer un nouveau positionnement en didactique. Le lecteur de leur article pourrait aussi s'interroger sur ce que ce positionnement apporte véritablement comme potentiels pour l'interprétation didactique des phénomènes, mais aussi d'en évaluer le coût s'il faut écarter les apports de la référence aux savoirs et aux connaissances.

Lecture et débat

Le temps est maintenant venu pour le lecteur de prendre connaissance de l'article des deux auteurs. La réflexion qui vient d'être menée porte sur l'articulation de trois concepts (le sujet, le savoir et l'activité) qui sont utilisés dans des champs plus larges que celui de la didactique des mathématiques, avec des acceptions parfois diverses selon les théories sous-jacentes.

Elle tente d'aider le lecteur à discuter de leurs arguments puisqu'ils proposent justement de s'écarter des références de notre champ. Elle vise aussi à introduire aux critiques rédigées sur cet article par COULANGE et RENE DE COTRET ainsi qu'à la réponse des auteurs.

Ce texte a pour but enfin d'ouvrir une nouvelle rubrique « Débats » des *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Comme dans ce numéro, des chercheurs y seront invités à discuter des articles dont la teneur conduit justement à débats. Parce que la discussion est sans doute le premier ingrédient de la vitalité scientifique...

Bibliographie

BARUK S. (1985), *L'âge du capitaine – de l'erreur en mathématiques*, Seuil, Paris.

BLANCHARD-LAVILLE C. (1989), Questions à la didactique des mathématiques. *Revue française de pédagogie*, **89**, 63-70.

BROCCOLICHI S. & RODITI E. (2013), Sociologies et didactiques. Au-delà des divisions, quels partages ? *VRS – La Vie de la Recherche Scientifique*, **392**, 16-17.

BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, **7.2**, 33-115.

BRUN J. (1994), Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques, dans *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (Eds. Artigue, Gras, Laborde & Tavnignot), 67-83, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1985), *La transposition didactique*, La Pensée Sauvage Éditions, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*, **12.1**, 73-112.

DOUADY R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, **7.2**, 5-31.

PASTRE P. (2011), *La didactique professionnelle*, PUF, Paris.

RABARDEL P. (1995), *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*, Armand Colin, Paris.

REUTER Y. (dir) (2007), *Dictionnaire des concepts fondamentaux des didactiques*, De Boeck, Bruxelles.

ROBERT A. & ROGALSKI J. (2008), Cadres théoriques, dans *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (Coord. Vandebrouck), 9-30, Octares, Toulouse.

ROCHEX J.-Y. & CRINON J. (dir.) (2011), *La construction des inégalités scolaires – Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*, PUR, Rennes.

VERGNAUD G. (1991), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques*, **10.2-3**, 133-170.

ÉRIC RODITI

Université Paris Descartes

Faculté des sciences humaines et sociales – Sorbonne
Laboratoire EDA (Éducation Discours Apprentissages)

eric.roditi@paris5.sorbonne.fr

JEAN-FRANÇOIS MAHEUX ET JEROME PROULX

VERS LE FAIRE MATHÉMATIQUE: ESSAI POUR UN NOUVEAU
POSITIONNEMENT EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

(Débat : *article original*)

Abstract. Toward *mathematical doing*: Attempts at a new positioning in didactics of mathematics. In didactics of mathematics, reflections and observations on the nature of mathematical “knowledge” and “knowing” have led to a broader view of what is meant by learning mathematics. Progressively taking distances from perspectives in which mathematical “knowledge” is the object of reference, studies have come closer to the contexts in which students do mathematics. There is still, however, a tendency in our field to focus on what students might know, understand or learn in relation to a specific “knowledge”. In contrast, the epistemological perspectives in which we as authors are positioned view the local and emergent character of the mathematical activity as so central that it invites us to “replace” questions of knowledge with ones about *mathematical doing*. In this article, we investigate this path, both theoretically and empirically. In so doing, we look into the theoretical and ethical foundations of such a positioning and offer a practical illustration of its implications for research in mathematics education (through analyses of data from a study on mental mathematics). We show how important aspects of studies in didactics of mathematics continue to be relevant and significant in this positioning and how new questions emerge and others disappear.

Résumé. En didactique des mathématiques, les réflexions et observations sur la nature de la « connaissance » ont conduit à une vision de plus en plus large de ce que signifie apprendre en mathématiques. En s'éloignant progressivement de perspectives dans lesquelles le « savoir » mathématique est l'élément de référence, les travaux se sont pour ainsi dire rapprochés des contextes dans lesquels les élèves font des mathématiques. Reste néanmoins une forte tendance, en didactique des mathématiques, à se préoccuper de ce que connaissent, comprennent ou apprennent les élèves, et de surcroît par rapport à un « savoir » spécifique. Dans les perspectives épistémologiques où nous, auteurs, nous positionnons, le caractère local et même émergent de l'activité mathématique est si central qu'il invite à « remplacer » les questions de savoirs et de connaissances pour nous intéresser au *faire mathématique*. Dans cet article, nous proposons d'examiner cette avenue de manière à la fois théorique et empirique. Pour y arriver, nous examinons les fondements éthiques et théoriques d'un tel positionnement, pour ensuite offrir une illustration pratique de cette possibilité à l'aide de données tirées d'une recherche sur le calcul mental. Nous montrons comment des parties importantes du travail habituel de recherche en didactique des mathématiques trouvent toujours leur sens et leur intérêt dans ce positionnement, alors que d'autres questions émergent ou disparaissent.

Mots-clés. Faire des mathématiques, activité mathématique, éthique, énonciation, socio-culturel, calcul mental.

Introduction

Au cours des trois dernières décennies, les réflexions et observations sur la nature de la « connaissance » et des « erreurs » mathématiques des élèves ont conduit à une vision de plus en plus large de ce que signifie apprendre en mathématiques (voir e.g. Proulx et Maheux, 2012). Nous éloignant progressivement des perspectives dans lesquelles le « savoir » mathématique est l'élément de référence, nous nous sommes pour ainsi dire rapprochés des contextes dans lesquels les élèves *font* des mathématiques. Ce rapprochement, permettant d'apprécier (et donc d'analyser) le caractère local d'une erreur/connaissance, nous a également conduit à porter une attention grandissante aux diverses formes dans lesquelles l'activité mathématique prend place : dessins, paroles, gestes, sons, etc. On y voit une prise en compte grandissante de la complexité de l'activité mathématique des élèves qui conduit certes à intégrer à nos analyses de nouveaux éléments, mais également à en délaisser certains par le fait de visions renouvelées.

Le présent texte est un essai qui provient de nos travaux en épistémologie, travaux nous ayant menés à penser qu'un élément clé de ces renouvellements consiste à mettre de côté les idées de savoirs et de connaissances au profit d'une entrée par le *faire mathématique*. Une telle proposition s'inscrit par exemple dans les propos de Sfard (1998), qui discute de l'émergence des approches « participatives » en réponse aux limites d'une vision « acquisitionnelle » de l'apprentissage :

A far-reaching change is signaled by the fact that although all of these titles and expressions refer to learning, none of them mentions either "concept" or "knowledge." The terms that imply the existence of some permanent entities have been replaced with the noun "knowing," which indicates action. This seemingly minor linguistic modification marks a remarkable foundational shift (Sfard, 1998, p. 6)

Une telle observation convoque déjà un positionnement significativement différent de celui dans lequel « savoir » et « connaissance » sont habituellement entendus. Elle contraste par exemple avec la proposition de Larochelle et Désautels (1992, voir aussi Fourez, Engelbert et Mathy, 1997) visant à définir les *savoirs* en tant que « modèles socialement standardisés » et les *connaissances* comme « structures conceptuelles » des individus. Autre exemple, la définition qu'offrait François Conne, il y a de ça plus de 20 ans :

Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible, il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation. (Conne, 1992, p. 225)

Reformulant de telles distinctions, le travail de Mason et Spence (1999) illustre bien le changement de cap dont il est ici question. Ils distinguent d'une part savoir et connaissance en associant l'un à une familiarité avec des objets/processus mathématiques (« knowing of », au sens de « s'y connaître ») et l'autre à des éléments plutôt déclaratifs sur ceux-ci (« knowing that », comme dans « savoir que »). À ces distinctions s'ajoutent d'autres formes de savoir/connaissance (« knowing-why », « knowing-how ») formant un ensemble dont les auteurs ont pour objectif principal de distinguer l'habileté à agir avec ou à partir de ces savoirs/connaissances. Nos efforts comme communauté de recherche, argumentent-ils, devraient aller vers le développement de telles habiletés qui ne sont pas quelques « choses » que possèdent les élèves, mais une sorte de *sensibilité* aux situations qui se manifesteraient dans l'action elle-même : « some degree of sensitivity to features of a situation, some degree of awareness in the moment » (p. 151). L'essentiel serait donc dans ce que *font* effectivement les élèves en situation, et l'attention donnée aux expériences mathématiques à vivre, à rappeler.

Dans ces discussions de fond, la tentation est forte de chercher un apaisement des tensions entre de nouvelles approches et les perspectives qui les ont précédées. Ne pourrait-on pas, comme le suggère Sfard (1998) à l'époque, accepter que différentes approches donnent accès à différents éléments qui se compensent l'un l'autre, voire se complètent ? Une lecture dialogique de l'histoire des sciences nous incite plutôt à travailler les différences et, pour ce faire, bien marquer les ruptures (épistémologiques) aux moyens desquels une approche est fondée¹. C'est d'ailleurs la position que Sfard semble avoir adoptée dans ses travaux plus récents (e.g. Sfard, 2008), discutant l'importance d'une approche « désobjectifiée » de l'activité mathématique. Donner pleine attention au *faire mathématique*, proposition que nous développons dans cet essai, requiert un repositionnement par rapport aux préoccupations centrées sur la connaissance, sur lequel il nous semble alors important d'insister.

De nombreux arguments en faveur ou en défaveur d'une position tranchée sur la possibilité ou l'intérêt de voir coexister ou non différents paradigmes pourraient être avancés. Une question intéressante tourne autour du terrain sur lequel ces argumentations pourraient avoir lieu. Nous avons choisi, pour cet essai, de nous tourner vers ce qu'on peut nommer « le fondement philosophique » de l'éducation mathématique (et donc, pour nous, de la recherche dans le domaine). La proposition que nous développons dans cet essai, soit d'adopter une entrée par le *faire mathématique*, est discutée en trois temps : d'abord sur le plan de son fondement *éthique*, ensuite par son ancrage *théorique* et finalement par son illustration *pratique* pour la recherche dans notre domaine. Plus précisément, nous

¹ Le pragmatisme qu'évoque la proposition de Sfard (1998) est lui-même un paradigme auquel il est possible d'adhérer... ou non.

puisons dans un premier temps aux travaux autour des écrits d'Emmanuel Lévinas, qui voit la connaissance comme une impossibilité par rapport à la responsabilité pour l'autre. Nous nous tournons ensuite vers les écrits sur la théorie biologique de la cognition de Maturana et Varela, puis vers d'autres s'inscrivant dans une approche sociale historique et culturelle inspirée de Vygotsky et Leyontiev. Enfin, nous examinons de manière pratique cette possibilité en présentant un travail de recherche dans un contexte de calcul mental, où des élèves font des résolutions d'équations algébriques.

1. Le fondement éthique d'une entrée par le *faire* de l'activité mathématique

[la connaissance] est encore et toujours une solitude
Lévinas, 1982, p. 61

La philosophie nous propose de réfléchir sur le monde et l'existence humaine, donnant aux thèmes du savoir et de la connaissance, de la vérité et du bien, une place de choix dans ses propositions diverses. Or, travailler en termes de savoirs et de connaissances pose une difficulté importante si nous reconnaissons *l'éthique* comme notre « philosophie première », c'est-à-dire comme fondement de l'éducation mathématique. À la suite de plusieurs chercheurs s'étant récemment penchés sur ces questions (e.g. Atweh, Brady, Neyland, Roth, Radford), nous avons défendu cette position (e.g. Maheux, 2010 ; Maheux et Thom, 2009) en prenant appui sur les travaux du philosophe Emmanuel Lévinas, dont Ernest (2009) nous donne un bel aperçu :

Levinas maintains that our subjectivity is formed in and through our subjectiveness to the other, arguing that subjectivity is primordially ethical and not theoretical. That is to say, our responsibility for the other is not a derivative feature of our subjectivity; instead, this obligation provides the foundation for our subjective being-in-the-world by giving it a meaningful direction and orientation [...] Thus one can say that as social creatures our very nature presupposes the ethics of interpersonal encounters, even before they occur, and even before we form or reflect on our practices, let alone our philosophies. This is why Levinas asserts that ethics is the 'first philosophy' presupposed by any area of activity, experience or knowledge, including mathematics education. If we accept his reasoning, then [...] Ethics is the 'first philosophy' of mathematics education. (pp. 38-39)

En examinant la question du savoir et de la connaissance mathématique sous l'angle du travail de Lévinas², on découvre la *nécessité* éthique d'un changement

² Nous faisons ici l'effort de ne présenter que quelques idées de manière à ce qu'un lecteur peu familier avec les questions éthiques (et, en particulier, le travail de Lévinas) puisse en apprécier la nature.

épistémologique (Radford, 2008) dans lequel peut s'inscrire cette entrée par le *faire mathématique*. En effet, pour Lévinas, le savoir et la connaissance posent une impossibilité éthique profonde parce qu'ils nous empêchent d'aller à la rencontre de l'autre dans ce qu'il a d'inconnaissable :

La connaissance est toujours adéquation entre la pensée et ce qu'elle pense. Il y a dans la connaissance, en fin de compte, une impossibilité de sortir de soi ; dès lors la socialité ne peut avoir la même structure que la connaissance (Lévinas, 1982, p. 61)

Lévinas fait ici appel à une idée qui n'est pas nouvelle en philosophie, en éducation, ou en recherche en didactique des mathématiques. La connaissance est depuis longtemps associée à l'idée de domination, de contrôle. Il s'agit, d'une part, du Savoir que l'on développe sur quelqu'un ou sur quelque chose. Lévinas parle alors de « tout ce qu'il y a de "prendre" dans le "comprendre" » (p. 61). Mais on peut aussi penser au Savoir comme objectif, quand « faire apprendre » est synonyme de conduire, bon gré mal gré, vers une forme donnée de connaissance. Nous avons offert dans nos travaux une illustration intéressante de ce problème autour de la notion de « conception » en didactique des mathématiques (Maheux, 2010). À la manière de Holzkamp (1983), qui demande comment la recherche sur la motivation peut servir autre chose que la manipulation (du moment où la connaissance de ce qui motive une population sert à lui faire faire quelque chose qu'elle ne ferait pas autrement, e.g. travailler la nuit, faire des mathématiques), on peut se demander comment la notion de conception mathématique vise (implicitement) autre chose que de mesurer et de juger l'élève. Interpréter des conduites d'étudiants en les comparant à un soi-disant savoir de référence revient à les ramener à du connu (prenant pour négligeable leur irréductible originalité et tout ce qui peut être d'inconnaissable en elles, et donc aussi chez les élèves qui les produisent). Et cela dans quel but, sinon pour mettre en place des mécanismes amenant les élèves à la « maîtrise » de telle ou telle notion (ou processus) mathématique telle que *nous* la (ou le) concevons ? Cet esprit de « contrôle », enraciné dans l'idée même de savoir ou de connaissance, faisait dire à Nietzsche (Fragments posthumes) par exemple : « en vérité, l'interprétation elle-même est un moyen pour dominer quelque chose ».

La réflexion proposée par Lévinas aborde la question de la domination et du contrôle du point de vue proprement éthique, c'est-à-dire au sens d'une *responsabilité pour l'autre*. Selon Lévinas, cette responsabilité éthique est un appel à sortir de soi, à ne pas se restreindre à soi, et donc à ce qui est connu ou connaissable, pour aller à la rencontre de ce qu'il y a d'inconnaissable afin d'éviter de réduire l'autre à nous-mêmes (et donc à du connaissable, du connu). Il s'agit donc d'aller à la rencontre de l'Autre, et de répondre à/de son expression : « la

réponse ou la responsabilité [...] est cette relation authentique [car] parler, répondre à [l'autre c'est] déjà répondre de lui » (Lévinas, 1982, pp. 92-93).

On peut traduire ces propos dans le contexte de la didactique des mathématiques en mettant de l'avant le « faire ensemble » comme alternative aux idées de connaître, d'apprendre ou même d'enseigner (du latin *insignire* « signaler, désigner », qui suggèrent une séparation de celui qui « sait » et de celui qui « apprend »). Faire ensemble de manière à se rapprocher de l'autre en s'intéressant (de manière mathématique) à des phénomènes (mathématiques ou autres) sans chercher à communiquer ou à faire saisir « quelque chose », car même dans la communication du savoir on se trouve déjà « à côté » d'autrui plutôt qu'en relation avec lui (Lévinas, 1982, p. 58).

Nous l'avons évoqué, certains ont déjà entamé un travail en ce sens, puisant aux écrits de Lévinas pour repenser le monde de l'éducation mathématique et ce que nous y faisons. C'est le cas par exemple de Atweh et Brady (2009) qui proposent de voir l'éducation mathématique en termes de développement « responsable » d'une « habileté à répondre » (jeu de mots sur *response-ability*) qui se joue dans la rencontre entre élèves et enseignant :

Ethical response-ability places the primacy of ethical considerations in the teacher-student *encounter* [...] ethical response-ability discussion applied to mathematics education posits the primary aim of mathematics education to enable the response-ability of the student in their current and future lives as citizens. [It] also calls for enabling of response-ability of the teacher to design learning activities that supports the students' response-ability, which in turn implies the response-ability of education system to support the teacher needs to play their role effectively. (p. 5)

Ces auteurs s'inspirent alors en partie du travail de Neyland (2001) pour qui les idées de Lévinas permettent une critique du mode technocratique qui s'impose en enseignement des mathématiques, à travers le développement de curriculums où l'imputabilité technique (*technical accountability*) érode (et même remplace) la responsabilité éthique définie par Lévinas. Dans son analyse, Neyland souligne justement combien une orientation en termes de « savoir à atteindre », qui repose naturellement sur l'idée de « connaissances » possédées par les élèves, est au cœur de cette imputabilité technique, et l'impossibilité éthique qui en découle³. Plus récemment, on peut se tourner vers le travail de Radford et/ou Roth, qui critiquent fortement l'idée de « connaissance » possédées par les élèves et de « savoir » objectifs, et trouvent dans l'éthique de Lévinas une manière d'approcher

³ Cette critique s'apparente au travail conceptuel que nous avons développé dans Proulx (2006) sur la différence « objectifs comme points de départ » *versus* « objectifs à atteindre ».

l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, de même que la recherche autour de ceux-ci, relativement à l'idée de « mise en commun » (*togethering*) :

we propose the concept of *togethering* to theorize the intricate aspects of the coordination of perspectives: [...] This requires an attunement of perspectives (as opposed to direct teaching); such an attunement is precisely the outcome of the joint attention to the emergence of a common object for a common understanding of the activity that it stimulates. [...] neither teacher nor student can be certain that what they say makes sense to the other. Each participant, in speaking to the issue at hand, thereby exposes not only a way of thinking but also him/herself. Joint activity is an opportunity for producing and ascertaining that the object is reflected similarly in the consciousness of all participants. Togethering captures the ethical commitment all parties make to the object, which becomes a common object of activity because of togethering (Radford et Roth, 2010, p. 17)

Cette idée de *togethering* s'approche aussi du travail que nous avons fait dans Maheux (2010), où l'accent est mis sur l'action de « connaître-ensemble » (au moyen du gérondif *knowing-with*) en tant que relation à l'autre et relation avec l'autre. On peut alors s'intéresser à l'activité mathématique comme manière d'être dans le monde, noter des différences entre manières d'être ensemble mathématiquement, et pousser la réflexion éthique afin d'apprécier comment élèves et enseignants s'y rencontrent (Maheux et Thom, 2009).

Sans en avoir nécessairement fait un thème principal, tous ces travaux vont dans le sens d'une orientation vers le *faire mathématique*, évitant de parler en termes de connaissances des élèves ou de savoirs de référence. Qui plus est, on y voit apparaître l'importance, significative du point de vue éthique, d'abandonner le langage du savoir et de la connaissance, le remplaçant par de nouvelles manières de parler (e.g. *togethering*, *knowing-with*) qui maintiennent l'attention sur ce que font élèves et enseignants. Cette préoccupation bien connue des philosophes (on pense en particulier à Heidegger, Rorty) fait dire qu'il n'est peut-être pas judicieux, comme on l'a fait souvent, de « redéfinir » le savoir ou la connaissance (par exemple en terme d'action), pour ensuite utiliser ces termes plus ou moins comme nous le faisons avant. La plus grande prudence ne nous met pas à l'abri du langage, dont les jeux nous prennent au piège le plus souvent à notre insu. Il est fort injuste de dire que quiconque s'intéresse à l'activité mathématique en termes de savoir et de connaissances cherche à réduire ou à s'appropriier l'autre, mais choisir de parler du *faire mathématique* sans évoquer les idées de savoirs et de connaissance contribue à adopter un langage qui soit au plus proche du monde que nous cherchons à évoquer :

For any discourse, I may have – say, in science, philosophy, epistemology, therapy, etc. – [my rule of ethics is] to master the use of my language so that

ethics is implicit. [...] In its function, my language reaches out for the other: this is the root of conscience. And this is where Ethics invisibly manifests itself through dialogue (von Foerster, 1995).

Toutefois, un tel changement de paradigme (et de langage) est-il possible pour la didactique des mathématiques?⁴ Peut-on encore développer notre discipline sans faire référence aux savoirs/connaissances? Dans la prochaine section, nous examinons l'ancrage théorique d'une telle possibilité, ce qui nous mène ensuite à en donner une illustration pratique. Ces entrées, théoriques et pratiques, permettent de voir le potentiel de ce positionnement pour la recherche, et quelques avancées possibles pour la didactique des mathématiques.

2. L'ancrage théorique d'une entrée par le *faire mathématique*

Dans quelle mesure est-il possible, sur un plan théorique, de concevoir l'activité mathématique (des élèves, par exemple) sans y voir la manifestation de connaissances possédées *a priori* (par ces mêmes élèves) cherchant à s'approcher de savoirs prédéfinis? Peut-on vraiment considérer l'activité mathématique des élèves comme quelque chose d'émergeant, de produit *sui generis hic and nunc* (i.e. de par sa nature même ici et maintenant)? Pour discuter de cette possibilité, nous offrons à titre illustratif les perspectives développées à l'intérieur de deux de nos ancrages théoriques et épistémologiques, soit à l'aide de concepts tirés de travaux en énonciation et autour de l'approche socioculturelle. Précisons qu'il ne s'agit pas ici d'une proposition visant à rapprocher ou à distinguer ces deux courants théoriques (nous avons déjà mené une réflexion sur le sujet dans Maheux, 2010), mais plus modestement d'aller puiser dans ces travaux des éléments permettant de développer une approche en termes de *faire mathématique*, en même temps que d'y reconnaître l'origine de nos réflexions. Qui plus est, il s'agit de deux traditions dans lesquelles on s'est fait un devoir explicite de repenser ce que « connaître » signifie, y compris dans leurs développements autour de l'éducation mathématique. Cela dit, un travail similaire peut *certainement* être réalisé en prenant appui sur les écrits inspirés de la théorie des situations didactique ou de la théorie anthropologique du didactique, par exemple, ou du côté des *realistic mathematics education*. Comme première instance de cette proposition audacieuse d'un abandon des idées de savoir et de connaissance, une telle approche nous semble à la fois plus modeste et moins provocatrice : ouverte en vérité à ce que le lecteur intéressé voudra bien y contribuer.

⁴ Sfard (e.g. 2005), dont nous avons parlé plus haut, montre le lien entre une posture épistémologique et le langage qui lui est associé (par exemple, concernant la communication en classe de mathématiques), ainsi que les défis que pose l'adoption de l'un et/ou l'autre.

Dans la mesure où cette proposition d'un abandon du savoir et de la connaissance trouve preneurs dans notre communauté, il est alors envisageable de nous engager plus formellement dans une formulation de cette approche en ses propres termes. Cela dit, et en lien avec ce que nous avons noté à propos du langage, il est aussi important de souligner que les travaux vers lesquels nous nous tournons (choisis parce que ce sont ceux avec lesquels nous, auteurs, travaillons le plus régulièrement) font fréquemment appel au vocabulaire du savoir et de la connaissance, qu'ils souhaitent redéfinir. La proposition que nous faisons ici consiste à nous intéresser à certaines des idées (dépouillées de ce langage) qui sont développées dans ces travaux afin d'illustrer ce qu'ils rendent possible : soit l'ancrage théorique d'une entrée par le *faire mathématique*.

2.1 Le *faire mathématique* comme émergence d'une action jugée adéquate

Les travaux de Maturana et Varela (Maturana, 1988; Maturana et Varela, 1992, 1994; Varela, 1999; Varela, Thompson et Rosch, 1991), souvent évoqués sous le vocable *énaction*, offrent un excellent point de départ pour une entrée par le « faire mathématique ». L'énaction adopte un point de vue biologique, en regardant l'organisme comme interagissant dans son environnement. La perspective biologique a souvent été utilisée en tant que métaphore pour penser la connaissance et l'apprentissage (e.g. Piaget, Glasersfeld, Siegler, Morss, Dewey, Davis), par exemple avec l'idée de mécanismes d'adaptation, d'évolution, etc. Toutefois, pour Maturana et Varela, ce qu'on nomme généralement « connaissance » est un phénomène biologique. L'élève est ainsi regardé comme un organisme qui évolue avec son environnement de façon adaptée : ses stratégies ou solutions mathématiques ne sont pas nécessairement optimales, mais sont fonctionnelles (ce que Reid, 1996, et Zack et Reid, 2003, 2004, appellent « good-enough ») par rapport au contexte mathématique dans lequel il évolue. Plutôt que de connaissance, on parle alors d'action adéquate (ou adaptée) qui permet de maintenir la relation (fonctionnelle) entre un organisme et son environnement, lesquels sont liés, couplés, s'influençant et évoluant l'un avec l'autre dans cette relation⁵. Ainsi, que ce soit une araignée tissant sa toile, une plante orientant ses tiges vers le soleil ou un élève répondant à une question mathématique, tous réalisent un acte qui leur permet de continuer à évoluer avec leur environnement (lui-même en évolution). Parlant de l'éducation mathématique, Kieren, Calvert,

⁵ En effet, l'environnement n'est pas vu comme simple sélecteur ou causant les réactions chez l'organisme: on parle plutôt d'un « déclencheur » de changements chez l'organisme – qui agit en retour comme déclencheur de changement pour l'environnement. À ce sujet la définition de la didactique des mathématiques proposée par René de Cotret (2000, p. 21), influencée par les travaux de Maturana et Varela, nous paraît fort intéressante: « La didactique des mathématiques étudie les phénomènes d'enseignement et les phénomènes d'apprentissage “déclenché” des mathématiques ».

Reid et Simmt (1995) affirment : « Knowledge is not in the book or in the library; Knowledge is not in our heads; Knowledge is in the inter-action » (p. 1)⁶.

Cette activité mathématique n'est pas considérée comme existant *a priori* (ni *a posteriori*) du moment de son apparition : elle est le produit en temps réel de l'interaction entre l'organisme et son environnement, elle émerge de cette rencontre. Ainsi, on ne parle plus des connaissances en termes représentationalistes (i.e. quelque chose résidant dans une quelconque structure cognitive et se révélant dans l'activité) ni de savoirs objectifs (i.e. quelque chose existant en dehors de l'expérience) (Varela et al, 1991). Il n'y a pas de connaissance comme chose qu'on possède, et dont on se sert pour acquérir d'autres connaissances. Ce qu'on appelle la connaissance est *action*, elle est émergente et momentanée :

In our usual view of knowledge there must be a content to it, something that knowledge somehow embraces and reveals. What I am saying, however, is something completely different. I am saying that knowledge is never about something. I am saying that knowledge is adequate action in a domain of existence [...] (Maturana, dans Simon, 1985, p. 37)

Parler d'action adéquate, d'une chose qu'on réalise, est bien de l'ordre du *faire mathématique*, point de vue à partir duquel c'est l'action mathématique (e.g. la résolution d'équation algébrique) en contexte scolaire qui devient l'objet d'étude :

Thus, if someone claims to know algebra – that is, to be an algebraist – we demand of him or her to perform in the domain of what we consider algebra to be, and if according to us she or he performs adequately in that domain, we accept the claim. (Maturana, 1988, pp. 4-5)

Cette citation met de l'avant un autre point important de la perspective de Maturana, soit l'observateur : « Knowledge is adequate action in a domain specified by a questioner » (Maturana, dans Simon, 1985, p. 37). On attache ainsi l'aspect adéquat de l'action non pas à quelque référentiel objectif, mais au regard d'un observateur qui *juge* celle-ci sur la base de ses propres critères. Il reste alors tout à fait envisageable de proposer des tâches mathématiques aux élèves, ou plus largement de les faire inter-agir avec un environnement mathématique, mais en étant bien conscient du fait que la nature « mathématique » de ces tâches ou de cet environnement n'est jamais donnée (Davis et al., 1996 ; René de Cotret, 1999), et dépend en fait de l'observateur (e.g. l'enseignant, tel ou tel élève, un chercheur). De même l'action n'est pas prise en soi, mais abordée comme acte de distinction, de propos, de lecture qui détermine ainsi l'objet de l'observation. Cette entrée par

⁶ Voici un bel exemple de la persistance du langage du savoir et de la connaissance toujours présent dans ces approches. Passage obligé, sans doute, pour faire entendre ces idées nouvelles le temps qu'elles se développent et imposent un langage qui leur soit propre.

l'énaction est donc particulièrement importante pour nous, chercheurs, qui tentons de parler (d'apprécier?) du *faire mathématique* de l'élève : les actions mathématiques des élèves sont en fait des observations, des *conceptualisations* faites par nous, chercheurs-observateurs (voir Maheux, 2010).

Différents chercheurs du domaine ont travaillé sur ces idées. Centrés sur l'émergence, l'adéquation et l'inséparabilité des apprenants et de leur environnement, la « connaissance » mathématique est alors définie comme un processus dynamique qui *émerge dans l'action et l'interaction* avec l'environnement (Kieren et Simmt, 2009; Pirie et Kieren, 1994), plutôt que d'être vue en termes de représentations mentales construites par des individus, de façon plus ou moins isolée, dans leur tête :

[Cognition] is something that is normally seen to be done with others. In [the] classroom, children's mathematics occurred along with that of their peers. [...] An enactivist view suggests that cognising, thinking, or doing mathematics with others in some way is the norm. Of course, human beings think mathematics for themselves but this thinking is done, at least in anticipation of, communicating with others and acting in a community of others interested in mathematics (Kieren, 1995, p. 7)

L'attention est alors portée sur les manières dont les élèves s'intéressent (mathématiquement) à des objets ou phénomènes (mathématiques ou autres), aux moyens et stratégies mis en œuvre par les élèves, dont on a soin de montrer qu'ils sont le fait de leur interaction avec la tâche/le contexte. L'apprenant qui réalise une tâche mathématique fait émerger une stratégie en lien avec celle-ci, stratégie située dans la tâche et son contexte (Thom et al., 2009). Ce n'est plus de la « connaissance de » quelque chose qu'il s'agit, mais bien de l'activité mathématique elle-même. C'est l'*action* mathématique, le *faire mathématique*, et non quelque discours formulé sur l'action qui nous intéresse alors :

In a typical mathematics class, the temptation [...] have been to focus on the final products of the students' efforts – i.e. their symbolic representations and their logical arguments – in order to assess the appropriateness of their actions and to judge the worth of the activity. Enactivism prompts us to attend as closely to the preceding actions – the unformulated exploration, the undirected movement, the unstructured interaction, wherein the body is wholly engaged in mathematical play – as to the formal mathematical ideas that might emerge from those actions. (Davis, Sumara et Kieren, 1996, p. 156)

Cette activité mathématique est liée à l'apprenant et à la tâche elle-même (Davis, 1995), mais ne se réduit ni à l'un, ni à l'autre. Par exemple, René de Cotret (1999) explique comment on ne peut jamais tenir pour acquis que des propriétés instructionnelles sont présentes de façon inhérente dans des tâches ou situations

offertes aux élèves, et que celles-ci vont commander l'activité de l'élève. L'élève joue un rôle fondamental dans la façon dont la tâche est travaillée, ce qui fait dire à Davis et al. (1996) que le curriculum mathématique co-émerge de la rencontre des élèves et de la tâche mathématique. C'est entre autres une orientation développée par Lozano (2009) dans son étude sur l'apprentissage de l'algèbre, alors qu'elle considère *l'évolution des actions efficaces des élèves* pour résoudre les tâches, pour continuer à fonctionner dans l'environnement mathématique proposé par la classe.

Permettant de concevoir l'activité mathématique sans y voir la manifestation de connaissances possédées par les élèves et mises en relation avec des savoirs prédéfinis, les travaux autour de l'énaction attirent notre attention sur ce qui *se réalise* dans/avec une situation particulière pour y apprécier les mathématiques en jeu, déployées par les élèves. L'énaction propose donc de nombreuses idées permettant de concevoir l'ancrage théorique d'une entrée par le *faire mathématique* même si, on l'aura remarqué, les termes « savoir » et « connaissance » sont souvent présent, bien que revisités, dans ces travaux. En ce sens, nous pouvons nous arrêter ici. Toutefois, présenter une autre approche, la tradition de recherche dite *socioculturelle*⁷, pour illustrer la possibilité d'un ancrage théorique permet trois choses. D'une part nous évoquons un peu plus de la richesse que possède une entrée par le *faire mathématique*. Ensuite, nous nous assurons d'éviter que cette possibilité de s'intéresser au *faire mathématique* ne soit perçue comme appartenant à une seule tradition théorique. Enfin, nous initions un mouvement auquel d'autres voudront peut-être participer, faisant l'exercice d'aller puiser aux travaux en didactique des mathématiques dont ils s'inspirent pour poursuivre la réflexion proposée dans cet essai. Il ne s'agit donc pas de suggérer quelques liens de compatibilité ou de complémentarité entre ces deux approches, ou de les présenter comme les seuls courants théoriques permettant de dégager l'idée d'une centration sur le *faire mathématique*. Ce sont, plus modestement, des théorisations avec lesquelles nous, auteurs, avons l'habitude de travailler et dans lesquelles, pour cette raison, nos réflexions autour du *faire mathématique* ont leur origine.

2.2 Le faire mathématique comme action dans une activité socioculturellement organisée

L'approche socioculturelle s'est développée à partir de certaines idées de Vygotsky (e.g. 1978, 1986), qui ont conduit à formuler la question de la « connaissance »

⁷ Nous avons évoqué ailleurs les ressemblances et différences entre les propositions de l'énaction et de l'approche socio-culturelle (Maheux, 2010), soulignant par exemple le travail de Leontyev (1981) sur l'origine biologique de l'activité humaine (et la rupture qu'il propose), de même que les efforts répétés mais périphériques de prise en compte des questions socio-politiques du côté de l'énaction (e.g. Maturana et Verden-Zöllner, 2008). Mais là n'est pas notre propos dans ce texte.

individuelle et du « savoir » collectif en termes de *comportements* et d'*activités* (e.g. Roth et Lee, 2007) : quelque chose qu'il est possible d'interpréter comme étant de l'ordre du *faire mathématique*. Beaucoup reprise dans la recherche autour de l'éducation mathématique (e.g. Radford et Roth, 2011), cette entrée praxéologique (i.e. sur l'action humaine) définit par exemple les « concepts » (mathématiques ou autres) comme des *fonctions* (à prendre au sens premier d'activité, et non de propriété ou de capacité), d'où le célèbre :

Dans le développement culturel de l'enfant, toute fonction apparaît deux fois : dans un premier temps, au niveau social, et dans un deuxième temps, au niveau individuel [...]. Toutes les fonctions supérieures trouvent leur origine dans les relations entre les êtres humains. (Vygotsky, 1978, p. 57)

Avec cette citation, on constate également que les questions qui se posent du point de vue socioculturel portent sur *l'origine* des activités ou comportements que l'on observe. Or, l'origine ne doit pas être prise uniquement au sens ontogénique, mais peut concerner aussi l'origine immédiate de l'action, son développement ici et maintenant. En effet, ces fonctions (cognitives) sont en constante évolution, fruit de l'interaction entre l'individu (ou une collectivité) et son environnement (voir les travaux de Vygotsky et Luria, 1993, par exemple). Un concept clé dans cette perspective est celui d'*outil* (dont le langage, mais aussi, en mathématiques, le symbolisme, les représentations graphiques ou la calculatrice par exemple, c.f. Radford, 2011a). Les outils sont des objets historiquement et socialement constitués, et dont les propriétés orientent l'action « psychologique » :

By their nature [psychological tools] are social, not organic or individual. They are directed toward the mastery or control of behavioral processes [...] Thus, in the instrumental act, a new intermediate link – the psychological tool [...] is inserted between the object and the psychological operation toward which it is directed. Any behavioral act then becomes an intellectual operation (Vygotsky, 1981, pp. 137-139).

On y voit donc l'action (par exemple, mathématique) distribuée à travers l'ensemble de l'environnement matériel, et comme fruit d'une activité sociétale historiquement organisée plutôt que comme le fait d'individus isolés dans le temps ou l'espace. Distinguant « actions » et « activité », Leontiev (1981) explique qu'il est nécessaire de considérer l'ensemble de l'activité afin de pouvoir donner un sens aux actions posées par quelqu'un, sans quoi on ne peut apprécier le sens. Il illustre ceci en parlant de la chasse, l'activité, qui permet de faire sens des actions du rabatteur, par exemple, dont le travail consiste à effrayer les animaux qui vont fuir devant lui. Si on oublie « la chasse » et son motif, les actions du rabatteur sont réduites à des (inter)actions avec son environnement immédiat qui semblent ne mener nulle part; alors que c'est clairement autre chose qui les « stimule » :

What the processes of his activity were directed to did not, consequently, coincide with what stimulated them, i.e., did not coincide with a motive of his activity; the two are divided from one another in this instance. Processes, the object and motive of which do not coincide with one another, we shall call "actions". We can say, for example, that the beater's activity is the hunt, and the frightening of the game his action. (p. 210)

Reprise dans le monde de l'éducation par Galperin, par exemple, qui enrichit plusieurs de ces propositions pour parler de « l'activité de penser » tout en considérant le développement cognitif du point de vue de son origine dans l'action concrète et observable, cette entrée permet de parler du caractère situé de l'action (voir e.g. Rambusch, 2006). L'éducation mathématique est alors une activité que l'on analyse du point de vue historique et culturel, mais aussi locale et contextuelle, dans les actions concrètes des élèves et des enseignants. En retour, ce que font les élèves et les enseignants est considéré en fonction de cette activité (Chaiklin & Lave, 1993)⁸. Ainsi, ce qu'on associe généralement à des jeux de savoirs et de connaissances est plutôt vu ici comme le produit de la participation dans la réalisation de tâches socialement motivées : par exemple, quand des élèves résolvent des équations algébriques à la demande de leur enseignant, ils se trouvent sujets à une activité dans laquelle ils mettent en œuvre des objets, des règles, des gestes (socialement, culturellement et historiquement constituées) qui en retour définissent la tâche qui leur est proposée. C'est alors la *pratique* mathématique (e.g. de l'algèbre, de la géométrie) en contexte scolaire et l'entrée des élèves dans ses manières de faire qui deviennent objet d'étude (e.g. Roth, 2011), et non plus le savoir ou les connaissances au sens où on l'entend habituellement.

Dans cette tradition de recherche, cette posture est rendue possible parce qu'on considère qu'il n'y a pas de savoir ou de connaissance au sens ontologique : savoirs et connaissances sont plutôt vus comme des propriétés de l'action en commun. Volosinov (1973) explique par exemple que tout ce qu'on appelle connaissance, intention, perception, etc., n'a d'existence que dans nos « pratiques discursives incarnées », c'est-à-dire que c'est *dans l'action* même d'en parler, d'en faire usage, que ceux-ci prennent corps (il en est de même pour les « objets » auxquels on suppose une réalité extérieure, voire objective : c'est toujours et uniquement dans l'action que ceux-ci sont constitués comme « objets »). On s'intéresse alors aux actions concrètes en tant qu'elles produisent (et reproduisent) des relations entre sujets et objets d'une activité au moyen d'entité (on parle de médiation par des outils comme l'écriture algébrique, les représentations graphiques, etc.) constitutives de l'activité en question (celles faisant que l'on peut reconnaître que

⁸ Et, bien entendu, les chercheurs eux-mêmes.

nous sommes en situation de résolution d'équation algébrique en contexte scolaire, par exemple) (Bakhtin, 1986; Engeström, 2001)⁹.

On voit que l'activité mathématique est alors examinée en termes de *réalisation* en commun d'*événements* (poser un problème mathématique, proposer une solution) au moyen de manière de faire, de raisonner, voire de sentir (et faisant appel à des instruments, dont le langage). Il n'est donc pas question « d'acquérir » des connaissances ou de « maîtriser » des savoirs, mais bien de *contribuer* (à) une action mathématique dans le cadre d'une activité socialement organisée telle que « l'éducation mathématique ». L'enseignant, dont le rôle n'est plus de faire apprendre des savoirs mathématiques mais d'initier les élèves à une façon de penser, occupe toujours une place primordiale dans le développement mathématique de l'élève. On pense ainsi à son rôle de médiateur entre le *faire* des élèves et une tradition mathématique, quand on examine par exemple comment les élèves contribuent à des manières géométriques d'aborder le monde, où le sensuel et le conceptuel se rejoignent dans le travail de la classe (e.g. Radford et Roth, 2011). Toucher des objets en attirant l'attention sur certains aspects, les nommer, les discuter, faire de ces distinctions des manières d'aborder d'autres objets, proposer des relations entre objets ou propriétés, c'est *cela* « connaître géométriquement » : de telles actions ne sont pas le résultat de connaissances, ce sont *des événements* qui ont lieu dans le cadre d'une activité mathématique (scolaire, par exemple). On croise aussi ces idées chez Sfard (2008), par exemple, qui propose une entrée sur l'activité mathématique en termes de communication et donc de forme et de genre (en référence à Bakhtin), sans faire référence à des « entités ». Elle discute ainsi le cas du nombre en termes de participation à une pratique discursive (une certaine façon de parler), et non la présence de « quelque chose » dans l'esprit l'élève. Cette entrée résonne avec celle proposée entre autres par Radford (2011b), qui, sous l'angle sémiotique, met l'accent sur le « processus d'élaboration active de signifiés », quelque chose que les élèves *font* et qui relève d'une « attitude » à l'égard de formes culturelles de réflexion. C'est l'élaboration elle-même (l'action de préparer, de produire) qui retient l'attention, avec une préoccupation à l'égard de ce qui permet la mise en route de cette attitude mathématique (van Oers, 2001), de ces différentes activités par lesquelles un élève *devient* mathématique (« *become mathematical* », Lerman, 2001).

Une telle approche ne repose pas sur l'hypothèse du savoir et de la connaissance, qui sont vus par Leontyev comme des « effet du langage ». Ces mots, explique-t-il, donnent *l'impression* que le problème qui doit nous occuper est celui de la

⁹ On pourrait également discuter du niveau des « opérations » définie par Leontiev comme des actions non conscientes (e.g. mouvements de la bouche pour parler), pour rendre compte de l'utilisation « spontanée » de procédures par des élèves, et ainsi de suite.

transmission et du développement de savoirs/connaissances, d'individus en individus, alors qu'en fait il n'en n'est rien :

This problem inevitably confronts any analysis that recognizes the limitations of the idea that meanings in the individual consciousness are only more or less complete projections of the "supra-individual" meanings existing in a given society. The problem is by no means removed by references to the fact that meanings are refracted by the specific features of the individual, his previous experience, the unique nature of his personal principles, temperament, and so on (Leontyev, 1978, p. 18).

L'approche socioculturelle est pour Leontyev la façon de se sortir de cette impasse. En changeant de question (et de langage), s'intéresser à l'action elle-même permet de donner pleine attention à ce que font élèves et enseignants, à comment ils le font, à ce qui permet à cette activité de prendre place et à ce que, en retour, cette activité permet. L'action à laquelle on s'intéresse est alors inséparable de l'activité, et donc de la présence et de l'action d'autres personnes. Ces actions sont précisément ce en quoi et par quoi l'activité se réalise et fait sens, pour soi-même et pour les autres (voir Maheux et Roth, 2011). On parle alors non seulement du « faire », mais aussi et surtout du « faire-ensemble »...

Rappelons en terminant cette section qu'il s'agit là d'une lecture particulière des travaux cités, qui ne cherche pas à confirmer la validité de notre proposition au profit du *faire mathématique*, ni à confronter cette proposition aux éléments ou formulations qui, dans ces travaux, se révéleraient caduques ou contradictoires. La pertinence d'une telle démarche, tout à fait envisageable, dépendra pour nous de l'intérêt porté à la présente proposition, dont cette section avait pour but d'illustrer la possibilité théorique.

2.3 Vers la formulation théorique d'une entrée par le *faire mathématique*

Nous voyons donc, à la lumière de la lecture particulière que nous proposons des travaux autour de l'énaction et de l'approche socioculturelle, la présence de conceptualisation nous permettant de mettre de côté savoirs et connaissances au profit du *faire mathématique*. On reste néanmoins un peu insatisfait dans la mesure où ce que recouvre cette idée de « faire mathématique » est peu précisé. Que peut-on proposer au delà du sens commun du terme « faire », qui évoque des actions telles que « produire, être l'auteur de, réaliser, fabriquer, élaborer, donner forme à, constituer, effectuer, accomplir, être la cause de, déterminer une manière d'être, donner une qualité, un caractère, un état à, changer, transformer », mais aussi, de façon plus abstraite, « agir, se comporter, exercer » ?

Du point de vue de l'énaction, *faire* se définit en terme de transformations, du point de vue de l'observateur, de l'organisme agissant lui-même ou de son

environnement. Les gestes d'un élève relevé par l'enseignant ou le chercheur qui y voit l'évocation d'une courbe parabolique ou d'une droite font ainsi partie de ce que fait cet élève du point de vue de l'observateur qui y reconnaît une transformation (changement de position des mains, des bras) associée au domaine mathématique. Le *faire* se situe donc au niveau de ce qui est observable pour nous : ce que « pense » cet élève n'en faisant donc pas partie... sauf peut-être pour cet élève lui-même. À noter : être observateur consiste à se transformer soi-même en réaction à ce qui est perçu comme une transformation de son environnement (dans lequel se trouve la chose observée) tout en associant cette transformation à un domaine de signification. Une main qui se dresse peut ainsi signifier « un étirement », « indiquer qu'on souhaite prendre la parole » ou encore « monter, augmenter, accélérer » et ainsi de suite.¹⁰

Dans les théories d'inspiration vygotskiennes, le *faire* est pris au sens d'une psychologie des observables permettant aussi d'inclure ce que le sujet lui-même observe, tel que le langage interne. Par contre, les efforts dans ce courant théorique portent surtout sur les liens que l'on peut établir entre un acte donné (un geste, une parole, ou des combinaisons d'actes constituant des actions telles que résoudre un problème ou donner une leçon de géométrie) et les constituantes de la situation où il a lieu afin d'en apprécier la valeur socio-historique. Le geste d'un élève semblant évoquer une parabole ou une droite est discuté du point de vue de la manière dont il est exploité par les personnes en présence, et de son origine possible dans une tradition (locale comme la classe, plus large comme les mathématiques) qu'il contribue à perpétuer. Là encore, prenons note que ce que « pense » l'élève n'est pertinent que pour l'élève lui-même, avec cette possibilité de nuancer théoriquement, sur le plan développemental, entre opérations « présentes à la conscience » et celles qui sont pour ainsi dire automatisées.

Nous proposons de retenir de ceci une définition du « faire mathématique » qui s'appuie sur des transformations observables pouvant être mises en relation avec le domaine de l'activité mathématique. Ces transformations prendront essentiellement la forme de « gestes » (mouvement du corps ou de l'une de ses parties) incluant la parole, l'écriture, et l'ensemble des mouvements du corps et des changements subjectivement produits par ceux-ci (on pense e.g. à la canne de l'aveugle, ou au curseur sur l'écran)¹¹. Élaboré à partir du sens commun du terme (« faire quelque

¹⁰ Il est intéressant de noter l'anecdote souvent rapportée par Maturana, selon laquelle son travail de biologiste autour des idées de l'énaction aurait débuté le jour où, penché sur son microscope, il s'est demandé : « Qu'est-ce que je fais quand j'observe un organisme vivant ? Comment puis-je reconnaître qu'il vit ? ».

¹¹ À la racine le verbe latin *facere* signifie « réaliser quelque chose; créer, commettre », alors que le terme « action » vient quant à lui du latin *agere* (qu'on retrouve dans acte,

chose »), on peut donc y inclure, selon les moyens d'observations disponibles, des mouvements tels la prosodie ou des micro-expressions.

Fondamentale à cette définition du *faire mathématique* doit rester présente l'idée que ces transformations ne sont pas dans un rapport de représentation par rapport aux individus (qui disposeraient de « connaissances ») ou à la discipline (les « savoirs » mathématiques). Pris pour et en lui-même, le faire mathématique ainsi défini n'est cependant pas sans lien avec les individus et le domaine qui nous intéresse. Mais ce lien consiste en un *pouvoir de faire sens* dans chacune de ces directions. Cette nuance est importante sans quoi une analyse en termes de *faire mathématique* se distinguerait peu des approches courantes, sinon que par un refus de se prononcer sur l'origine et la pertinence de ces actions. Et, alors, comment reconnaître ces transformations comme des « faires », et ces faires comme étant « mathématiques » ?

Le pouvoir de faire sens du point de vue d'un observateur (en présence ou distant, incluant l'individu producteur de ladite transformation) répond à la première question. Ainsi, c'est dans la mesure où une transformation apparaît comme un observable pouvant participer à l'élaboration de sens (que l'on peut définir formellement comme une coordination d'éléments) que celle-ci entre dans le domaine du faire. Et on prend soin de préciser l'observateur en question, c'est-à-dire la situation à laquelle il participe lorsque ce *faire* est observé (e.g. la classe, la recherche). Il n'y a donc pas de lien représentatif entre le *faire* et une hypothétique « connaissance » chez l'individu l'ayant produit, mais une possibilité d'articulation de ce *faire* à d'autres *fares* (produit par le même individu ou non).

De même, un *faire* est dit *mathématique* dans la mesure où, pour son observateur, il peut faire sens par rapport à d'autres *fares* rattachés par ce même observateur au domaine de l'activité mathématique. Ce domaine ne peut, cela paraît évident, se définir clairement et définitivement sinon que de façon trop générale pour être utile (e.g. comme « domaine faisant l'étude des nombres et de l'espace » ou encore plus généralement « des modèles (patterns) »). La présence même de nombreux débats (en rien nouveaux) autour de ce qui est mathématique ou non vient renforcer l'intérêt d'une telle formulation en termes de « possibilité » : tel *faire* peut faire sens dans un domaine mathématique tel que proposé par un observateur, être rejeté ou être autrement situé par un autre. De la sorte, il est clair qu'aucun lien de représentation par rapport à ce qui serait des « savoirs » mathématiques n'est possible, ni même souhaitable. C'est encore une fois la potentielle articulation à d'autres *fares* alors explicitement constitutifs du domaine (ou de tel domaine) de l'activité mathématique (pouvant être l'utilisation de concepts ou des manières de

agir), impliquant une sorte de mise en mouvement liée à des possibilités latentes (comme lorsqu'on parle de guider, de conduire, d'amener à).

faire, par exemple) qui est décisif. Il est aussi nécessaire pour nous de spécifier la situation dans laquelle ce caractère mathématique est posé : par un duo d'élèves résolvant un problème, lors d'une discussion plénière en classe, pour un chercheur les observant, etc.

Cette entrée par des transformations observables liées à un pouvoir de faire sens privilégie une manière d'appréhender l'activité mathématique (des élèves, par exemple) projective plutôt que normative, avec des conséquences au potentiel important pour la recherche et l'enseignement. C'est ainsi qu'on s'intéresse en premier lieu à la richesse en termes de possibilités pour le *faire mathématique* d'une situation donnée : une couleur particulière aux analyses *a priori* pratiquées dans notre discipline depuis de nombreuses années. De même, le travail ou la formation de l'enseignant est prise sous l'angle (du développement) d'une habileté à tirer partie des événements produits en classe en faveur de *fares mathématiques* eux-mêmes potentiellement féconds. Entre « médiateur » et « déclencheur », deux images que l'on rencontre dans les travaux en didactique enracinés dans les approches socioculturelles ou de l'énaction, faut-il penser à l'enseignant lui-même comme à un « faiseur de mathématique » ? L'accent est-il mis alors non sur le rôle régulateur d'un agent social, ni sur la fonction provocatrice d'un interlocuteur externe, mais sur une *présence* aux élèves dont l'enjeu est (simplement, mais pleinement) de faire et faire faire des mathématiques, une présence mathématiquement active, et où le domaine de l'activité mathématique s'offre (pour en revenir à Lévinas) comme lieu de rencontre avec l'autre ? Une attention particulière est alors prêtée aux actions qui donnent (ou non) le caractère *mathématique* aux *fares* qui surviennent, offrant un place de choix au travail « à propos des mathématiques » dans le monde de l'éducation mathématique, tant pour les élèves que pour les (futurs) enseignants.

Il ne s'agit bien entendu que de quelques directions un peu rapidement lancées, à ce stade de développement de notre proposition d'un abandon de l'idée de « savoir » et de « connaissance » au profit du *faire mathématique*. Nous revenons sur certaines d'entre elles dans la suite du texte, mais c'est dans la mesure où notre offre trouve preneurs que l'idée de préciser et nuancer ces orientations, et les liens les rapprochant des nombreux travaux réalisés jusqu'ici en didactique des mathématiques, ouvre à un travail de recherche important. Un travail d'analyse en termes de *fares mathématiques* des données collectées sous l'influence d'autres cadres peut aussi aider à clarifier la manière dont cette entrée se situe par rapport à d'autres approches et, du point de vue théorique, à nourrir le développement d'une présentation de cette approche en ses propres termes (au lieu, comme nous l'avons fait ici, d'aller en retracer l'inspiration dans des courants théoriques existants).

3. L'illustration pratique d'une entrée par le *faire mathématique*

Dans la section précédente, nous proposons quelques éléments théoriques et clarifications autour de la possibilité d'une entrée par le *faire mathématique*. Qu'en est-il maintenant de la possibilité plus « pratique » d'une mise de côté de l'idée de « connaissance » ou de « savoir » tel qu'on les conçoit habituellement ? Quels sens pouvons-nous lui donner pour le travail en didactique des mathématiques ? Il nous semble qu'il est encore trop tôt pour dégager des discussions précédentes un cadre d'analyse à proprement dit ou d'identifier de manière rigoureuse des concepts opératoires. Nous croyons qu'il est néanmoins possible d'illustrer ce à quoi peut ressembler un travail pratique basé sur le *faire mathématique*, et d'en dégager certaines idées utiles pour en apprécier la nature et le potentiel. Pour y arriver, nous présentons quelques données tirées d'une recherche sur le calcul mental en algèbre (on peut préférer parler « d'algèbre mentale »), autour de la résolution d'équations. En voici le contexte (pour plus de détails sur l'étude, voir Proulx, 2013a).

Dans le cadre d'un cours de formation initiale à l'enseignement des mathématiques au secondaire, l'activité suivante a été proposée à un groupe de 12 étudiants :

1. Une équation algébrique habituelle du secondaire (formes $Ax+B=C$, $Ax+B=Cx+D$, $Ax/B = C/D$, $Ax^2+Bx+C=0$, etc.) est écrite sur transparent.
2. Les étudiants disposent de quelques secondes pour « résoudre cette équation » mentalement (i.e. sans papier-crayon)
3. Les étudiants partagent leurs stratégies, chacune étant discutée avec la classe (animée par le formateur), et en proposent de nouvelles qui leur viennent en tête durant les discussions.
4. On reprend l'exercice avec une nouvelle équation.

Sans entrer dans les détails du projet de recherche (impliquant une extension du domaine habituel des mathématiques « mentales » au-delà du calcul arithmétique) pour lequel ces données ont été recueillies, notons que l'expérimentation auprès d'étudiants en formation des maîtres est intéressante sur le plan méthodologique. Nous sommes en présence d'étudiants ayant une assez longue expérience du travail algébrique, et qui fonctionnent donc dans ce domaine sans rencontrer trop de difficultés. Cette situation, analogue à plusieurs contextes de travail en calcul mental où les élèves peuvent généralement faire les calculs par écrit sans erreurs mais mettent en œuvre des stratégies nouvelles quand ils le font sans support matériel, est commode pour s'intéresser directement à ce que *font* les étudiants en algèbre, aux raisonnements et aux stratégies qu'ils évoquent. Nous sommes donc dans des conditions d'études qui diffèrent de celles privilégiées pour ceux qui s'intéressent aux difficultés du travail algébrique : ce sont sur ses *possibilités* que nous nous penchons ici.

Des notes de terrain ont été recueillies détaillant les propos des étudiants, principalement sur leurs façons de procéder pour résoudre les équations et l'argumentaire mis en avant pour expliquer ou justifier leurs approches et solutions. Mais comment aborder de telles données sans faire d'hypothèses sur l'existence de savoirs ou de connaissances ? En effet, de manière assez classique, on peut penser à analyser les données recueillies lors d'une telle expérimentation en se demandant à quelles connaissances ces étudiants font appel dans ce travail plutôt inhabituel de résolution mentale d'équations algébriques. On peut analyser en quoi ces connaissances se rapprochent ou non de ce qui est attendu lors d'une résolution standard, chercher à en dégager des principes permettant de conduire les étudiants vers les formes visées, ou encore tenter de comparer (par des moyens divers) ce que « savent » les étudiants de la résolution d'équation avant et après l'activité.

Une entrée par le *faire mathématique* commande toutefois quelque chose de différent. Parmi d'autres, une façon de s'intéresser à ces données est de se centrer sur ce que nous appelons ici les *premiers mouvements*, soit les façons d'entrer dans les résolutions proposées par les étudiants. Ces mouvements illustrent des manières de faire mathématiques dans un contexte de résolution mentale d'équations algébriques. En tant que possibilités d'action identifiées à partir du *faire mathématique* des étudiants, un tel travail d'analyse nous conduit à apprécier le potentiel de ce genre d'activité sans avoir à faire appel aux concepts de « savoir de référence » ou de « connaissance » tel que nous les entendons habituellement. Dans ce qui suit, nous utilisons cette idée de manière à revisiter ce que peut signifier « résoudre une équation algébrique ».

3.1 Que peut signifier résoudre une équation algébrique ?

De nombreuses recherches autour de l'introduction à l'algèbre suggèrent qu'un enjeu important consiste à dégager les relations mathématiques dans un problème (voir Clement, Lockhead et Monk, 1981). Par exemple, un énoncé tel que « Il y a 6 fois plus d'élèves que de professeurs » peut se traduire par une série d'équations telles que « $6n = N$ » ; « $1/6 = p/e$ » ; « $p/6e = 1$ » et ainsi de suite. Dans chaque cas, on fait une interprétation mathématique du problème donnant un sens particulier aux symboles utilisés et aux relations entre eux, interprétations appelant à un traitement mathématique différent. Ces différences peuvent aller jusqu'à poser (et traiter) de manières dites arithmétiques des problèmes que l'on croyait algébriques (voir Bednarz et Janvier, 1998). Ces possibilités de lectures multiples d'un même énoncé, largement documentées à partir des productions des élèves, nous ont conduit à repenser les liens arithmétique-algèbre et ce en quoi constitue un traitement algébrique (e.g. Bednarz et Lee, 2002). Qui plus est, cette variété d'interprétations s'avère intéressante à travailler avec les élèves : elle est donc inspirante pour la conception de situations d'enseignement-apprentissage permettant l'émergence d'approches multiples, plus ou moins adaptées, d'un même

problème. L'efficacité du traitement algébrique de certaines situations se présente alors comme une expérience clé que les élèves peuvent vivre à partir de leur propre activité mathématique. Des observations similaires ne peuvent-elles pas être faites en observant ce que font des étudiants en situation de résolution d'équations algébriques?

Un grand nombre de recherches sur l'apprentissage de l'algèbre soulignent l'importance des liens entre les « manipulations » qui permettent de résoudre une équation et le « sens » donné à ces manipulations (e.g. Saboya, 2009; Schmidt, 1994; Brousseau, 1986). Or, la question du sens des manipulations est souvent limitée à ce qu'on appelle le contrôle sémantique et le contrôle syntaxique (e.g. Kouki, 2007; Perkins et Simmons, 1988), l'enjeu étant que les élèves fassent des manipulations algébriques correctes tout en pouvant justifier (l'utilisation de) celles-ci. Une analyse basée sur le *faire mathématique* en situation de résolution d'équation invite ici à nous intéresser aux possibilités de faire sens qui se dégagent du travail des étudiants. On peut donc se pencher sur les *actions mathématiques*, par exemple celles qu'ils posent en guise d'entrée dans la résolution. Dans les paragraphes qui suivent, nous présentons une telle analyse de ce que nous avons appelé les *premiers mouvements* dans la résolution d'une équation algébrique. Évoquant différentes lectures d'une même équation, on voit que ces façons d'approcher la tâche invitent à une conceptualisation enrichie du sens donné aux manipulations sur une équation à travers le prisme plus large de ce que peut signifier « résoudre une équation algébrique ».

3.2 Premiers mouvements dans la résolution d'équation

Nous nous intéressons ici aux propositions des étudiants, à qui a été donnée la tâche de résoudre sans papier-crayon une série d'équations algébriques. En guise d'illustration d'une analyse enracinée dans le *faire mathématique*, nous prenons l'exemple des données recueillies autour des deux équations suivantes :

$$\frac{6}{x} = \frac{3}{5} \text{ et } \frac{1}{3x} = \frac{2}{5}$$

Les étudiants confrontés à ces tâches ont abordé leur résolution au moyen d'actions mathématiques variées, témoignant de lectures différentes de ces équations. Ainsi, on peut d'abord parler de trois premiers mouvements, chacun donnant un sens différent aux manipulations réalisées :

Faire des opérations

- Une première approche consiste à entrer sur l'équation en la transformant au moyen d'une opération. Par exemple, une idée a été de « multiplier par x » les deux termes de l'égalité de sorte que l'inconnue ne soit plus au dénominateur. Pour la première équation, on se retrouve avec « $6 = (3/5)x$ », qui sera à

nouveau transformé par des opérations jusqu'à déterminer la valeur de l'inconnue. Par exemple, un étudiant propose la multiplication à gauche et à droite du signe d'égalité par $5/3$ conduisant à « $6 \times 5/3 = x$ » d'où on tire « $30/3 = x$ », simplifié en « $10 = x$ ».

Utiliser des lois

- Une seconde approche consiste à traiter l'équation en faisant appel à une loi. Par exemple, dans ce cas-ci, l'idée de proportion est suggérée pour faire appel à la règle « le produit des extrêmes est égal au produit des moyens ». Suivant cette stratégie, des étudiants ont ainsi transformé la seconde équation, obtenant « $1 \times 5 = 2 \times 3x$ », soit « $5 = 6x$ ». Dans ce cas, l'équation obtenue donne rapidement la valeur de x .

Raisonner l'inconnue

- Un mouvement différent des précédents consiste à aborder ces équations en raisonnant sur l'inconnue. Ainsi, dans le premier cas, il a été proposé de prendre l'équation comme une égalité entre deux rapports, et en déduire quelque chose comme « 6 est à x comme 3 est à 5, or 6 est le double de 3 ce qui fait de x le double de 5, donc 10 ». Il ne s'agit pas ici d'utiliser des opérations, ni quelque propriété toute faite, mais bien d'examiner des relations entre les nombres présents pour déduire la valeur de l'inconnue.

Les deux premières approches permettent de transformer une équation vers une forme où la valeur de l'inconnue peut être dégagée. Si le premier de ces mouvements est relativement proche du travail sur les opérations avec lequel nous sommes familiers au début du travail en algèbre, le second évoque une forme d'activité mathématique qui rappelle plutôt les substitutions qu'on voit en trigonométrie, par exemple, où on fait régulièrement appel à des « identités » (du genre $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$) afin d'obtenir une équation plus manipulable. Ces deux cas montrent bien la possibilité de lire une même équation algébrique de manières différentes, et on voit comment chacune des entrées sur l'équation correspond à un travail différent. En fait, cela suggère qu'une même manipulation, par exemple passer d'une équation du type $a/b = c/d$ à la forme $ad = bc$, peut en fait avoir *plus d'un sens mathématique*.

Le travail mathématique dans le troisième cas est assez différent, en particulier parce qu'on ne cherche pas à « isoler le x » (une particularité frappante quand on pense à ce qui se fait généralement en contexte papier-crayon). Au contraire même, car résoudre passe ici par la mise en relation de l'inconnue avec (tous !) les autres nombres de l'équation. C'est ici le raisonnement qui prime, l'enjeu n'étant pas d'appliquer correctement un algorithme (mouvement par opérations), de faire appel à un fait mathématique pertinent (mouvement par lois), mais plutôt de mettre en œuvre un travail déductif similaire à celui rencontré autour de la preuve

(mouvement par raisonnement¹²). On fait ici appel à la logique, raisonnant par inférence, c'est-à-dire suivant l'idée que « certaines choses étant posées, quelque autre chose en résulte nécessairement », comme l'écrivait Aristote. C'est donc une nouvelle dimension de la résolution d'équation qui apparaît dans ce type de mouvement, en même temps qu'une possibilité de lecture différente du même énoncé. Dans les trois cas, notons bien par ailleurs que le « travail algébrique » se présente à travers ses liens avec d'autres formes de l'activité mathématique. La particularité de ses objets (ce sur quoi on opère, on raisonne, etc.) donne (en partie) à ces *faire mathématique* ce caractère « algébrique », et inversement, c'est ce type travail mathématique avec les équations proposées qui (en partie) confirme que l'expression donnée aux étudiants est abordée algébriquement.

Vue sous cet angle, la question de l'articulation du contrôle symbolique et du contrôle sémantique ou celle des relations arithmétique-algèbre gagne donc en profondeur. D'abord, du point de vue de l'enseignement, se dessine un intérêt pour la comparaison des lectures proposées par les élèves. Ces comparaisons peuvent ouvrir sur un travail de justification et de mise en relation d'idées mathématiques que plusieurs chercheurs semblent souhaiter (e.g. Banerjee et Subramaniam, 2011, qui cherchent à faire apprécier les similarités structurelles entre expressions arithmétiques et algébriques). On peut même imaginer qu'un des enjeux de la résolution d'équations algébrique (dont l'enseignement pourrait se préoccuper) consiste à pouvoir varier ces types de lectures, dont le mérite respectif dépend sans doute des équations en présence. De même, on trouve ici une occasion de mettre en relation « arithmétique » et « algèbre », par exemple : en s'intéressant aux ressemblances et différences entre ces domaines de l'activité mathématique, en se mettant en quête d'autres stratégies pouvant être portées de l'un vers l'autre, voire en voulant faire le pont entre une telle variété d'entrées sur des équations « algébriques » et ce qui est observé dans la résolution de problèmes dits « algébriques » mais que l'on peut traiter de manière « arithmétique » (e.g. Bednarz et Lee, 2002).

Du point de vue de la recherche sur l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre, ce début d'analyse montre l'intérêt de se pencher finement sur les (*premiers*) *mouvements* des étudiants, ce par quoi ils *avancent* dans la résolution d'une équation et ce que cet « avancement » signifie mathématiquement. Une telle approche est centrée sur ce qui est *fait mathématiquement*, mettant en lumière cette activité mathématique qui nous intéresse, et que l'on souhaite continuer à éduquer, à faire avancer, à enrichir. Une telle analyse n'interdit pas de faire intervenir des concepts mathématiques pour discuter du *faire mathématique* des étudiants, mais on les utilise pour produire des interprétations qui *ouvrent* sur le plan

¹² Un mouvement que l'on peut aussi relier à la notion de *calcul raisonné/réfléchi*.

mathématique. En effet, il ne s'agit pas, dans une telle analyse, de ramener les mouvements des étudiants à des processus mathématiques « acceptés » (i.e. en termes de savoirs) ou « internalisés » (i.e. comme connaissances que l'individu possède), et donc de porter un jugement plus ou moins définitif sur ce que savent les apprenants. L'objectif n'est pas non plus de réifier ces approches comme de nouveaux savoirs qu'il faudra enseigner ou utiliser pour comprendre l'activité des étudiants. C'est plutôt la possibilité de donner un sens au travail mathématique qui nous intéresse, possibilité que l'on peut envisager d'exploiter avec les étudiants eux-mêmes, dans le but de *faire des mathématiques*. Ayant identifié ces (*premiers*) *mouvements* dans le travail de résolution des étudiants futurs enseignants, des questions de recherches spécifiques à la formation des enseignants ou au réinvestissement de ces observations pour l'enseignement initial peuvent être posées. Comment différents éléments de la situation ont-ils contribué à l'apparition de cette diversité de lectures ? Peut-on identifier des enjeux liés à l'exploitation de cette diversité dans le contexte où elle apparaît ? Comment des futurs enseignants en retirent-ils des leçons pour leur travail auprès des élèves ? Comment des élèves en plein apprentissage de l'algèbre apprécient-ils cette diversité ? Voit-on une transformation particulière de ce qu'ils font mathématiquement suivant un travail autour de la lecture d'équations algébriques selon leurs (*premiers*) *mouvements* de résolution ?

Sans être en rupture complète, fort heureusement, avec ce que nous connaissons pour façon de travailler en didactique des mathématiques, cette approche par le *faire mathématique*, qui ne pose pas de rapport de représentation entre ce qui est observé et de supposés « savoirs mathématiques » ou « connaissances des élèves », est tout de même particulière, car c'est encore et toujours le potentiel de ce qui est observé qui nous intéresse. Cette orientation devient d'autant plus marquée quand on observe un autre des mouvements proposés par les étudiants dans ces mêmes tâches :

Renverser l'équation

- Un autre mouvement consiste à aborder les équations en les lisant « par en dessous », c'est-à-dire à inverser les positions des numérateurs et des dénominateurs dans chacun des termes. On procède ici suivant l'hypothèse que les relations entre les nombres sont « pour l'essentiel » conservées, et donc que la valeur que l'on peut (peut-être plus facilement) trouver pour x est valable. Dans le cas de la seconde équation, ce mouvement se traduit par exemple de cette façon :

$$\frac{1}{3x} = \frac{2}{5} \mapsto \frac{3x}{1} = \frac{5}{2} \Rightarrow 3x = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

Assez curieuse, cette entrée est intéressante parce qu'elle permet effectivement d'avancer dans la résolution d'une équation, mais aussi en raison du défi d'en faire sens mathématiquement. En effet, inverser une (paire de) fraction(s) n'est pas une opération à proprement dit, ne fait pas clairement appel à une loi ou une propriété et ne se présente pas non plus comme un raisonnement. On pourrait peut-être parler ici d'une lecture structurelle de l'équation où les relations entre les nombres ne sont pas traitées de façon linéaire, mais prises comme un tout. Cette approche n'est pas sans résonances avec ce que peut exiger la complétion de carré sur une expression du type « $x^2 + 7x + 10$ », basée sur l'observation des coefficients : $10 = 2 \times 5$ et $7 = 2 + 5$, d'où $(x + 2)(x + 5)$. Comme premier mouvement, renverser l'équation est particulièrement efficace pour travailler sur une expression comportant une fraction unitaire ($1/3x$ devient $3x$), et la solution ainsi trouvée est bel et bien valable ($5/6$ comme valeur de l'inconnue). En revanche, et nous l'avons observé lors de cette expérimentation, cette approche suscite de nombreuses questions : Est-elle mathématiquement correcte ? Sur quelles propriétés repose son succès ? Quelles sont les conditions pour qu'elle fonctionne ? Peut-on considérer l'inversion comme une opération au même titre que la multiplication ?¹³

Ces questions amènent à réaliser que plusieurs des manipulations proposées dans le cas de ces équations reposent sur une relation multiplicative qu'entretient l'inconnue avec tous les autres nombres de l'équation et que la résolution s'est chaque fois faite sans tenir compte des restrictions imposées par le cas $x = 0$. Lire l'équation en fonction de son domaine de résolution peut donc constituer une autre entrée. Lecture efficace pour des équations sans solution, ou qui, pour donner un exemple trivial, ressembleraient à « $5 + x = 5$ ». D'autres propositions en ce sens ont été avancées par les étudiants, par exemple de lire l'équation comme l'égalité posée entre deux fonctions dont on cherche un point d'intersection (voir Proulx, 2013a). La Figure 1 illustre ce à quoi correspond cette approche si elle était utilisée pour l'équation $6/x = 3/5$. Avec ce dernier exemple, c'est la frontière entre « algèbre » et « géométrie (analytique) » que l'on peut mettre à profit. Cet exemple suggère par ailleurs une interprétation à nouveau enrichie de l'idée de « contrôle sémantique/syntaxique », ouvrant sur un nouvel ensemble de possibilités de faire sens des manipulations sur une équation (e.g. ajouter ou soustraire une valeur de

¹³ On note à nouveau dans cette analyse que des concepts mathématiques interviennent dans l'interprétation que nous proposons (et, de fait, que les étudiants eux-mêmes ont proposé !) du travail mathématique observé. Mais c'est en tant que possibilité de faire sens mathématiquement de ces actions, de ce *faire mathématique*, que ces concepts interviennent et non de manière à y ramener et y réduire cette activité. De la même façon, nous aurions pu nous pencher sur les explications des étudiants et regarder alors comment ils font intervenir des concepts pour faire sens mathématiquement de leurs actions.

chaque côté de l'égalité revient à déplacer le système d'équation verticalement, ce qui ne change pas la valeur de l'abscisse du point d'intersection).

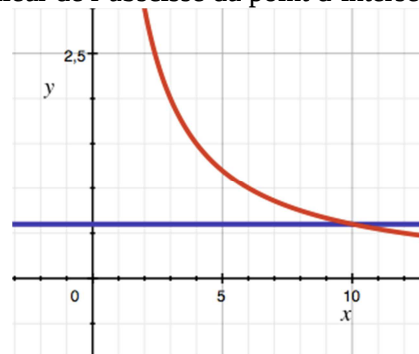


Figure 1. Entrée graphique pour une résolution où la première équation est $x = 10$

Suivre ainsi ce que *font* les étudiants confrontés à ces énoncés nous amène à considérer l'activité de résolution d'une équation algébrique au-delà du cadre ordinaire des manipulations symboliques et des « règles » mathématiques qui les gouvernent. Il est pensable d'entrer sur une équation et d'avancer dans sa résolution sans faire appel ou se limiter aux transformations standard dont il s'agit de respecter les conditions d'application. On réalise de fait que ce que signifie « résoudre une équation » s'est ainsi souvent cristallisé autour de ces manipulations (e.g. les approches de Mason, Graham, Pimm et Gowar, 1985 ; Kieran, 1992; Arzarello, Bazzini et Chiappini, 2002), les processus plus globaux tels que la transformation ou l'anticipation étant ramenés vers ces manipulations (e.g. Boero, 2002) et alors envisagés comme des objectifs à atteindre. Alternativement, notre entrée par le *faire mathématique* invite plutôt à enrichir ce que peut signifier résoudre une équation. Inspirée par l'étude des premiers mouvements des étudiants, une interprétation en ce sens de nos données nous conduit à proposer, par exemple, que « résoudre une équation » peut signifier (voir aussi Proulx, 2013b) :

- Transformer une équation en une autre afin d'isoler l'inconnue
- Chercher une ou des valeurs pour lesquelles l'égalité est vraie
- Raisonner sur la valeur manquante dans une proportion
- Identifier le ou les points d'intersection entre deux fonctions
- Déconstruire les opérations appliquées sur un nombre inconnu (e.g. pour l'équation « $x^2 - 4 = 5$ », on dira : « Mon nombre a été élevé au carré et ensuite on lui a enlevé 4 et ça donne 5, alors j'ajoute 4 à 5 et j'extrais la racine carrée »)¹⁴.

La nature polysémique de ce que peut signifier résoudre une équation est ainsi mise de l'avant à travers la lecture de celle-ci, la manière d'entrer dans sa résolution, le mouvement qui fait avancer vers une solution. Nous voyons là une piste

¹⁴ Approche qui rappelle évidemment celle développée par le célèbre Al- Khwarizmi!

prometteuse pour la recherche en didactique des mathématiques, enracinée dans des *fares mathématiques* mis en relation avec d'autres *fares mathématiques* avec lesquels ils ont la possibilité de faire sens, et libérée du besoin d'en appeler aux concepts de « connaissances » des élèves ou de « savoirs » visés. Dans une étude en cours, nous examinons d'ailleurs plus en détail, sous le thème du travail « mental » en mathématique, la manière dont ces significations émergent et peuvent être exploitées en classe.

3.3 Faire faire des mathématiques, un enjeu didactique

Nous nous sommes intéressés ici au *faire mathématique* d'étudiants en contexte de résolution d'équation algébrique. Dans cette perspective, les questions de l'ordre du « savoir » et de la « connaissance » semblent remplacées par une préoccupation à l'égard des possibilités de *faire faire des mathématiques aux élèves* (comme dit Conne, 1999), l'enjeu étant de développer le potentiel et la richesse (sur le plan spécifiquement mathématique) de ce qui émerge *sui generis hic et nunc*. Ainsi, l'objectif n'est pas de trouver des moyens d'amener les élèves à « posséder des connaissances » en adéquation avec un « savoir » mathématique (aussi complet que possible...) sur la résolution d'équations algébriques. Une ouverture vers les premiers mouvements, soit les multiples façons de lire une équation et les significations diverses que prend l'activité même de « résoudre une équation » à travers ces lectures, a pour but d'enrichir le travail mathématique des élèves, de le « suivre ailleurs », plutôt que de le « conduire vers » une forme prescrite. Du point de vue de l'enseignement, tirer profit des possibilités de ce qui émerge se présente alors comme un défi central. Bien loin de l'idée de conduire vers des « connaissances *sur* » ou de faire construire des « connaissances *de* », c'est la production d'actions mathématiques (e.g. en contexte de résolution d'équations algébriques) qu'il s'agit de favoriser, dont on cherche à préciser le sens et la pertinence mathématiques, et ainsi de suite. On s'intéresse alors à ce qui *est mathématique* (de l'anglais « mathematical », Davis, Sumara et Luce-Kapler, 2008). Une telle entrée nous fait travailler « au plus près » de l'activité mathématique des élèves, pour la « soutenir » et ne pas perdre de vue les mathématiques des élèves eux-mêmes ; plutôt que de la « saisir » ou de la « réduire » à nos propres compréhensions mathématiques, nous engageant dès lors souvent bien malgré nous dans une perspective déficitaire (où l'élève en sait toujours moins que l'étendue du « savoir » !).

Être au plus près de l'activité mathématique des élèves rappelle aussi cette idée de *présence* aux élèves, évoquée plus haut. Ne souhaitant plus faire progresser vers nos/des connaissances, mais plutôt *avancer mathématiquement*, sans cibler de fins, de standards, de savoirs-objectifs (Proulx, 2006), l'attention est portée vers le défi d'être mathématiquement avec l'élève. Plutôt que de prendre pour origine et horizon des connaissances et des savoirs mathématiques auxquels l'élève doit

répondre, on se place soi-même dans l'obligation de répondre de/à l'élève de sorte que l'on fasse des mathématiques ensemble. Un tel changement d'orientation, à peine esquissé, n'est pas banal. Il a l'avantage de mettre au centre de la relation enseignant-élève le travail mathématique lui-même, plutôt qu'un jeu d'attentes par rapport à un « savoir » ou à ce qui est pris pour sa manifestation. Rappelant à plusieurs égards la vision transformée de l'éducation mathématique d'un Papert (1983) par exemple, il s'agit d'une perspective assez similaire à ce que Davis et al. (2008) proposent :

That is, we do not see education in linear-causal terms of achieving preset objectives or re-presentation of established truths, but as a participation in the ever-unfolding project of becoming capable of new, perhaps as-yet unimaginable possibilities. (pp. 20-21)

Ainsi, s'intéresser à la manière dont l'activité mathématique s'élabore, aux façons de « signifier » la résolution algébrique, nous place du côté (positif) de ce qui est fait (et non de ce qui devrait être). On s'attarde à détailler les manières dont les élèves réalisent une attitude mathématique, en en cherchant les ramifications possibles, les nuances, etc. L'entrée sur le *faire mathématique* ouvre à l'activité elle-même, et à son déploiement infini, invitant à porter un regard sur l'enseignement en termes de ce qu'il permet : telle situation est-elle riche ? Comment telle approche permet-elle de faire faire des mathématiques aux élèves ? À ce titre, l'activité de résolution mentale d'équations algébriques rapportée ici nous semble offrir un potentiel certain.

Remarques finales – ouvertures

Les faits sont bel et bien faits

M. Douglas

Nous sommes d'avis que les mathématiques n'existent pas en dehors du moment où les gens font des mathématiques. Dans cet essai, nous avons exploré l'importance éthique et la possibilité théorique et pratique de nous intéresser directement au *faire mathématique*, plutôt que de l'aborder en termes de « savoirs » et de « connaissances ». Ce mouvement, rappelons-le, semble faire son chemin assez naturellement dans la recherche en didactique des mathématiques.

Cela dit, il nous semble important de revenir brièvement, en guise d'ouverture, sur la question du langage. Est-il vraiment nécessaire, peut-on se demander, de proposer un changement radical dans nos « façon de parler » et d'évacuer des termes tels que « savoir » et « connaissance » ? Ne peut-on pas plutôt les redéfinir de manière plus ouverte, ou encore se contenter de souligner que nous les utilisons « entre guillemets » ? Nous avons déjà évoqué deux alternatives allant en ce sens, montrant en particulier comment le terme « connaissance » est redéfini dans les traditions socioculturelle et de l'énaction dans leur développement en didactique

des mathématiques. Mais une réflexion sur le langage, éthique entre autres, nous appelle à aller encore plus loin. Comme l'explique d'ailleurs Maturana (dans Simon, 1985) les mots sont bien souvent des adversaires : « words – with their power to confer objective status on perceptions – are the adversary, creating a minefield that must be navigated with the utmost circumspection » (p. 34).

Que se passe-t-il quand on met de côtés ces termes pour parler du *faire mathématique* ? Revenons, par exemple, aux définitions proposées par Conne (1992) mentionnées en introduction : « ...le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation ... une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable... ». Si on y pense bien, il est possible de reprendre une partie importante de l'idée mise de l'avant en se concentrant sur *l'action même de reconnaître* l'intérêt d'un concept ou d'une procédure mathématique par rapport à une situation. Il n'est nul besoin alors de poser l'existence d'une connaissance propre à l'individu ou d'un savoir réifié, ni même d'utiliser le terme « connaissance » pour décrire un tel événement et en déduire quelque chose d'intéressant pour la didactique des mathématiques. C'est un peu de la même façon que nous sommes allés puiser à des traditions théoriques et philosophiques avec lesquelles nous travaillons des éléments permettant de conceptualiser cette entrée par le *faire mathématique*. Si on trouve dans ces travaux beaucoup plus que ce que nous mentionnons ici, on y trouve aussi « beaucoup moins » dans la mesure où l'on y utilise fréquemment le vocabulaire dont nous cherchons à nous distancier, sans doute parce que l'on n'y thématise pas non plus comme nous le faisons ici une approche par le *faire (mathématique)* comme moyen de sortir de la pensée en termes de savoir/connaissance. Cependant, ces travaux rendent possible une telle entrée.

Certains lecteurs regretteront néanmoins que nous n'ayons pas développé cette proposition à partir de cadres plus utilisés en France par exemple (Brousseau, Chevallard, Vergnaud). Nous voyons néanmoins cette réaction de manière positive, l'idée étant d'inviter le lecteur familier avec ces approches à en faire l'exercice. D'autres regretteront, au contraire, que la proposition puise à des courants de recherche qui existent (et qui se débrouillent bien sans elle !), plutôt que de s'affirmer dans ses propres termes. Là encore, ce type de réaction répond en quelque sorte à nos attentes, suggérant que le lecteur a su apprécier l'idée qui nous occupe et trouve la proposition digne d'être développée. D'autres encore trouveront peut-être ces idées irréalistes, peu prometteuses, ou sans nouveauté. Ces avis nous semblent également importants pour deux raisons : la première est qu'ils aident à apprécier l'intérêt de notre proposition, et la seconde est qu'ils conduisent alors à appeler une discussion des enjeux éthiques soulevés en première partie, et dont la didactique des mathématiques fait encore peu de cas (fort en retard, à ce titre, sur sa « cousine » anglophone en particulier).

Quant à nous, l'examen attentif des perspectives épistémologiques, où nous auteurs, nous positionnons actuellement, révèle que le caractère local et émergent de l'activité mathématique est si central qu'il ne peut être mis entre parenthèses. Il est si central qu'il *remplace* la question des « connaissances » et « savoirs » mathématiques. Définitivement mettre de côté les savoirs et connaissances pour nous intéresser plutôt au *faire mathématique* semble conduire à un changement de paradigme (Kuhn, 1962) en didactique des mathématiques, c'est-à-dire à une nouvelle manière de cadrer, de questionner et d'investiguer, de même qu'au développement d'un nouveau langage pour notre discipline.

Est-ce à dire qu'il faille renoncer à tout ce qui se fait dans notre domaine si on veut s'intéresser au *faire mathématique* et même (jolie formule !) au *faire mathématique ensemble*, plutôt qu'aux « savoirs » et aux « connaissances » ? Certainement pas. D'ailleurs, les analyses proposées des stratégies en algèbre mentale le montrent bien : on peut toujours s'intéresser aux productions des élèves, aux stratégies ou processus utilisés, aux potentialités des situations d'enseignement/apprentissage, et ainsi de suite. Mais, cette perspective n'est pas non plus sans exigences, invitant à mettre de côté certaines habitudes/attitudes qui s'appuient, même implicitement, sur l'existence de « savoirs » et de « connaissances » des élèves. Il faut ainsi accepter de voir l'enseignement comme un lieu où l'on *fait* des mathématiques plutôt que d'en apprendre, faisant résonner cette assertion de Glasersfeld (1989, p. 368), inspirée de Sierpinski, qui observe que « notre propre culture mathématique peut ne pas être beaucoup plus universelle que celle de nos élèves ». Donner pleine attention au *faire mathématique* est ainsi d'abord une affaire de disposition pour nous, chercheurs. Et ce terme, « disposition », est à entendre avec à l'esprit cette phrase du romancier Dietrich Bonhoeffer, qui nous rappelle à la dimension éthique de la proposition présentée dans ce texte :

« Action springs not from thought, but from a readiness for responsibility ».

Références

- ARZARELLO, F., BAZZINI, L., & CHIAPPINI, G.P., M. (2000). A Model for analysing algebraic processes of thinking. In R.Sutherland, T.Rojano, A.Bell & R.Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (pp. 243-262). Washington, Kluwer Academic Publishers.
- ATWEH, B., & BRADY, K. (2009). Socially response-able mathematics education: Implications of an ethical approach. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 5(3), 267-276.
- BAKHTIN, M. (1986). *Speech genres and other late essays*. Austin, TX: University of Texas Press.

- BAUERSFELD, H. (1995). The structuring of the structures. In L. P. Steffe & J. Gale (Eds.), *Constructivism in education* (pp. 137-158). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- BEDNARZ, N. & JANVIER, B. (1998). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds) *Approches to algebra: Perspectives for research and Teaching*. Kluwer, Dordrecht.
- BEDNARS, N. & LEE, L. (2002). Articulation arithmétique/algèbre : Implications pour l'enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire. *Actes du Groupe Canadien d'Etude en Didactique des Mathématiques* (pp. 59-70). CMESG/GCEDM.
- BOERO, P. (2002). Transformation and anticipation as key processes in algebraic problem solving. *Mathematics Education Library*, 22, 99-119.
- BUTLEN, D., & PEZARD, M. (1990). Calcul mental, calcul rapide. *Grand N*, 47, 35-59.
- CHAIKLIN, S., & LAVE, J. (1993). *Understanding practice: Perspectives on activity and context*. Cambridge: Cambridge University Press.
- CLEMENT, J., LOCHHEAD, J., & MONK, G. (1981). Translation difficulties in learning mathematics. *American Mathematical Monthly*, 88, 286-90.
- CONNE, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 12(2-3), 221-270.
- CONNE, F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths, et regarder ce que ça donne. In G. Lemoyne & F. Conne (Eds.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 103-120). Montréal, Qc: Presses de l'Université de Montréal.
- DAVIS, B. (1995). Why teach mathematics? Mathematics education and enactivist theory. *For the Learning of Mathematics*, 15(2), 2-9.
- DAVIS, B., SUMARA, D., & KIEREN, T. (1996). Cognition, co-emergence, curriculum. *Journal of Curriculum Studies*, 28(2), 151-169.
- DAVIS, D., SUMARA, D., & LUCE-KAPLER, R. (2008). *Engaging minds: Changing teaching in complex times* (2^e édition). New York: Routledge.
- DERRIDA, J. (1967). *L'écriture et la différence*. Paris: Éditions du Seuil.
- ENGESTRÖM, Y. (2001). Expansive learning at work: toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14(1), 133-156.
- ERNEST, P. (2009). What is first philosophy in mathematics education? In *Proceedings of PME-33* (pp. 25-42). Thessaloniki: PME.
- FOUREZ, G., ENGELBERT-LECOMTE, V. & MATHY, P. (1997). *Nos savoirs sur nos savoirs: Un lexique d'épistémologie pour l'enseignement*. De Boeck Université: Brussels.

- GLASERSFELD, E. VON (1989) Commentaires subjectifs par un observateur. In N.Bednarz & C.Garnier (Eds.), *Construction des savoirs: Obstacles et conflits* (pp. 367-371). Montréal, Qc: Agence d'Arc.
- HOLZKAMP, K. (1983) Der Mensch als Subjekt wissenschaftlicher Methodik [Man as subject of scientific method]. In K.-H. Braun, W. Hollitscher, K. Holzkamp & K. Wetzel (Eds.), *Karl Marx und die Wissenschaft vom Individuum* (pp. 120-166). Marburg, Germany: Verlag Arbeiterbewegung und Gesellschaftswissenschaften.
- KIEREN, T. & SIMMT, E. (2009) Brought forth in bringing forth: the interactions and products of a collective learning system. *Complicity : An International Journal of Complexity and Education*, 6(2), 20–28.
- KIEREN, T., CALVERT, L.G., REID, D. & SIMMT, E. (1995). *Coemergence : Four enactive portraits of mathematics activity*. Présentation au congrès annuel de AERA. En ligne : <http://tiny.cc/KieranCalvert1995>
- KUHN, T. (1962). *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.
- LAROCHELLE, M. & DÉSAUTELS, J. (1992). *Autour de l'idée de science: itinéraires cognitifs d'étudiants et d'étudiantes*. Sainte-Foy: Presses de l'Université Laval.
- LEONTIEV, A.N. (1981). The problem of activity in psychology. In J.Wertsch (Ed), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 37-71). Armonk, NY: Sharpe.
- LEONTYEV, A.N. (1978/2009). *Activity and Consciousness*. Marxists Internet Archive, en ligne : <http://www.marxists.org/archive/leontev/works/activity-consciousness.pdf>
- LERMAN, S. (2001). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 46(1/3), 87-113.
- LEVINAS, E. (1982). *Éthique et infini*. Fayard: Paris.
- LOZANO, M-D. (2009). Algebraic learning – accounting for. In J.Proulx, E.Simmt, & J.Towers, RF05: The enactivist theory of cognition and mathematics education research: Issues of the past, current questions and future directions. *Proceedings of PME-33* (vol. 1, pp. 249-278). Thessaloniki, Greece.
- MAHEUX, J.F. (2010). *How do we know? An epistemological Journey in the Day-to-day, Moment to-moment, of Researching, Teaching and Learning in Mathematics Education*. Thèse de doctorat, Université de Victoria.
- MAHEUX, J.F. & THOM, J.S. (2009). L'activité mathématique comme une manière d'être dans le monde. In F.Spagnolo (Ed), *Actes de la CIEAEM* (pp. 400-414). Montreal, Qc.
- MAHEUX, J-F., & ROTH, W-M. (2011). Relationality and mathematical knowing. *For the Learning of Mathematics*, 31(3), 36-41.

- MASON, J., & SPENCE, M. (1999). Beyond mere knowledge of mathematics: The importance of knowing-to act in the moment. *Educational Studies in Mathematics*, 38(1-3), 135-161.
- MATURANA, H. (1987). Everything is said by an observer. In W.I.Thompson (Ed.) *GAIA: A way of knowing* (pp. 65-82) Hudson, NY: Lindisfarne Press.
- MATURANA, H.R. (1988). Ontology of observing : The biological foundations of self consciousness and the physical domain of existence. 53 pages. *Texts in cybernetic theory, conférence workbook*. Felton, CA : ASC.
- MATURANA, H.R., & VARELA, F.J. (1992). *The tree of knowledge: The biological roots of human understanding* (Rev. ed.). Boston, MA: Shambhala.
- MATURANA, H.R., & VARELA, F.J. (1994). *L'arbre de la connaissance: racines biologiques de la compréhension humaine*. Paris: Addison-Wesley.
- NEYLAND, J. (2001). *An ethical critique of technocratic mathematics education: towards an ethical philosophy of mathematics education*. Thèse de doctorat, Université de Victoria.
- NIETZSCHE, F. (1992). *Fragments posthumes (1885-1886), Tome IX*. Paris, Gallimard.
- PAPERT, S. (1983). *Mindstorms. Children, computers and powerful ideas*. New York : Basic books.
- PIRIE, S., & KIEREN, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 165-190.
- PROULX, J. (2007). «Objectifs comme points de depart» versus «objectifs à atteindre à la fin»: Un défi pour les programmes de formation des maîtres. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone EMF-2006* (CD-ROM). Sherbrooke, QC : Éditions du CRP.
- PROULX, J. (2013a). Le calcul mental au-delà des nombres : conceptualisations et illustrations avec la résolution d'équations algébriques. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 18, 59-88.
- PROULX, J. (2013b). Mental mathematics and algebra equation solving. *Proceedings of CERME-8*. Antalya, Turquie.
- PROULX, J., & MAHEUX, J-F. (2012). Épistémologie et didactique des mathématiques : questions anciennes, nouvelles questions. *For the Learning of Mathematics*, 32(2), 41-46.
- RAMBUSCH, J. (2006). Situated learning and Galperin's notion of object-oriented activity. In *Proceedings of the 28th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 1998-2003). En ligne : <http://csjarchive.cogsci.rpi.edu/proceedings/2006/docs/p1998.pdf>

- RADFORD, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture* (pp. 215-234). Rotterdam: Sense Publishers.
- RADFORD, L. (2011a). On the cognitive, epistemic, and ontological roles of artifacts. In G. Gueudet, B. Pepin & L. Trouche (Eds.), *From Text to 'Lived' Resources Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development* (pp. 282-288). New York: Springer.
- RADFORD, L. (2011b). Vers une théorie socioculturelle de l'enseignement-apprentissage: la théorie de l'objectivation. *Éléments*, 1, 1 - 27.
- RADFORD, L., & ROTH, W.-M. (2010). Intercorporeality and ethical commitment: an activity perspective on classroom interaction. *Educational Studies in Mathematics*.
- REID, D. (1996). Enactivism as a methodology. *Proceedings of PME-20* (Vol.4, pp. 203-210). Valencia, Spain: PME.
- RENE DE COTRET, S. (1999). Perspective bio-cognitive pour l'étude des relations didactiques. In G. Lemoyne & F. Conne (Eds.), *Le cognitif en didactique des mathématiques* (pp. 103-120). Montréal, Qc: Presses de l'Université de Montréal.
- RENE DE COTRET, S. (2000). La didactique des mathématiques et la formation des enseignants: De la réflexion à l'action. In P. Blouin & L. Gattuso (Eds.), *Didactique des mathématiques et formation des enseignants* (pp. 21-28). Montreal, Quebec, Canada: Éditions Modulo.
- ROTH, W.-M. (2011). *Geometry as objective science in elementary classrooms: Mathematics in the flesh*. New York: Routledge.
- ROTH, W. M., & LEE, Y. J. (2007). Vygotsky's Neglected Legacy: Cultural-Historical Activity Theory. *Review of Educational Research*, 77(2), 186-232.
- ROTH, W.-M., & RADFORD, L. (2011). *A cultural historical perspective on teaching and learning*. Rotterdam: Sense Publishers.
- SFARD, A. (1998). On two metaphors for Learning and the dangers of choosing just one. *Educational Researcher*, 27(4), 4-13.
- SFARD, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Development of Discourses, and Mathematizing*. Cambridge: Cambridge University Press.
- SIMON, R. (1985). A frog's eye view of the world. Structure is destiny: An interview with Humberto Maturana. *The Family Therapy Networker*, 9(3), 32-37; 41-43.
- THOM, J.S., NAMUKASA, I.K., IBRAHIM-DIDI, K., & MCGARVEY, L.M. (2009). Perceptually guided action : Invoking knowing as enaction. In J.Proulx, E.Simmt,

- et J. Towers, RF05: The enactivist theory of cognition and mathematics education research: Issues of the past, current questions and future directions. *Proceedings of PME-33* (vol. 1, pp. 249-278). Thessaloniki, Greece.
- VALERO P., & VITHAL, R. 1999. Research methods of the "North" revisited from the "South". *Perspectives in Education*, 18(2), 5-12.
- VAN OERS, B. (2001). Educational forms of initiation in mathematical culture. *Educational Studies in Mathematics*, 46(1), 59-85.
- VARELA, F.J. (1996). *Invitation aux sciences cognitives* (Trad. P. Lavoie) Paris: Éditions du Seuil.
- VARELA, F.J. (1988). Le cercle créatif. In P. Watzlawick (Ed.). *L'invention de la réalité : Contributions au constructivisme* (pp. 329-345), Paris, Seuil, 1988.
- VARELA, F.J. (1999). *Ethical Know-how*. Stanford: Stanford University Press.
- VARELA, F.J., Thompson, E., & Rosch, E. (1991). *The embodied mind: Cognitive science and human experience*. Cambridge, MA: MIT Press.
- VOLOŠINOV, V. N. (1973). *Marxism and the philosophy of language*. Harvard: Harvard University Press.
- VON FOERSTER, H. (1995). Ethics and second-order cybernetics. *Stanford Humanities Review*, 4(2), 308-319.
- VYGOTSKY L. S. (1978) *Mind in society*. Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press.
- VYGOTSKY, L. (1981) The instrumental method in psychology. In J. Wertsch (ed.), *The concept of activity in Soviet psychology* (pp. 135-143). Armonk, NY: Sharpe.
- VYGOTSKY, L.S., & LURIA, A. (1993). *Studies on the history of behavior, ape, primitive, and child*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.

JEAN-FRANÇOIS MAHEUX <maheux.jean-francois@uqam.ca>

JEROME PROULX <proulx.jerome@uqam.ca>

Département de mathématiques, UQAM

C.P. 8888, Succursale Centre-ville

PK-5151

Montréal, Qc H3C 3P8

SOPHIE RENE DE COTRET

PEUT-ON OU DOIT-ON VRAIMENT SE PASSER DE LA REFERENCE
AU SAVOIR POUR APPREHENDER LE FAIRE?

(Débat : Réaction)

Abstract. Might or should we not refer to knowledge for grasping mathematical doing. In their paper, MAHEUX & PROULX propose to look at the mathematical activity of the student from the « doing maths » point of view. They suggest that this focus must let out the reference to the mathematical knowledge as usually conceived. If I do agree with the focus they propose, I question, strictly speaking, the fact that the knowledge is not useful in this analysis.

Résumé. Le texte de MAHEUX & PROULX propose de porter un regard sur l'activité mathématique des élèves à partir du faire mathématique et ce sans recourir aux savoirs et connaissances mathématiques tels que conçus habituellement. Si le fait de centrer le regard sur l'activité des élèves me paraît tout à fait pertinent et intéressant, je remets en questions, à strictement parler, le fait de laisser tomber les savoirs.

Mots-clés. Contrôle, choix, savoir, connaissance, observateur, modèle pour regarder.

Introduction

D'entrée de jeu, il m'importe de mentionner que la proposition d'axer le regard sur l'activité mathématiques des élèves, et ce, en s'appuyant sur les travaux de MATURANA & VARELA, faite par les auteurs, me réjouit et je vois en messieurs MAHEUX et PROULX des alliés dans le regard « maturanien » et des interlocuteurs précieux. En effet, l'usage des travaux de MATURANA & VARELA en didactique des mathématiques est encore rare et c'est donc avec beaucoup de curiosité, d'intérêt et de plaisir que je me suis plongée dans le texte de mes collègues et compatriotes.

À leur proposition se rattache le besoin de mettre de côté les idées de savoirs et de connaissances. C'est sur cette 2^e partie que je souhaite cibler le dialogue, car j'ai du mal à saisir comment il est possible d'y arriver. J'espère ainsi, par mes commentaires et mes questions, amener mes collègues MAHEUX et PROULX à identifier le lieu de notre divergence de manière à ce qu'ils puissent m'aider par la suite à mieux saisir leur proposition.

La question principale qui se dégage de ma lecture du texte est : Peut-on vraiment se passer de la référence au savoir pour appréhender le faire ? Celle-ci se déclinera, dans ma réaction, en quatre volets : 1- Domination et contrôle de la référence au savoir ou accès au choix ? 2- Analyser le faire nécessite-t-il d'exclure le savoir ? 3- Comment choisir les tâches à proposer aux élèves sans référence aux savoirs ? 4- À propos de l'illustration.

1. Domination et contrôle ou accès au choix ?

Ce qui semble motiver la proposition de MAHEUX & PROULX, selon ma lecture, est un malaise de nature éthique quant au contrôle et à la domination que revêtiraient les savoirs et les connaissances dans l'usage qui en est fait à travers divers travaux en didactique des mathématiques. S'appuyant sur LEVINAS, les auteurs affirment que « *La connaissance est depuis longtemps associée à l'idée de domination, de contrôle. Il s'agit, d'une part, du Savoir que l'on développe sur quelqu'un ou sur quelque chose.* » (MAHEUX & PROULX p. 21) La première question que suscite cette position est : ***La domination et le contrôle de qui ou de quoi ?*** En effet, les connaissances et les savoirs permettent de donner une emprise sur le monde, d'interagir avec lui et de le décrire de manière systématique; il s'agit bien là d'une forme de contrôle, laquelle n'est pas nécessairement à rejeter. Mais je présume que la réticence des auteurs à l'égard du savoir n'est pas liée à ce type de contrôle, mais plutôt au contrôle ou à la domination de l'autre et, notamment, de l'élève. Est-ce bien le cas ? Et si oui, ***en quoi la référence au savoir exerce-t-elle une domination ou un contrôle de l'élève ?***

Les auteurs poursuivent : « *Mais on peut aussi penser au Savoir comme objectif, quand "faire apprendre" est synonyme de conduire, bon gré mal gré, vers une forme donnée de connaissance.* » (MAHEUX & PROULX p. 21). Conduire, bon gré, mal gré, vers une connaissance peut chercher à donner accès au choix afin de pouvoir ensuite exercer son libre choix. Cette contrainte peut reposer sur une prémisse de bienveillance et de liberté plutôt que de domination et de contrôle. Exercer sa liberté c'est notamment pouvoir choisir, et choisir sous-entend un choix éclairé ou, à tout le moins, une variété d'options. Le fait de conduire, bon gré, mal gré, dans un premier temps, un enfant à goûter les brocolis peut paraître contrôlant ou dominant mais, en bout de ligne, ce peut être le moyen de lui offrir la possibilité de choisir, choisir entre les brocolis et autre chose ou choisir de manger ou non des brocolis à l'avenir. Un enfant qui n'aurait jamais connu ou goûté de brocolis serait-il plus libre, moins dominé ou contrôlé ? ***En d'autres termes, peut-on imaginer conduire bon gré, mal gré vers une connaissance ou un savoir, dans une perspective de liberté plutôt que de contrôle ?***

Toujours en lien avec l'idée de domination et de contrôle du savoir, les auteurs disent : « *Interpréter des conduites d'étudiants en les comparant à un soi-disant savoir de référence revient à les ramener à du connu (prenant pour négligeable*

leur irréductible originalité et tout ce qui peut être d'inconnaissable en elles, et donc aussi chez les élèves qui les produisent). Et cela dans quel but, sinon pour mettre en place des mécanismes amenant les élèves à la " maîtrise " de telle ou telle notion (ou processus) mathématique telle que nous la (ou le) concevons ? » (MAHEUX & PROULX p. 21)

La comparaison à un savoir de référence dénoncée est selon moi inévitable, même si parfois la référence à laquelle la comparaison se fait est implicite. Si l'on accepte cela, ***n'est-il pas préférable d'explicitier cette référence, afin d'éviter le glissement qui consisterait à penser que, sans une telle référence, on est objectif ou on se rapproche davantage de la « vraie » activité des élèves ?*** Le savoir sur lequel s'appuie un observateur pour « voir » ce que fait l'élève est son modèle pour regarder, ce qui, somme toute, lui permet de voir. Parce que, ce qui est vu n'est pas dans ce que l'élève fait, mais bien dans l'énaction de l'observateur qui observe l'élève. Le savoir de référence est le modèle que se donne l'observateur pour voir quelque chose, pour décrire l'action de l'élève. Le modèle pour regarder pourrait être autre, mais il doit y en avoir un. Refuser le savoir de référence, ou plus généralement, le modèle pour regarder de l'observateur, risque de laisser croire que ce qui est décrit EST ce qui se passe, il y aurait alors un glissement ou une confusion entre l'action intime du sujet et la description qu'en fait un observateur, celle-ci étant nécessairement teintée de sa façon à lui, l'observateur, d'être au monde.

C'est cette référence qui permettra par ailleurs de voir qu'un élève produit quelque chose de différent de ce qui était prévu et donc, éventuellement, de reconnaître son originalité. ***Comment savoir que c'est original si on n'a rien avec quoi comparer ?*** Le problème ne me semble pas être dans le fait de ramener à du connu (lequel permet de faire exister l'inconnu) de s'y référer, mais plutôt dans ce qui sera fait avec la différence observée. C'est là que pourrait se situer l'éventuel contrôle ou domination, dans le refus de cette différence plutôt que dans son acceptation, sa prise en compte et son partage; cette différence pouvant aussi être vue comme une richesse plutôt que comme un comportement déviant à redresser.

Il importe de mentionner que des travaux en didactiques des mathématiques se préoccupent justement de ces comportements différents et cherchent à théoriser, à rendre compte et à prendre en compte de ces différences et ces originalités. On peut penser aux conduites atypiques de GIROUX (2008) ou aux bifurcations didactiques de MARGOLINAS (2005). De même, les distinctions qu'il m'a semblé nécessaires d'apporter entre le milieu et l'environnement (RENE DE COTRET 1997), m'appuyant justement sur les travaux de MATURANA & VARELA vont aussi dans ce sens et se prolongent dans les nuances que je propose entre milieu senti et milieu perçu (RENE DE COTRET sous presse). En ce sens, je comprends l'inconfort que ressentent peut-être les auteurs et qui pourrait être à la source de leur proposition, inconfort qui proviendrait du fait que certaines formulations peuvent laisser croire

que le savoir est dans la tâche, que l'on peut contrôler les actions des élèves ou encore que le milieu est d'emblée objectif.

Enfin, s'il y a un savoir en jeu dans l'activité des élèves, c'est nécessairement le savoir de quelqu'un, *nous*, eux ou d'autres. Quiconque décrit le savoir des élèves, les élèves eux-mêmes ou un observateur externe, rapportera nécessairement cette description à sa façon de concevoir l'activité observée.

2. Analyser le faire nécessite-t-il d'exclure le savoir ?

Dans la foulée de leur proposition du faire mathématique, les auteurs nous convient à laisser de côté les questions de savoirs et connaissances. « *Dans les perspectives épistémologiques où nous, auteurs, nous positionnons, le caractère local et même émergent de l'activité mathématique est si central qu'il invite à "remplacer" les questions de savoirs et de connaissances pour nous intéresser au faire mathématique.* » (MAHEUX & PROULX, p. 17) **Pourquoi remplacer ou mettre de côté savoirs et connaissances? Pourquoi le faire exclurait-il le savoir ?** Les définitions de savoir et connaissances de LAROCHELLE & DESAUTELS de même que celles de CONNE proposées par MAHEUX & PROULX ne peuvent-elles en aucune façon être compatibles avec la proposition qui est faite de travailler à partir de l'activité et de l'énaction ? Qu'est-ce qui cloche exactement ?

Prenons la définition de connaissance de MATURANA & VARELA: « *Nous disons qu'il y a connaissance chaque fois que nous observons un comportement efficace (ou approprié) dans un contexte donné, c'est-à-dire dans un domaine que nous définissons par une question (explicite ou implicite).* » (1994, p. 164). Cette définition n'est-elle pas compatible avec celle de CONNE, citée par MAHEUX & PROULX : « *Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible, il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation.* » (CONNE, 1992, p. 225). **Ces deux définitions ne sont-elles pas proches l'une de l'autre ?** La question est peut-être de savoir qui est l'observateur. Si c'est un observateur externe qui observe un comportement efficace d'un sujet, il dira qu'il y a une connaissance (dans cette action du sujet) (définition de MATURANA & VARELA). Et si c'est le sujet lui-même qui observe l'efficacité d'un comportement, alors il fait le lien entre la question et la réponse et il sait (définition de CONNE). La connaissance de la connaissance de MATURANA & VARELA serait-elle comparable au savoir de CONNE ? Il me semble qu'il n'y a pas là d'incompatibilité majeure.

Je vois toutefois une raison possible, bien que temporaire, à l'exclusion des savoirs. En effet, il y a un cas où le savoir peut devenir nuisible à l'analyse, c'est lorsque l'on cherche à décrire le chemin parcouru à partir du but atteint, comme si c'était

ce but qui devait déterminer le chemin. La recherche historique, tout comme celle en didactique, doit d'ailleurs se prémunir contre cet éventuel glissement. On ne peut analyser les textes anciens, ni ceux des élèves, sur la base de savoirs auxquels ils ont conduit mais qui n'existaient pas encore au moment de leur production. Comme le dit VARELA citant ANTONIO MACHADO : « *Le chemin se fait en marchant* ». On ne peut donc considérer à la lumière du point d'arrivée que c'est nécessairement ce chemin qui aurait dû être. ***Est-ce cet écueil que cherchent à éviter les auteurs ?***

Par ailleurs, la référence aux savoirs actuels contribue à éclairer, à saisir le chemin parcouru, d'où je propose que la possible nuisance n'est que temporaire. Ce sont mes savoirs qui me permettent de mesurer la distance à parcourir par le sujet observé et d'apprécier les différents chemins parcourus, mais ils ne doivent pas obliger un seul chemin. Lorsqu'en didactique on parle de genèse artificielle des savoirs, il s'agit d'aménager un territoire, de proposer une forme de jeu dont on espère qu'il permettra au joueur d'arriver au but de son propre chef. Une fois sur le terrain, le joueur fait ses choix, trace son chemin et on espère qu'il aboutira au savoir qui est, pour nous, l'enjeu du jeu proposé. En d'autres termes, on espère que le joueur apprendra. Viser un savoir quand on enseigne ne signifie pas que l'on spécifie du même coup le chemin pour y aboutir.

En s'éloignant du savoir mathématique comme élément de référence, MAHEUX & PROULX se sont rapprochés des contextes dans lesquels les élèves *font* des mathématiques. ***Mais, lorsque les élèves font des mathématiques, qui observe ce « faire des mathématiques » ?*** À quoi les élèves peuvent-ils reconnaître que leur activité est mathématique ? En référence à quoi ? Cette observation se rapporte nécessairement à un domaine tel que conçu par l'observateur. Qui est l'observateur ? Les auteurs ou l'enseignant ou les élèves ?

Et si l'activité de l'élève n'était pas mathématique (du moins pour l'observateur), s'il faisait autre chose, que devrait-on faire alors ? Rien, pour ne pas exercer de domination ou de contrôle excessif ? Ou cherche-t-on à proposer quelque chose pour tenter de lui faire produire une activité jugée mathématique, pour infléchir son action (pour qu'il goûte au brocoli), par exemple par un jeu sur les valeurs des variables didactiques ? Ces questions renvoient au choix des tâches à proposer aux élèves.

3. Comment choisir les tâches à proposer aux élèves sans référence aux savoirs ?

Selon ma compréhension de MATURANA & VARELA, notre connaissance du monde est fonction de notre façon d'entrer en contact avec lui, ainsi, le choix des tâches est d'autant plus important qu'elles sont un déclencheur de cette façon d'entrer en contact. Comment choisir les tâches à proposer aux élèves pour qu'ils fassent des

mathématiques ? *Si les savoirs ne peuvent servir de référence, quels sont les éléments qui président au choix des tâches à proposer aux élèves ?* L'analyse *a priori* outille pour offrir des tâches qui risquent de déclencher une activité qui sera mathématique, c'est-à-dire qui permettra aux sujets d'agir comme des élèves de mathématiques. En tant que scientifiques (nous dirions élèves de mathématiques), « soit nous générons un domaine linguistique (un domaine social) à travers ce que nous disons et ce que nous faisons (où notre identité de scientifique [d'élève de mathématiques] est conservée) soit nous disparaissions comme tels. » (MATURANA & VARELA 1994, p. 229). Par exemple, **comment les exercices proposés par les auteurs ont-ils été choisis ?** Quelles raisons les ont conduits à demander de n'utiliser ni papier ni crayon ? On peut penser que le choix repose entre autres sur l'intention d'enseigner quelque chose. Il se peut que cette chose – le but, pas le chemin – soit spécifiée au départ ou elle peut aussi prendre corps au fur et à mesure des interactions au sein de la classe. À ce sujet, les Parcours d'Étude et de Recherche (PER) se distinguent selon qu'ils sont finalisés ou ouverts (CHEVALLARD 2011).

Le choix des tâches soulève en fait la question du rôle et du mandat de l'école. Le rôle de l'école peut être, entre autres, d'offrir aux enfants l'occasion d'entrer dans la culture de leur société et de l'humanité, notamment en se familiarisant, en apprenant les savoirs qui font partie intégrante de ces cultures. **La position des auteurs à cet égard offrirait sûrement un nouvel éclairage à leur proposition.** Peut-être leur position rejoint-elle la préoccupation de la théorie anthropologique du didactique qui cherche à passer du paradigme scolaire de l'inventaire des savoirs (ou de la visite des œuvres) à celui du questionnement du monde (CHEVALLARD, 2012).

4. À propos de l'illustration pratique d'une entrée par le faire

Afin de mettre en œuvre, et aussi de mettre à l'épreuve leur proposition, MAHEUX & PROULX nous donnent une illustration pratique d'une entrée par le faire. Avant de questionner cette illustration, je tiens à souligner tout le mérite et l'ouverture qu'elle constitue. En effet, cette illustration est une invitation au dialogue, à la critique et à l'avancement de notre réflexion collective. Je les en remercie.

Par cette illustration, les auteurs rendent compte de l'analyse qu'ils ont faite, depuis leur perspective, d'une activité proposée à douze étudiants en formation initiale à l'enseignement des mathématiques au secondaire. Ces étudiants devaient résoudre mentalement une à une des équations présentées sur transparent puis discuter de leurs solutions. Deux équations sont données en exemple ($6/x=3/5$ et $1/3x=2/5$).

La première question qui surgit en regardant l'activité est : **Dans quel but cette activité a-t-elle été proposée ? En fonction de quoi a-t-elle été choisie ?** Pourquoi sans crayon ? Est-ce parce que cela risque d'amener l'élève à développer d'autres

stratégies, à mettre en œuvre d'autres connaissances ? ***Y a-t-il des savoirs didactiques visés par cette proposition ? Si oui, lesquels ? Sinon, que vise-t-elle ?***

Pour analyser les notes de terrain recueillies lors de cette expérimentation, MAHEUX & PROULX signalent qu'il serait possible, de manière classique, de se demander à quelles connaissances font appel les étudiants puis d'« [...] analyser en quoi ces connaissances se rapprochent ou non de ce qui est attendu lors d'une résolution standard [...] » Toutefois, c'est une autre avenue qu'ils ont choisie, celle des premiers mouvements, c'est-à-dire « les façons d'entrer dans les résolutions proposées par les étudiants [...] En tant que possibilités d'action identifiées à partir du faire mathématique des étudiants, un tel travail d'analyse nous conduit à apprécier le potentiel de ce genre d'activité sans avoir à faire appel aux concepts de "savoir de référence" ou de "connaissance" tels que nous les entendons habituellement. » (MAHEUX & PROULX p. 37). Cet extrait suscite chez moi un commentaire et une question. D'abord, le commentaire : ce qui est attendu peut être l'aboutissement, pas nécessairement le chemin pour y arriver. La didactique cherche à concevoir des tâches de telle manière que l'aboutissement puisse, autant que possible, témoigner d'une mise en œuvre de connaissances pertinentes au regard du savoir visé. Mais ce n'est évidemment pas garanti. Dans ce cas, c'est la tâche qui fait défaut et pas l'élève (cf. GIROUX 2008, MARGOLINAS 2005, RENE DE COTRET sous presse). Ensuite, la question : Si MAHEUX & PROULX ne font pas appels aux concepts de « savoir de référence » ni de « connaissance » dans leur analyse, ***sur quoi s'appuient-ils pour décrire le potentiel de ce genre d'activité ? S'agit-il d'un potentiel pour faire des mathématiques ? Le cas échéant, comment reconnaître ce potentiel, comment l'observer sans référence aux savoirs mathématiques ?***

Lorsque les auteurs disent que « Les étudiants confrontés à ces tâches ont abordé leur résolution au moyen d'actions mathématiques variées, témoignant de lectures différentes de ces équations. » (MAHEUX & PROULX p. 38) ne s'appuient-ils pas sur une référence aux savoirs mathématiques ? Si cette référence n'est pas nécessaire, ***est-ce à dire qu'un « non mathématicien », qui ne saurait, même implicitement, se référer aux savoirs ou connaissances mathématiques, pourrait produire la même description ?***

L'analyse de la 1^{re} équation propose que : « C'est ici le raisonnement qui prime, l'enjeu n'étant pas d'appliquer correctement un algorithme (mouvement par opérations), de faire appel à un fait mathématique pertinent (mouvement par lois), mais plutôt de mettre en œuvre un travail déductif similaire à celui rencontré autour de la preuve » (MAHEUX & PROULX p. 40). Je ne suis pas tout à fait convaincue par cette analyse. ***Les étudiants ne feraient-ils pas simplement appel à un fait mathématique bien connu à leur niveau, soit : lorsqu'on a des fractions équivalentes, on a $a/b = ka/kb$?***

Dans le traitement de la 2^e équation, la règle « le produit des extrêmes est égal au produit des moyens » est évoquée. ***Ne s'agit-il pas là d'un savoir mathématique qui sert de référence pour analyser la production ?***

Par ces différentes questions, je cherche, somme toute, à identifier ***ce que l'analyse réalisée a permis de voir qui n'aurait pas été vu avec une référence au savoir***. On pourrait, en contrepartie, se demander : ***que permettrait de plus une analyse faisant référence au savoir ?***

Enfin, si l'élément contre lequel les auteurs en ont est principalement le caractère de représentation des savoirs, dans le sens de re-présenter pour présenter à nouveau, comme le suggère cette citation : « [...] *cette approche par le faire mathématique, qui ne pose pas de rapport de représentation entre ce qui est observé et de supposés « savoirs mathématiques » ou « connaissances des élèves » [...] »* (MAHEUX & PROULX p. 41) alors là je suis d'accord avec eux ! C'est notamment les problèmes que posait ce type de représentation parfois attribué au savoir qui m'ont conduit vers la perspective éactionniste. J'ai hâte de poursuivre la discussion avec vous messieurs !

Bibliographie

CHEVALLARD Y. (2012), *Des programmes, oui. Mais pour faire quoi? Vers une réforme fondamentale de l'enseignement*. Texte issu d'une présentation réalisée le 3 mars 2012 à l'IFÉ (ENS-Lyon). [<http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale-chevallard>]

CHEVALLARD Y. (2011), La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD In : Margolinas, C., Abboud-Blanchard, M., Bueno-Ravel, L., Douek, N., Fluckiger, A., Gibel, P., Vandebrouck, F., & Wozniak, F. (Eds.). *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CONNE F. (1992), Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en didactique des mathématiques* **12.2-3**, 221-270.

GIROUX J. (2008), Conduites atypiques d'élèves du primaire en difficulté d'apprentissage, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **28.1**, 9-62.

MARGOLINAS C. (2005), Les bifurcations didactiques : Un phénomène révélé par l'analyse de la structuration du milieu. In *Balises pour la didactique des mathématiques* (cédérom), A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), 1-12, La Pensée Sauvage, Grenoble.

MATURANA H.R.& VARELA F.J. (1994), *L'arbre de la connaissance. Racines biologiques de la compréhension humaine*, Addison-Wesley, Paris.

RENE DE COTRET S. (Sous presse) Un sujet multiple, de multiples sujets... et autant de milieux? *Actes du Colloque du GDM : Expériences mathématiques uniques et multiples*, UQAT, Val d'Or, 5-7 juin 2013.

RENE DE COTRET S. (1998), Quelques questions soulevées par l'adoption d'une perspective « bio-cognitive » pour l'étude de relations du système didactique. *Séminaire DidaTech, Didactique et technologies cognitives en mathématiques*, Séminaire n° 184, 161-178, Laboratoire Leibniz-IMAG, Grenoble.

SOPHIE RENE DE COTRET

Département de didactique

Université de Montréal

sophie.rene.de.cotret@umontreal.ca

LALINA COULANGE

LE FAIRE MATHÉMATIQUE : UNE NOUVELLE OUVERTURE THÉORIQUE ET MÉTHODOLOGIQUE POUR ÉTUDIER LES CONNAISSANCES ET LES SAVOIRS ?

(Débat : réaction)

Abstract. Mathematical doing: New theoretical and methodological perspective for studying knowledge and knowing. In their research work, MAHEUX and PROULX propose to take distance from mathematical "knowledge" and "knowing" and to focus on mathematical doing. The path both theoretical and empirical that they investigate leads me to question further the role of mathematical knowledge and knowing in the research in didactic of mathematics. Do mathematical knowledge and knowing appear as 'real' or theoretical objects in didactic studies? How do "knowledge and knowing" influence the ways in which a researcher may observe and analyse the learning/teaching of mathematics?

Résumé.

Pour mener leurs analyses didactiques, MAHEUX et PROULX proposent de ne plus se référer aux savoirs et connaissances mais au "faire mathématique" dont ils donnent une définition théorique. L'étude que je développe de cette proposition me conduit à interroger plus avant le rôle des connaissances et des savoirs dans les recherches en didactique des mathématiques. En quoi les connaissances et les savoirs constituent-ils des objets théoriques ou réels, des outils d'observation ou d'analyse pour le chercheur en didactique ?

Mots-clés : connaissance(s), savoir(s), activité(s), observation

Introduction

MAHEUX & PROULX ouvrent eux-mêmes le débat en proposant *d'abandonner* les idées de savoirs et de connaissances mathématiques. Voilà une proposition qui paraît audacieuse, voire polémique dans le champ de la didactique des mathématiques que d'aucuns définissent comme la science des conditions de diffusion des connaissances mathématiques ! La proposition des auteurs mérite pourtant d'être entendue. Elle nous invite à nous interroger fortement sur le rôle des « connaissances » et des « savoirs » ou du couple « connaissance et savoir » dans la recherche en didactique.

À travers ma réaction, je souhaite commencer par partager avec les auteurs et le lecteur de la revue, différentes questions qui ont émergé au fil de ma lecture. Dans quelle mesure les connaissances et les savoirs mathématiques constituent-ils des

objets réels ou théoriques en didactique des mathématiques ? Les connaissances participant à la construction des savoirs mathématiques sont-elles toujours mathématiques ? Qu'observe le chercheur en didactique dans la classe de mathématiques : des connaissances, des savoirs, de l'activité ... ou du *faire* au sens défini par MAHEUX & PROULX ?

Enfin, je reviendrai sur ce que recouvre le *faire mathématique*. Finalement, à travers le changement de paradigme proposé par MAHEUX & PROULX, s'agit-il véritablement d'abandonner les connaissances et les savoirs mathématiques ou de faire un pas de côté par le biais de l'étude du *faire mathématique*, afin de mieux les appréhender ?

1. Savoir et connaissance mathématique : objets réels ou théoriques ?

En première partie de leur article, les auteurs développent un argumentaire en faveur de l'abandon des savoirs et des connaissances mathématiques. Ce faisant, ils soulèvent des questions que je vois comme relatives à une réification¹ potentielle des notions de connaissances et de savoirs dans les recherches en didactique des mathématiques. Les connaissances et les savoirs sont-ils des objets réels ou des construits théoriques ?

Quand MAHEUX & PROULX posent la question de savoir s'il est possible théoriquement, « de considérer l'activité mathématique (des élèves par exemple), sans y voir la manifestation de connaissances possédées *a priori* (par ces mêmes élèves) cherchant à s'approcher de savoirs prédéfinis » (MAHEUX & PROULX, p. 24), les connaissances et savoirs sont assez clairement entrevus ici, comme étant des objets « réels ». De fait, les savoirs mathématiques recouvrent ce que CHEVALLARD (1994) appelle des *domaines de réalité* qui les font exister ou « préexister » pour les individus, au moins pour ceux, acteurs au sein d'institutions didactiques (élèves, enseignants et même didacticiens). Cette forme de préexistence peut également concerner les connaissances mathématiques (en tout cas, celles des élèves) si celles-ci sont envisagées à l'aune de leur proximité avec des savoirs, eux-mêmes préexistants, voire réifiés.

Il ne faut cependant pas perdre de vue que savoirs et connaissances font l'objet de constructions théoriques dans le champ des recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. De nombreux chercheurs en didactique des mathématiques ont essayé et essaient encore de définir connaissance et savoir mathématiques.

¹ Au sens philosophique du terme : chosification ou action de transformer un concept, un objet abstrait en un objet concret.

Par exemple, une connaissance en théorie des situations didactiques est caractérisée comme *moyen de prise de décision ou de choix* dans une situation (BROUSSEAU 2010), et le savoir est appréhendé comme *le fruit de l'action humaine institutionnelle* dans le cadre de la théorie anthropologique (BOSCH & CHEVALLARD 1999). Au sein d'une théorie didactique, de telles définitions ne vivent d'ailleurs pas de façon isolée, mais sont mises en réseau avec d'autres concepts issus de la théorie (par exemple avec la notion de situation didactique dans le cadre de la théorie des situations). La distinction entre savoir et connaissance (comme celle citée dans le texte, proposée par CONNE en 1992) peut d'ailleurs parfois s'avérer davantage reprise et opérationnalisée que les définitions mêmes et isolées d'un savoir et d'une connaissance.

Dans mes travaux récents au sujet de l'institutionnalisation, j'ai ainsi été frappée par la diversité des définitions et redéfinitions théoriques, attenantes à l'idée même de savoir, au sein de différentes théories didactiques. Un inventaire à la Prévert des mots-clés ou de qualificatifs associés à *savoir*, dans le seul champ de la didactique des mathématiques, devient rapidement long et illustre la diversité théorique sous-jacente.

Toutefois, comme MAHEUX & PROULX le soulignent à juste titre, les didacticiens n'échappent peut-être pas toujours à certains pièges, liés aux jeux de langage spécifiques de l'usage des mots connaissances et savoirs.

Quand un chercheur en didactique des mathématiques parle du savoir mathématique, ne se réfère-t-il pas toujours doublement à un domaine de réalité (celui d'un texte de savoir préexistant au sein d'une institution didactique) et à une théorie didactique ? Cette double référence conduit peut-être à des ambiguïtés si ce n'est dans les travaux de recherche en didactique des mathématiques eux-mêmes, du moins dans leur diffusion ou dans la réception qui peut en être faite.

S'agit-il pour autant d'une impasse scientifique qui nécessite comme le suggèrent les auteurs du texte, un changement de paradigme ? En d'autres termes, doit-on abandonner de parler de, mais aussi de construire théoriquement les notions de savoirs et de connaissances mathématique, à cause de la réification potentielle de ces notions ?

2. Les connaissances sont-elles mathématiques ?

Dans la contribution de MAHEUX & PROULX, les idées de connaissances et de savoirs sont parfois mises sur le même plan. Elles méritent peut-être d'être davantage distinguées à divers égards. Notamment quelle que soit la théorie didactique convoquée, les savoirs demeurent *a priori* mathématiques, en est-il de même pour les connaissances ?

Comme RODITI le rappelle dans son texte introductif, BROUSSEAU (1998) a parlé de types de connaissances ou plus récemment, de formes de connaissances à même de permettre la construction d'un même savoir mathématique. Dans le cadre de la théorie des situations, à l'instar de LAPARRA et MARGOLINAS (2010), on peut adopter une définition très large de la connaissance comme étant ce qui réalise l'équilibre entre le sujet et le milieu dans une situation didactique et dès lors, à même d'inclure des connaissances du corps, des connaissances dans l'action, des connaissances de l'interaction, etc. En adoptant ce point de vue sur la connaissance, ne se rapproche-t-on pas du point de vue du *faire mathématique* défendu par MAHEUX & PROULX, tout en continuant à parler de connaissance ?

Toutefois si l'on définit les connaissances de manière aussi large, parle-t-on toujours d'une *connaissance mathématique* telle qu'elle a pu être définie à l'origine au sein de la théorie des situations didactiques, c'est-à-dire d'une connaissance à même d'acquérir une fonction de savoir mathématique au cours d'un processus d'institutionnalisation (BROUSSEAU 1998, BESSOT 2011) ? Dans les exemples mis à l'étude dans les travaux menés en collaboration avec MARGOLINAS (LAPARRA & MARGOLINAS 2010, MARGOLINAS et WOZNIAK 2012), il semble que les connaissances concernées (liées à l'énumération, ou au rôle du nombre pour mémoriser une position) rentrent dans ce cadre, même si les savoirs mathématiques concernés n'existent pas *a priori* dans des institutions mathématiques de référence.² Mais est-ce toujours le cas ?

Autrement dit, toute *connaissance participant à la construction d'un savoir mathématique* peut-elle être considérée comme *mathématique* ?

En lien avec d'autres cadres théoriques que celui de la théorie des situations en didactique des mathématiques, cette question renvoie, entre autres, à l'idée de *connaissances cachées* développées dans d'autres travaux en didactique (CASTELA 2008 ; HOUEMENT 2011), voire aux *adaptations de connaissances*³ distinguées dans le cadre de la double approche ergonomique et didactique (ROBERT 2005, 2008).

C'est aussi une question qui se trouve au cœur de l'étude de la différenciation dans les apprentissages en mathématiques, à l'origine de certains des travaux précités.

² Ce qui confère un caractère que ces auteurs qualifient de *transparent* à ces savoirs dans l'institution didactique, à même d'éclairer plusieurs des phénomènes didactiques révélés par leurs travaux.

³ D'ailleurs exploitée dans CASTELA (op. cité) pour parler de connaissances cachées.

D'ailleurs, des recherches comme celles menées au sein du réseau RESEIDA⁴ (ROCHEX et CRINON 2011) qui croisent les points de vue didactique et sociologique afin de mieux appréhender la construction des inégalités scolaires, conduisent vraisemblablement à élargir le point de vue sur les connaissances à même de participer à la construction des savoirs mathématiques (voire disciplinaires), en considérant l'élève (et même les élèves) comme un sujet social (ou des sujets sociaux).

3. Qu'observe le chercheur en didactique des mathématiques ?

Le propos tenu par MAHEUX et de PROULX me paraît renvoyer à une autre interrogation relative à la construction d'observables ou aux outils de l'observation (de la classe) utilisés dans les recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

MAHEUX & PROULX mettent l'accent sur le fait que ce que le chercheur « voit »⁵ correspond toujours à des actions visibles (que celles-ci soient d'ailleurs matérielles, langagières, etc.) des élèves et de l'enseignant, ou pour reprendre leurs propos, à un *faire* au sens large. C'est d'ailleurs peut-être pour cela qu'ils passent de *l'activité* au *faire*, considérant à juste titre, que l'activité mathématique est déjà le fruit d'une construction (ou d'une reconstruction) théorique du chercheur.

Certes ce que le didacticien « voit » dans une classe, n'est à proprement parler ni de la connaissance, ni du savoir, ni même de l'activité mathématique. Mais qu'observe-t-il en réalité ? Autrement dit, dans quelle mesure, le chercheur en didactique construit-il des observables relatifs à la connaissance, au savoir ou à l'activité mathématique (des élèves, des enseignants) ? Voilà une question qui mérite clairement d'être posée et qui l'est incontestablement, dans le texte de MAHEUX & PROULX.

Cette question a d'ailleurs déjà été soulevée indirectement, dans le cadre de la double approche didactique et ergonomique. ROBERT (2008) précise en effet qu'à travers les analyses *a priori* d'énoncés et de déroulements, effectuées dans ce cadre, on n'accède⁶ au mieux qu'aux activités (parfois *a minima* et *a maxima*) des élèves et non à leurs connaissances. Pourtant, dans l'analyse *a priori* d'un énoncé, il s'agit bien de déterminer les éventuelles adaptations de connaissances convoquées dans

⁴ Réseau d'équipes de Recherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages piloté par ROCHEX.

⁵ Je distingue ici le fait de « voir » et « d'observer ». Observer renvoie à la construction méthodologique (et donc en partie théorique) d'observables.

⁶ Il me semble que par « accéder à », ROBERT (op. cité) parle bien « d'observer » au sens où je l'entends ici.

l'accomplissement des tâches mathématiques correspondantes. Les observables construits *via* l'analyse *a priori*⁷ ne sont donc pas sans lien avec les connaissances mathématiques. Pour autant, le propos tenu par ROBERT (op. cité) met l'accent sur le fait que ces observables se situent davantage au niveau de l'activité du sujet que de celui des connaissances (ou des adaptations de connaissances).

Ainsi différentes strates dans l'observation (*via* la construction d'observables) par le chercheur sont, possibles et de fait, sans doute diversement convoquées dans les théories didactiques : entre l'activité, la connaissance et le savoir mathématique... sans que l'on ne se soit suffisamment posé la question d'élucider les relations entre ce que le chercheur en didactique « voit », observe, voire infère à partir de l'observation.

MAHEUX & PROULX invitent le chercheur à observer de manière plus ouverte et proche de ce l'on serait à même de « voir » dans la classe de mathématique, c'est-à-dire à observer du *faire* voire du *faire ensemble*, pour étudier le *faire mathématique*. Ce faisant, ils prônent me semble-t-il, une nouvelle ouverture à la fois théorique et méthodologique qu'il convient maintenant d'interroger plus avant.

4. Le *faire* mathématique : une nouvelle ouverture ?

MAHEUX & PROULX nous incitent donc bien à étudier et à observer la classe de mathématiques, sans faire d'hypothèses sur l'existence de savoirs et de connaissances mathématiques. Comment passent-ils du *faire* (qui sous-entendrait tout ce que le chercheur peut « voir » comme actions à la fois collectives, individuelles, matérielles, langagières, etc.) au *faire mathématique* ? L'exemple donné sur la résolution d'équation dans leur texte éclaire la démarche à la fois théorique et pratique adoptée par les auteurs. Le passage du *faire* au *faire mathématique* repose sur l'identification de différents *mouvements* (possibles ou effectivement mis en œuvre par les étudiants ou les élèves) à même de *faire sens* en mathématiques, c'est-à-dire d'être rattachés à d'autres *faire* susceptibles d'être rattachés au domaine de l'activité mathématique. L'ouverture portée par le *faire mathématique* de MAHEUX & PROULX paraît double : d'une part dans la manière d'envisager les actions (des élèves, de l'enseignant), d'autre part dans la façon d'envisager l'horizon mathématique de ces actions. Ainsi dans l'exemple proposé, ils envisagent un mouvement qu'ils désignent par : « renverser l'équation ». Puis ils interrogent l'efficacité, la validité, le statut, la portée, etc. de ce faire, et ce, afin de répondre au défi d'en faire sens mathématiquement.

⁷ Notons au passage que dans les travaux en didactique des mathématiques, l'analyse *a priori* (qu'il s'agisse de l'analyse *a priori* de situations, de tâches ou de types de tâches) joue un rôle essentiel dans la construction d'observables.

On peut s'interroger sur la nouveauté du projet scientifique porté par le *faire mathématique*, au regard des autres approches théoriques développées en didactique des mathématiques qui ont conservé les termes primitifs de savoir et/ou de connaissance. Par exemple, la référence faite à un domaine d'activité (celui des mathématiques) pour passer du *faire* au *faire mathématique* peut faire penser au projet original de la théorie anthropologique du didactique qui vise à dépasser les domaines de réalités liés aux savoirs, en envisageant les savoirs aussi comme des pratiques sociales (CHEVALLARD 1994).

Pour autant, j'entrevois bien des aspects nouveaux dans le point de vue exposé par MAHEUX & PROULX sur le *faire mathématique*. Il me semble que les auteurs nous préviennent à juste titre de certains risques inhérents à l'activité de recherche en didactique des mathématiques. Le chercheur en didactique est-il toujours plus ou moins emprisonné par un (ou plusieurs) texte(s) de savoir mathématique ? Peut-il objectiver la notion de connaissance, sans chercher à la ramener à des éléments textuels (et dès lors préexistants et figés) des savoirs mathématiques ? Enfin, le chercheur, mesure-t-il les écarts entre ce qu'il « voit », ce qu'il « observe » dans la classe et les connaissances et les savoirs mathématiques qu'il cherche à étudier ?

Ces questions centrales dans l'article de MAHEUX et PROULX, méritent toute notre attention. J'espère en avoir convaincu le lecteur au fil de ma réaction.

Toutefois, l'ouverture méthodologique et théorique prônée par ces deux auteurs nécessite-t-elle d'abandonner les idées de connaissances et de savoirs mathématiques ? Ou bien le *faire mathématique* représente-t-il un pas de côté nécessaire pour étudier les connaissances et les savoirs, de façon plus ouverte et objective ?

Quoiqu'il en soit, le changement de paradigme proposé par ces deux auteurs permet visiblement de lever une certaine illusion de transparence sur les notions de connaissance et de savoir en didactique des mathématiques.

Bibliographie

BESSOT A. (2011), L'ingénierie didactique au cœur de la recherche en théorie des situations didactiques, dans *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (Eds Margolinas & alii), 29-56, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (2010), Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques, [en ligne : http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf, consulté le 27 janvier 2014]

BOSCH M. & CHEVALLARD Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs : objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **19.1**, 77-124.

CASTELA C. (2008), Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes, dans *Perspectives en didactique des mathématiques* (Eds Rouchier & Bloch), 89-114, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1994), Les processus de transposition didactique et leur théorisation, dans *La transposition didactique à l'épreuve* (Eds. Arsac & alii), 135-180, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CONNE F. (1992), Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **9.1**, 71-116.

HOUEMENT C. (2011), Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques à l'école, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **16**, 67-96.

LAPARRA M. & MARGOLINAS C. (2010), Milieu, connaissance, savoir. Des concepts pour l'analyse de situations d'enseignement, *Pratiques* **145.146**, 141-160.

MARGOLINAS C. & WOZNIAC F. (2012), *Le nombre à l'école maternelle, une approche didactique*, De Boeck : Bruxelles.

ROBERT A. (2005), Deux exemples d'activités en formation des enseignants de mathématiques du second degré, *Petit x*, **67**, 63-76.

ROBERT A. (2008), Problématique et méthodologie communes aux analyses des activités des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques, dans *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (Ed. Vandebrouck), 31-68, Octarès, Toulouse.

ROCHEX J-Y. & CRINON J. (2012), *La construction des inégalités scolaires, au cœur des pratiques et dispositifs d'enseignement*. PUR Coll. Paideia, Rennes.

LALINA COULANGE

97 rue Lafontaine

33800 BORDEAUX

lalina.coulanges@espe-aquitaine.fr

JEROME PROULX, JEAN-FRANÇOIS MAHEUX

FAIRE MATHÉMATIQUE : UN DEBAT PORTEUR

(Débat : réponse)

Venus à la recherche en didactique des mathématiques dans des environnements où les discussions ont toujours été très vives, nous ne pouvions espérer mieux que cet accueil à notre proposition concernant le *faire mathématique*. Il nous semble essentiel, d'abord et avant tout, de souligner l'ouverture des éditeurs derrière cette initiative, et des collègues qui ont bien voulu, les premiers, se risquer sur le terrain du débat avec nous. Les arguments développés par les collègues Roditi, René de Cotret et Coulangue, malgré la difficulté d'entrer sur de telles questions en l'espace de quelques pages, sont forts, sérieux et articulés. Bref : ils sont porteurs pour un débat que nous sommes ravis de poursuivre et même d'alimenter. Nos collègues soulèvent de nombreuses questions auxquelles nous pourrions vouloir répondre, mais nous proposons plutôt de les *laisser ouvertes* afin que d'autres puissent dans un premier temps s'y engager.

La proposition que nous exprimons dans notre article va à contrecourant des mouvances usuelles et culturelles en didactique des mathématiques. Les curriculums sont remplis de savoirs mathématiques, les enseignants les enseignent, les apprenants les apprennent, les évaluateurs les évaluent... Les savoirs et les connaissances sont là, c'est indiscutable. Décider de ne plus les considérer, laisser entendre qu'il faut penser autrement n'apparaît pas très plausible. Nous avons néanmoins tenté l'exercice de pensée, en termes de *faire mathématique*. Cet exercice, en lui-même, nous apparaît important : on y voit quelque chose comme une démarche de recherche, une étude, à la manière dont les artistes la pratiquent. Cet exercice engage. Il engage autant au niveau académique qu'au niveau émotif, privant d'un élément que l'on peut croire vital à notre survie comme chercheurs en didactique des mathématiques. Faire abstraction des savoirs et connaissances, comme manquer d'air, peut avoir quelque chose de paniquant et paralysant.

Nous avons rapproché le *faire mathématique* à certains éléments de l'énaction et des théories socio-culturelles, prétendant trouver dans ces théories certaines idées permettant de fonder de nouvelles analyses didactiques, en mettant de côté toute interprétation du *faire* par référence à des savoirs, au moins dans un premier temps. Il s'agit donc d'une proposition pour entrer d'abord dans le problème d'une certaine manière, d'une autre manière, en prenant le travail d'analyse du chercheur au sens étymologique du terme : on relâche, on délie (du grec *analysis*, de *ana*, « en haut » et *luein*, « lâcher »).

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 19, p. 71 - 72.

© 2014, IREM de STRASBOURG.

Voilà un chemin qu'il nous semble important d'explorer, de développer, quitte à troubler certaines certitudes en didactique des mathématiques, ne serait-ce que momentanément. Le débat, on l'avouera, est plutôt signe de santé, tant pour une revue que pour une discipline scientifique !

JEROME PROULX < proulx.jerome@ugam.ca >
JEAN-FRANÇOIS MAHEUX < maheux.jean-francois@ugam.ca >

Département de mathématiques, UQAM
C.P. 8888, Succursale Centre-ville
PK-5151
Montréal, Qc H3C 3P8

LES CHANGEMENTS DE DOMAINE DANS LE CADRE DES ESPACES DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE

Abstract. Changes of field within the Mathematical Working Space framework. Research on Mathematical Work Spaces has been developed for more than fifteen years in the field of Geometry. Taking advantage of international meetings, it has been necessary to develop this framework to other fields such as Algebra, Analysis and Probability. In this context, we are interested in articulating mathematical fields in the mathematical work. Our study on changes of field is based more specifically on Geometrical Working Space distinguishing an initial field, or source, and a final field, or resolution. Examples analyzed in this article are taken from researches in Chile and France and allow us to build a set of questions to study changes of field.

Key-words. Mathematical Working Space, Field, Genesis

Résumé. La recherche sur les Espaces de Travail Mathématique s'est développée, depuis plus de quinze ans, dans le domaine de la géométrie. A la faveur de rencontres internationales, le besoin s'est fait récemment sentir de développer ce cadre théorique à d'autres domaines mathématiques comme l'algèbre, l'analyse ou les probabilités. Nous nous intéressons, dans ce contexte, à l'articulation des domaines mathématiques dans le travail mathématique. Notre étude sur les changements de domaine s'appuie plus spécifiquement sur les Espaces de Travail Géométrique en distinguant un domaine initial, ou source, et un domaine d'arrivée, ou de résolution. Les exemples développés proviennent d'investigations menées au Chili et en France et nous permettent de proposer une grille d'analyse pour l'étude des changements de domaine.

Mots-clés. Espace de Travail Mathématique, Domaine, Genèse.

Introduction

A la suite des recherches utilisant le modèle des paradigmes géométriques et des Espaces de Travail Géométrique (Houdement & Kuzniak, 2006 ; Kuzniak, 2009), Kuzniak (2011) a ouvert la voie pour une extension à d'autres Espaces de Travail Mathématique (ETM) relatifs à l'algèbre, à l'analyse, etc. Une question qui se pose, et qui a été récurrente lors des 3^{ème} et 4^{ème} colloques ETM (24-25 octobre 2012 à Montréal et 30 juin-04 juillet 2014 à El Escorial, Madrid) est la question de l'articulation de différents domaines mathématiques de travail.

De fait, lorsque l'on pose une tâche mathématique à un élève, elle est fréquemment posée à travers un ou deux domaines mathématiques et surtout il peut arriver que, au cours du travail, il faille changer de domaine. Ce peut être pour des raisons de

programmation de l'enseignement par le professeur, c'est ce qui est appelé ETM idoine (voir section 1), ou simplement pour des raisons mathématiques pour pouvoir effectuer la tâche – les deux points de vue ne s'excluent pas.

Par exemple, un exercice de géométrie, s'il est posé uniquement dans ce domaine, bascule très souvent dans un domaine numérique ou algébrique s'il est question de grandeur. C'est en partie pour cela que le cadre des Espace de Travail Géométrique (ETG) ne recouvre que partiellement les tâches géométriques relatives à l'utilisation du théorème de Pythagore car le travail devient souvent et très rapidement numérique ou algébrique (voir à ce propos Kuzniak, 2014).

Dans l'état actuel de l'avancement des recherches dans l'environnement des ETM, seul le domaine géométrique a été pleinement étudié et nos exemples s'appuient sur les notions d'ETG, noté également ETM_G . Dans cette étude nous prenons principalement en compte les domaines de la géométrie, du nombre et de l'algèbre. Cela recouvre l'essentiel de ce qui peut être observé dans le premier cycle secondaire (grades 7-10 au Chili, grades 6-9 en France).

Dans ce texte, nous nous intéressons aux changements de domaine de travail dont l'étude a été initiée au colloque ETM 3. Le rôle de l'enseignant nous paraît essentiel et notamment l'ETM idoine qu'il élabore pour ses élèves. Cela recouvre également, pour nous, les adaptations qu'il fait en classe. Ainsi, lorsqu'il s'agit d'une situation de classe, utilisons-nous des vidéos afin de mieux comprendre et d'analyser non seulement l'ETM idoine, mais aussi les responsabilités de chacun lors d'un changement de domaine de travail.

Ainsi, les trois premiers exemples, en section 2, sont-ils relatifs à l'influence de l'ETM idoine lors d'un changement de domaine. En section suivante, nous proposons trois exemples qui traitent du rôle des genèses du modèle des ETM dans un changement de domaine. Ces exemples n'ont pas vocation à être représentatifs ni génériques. L'idée est simplement de faire ressortir des points saillants d'un changement de domaine. Ainsi, en section 4 nous proposons une grille constituée de questions centrales pour analyser un changement de domaine et, en section 5, nous abordons le cas spécial de la visualisation en géométrie. Avant de traiter ces exemples, nous exposons, en section 1, le cadre des ETM que nous utilisons pour nos analyses.

1. Cadre d'analyse

1.1. Le modèle des Espaces de Travail Mathématique

Dans Houdement et Kuzniak (1996, 2006) et Kuzniak (2004), trois types de géométrie ont été identifiées comme des paradigmes, notées GI, GII et GIII. Elles coexistent dans l'enseignement et leur fonction est de permettre à l'élève de construire son propre *Espace de Travail Géométrique* guidé par le professeur. Les

problèmes géométriques peuvent prendre différentes interprétations, avec des validations différentes, qui dépendent du paradigme et de l'institution, ce qui est pris en charge par la notion d'ETG.

Actuellement, le modèle considère plus généralement un Espace de Travail Mathématique (ETM) qui dépend d'un domaine mathématique. Ainsi, un ETG est noté ETM_G ou $ETM_{Géométrie}$, et on peut considérer des ETM d'autres domaines comme l'algèbre, $ETM_{Algèbre}$, etc. (Kuzniak, 2011). Les paradigmes permettent de caractériser les ETM (ibid.).

On distingue trois types d'ETM :

- l'ETM de référence qui est défini selon la relation au savoir, idéalement sur des critères mathématiques ;
- l'ETM idoine qui dépend d'une institution et qui est défini selon la manière dont ce savoir est enseigné dans cette institution avec une fonction propre ;
- l'ETM personnel qui dépend d'un sujet et qui est défini par la manière dont le sujet se confronte à un problème mathématique, avec ses propres connaissances et capacités cognitives.

Dans le modèle des ETM, on conçoit la conceptualisation comme le fruit d'une interaction entre un individu et des problèmes mathématiques (géométriques, algébriques,...), dans un *environnement organisé pour et par le mathématicien (géomètre, algébriste,...)* articulant deux *plans*, le plan épistémologique et le plan cognitif (ibid.).

Le *plan épistémologique* est constitué de trois *composantes* ou *pôles* : *representamen*, *référentiel théorique* et *artefact*. Le *plan cognitif* est constitué de trois processus : *visualisation*, *construction* et *preuve*. Pour décrire l'articulation de ces deux plans, on considère trois *genèses* (ibid.) :

- Une *genèse sémiotique* basée sur les registres de représentation sémiotique qui confère aux objets tangibles de l'ETM un statut d'objet mathématique opérationnel.
- Une *genèse instrumentale* qui permet de rendre opérationnel les artefacts dans le processus de construction.
- Une *genèse discursive* de la preuve qui donne un sens aux propriétés pour le mettre au service du raisonnement mathématique.

Les *genèses* de l'ETM permettent une articulation entre les plans et leurs composantes respectives. Cette articulation ne doit pas se comprendre comme la réunion de trois relations isolées entre deux composantes des plans épistémologique et cognitif, mais plutôt comme une relation activée conjointement

par deux, voire trois, genèses. C'est dans cette perspective que Kuzniak et Richard (2014) ont défini trois *plans verticaux* reprenant les genèses deux à deux : sémiotique-instrumental (sem-inst), sémiotique-discursif (sem-disc) et instrumental-discursif (inst-disc).

Pour le chercheur, il est important d'identifier les genèses activées par un professeur (ETM idoine) et les genèses privilégiées par un élève lors de la réalisation d'une tâche mathématique (ETM personnel).

1.2. ETM associé à un Domaine

Kuzniak et Richard (2014) précisent que « l'espace ainsi conçu désigne un environnement pensé et organisé pour permettre le travail des individus résolvant des problèmes mathématiques ». Ainsi pourrions-nous associer à tout ensemble de problème un ETM permettant de les résoudre. Néanmoins, l'espace de travail est le fruit d'une organisation qui lui donne une structure et il est nécessaire de spécifier cette structure. Le plus simple est de concevoir un ETM comme étant associé à un domaine mathématique. Un domaine des mathématiques est une partie des mathématiques qui est définie par des objets, des représentations de ces objets, un référentiel théorique portant sur ces objets (on reconnaît là les composantes du plan épistémologique). Ce domaine doit avoir une structure cohérente du point de vue mathématique et épistémologique. Il nous semble alors que le meilleur garant est que cette partie, pour être considérée comme un domaine, soit reconnue comme tel par la communauté des mathématiciens. Ainsi pouvons-nous parler d'ETM de la géométrie, de l'algèbre, de l'analyse, des probabilités, etc.

La notion de domaine nous semble très importante car c'est à ce niveau que l'on peut identifier les paradigmes qui caractérisent les ETM. Ils permettent également de préciser les représentations, les artefacts, les propriétés des objets, etc.

La notion de domaine doit être distinguée de celle de cadre au sens de Douady (1986). En particulier, un cadre contient les images mentales des élèves¹, leurs connaissances, ce qui n'est pas le cas d'un domaine qui est essentiellement mathématique. Si le cognitif est directement pris en charge dans un cadre, en revanche il n'est pas présent dans la notion de domaine. Dans le modèle des ETM que nous utilisons, le cognitif est considéré dans le plan cognitif et les images mentales d'un sujet peuvent être considérées à travers la notion d'ETM personnel.

Les objectifs sont également différents. La notion de cadre a été introduite dans la perspective d'un jeu de cadre, en le combinant avec une dialectique outil-objet, pour créer des déséquilibres, de manière consciente par l'enseignant, dont l'objectif

¹ Douady précise : « Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée. » (Douady, 1986, p. 11).

est la construction de nouvelles connaissances, dans une perspective de conceptualisation. Notre objectif consiste plutôt en l'étude du travail mathématique proposé par l'enseignant à ses élèves, sans nécessairement des notions nouvelles, sans forcément se centrer sur une notion. De plus, nous ne nous plaçons pas uniquement au niveau d'une notion particulière, éventuellement nouvelle, comme dans la dialectique outil-objet, nous nous intéressons plus à un système de fonctionnement plus global : lors de changements d'ETM, des connexions s'opèrent-elles entre ETM ? et sous la responsabilité de qui, professeur ou élève ?

1.3. ETM local et global

Néanmoins, un domaine mathématique peut être *trop gros* pour l'étude didactique. On pourra ainsi se restreindre à un *sous-domaine* comme l'algèbre linéaire dans le domaine de l'algèbre, les statistiques descriptives dans les statistiques ou encore les grandeurs dans le domaine de la géométrie. De même, on pourra se restreindre à la signification d'un domaine dans une institution scolaire, avec les programmes d'études, comme l'ETM de l'algèbre de l'enseignement secondaire chilien ou français. L'important est toujours d'avoir une certaine consistance mathématique et une reconnaissance de ce sous-domaine par la communauté des mathématiciens².

Enfin, pour une étude plus ciblée, parfois nécessaire à l'étude didactique, on pourra parler d'ETM *local* lié à un concept, une notion, un petit groupe d'objets, quelques connaissances comme dans « ETG autour du théorème de Thalès ». Mais cette notion d'ETM local n'est pas nécessairement liée aux connaissances mathématiques. Par exemple, on peut penser à un ETM local lié à des artefacts, comme pour l'analyse d'une tâche proposée avec un logiciel ou encore un ETM « de la règle et du compas » (encore que l'on pourrait ici discuter du caractère local). On peut également penser à définir un ETM local associé à un registre de représentation³, surtout lorsque l'on ne dispose que d'un registre pour représenter les objets ou que, si l'on possède plusieurs registres, ceux-ci ne sont pas ou mal coordonnés. Nikolantonakis et Vivier (2010, 2013) ont mis en évidence des différences de stratégies, de traitements, d'interprétations dans des tâches sur les nombres entiers dans des bases autres que dix que l'on pourrait interpréter comme un travail dans des ETM différents : certains étudiants effectuaient la tâche dans l'ETM local du registre de la base proposée alors que d'autres changeaient de registre avant d'effectuer la tâche.

² Ici, le sens est étendu car il ne s'agit pas uniquement des chercheurs en mathématiques. On pourra par exemple penser aux enseignants de mathématiques pour les sous-domaines dans une institution scolaire.

³ On peut d'ailleurs interpréter le travail de Lambert sur l'irrationalité de π comme un changement d'espace de travail : il avait commencé, sans succès, à chercher une démonstration dans le système décimal avant de passer aux fractions (Bullynck, 2009).

On relève donc plusieurs types d'ETM : des ETM associés à un domaine, des ETM associés à un sous-domaine et des ETM locaux auxquels il faut ajouter des ETM globaux. Un ETM global regroupe l'ensemble des composantes cognitives et épistémologiques dans le travail mathématique de plusieurs domaines. Cette notion d'ETM dans son sens global est à réserver dans les cas où les registres, domaines, notions, etc. en jeu sont suffisamment bien intégrés, d'une manière cohérente. Sans cette cohérence il semble difficile d'utiliser cette notion d'ETM dans son sens global. On peut d'ailleurs interpréter comme un enjeu majeur de l'enseignement des mathématiques le fait d'aboutir à un ETM global coordonnant les ETM associés à des domaines mathématiques. On peut en particulier penser que l'ETM personnel d'un enseignant de mathématiques est global ce qui lui permet d'élaborer un ETM idoine qui prend en charge plusieurs domaines, même si l'on peut interroger la coordination des ETM associés aux différents domaines au sein de cet ETM idoine.

On ne peut manquer de remarquer que le découpage ainsi proposé est proche des niveaux de codétermination didactique *discipline, domaine, secteur, thème* de Chevallard (2001). Néanmoins, la structure des ETM est différente car, par exemple, un *thème* est nécessairement lié à une unique technologie alors que l'on peut très bien penser un ETM local plus gros, comme un ETM local de la géométrie sur le triangle, ou un ETM lié à un registre de représentation. En outre, le modèle des ETM permet de prendre en compte les artefacts utilisés et les preuves acceptées en lien avec un paradigme.

1.4. Changement d'ETM

Sans que cela remplace les types d'ETM développés par Kuzniak (2011), référence, idoine et personnel, nous avons défini quatre types d'ETM dans le but d'étudier un changement de domaine. Avec ces quatre types d'ETM, on peut considérer :

- un changement d'ETM locaux au sein d'un même domaine ;
- un changement d'ETM associés à un sous-domaine au sein d'un même domaine ;
- un changement d'ETM associés à deux domaines différents, ou plus simplement un changement de domaine, ce changement pouvant s'effectuer ou non au sein d'un ETM global.

Dans cet article, nous considérons uniquement la dernière situation même si l'on pourrait penser à des adaptations pour les deux premières. Les changements de domaine sont traités à partir d'un énoncé et, bien entendu, il faudrait considérer plus d'énoncés différents pour pouvoir prétendre à des conclusions plus générales.

Nos analyses se focalisent sur le travail mathématique ne faisant intervenir que deux domaines : le premier est le domaine *source*, ou initial, le domaine principal

de l'énoncé que nous notons D_s , et le second est le domaine de résolution D_r . Il est à noter que l'énoncé, s'il est exprimé essentiellement dans D_s peut également avoir des traces du domaine D_r ce qui peut faciliter le changement de domaine, nous y reviendrons. En outre, l'expression « domaine de résolution » est à prendre dans le sens large de « domaine but » ou « domaine d'arrivée » mais avec cette appellation, nous insistons, à la suite de Douady (1986), sur le caractère producteur en mathématiques des changements de cadre. On pourrait penser que D_s a une dimension objet et que D_r a une dimension outil. Cependant, cela ne recouvre pas toutes les situations et notre point de vue se distingue une fois de plus de la dialectique outil-objet. En particulier il n'y a pas nécessairement de problème à résoudre, comme par exemple dans un changement de domaine où D_r est la géométrie dans une perspective de visualisation.

En dialectique outil-objet, le changement de cadre est motivé par un objectif d'apprentissage de manière consciente par l'enseignant. Qu'en est-il dans un changement d'ETM ? Bien sûr il peut y avoir un objectif d'apprentissage, mais ce n'est pas nécessairement la seule raison. Nous tentons plutôt d'y voir un manque dans l'ETM $_{D_s}$ que l'ETM $_{D_r}$ peut combler, qui peut bien entendu être pensé consciemment par l'enseignant et inséré dans l'ETM idoine qu'il élabore (un ETM idoine *global* dans le sens où il inclut deux domaines, voir ci-dessus). Ce manque peut tenir à différentes raisons qui sont essentiellement reliées aux composantes de l'ETM $_{D_s}$ et qui se rattachent à au moins une des trois genèses : sémiotique, instrumental ou discursif.

Comme dans (Kuzniak, 2014), un des deux domaines considérés, D_s ou D_r , est la géométrie afin de pouvoir s'appuyer sur les paradigmes géométriques et les ETM $_G$. Dans le cas où la géométrie est le domaine source, très souvent dans l'enseignement secondaire, le domaine de résolution est le domaine du nombre, de l'algèbre ou des fonctions (éventuellement de l'analyse). Et si la géométrie est le domaine de résolution, on peut penser que c'est un recours à la visualisation, rôle très particulier de la géométrie (Kuzniak, 2011), qui est requis pour combler un manque dans le domaine initial. C'est ainsi que l'on peut interpréter le travail de Barrera (2012) : on part d'un domaine source D_s numérique pour visualiser, dans le sens de géométriser, la multiplication dans différents ensembles de nombres – D_r est la géométrie donc.

2. Influence de l'ETM idoine sur le changement de domaine

Nous proposons dans cette section, sans prétendre à l'exhaustivité, trois cas où l'ETM idoine influence les changements de domaines. Pour chaque cas, nous nous focalisons plus particulièrement sur un point : paradigme, variable didactique et indice dans D_s du changement de domaine. Mais, bien entendu, l'influence est exercée par un ensemble de facteurs dont notamment le contrat didactique que nous n'abordons pas directement.

2.1. Influence des paradigmes

Le premier exemple a déjà fait l'objet de plusieurs études (Jacquier, 1995 ; Houdement & Kuzniak, 1999 ; Montoya-Delgadillo, 2010, 2014) :

On construit un carré ABCD de côté 5 cm.

1) Calculer BD.

2) Situez le point I du segment BD tel que BI=2,8 cm, le point J du segment BC tel que JC=3 cm.

Est-ce que la droite (IJ) est parallèle à la droite (DC) ?

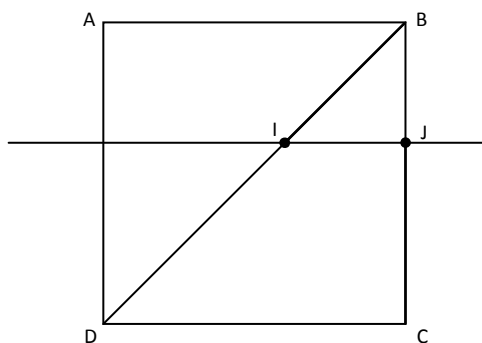


Figure 1

Cet énoncé fait référence à deux domaines mathématiques : le domaine de la géométrie, incluant les grandeurs, et le domaine du nombre (contenant au moins les rationnels, écritures décimale et fractionnaire, et les racines carrées, c'est-à-dire le domaine du nombre de fin de collège). La différence entre les grandeurs et les nombres est souvent faible compte tenu de l'importance dans l'enseignement des grandeurs mesurées qui font que l'on confond facilement une grandeur avec le nombre le mesurant dans une unité donnée.

On reconnaît les objets usuels de la géométrie, carré, point, segment, droite – et la propriété du parallélisme –, auxquels on ajoute les objets des grandeurs, longueur (BD, côté, BI, JC), mesures et unité (3 cm, 2,8 cm ; 5 cm). C'est dans les mesures que l'on trouve les objets du domaine du nombre.

La question 1) demande de calculer BD et non de mesurer. Compte tenu de l'ETM idoine de l'institution scolaire, il n'est pas attendu que ce calcul s'effectue avec les grandeurs⁴ mais par un calcul dans le domaine du nombre : utilisation du théorème de Pythagore, détermination de la longueur BD dans le domaine du nombre – le théorème de Pythagore, tout comme le théorème de Thalès, permet ce type de changement de domaine. Ici, il est clairement attendu l'obtention de $BD^2 = 5^2 + 5^2$

⁴ Comme cela pourrait être envisagé avec un traitement « à la Euclide » utilisant les aires.

pour avoir $BD = 5\sqrt{2}$, l'unité, le cm, étant ajouté une fois la racine carrée utilisée car les traitements $\sqrt{\text{cm}^2} = \text{cm}$ ou $\sqrt{5^2 \text{ cm}^2} = 5 \text{ cm}$ ne font pas partie de l'ETM idoine, au Chili comme en France. De fait, il y a bien un changement obligatoire de domaine afin de répondre à la question. Il est bien sûr possible de donner une valeur approchée de BD à l'aide d'une calculatrice, 7,07 cm ou 7 cm, voire 7,0 cm, en se limitant au mm ce qui correspond aux formats des données de l'énoncé, et aussi de ne donner que cette valeur approchée.

Ainsi, dans cette question 1 et compte tenu de l'ETM idoine de l'institution scolaire, le changement est clairement indiqué (*calculer* et non *mesurer*) : Ds est le domaine de la géométrie et Dr est le domaine du nombre (notons ici que la dénomination *domaine de calcul* serait plus adéquate que domaine de résolution).

En question 2) il n'y a aucune trace de Dr. De fait, la question peut être résolue en géométrie, sans changement de domaine, par une visualisation dans un paradigme GI. En effet, dans le paradigme GI, on peut répondre soit visuellement, soit avec des instruments (3 étudiants-professeurs sur les 19 de l'étude de Montoya (2010)), soit encore avec un Logiciel de Géométrie Dynamique (LGD). On conclut alors au parallélisme exception faite de l'usage possible d'un LGD car il permet une plus grande précision (utilisation d'un oracle, utilisation de zooms, avant ou arrière, adéquats pour comparer (IJ) avec la parallèle à (BC)).

Toutefois, la question et la configuration peuvent faire penser au théorème de Thalès. Dans ce cas, par un phénomène identique à la question 1, il y a un changement pour le domaine du nombre. Dans l'étude de Montoya (2010), ce sont 16 sur les 19 qui utilisent le théorème de Thalès et font donc un changement de domaine vers le domaine du nombre.

Dans l'utilisation du théorème de Thalès, le paradigme de travail, GI ou GII, modifie les réponses et aussi le travail dans Dr : nécessité d'une valeur exacte pour le paradigme GII alors que le paradigme GI peut se satisfaire d'une valeur approchée – il faudrait ici discuter d'un seuil d'acceptabilité. Il y a de fait une dépendance des ETM de la géométrie et du nombre avec d'un côté les paradigmes GI et GII et de l'autre le calcul exact et le calcul approché. Ainsi, dans GII, en utilisant les valeurs exactes $BI/BD = 2,8/5\sqrt{2}$ et $BJ/BC = 2/5$, il n'y a pas parallélisme : soit parce que les nombres que la calculatrice affichent sont différents (0,3959... et 0,4), soit parce que l'un est reconnu comme irrationnel et l'autre comme rationnel (5 étudiants sur les 19 professeurs stagiaires de l'étude (Montoya-Delgadillo, 2010 ; 2014)). En revanche, dans GI, l'utilisation de valeurs approchées permet de conclure au parallélisme (5 étudiants sur les 19) : soit en utilisant 7 cm pour BD, les fractions obtenues sont alors égales, soit en se limitant à l'égalité à 0,1 près des deux fractions. Notons que cette réponse « les droites sont parallèles » est en accord avec l'observation visuelle : 4 étudiants utilisent le

théorème de Thalès ou de Pythagore, parce qu'ils voient qu'il y a parallélisme, et 3 autres étudiants vérifient le parallélisme avec un instrument géométrique (il n'y a donc en général pas de visualisation pure, sans doute par contrat).

2.2. Influence des variables didactiques

Dans cette section nous étudions⁵ plus spécifiquement un changement en classe, au Chili, à partir d'une vidéo (Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca, Mena-Lorca, 2014). Le changement n'est pas indiqué, non nécessaire (on peut utiliser la proportionnalité et, par exemple, le produit en croix) et semble totalement naturalisé pour le professeur PN1.

PN1 travaille avec des élèves de grade 9 dans le but d'introduire le théorème de Thalès. Il s'appuie pour cela sur l'enseignement précédent sur les triangles semblables. Les tâches mathématiques reposent sur la détermination d'une longueur inconnue par un passage dans l'algèbre, avec une équation. L'équation est obtenue par les théorèmes sur les triangles semblables. L'énoncé n'est pas donné en une seule fois, il est explicité au fil du temps par l'enseignant.



2a : présentation du problème géométrique 2b : (rappel) deux raisons sont proportionnelles 2c : travail algébrique

Figure 2 : Trois phases de PN1, d'un ETM_G à un ETM_A.

La présentation commence par un exemple s'appuyant sur l'histoire, non validée historiquement, de Thalès calculant la hauteur d'une pyramide avec une représentation en 2D (figure 2a) : le Soleil, une pyramide (hauteur et ombre) et un bâton (hauteur et ombre).

La première question, posée oralement par l'enseignant, propose de revenir sur les triangles semblables en proposant les couples (3, 2) pour la pyramide et (4, 1) pour le bâton. L'enseignant (figure 2b) montre que l'égalité des rapports n'est pas satisfaite en utilisant un produit en croix ($3 \times 1 \neq 4 \times 2$). La deuxième question, toujours orale, demande de calculer la hauteur de la pyramide à partir des couples (x, 2) et (4, 1). L'égalité des rapports fournit l'équation qui est transformée par un

⁵ Une recherche sur des professeurs débutants, projet 1110988 du gouvernement chilien.

produit en croix, puis résolue pour trouver 8 (figure 2c). L'utilisation de la similitude de triangles fait apparaître ici deux implicites : les triangles sont rectangles ce qui permet d'avoir un même angle dans les deux triangles⁶ et le rapport est écrit avec les côtés jouxtant l'angle droit sans préciser les choix ni l'ordre des côtés.

Ainsi, l'énoncé est-il proposé dans D_s , domaine de la géométrie, après un changement de la dimension 3 à la dimension 2. Les objets de la géométrie, toujours avec les grandeurs, sont : pyramide, longueur, triangles, angles. Le changement de domaine vers D_r , domaine du nombre (on peut se limiter aux rationnels et de fait aux entiers avec les variables numériques retenues), pour le calcul, semble passer inaperçu pour l'enseignant. Les unités ne sont pas indiquées dans les longueurs et l'usage du théorème sur les triangles semblables non justifié : PN1 écrit directement les deux couples de nombres qui doivent être proportionnels. Le même phénomène apparaît avec le changement dans le domaine de l'algèbre.

Par ailleurs, non seulement les changements de domaine sont implicites et entièrement à la charge de l'enseignant, mais de plus ils sont inutiles avec le choix des variables didactiques⁷, que ce soit vers le domaine du nombre ou de l'algèbre car la solution est immédiate avec les grandeurs. Il n'y a pas de traitement spécifique au domaine du nombre ou de l'algèbre. Il est évident que les couples $(3u, 2u)$ et $(4u, 1u)$ ne sont pas proportionnels à cause de l'unité présente (nous plaçons volontairement l'unité de longueur u). Il n'est donc pas nécessaire de poser une égalité dans le domaine numérique, les relations multiplicatives entre grandeurs suffisent. Il en est de même de la recherche de la longueur inconnue : comme $2u = 2 \times (1u)$ alors la longueur proportionnelle cherchée est $2 \times (4u) = 8u$.

D'ailleurs, à la question « *quelle devrait être la hauteur de la pyramide pour que ce soit proportionnel ?* », les étudiants répondent « 8 » mais PN1 pousse fortement vers un travail algébrique. On peut constater que PN1 change de domaine, de la géométrie vers l'algèbre, sans promouvoir un travail dans l' ETM_G . L' ETM idoine élaboré par ce professeur est clairement orienté par une méthode systématique : quand on a une longueur inconnue, on utilise l'algèbre et une équation ce qui entraîne le changement de domaine.

2.3. Influence d'un indice de changement de domaine

Dans cette section, nous étudions un exercice sur les aires dans un rectangle. Il est accessible dès le début de l'enseignement secondaire, souvent pour une application

⁶ Cela n'est pas dit. Oralement, PN1 mentionne un angle commun par les rayons du soleil, mais ce n'est pas un angle dans les triangles.

⁷ Cependant, des situations plus complexes, notamment avec des variables numériques mieux ajustées, pourraient permettre de justifier le recours à l'algèbre.

de l'algèbre avec inconnue et mise en équation. Nous l'avons posé dans deux situations : d'une part en formation des enseignants du premier degré, en France et en Grèce avec un indice du changement de domaine Géométrie→Algèbre, en 2009 avec 26 étudiants français et 100 grecs (Nikolantonakis & Vivier, 2014), puis sans indice pour les mêmes populations, en 2013, avec 103 étudiants français et 166 grecs (Beck et al., 2014). Il s'agit d'un travail individuel écrit.

Soit le rectangle ABCD de 5 m sur 18 m de la figure ci-contre. Trouver la position du point E sur [BC], tel que l'aire de ADCE soit le double de l'aire de ABE.

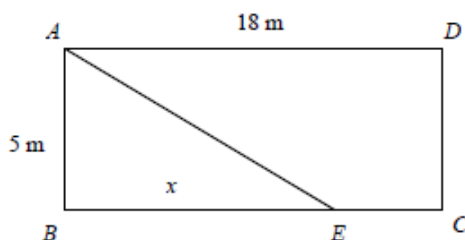


Figure 3 (donnée avec l'énoncé)

La visualisation du x sur la figure devrait orienter les procédures vers l'algèbre et plus spécifiquement vers une mise en équation⁸, il indique un changement de domaine de travail par contrat didactique. Nous postulons que x est un indice (Peirce, 1978) qui active un registre algébrique depuis la genèse sémiotique, qui aura pour conséquence un travail dans un ETM du domaine de l'algèbre. Il s'agit ici d'un élément fort de l'ETM idoine : celui qui pose le problème attend une utilisation de l'algèbre, c'est-à-dire un changement de la géométrie, Ds, vers l'algèbre, Dr.

La procédure majoritaire attendue⁹ : $(ABE) = 5x/2$; $(ADCE) = 18 \times 5 - 5x/2$ d'où l'équation $90 - 5x/2 = 5x$ que l'on résout pour trouver $x = 12$ m. Il s'agit d'une procédure avec un changement de domaine Géométrie → Algèbre. Il n'y a de fait pas de travail géométrique à proprement parler (on peut éventuellement considérer l'application des formules d'aire). Il est à mentionner toutefois qu'une décomposition méréologique¹⁰ de la figure est nécessaire afin de pouvoir mettre en

⁸ On peut se demander si l'équation est un artefact non matériel dans le sens de Rabardel (1995) ou bien s'il s'agit d'un élément activé par la genèse sémiotique.

⁹ Nous utilisons la notation grecque pour les aires des figures planes comme (ABE) pour l'aire d'un triangle et $(ADCE)$ pour l'aire d'un quadrilatère.

¹⁰ La décomposition méréologique (Duval, 2005) implique un découpage de la figure de départ en sous-figures de même dimension. Elle suppose un raisonnement basé principalement sur la perception à travers des découpages de la figure et une superposition : le pôle "espace réel et local" de l'ETG est le pôle dominant.

équation, mais cette décomposition est indiquée. Une variante de cette procédure consiste à utiliser la formule de l'aire d'un trapèze pour exprimer l'aire de ADCE : $(ADCE) = 5 \times (18 + 18 - x) / 2$. Il n'y a plus de décomposition méréologique de la figure de départ (il y a une décomposition méréologique en 1D de [BC]).

Toutefois, d'autres procédures sont envisageables où l'essentiel du travail reste dans un ETM_G, sans algèbre. En complétant le rectangle ABEF, on peut découper le rectangle initial ABCD en trois aires égales – donc une décomposition méréologique. Le tiers de l'aire de ABCD est $1/3 \times 90 \text{ m}^2 = 30 \text{ m}^2$ et donc ABEF est un rectangle d'aire 60 m^2 avec un côté de 5 m, donc l'autre côté mesure $60 \text{ m}^2 / 5 \text{ m} = 12 \text{ m}$. Cette procédure est à rapprocher de celle envisagée dans (Kuzniak, Parzysz & Vivier, 2013 ; voir aussi Kuzniak, 2014) pour un problème d'aire dans un carré. On peut aussi arriver au même résultat sur les grandeurs avec $(ABE) + 2 \times (ABE) = (ABCD)$. Des adaptations de cette procédure sont possibles, notamment avec une équation du type « $5x = 60$ », plus facile à résoudre.

Ainsi, pour ce problème, si un travail dans Ds n'est pas nécessaire, sa réalisation peut néanmoins influencer le travail dans Dr, avec des équations différentes, pouvant aller jusqu'à se dispenser du changement de domaine.

Dans la deuxième version, sans mention du « x », la tâche s'exprime entièrement dans le domaine de la géométrie, et le travail lui-même peut rester uniquement en géométrie. C'est évident dans le paradigme GI puisque l'on se contente d'une solution approchée que l'on peut obtenir, par exemple, avec un LGD du type Geogebra, ou bien par essai-erreur en papier-crayon. Le fait que la valeur trouvée par un logiciel soit exacte, par choix des variables didactiques, rend possible une résolution en géométrie dans un paradigme GII (ici, il s'agit d'un jeu GI-GII). Bien entendu, un changement de domaine vers l'algèbre est toujours possible, ce changement étant alors à la charge de l'étudiant.

Les résultats des deux expérimentations sont donnés dans la table 1 ci-après. Il n'est évidemment pas surprenant de voir que la proportion d'étudiants utilisant une mise en équation, par un changement de domaine, baisse très sensiblement entre les deux expérimentations (avec ou sans indice). En revanche, on s'aperçoit que cette proportion reste toujours forte (presque les deux-tiers) dans l'énoncé sans indice. Cette ressemblance des ETM personnels, que ce soit en France comme en Grèce, nous indique un effet fort de l'ETM idoine, identique dans les deux pays pour ce type de tâches (les pourcentages sont très proches), qui favorise l'utilisation de l'algèbre. A ce propos, il est à noter que les exercices de géométrie résolus de cette manière par l'algèbre sont fréquents dans l'enseignement secondaire. On peut aussi y voir un effet d'un positionnement dans un paradigme GII avec une procédure qui marche à *tous les coups* (avec d'autres valeurs de la solution, et aussi un intérêt pour justifier la non existence de solution).

	Non réponse	Réponse correcte	Mise en équation	Procédure arithmétique	Décomposition méréologique en 2 ou 3 aires
FR-1 (26)	8%	81%	81%	11%	8%
GR-1 (100)	14%	70%	85%	1%	15%
FR-2 (103)	16%	54%	64%	20%	23%
GR-2 (166)	10%	44%	62%	28%	17%

Table 1

Cela étant, cet ETM idoine semble permettre une connexion des ETM de la géométrie et de l'algèbre, au moins dans des situations de ce type. Mais on peut toutefois penser que ce soit au dépend d'une genèse discursive de l'ETM de la géométrie. D'ailleurs, on se rend compte de la baisse de réussite qui s'accompagne de la baisse d'utilisation d'une mise en équation. Les étudiants sont-ils « perdus » si on ne leur indique pas le changement de domaine avec un indice ? Ne peuvent-ils pas résoudre le problème sans changer de domaine ?

3. Trois exemples de changement liés aux trois genèses

Dans cette section, nous proposons trois exemples de changement de domaine en focalisant notre attention sur une des trois genèses. Bien entendu, dans chacun des cas, les trois genèses sont toujours présentes mais sans nécessairement être activées ou privilégiées. Leur importance relative varie et l'analyse permet d'identifier celle qui est au centre du changement de domaine.

3.1. La genèse sémiotique

On s'intéresse ici à un changement de registre : on travaille avec les mêmes objets, mais on change de représentations et de signes. Il s'agit d'une étude de (Montoya-Delgadillo, Mena-Lorca et Mena-Lorca, 2014) qui portait sur l'ETM-idoine élaboré par un professeur novice, PN2, lors d'une leçon en deuxième classe du lycée au Chili (grade 10) sur les systèmes d'équations linéaires à deux inconnues.

La classe commence par une explication sur ce que signifie résoudre un système d'équations linéaires : écriture symbolique, substitution de valeurs numériques dans les équations et vérification de l'égalité numérique (déjà travaillé dans la classe). Mais l'objet de la séance est de déterminer cette solution par une méthode graphique, c'est-à-dire par des traitements géométriques : tracer les droites

associées aux équations en jeu – une conversion – et analyser s’il existe ou non des solutions, ce qui dépend de la position relative des deux droites – leur intersection.

Le professeur commence par présenter les pas de la méthode graphique de manière théorique pour que les élèves appliquent ensuite cette méthode. Il y a un travail à effectuer avant le changement de domaine comme le calcul de coordonnées pour tracer les droites, même si on peut penser à d’autres procédures de tracé (un point et la pente par exemple). Le changement de domaine, de l’algèbre D_s vers la géométrie analytique D_r , est indiqué de manière explicite par le professeur qui donne les pas à suivre : « *graficar las ecuaciones* ». Les élèves ont en charge le tracé des droites sur du papier millimétré. La genèse discursive est peu activée, uniquement pour le calcul des coordonnées des points et le fait que deux points distincts déterminent une droite. La connexion entre les domaines est assurée par la connaissance *une équation du premier degré à deux inconnues détermine une droite* (avec la condition usuelle). De fait, le professeur privilégie l’usage du plan sem-inst de l’ETM avec l’usage du papier millimétré pour la production de signes dans D_r .

Mais avant les applications, l’enseignant fait une digression en présentant, comme dans les manuels scolaires, les trois cas possibles :

	<table><tr><th>Rectas secantes</th><th>Rectas paralelas</th><th>Rectas coincidentes</th></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>Hay una solución: sistema compatible.</td><td>No hay solución: sistema incompatible.</td><td>Hay infinitas soluciones: sistema compatible indeterminado.</td></tr></table>	Rectas secantes	Rectas paralelas	Rectas coincidentes				Hay una solución: sistema compatible.	No hay solución: sistema incompatible.	Hay infinitas soluciones: sistema compatible indeterminado.
Rectas secantes	Rectas paralelas	Rectas coincidentes								
										
Hay una solución: sistema compatible.	No hay solución: sistema incompatible.	Hay infinitas soluciones: sistema compatible indeterminado.								
4a : Solutions possibles pour un système.	4b : Extrait d'un manuel scolaire sur ce thème.									

Figure 4

Il est à noter que cette insertion, propre à l’ETM idoine, n’est pas du tout requise pour la méthode graphique. Nous y voyons ici l’intérêt potentiel du changement de domaine de travail : la géométrie, par la visualisation, permet d’objectiver une propriété sur le nombre de solutions aux systèmes 2×2 . Cela ne peut se voir qu’en acte dans la résolution algébrique. En effet, si le cas général est possible en algèbre, avec un appui, plus ou moins explicite, sur la notion de déterminant, les traitements sont trop complexes pour ce niveau d’étude avec 2 inconnues, 6 paramètres et des conditions sur les paramètres afin de déterminer l’ensemble des solutions.

Ce qui semble être visé ici, c’est la visualisation iconique (cf. figure 4). Ici, on peut sans doute exploiter plus en profondeur la visualisation, ce qui nécessite une

visualisation non iconique : trouver les coordonnées du point d'intersection pour avoir les solutions du système et ainsi faire de l'artefact graphique un instrument. Finalement, si l'enseignant privilégie le plan sem-inst dans le travail proposé, il semble que ce soit la genèse sémiotique qui soit visée (on pourrait ici plus spécifiquement parler de *domaine de visualisation*).

L'ETM idoine préparé par le professeur est en adéquation avec les manuels scolaires et les demandes officielles : la méthode graphique ne peut pas donner de manière générale les solutions exactes et est utilisée pour justifier la méthode algébrique. Le professeur ne mentionne jamais la distinction valeur exacte/valeur approchée, centrale ici. Cela est renforcé par le fait que les 5 systèmes linéaires de Cramer¹¹ proposés ont leur solution dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Ainsi, la méthode graphique semble donner les valeurs exactes alors qu'elle ne donne que des solutions approchées.

Contrairement à ce qui est annoncé dans la méthode, il n'y a pas de vérification. Il n'y a donc pas de retour au domaine D_s même si cela serait possible à partir d'une approximation des solutions par une méthode graphique : pour voir si les solutions sont exactes ou non et aussi pour contrôler le fait que les valeurs sont bien proches des solutions exactes (pour des raisons de continuité, l'égalité doit faire apparaître des valeurs relativement proches).

Il y a bien une genèse sémiotique dans ETM_A et dans ETM_G , mais la question ici concerne le lien entre ces deux genèses, et aussi la relation avec la genèse instrumentale. La méthode graphique reste à un niveau théorique pour justifier le nombre de solutions d'un système et constitue un artefact non instrumentalisé car uniquement basé sur une visualisation iconique. Le lien entre les deux méthodes, dans les deux domaines, ne peut se réaliser qu'à condition de faire la distinction valeur exacte/valeur approchée. Or, PN2 ne le fait pas, sans doute à cause de ses choix de système qui mènent toujours à des solutions entières. Ce travail ne semble pouvoir développer, pour aucun des deux domaines, l'ETM personnel des élèves.

3.2. La genèse instrumentale

L'exercice suivant a fait l'objet d'une séance en classe de troisième, grade 9 en France, filmée, et les élèves sont pour la première fois confrontés à ce type d'exercices.

Exercice : En remarquant que $37 = 6^2 + 1$, construire un segment de longueur $\sqrt{37}$ cm.

¹¹ Les 4 systèmes à résoudre par les élèves sont de Cramer ; le professeur a aussi présenté un autre système de Cramer, un système sans solution et un système de degré 2 avec $(-1, 6)$ comme couple solution.

Le domaine source est le domaine du nombre, D_s , et il y a une indication forte du changement de domaine vers la géométrie, D_r , avec la demande de construire un segment. La tâche est explicitement une conversion. Contrairement au cas précédent, il ne s'agit pas d'une recherche de visualisation mais plutôt d'un lien théorique avec la géométrie d'Euclide et les nombres constructibles.

Rapidement, les élèves sortent leurs calculatrices pour calculer $\sqrt{37}$ afin de pouvoir tracer le segment à la règle graduée. C'est donc l'enseignante qui doit interdire cet instrument (7 min) et demande de « construire », « une vraie construction ». L'enseignante est en effet obligée de réorienter les élèves vers le *bon* ETM_G local, alors que le changement de domaine n'était en fait pas problématique en soi. Cette réorientation est comprise par les élèves, mais ils ne savent pas vers quel ETM_G local se porter. L'enseignante doit alors donner tous les indices (à partir de 10 min) : « triangle », « $37 = 6^2 + 1^2$ », « somme entre deux carrés ? » pour finalement demander « un seul mot » (17 min) et quelques élèves répondent « Pythagore ». A la suite, puisque l'ETM_G local est clairement exposé, les élèves réussissent sans trop de difficulté l'exercice.

Le changement de domaine est explicite, D_r est la géométrie, mais c'est l'ETM_G local visé qui n'est pas explicite. En effet, pour cet exercice on peut penser soit à un ETM_G autour de la longueur de segment soit un ETM_G autour du théorème de Pythagore. C'est ce dernier qui est attendu, mais il n'y a pas suffisamment d'indice pour les élèves. L'enseignante explicite d'abord le travail à effectuer avant le changement de domaine $(\sqrt{37})^2 = 6^2 + 1^2$, ce qui n'a rien d'évident sauf si l'on anticipe une utilisation du théorème de Pythagore. Cet indice, une égalité de Pythagore, n'est finalement pas suffisant et, par des questions de l'enseignante, tout revient à ajouter dans l'énoncé « en utilisant le théorème de Pythagore » qui précise l'ETM_G local. Les exercices suivants, du même type, ne pose plus de problème, l'ETM_G attendu est bien identifié par les élèves.

Il est à noter que le travail préalable à effectuer pour un changement vers un ETM_G local autour de la longueur des segments, un calcul approché de $\sqrt{37}$ avec une calculatrice, ne pose pas de problème aux élèves. Ainsi, les élèves activent bien dans leurs ETM personnels une genèse instrumentale, avec la calculatrice puis la règle graduée, mais qui n'est pas celle de l'ETM idoine voulue par l'enseignante, avec le théorème de Pythagore comme instrument. La genèse sémiotique est également activée par les élèves et l'on ne relève pas ce problème d'ETM_G local, sans doute parce que les signes sont ceux du domaine de la géométrie, D_r , et que le fait que l'on considère tel ou tel ETM_G local n'est pas sensible. La genèse discursive est, malgré l'utilisation du théorème de Pythagore, en retrait et c'est le plan sem-inst qui est ici privilégié.

Les genèses sémiotiques et instrumentales sont dans deux ETM_G locaux différents qui ne semblent pas connectés, mais le malentendu n'apparaît que pour les genèses

instrumentales. Même si on peut voir à travers cet exercice une tentative de cohésion entre les domaines du nombre et de la géométrie, le travail proposé ne permet pas une connexion de ces ETM_G locaux. Ce choix par l'enseignante est sans doute lié à une tradition concernant les nombres constructibles, mais il n'y a pas de retour à Ds sur la nature des nombres en jeu.

3.3. La genèse discursive

L'exercice suivant a été donné en travail maison, à rendre, en classe de Première Scientifique, grade 11, en France. Ici, comme nous le verrons, c'est le choix du travail initial dans le domaine source, la géométrie, qui détermine le domaine potentiel pour le changement qui est laissé à l'entière responsabilité de l'élève.

Soit un triangle ABC de hauteur [AH], où H est un point du segment [BC], tel que $AH = 4$, $CH = 3$ et $BH = 4$. Soit M un point du segment [AC]. On note x la distance AM. On cherche à déterminer pour quelle position du point M sur [AC], la distance BM est minimale.

Quelle est dans ce cas la nature du triangle ABM ?

Calculer la valeur exacte de la distance AM lorsque BM est minimale.

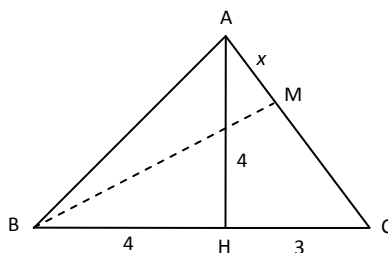


Figure 5

Cet exercice est très riche et on peut le résoudre de nombreuses manières, mais il n'est pas question ici d'en faire une analyse précise pour des questions de place. Nous voulons mettre essentiellement en avant le rôle joué par le travail préliminaire dans Ds, la géométrie, qui conditionne fortement le choix du domaine Dr. Nous exposons les productions, écrites hors classe dans un *travail maison*, de trois élèves :

- L'élève E1 remarque d'abord que ABM est rectangle en M sans le justifier précisément. Il calcule ensuite $AC = 5$ et $AB = \sqrt{32}$ par le théorème de Pythagore en précisant l'angle droit en H. Puis, il calcule de deux manières différentes l'aire de ABC avec les hauteurs AH puis BM ce qui lui permet de calculer $BM = 5,6$ en résolvant une équation en BM (il n'utilise pas « x »).

Enfin, le théorème de Pythagore dans BMA dont il connaît AB et BM lui permet de calculer $AM = 0,8$.

L'ETM personnel de E1 reste essentiellement dans le domaine de la géométrie avec un travail sur les grandeurs. Il utilise bien des équations, mais le fait de conserver les longueurs laisse penser que, pour E1, son travail reste géométrique, sans changement de domaine.

- L'élève E2 commence par émettre une conjecture à l'aide du LGD Geogebra : la distance BM est minimale lorsque ABM est rectangle en M. Puis, il calcule $AC = 5$ et $AB = \sqrt{32}$ et exprime $BM = \sqrt{(32 - x^2)}$ par le théorème de Pythagore. Exprimant l'égalité de Pythagore dans CBM, à l'aide de $CM = 5 - x$, il trouve une autre expression de BM^2 ce qui lui permet de poser l'équation $32 - x^2 = -x^2 + 10x + 24$. Il résout cette équation pour trouver $x = 8/10$ (cohérent avec la valeur approchée 0,81 obtenue par Geogebra).

E2 s'appuie sur la même propriété géométrique que E1 (sans doute redécouverte avec le logiciel) mais il ne propose pas un travail sur les grandeurs, en restant en apparence dans Ds, il effectue une mise en équation avec un changement clair de domaine où Dr est l'algèbre.

- L'élève E3, après avoir calculé $AC = 5$ par le théorème de Pythagore, introduit le projeté orthogonal, N, de M sur [BC] ce qui lui permet, avec le théorème de Thalès, d'exprimer BN et MN en fonction de x , à l'aide de $CM = 5 - x$. Puis, par le théorème de Pythagore dans BMN il calcule $BM^2 = x^2 - 8/5x + 32$ et il étudie cette fonction de x qu'il nomme $f(x)$. Il utilise ensuite ses connaissances sur les fonctions du second degré (sommet de la parabole qui donne le minimum car le coefficient de degré 2 est positif) pour trouver $BM = 5,6$ obtenu pour $x = 0,8$ qui est AM.

Contrairement à E1 et E2, E3 ne s'appuie pas sur une propriété caractéristique de M. Il perçoit la variation et cherche une fonction qu'il s'agit de minimiser. Ici, le travail préalable dans Ds mène à un tout autre changement de domaine où Dr est le domaine de l'analyse (plus spécifiquement le sous-domaine des fonctions).

Il y a un travail préalable à effectuer avant le changement de domaine car il est nécessaire d'appliquer le théorème de Pythagore (au moins deux fois) mais ce travail est très variable : E1 par un travail sur les grandeurs et une caractérisation géométrique de M reste dans Ds, la géométrie (même si de fait la résolution est algébrique, E1 ne le perçoit sans doute pas ainsi) ; E2 s'appuie explicitement sur la caractérisation géométrique de M et propose une résolution dans le domaine de l'algèbre en calculant de deux manières la longueur BM ; E3 perçoit la variation et calcule en toute généralité BM pour proposer une résolution dans le sous-domaine des fonctions.

Le changement de domaine est en partie indiqué avec la présence du « x », indice d'un changement de domaine mais sans savoir, à ce niveau d'étude, s'il s'agit de l'algèbre ou des fonctions. Néanmoins, il est possible de ne pas utiliser le « x » comme l'élève E1 (cf. aussi la section 2.3). Un autre indice apparaît dans l'énoncé : il s'agit d'une question d'optimisation qui oriente donc plutôt vers un traitement avec des fonctions, mais cela est sans doute peu visible pour les élèves. Mis à part ces deux indices, les élèves ont la totale responsabilité du changement de domaine et, surtout, du choix du domaine Dr : algèbre ou analyse (fonction).

La résolution de l'élève E1 n'utilisant que des bases d'algèbre, connaissances anciennes de 3 ans, qui reste contextualisées aux grandeurs montre que l'on peut rester, au moins en apparence, dans Ds. Sa résolution est toutefois incomplète car il faudrait prouver que $M \in [AC]$. Pour cela on peut calculer de la même manière CM et justifier que M est sur le segment en vérifiant que $CM + MA = CA$. Néanmoins, l'attendu, en lien avec l'ETM idoine, est sans doute plus proche de la résolution de l'élève E2, et plus encore de l'élève E3. A ce niveau d'étude, les fonctions sont travaillées depuis 2 ans et la dérivation est introduite ce qui permet un traitement efficace des problèmes d'optimisation (ce chapitre n'avait pas encore été abordé au moment où le problème a été donné). En outre, en 1^{ère} S les élèves pouvaient utiliser leurs connaissances en cours d'apprentissage sur les fonctions quadratiques.

La distinction essentielle que nous voulons mettre en évidence est le fait que :

- L'élève E2 oriente son travail dans Ds, à partir d'une conjecture, sur la caractérisation de la position de M. A partir de celle-ci, il peut utiliser le théorème de Pythagore qui lui donne une équation qu'il résout pour trouver la solution. Son travail initial conditionne le choix de Dr qui est l'algèbre, puisque M est fixe.
- L'élève E3 oriente son travail dans Ds en exprimant, par les théorèmes de Pythagore et de Thalès, la distance BM à minimiser en fonction de x , en toute généralité. Cela lui permet d'avoir une fonction qu'il minimise. Son travail initial dans Ds conditionne le choix de Dr qui est l'analyse (ou le domaine des fonctions), puisque M est variable.

Dans les deux cas, c'est la genèse discursive dans Ds, la géométrie, qui oriente vers tel ou tel domaine Dr et notamment la disponibilité de la propriété sur la distance d'un point à une droite. On peut aussi penser que cette propriété est seconde, le point de vue adopté étant premier : un point de vue *dynamique*, M varie et on cherche à minimiser une quantité, et un point de vue *statique*, la position de M est caractérisée par une propriété géométrique.

D'autres résolutions sont possibles comme la géométrie repérée (le repère d'origine H et d'axes (HC) et (HA) est particulièrement bien adapté) ou encore en restant

totalelement en géométrie, sans équation, mais la preuve est longue et peu accessible à ce niveau d'étude.

Chacun de ces trois élèves conclut en donnant la distance $AM = 0,8$. Il y a donc bien un retour au domaine source pour la conclusion. Néanmoins :

- Pour E1 il est nécessaire de justifier que la distance AM calculée est relative à un point de $[AC]$. Sinon, on ne peut savoir si le minimum est atteint dans $[AC]$ ou non.
- Pour E2 et E3, le fait que $M \in [AC]$ est implicitement contenu dans les procédures utilisées puisqu'ils calculent $CM = 5-x$ (pour l'élève E3 cela implique que f est définie sur $[0,5]$ et il faudrait vérifier que l'abscisse du sommet de la parabole est bien dans cet intervalle), mais ces deux élèves ne l'explicitent pas.

La genèse sémiotique est activée presque de la même manière pour les trois élèves avec le registre graphique de la géométrie, les grandeurs mesurées, les registres numériques usuels, décimal et fractionnaire, le registre algébrique, ainsi que, pour E3, le registre fonctionnel. On voit également l'importance de la genèse instrumentale avec le LGD : redécouverte de la propriété caractérisant M pour E2 et calcul approché pour E3 permettant un contrôle de la solution ainsi qu'une prise en compte de la variation.

Cet énoncé est l'occasion de travailler un ETM global avec la géométrie, l'algèbre et l'analyse (que l'on peut restreindre ici aux fonctions). Il est à noter que l'élève E3 présente un ETM personnel global avec ces trois domaines (son travail est explicitement sur les trois domaines) alors que E2 seulement avec la géométrie et l'algèbre, et E1 seulement avec la géométrie (l'algèbre reste implicite).

4. Une grille pour analyser un changement de domaine

Lors d'un changement de domaine de travail, nous cherchons spécifiquement à comprendre pourquoi il y a un tel changement dans le travail mathématique et comment il s'effectue. Comme nous l'avons vu à travers les 6 exemples précédents, plusieurs raisons peuvent en être en cause. Nous pouvons y voir un manque de connaissance, interne aux mathématiques ou due à l'enseignement et aux connaissances mobilisables, un manque matériel (par exemple si l'on a ou non un ordinateur muni d'un Logiciel de Géométrie Dynamique), une volonté de l'enseignant de proposer un certain ETM idoine, ou encore parce que l'enseignant n'a pas conscience du changement de domaine¹² – dans ce dernier cas, l'usage de signes spécifiques à Dr favorise ces *glissements* d'un domaine à un autre.

¹² Ce dernier point est notamment visible dans le cas de professeurs novices où, souvent, de nombreuses composantes du travail mathématique sont naturalisées (cf. la section 2.2).

Afin de mieux cerner ces caractéristiques du changement d'ETM, nous cherchons à répondre à trois types de questions dont l'importance a été pointée au fil des six exemples proposés. Cela nous permet d'avancer une grille d'analyse.

Tout d'abord, la question de l'ETM idoine, le choix par le professeur des valeurs des variables didactiques, l'appui sur le contrat didactique, les paradigmes en jeu. Il s'agit de l'organisation par l'enseignant du changement de domaine :

1. Y a-t-il un travail préalable à effectuer dans Ds avant le changement de domaine ? Ce travail est-il nécessaire ? Quelle est la nature de ce travail préalable ?

Nous postulons que plus le travail dans Ds est conséquent plus il est difficile de penser à effectuer un changement de domaine. En effet, un travail dans Ds, doublé d'un énoncé dans Ds risque de renforcer la difficulté cognitive du changement de domaine – on pourrait prendre l'image d'un *enfermement* dans le domaine Ds. De même, y-a-t-il un ou plusieurs registres dans Ds pour ce travail préalable ? Doit-on faire un changement de registre interne à Ds ? qui en a la responsabilité ?

2. Le changement de domaine est-il indiqué (de manière plus ou moins explicite) ? Quelle est la responsabilité laissée à la charge de l'élève (ou du groupe d'élèves) par le professeur ? quelle est l'influence de l'ETM-idoine développé par le professeur selon le contrat en vigueur et les paradigmes ?

L'indication du changement de domaine est importante du point de vue cognitif. C'est en effet bien différent de passer de la géométrie à l'algèbre avec un « x » présent dans l'énoncé (y compris sur un dessin) ou non. Si le changement de domaine n'est pas explicite, quels sont les indices présents dans l'énoncé (y compris le discours de l'enseignant) ? Cet indice peut être n'importe quel signe qui active une certaine forme de travail comme une lettre, des nombres, une figure, un dessin prototypique, un schéma, un mot, un type de questionnement (une demande d'optimisation en géométrie par exemple), une procédure, etc. Quelle est la nature de cet indice ? Des types de problème standard où le changement de domaine en jeu a été travaillé de manière systématique est un élément important à prendre en compte (cf. la section 2.3). Nous pensons que le professeur est un agent-clé qui conditionne, ou au moins influence, le changement de domaine sous le contrat en vigueur.

3. Après la résolution dans Dr, y a-t-il un retour au domaine source ?

On peut penser à un travail supplémentaire à effectuer dans Ds avant de conclure l'exercice, le travail effectué dans Dr ne permettant pas de conclure ; ou bien, plus fréquemment dans l'enseignement, ce retour dans Ds permettrait de valider ou de contrôler la solution trouvée dans Dr. On rejoint ainsi le point de vue de Polya (1965) où le fait de revenir à Ds peut être interprété comme la dernière phase dans

une résolution de problème, celle où on examine la solution. Cependant, le fait de prendre appui sur le modèle des ETM permet de considérer l'articulation des composantes des plans épistémologique et cognitif. Ainsi, la question devient-elle plus générale : avec le retour à Ds, le travail permet-il de développer l'ETM dans le domaine initial Ds ?

Notons que le fait de ne pas revenir au domaine source Ds risque d'entraîner un non développement du domaine initial¹³. Cela a une grande importance car revenir à Ds signifie exploiter et développer ce domaine initial – c'est-à-dire, articuler les genèses qui interviennent et construire les connaissances dans l'espace de travail mathématique initial. Ce retour devrait favoriser les connexions entre l'ETM_{Ds} et l'ETM_{Dr} en jeu dans une perspective de constituer un ETM global.

Nous ne formulons pas de question sur le travail spécifique dans Dr organisé par l'enseignant car cela n'est pas notre objectif. En revanche, nous nous intéressons aux spécificités mathématiques du travail dans Dr dans les questions qui suivent, plus épistémologiques (des mathématiques ou des mathématiques enseignées). Il s'agit ici de questions cruciales pour la compréhension du changement de domaine.

4. Pourquoi la résolution n'est-elle pas effectuée dans Ds ? Que manque-t-il ? Quelles sont les caractéristiques du travail effectué dans Dr qui n'est pas, ou ne peut pas être, effectué dans Ds ? D'autres domaines sont-ils envisageables ?

L'enseignant peut contrôler certaines variables didactiques, ou s'appuyer sur des éléments de contrat didactique – par exemple lié aux paradigmes –, pour d'une certaine manière forcer le changement de domaine (cf. les sections 2.2, 2.3 et 3.2). Mais ce n'est pas toujours le cas car le changement peut être nécessaire du point de vue des mathématiques ou des connaissances disponibles des élèves (cela nécessite une prise en compte des connaissances anciennes et du niveau d'étude).

Quels sont les domaines qui permettraient de combler le manque (s'il est effectif) repéré de Ds ? Notons qu'il se peut que la résolution puisse effectivement être effectuée dans Ds. La question des possibilités offertes dans chaque domaine de travail est une question essentielle et délicate. Essentielle car c'est cette question qui conditionne le travail possible ou non dans un domaine et délicate car elle dépend des connaissances disponibles, pour un sujet ou plus généralement des connaissances disponibles mathématiquement (et donc aussi du niveau scolaire).

5. Quelles sont les *genèses* ou *plans* des ETM qui sont au centre du changement de domaine ? qui permettent de comprendre la nécessité du changement de domaine et d'en identifier les enjeux ?

¹³ Ce phénomène a été pointé par Nikolantonakis et Vivier (2010) pour des opérations sur les entiers dans deux registres différents (systèmes de base dix et dans une autre base).

Il nous semble que l'identification d'une genèse ou d'un plan sur lequel se fonde le changement de domaine est un élément clé de la compréhension du changement de domaine. L'importance d'une genèse pour un changement de domaine peut provenir, comme nous l'avons vu, d'un indice sémiotique, du contrat en vigueur, d'un artefact, matériel ou non.

5. La visualisation dans un changement de domaine vers la géométrie

Les changements de domaine s'accompagnent de manière presque inévitable de changement de registre et donc des conversions sont nécessaires. On peut même ajouter que l'intervention de plusieurs registres est nécessaire car il s'agit d'une caractéristique de l'activité mathématique (Duval, 1995).

Lorsque le domaine D_r est la géométrie et que le changement de domaine s'accompagne spécifiquement d'une conversion d'un registre de D_s vers le registre graphique de D_r , on dispose alors de la visualisation en géométrie qui a un rôle très particulier (Duval, 2005). De fait, La visualisation en géométrie est utilisée dans beaucoup de domaines mathématiques. Une question importante concerne l'objectif de cette visualisation.

L'objectif peut être, par exemple en algèbre, d'illustrer, d'expliquer, ou de justifier certaines relations du type $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$. Mais comme Tall (2006) le signale, cette visualisation est partielle car, pour la relation précédente, elle suppose que l'on ait $a > b > 0$.

La visualisation géométrique peut également être requise pour résoudre un problème que l'on ne peut résoudre dans D_s . Barrera (2011), propose en classe de quatrième en France, grade 8, de visualiser la série $1/4 + 1/4^2 + \dots + 1/4^n$ pour déterminer la somme de la série qui est $1/3$. A ce niveau d'étude, le calcul de limite n'est pas disponible, mais le problème a du sens pour les élèves et la visualisation géométrique, avec une décomposition méréologique, permet de pallier le manque théorique du domaine numérique avec une version intuitive et visuelle de la méthode d'exhaustion.

Si dans le cas précédent le résultat obtenu est exact, souvent la visualisation confère uniquement un résultat approché, notamment lors d'une résolution graphique. Il est à noter que ce type de résolution approchée à l'aide d'un graphique ne semble pas être un objectif de l'enseignement secondaire en France, et ce malgré les recommandations de la commission Kahane (2002) sur la dialectique entre le calcul approché et le calcul exact. Prenons l'exemple des systèmes d'équation en France en classe de troisième, grade 9. Les aspects graphiques ne semblent être utilisés que pour illustrer les systèmes d'équation et la résolution algébrique ce qui donne une indication forte sur l'ETM idoine. Dans le manuel *Phare*, si une résolution graphique est demandée, il est systématiquement requis de vérifier la solution numériquement dans les équations. Normalement il ne

s'agit que d'une solution approchée, mais les variables des exercices sont telles qu'en fait la solution approchée est exacte, un entier, et finalement c'est la vérification numérique qui fait foi, la résolution graphique est très largement dépréciée. L'ETM idoine utilise, dans ce contexte, la géométrie dans le but essentiel de visualiser – peut-être pour donner du sens – en tout cas, pas pour résoudre « en vrai » (cf. aussi la section 3.1).

Conclusion

Un des points qui ressort de nos exemples, qui sont plus des études de cas, est sans doute le point de vue, très différent, selon qu'un même domaine est un domaine source ou un domaine de résolution. En effet, pour la géométrie, l'utilisation de théorème mettant en jeu des grandeurs (les théorèmes de Thalès et de Pythagore, le calcul d'aire) aboutit souvent, par la nécessité de poser des calculs, à un changement vers le domaine de l'algèbre ou du nombre. Alors que, lorsque la géométrie est le domaine de résolution, même s'il ne s'agit pas d'une recherche de visualisation, on dispose de cette visualisation très spécifique à la géométrie. Ces rôles différents selon qu'un domaine est D_s ou D_r est bien entendu à rapprocher des dimensions objet et outil (Douady, 1986). Dans un changement de la géométrie vers l'algèbre, l'algèbre est un outil pour le problème posé en géométrie alors que dans un changement de l'algèbre à la géométrie, l'algèbre est vue dans une dimension objet et l'on se sert de la géométrie comme un outil. Comme en dialectique outil-objet où les rôles ne sont pas figés (un objet peut devenir un outil et réciproquement), il est important de changer de rôle entre les domaines source et de résolution et ce notamment pour la connexion entre les ETM.

Le domaine D_r n'a toutefois pas nécessairement une dimension outil. Comme nous l'avons vu dans le cas de la résolution des systèmes linéaires (cf. section 3.1), l'usage de la géométrie comme domaine de résolution répond à un problème du domaine source qui ne peut, au niveau d'enseignement considéré, accéder à certains résultats théoriques. Mais, dans le travail de la classe étudiée, le domaine de résolution ne sert finalement pas d'outil pour le problème posé. Or, nous pensons que c'est seulement lorsque l'outil est pleinement développé pour répondre au problème initial que les connexions entre ETM, entre domaines, peuvent s'opérer. Il est à noter toutefois que, à côté des domaines de l'algèbre et de la géométrie, le domaine du nombre est aussi présent afin que le lien puisse se faire entre les deux domaines. Considérer le domaine du nombre, avec notamment les notions de valeur exacte et de valeur approchée, peut permettre d'établir un « pont » entre l'algèbre et la géométrie (ce rôle du domaine du nombre est aussi visible en géométrie avec les paradigmes GI et GII, cf. section 2.1). Il s'agit donc d'une relation entre trois domaines et c'est sans doute parce que l'ETM-idoine du nombre, ou personnel de l'enseignant, ne peut jouer ce rôle que le changement de domaine Algèbre $\rightarrow$ Géométrie ne peut participer pleinement à une connexion des

domaines, avec la partie visible d'un artefact qui n'acquière pas le statut d'instrument.

Pour ce qui est du travail initial dans Ds, il apparaît comme un élément important du travail mathématique pouvant aller jusqu'à conditionner le choix de Dr (cf. section 3.3). S'il est trop faible, et selon la situation, il se peut que le changement s'accomplisse *trop* rapidement alors qu'un travail dans le domaine source plus conséquent pourrait permettre de simplifier le travail dans Dr (cf. section 2.3). Il est d'ailleurs possible que le changement de domaine ne soit pas nécessaire et l'on a vu l'importance du choix des valeurs des variables didactiques.

Nous ne disons certainement pas qu'il faille à tout prix rester dans le domaine initial lorsque cela est possible, mais plutôt qu'il y a un équilibre à trouver entre le développement de l'ETM du domaine initial, qui peut être atteint sans changement de domaine, et la connexion entre ETM, nécessitant un changement de domaine. Mais si l'on fait le choix d'un changement de domaine dans la perspective d'une connexion entre ETM, il nous semble nécessaire de bien ajuster les valeurs des variables didactiques ainsi que de laisser une part de responsabilité aux élèves dans ce changement. Par ailleurs, le développement de l'ETM initial peut aussi être atteint par un retour à Ds après un travail dans Dr. L'élaboration par le professeur de l'ETM idoine est crucial sur ces points et nécessite que ce professeur ait un ETM personnel que nous avons qualifié de *global* relatifs aux domaines en jeu.

Nous avons pointé une autre question centrale dans l'élaboration de l'ETM idoine par le professeur. Quelles sont les genèses clés du changement de domaine ? Avec trois exemples, nous avons esquissé la pluralité des situations possibles. Comprendre le rôle de chacune des trois genèses dans un changement de domaine nous semble important pour comprendre ce changement. Il est également important de faire cette identification afin de pouvoir varier les genèses activées. Nous faisons en effet l'hypothèse que ce type de variation favorise les connexions entre ETM.

Nous pensons qu'il est nécessaire pour l'apprentissage des élèves que l'enseignant prenne en compte, et soit conscient, de l'ETM développé et des paradigmes en jeu afin de pouvoir les contrôler. Nous ne postulons pas a priori que le changement de domaine soit une difficulté lors de la résolution d'un problème mais plutôt qu'il s'agit d'une richesse des mathématiques.

Dans certains cas, nous avons utilisé la vidéo, en complément, pour préciser le travail des élèves et relever la part du travail dont ils sont responsables. En particulier, ont-ils la responsabilité de penser au changement de domaine, ou bien est-ce annoncé plus ou moins explicitement ? Ont-ils la responsabilité d'effectuer ce changement de domaine ? ou bien est-ce l'enseignant qui l'effectue ? L'usage de vidéo est essentiel pour répondre à ces questions car l'énoncé seul ne peut

permettre d'y répondre (Robert, 2008). L'usage de vidéos apparaît comme un point méthodologique important que nous n'avons pas abordé dans cet article.

Enfin, nous n'avons traité ici que des changements de domaine impliquant la géométrie. Mais des changements impliquant d'autres domaines sont envisageables ce qui ouvre de nouvelles perspectives de recherche. Le point de vue adopté dans cet article pourrait en effet permettre de renouveler les questions sur la transition arithmétique/algèbre en l'étudiant sous l'angle d'un changement de domaine entre le domaine du nombre et de l'algèbre. On peut aussi penser à une étude sur les connexions entre les domaines des probabilités et de l'analyse qui est une question d'actualité en France.

Reconnaisances

Financement partiel à travers le Projet de recherche du Fonds National Développement Scientifique et Technologique (FONDECYT) 1110988, Chili.

Cet article s'inscrit dans le projet ECOS-Sud C13H03 entre la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chili) et l'Université Paris Diderot (France).

Bibliographie

Barrera, R. (2012). *Études des significations de la multiplication pour différents ensembles de nombres dans un contexte de géométrisation*, Thèse de doctorat de l'Université Paris Diderot-Paris 7.

Barrera, R. (2011). Le rôle d'un processus de visualisation géométrique complémentaire du registre numérique, *Petit x*, 85.

Bullynck, M. (2009). Decimal Periods and their Tables: A German Research Topic (1765-1801), *Historia Mathematica*, 36(2), 137-160.

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.

Duval, R. (2005). Les Conditions Cognitives de L'Apprentissage de la Géométrie: Développement de la Visualisation, Différenciation des Raisonnements et Coordination de leurs Fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

Duval, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*. Éditions Peter Lang, coll. Exploration, Recherches en sciences de l'éducation. Berne, Suisse.

Houdement C., Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193.

Houdement C., Kuzniak A. (1999). Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x*, 51, 5-21.

Jacquier, I. (1995). Quelles conceptions des nombres chez des élèves de troisième ?, *Petit x*, 41, IREM de Grenoble.

Kahane, J.-P. (2002), *Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Odile Jacob.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.

Kuzniak, A. (à paraître). Travail mathématique et domaines mathématiques, *RELIME*.

Kuzniak, A. (2009). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France, in *Chypre et France, Recherche en didactique des mathématiques*, Gagatsis, A., Kuzniak, A. Deliyianni, E. & Vivier, L. éditeurs. Lefkosia, Chypre.

Kuzniak, A., Parzysz, B. & Vivier, L. (2013). Trajectory of a problem: a study in Teacher Training, *The Mathematics Enthusiast, Special Issue : International Perspectives on Problem Solving Research in Mathematics Education*, Guest Edited by Manuel Santos-Trigo & Luis Moreno-Armella, 10, 1 & 2, 407-440.

Montoya-Delgadillo, E. (2010). *Etude de la transformation des connaissances géométriques dans la formation universitaire des professeurs de lycée de mathématiques au Chili*. Thèse de doctorat de l'Université Paris Diderot-Paris 7.

Montoya-Delgadillo, E. (à paraître). El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico: profesores en formación inicial, *Revista Enseñanza de las Ciencias*.

Montoya-Delgadillo, E., Mena-Lorca, A., Mena-Lorca, J. (2014). Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME, 17 (4-I), 191-210.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (2010). Registres et praxis pour la numération de position en base quelconque – une étude statistique en France et en Grèce, in *Analyse statistique implicative - objet de recherche et de formation en analyse de données, outil pour la recherche multidisciplinaire*, Actes du 5^e colloque A.S.I., J.-C. Régnier, F. Spagnolo, B. Di Paola & R. Gras éds, Palermo 2010.

Nikolantonakis, K. & Vivier, L. (à paraître). Espaces de travail géométrique en formation initiale de professeurs du premier degré en France et en Grèce lors d'une démarche de preuve, *RELIME*.

Nikolantonakis et Vivier (2013). Positions numeration in any base for future Elementary school teachers in France and Greece: one discussion via Registers and Praxis, *MENON: Journal of Educational Research*,

<http://www.kosmit.uowm.gr/site/journal> (ISSN: 1792-8494) Full article: ISSUE 2a, 2013 (99-114).

Peirce, C. (1978). *Ecrits sur le signe*. Paris, France: Seuil.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Éd. Armand Colin.

Robert, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques et une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In F. Vandebrouck (Éd.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (45-68), Toulouse : Octarès.

Tall, D. (2006). A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, 195 – 215. 2006, IREM de Strasbourg.

ELIZABETH MONTOYA DELGADILLO

emontoya@ucv.cl

LAURENT VIVIER

laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

CLAIRE GUILLE-BIEL WINDER

ÉTUDE D'UNE SITUATION DE REPRODUCTION DE FIGURES PAR PLIAGE EN CYCLE 2 : LE PLIOX

Abstract. Situation of reproduction of figure by folding: PLIOX. This work presents the study of a situation of reproduction of figure by folding which is called a PLIOX (Guille-Biel Winder, 2013). We put this situation as a spatial problem into the 3D micro-space (Berthelot & Salin, 1992). If we consider it as a geometrical problem, we identify that G1 is the corresponding geometric paradigm (Houdement & Kuzniak, 2000 & 2006), we analyze the function of this situation for the development of the geometrical thought (Van Hiele, 1986), we use a cognitive and semiotic point of view (Duval, 1995) to see that the situation uses shape modifications (decompositions and reconfigurations), as well as positional modifications. We finally identify various didactic variables and mathematical knowledges at stake. This work leads us to the presentation and analysis of different phases of PLIOX situation.

Résumé. Ce travail, issu d'un mémoire de recherche, présente l'étude d'une situation de reproduction de figure par pliage à l'aide d'un matériel que nous appelons un PLIOX (Guille-Biel Winder, 2013). En tant que problème spatial nous plaçons cette situation dans le micro-espace 3D (Berthelot & Salin, 1992). En tant que problème géométrique, nous identifions G1 comme paradigme correspondant (Houdement & Kuzniak, 2000 & 2006), précisons la place et le rôle de la situation dans le développement de la pensée géométrique (Van Hiele, 1986) puis selon un point de vue cognitif et sémiotique (Duval, 1995) nous mettons en évidence des modifications méreologiques (décompositions et reconfigurations), ainsi que des modifications positionnelles convoquées. Nous identifions enfin différentes variables didactiques, ainsi que les connaissances en jeu. Ceci nous conduit à la présentation et à l'analyse des différentes phases de la situation.

Mots-clés. Géométrie, paradigme géométrique, pensée géométrique, reproduction, pliage, rapport aux figures, théorie des situations didactiques, variable didactique, école primaire.

Introduction

Dans cet article, nous nous intéressons à une activité destinée à de jeunes élèves de primaire (cycle 2) qui concerne des reproductions de figures planes hors de l'environnement papier-crayon, et qui est présentée comme « *suscitant immédiatement l'adhésion des élèves* » (Favrat & al, 2006). L'adaptation qui en a été réalisée pour en faire une situation de formation pour les maîtres nous conduit au même constat : cette situation semble avoir un potentiel attractif certain ! Or une

activité « réussie » du point de vue de l'engagement des élèves n'est pas obligatoirement une activité dans laquelle les élèves apprennent¹ ...

La méthodologie d'analyse et de construction d'une situation didactique retenue se situe dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques, qui « *consiste à modéliser non seulement les connaissances que l'on veut enseigner ou celles qu'un sujet apprend, mais aussi les conditions dans lesquelles elles se manifestent* » (Brousseau, 2000). Le premier paragraphe est alors consacré à la définition d'une situation didactique générique au sens de Brousseau, que nous appelons la situation PLIOX et que nous cherchons à analyser.

Une telle situation peut-elle faire partie du champ des problèmes géométriques ? De quelle « géométrie » parle-t-on ? Quelle est la place de la situation PLIOX dans le développement de la pensée géométrique ? Le deuxième paragraphe est consacré à l'étude du champ de problèmes dans lequel nous plaçons la situation PLIOX en référence, pour l'aspect spatial, aux travaux de (Brousseau, 1983), (Galvez, 1985) et (Berthelot & Salin, 1992). Concernant l'aspect géométrique, nous précisons la notion de figure en accord avec (Perrin-Glorian & al, 2004, 2005, 2013), et identifions le paradigme géométrique correspondant (Houdement & Kuzniak, 2000, 2006). Puis ce dernier cadre théorique nous permet de préciser le lien qui existe entre les modes de pensée que sont l'intuition, l'expérience et la déduction et l'activité proposée par la situation PLIOX. Ceci nous conduit à identifier la place et le rôle de la situation PLIOX dans l'articulation des niveaux de la pensée géométrique (Van Hiele, 1986) en nous appuyant sur une adaptation de ses travaux réalisée par (Kuzniak & Rauscher, 2003).

Quelle est la potentialité mathématique de la situation PLIOX ? Puisque les activités de reproduction de figures nécessitent une analyse préalable de ces figures qui demande « un changement de regard », *la situation du PLIOX est-elle l'une des étapes possibles permettant de faire évoluer le rapport aux figures des élèves ?* Dans le troisième paragraphe, nous explorons la situation mathématique afin d'en dégager les caractéristiques du problème géométrique selon un point de vue cognitif et sémiotique portant sur le rapport aux figures (Duval, 1988, 1995, 2003). Nous sommes alors en mesure d'identifier, dans une quatrième partie, les variables didactiques.

Quelles sont les connaissances mathématiques intrinsèques à la situation, c'est-à-dire indépendantes de l'enseignant ? L'analyse de différents modèles présentée dans la cinquième partie, nous conduit à la mise en évidence des connaissances mathématiques en jeu dans la situation (sixième paragraphe). Enfin le dernier paragraphe porte sur l'analyse *a priori* des différentes phases de la situation

¹ Un exemple de cas emblématique est étudié dans (Margolinas & Laparra, 2008).

PLIOX, dans l'objectif d'identifier des conditions nécessaires permettant l'émergence et le développement de ces connaissances.

1. Définition de la situation PLIOX

1.1. Présentation du matériel

Un PLIOX est un carré de papier présentant sur une face quatre zones également carrées et colorées en rouge, bleu, vert et jaune, zones comme ci-dessous.

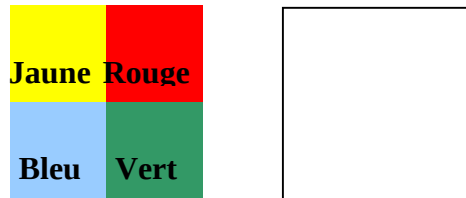


Figure 1. Le PLIOX recto et verso

Nous avons choisi la dénomination particulière de « PLIOX » pour dissocier la forme géométrique de l'artefact au sens de (Rabardel, 1995) : un artefact est en effet défini comme une « chose ayant subi une transformation d'origine humaine visant une finalité » (Houdement & Kuzniak, 2006, p.186).

À partir d'un PLIOX il est possible de réaliser différentes formes planes colorées selon un ensemble de pliages autorisés. Ainsi le PLIOX est un artefact qui prend le statut d'instrument dès lors qu'il est demandé de reproduire un modèle en le pliant.

1.2. Définition de la situation générique

On considère alors la situation générique suivante :

Reproduire une figure modèle obtenue par pliage effectif d'un PLIOX.

Les directions de plis autorisées sur le PLIOX correspondent aux axes de symétrie du carré (ses diagonales et ses médianes), ainsi qu'aux axes de symétrie des carrés que nous appellerons « carrés secondaires », c'est-à-dire des quatre carrés de couleur (leurs diagonales et leurs médianes). Elles sont présentées dans la figure 2.

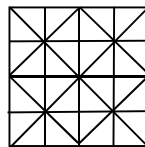


Figure 2. Directions de plis autorisées

Pour décrire les pliages, on dénommera « diagonale secondaire » (respectivement « médiane secondaire ») toute diagonale (respectivement toute médiane) d'un carré secondaire qui n'est pas confondue avec une diagonale (respectivement une médiane) du PLIOX.

2. Type de problème proposé par la situation PLIOX

La situation PLIOX correspond à un « origami » particulier, et se déroule donc sur le mode concret selon la terminologie employée par (Duval & Godin & Perrin-Glorian, 2005, p.16), c'est-à-dire dans le monde sensible. Mais le PLIOX – objet 3D – évoque également un objet 2D dont la forme correspond à une figure géométrique et sur lequel apparaissent d'autres figures géométriques. Ainsi, nous pouvons considérer la situation PLIOX selon deux points de vue : spatial et géométrique.

2.1. Un problème spatial

Comme toute situation de reproduction par pliage d'une feuille de papier, la situation PLIOX est un *problème spatial* au sens de (Salin, 2008) :

- il se réalise dans l'espace sensible par une action – un ou plusieurs pliages ;
- la validation est faite par le sujet qui compare perceptivement le résultat de son pliage avec le modèle ;
- le langage permet de communiquer des informations qui peuvent se substituer à la perception.

En reprenant les caractéristiques des différentes tailles d'espace sensible (Berthelot & Salin, 1992, p. 102-103), nous identifions celles relatives à la situation PLIOX :

- le PLIOX est accessible à la manipulation et en particulier aux actions suivantes : tourner, retourner, plier, déplier ; le PLIOX est également accessible à la vision ;
- tous les déplacements du PLIOX par rapport à l'élève ainsi que ceux de l'élève sont possibles ;
- l'élève est extérieur à l'espace considéré ;
- l'espace est autour du PLIOX.

L'espace considéré correspond en outre à l'espace des interactions liées à la manipulation du PLIOX. De plus, le PLIOX est un petit objet 3D très plat et l'action de plier est un geste 3D, la coordination étant tactile et visuelle. Ainsi la situation du PLIOX se situe dans le micro-espace 3D. Plus généralement, une analyse similaire conduirait à situer toute situation de reproduction par pliage d'une feuille de papier (comme les origamis) dans le micro-espace 3D.

2.2. Un problème géométrique

La forme 2D évoquée par le PLIOX correspond à une figure géométrique sur laquelle apparaissent d'autres figures géométriques. Par « figure » à l'école élémentaire, nous sous-entendons « *dessin qui a des propriétés qu'on pourrait préciser dans le cadre de la géométrie théorique en le considérant comme une représentation d'une figure géométrique ; ces propriétés se traduisent par des propriétés visuelles contrôlables avec des instruments.* » (Duval & Godin & Perrin-

Glorian, 2004, p. 13). Ainsi « *une figure ne se limite (...) pas à un tracé avec les instruments de géométrie usuels sur papier ou sur un écran d'ordinateur ; elle [peut] être obtenue aussi par un assemblage de formes par juxtaposition ou superposition.* » (Perrin-Glorian & Mathé & Leclerc, 2013, p. 12). Par conséquent, reproduire des figures par assemblage ou par pliage de pièces de papier ou de carton – ce qui correspond à la situation PLIOX – est pour nous une pratique de géométrie.

2.2.1. Paradigme correspondant à la situation PLIOX

La situation PLIOX conduit ainsi à un ensemble de problèmes géométriques de reproductions de figures. Or les pliages, au même titre que les découpages et les constructions à la règle et au compas, constituent même « *la base de [l'] approche expérimentale, qui peut être déjà développée à l'école* » (Houdement & Kuzniak, 2006, p.180). De plus, dans cette situation, la validation est perceptive par comparaison visuelle entre le modèle à reproduire et le résultat du pliage effectué. En faisant référence au cadre théorique défini par Houdement & Kuzniak, *le paradigme correspondant à la situation du PLIOX est alors la géométrie G1*, car elle est principalement caractérisée comme ne s'affranchissant pas de la réalité. Plus précisément, il est possible de spécifier le lien qui existe entre les modes de pensée que sont l'intuition, l'expérience et la déduction et l'activité proposée dans la situation PLIOX.

2.2.2. Intuition, expérience et déduction dans la situation PLIOX

On constate que la situation PLIOX propose essentiellement des activités liées à l'expérience et à l'intuition. En effet, la situation PLIOX nécessite « *l'exécution d'un certain mouvement, la mise en œuvre d'actions spécifiques (sans enchaînement déductif) pour répondre à la consigne* » (Houdement & Kuzniak, 2000, p.102) : l'action principale correspond à des pliages dans lesquels intervient la notion de symétrie axiale. Par conséquent, la situation PLIOX est liée à l'expérience. Mais à l'école élémentaire « *cette expérience est souvent liée à une action* », bien que « *les actions effectives ne soient pas toujours des cas d'expérience* » (ibid). Ainsi le pliage d'un carré en deux selon l'un de ses axes de symétrie est une expérience qui conduit à un rectangle ou à un triangle (et les diverses expériences liées à la répétition de cette action nourrissent l'intuition), mais cette action ne conduit pas forcément à l'apprentissage du fait qu'un carré partagé en deux par symétrie peut donner un rectangle ou un triangle. Nous faisons l'hypothèse que la verbalisation de cette action peut le permettre (voir partie 7).

Par ailleurs, l'analyse du modèle à reproduire nécessite à la fois :

- la reconnaissance des figures élémentaires qui le composent, ce qui peut être immédiat ou pas selon la disposition des différentes figures ;

- la prise en compte des positions des différentes figures élémentaires dans le modèle, qui peut être implicite notamment lorsque la reproduction de celui-ci n'exige qu'un seul pliage.

D'autre part, l'anticipation du pliage pour pouvoir reproduire se réfère à une connaissance *a priori* de l'effet du pliage, construite à l'issue de l'expérience. Ainsi on identifie dans la situation PLIOX les deux classes d'activités liées à l'intuition :

- le groupe « *des activités reposant sur la perception immédiate* », c'est-à-dire « *tout ce qui place du côté d'une certaine évidence mais qui simultanément donne du sens* » (ibid), par exemple lorsque certaines figures élémentaires sont dans des positions non prototypiques ;
- le groupe « *des activités qui reposent sur une connaissance antérieure forte de la forme, de l'objet et où une construction mentale n'est pas nécessaire pour répondre à la consigne* » (ibid), par exemple lorsque la reconnaissance des figures est immédiate.

2.2.3. Place et rôle de la situation PLIOX dans l'articulation des niveaux de pensée géométrique

Il a été précédemment remarqué que la situation du PLIOX proposait des activités essentiellement liées à l'expérience et l'intuition. Elle fait appel à la reconnaissance visuelle de formes ce qui correspond au niveau 0 de (Van Hiele, 1986). Par ailleurs, les figures proposées, plus ou moins complexes, le sont selon diverses orientations, et la manipulation du matériel permet d'en jouer. De plus, une incitation à une analyse des modèles ainsi qu'à une justification de l'identification des formes peut conduire, par répétition de l'action, à des connaissances notamment portant sur certaines propriétés du carré, ce qui se situe au niveau 1. Cette analyse est en cohérence avec le fait que la géométrie G1 proposée à l'école primaire s'étend sur les trois premiers niveaux (Kuzniak & Rauscher, 2003). En revanche, aucune déduction n'entre *a priori* en jeu : le niveau 2 n'est pas visé. Par conséquent, cette situation reste essentiellement au niveau 0 et il se peut qu'elle aide les élèves à passer au niveau 1 en particulier si l'enseignant agit en ce sens.

3. Exploration mathématique et didactique

En reprenant l'hypothèse selon laquelle la manière de regarder ce que les figures donnent à voir « *est un point clé dans le rapport des élèves à la géométrie* » (Duval & Godin & Perrin-Glorian, 2004, p. 9), nous nous intéressons à la potentialité de la situation PLIOX de faire évoluer le rapport aux figures des élèves. Pour cela, nous nous appuyons sur les travaux de Duval, notamment sur la notion d'unité figurale (Duval, 1995 & 2003), sur les niveaux dans l'appréhension des figures géométriques – *appréhension perceptive*, *appréhension opératoire*, *appréhension discursive* – (Duval, 1995), et plus particulièrement sur l'appréhension opératoire des modifications possibles d'une figure – *modifications méréologiques*, *optiques*,

positionnelles (Duval, 1988 & 1995). Dans ce qui suit, nous identifions les éléments figuraux en jeu, puis les modifications convoquées *a priori* dans la situation PLIOX.

3.1. Éléments figuraux potentiels

Les différentes descriptions nécessitent la définition d'un vocabulaire didactique spécifique :

- le PLIOX plié (ou pas) est un objet matériel qui possède un contour : on appellera *figure externe* ce qui correspond au contour de l'objet ; la figure externe du PLIOX est un carré ;
- le PLIOX plié (ou pas) est également un objet dans lequel il y a une ou plusieurs zones de couleur qui attirent le regard : ces différentes surfaces sont monochromes ; on les appellera *figures internes* ; les figures internes sont indépendantes des marques de plis présentes sur le PLIOX ; le PLIOX est colorié en quatre zones de différentes couleurs : il possède donc quatre figures internes qui sont quatre carrés et que nous nommerons *les carrés secondaires* ;
- la prise en compte des plis fait apparaître des surfaces monochromes plus petites que les figures internes qui forment des décompositions figurales de celles-ci : on parlera alors de *sous-figures monochromes* ;
- enfin, certaines sous-figures sont polychromes : elles sont composées de sous-figures monochromes et/ou de figures internes.

Par exemple, en considérant le PLIOX plié comme sur la Figure 3 : la figure externe est un pentagone ; il y a trois figures internes – un carré secondaire vert et deux triangles (un rouge et un bleu) ; parmi les sous-figures monochromes on identifie deux petits triangles bleus (qui décomposent la figure interne bleue), quatre carrés verts, deux triangles verts ou quatre plus petits ; la composition de deux de ces sous-figures monochromes (triangles vert et rouge) forme une sous-figure polychrome qui est un carré.

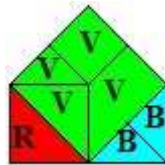


Figure 3. Un pliage de PLIOX

Nous présentons maintenant les objets mathématiques inhérents à la situation.

3.1.1. Figures externes

Les différents pliages du PLIOX selon les directions privilégiées conduisent à une multitude de figures externes qui sont des polygones convexes, parmi lesquelles :

- des carrés de différentes tailles ;
- des rectangles non carrés de différentes tailles ;
- des triangles isocèles rectangles de différentes tailles
- des parallélogrammes quelconques de différentes tailles ;
- des trapèzes isocèles (non rectangles), des trapèzes rectangles (non isocèles) ainsi que des quadrilatères quelconques ;
- mais également des pentagones (non réguliers) ...

3.1.2. Figures internes

Le jeu des couleurs fait apparaître une décomposition méréologique dont les éléments figuraux 2D correspondent aux figures internes. Il existe exactement sept types de figures internes possibles dans chaque couleur qui peuvent apparaître dans des PLIOX pliés :

- deux carrés : un carré secondaire et un petit carré ;
- un rectangle ;
- trois triangles isocèles rectangles ;
- un trapèze rectangle.

3.1.3. Figures polychromes

Le jeu des couleurs conduit à des PLIOX pliés différents mais ayant la même figure externe, composés du même type de figures internes et obtenus par les mêmes principes de pliage :

- soit par un choix différent de direction de plis (voir exemple ci-dessous) ;

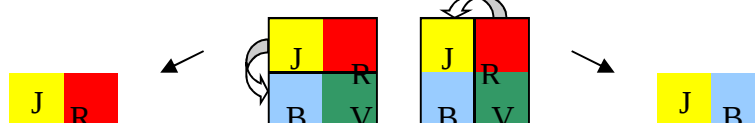


Figure 4. Deux pliages possibles selon une médiane

- soit selon les mêmes directions de pli mais avec certains sens de rotation différents (voir exemple ci-dessous).

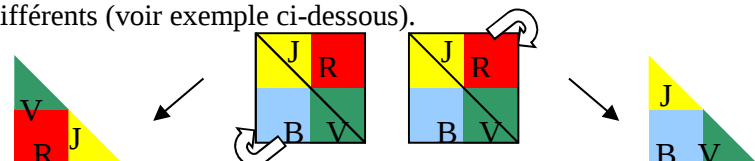


Figure 5. Deux résultats possibles pour un même pliage

Par conséquent les directions de plis suivant les axes de symétrie du grand carré et des carrés « secondaires » ainsi que les différents sens de rotation éventuellement possibles conduisent à de nombreuses figures polychromes ou monochromes. Quelques-unes d'entre elles sont présentées dans ce qui suit, selon le nombre minimum de pliages nécessaires pour les réaliser :

- Sans pliage, la figure externe visible est le grand carré lui-même, les figures internes visibles sont les quatre carrés secondaires.
- Avec un pliage, les différentes possibilités envisageables dépendent du choix du pli (il y en a donc quatre) : elles sont présentées Figure 6.

<i>Un pliage selon...</i>	Figures externes	Figures internes
<i>...une médiane</i> 	4 rectangles	2 carrés secondaires
<i>... une médiane secondaire</i> 	4 rectangles	2 carrés secondaires ; 2 rectangles
<i>... une diagonale</i> 	4 triangles rectangles isocèles	1 carré secondaire ; 2 triangles
<i>... une diagonale secondaire</i> 	4 pentagones	3 carrés secondaires ; 1 triangle

Figure 6. Figures pouvant être obtenues avec un seul pliage

- Avec deux pliages, il existe 10 possibilités pour le choix des deux plis parmi : médiane, médiane secondaire, diagonale, diagonale secondaire ; chaque choix conduit lui-même à différentes figures.



Figure 7. Deux exemples de figures pouvant être obtenues avec deux pliages (au moins) : selon une diagonale et une diagonale secondaire



Figure 8. Carrés obtenus par pliage selon les quatre diagonales secondaires, puis selon les quatre médianes secondaires

De plus, de nouveaux carrés apparaissent comme figures externes pouvant être obtenues par au moins quatre pliages. Des exemples sont donnés Figure 8.

3.1.4. Mise en évidence d'éléments figuratifs 1D particuliers

Les éléments figuratifs 1D apparaissent en fonction des pliages que l'on est amené à faire, sous forme de plis, mais ne sont pas marqués par des traits ; seules les deux médianes du PLIOX sont matérialisées comme frontières des zones colorées. Les éléments 1D progressivement mis en évidence par les premiers pliages de l'activité correspondent aux directions de plis privilégiées : les médianes du PLIOX, puis ses diagonales, c'est-à-dire ses axes de symétrie. Les pliages suivants selon de nouveaux axes de symétrie, font apparaître les diagonales et médianes secondaires, ce qui conduit à un réseau de droites plus important.

Ce nouveau réseau permet alors dans un deuxième temps de mettre en avant sur le PLIOX de nouvelles figures dont certaines posséderont également des axes de symétrie. Cette évolution est présentée Figure 9. En outre, *ce réseau apparaît sans interférence avec les couleurs sur le verso du PLIOX.*

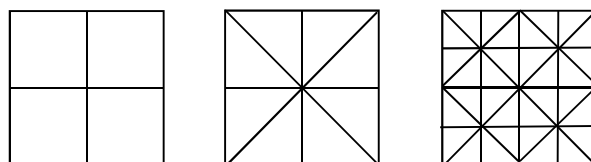


Figure 9. Un réseau de droites qui évolue

3.2. Modifications convoquées a priori

Par suite de la partie 3.1, nous constatons que pour chaque figure externe des modifications de type méréologique sont convoquées par la présence des figures internes colorées. De plus, les quatre axes de symétrie du PLIOX (ses diagonales et ses médianes) permettent des pliages en parties superposables. Cette spécificité du matériel a une incidence au niveau de l'appréhension des figures. En effet, la situation PLIOX met en lumière des décompositions particulières du carré en unité figuratives 2D, donc du même nombre de dimensions que la figure de départ, qui dépendent de la manière de plier : ces décompositions méréologiques peuvent être strictement homogènes, homogènes ou hétérogènes. Les Figures 10 et 11 en présentent quelques-unes.

Par conséquent, il est possible de « voir » sur le PLIOX et sur les modèles proposés d'autres décompositions méréologiques que celles mises en évidence par le jeu des couleurs et qui mettent en jeu des reconfigurations de sous-figures.

Par ailleurs, le coloriage en quatre zones colorées induit une orientation du PLIOX et des figures obtenues par son pliage, ce qui peut convoquer des modifications positionnelles.

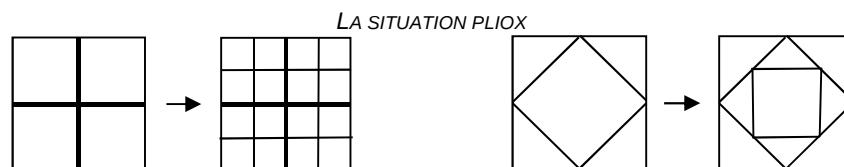


Figure 10. Les deux décompositions méréologiques strictement homogènes du carré induites par pliage selon les médianes (à gauche) puis les deux décompositions méréologiques hétérogènes induites par pliage selon les diagonales secondaires (à droite)

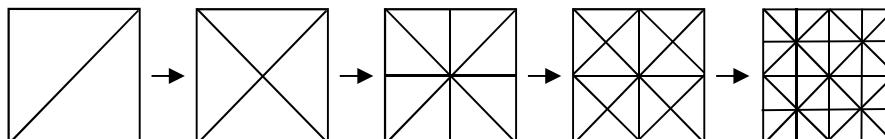


Figure 11. Les cinq décompositions méréologiques homogènes du carré induites par pliage selon les diagonales

4. Variables didactiques

Dans cette partie sont présentées différentes variables didactiques de la situation.

4.1. Différentes modalités de présentation du modèle à reproduire

Les modalités de présentation du modèle envisagées sont classées selon deux grandes familles notées P (pour « PLIOX ») et R (pour « Représentation »).

4.1.1. Modalité P

Le modèle est présenté par le maître sous forme de pliage d'un PLIOX préalablement effectué hors de la vue des élèves. Le support du maître est donc identique à celui des élèves : il s'agit d'une reproduction à échelle 1, ce qui donne des informations aux élèves en ce qui concerne sa taille. La présence des plis, voire l'épaisseur du modèle, constituent également des indices non négligeables. Le modèle reste disponible aux yeux des élèves.

Plusieurs variations peuvent être envisagées, en fonction de la possibilité de manipulation plus ou moins grande du modèle :

- le modèle reste éloigné et non manipulable (par exemple affiché au tableau) ;
- le modèle reste éloigné (par exemple affiché au tableau), mais il est possible pour les élèves de venir tourner et retourner, sans le déplier, un deuxième modèle identique placé par exemple sur le bureau du maître ;
- le modèle reste éloigné (par exemple affiché au tableau), mais il est possible pour les élèves de venir tourner et retourner, sans le déplier, un deuxième modèle identique placé par exemple sur le bureau du maître ;

- le modèle est affiché au tableau mais chaque élève possède un modèle qu'il peut manipuler à sa guise.

Une plus grande liberté dans la manipulation conduit à une prise d'indice moins importante concernant notamment le nombre et la nature des pliages nécessaires, ce qui nécessite alors une part moins importante de l'intuition.

Lorsque le modèle n'est pas manipulable mais affiché sur le plan fronto-parallèle, l'appréhension opératoire de celui-ci convoque des modifications positionnelles en plus des modifications méréologiques induites par le jeu des couleurs.

4.1.2. Modalité R

Le modèle est présenté par le maître sous forme d'un dessin ou d'une photo d'un pliage de PLIOX. Il existe plusieurs manières de procéder, le modèle peut être dessiné au tableau ou sur une affiche, rétroprojeté ou vidéoprojeté, et dans ce cas, il reste éloigné des élèves. Il peut également être dessiné sur une feuille distribuée à chaque élève. Cette modalité nécessite une intuition plus forte que la modalité P. Dans ce cas, l'appréhension opératoire du modèle convoque modifications méréologiques et positionnelles.

La modalité R permet également la présentation d'un modèle impossible à réaliser avec le PLIOX, conduisant à l'explicitation des positions relatives de différentes zones de couleur.

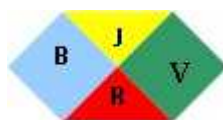


Figure 12. Un exemple de modèle impossible.

Plusieurs sous-modalités peuvent être envisagées :

- modalité R_1 : le dessin (ou la photo) est à la même échelle que le PLIOX, et dans ce cas, la reproduction s'effectue à échelle 1 ; la présentation d'une photographie peut donner des informations concernant les plis (tout en empêchant la manipulation du modèle), alors que s'il s'agit d'un dessin, ces informations ne sont plus accessibles aux élèves ; dans le cas où le dessin (ou la photo) du modèle est distribué à chaque élève, la comparaison par superposition directe entre le pliage du PLIOX obtenu par l'élève et le modèle est alors possible ;
- modalité $R_{\text{échelle}}$: le dessin (ou la photo) se présente à une échelle différente de celle du PLIOX, et dans ce cas l'information concernant la taille n'est plus accessible (de même que celle concernant les plis s'il s'agit d'un dessin, voir ci-dessus) ; la reproduction est un agrandissement ou une réduction ; l'appréhension opératoire du modèle convoque des modifications optiques en plus des modifications déjà citées.

4.2. Position du modèle présenté

La position du modèle lors de sa présentation peut faciliter ou non l'identification des figures présentes dans le modèle. Elle peut en outre nécessiter une modification positionnelle.

4.3. Modèle à reproduire

Selon le modèle que l'on choisit, l'activité est rendue plus ou moins complexe. Plusieurs facteurs rentrent en ligne de compte.

Le nombre de pliages nécessaires à la reproduction peut être un premier facteur de difficultés. On parlera de type T_n pour un modèle nécessitant au minimum n pliages. Mais le nombre de figures internes, leurs positions relatives, ainsi que la position qu'elles occupent, interviennent également en jouant sur l'identification perceptive et sur l'appréhension opératoire (modifications méréologiques et/ou positionnelles). De plus, l'utilisation des parties déjà pliées peut rendre l'activité plus difficile selon qu'on travaille uniquement à partir du « recto » du PLIOX ou qu'on doive prendre en compte également le « verso », comme par exemple le modèle de la Figure 13 qui nécessite un pliage « par-devant » le PLIOX.



Figure 13. Un modèle de type T_3 difficile à réaliser !

Le marquage préalable sur le PLIOX des plis nécessaires à la reproduction du modèle est également à prendre en compte. En effet, lorsque les plis nécessaires n'apparaissent pas sur le PLIOX, l'élève doit identifier le pliage à réaliser ; ceci rend également l'activité plus difficile. Pourtant, la résolution des problèmes de reproduction correspondants ne nécessite pas une identification de « tracés » organisateurs au sens de Duval², puisque ces « tracés » n'apparaissent *qu'après* réalisation du pliage : il n'y a donc pas déconstruction dimensionnelle.

On peut enfin remarquer qu'il existe des modèles plus ou moins ambigus en termes de choix de plis. On dira d'un modèle qu'il est *ambigu* lorsque le choix de plis différents mais parallèles aux directions de plis privilégiées conduit à une figure « ressemblante » au modèle et qui ne lui est pas isométriquement équivalente, c'est-à-dire qui respecte l'alignement, le milieu, le parallélisme, les positions des objets les uns par rapport aux autres, leur orientation, mais pas les rapports de longueur. L'ambiguïté d'un modèle est d'autant plus importante lorsque les

² Les « tracés organisateurs » sont « tous les tracés permettant de réorganiser une figure donnée en vue d'y faire apparaître des formes non reconnaissables dans cette figure donnée. » (Duval, 2005) p.18

directions de plis nécessaires n'apparaissent pas sur le PLIOX. Le modèle 1.3 en est un exemple (voir la partie suivante ainsi que la Figure 15).

5. Analyse de quelques modèles

L'analyse de quelques modèles est présentée dans cette partie. Ce travail permettra de mettre en évidence dans le paragraphe suivant les connaissances en jeu dans la situation PLIOX.

5.1. Analyse de quelques modèles de type T_1

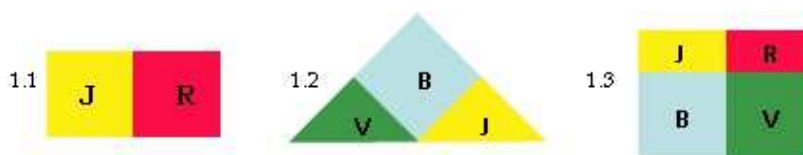


Figure 14. Des modèles de type T_1

Analyse du modèle 1.1. Ce premier modèle est assez simple à réaliser. Il est composé de deux carrés secondaires mis en évidence par coloriage ; le pli nécessaire à sa reproduction correspond à une médiane. En outre, ce modèle met en évidence une première relation entre le carré et le rectangle : le partage en deux parties du carré conduit à un rectangle.

Analyse du modèle 1.2. Le pli nécessaire s'effectue sur la diagonale du PLIOX, qui apparaît comme une nouvelle droite partageant celui-ci en deux parties superposables. Cette droite correspond donc à un axe de symétrie de la figure externe du PLIOX, mais également à un axe de symétrie de deux figures internes du PLIOX (le carré secondaire vert et le carré secondaire jaune). La présentation de ce modèle comme sur la Figure 14 implique un changement d'orientation, *a priori* relativement aisé à dépasser pour les élèves grâce à un changement d'orientation de leur PLIOX. Sa réalisation correspond à la construction d'un triangle à partir du partage d'un carré. Ce modèle met en évidence une relation entre le carré et le triangle : le partage en deux parties du carré peut donner deux triangles rectangles isocèles.

Analyse du modèle 1.3. La figure externe est un rectangle, de même que les différentes sous-figures polychromes formées par la réunion de deux figures internes. De plus, ce modèle met en évidence les relations qui existent entre les dimensions des rectangles rouge et jaune et des carrés secondaires correspondants. Cependant, parmi les différents rectangles qui apparaissent dans ce modèle, certains ne sont pas des moitiés de carrés. Sur ce modèle, le pli nécessaire ne correspond pas à un axe de symétrie du carré, mais à celui de deux carrés secondaires (jaune et rouge), autrement dit à la médiane du rectangle formé par ces deux carrés secondaires. Enfin le modèle est ambigu (au sens défini précédemment). On constate alors certaines productions « approximatives » (dont

l'une est présentée en Figure 15), c'est-à-dire comportant bien quatre figures internes, dont les deux carrés secondaires bleu et vert, mais aussi : soit deux rectangles jaune et rouge de taille différente de celle attendue, le pli correspondant étant parallèle à la médiane secondaire ; soit deux trapèzes rectangles rouge et jaune, le pli correspondant n'étant pas parallèle à la médiane secondaire.

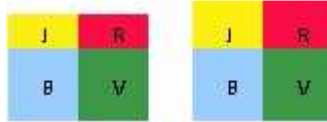


Figure 15. Le modèle 1.3 (à gauche) avec un exemple de reproduction incorrecte (à droite).

5.2. Analyse de quelques modèles de type T_2

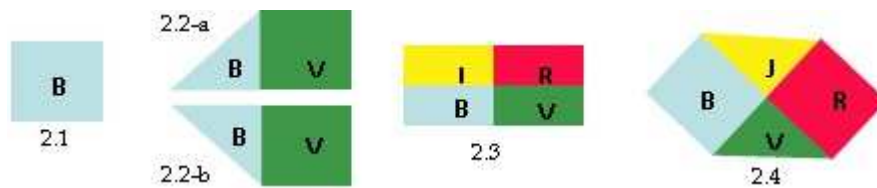


Figure 16. Quelques modèles de type T_2

Analyse du modèle 2.1. Ce modèle est constitué par le carré secondaire mis en évidence par sa couleur, il n'est donc pas ambigu. Les deux plis nécessaires correspondent aux deux médiane du PLIOX : sa réalisation est alors à rapprocher de celle du modèle 1.1 puisqu'elle conduit à plier un carré (le PLIOX) pour obtenir un rectangle, puis de plier celui-ci pour obtenir un nouveau carré. De plus, l'ordre des deux pliages est indifférent, comme l'illustre le schéma Figure 17.

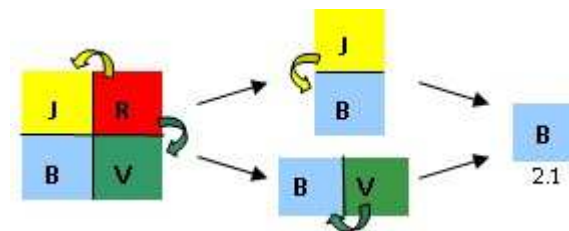


Figure 17. Deux procédures pour reproduire le modèle 2.1.

Analyse des modèles 2.2-a et 2.2-b : Ces modèles ne sont pas ambigus. Leurs figures externes correspondent à des trapèzes, ce qui donne l'occasion aux élèves de rencontrer des quadrilatères autres que des carrés ou des rectangles. Ces modèles sont symétriques l'un de l'autre (donc superposables, mais non identiques) et peuvent être proposés simultanément. Avec eux, les élèves se rendent compte que des figures peuvent être très ressemblantes, c'est-à-dire avoir la même figure externe (ici, un trapèze), les mêmes figures internes (un triangle et un carré

secondaire) sans être identiques : le rôle de l'orientation des figures internes est ici mis en évidence. Deux procédures sont envisageables pour obtenir chacun de ces modèles : réaliser un premier pliage selon une médiatrice, puis un deuxième selon l'une des diagonales du carré secondaire bleu ; ou plier selon l'une des diagonales du PLIOX puis réaliser un pliage selon une médiane. Ces différentes procédures sont illustrées par le schéma Figure 18. On constate que le seul choix différent de diagonale conduit à une production différente. Ces modèles mettent en évidence des relations entre le carré et le rectangle : un carré partagé en deux peut donner un rectangle ; un rectangle partagé en deux peut donner un carré.

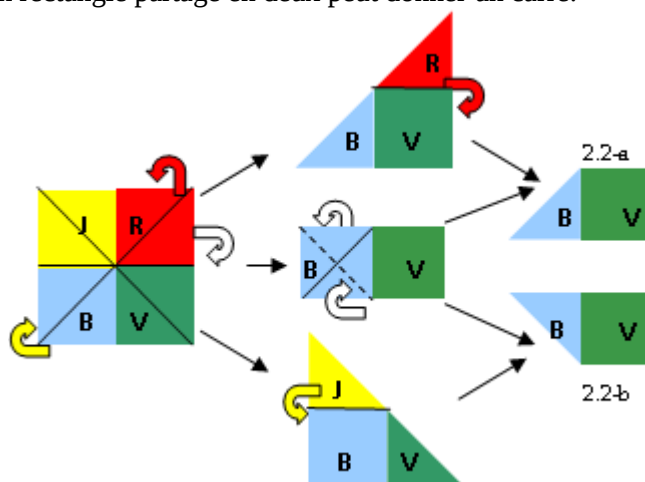


Figure 18. Procédures pour obtenir les modèles 2.2-a et 2.2-b.

Analyse du modèle 2.3. La réalisation de ce modèle ambigu peut s'appuyer sur celle du modèle 1.3. Elle fait jouer les relations entre le carré et le rectangle. L'inversion des deux pliages n'a pas d'incidence sur le résultat : deux procédures sont ainsi possibles. De plus, en retournant le support, on obtient un autre rectangle quadricolore. Les deux figures obtenues sont très ressemblantes mais pas identiques (voir Figure 19) : la figure externe est un rectangle de même dimension que pour le modèle 2.3 ; les quatre figures externes qui composent le modèle sont identiques ; en revanche leur disposition est différente (le verso est comme « inversé »).

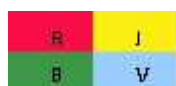


Figure 19. Verso du modèle 2.3.

Analyse du modèle 2.4. La figure externe du modèle est un hexagone non régulier : l'existence de polygones convexes à plus de 4 côtés est alors soulignée. Lorsque ce modèle est présenté, les deux carrés sont en situation non prototypique, ce qui risque de générer des difficultés dans leur identification. Les élèves peuvent

justifier la reconnaissance du carré secondaire en situation non protoypique en faisant référence à l'action qu'il faudrait réaliser pour « retrouver » le carré (une rotation). La réalisation du modèle nécessite un changement d'orientation. L'ordre de pliage n'a pas d'incidence sur le résultat : deux procédures sont alors envisageables.

6. Analyse des connaissances en jeu

La situation PLIOX est propice à travailler à la fois des connaissances géométriques et des connaissances spatiales (au sens de Berthelot & Salin).

6.1. Connaissances spatiales

« Par connaissances spatiales, nous désignons les connaissances qui permettent à un sujet un contrôle convenable de ses relations à l'espace sensible. Ce contrôle se traduit par la possibilité pour lui de :

- reconnaître, décrire, fabriquer des objets ;
- déplacer, trouver, communiquer la position d'objets ;
- reconnaître, décrire, construire ou transformer un espace de vie ou de déplacement. » (Berthelot & Salin, 1999-2000, p.38).

Ainsi des connaissances spatiales sont en jeu dans la situation PLIOX, liées à l'orientation et à la position des différentes figures dans les modèles. Elles sont mises en œuvre à différents moments de la situation PLIOX :

- lors de l'analyse des modèles en vue de leur reproduction, puisqu'il s'agit d'identifier des positions relatives de figures internes par exemple ;
- lors de moments de recherche se déroulant dans l'espace sensible.

6.2. Connaissances géométriques

Cette situation offre tout d'abord l'occasion de revoir le carré et de parler de diagonale. Elle permet également de (re)voir d'autres quadrilatères particuliers comme notamment le rectangle, le triangle rectangle isocèle. Mais elle permet également de rencontrer d'autres polygones convexes dont la dénomination n'est pas exigible à l'école primaire : trapèzes et autres quadrilatères « quelconques », ainsi que des polygones à plus de quatre côtés (pentagones, hexagones) qui ne sont pas réguliers.

Les figures (carrés, rectangles, triangles) sont dans différentes positions et notamment dans des positions non prototypiques : il s'agit de les reconnaître.

Dans cette situation, deux points de vue sur une même figure coexistent :

- l'un correspond à ce qui est immédiatement visible et perçu : les figures internes (selon la Gestalt Theory car ce sont des zones de couleur), ainsi que la figure externe (le PLIOX fait partie de l'espace sensible : ainsi le

modèle à reproduire lorsqu'il est présenté se détache du fond du tableau car apparaissant comme un objet en soi, comme un tout³ ;

- l'autre correspond aux sous-figures monochromes et aux sous-figures polychromes (recomposition de sous-figures monochromes) ; dans ce cas, il y a prise en compte des marques des plis et de certains points particuliers.

Le passage d'un point de vue à l'autre conduit à une association entre parties et tout, c'est-à-dire à la fois la possibilité de décomposer une figure 2D en d'autres éléments figuraux 2D (décompositions méréologiques) et la possibilité de voir une surface comme une réunion de surfaces (reconfiguration). En particulier des relations entre différentes formes connues sont mises en évidence spontanément par les élèves :

- un demi-carré peut être un rectangle ou un triangle ;
- un assemblage de deux triangles rectangles isocèles superposables peut être un carré ou un triangle ;
- un assemblage de deux carrés superposables est un rectangle, ...

Ainsi il est possible que l'élève acquière une sorte de flexibilité quant à la reconnaissance des formes géométriques dans n'importe quelle position et détachées ou intégrées dans d'autres figures.

Les pliages selon les directions autorisées conduisent au marquage d'un réseau de plis qui constitue un réseau de droites visible sur le verso du PLIOX. La prise de conscience de celui-ci relève d'une déconstruction dimensionnelle.

Les modalités de pliage mettent également en évidence des côtés et des sommets de différents polygones.

7. Les différentes phases de la situation PLIOX

La situation PLIOX est une situation d'action (Brousseau, 1998) au sein de laquelle sont ménagées différentes phases présentées puis analysées dans un deuxième temps. Il s'agit pour nous de préciser les conditions nécessaires pour que la situation PLIOX puisse déboucher sur le développement des connaissances mises au jour dans le paragraphe précédent⁴.

³ Alors que, selon Duval, dans le cas d'une activité dans le micro-espace de la feuille de papier, il semble qu'il soit difficile de voir un tout, particulièrement lorsque ce tout est formé de zones de différentes couleurs accolées les unes aux autres.

⁴ Nous ne nous préoccupons pas ici de l'introduction du PLIOX dans la classe.

7.1. Présentation des différentes phases

7.1.1 Phase 1 : analyse du modèle

Un modèle est affiché au tableau *sans que les élèves ne voient comment il a été réalisé* (pour la modalité P)⁵. Collectivement ou individuellement des élèves sont sollicités pour dire ce qu'ils voient, les formes qu'ils reconnaissent aussi bien sur le contour, qu'à l'intérieur de la figure, ainsi qu'éventuellement leurs positions relatives. L'identification des formes fait l'objet d'une demande systématique de justification. Proposée en préalable à la recherche de la solution, cette analyse offre un temps de réflexion *avant* l'action.

7.1.2 Phase 2 : recherche individuelle de la solution

Les élèves doivent réaliser par pliage de leur PLIOX une figure identique au modèle présenté. Ainsi aucun travail papier/crayon n'est exigé, aucun instrument classique de géométrie n'est utilisé, seuls les pliages sont convoqués. L'activité est alors centrée sur l'analyse de la figure pour sa reproduction et non pas sur le tracé. Dans la modalité P, le modèle reste visible mais à distance des élèves pendant la durée de l'activité.

7.1.3 Phase 3 : mise en commun

Des élèves sont sollicités pour expliquer leur procédure, ou dans un premier temps la montrer à la classe s'ils ne parviennent pas à expliquer, aidés si besoin par l'enseignant pour la formulation ou le vocabulaire. Certaines productions erronées sont invalidées.

La validation de l'explication est double : sur le fond par la réalisation effective du pliage en parallèle au discours, et sur la forme par l'enseignant qui veille à employer le vocabulaire géométrique et spatial idoine tout au long de la situation. La mise en commun est aussi l'occasion de revenir sur la technique de pliage bord sur bord (qui peut être illustrée en pliant et dépliant le PLIOX).

7.1.4 Phase 4 : synthèse

Cette phase correspond à la mise en évidence de nouveaux objets géométriques ainsi que leurs relations mis à jour lors des phases précédentes : à l'intérieur du PLIOX des sous-figures monochromes et des sous-figures polychromes, des relations entre figures, des droites, des points particuliers, ...

⁵ En effet, pour qu'il y ait *problème géométrique*, la préparation du modèle (c'est-à-dire la réalisation du pliage du PLIOX par l'enseignant avant sa présentation à la classe), doit être cachée aux élèves : la réalisation du modèle devant les élèves réduirait l'activité à la reproduction d'un geste.

7.2. Nature et rôle des différentes phases

La situation PLIOX est ainsi composée d'une alternance entre phase d'action (phase 3) et phases de formulation (phases 1 et 3), puis se conclut par une phase d'institutionnalisation (phase 4). Nous précisons en outre dans ce qui suit le rôle ainsi que le statut des connaissances au sein de ces différentes phases.

7.2.1 La phase d'action : phase 2

L'action convoque tout d'abord des compétences spatiales (voir paragraphe 6.1) qui restent implicites. De plus, la prise en compte du réseau de plis dans la tâche de reproduction utilise en situation des connaissances sur la symétrie axiale (notamment dans le carré). La symétrie est alors un outil implicite dans la résolution des différents problèmes de reproduction proposés (et notamment dans les activités de pliage « bord sur bord »).

Dans cette phase, le milieu fournit une rétroaction immédiate. En effet, la validation est essentiellement perceptive par comparaison visuelle entre le modèle et le résultat du pliage du PLIOX effectué. Mais il est également possible pour les élèves, et nous l'avons constaté lors de la mise en œuvre, de venir juxtaposer leur production et le modèle, par exemple pour comparer les longueurs des côtés. La rétroaction du milieu amène une plus grande autonomie des élèves face à la tâche et peut-être également une plus grande implication dans la résolution du problème : nous avons en effet pu noter une sollicitation très faible de l'enseignant par les élèves, ainsi qu'une mise au travail de tous, même ceux qui habituellement ont du mal à rentrer dans le rythme de la classe.

7.2.2 Les phases de formulation : phases 1 et 3

La situation PLIOX ne se résume pas à des moments d'action, mais incorpore des moments d'analyse des modèles et d'explicitation de procédures, car se limiter à l'action n'est pas « *vraiment faire de [la] géométrie avec les élèves* » (Houdement & Kuzniak, 2000). Cependant, il ne s'agit pas de situations de formulation au sens de (Brousseau, 1998), puisqu'aucune contrainte sur l'action n'amène la « *nécessité de formulation* » (Bosch & Perrin-Glorian, 2013, p. 278).

Lors de la phase 1 les élèves sont incités à analyser la figure. Cette analyse implique la prise en compte à la fois de la forme du modèle (figure externe) et de ses figures internes, c'est-à-dire de la décomposition méréologique induite par son découpage en éléments figuraux 2D monochromes, éventuellement en jouant avec le changement d'orientation. Ceci conduit les élèves à identifier :

- la figure externe du modèle ;
- ses figures internes ;
- l'organisation spatiale relative de ces éléments figuraux.

Lors de la mise en œuvre dans une classe de CP (période 5), nous avons ainsi pu constater des décompositions et reconfigurations figurales de plus en plus nombreuses et immédiates de la part des élèves, faisant apparaître des sous-figures monochromes et polychromes. La reconnaissance du carré a également fait l'objet de discussions. Ainsi, l'analyse du modèle, préalable à sa reproduction, est une étape importante de l'activité.

En outre, la demande de justification concernant l'identification des formes conduit progressivement les élèves à la prise de conscience de certaines propriétés de ces formes, à commencer par le nombre de côtés et de sommets, ainsi qu'à la mise en évidence de certains points communs. Par exemple :

- Le carré possède quatre côtés et quatre sommets ; tous ses côtés ont la même longueur ;
- Le rectangle possède lui aussi quatre côtés et quatre sommets mais les côtés n'ont pas tous la même longueur ;
- De même, le trapèze possède quatre côtés et quatre sommets, mais certains côtés opposés ne sont pas parallèles ;
- Le triangle ne possède que trois côtés et trois sommets.

Ainsi peut s'amorcer le passage de la reconnaissance immédiate de formes (niveau 0 de Van Hiele) à l'analyse (niveau 1).

Dans la phase 3, « *les formulations attendues (...) sont celles qui décrivent les stratégies* » (Bosch & Perrin-Glorian, 2013, p.280). La « mise en mots » des procédures peut aider certains élèves à effectuer la reproduction attendue et porte sur les *gestes* à accomplir dans le micro-espace 3D. Elle permet surtout de rendre explicite les compétences spatiales en jeu, restées implicites dans l'action. En outre, dans le cas particulier du modèle impossible (modalité R), la formulation des raisons d'impossibilité permet de faire émerger de manière explicite les prises d'indices concernant les positions relatives des différentes zones colorées.

Cette phase d'explicitation des procédures peut également conduire à mettre en évidence des relations entre les différentes figures, ainsi que les éléments figuraux 1D que sont les droites du réseau, notamment les diagonales et les médianes. Enfin les modalités de pliage permettent d'aborder les notions de côté et de sommet. L'analyse du langage lors de la mise en œuvre a ainsi fait ressortir la reconnaissance de certains points :

- Les premiers points évoqués sont les sommets du PLIOX et des différents modèles qui apparaissent « au bord » d'un objet de l'espace sensible ;
- Les sommets des carrés secondaires sont mis en évidence car nécessaires lors de la formulation des procédures ;
- La mise en évidence du centre du PLIOX se réalise lorsque les élèves sont amenés à retourner leur PLIOX pour plier selon une diagonale secondaire (modèle 2.4) : ils doivent « placer un sommet sur l'autre ». Or sur le verso

du PLIOX n'apparaissent que les marques des plis effectués, et en particulier ceux des deux médianes du PLIOX. La discrimination du centre du PLIOX « *résulte de la relation d'incidence de deux autres unités figurales (intersection de 2 traits)* » (Duval, 1995, p.180).

Les deux phases de formulation induisent par ailleurs l'utilisation du vocabulaire spatial (à droite de, à gauche de, au-dessus, au-dessous, en haut, en bas, derrière, devant...) ou géométrique (carré, rectangle, triangle, côté, diagonale, droite, sommet, point...), qui apparaît comme un outil pour communiquer procédures ou analyses. Une évolution de ce vocabulaire d'une séance à l'autre a été pointée lors de la mise en œuvre.

7.2.3 La phase de synthèse et d'institutionnalisation

Lors de la phase 4, certaines connaissances peuvent prendre le statut de savoir. En effet, si « *certaines formulations des élèves (et du maître) restent (et doivent rester) du domaine des connaissances attachées à la situation, d'autres sont des formulations, souvent maladroites, du savoir qu'on veut enseigner* » (Bosch & Perrin-Glorian, 2003, p.278). La phase de synthèse permet alors de « *les gérer et [de] les situer par rapport aux formulations attendues* » (ibid).

La phase 4 doit à terme déboucher sur une institutionnalisation locale reprenant les différents points abordés tout au long de l'activité (objets géométriques, propriétés et relations mises en évidence). En effet, lorsque l'enseignant ne dégage pas les connaissances qui circulent, alors cette connaissance ne devient pas objet d'apprentissage : « *lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible : il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation* » (Connes, 1992).

Ainsi, concernant les éléments figuraux 1D, la phase de synthèse peut être l'occasion de faire prendre conscience aux élèves du réseau de droites visible sur le verso du PLIOX. Mais mettre en évidence les droites du réseau ne suffit pas a priori pour conduire les élèves à une déconstruction dimensionnelle : une exploitation de ce réseau dans de nouvelles activités (et donc de nouvelles phases d'action) devra être envisagée.

Concernant les éléments figuraux 2D, on pourra par exemple, selon les modèles proposés, institutionnaliser certains faits suivants :

- la réunion de deux triangles isocèles rectangles peut donner un carré ou bien un triangle ;
- un triangle partagé en deux peut donner deux triangles ;

- la réunion de deux rectangles peut donner un carré ou bien un rectangle ;
- la réunion de deux carrés donne un rectangle ;
- la réunion de quatre triangles peut donner un rectangle ;
- la réunion de quatre rectangles peut former un grand rectangle.

Le vocabulaire peut également faire l'objet d'une institutionnalisation locale.

Enfin, dans le cas du modèle impossible, la formulation des raisons d'impossibilité peut conduire à une activité liée à la déduction, à condition qu'un questionnement spécifique balise le passage de l'expérience à la déduction. C'est au cours de la phase 4 qu'un « *réel travail de distanciation et d'institutionnalisation* » peut être mené permettant « *ce passage [qui] ne va pas de soi* » et dans lequel « *le rôle du maître est essentiel* » (Houdement & Kuzniak, 2000, p.103).

Conclusion

Ainsi définie, la situation générique PLIOX conduit à proposer des problèmes pouvant être identifiés à la fois comme problèmes spatiaux dans le micro-espace 3D, mais aussi comme problèmes géométriques de reproduction de figures planes dans le paradigme géométrique G1. Nous avons montré que la situation PLIOX était essentiellement liée à l'expérience et à l'intuition, mais qu'elle pouvait permettre une activité liée à la déduction en fonction du choix de la modalité de présentation. Enfin, la situation PLIOX, qui se situe essentiellement au niveau 0 de Van Hiele, peut contribuer à développer la pensée géométrique des élèves en les aidant à passer au niveau 1. Elle répond en effet aux principes de développement énoncés par (Marchand, 2009), à savoir :

- varier l'orientation des figures proposées ainsi que leur complexité ;
- favoriser le travail sur les propriétés et leurs relations, en incitant par exemple les élèves à expliciter les conditions minimales d'identification d'une figure ;
- présenter des cas extrêmes de figures ou des contre-exemples ;
- et plus généralement varier les tâches géométriques ainsi que les supports et les instruments.

En outre, ces problèmes mettent en jeu des connaissances spatiales et des connaissances géométriques. Plus particulièrement, ce travail a mis en évidence que la potentialité mathématique de la situation PLIOX porte sur la connaissance/reconnaissance d'éléments figuratifs élémentaires. Celle-ci nécessite une appréhension perceptive ainsi qu'une appréhension opératoire des figures 2D de type méréologique (décomposition et reconfiguration), de type positionnel, voire de type optique (selon la modalité de présentation du modèle retenue).

L'analyse des différentes phases permet de préciser le rôle et le statut de ces connaissances au cours du déroulement de la situation, ainsi que les conditions nécessaires à leur développement.

La mise en évidence des variables didactiques (le choix du modèle, son orientation, la modalité de sa présentation, les plis nécessaires à sa reproduction), a conduit à une première mise en œuvre, mais nous n'avons pas encore exploité la modalité R ni ses variantes, en particulier lorsque le modèle est impossible.

De plus, le réseau de droites qui apparaît sur le verso du PLIOX n'est pas vraiment mis à profit dans la mise en œuvre évoquée. Il serait en effet possible de s'appuyer sur l'identification des sous-figures monochromes ou polychromes du recto pour les faire apparaître au verso. *Il est donc envisageable que le jeu sur le recto/verso du PLIOX permette de développer la capacité à identifier toutes les formes qu'il est possible de reconnaître dans ce réseau de droites.* Selon Houdement, cette capacité doit être travaillée en parallèle de la déconstruction dimensionnelle des formes 2D perceptivement prégnantes. Ce nouveau développement de la situation PLIOX pourrait alors s'intégrer dans le travail de Duval & Godin & Perrin-Glorian qui cherchent à produire des situations pour « apprendre à regarder les figures ».

Bibliographie

BERTHELOT R. & SALIN M-H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire*, Thèse, Université de Bordeaux I.

BERTHELOT R. & SALIN M-H. (1999-2000), L'enseignement de l'espace à l'école primaire, *Grand N* **65**, 37-59.

BOSCH M. & PERRIN-GLORIAN M-J. (2013), Le langage dans les situations et les institutions, in *Questions vives en didactique des mathématiques : problèmes de la profession d'enseignant, rôle du langage*, 267-302.

BROUSSEAU G. (1983), Étude de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie, *Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique*, LSD IMAG, Université J. Fourier, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (2000), Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire : l'étude de l'espace et de la géométrie, *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques du Département des Sciences de l'Éducation de l'Université de Crète*, Réthymon.

CONNES F. (1992), Savoirs et connaissances dans la perspective de la transposition didactique, *RDM* **12(2.3)**, 222-267.

- DUVAL R. (1988), Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **1**, 57-74.
- DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berne.
- DUVAL R. (2003), Décrire, visualiser ou raisonner : quels « apprentissages premiers » de l'activité mathématique ?, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **8**, 13-62.
- DUVAL R. & GODIN M. & PERRIN-GLORIAN M-J. (2004), Reproduction de figures à l'école élémentaire, in *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques 200*, 5-89.
- DUVAL R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation de raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **10**, 5-53.
- FAVRAT J-F. & AL (2006), Problèmes et activités finalisées dans l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire, *Actes du XXXIIème colloque COPIRELEM*, IREM de Strasbourg.
- GALVEZ G. (1985), *El aprendizaje de la orientacion en el espacio urbano : una proposicion para la ensenanza de la geometria en la escuela primaria*, Tesis, Centro de Investigacion del IPN, Mexico.
- GUILLE-BIEL WINDER C. (2013), *Reproduction de figures en CP/CE1 : la situation du PLIOX*, Mémoire de Master, IREM Université de Paris VII, Paris.
- HOUEMENT C. & KUZNIAK A. (1999), Géométrie et paradigmes géométriques, *Petit x* **51**, 5-22.
- HOUEMENT C. & KUZNIAK A. (2000), Formation des maîtres et paradigmes géométriques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **20.1**, 89-116.
- HOUEMENT C. & KUZNIAK A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **11**, 175-193.
- KUZNIAK A. & RAUSCHER J-C. (2003), Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école, *Actes du XXIXème colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres*, 271-290, IREM des Pays de la Loire.
- MARGOLINAS C. & LAPARRA M. (2008), Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation, *Actes du colloque « Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation »*, Bordeaux 2008, <http://www.aquitaine.iufm.fr/infos/colloque2008/cdromcolloque/communications/marg.pdf>.

PERRIN-GLORIAN M-J. & MATHE A-C. & LECLERC R. (2013), Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ?, *Repères-IREM* **90**, 5-41.

VAN HIELE P-M. (1986), Structure and Insight. A theory of Mathematics Education, Academic Press, Orlando.

CLAIRE GUILLE-BIEL WINDER

Université de Nice Sophia Antipolis
ESPE Centre de Draguignan – Célestin Freinet
Avenue Alphonse Gilet
83 300 Draguignan
claire.winder@free.fr

ZAHID ELM'HAMED

**EFFETS D'UN APPRENTISSAGE EMPIRIQUE SUR LA
COMPREHENSION DU CONCEPT DE MOYENNE ARITHMETIQUE**

Abstract. Effects of empirical learning on the understanding of the concept of arithmetic mean. The goal of this research is to evaluate the effects of empirical learning on understanding of the concept of arithmetic mean, at the Moroccan students in 3rd year of college (14-17 years old). This empirical learning is materialized by some practical activities allowing the apprehension of usual properties of this concept. These practical activities are established before traditional and official courses introducing this statistical

notion, usually focused on application of the formula $\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$. We chose a

random sample constituted of 144 students (74 boys and 70 girls) under above school level. We have applied randomization principle in order to form two equal groups: Experimental group and Control group. The experimental design adopted is formed by four steps composed with tasks to be achieved by the students. The first task, addressed to the Experimental group only, involves implementation of the above practical activities. The results of this research, deducted by application of Factorial Analysis, show that empirical learning have positive effect on understanding of arithmetic mean at students in 3rd year of college. Thus, this study suggests not only that the arithmetic average concept is more complex than the direct application of the above computational algorithm, but also implies that the average concept should be taught beyond this famous rule.

Résumé. L'objectif de cette recherche est d'évaluer les effets d'un apprentissage empirique sur la compréhension du concept de moyenne arithmétique, des élèves de la 3^{ème} année du collège (âgés entre 14 et 17 ans). Cet apprentissage empirique est concrétisé par un ensemble d'activités pratiques permettant l'appréhension de propriétés usuelles relatives à ce concept. Ces activités pratiques sont mises en place avant tout cours traditionnel et officiel introduisant cette notion statistique, habituellement axé sur l'application de la formule $\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$. Nous avons choisi un échantillon aléatoire de 144 sujets (74

garçons et 70 filles), dans lequel nous avons constitué un Groupe expérimental et un Groupe de contrôle, d'effectifs égaux. Notre plan expérimental a comporté quatre étapes composées de tâches à réaliser par les sujets, dont la première, qui a été proposée au Groupe expérimental seul, implique la mise en œuvre des activités pratiques. Les résultats, qui ont été étudiés à l'aide de l'analyse factorielle des correspondances multiples, montrent que cet apprentissage empirique a impliqué un effet positif sur la compréhension de la moyenne arithmétique. Nous annonçons ainsi que la compréhension de ce concept est plus compliquée que l'application directe et aveugle de l'algorithme de calcul présenté ci-dessus, mais qu'il devrait-être enseigné au-delà de cette fameuse règle.

Mots clés: Moyenne arithmétique – Apprentissage empirique – Apprentissage coopératif – Compréhension conceptuelle – Compréhension instrumentale – Conceptions erronées.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 19, p. 129 - 168.
© 2014, IREM de STRASBOURG.

1. Introduction

La statistique est une partie des mathématiques utilisée dans de nombreux domaines tels que l'économie, les sciences naturelles, l'histoire et la géographie. Dès l'école primaire, on enseigne aux élèves des activités de recueil et d'organisation des données liées à des phénomènes naturels (quantité de pluie, température, ...). Coutanson a abordé cette question de l'éducation statistique à l'école primaire en France (Coutanson, 2010). Au niveau de l'enseignement secondaire, ce n'est qu'à partir de 1983, année du début des réformes coïncidant avec l'arabisation des matières scientifiques, que la statistique est intégrée dans les programmes des mathématiques du système éducatif marocain.

À l'ère de la communication et de la technologie, les sociétés ont besoin d'analyser des données pour prendre des décisions d'ordre économique. Cela suggère qu'il soit important que les élèves développent la compréhension des concepts et des processus utilisés dans ce domaine (Zaki et Elm'hamedi, 2009). La moyenne arithmétique est l'un des concepts de base les plus importants dans cette entreprise. Les données rapportées et utilisées dans la vie quotidienne, les journaux scientifiques et les médias publics, utilisent fréquemment la notion de moyenne. Il ne faudrait donc pas nous étonner si dans un système éducatif donné, on a choisi d'introduire une notion telle que la moyenne. En outre, cette notion est la plus présente dans la plupart des curricula de l'éducation générale à travers le monde (Goodchild, 1988; Waston et Moritz, 1999). Elle est aussi usuelle dans le vocabulaire de la plupart des enfants, même avant de recevoir des connaissances statistiques formelles à l'école. En effet, les termes comme « taille moyenne », « âge moyen », « score moyen », sont fréquemment utilisés par les enseignants et par les ouvrages même avant que les élèves puissent comprendre les significations sous-jacentes.

Malheureusement, bien que l'enseignement de la statistique soit souvent justifié en se référant à la nécessité de préparer les élèves aux demandes d'une société d'information, plusieurs enseignants ne fournissent pas beaucoup d'effort pour satisfaire à de telles demandes (Elm'hamedi, 2010). Ils introduisent souvent dans leurs instructions des tâches obligeant les élèves à effectuer seulement des calculs sur la moyenne. Ceci peut ne pas être suffisant pour développer les habiletés de savoir-faire statistique des élèves. De même, on ne peut pas être sûr qu'ils peuvent interpréter, d'une façon raisonnable, les arguments statistiques rencontrés dans des articles de journaux, dans des informations à la télévision, dans des annonces ou dans le milieu de travail.

L'importance du concept «moyenne arithmétique» vient du fait qu'il prend en considération toutes les valeurs de la distribution et entre dans le calcul des autres caractéristiques telles que les indices de dispersion et de corrélation. La moyenne arithmétique est le paramètre le plus généralement utilisé pour mesurer la tendance

centrale. De même, c'est un paramètre fréquemment utilisé dans la vie de tous les jours, et il fournit une information essentielle à propos de la valeur typique d'une série de données.

En statistique inférentielle, on compare souvent des moyennes ou des différences de moyennes de plusieurs séries de données. Pareillement, des théories dans plusieurs disciplines incluent des concepts exprimés en termes de moyennes ou sommes de moyennes. Dans plusieurs contextes, les moyennes sont seulement calculées après pondération des quantités; en mathématiques et en physique, par exemple, l'intégrale est une somme pondérée, tandis que le centre de gravité est une moyenne pondérée. La notion de moyenne peut aussi jouer un rôle en politique: l'idée d'intervalles de confiance est la base des outils statistiques sous-jacents aux opinions concernant un scrutin donné.

Bien que le concept «moyenne» semble être simple tel que l'algorithme de calcul le suggère, des recherches antérieures (Pollatsek, Lima et Well, 1981; Mevarech, 1983; Strauss et Bichler, 1988) indiquent que les élèves ont plusieurs conceptions erronées concernant cette notion. Elles ne sont pas dues au manque de connaissances procédurales de calcul de la moyenne, mais au manque de la compréhension conceptuelle du concept. Ce qui est interprété par l'absence d'une pensée statistique chez les élèves (Pfannkuch et Wild, 2003; Chatzivasileiou, Michalis et Tsaliki, 2010).

La moyenne arithmétique est définie par addition des valeurs puis division de la somme trouvée par le nombre de valeurs qui ont été additionnées. Strauss et Bichler (1988) ont argumenté que la simplicité des aspects de calcul du concept «moyenne» pourrait le faire apparaître plus facile. De même, Mokros et Russell (1995) ont annoncé que ce concept est un objet mathématique d'une complexité inappréciée. En fait, plusieurs compréhensions des élèves relatives au concept ne sont que l'algorithme : «Ajouter Puis Diviser». Aussi des études ont-elles examiné les conceptions des élèves à propos de cette notion (Pollatsek, Lima et Well, 1981; Mevarech, 1983; Strauss et Bichler, 1988; Chatzivasileiou, Michalis et Tsaliki, 2010) et ont exploré les approches instructionnelles possibles (Mevarech, 1983; Hardiman, Well et Pollatsek, 1984) pour promouvoir sa compréhension. Plus récemment, les travaux de Vladimir Andrade (Andrade, 2013) ont porté sur les concepts de mesures de tendance centrale et de dispersion en portant, dans un premier temps, l'attention sur leurs places dans les manuels scolaires en France et au Brésil.

Quant aux stratégies adoptées par les élèves face à la réalisation d'une tâche impliquant le concept de la moyenne arithmétique, Cai (1995) a pu remarquer qu'elles sont au nombre de trois, et sont les suivantes :

- *Mise A Niveau (MAN)*, dans laquelle l'élève utilise une suite de «retranchement puis ajout» afin d'arriver à la solution adéquate du problème.
- *Ajouter Puis Diviser (APD)*, se basant sur l'application de la formule algorithmique: $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.
- *Tâtonnement Puis Erreur (TPE)*, dans laquelle l'élève choisit premièrement une valeur donnée pour la solution, puis il contrôle si elle est en concordance avec les données du problème. Si ce n'est pas le cas, il choisit une autre valeur, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il tombe sur la valeur adéquate.

Par ailleurs, malgré la place prépondérante qu'occupe cette notion en statistique, en feuilletant, brièvement, les manuels scolaires de notre système éducatif, nous sommes déçus de voir d'une part qu'ils se sont focalisés seulement sur la fameuse règle $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ et d'autre part qu'une large quantité de situations a été prise

avec des exemples numériques, basés sur des exercices de calcul seulement.

De ce fait, on pourrait attendre, par exemple, l'émergence de confusions quand les problèmes rencontrés sont tels que les nombres qui doivent être inclus dans la somme relative au calcul de la moyenne arithmétique ne sont pas complètement clairs. L'élève, quant à lui, pouvant facilement résoudre les exercices proposés et pouvant équilibrer à première vue n'importe quelle série de données, sans tenir compte de leur origine ou de leur nature, se trompe en croyant qu'il a bien compris ce concept, qu'il ne rencontrera jamais de difficultés en résolvant des problèmes impliquant cette notion et que réussir le calcul formel constitue une compréhension complète de ce concept.

Par exemple, Carpenter et al. (1981) ont rapporté que les élèves ont des difficultés avec des problèmes qui vont au-delà de l'application de l'algorithme calculatoire de la moyenne. La majorité des élèves ne peut pas déterminer la valeur d'une donnée manquante connaissant la moyenne et les valeurs des autres données. Ceci illustre que les connaissances conceptuelles de la moyenne sont limitées. Ces élèves sont incapables de modifier l'algorithme familier de calcul de la moyenne d'une façon qui leur permette de l'adapter pour utilisation dans des situations non standard. Cependant, la moyenne arithmétique est un concept fondamental en statistique. Elle est largement utilisée dans de nombreux contextes scolaires. Jusqu'à présent, il est rare que nous rencontrions une discussion approfondie des buts éducatifs concernant l'enseignement de ce concept. Cela implique, sans doute, un manque de clarté à propos de la méthode d'évaluation des connaissances des élèves relatives à la moyenne arithmétique.

Par ailleurs, des recherches ont suggéré que certains aspects de connaissances conceptuelles à propos de la moyenne sont absents. Ceci nous a conduit à une recherche qui commence par le processus d'identification des aspects spécifiques de la connaissance conceptuelle (e.g. propriétés de la moyenne et interprétations variées de la moyenne), et de détermination du point jusqu'auquel on a besoin de connaissances relatives à ces différents aspects conceptuels. Evaluer la nature de la compréhension conceptuelle des élèves relative à la moyenne peut amener non seulement à informer les éducateurs sur les connaissances des élèves relatives à la moyenne, mais aussi à suggérer des directions de pratiques de classe qui peuvent incorporer tout à la fois les aspects calculatoires et conceptuels de la moyenne.

Par conséquent, une investigation à propos de l'acquisition d'un niveau de compréhension satisfaisant de la moyenne arithmétique est, sans doute, le meilleur point de départ pour explorer les structures cognitives dont les élèves de l'enseignement au collège ont besoin pour manipuler les autres concepts statistiques, afin de pouvoir poursuivre leurs études secondaires et supérieures avec succès.

Ainsi, le travail que nous exposons dans cet article s'inscrit dans la continuité des réflexions et recherches menées sur la question de mise en place d'ingénieries didactiques permettant d'atteindre un niveau de compréhension satisfaisant du concept de la moyenne arithmétique. Plus particulièrement, nous essayons de traiter et de mettre à l'épreuve l'hypothèse de recherche suivante:

«Des activités pratiques, basées sur les stratégies MAN et TPE, et visant l'appréhension expérimentale de propriétés de la moyenne arithmétique, mises en place avant tout cours axé sur la formule $\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$, introduisant ce concept avant la mise en place de toute activité théorique basée sur la stratégie APD et visant l'appréhension théorique de ces mêmes propriétés, permettent une compréhension conceptuelle de ce concept, chez les élèves de la 3^{ème} année du collège».

L'idée de primauté de ces activités pratiques indiquées dans notre hypothèse de recherche avant que les élèves reçoivent de cours officiel sur la moyenne arithmétique, est basée sur le fait que nous sommes très conscients que dès son enfance, l'élève se trouve déjà familiarisé avec l'utilisation de ce concept ainsi qu'avec ses propriétés caractéristiques; il l'utilise fréquemment dans sa vie quotidienne, comme nous l'avons déjà signalé. De plus de telles activités pratiques seront instaurées de manière assez simple et usuelle, et n'exigeant pas des élèves qu'ils reçoivent un tel cours, ou qu'ils maîtrisent des connaissances très particulières relatives à ce concept.

Il est aussi intéressant d'insister sur le fait que, *selon notre estimation*, la compréhension conceptuelle du concept de la moyenne arithmétique n'est satisfaite par un élève, que si, se trouvant face à la réalisation d'une tâche impliquant ce concept, il peut préférer utiliser l'une des deux stratégies MAN ou TPE plutôt que la stratégie usuelle APD. Toute propriété caractéristique de la notion de moyenne lui apparaît aussi évidente et allant de soi, pour pouvoir la vérifier, la démontrer ou la mettre en exergue, sans qu'il pense à recourir à la stratégie APD, qui est basée (rappelons-le) sur l'application de la formule $\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$. En revanche, une

telle application de cette fameuse formule constitue, *selon notre estimation*, ce qu'on appelle la compréhension instrumentale du concept de la moyenne arithmétique.

Mais avant de procéder ainsi, nous allons tout d'abord passer en revue les principales recherches déjà menées sur les difficultés et modèles de compréhension relatives à cette notion statistique la plus habituellement utilisée.

2. Revue de la littérature

Les différentes recherches, déjà établies, que nous avons pu consulter et qui sont en relation directe avec notre problématique sont très nombreuses et sont, malheureusement, toutes réalisées dans des contextes autres que celui relatif au système éducatif marocain. Leur dénominateur commun est que *la connaissance de la formule $\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$, seule, ne suffit pas à l'élève pour acquérir une compréhension satisfaisante du concept de la moyenne arithmétique.*

Nous nous sommes limités ici à la présentation et la discussion des résultats de quelques recherches seulement, sachant que la liste n'est pas exhaustive et que la plupart d'entre elles sont déjà signalées dans la partie introductive de cet article. Ainsi, nous avons divisé ces recherches en deux catégories principales. Chaque catégorie est identifiée par les articles ou ouvrages qui ont fait l'objet de traitement de ce concept. La première est relative à *quelques éléments d'exploration sur l'appréhension de ce concept par les élèves*. La deuxième présente *un ensemble de modèles préconisés de compréhension*, à prendre en considération lors d'un enseignement sur ce concept. L'adoption de ces modèles permet, sans doute, aux élèves d'acquérir une compréhension conceptuelle adéquate de ce concept statistique.

2.1. Quelques éléments d'exploration

oPollatsek, Lima et Well (1981):

Deux résultats essentiels sont tirés de l'étude menée dans Pollatsek, Lima et Well (1981). Le premier est qu'une forte majorité d'élèves sont incapables de pondérer et combiner correctement deux moyennes en une seule. Pour eux, la méthode de non-pondération est la seule qu'ils connaissent pour traiter les problèmes relatifs à la moyenne. Ainsi, les difficultés rencontrées à propos du concept « moyenne », ne sont pas restreintes aux habiletés de pondérer et combiner deux moyennes. Mais, la difficulté de base imprévue est comment manipuler la notion de moyenne dans un problème donné. Les réactions des sujets ont indiqué que les difficultés qu'ils ont trouvées ne sont pas dues à la non-connaissance de la formule algorithmique :

$$\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Une façon de résumer le manque d'habiletés, chez plusieurs élèves, à résoudre des problèmes relatifs à la moyenne pondérée est qu'ils se comportent comme si la moyenne était un concept purement formel, défini seulement en termes de calculs basés sur des nombres abstraits.

Le deuxième résultat est que le degré d'abstraction des données du problème nécessitant la détermination de la moyenne arithmétique a un effet sur la capacité de sa résolution par les élèves. Très précisément, plus les x_i sont abstraits, plus les élèves trouvent des difficultés pour résoudre des problèmes impliquant le concept de moyenne arithmétique.

oCai (1995):

A partir d'une tâche ouverte, impliquant une situation concrète, nécessitant la détermination d'une donnée inconnue x_{i_0} , étant donné : la moyenne arithmétique, $\bar{x}$, la taille des données, n , et les autres données x_i ($i \neq i_0$), Cai (1995) a pu identifier trois stratégies de solution chez les élèves, comme nous l'avons déjà signalé dans la partie introduction de cet article, à savoir : MAN, APD et TPE. De plus, les cinq différents types d'erreurs, présentés dans le tableau suivant, sont commis par ces élèves en traitant ladite tâche:

Type de l'erreur	Description de l'erreur
<i>Erreur minime</i>	L'élève a appliqué le processus correctement pour trouver la solution juste, mais il a commis une petite erreur de calcul
<i>Violation de « l'interruption de la règle »</i>	L'élève a utilisé une stratégie de tâtonnement erronée
<i>Utilisation incorrecte du concept « Moyenne »</i>	L'élève a essayé d'appliquer directement l'algorithme de calcul de la moyenne pour résoudre le problème, mais cette application était incorrecte
<i>Manipulation injustifiée des symboles</i>	L'élève a choisi plusieurs données indiquées dans la tâche et il les a manipulées d'une façon sans rapport avec le contexte du problème
<i>Erreur impossible à identifier</i>	Le travail de l'élève ou son explication ont été non clairs ou incomplets de telle sorte qu'on ne peut pas identifier le type d'erreur

Tableau 1. Erreurs des élèves relatives à la tâche ouverte

En ce qui concerne les représentations de la solution trouvée par les élèves, Cai(1995) a pu distinguer quatre catégories : *verbale* dans laquelle l'élève a principalement utilisé une expression écrite, *illustrée* où l'élève a principalement utilisé une photo ou un graphe, *arithmétique* dans laquelle l'élève a principalement utilisé des expressions arithmétiques, et enfin *algébrique* où l'élève a principalement utilisé des expressions algébriques. Aussi, des analyses quantitatives ont montré :

- qu'il y a des différences statistiquement significatives entre les élèves qui ont utilisé les différentes représentations,
- que les élèves avec une représentation algébrique possèdent la meilleure performance significative, suivis de ceux qui ont utilisé une représentation symbolique arithmétique,
- qu'il n'y a pas de différence significative entre les élèves qui ont utilisé une représentation visuelle et ceux qui ont utilisé une représentation verbale.

2.2. Modèles préconisés de compréhension

o **Pollatsek, Lima et Well (1981):**

En se basant sur le modèle de compréhension d'un concept mathématique établi par Skemp¹ en 1979, Pollatsek, Lima et Well (1981) ont construit une

¹ Skemp (1979) a éclairci la distinction entre la *compréhension instrumentale* et la *compréhension relationnelle* d'un concept. La compréhension instrumentale d'un concept quantitatif consiste à acquérir seulement une collection de règles isolées (vraisemblablement apprises par cœur) pour

compréhension complète du concept « moyenne arithmétique », dont nous présentons l'essentiel dans les deux paragraphes suivants:

Le niveau de compréhension instrumentale le plus bas peut consister à *comprendre seulement la règle de calcul de la moyenne simple d'une série de nombres*. Mais, de plus, on pense qu'il y a plusieurs genres de connaissances supplémentaires qui doivent être représentées dans un schème de moyenne. En outre, *trois genres de connaissances* peuvent être distingués : *fonctionnel, calculatoire et analogique*.

Par *connaissance fonctionnelle*, on se réfère à la compréhension de la moyenne comme un concept signifiant, véritable et universel. Si la compréhension de la moyenne se réduit au calcul qu'on peut effectuer avec des nombres abstraits et si la moyenne est alors vue comme une référence universelle limitant le choix des scores qu'on peut entrer dans la formule de calcul, son acquisition complète réclame une connaissance supplémentaire. *Une connaissance calculatoire* adéquate vise à impliquer l'une ou l'autre des formules de calcul de la moyenne pondérée ou la formule de calcul de la moyenne non pondérée, combinée avec une information à propos de la manière d'obtenir la somme appropriée. Il est particulièrement important, en résolvant des problèmes relatifs à la moyenne pondérée, de savoir que l'on peut aller de la somme d'une série de scores à la moyenne en divisant par le nombre de scores, tout aussi bien qu'on peut obtenir la somme relative à la moyenne en la multipliant par le nombre de scores. Enfin, *une connaissance analogique* pourrait impliquer des images visuelles de la moyenne comme le milieu ou le point d'équilibre. La moyenne doit être représentée analogiquement par une valeur du score autour de laquelle la somme des déviations des points de données doit être nulle; une telle représentation doit être suffisante pour empêcher les élèves de commettre des erreurs graves en résolvant des problèmes relatifs à la pondération de la moyenne, à condition qu'ils aient bien assimilé la connaissance fonctionnelle qui indique quels éléments ils ont à utiliser comme poids.

Bien qu'il puisse sembler raisonnable que les performances des élèves varient en termes de connaissances analogiques ou de calcul, Pollatsek, Lima et Well (1981) ont abouti au fait que la plupart des élèves n'utilisent pas la connaissance analogique de la moyenne en traitant un problème de pondération. La connaissance de la règle de calcul seule, *non seulement n'implique aucune compréhension réelle du concept de base sous-jacent, mais peut empêcher l'acquisition d'une compréhension relationnelle adéquate*. Les élèves peuvent penser que *la compréhension instrumentale d'un concept constitue une compréhension complète*.

arriver à des réponses limitées d'une classe de problèmes. Par contre, la compréhension relationnelle consiste à formuler un schéma approprié ou une série de structures conceptuelles suffisantes pour résoudre diverses classes de problèmes.

oGall (1995):

Quant à lui, Gall (1995) a proposé un modèle composé de trois éléments pouvant jouer un rôle très important dans le développement de la pensée statistique chez les élèves et qui sont des éléments de base pour évaluer le degré d'appréhension de ce concept par les élèves. Le premier élément est qu'il s'agit de former des élèves qui doivent comprendre :

- A quoi la moyenne est-elle utile ? (par exemple pour représenter l'emplacement du centre d'une série de données, pour aider aux prédictions et aux comparaisons),
- Sous quelles conditions y a-t-il un sens d'utiliser une moyenne, et pourquoi ?
- Que peut-il arriver si une moyenne est utilisée là où elle ne devrait pas effectivement l'être, ou vice versa ?
- Quel est le rôle de l'outil d'équilibrage dans le contexte des autres outils de la boîte à outils statistiques ? Les élèves doivent savoir dans quelles situations la moyenne est différente des autres outils, et reconnaître que la moyenne peut ne pas nécessairement être le premier outil à utiliser, le seul outil dont on a besoin, ou le plus approprié.

Le deuxième élément est qu'il faut *tester les aptitudes des élèves à mobiliser la notion de moyenne non seulement dans un contexte actif (production) s'occupant de la production des recherches basées sur des données statistiques, mais aussi dans un contexte passif qui permet d'interpréter ou de consommer ces recherches*. Le consommateur des données statistiques peut ne pas avoir nécessairement besoin de savoir en profondeur comment effectuer une recherche ou comment utiliser des techniques statistiques, mais il a besoin de savoir comment interpréter, au moins informellement, les déclarations élaborées autour du concept « moyenne ». Une activité utile pour développer le savoir-faire statistique concernant la « moyenne » peut débiter par la demande que les élèves cherchent et comparent les définitions de cette notion dans différents dictionnaires. Ensuite, les élèves peuvent être invités à écrire, discuter et comparer leurs interprétations en formulant des phrases comportant le mot « moyenne », et qu'ils pourraient entendre en tant qu'auditeurs passifs.

Finalement, le troisième élément concerne *l'importance de la signalisation du contexte pour évaluer les connaissances des élèves, relatives à la notion de moyenne arithmétique*. Les évaluations doivent surtout être focalisées sur les aptitudes des élèves à utiliser la moyenne et à manipuler le concept « moyenne » en discutant ses utilités et ses interprétations dans des contextes différents. Il est difficile de juger entièrement qu'une personne connaît les outils, sans lui fournir le contexte (par exemple des problèmes concrets) qui peut motiver l'utilisation.

Pour évaluer les niveaux de la compréhension des élèves relative à la notion de moyenne, les enseignants doivent élaborer des tâches présentant un besoin pertinent d'utiliser cette notion. Demander aux élèves de décrire une série simple de données avec l'espoir qu'ils choisissent d'utiliser la moyenne est moins bénéfique. Les techniques graphiques (par exemple l'histogramme) les mesures ordinales (par exemple la médiane) peuvent souvent être préférables. Pourtant, les connaissances des élèves relatives à la moyenne doivent aussi être examinées à travers des tâches d'interprétation, parce que dans la vie quotidienne, il y a peu d'instances où les citoyens ont à calculer les moyennes. De telles évaluations sont de grande utilité si les élèves ont préalablement fourni des efforts en communication écrite et orale, relative aux problèmes statistiques (Zaki et Elm'hamedi, 2013).

oMarnich (2008):

La plupart des modèles de compréhension du concept de moyenne arithmétique séparent les éléments arithmétiques de ceux statistiques relatifs à ce concept. Deux conceptualisations reliées à la moyenne arithmétique sont mises en évidence, à savoir: « Partage équitable » et « Milieu de la balance ». Elles sont connectées soit à leurs places en aspects mathématiques soit à leurs places en aspects statistiques de ce concept. La conceptualisation « Milieu de la balance » conçoit le concept de la moyenne arithmétique comme le *point d'équilibre des données*; tandis que celle de « Partage équitable » voit ce concept comme *une distribution uniforme des données*.

Une étude menée dans Marnich (2008) a signalé que les connaissances des élèves se développent en matière de conceptualisation du « Partage équitable » après qu'ils ont travaillé sur des activités focalisées sur le « Milieu de la balance ». La réciproque est aussi vraie : les connaissances des élèves se développent en matière de conceptualisation du « Milieu de la balance » après qu'ils travaillent sur des activités focalisées sur le « Partage équitable ». De plus, des activités focalisées sur l'une de ces deux conceptualisations permettent aux élèves d'améliorer leurs connaissances relatives aux concepts mathématiques liés à la moyenne arithmétique. Ensuite, cette étude a fait remarquer que la propriété usuelle de la moyenne arithmétique : « Somme des déviations autour de la moyenne est égale à zéro », est un moyen viable et efficace servant à transférer les connaissances des élèves d'une conceptualisation à l'autre: « Partage équitable » et « Milieu de la balance ».

A la lumière de cette revue de littérature que nous avons présentée tout au long de cette partie, deux points que nous voyons essentiels légitiment notre problématique. La première raison est que notre recherche s'inscrit dans un contexte purement marocain, différent de ceux où se sont déroulées toutes les études évoquées par cette revue. La deuxième raison est que nous proposons une ingénierie didactique,

inspirée de ces recherches, susceptible de permettre à l'élève du collège l'acquisition d'une compréhension conceptuelle relative à la moyenne arithmétique qui est un concept très enraciné dans l'histoire (Lavoie et Gattuso, 1998 ; Plackett, 1970).

3. Expérimentation auprès des élèves

3.1. Objectifs de l'étude et expérimentation

Nous rappelons que l'hypothèse que nous défendons dans cet article est la suivante.

«Des activités pratiques, basées sur les stratégies MAN et TPE, et visant l'appréhension expérimentale de propriétés de la moyenne arithmétique, mises en

place avant tout cours axé sur la formule $\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$, introduisant ce concept

avant la mise en place de toute activité théorique basée sur la stratégie APD et visant l'appréhension théorique de ces mêmes propriétés, permettent une compréhension conceptuelle de ce concept, chez les élèves de la 3^{ème} année du collège».

Très précisément, nous voulons savoir si la mise en place d'activités pratiques avant tout cours théorique favorise une compréhension conceptuelle du concept de la moyenne arithmétique chez les élèves de 3^{ème} année du collège.

Les propriétés que nous avons prises en considération pour pouvoir mettre en exergue notre étude sont les suivantes :

- **(P₁)** : «APD» n'est pas la seule stratégie possible pour résoudre un problème impliquant le concept de la moyenne arithmétique, mais la stratégie: «MAN», basée sur une application successive de l'opération mathématique: «retrancher puis ajouter», et la stratégie: «TPE», sont aussi possibles pour réaliser un tel objectif;
- **(P₂)** : La valeur prise par la moyenne arithmétique est toujours comprise entre la donnée minimale et la donnée maximale;
- **(P₃)** : Une donnée nulle est toujours à prendre en considération et ne doit pas être négligée lors du calcul de la valeur de la moyenne arithmétique;
- **(P₄)** : Une donnée égale à la valeur de la moyenne arithmétique n'a pas d'effet sur la valeur de cette dernière;
- **(P₅)** : La somme des déviations des données autour de la moyenne arithmétique est toujours égale à zéro;
- **(P₆)** : La valeur prise par la moyenne arithmétique est très sensible aux données extrêmes.

3.2. Echantillons

Les sujets sur lesquels nous avons testé notre hypothèse de recherche sont les élèves de la 3^{ème} année du collège. Ils sont en nombre de 144 (74 garçons et 70 filles), âgés entre 14 et 17 ans. Ils sont choisis d'une manière aléatoire. Dans un premier temps nous avons aléatoirement divisé ces 144 sujets en deux groupes G1 et G2 d'effectifs 72 chacun. Puis dans un deuxième temps nous avons fait un tirage au sort pour savoir parmi G1 et G2 ce qui va représenter le groupe expérimental (G.E) et le groupe de contrôle (G.C). Les rôles de chaque groupe dans la mise en place de notre hypothèse de recherche seront l'objet du paragraphe suivant dans lequel nous allons présenter le plan expérimental sur lequel nous allons nous baser.

3.3. Plan expérimental

Afin de mettre à l'épreuve l'expérience notre hypothèse de recherche, nous allons adopter le plan expérimental détaillé dans le tableau suivant. Ce plan expérimental est composé de quatre étapes. Pour chaque étape, nous avons présenté les éléments essentiels, les stratégies adoptées (MAN, TPE ou APD), les groupes concernés ainsi que la durée estimative de réalisation :

	1 ^{ère} étape	2 ^{ème} étape	3 ^{ème} étape	4 ^{ème} étape
Eléments de l'étape	3 activités pratiques visant l'appréhension des propriétés P_1 jusqu'à P_6 du concept de la moyenne arithmétique.	Cours traditionnel et officiel sur la statistique, contenant le concept de la moyenne arithmétique.	Activité théorique visant l'appréhension des mêmes propriétés P_1 jusqu'à P_6 du concept de la moyenne arithmétique.	• Questionnaire formé de tâches (Items) à réaliser. • La réalisation de chaque tâche nécessite la mobilisation d'une des propriétés de P_1 jusqu'à P_6.
Stratégies adoptées	MAN et/ou TPE	APD	APD	
Groupes concernés	G.E	G.E et G.C	G.E et G.C	G.E et G.C
Durée de réalisation	2 heures	4 heures	2 heures	1 heure

Tableau 2. Eléments du plan expérimental

3.3.1. 1^{ère} étape

Cette étape est composée de trois activités pratiques destinées aux sujets appartenant au groupe expérimental G.E seul. Elles devraient permettre à ces sujets

de mieux conceptualiser le concept de la moyenne arithmétique par l'appréhension à base empirique des propriétés citées, et ce en utilisant les stratégies: «MAN» et/ou «TPE» seulement. Leur rôle est très important, dans la mesure où la stratégie: «APD», usuellement utilisée, se déroule dans un laps de temps ne laissant pas de vraies chances à l'élève pour pouvoir acquérir une compréhension conceptuelle de cette notion. Ainsi, nous présenterons en annexe 1 un ensemble de directives et d'instructions à prendre en considération lors de l'accomplissement de ces activités. Nous décrirons ensuite en détail chacune de ces activités (voir annexe 2) tout en spécifiant le matériel didactique nécessaire ainsi que la procédure à suivre pour pouvoir la réaliser correctement.

3.3.2. 2^{ème} étape

Cette étape est composée du cours traditionnel et officiel sur la statistique, programmé pour les élèves de la 3^{ème} année du collège. Il est dispensé à la fois au groupe expérimental et à celui de contrôle, pendant une durée de quatre heures. Dans ce cours le concept de la moyenne arithmétique est introduit sur la base de la stratégie APD qui utilise la formule $\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$. La partie exercice relative à ce concept est axée sur une application directe et aveugle d'une telle formule.

3.3.3. 3^{ème} étape

Cette étape est constituée d'une activité théorique ayant pour objet la réalisation des tâches impliquées dans les activités pratiques de la 1^{ère} étape en se basant sur la stratégie «APD», axée sur l'application de la formule: $\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$. Il est à signaler que cette activité n'est pas présentée aux deux groupes G.E et G.C de la même manière du fait que les sujets du groupe G.C n'ont pas profité des 3 activités de la 1^{ère} étape. Ils ne savent même pas de quoi il s'agit dans ces activités. En revanche elle vise les mêmes objectifs pour ces deux groupes.

3.3.4. 4^{ème} étape

Cette étape concerne un questionnaire composé de 8 tâches (Items) à réaliser par chacun des deux groupes, G.E et G.C pendant une durée d'une heure. Nous présentons dans le tableau ci-après les objectifs des différentes tâches impliquées dans ce questionnaire. Ils sont numérotés de O₁ à O₈, visant l'évaluation du niveau de compréhension conceptuelle du concept de la moyenne arithmétique chez nos sujets. La réalisation de chaque tâche nécessite l'utilisation d'une des propriétés développées dans les activités de la 1^{ère} et de la 3^{ème} étape :

(O₁) <i>Savoir que : «APD» n'est pas la seule stratégie possible pour résoudre un problème impliquant le concept de moyenne arithmétique, et que la stratégie: «MAN», basée sur une application successive de l'opération mathématique : «retrancher puis ajouter», et la stratégie: «TPE», sont aussi possibles pour réaliser un tel objectif.</i>
(O₂) <i>Pouvoir mettre en œuvre l'une des stratégies «Mise A Niveau» ou «Tâtonnement Puis Erreur» pour réaliser une tâche impliquant le concept de la Moyenne Arithmétique.</i>
(O₃) <i>Savoir que la moyenne arithmétique de données représentées dans un registre numérique a toujours une valeur comprise entre la donnée minimale et la donnée maximale.</i>
(O₄) <i>Pour des données représentées par un diagramme en bâtons, pouvoir situer entre la donnée minimale et la donnée maximale le point où l'on peut lire la valeur de leur moyenne arithmétique.</i>
(O₅) <i>Savoir qu'une donnée nulle est toujours à prendre en considération et ne doit pas être négligée lors du calcul de la valeur de la moyenne arithmétique.</i>
(O₆) <i>Savoir qu'une donnée égale à la valeur de la moyenne arithmétique n'a pas d'effet sur la valeur de cette dernière.</i>
(O₇) <i>Savoir que la somme des déviations des données autour de la moyenne arithmétique est toujours égale à zéro.</i>
(O₈) <i>Savoir que la valeur de la moyenne arithmétique est très sensible aux données extrêmes.</i>

Tableau 3. Objectifs des différents items du questionnaire

Avant de procéder à l'analyse proprement dite des productions des sujets, nous allons consacrer la prochaine section à l'analyse *a priori* du questionnaire en présentant les réponses impliquant seulement une compréhension de type conceptuel de chaque question, sachant que celles à caractère compréhension de type instrumental sont plus simples et ne nécessitent pas plus que l'utilisation de la formule $\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$. Nous avons procédé ainsi afin de mieux cerner

l'interprétation – statistique – des réponses fournies par les sujets:

Item n°1.

Laquelle (ou bien lesquelles) des opérations mathématiques suivantes voyez-vous possibles pour résoudre un problème nécessitant le calcul de la valeur d'une moyenne arithmétique :

- ☐ Retraire puis ajouter. ☐ Diviser puis ajouter. ☐ Diviser seulement.
☐ Ajouter puis diviser. ☐ Ajouter seulement. ☐ Multiplier seulement.
-

Analyse a priori de l'item1

Il est vrai que : « Ajouter puis diviser », est l'opération mathématique usuelle pour déterminer la valeur d'une moyenne arithmétique. Mais, l'opération « Retrancher puis ajouter » (ou d'une manière globale, une application successive d'une telle opération) peut aussi être utilisée pour réaliser un tel objectif, et ce en diminuant les données de valeurs élevées et en augmentant celles de valeurs faibles.

De ce fait, ces deux opérations mathématiques sont les plus faciles pour résoudre un problème de calcul de la valeur d'une moyenne arithmétique.

Item n°2:

- A.** La taille moyenne de quatre personnes est égale à 170 centimètres (cm). Parmi les données suivantes, que vous pouvez trouver entre parenthèses et qui sont exprimées en cm, quelle (quelles) est (sont) celle(s) qui peut (peuvent) être considérée(s) comme *impossible(s)* pour correspondre aux tailles de ces quatre personnes ?

- ☐ (175, 170, 155, x), où x est un nombre inconnu supérieur à 155.
☐ (145, 155, 169, x), où x est un nombre inconnu inférieur à 169.
☐ (180, 160, 150, x), où x est un nombre inconnu supérieur à 150.
☐ (185, 175, 180, x), où x est un nombre inconnu supérieur à 175.

Analyse a priori de l'item 2A

La valeur de la moyenne arithmétique est toujours comprise entre la donnée minimale et la donnée maximale. Donc, seules la 3^{ème} et la 4^{ème} modalité sont en concordance avec l'énoncé de cette question.

- B.** Le tableau ci-après représente le nombre de points en dessus (ou bien en dessous) de la moyenne, obtenus par l'élève Ahmed dans les matières fondamentales suivantes: arabe, français, mathématiques, sciences physiques et sciences de la vie et de la terre. Le terme moyenne dans ce texte désigne : la note moyenne obtenue par Ahmed dans ces cinq matières seulement, et non la moyenne générale correspondant à toutes les matières.

Matière	arabe	français	mathématiques	sciences physiques	sciences de la vie et de la terre
Nombre de points au-dessus ou en dessous de la moyenne	Deux points en dessous de la moyenne	?	Quatre points au-dessus de la moyenne	Un point en dessous de la moyenne	Cinq points au-dessus de la moyenne

Combien de points au-dessus ou en dessous de la moyenne a obtenu l'élève Ahmed en français ?

Analyse a priori de l'item 2B

La somme des points en dessous de la moyenne est égale à 3. Celle au-dessus de la moyenne est égale à 9. Donc, Ahmed a obtenu en français 6 points au-dessus de la moyenne ($9 - 3$).

Item n°3 :

Un commerçant a commencé l'expérience de vente des vases dans un marché de fleurs. Le tableau ci-dessous montre le nombre de vases qu'il a vendus pendant les trois premiers jours:

1^{er} jour	        
2^{ème} jour	  
3^{ème} jour	    
4^{ème} jour	?

A. Combien de vases ce commerçant a-t-il vendu pendant le 4^{ème} jour, sachant que le nombre moyen de vases vendus pendant les quatre jours est égal à 7 vases ?

Analyse a priori de l'item 3A

Le commerçant a vendu 11 vases pendant le 4^{ème} jour. En effet :

• **1^{ère} méthode** (Stratégie : « Tâtonnement Puis Erreur »):

Supposons par exemple que le commerçant a vendu 6 vases pendant le 4^{ème} jour. Voyons alors si l'équation de la moyenne arithmétique est vérifiée :

$$\frac{9 + 3 + 5 + 6}{4} = 5.75. \text{ On remarque que } 5.75 \text{ est inférieure à } 7.$$

Supposons à présent que le commerçant a vendu 9 vases pendant le 4^{ème} jour (c'est-à-dire une valeur supérieure à 6). Voyons si l'équation de la moyenne arithmétique

est vérifiée : $\frac{9 + 3 + 5 + 9}{4} = 6.5$. On remarque que 6.5 est inférieure à 7.

Supposons une troisième fois que le commerçant a vendu 11 vases pendant le 4^{ème} jour (c'est-à-dire : une valeur supérieure à 9). Voyons si l'équation de la moyenne

arithmétique est vérifiée: $\frac{9+3+5+11}{4} = 7$. On remarque que cette égalité est vraie. Donc, le commerçant a vendu 11 vases pendant le 4^{ème} jour.

• **2^{ème} méthode** (Stratégie: « Mise A Niveau »):

On retranche 2 vases du 1^{er} jour et on les ajoute au nombre de vases vendus pendant le 2^{ème} jour. On ajoute aussi 2 vases à ce nombre de vases vendus pendant ce 2^{ème} jour pour qu'il soit égal à 7. On ajoute aussi 2 vases au nombre de vases vendus pendant le 3^{ème} jour pour qu'il devienne égal à 7. Enfin, on ajoute 7 vases complètes au nombre de vases vendus pendant le 4^{ème} jour.

Le nombre de vases vendus pendant le 4^{ème} jour est égal au nombre de vases ajoutés sans qu'ils soient retranchés de n'importe quel jour. Ce nombre est égal à $2+2+7$, soit 11.

B. Au 5^{ème} jour, le commerçant n'a vendu aucun vase. Choisissez parmi les trois propositions ci-après, celle que vous voyez convenable pour correspondre au nombre moyen de vases vendus par le commerçant pendant les cinq premiers jours:

- ☐ la valeur 7 ☐ une valeur supérieure à 7 ☐ une valeur inférieure à 7

Analyse a priori de l'item 3B

Bien que le nombre de vases vendus pendant le 5^{ème} jour soit nul, le dénominateur de l'équation de la moyenne arithmétique doit être augmenté de 1 (c'est-à-dire le 5^{ème} jour). De ce fait, la valeur nouvellement prise par la moyenne arithmétique doit être inférieure à l'ancienne (c'est-à-dire, pendant les 4 premiers jours). Par conséquent, la 3^{ème} modalité est celle qui est vraie.

C. Au 6^{ème} jour, le commerçant a vendu un nombre de vases égal au nombre moyen de vases qu'il a vendus pendant les cinq premiers jours. Parmi les trois propositions ci-après, choisissez celle qui correspond au nombre moyen de vases vendus par le commerçant pendant les six premiers jours :

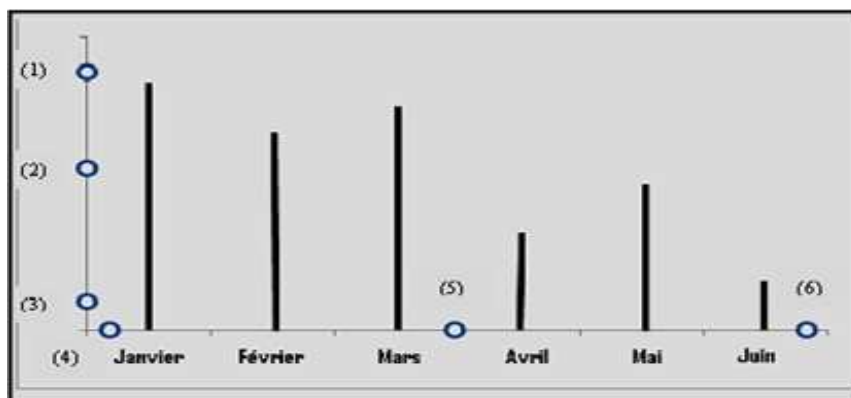
- ☐ Le nombre moyen de vases qu'il a vendus pendant les cinq premiers jours.
☐ Une valeur supérieure au nombre moyen de vases qu'il a vendus pendant les cinq premiers jours.
☐ Une valeur inférieure au nombre moyen de vases qu'il a vendus pendant les cinq premiers jours.

Analyse a priori de l'item 3C

L'ajout d'une donnée égale à la moyenne arithmétique ne modifie en rien la valeur de cette dernière. Donc, la 1^{ère} modalité est celle qui est vraie.

Item n°4:

Le diagramme en bâtons ci-dessous représente les quantités de pluies (en mm) tombées au Maroc durant le 1^{er} semestre de l'année 2000. Parmi les petits anneaux, numérotés de 1 à 6, que vous pouvez trouver sur ce diagramme, cochez celui qui indique la valeur moyenne des quantités de pluies tombées durant ce 1^{er} semestre.



Analyse a priori de l'item 4

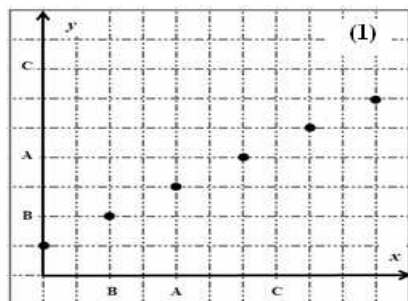
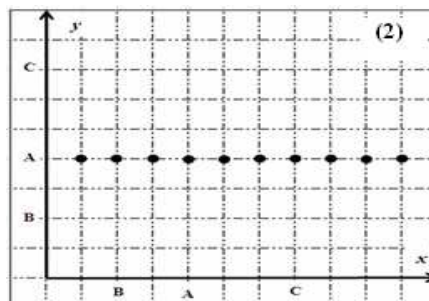
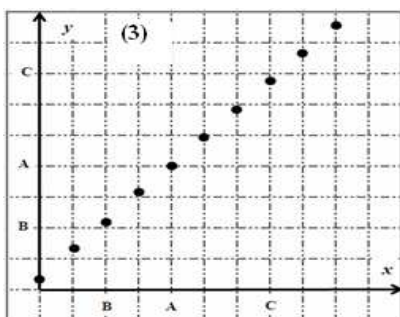
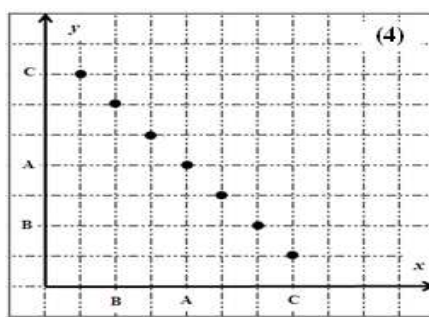
On ne peut pas lire la valeur de la moyenne arithmétique sur l'axe des abscisses. Donc les anneaux (4), (5) et (6) ne conviennent pas. De plus, la valeur de la moyenne arithmétique est toujours comprise entre la donnée minimale et la donnée maximale. Par conséquent, les anneaux (1) et (3) ne conviennent pas non plus. L'anneau (2) est le seul qui puisse indiquer la valeur de la moyenne arithmétique.

Item n°5:

On désigne par la lettre A, la valeur du nombre moyen de matchs de football suivis par neuf amis pendant la semaine dernière. On désigne aussi par les lettres B et C respectivement, le nombre minimal et le nombre maximal de matchs de football suivis par ces amis pendant la semaine dernière. Un dixième ami a rejoint ces neuf amis, et pour lui le nombre de matchs qu'il a suivis pendant la semaine dernière est égal à un nombre inconnu, noté x . Enfin, on désigne par la lettre y le nombre moyen de matchs de football suivis par les dix amis pendant la semaine dernière.

Les quatre graphiques ci-dessous, numérotés de 1 à 4, contiennent quelques points représentant la valeur de y en fonction de x .

Cochez la case située sous celui des quatre graphiques qui vous paraît le mieux représenter la situation.


☐

☐

☐

☐

Analyse a priori de l'item 5

On sait que :

- $y(A)$ doit être égale à A. Donc, le graphique (1) ne convient pas.
- $y(x)$ n'est pas constante. Donc, le graphique (2) ne convient pas non plus.
- Plus x s'écarte de A en direction de B, plus y diminue; et plus x s'écarte de A en direction de C, plus y augmente. Donc le graphique (4) ne convient pas non plus.

C'est finalement le graphique (3) qui représente le mieux la situation.

3.4. Analyse *a posteriori* et interprétation des réponses des sujets

3.4.1. Codage et outils d'analyse retenus pour le traitement des réponses des sujets

Pour le traitement des réponses des sujets, l'analyse factorielle des correspondances multiples (AFCM), nous a semblé être un outil efficace puisqu'il va permettre d'analyser et d'interpréter les réponses des sujets en termes de liens qui existent entre les modalités des différentes questions du questionnaire.

Par ailleurs, pour ne pas biaiser l'analyse, au vu du nombre important de modalités (24) pour l'ensemble des 8 questions (items) du questionnaire, face au nombre «limité» des sujets interrogés (144), nous avons décidé de retenir un codage en tri-modalité: «*Compréhension Conceptuelle*», «*Compréhension Instrumentale*» et «*Absence de Compréhension*». Nous rappelons que nous avons défini ces modalités de la façon ci-après, comme il a été déjà signalé dans l'introduction de cet article. Ce codage adopté, représente en quelques sortes des niveaux hiérarchisés de compréhension du concept de la moyenne arithmétique :

- *Compréhension Conceptuelle* : Elle sera mise en valeur lorsqu'en traitant une question donnée, le sujet préfère utiliser l'une des deux stratégies MAN ou TPE plutôt que la stratégie APD. Toute propriété caractéristique de la moyenne lui paraît utilisable, sans qu'il se sente tenu de recourir à l'application de la formule $\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$, pour pouvoir la vérifier, la démontrer ou la mettre en évidence.
- *Compréhension Instrumentale* : Elle sera prise en considération lorsque le sujet traite une question donnée par simple application de la formule : $\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.
- *Absence de Compréhension* : Elle sera prise en considération en l'absence de compréhension conceptuelle et de compréhension instrumentale, ou lorsque le sujet ne donne aucune réponse à une question donnée.

Dans le tableau 4 suivant, nous résumons les relations existant entre ces questions, leurs objectifs, les propriétés visées du concept de la moyenne arithmétique et les activités pratiques correspondantes, ainsi que le codage des questions et modalités adoptées.

Question	Objectif	Propriété	Activités ²	Libellé question	Code question	Codes modalités ³		
Item n°1	O ₁	P ₁	A ₁ et A ₂	Opérations de Calcul de la Moyenne	OC	OCC	OCI	OCA
Item n°2 (A)	O ₃	P ₂	A ₁ , A ₂ et A ₃ (C, D et H)	Position de la Moyenne entre les Données extrêmes	PD	PDC	PDI	PDA
Item n°2 (B)	O ₇	P ₅	A ₃ (E et F)	Déviations Autour de la Moyenne	DA	DAC	DAI	DAA
Item n°3 (A)	O ₂	P ₁	A ₁ , A ₂ et A ₃ (C, E, G ₂ et H)	Stratégies de Calcul de la Moyenne	SC	SCC	SCI	SCA
Item n°3 (B)	O ₅	P ₃	A ₂ et A ₃ (G ₁)	Effet d'une Donnée Nulle	DN	DNC	DNI	DNA
Item n°3 (C)	O ₆	P ₄	A ₃ (G ₂ et H)	Effet d'une Donnée Egale à la Moyenne	DE	DEC	DEI	DEA
Item n°4	O ₄	P ₂	A ₁	Localisation de la Moyenne à partir d'un Diagramme en Bâtons	LD	LDC	LDI	LDA
Item n°5	O ₈	P ₆	A ₃ (G)	Sensibilité de la Moyenne aux Données extrêmes	SD	SDC	SDI	SDA

Tableau 4. Tableau de bord et codages

3.4.2. Valeurs propres, inertie totale et nombre d'axes retenus

L'analyse factorielle des correspondances multiples⁴ appliquée au tableau disjonctif complet⁵ issu du codage des réponses des sujets, a conduit à des valeurs propres non nulles de moyenne 0,125 (l'inverse du nombre de questions qui est égal à 8). Ces valeurs propres sont : $\lambda_1=0,645$, $\lambda_2=0,214$, $\lambda_3=0,165$ et $\lambda_4=0,147$. L'inertie totale est égale à 1 (nombre de valeurs propres non nulles, divisé par le nombre de questions). Par ailleurs, le calcul des taux d'inertie liés à ces quatre valeurs propres conduit aux pourcentages décroissants allant de 34,4% à 7,84%. Ces valeurs indiquent que l'essentiel de l'information est lié aux quatre premiers

² A_i désigne : Activité n° i. Pareillement, A_i (X et Y) désigne : les questions X et Y de l'activité n° i.

³ La dernière lettre du code d'une modalité désigne le type de compréhension considérée, comme suit : C : Conceptuelle, I : Instrumentale et A : Absence de compréhension.

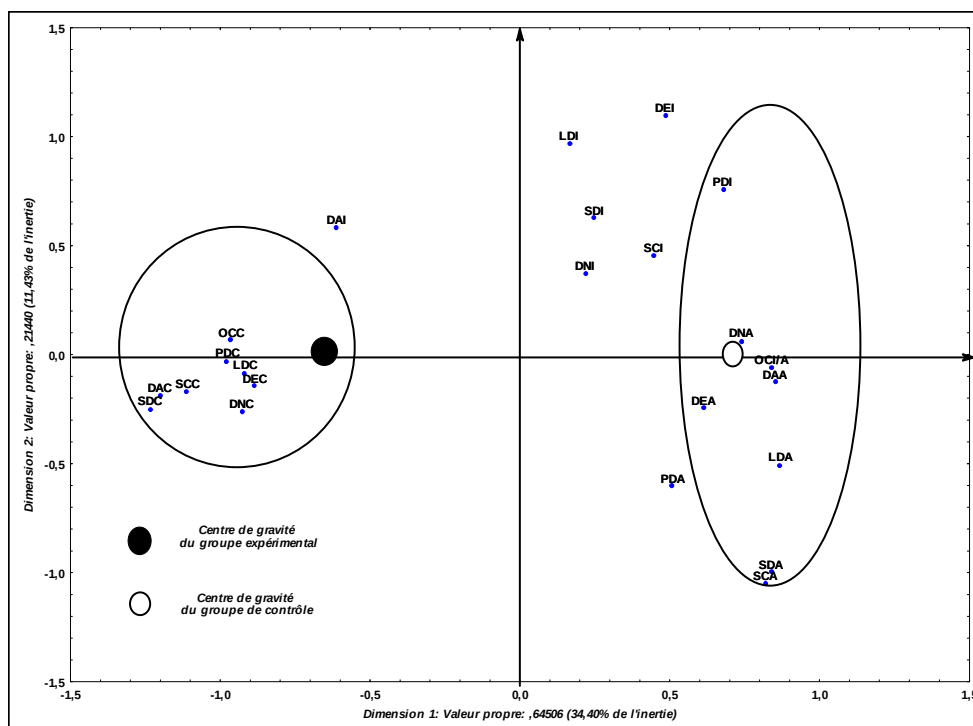
⁴ Cette analyse a été conduite à l'aide du logiciel Statistica (Version 6).

⁵ Vu l'effectif très faible des sujets ayant choisi la modalité OCA de la question OC, nous avons fusionné cette modalité avec la modalité OCI de la même question pour créer une nouvelle modalité que nous avons nommée OCI/A d'effectifs la somme des effectifs des deux modalités qui les constituent. OCI/A remplacera donc dans notre analyse, OCI et OCA. On a adopté ce fusionnement en raison du fait que dans l'AFCM, plus une modalité a un effectif faible, plus elle a des contributions relatives élevées dans la construction des axes factoriels, ce qui pourrait biaiser notre analyse.

axes factoriels qui représentent ensemble 62,51% de l'information totale⁶. Ces valeurs propres sont différentes; cela signifie que nous sommes pratiquement en présence de deux valeurs propres simples (λ_1 et λ_2), et une valeur propre double ($\lambda_3=\lambda_4\approx\lambda_4$). Par conséquent, il va falloir étudier les axes 1, 2 séparément, et le plan (3,4).

3.4.3. Interprétation du 1^{er} axe factoriel (*Axe d'appréhension du concept de moyenne arithmétique*)

L'analyse factorielle des correspondances multiples conduit à une inertie de 34,4% pour l'axe 1. En outre, toutes les modalités indiquant une compréhension conceptuelle ont une coordonnée négative sur cet axe, par opposition aux modalités indiquant une compréhension instrumentale ou une absence de compréhension, qui y ont toutes une coordonnée positive (voir graphique 1). Par conséquent, l'axe 1 s'interprète comme évaluant l'appréhension du concept de moyenne arithmétique.



Graphique 1. Plan factoriel (1, 2)

⁶ Le pourcentage de 62.51% de l'information totale est considéré comme très important du fait que nous avons appliqué l'AFCM sur un tableau disjonctif complet au lieu d'un tableau de Burt. Pour en savoir plus, consulter Benzécri (1979).

Les modalités qui contribuent le plus à la construction de cet axe sont celles entourées dans le graphique 1 ci-dessus⁷. Elles ont une contribution comprise entre 2.1% et 8.4%. La qualité de représentation de ces modalités par rapport à un tel axe est comprise entre 0,13 et 0,8. Nous pouvons donc considérer que toutes les questions posées dans notre questionnaire sont représentatives de ce dernier et jouent toutes un rôle dans l'évaluation de la compréhension du concept de moyenne arithmétique chez les élèves de la 3^{ème} année du collège.

Par ailleurs, à partir des coordonnées factorielles des individus, nous avons pu déterminer les localisations dans le graphique 1 des centres de gravité des groupes expérimental (G.E) et de contrôle (G.C). Nous pouvons ainsi remarquer que le centre de gravité du G.E se trouve proche des modalités impliquant une compréhension conceptuelle du concept de la moyenne arithmétique, tandis que celui du G.C se situe entre les modalités indiquant une absence de compréhension de ce concept.

Cette analyse nous permet donc de confirmer notre hypothèse de recherche :

«Des activités pratiques, basées sur les stratégies MAN et TPE, et visant l'appréhension expérimentale de propriétés de la moyenne arithmétique, mises en place avant tout cours axé sur la formule $\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$, introduisant ce concept; et avant la mise en place de toute activité théorique basée sur la stratégie APD et visant l'appréhension théorique de ces mêmes propriétés, permettent effectivement une compréhension conceptuelle de ce concept, chez les élèves de la 3^{ème} année du collège».

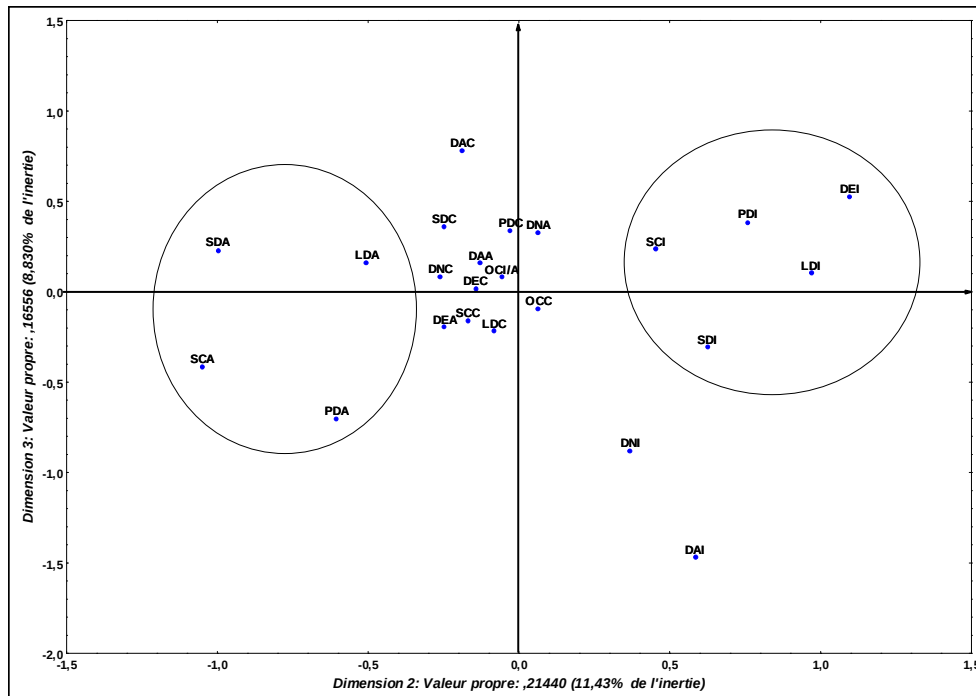
3.4.4. Interprétation du 2^{ème} axe factoriel (Axe opposant l'absence de compréhension à la compréhension instrumentale de la moyenne arithmétique)

L'analyse factorielle des correspondances multiples conduit à une inertie de 11,43% pour l'axe 2. En outre, les modalités qui contribuent le plus à la construction de cet axe sont celles entourées dans le graphique 2 ci-dessous⁸. Elles ont une contribution comprise entre 5.5% et 14.1%. La qualité de représentation de ces modalités par rapport à un tel axe est comprise entre 0,15 et 0,37. En outre, cet

⁷ Notons au passage que ces modalités occupent des positions correspondant aux modalités ayant les plus grandes coordonnées en valeur absolue par rapport au 1^{er} axe factoriel. Les modalités restantes occupent des positions intermédiaires, avec en outre de faibles contributions relatives.

⁸ Notons au passage que ces modalités occupent des positions correspondant aux modalités ayant les plus grandes coordonnées en valeur absolue par rapport au 1^{er} axe factoriel. Sinon, le reste des modalités occupent quasiment des positions intermédiaires, avec en outre de faibles contributions relatives.

axe oppose des modalités indiquant une absence compréhension à des modalités indiquant une compréhension instrumentale. Par conséquent, nous pouvons interpréter cet axe comme étant « *un axe opposant l'absence de compréhension à la compréhension instrumentale de la moyenne arithmétique* ».



Graphique 2. Plan factoriel (2, 3)

D'un autre côté, parmi les items dont les modalités correspondent à l'absence de compréhension du concept de la moyenne arithmétique et qui ont des contributions relatives élevées pour la construction de l'axe 2, nous nous sommes focalisés sur l'item 4, codé LD, relatif à la localisation de la moyenne à partir d'un diagramme en bâtons. Nous avons choisi cet item du fait que nous sommes très conscients de ce que ce genre d'items révèle des difficultés majeures chez nos sujets et suscite des réponses étonnantes de la part de ces derniers. Ainsi, en se référant aux réponses erronées (modalité LDA) des sujets, nous avons pu identifier les cinq principaux types de conceptions erronées présentées dans le tableau suivant.

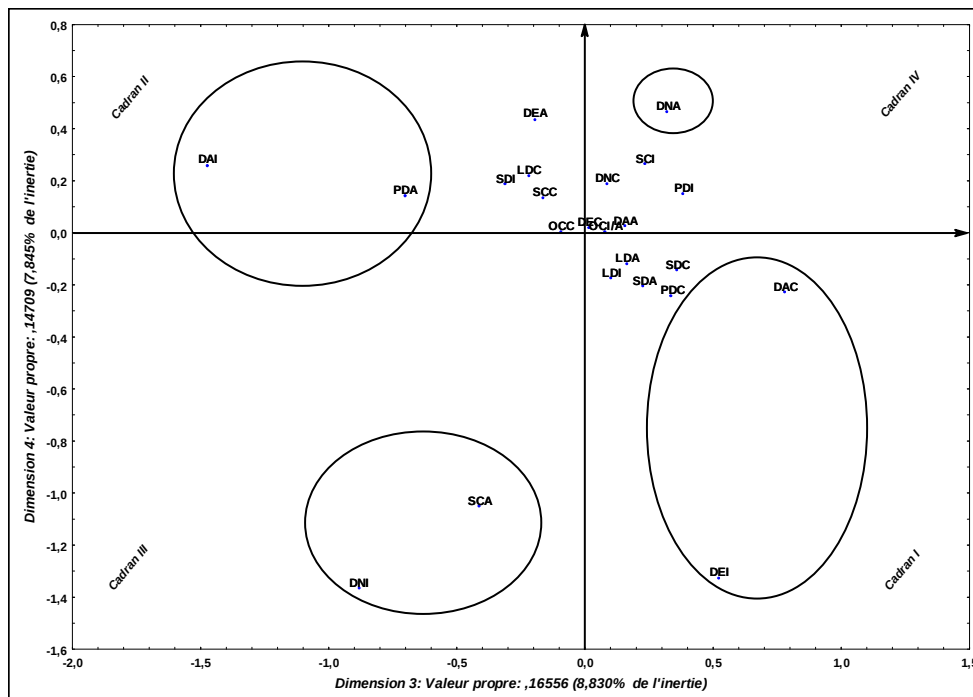
Description de la conception erronée	Réponses types des sujets
<i>Conception ambiguë, nécessitant une discussion approfondie avec les sujets.</i>	• « Puisque $\frac{6}{6}=1$ alors l'anneau (3) est la bonne réponse ». • « J'ai choisi l'anneau (6) du fait que la pluie commence à tomber en mois de juin ». • « J'ai choisi l'anneau (4) parce qu'en mois de janvier et février on est en plein saison de l'hiver ».
<i>Confusion entre moyenne arithmétique et donnée maximale.</i>	• « J'ai choisi l'anneau (1) parce que c'est à partir de cet anneau qu'on peut lire la moyenne de quantités de pluie tombée, et on sait que cette moyenne est toujours égale au bâton le plus long ».
<i>Lecture de la moyenne arithmétique à partir de l'axe des abscisses.</i>	• « J'ai choisi l'anneau (5) parce qu'il est au milieu des six mois ». • « J'ai choisi l'anneau (5) parce que peut être la pluie tombe beaucoup en mois de mars, et la saison de l'hiver se termine en ce mois ».
<i>Toute valeur sur l'axe des ordonnées est une moyenne arithmétique.</i>	• « J'ai choisi les anneaux (1), (2) et (3) parce que c'est sur l'axe des ordonnées qu'on lit les quantités de pluie alors que l'axe des abscisses est relatif aux mois ».
<i>L'impossibilité de conjecturer une valeur approximative de la moyenne arithmétique sans connaître les valeurs de toutes les données.</i>	• « J'ai choisi les anneaux (1) et (6) parce qu'on peut calculer la moyenne arithmétique à partir des anneaux extrêmes de chaque axe. Et du fait que ces deux anneaux contiennent la quantité de pluie globale ainsi que les quantités de pluie de chaque mois, l'opération de calcul de la moyenne sera devenue facile ». • « J'ai choisi l'anneau (1) parce que c'est le point le plus élevé à partir duquel on peut observer la donnée maximale et les données inférieures ». • « J'ai choisi l'anneau (3) parce qu'il est une unité de mesure relatif à l'axe des quantités de pluie. A partir de cet anneau, on peut connaître les graduations. Ce qui va permettre de lire le graphique et par conséquent déterminer la quantité de pluie de chaque mois ».

Tableau 5. Conceptions erronées des sujets, relatives à l'item LD

Il apparaît donc très évident, à partir des réponses des sujets, qu'il soit nécessaire de prendre en considération toutes ces conceptions erronées lors d'un enseignement sur le concept de la moyenne arithmétique à nos élèves. Ces conceptions révèlent sans doute un problème très général et très important en mathématique, celui de l'influence du changement de registres sémiotiques sur l'appréhension des concepts de cette discipline. Par conséquent, il est fondamental de s'intéresser à cet aspect de la compréhension en introduisant la notion de la moyenne arithmétique auprès des élèves, et ce en la présentant à eux sous ses différents registres sémiotiques possibles (*verbal, graphique, tabulaire, ...*) et surtout en les formant et les habituant à passer d'un registre à l'autre avec plus de facilité et de fluidité (Duval, 1993).

3.4.5. Interprétation du plan factoriel (3,4) (*Plan d'opposition de niveaux successifs de compréhension*)

L'analyse factorielle des correspondances multiples conduit à des inerties de 8,83% pour l'axe 3 et de 7,84% pour l'axe 4. Le graphique 3 suivant représente la projection de l'ensemble des modalités par rapport au plan (3,4) :



Graphique 3. Plan factoriel (3, 4)

Les modalités correspondant aux plus fortes contributions relatives (comprises entre 11.4% et 32.9%) dans la construction des axes 3 et 4, et ayant une bonne

représentation (comprises entre 0.19 et 0.54), sont celles qui sont entourées dans le graphique 3.

En cherchant parmi ces modalités les groupements qui présentent les plus fortes oppositions, nous constatons qu'il y a quatre groupes de modalités: (DAC et DEI), (DAI et PDA), (DNI et SCA) et (DNA). Ainsi, nous pouvons déclarer que :

- Les individus qui manifestent une compréhension conceptuelle relative au fait que la somme des déviations autour de la moyenne est nulle, se caractérisent plutôt par une compréhension instrumentale traduisant le fait qu'une donnée égale à la moyenne a un effet sur la valeur prise par cette dernière.
- Aussi, les individus qui acquièrent une compréhension instrumentale concernant le fait que la somme des déviations autour de la moyenne est nulle sont probablement incapables de connaître que la moyenne est toujours comprise entre la donnée minimale et la donnée maximale, ce lorsque les données sont exprimées par un registre sémiotique de type numérique.
- De plus, les individus qui témoignent d'une compréhension instrumentale relative au fait qu'une donnée nulle a un effet sur la valeur prise par la moyenne arithmétique, se caractérisent plutôt par un déficit relativement aux stratégies de calcul de la valeur prise par la moyenne, étant donné que la seule stratégie adoptée est: APD.

De plus, ces quatre groupes de modalités s'opposent deux à deux⁹ (*Cadran I* vs *Cadran II* et *Cadran III* vs *Cadran IV*). Ainsi, à partir des types de modalités composant ces groupes, nous pouvons proposer que le plan (3,4) est un plan «*d'opposition de deux niveaux successifs de compréhension d'une même propriété; et que chaque niveau est accompagné d'un niveau de compréhension qui lui est inférieur et qui est relatif à une propriété différente*».

4. Conclusion et perspectives de recherches

En premier lieu, il apparaît clairement que le concept de la moyenne arithmétique n'est pas aussi simple que pourrait le laisser penser la formule conduisant à

$$\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Ainsi, nous concluons à partir des résultats de cette recherche que, même en modulant du fait que le groupe expérimental a bénéficié par rapport au groupe de

⁹ Voir Cadran I, Cadran II, Cadran III et Cadran IV du graphique 3.

contrôle d'une durée supplémentaire d'activités de deux heures consacrées à des activités expérimentales préalables, il est tout à fait vraisemblable que :

«Des activités pratiques, basées sur les stratégies MAN et TPE, et visant l'appréhension expérimentale de propriétés de la moyenne arithmétique, mises en place avant tout cours axé sur la formule $\bar{X} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$, introduisant ce concept; et avant la mise en place de toute activité théorique basée sur la stratégie APD et visant l'appréhension théorique de ces mêmes propriétés, permettent effectivement une compréhension conceptuelle de ce concept, chez les élèves de la 3^{ème} année du collège».

Il apparaît aussi qu'à partir des réponses des sujets au questionnaire posé, qu'il reste nécessaire d'introduire, en classe, le concept de la moyenne arithmétique en le présentant aux élèves sous ses différents registres sémiotiques possibles (*verbal, graphique, tabulaire, ...*) et surtout en les formant à passer d'un registre sémiotique à l'autre de manière fluide en toute facilité.

En second lieu, nous faisons remarquer que nous avons assuré les conditions pour que les sujets du groupe expérimental n'utilisent pas la stratégie « Ajouter Puis Diviser » dans l'accomplissement des différentes tâches impliquées dans les trois activités pratiques. Pour cela, nous avons essayé de mettre l'accent sur la construction de ces tâches de telle façon que les sujets ne soient pas enclin à utiliser une telle stratégie opératoire, en les contraignant à adopter les deux stratégies : « Mise A niveau » et « Tâtonnement Puis Erreurs » visant à développer chez eux la dimension de la compréhension conceptuelle du concept de la moyenne arithmétique.

Il ressort que la recherche doit se poursuivre pour voir s'il ne serait pas préférable de programmer les trois activités pratiques que nous avons présentées ici au niveau de la 3^{ème} année du primaire (âge de 8 ans) du fait que ce n'est qu'à partir de ce niveau scolaire qu'est introduit le concept de la «Division»? Ne serait-il pas recommandé d'introduire le concept de la moyenne arithmétique en se basant sur la stratégie « APD » au niveau de la 4^{ème} année du primaire (au lieu de la 3^{ème} année du collège) du fait que ce n'est qu'à partir de ce niveau que les élèves commencent à construire le concept de nombres décimaux ? Ne serait-il pas utile de programmer l'activité théorique que nous avons présentée dans notre recherche, aux élèves de la 4^{ème} année du primaire et ce après avoir reçu de cours sur cette notion basé, comme nous l'avons déjà dit, sur la stratégie « APD » ? Nous pensons qu'en procédant ainsi, nous pourrions mieux garantir non seulement une compréhension conceptuelle de la moyenne arithmétique chez les élèves mais aussi une compréhension satisfaisante de ce concept. Cependant, afin de s'assurer d'une telle conjecture, il est nécessaire que ceci soit objet d'études approfondies, que nous

allons mener dans nos prochains travaux relatifs à l'élaboration d'ingénieries didactiques permettant une compréhension globale de ce concept statistique, le plus habituellement utilisé.

BIBLIOGRAPHIE

ANDRADE, V. L. V. X. (2013) *Os conceitos de Medidas de Tendência Central e de Dispersão na Formação Estatística no Ensino Médio no Brasil e na França. Abordagem Exploratória no Quadro da Teoria Antropológica do Didático e da Teoria dos Campos Conceituais*. Thèse (http://theses.univ-lyon2.fr/documents/lyon2/2013/lira_v_x_de_andrade_v).

BENZECRI, J. P. (1979) Sur le calcul des taux d'inertie dans l'analyse d'un questionnaire, *Cahiers de l'analyse des données*, **4**, 377-378.

CAI, J. (1995) Beyond the Computational Algorithm: Students' understanding of the Arithmetic Average Concept. *Proceedings of the XIX Conference on the Psychology of Mathematics Education*, **3**, 144-151. Universidad de Pernambuco.

CARPENTER, T. P., CORBITT, M. K., KEPNER, H. S., LINDQUIST, M. M. & REYS, R. E. (1981) *Results from the Second Mathematics Assessment of the National Assessment of Educational Progress*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

CHATZIVASILEIOU, E., MICHALIS, I. & TSALIKI, C. (2010) Elementary School Students' Understanding of Concept of Arithmetic Mean, *ICOTS 8*.

COUTANSON, B. (2010) *La question de l'éducation statistique et de la formation de l'esprit statistique à l'école primaire en France. Étude exploratoire de quelques caractéristiques de situations inductrices d'un enseignement de la statistique au cycle III* Thèse (http://theses.univ-lyon2.fr/documents/lyon2/2010/coutanson_be).

DUVAL, R. (1993) Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, **5**, 37-65.

ELM'HAMED I, Z. (2010) *Contribution à une ingénierie didactique pour l'enseignement et l'apprentissage des tests statistiques à l'université*. Doctorat. Université Sidi Mohammed Ben Abdellah- Faculté des Sciences Dhar El Mehraz, Fès, Maroc.

GAL, I. (1995) Statistical Tools and Statistical Literacy: The Case of The Average, *Teaching Statistics*, **17(3)**, 97-99.

- GOODCHILD, S. (1988) School Pupils' Understanding of Average, *Teaching Statistics*, **10**, 77-81.
- HARDIMAN, P., WELL, A. & POLLATSEK, A. (1984) Usefulness of a balance model in understanding the mean, *Journal of Educational Psychology*, **76**, 792-801.
- LAVOIE, P. & GATTUSO, L. (1998) An Historical Exploration of the Concept of Average, *ICOTS 5*.
- LIMA, S., POLLATTSEK, A. & WELL, A. D. (1981) Concept or Computation: Students' Understanding Of The Mean, *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 191-204. University of Massachusetts, Amherst.
- MARNICH, M. A. (2008) *A knowledge structure for the arithmetic mean: Relationships between statistical conceptualizations and Mathematical concepts*. Doctorat of Education. University of Pittsburgh.
- MEVARECH, Z. R. (1983) A deep structure model of students' statistical misconceptions, *Educational studies in Mathematics*, **14**, 415-429.
- MOKROS, J. & RUSSELL, S. J. (1995) Children's concepts of average and representativeness, *Journal for Research in Mathematics Education*, **26**, 20-39.
- PFANNKUCH, M. & WILD, C. (2003) Statistical thinking: How can we develop it? *Teaching Children Mathematics*, **2**, 360-364.
- PLACKETT, R. L. (1970) The Principle of The Arithmetic Mean. In studies in the history of Statistics and Probability (Vol. 1), eds. E. Pearson and M.G. Kendall London; Griffin.
- POLLATSEK, A., LIMA, S. & WELL, A. D. (1981) Concept or computation: Students' Understanding of the Mean, *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 191-204.
- SKEMP, R. R. (1979) *Intelligence, Learning and Action*, Wiley, Chichester.
- STRAUSS, S. & BICHLER, E. (1988) The development of Children's Concepts of the Arithmetic Average, *Journal for Research in Mathematics Education*, **19**, 64-80.
- WASTON, J. M. & MORITZ, J. (1999) The Beginning of Statistical Inference: Comparing two Data Sets, *Educational Studies in Mathematics*, **37**, 145-168.
- ZAKI, M. & ELM'HAMED, Z. (2009) Eléments de mesure pour un enseignement des tests statistiques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, **14**, 153-194.

ZAKI, M. & ELM'HAMEDI, Z. (2013) Aspects de quelques critiques non fondées de la théorie des tests statistiques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, **18**, 139-171.

ZAHID ELM'HAMEDI

Ministère de l'Education Nationale et de la Formation Professionnelle,

Centre Régional des Métiers de l'Education et de la Formation, Région Chaouia Ouardigha, Hay El Farah II, Avenue Taha Hussein, B.P: 3066, Ville de Settat, Royaume du Maroc.

Tél : +212 673346514.

E-mail : mhamdizahid@yahoo.fr

Annexe 1. Directives pour la réalisation des trois activités pratiques

1. Les 3 activités sont numérotées et intitulées de la façon suivante:
 - Activité n°1: «*Egalisation des tours*»,
 - Activité n°2: «*Partage des pourboires*»,
 - Activité n°3: «*Action d'équilibrage*»;
2. Les trois activités sont relativement indépendantes entre elles;
3. Au cours d'une séance de travaux pratiques, les sujets s'organisent entre eux pour former des groupes de quatre personnes;
4. On peut admettre que deux ou trois groupes travaillent sur un même type d'activité en même temps;
5. L'ordre de réalisation des activités 1, 2 et 3 est sans importance;
6. Chaque activité est éventuellement identifiée par le matériel didactique nécessaire pour son accomplissement, et par la procédure à suivre pour pouvoir la réaliser;
7. Chaque groupe est prié d'accomplir les trois activités;
8. Les quatre sujets de chaque groupe doivent coopérer et se concerter entre eux au cours de la mise en œuvre de ces trois activités;
9. Les sujets sont priés de ne pas utiliser l'opération mathématique «*Ajouter Puis Diviser*» pour la mise en œuvre de ces trois activités;
10. Une durée de 40 minutes est très suffisante pour accomplir une activité donnée;
11. L'enseignant accompagne tous les groupes jusqu'à ce qu'ils accomplissent adéquatement les trois activités.

Annexe 2. Les trois activités expérimentales

ACTIVITE N°1: « *EGALISATION DES TOURS* »

- **MATERIEL DIDACTIQUE:** Quarante-deux (42) cubes, tous de mêmes dimensions:



- **PROCÉDURE:**

Sept de vos amis participent à un programme de gain de poids qui nécessite que chacun d'eux gagne un (1) kilogramme par semaine. Ils devront essayer de gagner ce kilogramme en mangeant des tablettes de chocolat spécial.

En faisant des tests médicaux variés, ces amis sont alors capables de déterminer le nombre de tablettes de chocolat que chacun d'eux doit manger par semaine pour gagner ce kilogramme. Les résultats de ces tests sont illustrés par la figure 1 suivante, composée de sept tours (*une tour correspond à un et un seul ami*):

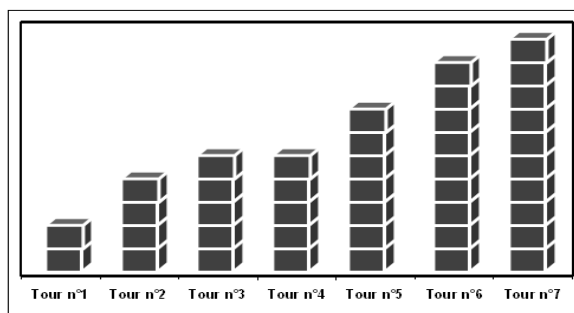
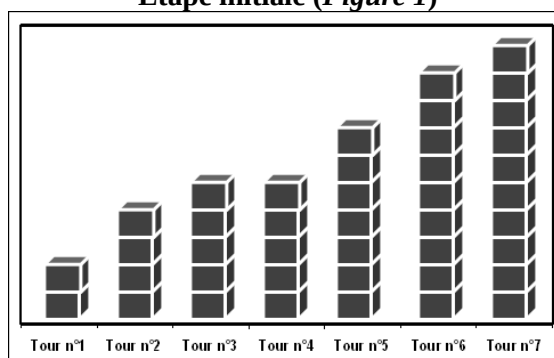


Figure 1

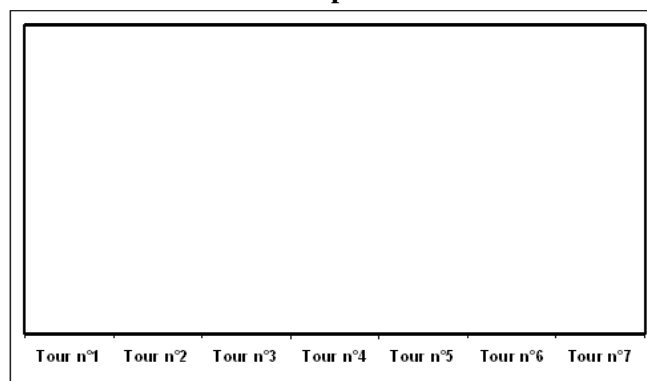
- A. A l'aide des cubes que vous avez devant vous, essayez d'élaborer une modélisation de la figure 1.
- B. Dans cette question, vous êtes priés de déplacer les cubes d'une tour à l'autre jusqu'à ce qu'elles soient toutes de hauteurs égales, *sans utiliser l'opération mathématique: «Ajouter Puis Diviser»*. La hauteur commune à toutes ces tours, que vous obtiendrez, s'appelle: *nombre moyen (expérimental)* de tablettes de chocolat à consommer. Décrivez ci-dessous les étapes du processus adopté pour réaliser cette opération de mouvement des cubes. Ce processus commence évidemment par l'étape initiale (Figure 1) et se termine par l'étape finale (*Tours de hauteurs égales*). La description d'une étape donnée consiste à dessiner, dans la figure correspondante, les cubes actuels de chaque tour au cours de cette étape, et de remplir le tableau en dessous de chaque figure. La hauteur d'une tour donnée ne doit changer qu'une seule fois au maximum dans chaque étape.

Etape initiale (Figure 1)



Notation du nombre de cubes	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
Valeurs	2	4	5	5	7	9	10

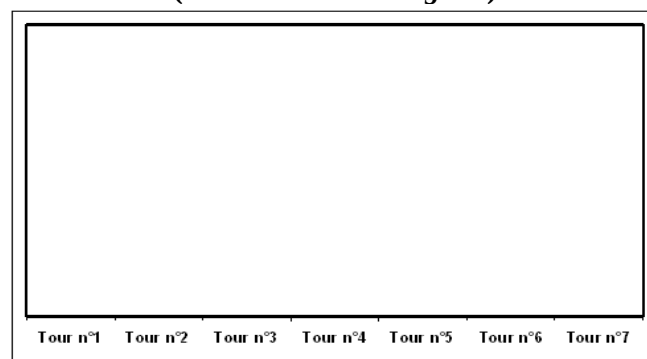


Etape 1

<i>Notation du nombre de cubes</i>	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
<i>y_i en fonction de x_i</i>							
<i>Valeurs</i>							



...


Etape finale
(Tours de hauteurs égales)


<i>Notation du nombre de cubes</i>	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7
<i>z_i en fonction de y_i</i>							
<i>Valeurs</i>							

Ce nombre moyen (expérimental) est égal, selon vous, à:.....Tablettes de chocolat.

- C. A l'aide des cubes que vous avez devant vous, faites construire à tour de rôle par chacun d'entre vous un modèle de la figure 1, puis déplacer ces cubes d'une tour à l'autre jusqu'à ce qu'elles soient toutes de la même hauteur, et ce sans utiliser l'opération mathématique : «Ajouter puis diviser».

ACTIVITE N°2: « PARTAGE DES POURBOIRES »

- MATERIEL DIDACTIQUE:** Trois caisses numérotées de 1 à 3, contenant des sommes d'argents réparties et composées comme le montre le tableau suivant:

	Montant (en Dh)	Pièces composant le montant				
		5 Dh	1 Dh	20 Ct	10 Ct	5 Ct
Caisse 1	3,5	0	3	2	1	0
Caisse 2	9,25	1	4	1	0	1
Caisse 3	12,45	2	2	1	2	1

•**PROCÉDURE:**

- A. Les trois caisses numérotées de 1 à 3, que vous avez devant vous, contiennent respectivement des sommes d'argents de : 3,5Dh (3 pièces d'un dirham, 2 pièces de 20 centimes et une pièce de 10 centimes), 9,25Dh (une pièce de 5 dirhams, 4 pièces d'un dirham, une pièce de 20 centimes et une pièce de 5 centimes) et 12,45Dh (2 pièces de 5 dirhams, 2 pièces d'un dirham, une pièce de 20 centimes, 2 pièces de 10 centimes et une pièce de 5 centimes). Elles représentent des pourboires en faveur de trois élèves seulement, parmi vous. Faites alors un tirage au sort pour affecter ces caisses et aussi savoir l'élève qui ne recevra pas de caisse. Ces caisses appartiennent alors à trois élèves parmi vous: Elève 1, Elève 2 et Elève 3. L'élève 4 n'a pas la chance de bénéficier d'une caisse.
- B. Dans un premier temps, vous, les élèves 1, 2 et 3, avez décidé de partager ces montants de pourboires entre vous trois seulement, en adoptant un jeu d'échange de pièces de monnaies, *sans utiliser l'opération mathématique: «Ajouter Puis Diviser»* les montants inclus dans les caisses. Combien chacun de vous trois devrait recevoir alors? Ce montant commun, que vous obtiendrez, s'appelle: *montant moyen (expérimental)*. Décrivez ci-dessous les étapes du processus adopté pour réaliser cette opération de partage des pourboires. Ce processus commence par l'étape initiale (*Tableau 1*) et se termine par l'étape finale (*Même montant de pourboire pour les trois élèves*). La description d'une étape donnée consiste à remplir le tableau qui y correspond. Le montant de pourboire d'un élève donné ne devrait changer qu'une seule fois au maximum dans chaque étape.

Etape initiale (Tableau 1)

Elèves	Notation du montant	Montant (en Dh)
Elève 1	x_1	3,5
Elève 2	x_2	9,25
Elève 3	x_3	12,45

**Etape 1**

Elève	Notation du montant	y_i en fonction de x_i	Montant (en Dh)
Elève 1	y_1		
Elève 2	y_2		
Elève 3	y_3		



...

**Etape finale***(Même montant de pourboire pour les trois élèves)*

Elève	Notation du montant	v_i en fonction de u_i	Montant (en Dh)
Elève 1	v_1		
Elève 2	v_2		
Elève 3	v_3		

Ce montant moyen (expérimental) est égal, selon vous, à:Dh.

- C. Etant donné que vous êtes des amis intimes, et vous décidez de faire profiter l'élève 4 des pourboires en les partageant de façon égale entre vous quatre, remettez les montants dans leurs caisses puis partagez les montants inclus dans les caisses entre vous quatre en adoptant seulement un jeu d'échange de pièces de monnaies, *sans utiliser l'opération mathématique: «Ajouter Puis Diviser»*. Combien chacun de vous quatre devrait-il alors recevoir ? Ce montant commun que vous obtiendrez, s'appelle: *montant moyen (expérimental)*. Décrivez ci-dessous, comme en B, les étapes du processus adopté pour réaliser cette opération de partage des pourboires. Ce processus commence par l'étape initiale (Tableau 2) et se termine par l'étape finale (*Même montant de pourboire pour les quatre élèves*). La description d'une étape donnée consiste aussi à remplir le

tableau qui y correspond. Le montant de pourboire d'un élève donné ne devrait changer qu'une seule fois au maximum dans chaque étape.

Etape initiale (Tableau 2)

Elèves	Notation du montant	Montant (en Dh)
Elève 1	x_1	3,5
Elève 2	x_2	9,25
Elève 3	x_3	12,45
Elève 4	x_4	0



Etape 1

Elève	Notation du montant	y_i en fonction de x_i	Montant (en Dh)
Elève 1	y_1		
Elève 2	y_2		
Elève 3	y_3		
Elève 4	y_4		



...



Etape finale

(Même montant de pourboire pour les quatre élèves)

Elève	Notation du montant	v_i en fonction de u_i	Montant (en Dh)
Elève 1	v_1		
Elève 2	v_2		
Elève 3	v_3		
Elève 4	v_4		

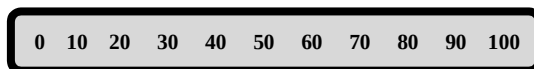
Ce nouveau montant moyen (expérimental) est égal, selon vous, à:Dh.

- D. Le nouveau montant moyen trouvé en C est égal, selon vous, à celui trouvé en B:

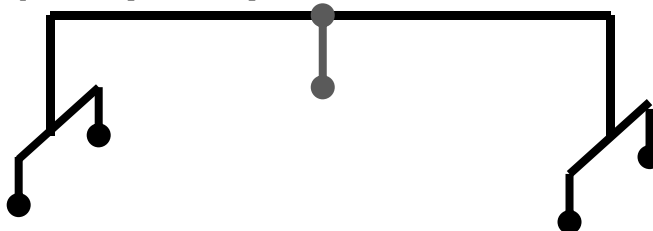
☐ Vrai ☐ Faux

ACTIVITÉ N°3: « ACTION D'ÉQUILIBRAGE »**•MATÉRIEL DIDACTIQUE :**

- Un bâton homogène de longueur un (1) mètre, gradué et troué aux valeurs des dizaines, en 0 et en 100:



- Une barre sur pieds à laquelle on pourra suspendre le bâton :



- Sept (7) poids égaux:



- Sept (7) crochets (de poids négligeables) permettant de suspendre les poids sur le bâton:

§, §, §, §, §, §, §

•PROCÉDURE :

- A. A l'aide du matériel que vous avez devant vous, suspendez un bâton homogène de longueur un (1) mètre en son milieu (50 cm), comme le montre la figure 1 :

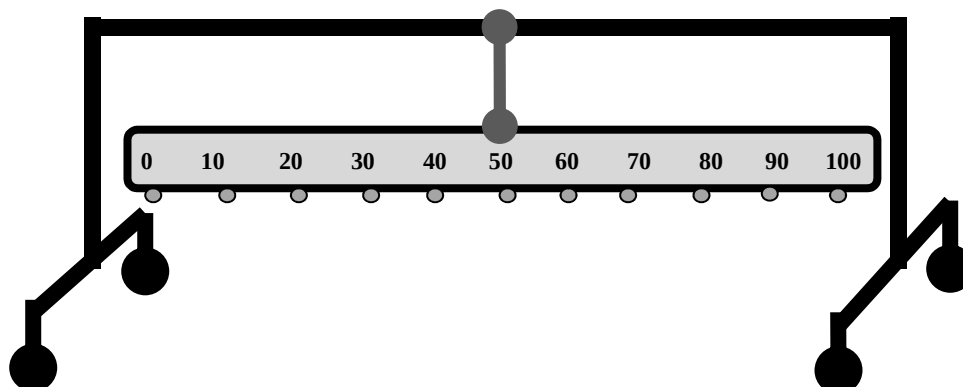


Figure 1

- B. Accrochez quatre poids égaux sur le bâton aux points: 20 cm, 40 cm, 70 cm et 90 cm.

- C. Essayez d'accrocher un cinquième poids de telle sorte que le bâton soit en position d'équilibre au point 50 cm ? *Ce point d'accrochage est à :cm.*
- D. Décrochez un poids parmi ces cinq, puis essayez de déplacer les quatre autres sur le bâton de telle sorte que ce dernier soit en position d'équilibre. Inscrivez dans le tableau ci-dessous les points d'accrochage :

Poids	Points d'accrochage
1 ^{er} poids	cm
2 ^{ème} poids	cm
3 ^{ème} poids	cm
4 ^{ème} poids	cm

- E. Comparez alors la somme des distances au milieu du bâton des poids à gauche du point 50 cm à celle des distances au milieu du bâton des poids à droite de 50 cm. *Ces deux sommes de distances sont:* ☐ *Egales* ☐ *Différentes*
- F. Raccrochez de nouveau quatre poids égaux sur le bâton aux points: 20 cm, 40 cm, 70 cm et 90 cm comme dans la question B. *Les deux sommes de distances correspondantes sont cette fois-ci:* ☐ *Egales* ☐ *Différentes*
- G. Accrochez quatre poids égaux aux points: 30 cm, 40 cm, 60 cm et 70 cm. Vous pouvez ainsi remarquer que le bâton est en position d'équilibre au point 50 cm. Vous procédez ensuite à déplacer le cinquième poids du point 0 cm jusqu'au point 100 cm, tout en passant par: 10 cm, 20 cm, 50 cm, 80 cm et 90 cm. En faisant ce déplacement croissant du cinquième poids, vous remarquez que:
- G.1. Plus on s'écarte du point 0 cm vers le point 50 cm, plus le bâton tend vers sa position d'équilibre: ☐ *Vrai* ☐ *Faux*
- G.2. Le bâton garde sa position d'équilibre si le cinquième poids est accroché au point 50 cm: ☐ *Vrai* ☐ *Faux*
- G.3. Plus on s'écarte du point 50 cm vers le point 100 cm, plus le bâton s'écarte de sa position d'équilibre: ☐ *Vrai* ☐ *Faux*
- H. Décrochez tous les poids suspendus sur le bâton puis raccrochez de nouveau quatre poids et ce aux points suivants : 30 cm, 40 cm, 60 cm et 70 cm. Vous pouvez ainsi remarquer que le bâton est en position d'équilibre une fois suspendu au point 50 cm. En accrochant successivement un cinquième poids, un sixième poids puis un septième poids dans le même point 50 cm, vous remarquerez que :
- ☐ *Le bâton conserve sa position d'équilibre.*
- ☐ *Plus vous accrochez les trois poids (le cinquième, le sixième puis le septième) un après l'autre, plus le bâton s'écarte de sa position d'équilibre..*

NATHALIE SAYAC ET NADINE GRAPIN

EVALUER PAR QCM EN FIN D'ECOLE : STRATEGIES ET DEGRES DE CERTITUDE

Abstract. Multiple Choice Testing at the End of Primary School: Strategies and Levels of Confidence. The use of multiple choice items, especially in large-scale assessments, increasingly grows without questioning the strategies used by pupils to answer these types of questions, particularly in mathematics. The research presented in this paper aims to investigate how students in their final year of primary school proceed to answer multiple choice questions in the number domain and the level of confidence they give to their answer. Comparisons with students' levels of knowledge and used response strategies complement broader concerns.

Résumé. L'utilisation des QCM, en particulier dans les évaluations à grande échelle, se développe de plus en plus sans que soient interrogées les stratégies utilisées par les élèves pour répondre à ce type de questions, notamment en mathématiques. La recherche que nous présentons dans cet article vise à étudier la façon dont des élèves de fin de CM2 procèdent pour répondre à des QCM dans le domaine numérique et le degré de certitude qu'ils accordent à leur réponse. Des comparaisons selon le niveau de connaissance de l'élève et selon les stratégies de réponse qu'il emploie viennent compléter des considérations plus globales.

Mots-clés. QCM, évaluation, degré de certitude, stratégies.

Introduction

La culture scolaire française intègre progressivement les QCM (Questionnaire à choix multiple) comme mode d'évaluation alors que les anglo-saxons en ont une pratique beaucoup plus courante et ancienne. En mathématiques, dans le secondaire, ce type de support est désormais régulièrement utilisé pour évaluer les connaissances des élèves : par exemple, de nombreux manuels de mathématiques de collège intègrent les QCM comme modalités d'évaluation avec une visée diagnostique (en début de chapitre) ou comme auto-évaluation en fin de séquence. Parallèlement, si on considère les énoncés de l'épreuve de mathématiques du Diplôme National Brevet en 2012, sur les douze sujets recensés sur le site de l'APMEP, 7 comptaient des QCM. De plus, pour l'évaluation PISA 2003 (dominante mathématique), 20 % des questions étaient sous la forme de QCM simple (choisir une réponse parmi 4 propositions) et 12,9 % sous la forme de QCM complexe (succession de questions auxquelles il faut répondre par oui ou par non), c'est à dire, environ un tiers des questions de cette évaluation était sous forme de QCM (Bourny et al., 2003).

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 19, p. 169 - 197.
© 2014, IREM de STRASBOURG.

Ces premiers constats témoignent de l'intégration des QCM dans les activités mathématiques proposées aux élèves, au collège. Par contre, les élèves de l'école primaire ne sont que très rarement soumis à ce type de questions ou seulement lors d'activités exceptionnelles (rallyes, tests). Néanmoins, il convient de noter que pendant de nombreuses années le format QCM a été régulièrement employé dans les évaluations nationales qui avaient lieu à l'entrée en CE2 ou en 6^{ème} et plus récemment, en fin de CE1 ou en fin de CM2).

Ce format de questions est également largement répandu dans les évaluations menées à grande échelle par la DEPP (Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance), notamment dans le cadre des évaluations bilans de fin d'école et de collège relevant du CEDRE (Cycle des évaluations disciplinaires réalisées sur échantillon).

Alors que les résultats de ces évaluations nationales sont utilisés pour le pilotage pédagogique au niveau national et donnent lieu à la publication de notes d'informations rendant compte du niveau de connaissances et de compétences des élèves français dans les disciplines classiques, peu de travaux de recherche en France questionnent le dispositif d'évaluation par QCM pour ce qu'il est et pour ses spécificités, même si Adda (1976), Duval et Pluvinage (1977) et Pluvinage (1979), avaient commencé à s'intéresser à ces questions. Du côté anglo-saxon, Bloom, Hastings et Madaus (1971) ont été les précurseurs des questions posées par l'évaluation des apprentissages et ont été suivis par de nombreux chercheurs qui ont continué d'explorer ce champ. Néanmoins, les travaux de recherche qui portent sur les QCM concernent majoritairement des étudiants du supérieur (notamment Leclercq (1975, 1986), De Landsheere (1979), Hunt (1993), Gilles (1996)) alors que notre recherche porte sur des élèves d'un niveau scolaire très inférieur et d'âges beaucoup moins élevés (10-11 ans).

Ayant toutes deux participé à la conception et à l'analyse des évaluations bilans CEDRE 2008, nous nous sommes interrogées sur l'activité de l'élève de fin d'école lorsqu'il est confronté à des QCM. En effet, il nous a semblé pertinent de mener une recherche portant sur cette question à la fois par curiosité scientifique, mais aussi pour interpréter, avec plus de précision et de rigueur les résultats produits par ce type d'enquête. Dans cet article nous présentons la méthodologie que nous avons mise en œuvre et proposons, à titre expérimental, une utilisation de degrés de certitude dans le cadre d'une évaluation externe et sommative en fin de CM2 ; nous concluons par quelques constats en termes de fonctionnement cognitif des élèves et de pratique d'évaluation par QCM à l'école.

1. Problématique et hypothèses

L'utilisation de QCM dans des évaluations à grande échelle est largement répandue puisqu'elle permet une correction automatique (sans avoir recours à des personnes)

et fiable (pas d'interprétation des productions de la part de correcteurs par exemple).

En analysant l'ensemble des items proposés dans l'évaluation bilan CEDRE 2008, il s'est avéré que certains parmi ceux qui étaient proposés sous forme de QCM avaient des résultats très différents de ceux proposés sous forme de question ouverte, alors que d'un point de vue mathématique, la tâche à réaliser était équivalente. Il semblerait que, dans le cas d'un QCM, l'évalué est moins réticent à fournir une réponse que lorsque la question est posée sous forme ouverte : par exemple, pour l'évaluation PISA 2003, en France, les scores moyens de non-réponses étaient de 3,5% pour un QCM alors qu'ils étaient autour de 25,5 % pour une réponse ouverte construite (Bourny & al., 2003). Nous nous sommes donc demandé quelles pouvaient en être les raisons, ce qui nous a amenées à investiguer la façon dont les élèves appréhendaient ce dispositif spécifique d'évaluation. Nous avons souhaité observer les stratégies utilisées par les élèves de ce niveau de scolarité face à un QCM.

1.1 Stratégies de réponse

Tout d'abord, nous avons cherché à savoir si les stratégies que développent les élèves pour répondre aux QCM étaient toujours les mêmes et si elles étaient en lien avec leur niveau de connaissances en mathématiques. Est-ce que les élèves performants ou en difficultés adoptent une stratégie de réponse particulière aux QCM ? On trouve dans les travaux relatifs aux QCM (Choppin 1975, Leclercq 1987), différentes stratégies, mais toutes pensées pour des étudiants adultes. Voici, par exemple, les 3 modèles retenus par Choppin (1975) :

Modèle 1 : quand l'étudiant « sait », il choisit la réponse correcte et quand il ne « sait pas », il choisit au hasard parmi les réponses proposées.

Modèle 2 : commence comme le Modèle 1, mais au lieu de répondre au hasard quand il « ne sait pas », l'étudiant commence par éliminer les solutions qu'il sait être fausses et choisit au hasard parmi celles qui restent.

Modèle 3 : l'étudiant commence par ranger les solutions possibles par ordre de plausibilité décroissante et, si la consigne l'oblige à ne fournir qu'une d'entre elles, alors il choisit celle dont la probabilité (subjective) est la plus élevée (à ses yeux).

En complément de ces modèles, d'autres catégorisations existent, comme celle de Katz & al. (2000), qui distinguent des stratégies « *traditional* » et « *non traditional* ». Les premières reposent sur des procédures qui sont enseignées et que l'élève utiliserait pour répondre si la question était posée sous forme ouverte ; les autres, spécifiquement associées à des QCM, sont celles où l'élève s'appuie sur les réponses proposées pour faire un choix.

1.1.1 Liste des stratégies retenues

Nous avons donc commencé par lister les stratégies possibles pour des élèves de dix - onze ans car il nous a semblé indéniable qu'elles ne pouvaient être identiques à celles d'étudiants adultes. Cette liste s'est complétée au fur et à mesure de notre expérimentation, au plus près des stratégies réelles des élèves, pour arriver à la liste des stratégies suivante :

S1 : l'élève effectue la tâche demandée mentalement ou explicitement puis trouve, parmi les propositions, celle qui correspond à la réponse trouvée ;

S2 : l'élève reconnaît d'emblée la « bonne » réponse parmi celles proposées (connaissance intériorisée) ;

S3 : l'élève commence par s'engager dans une procédure de résolution, mais sans aller jusqu'au bout (à la différence de S1); il utilise ensuite les différentes propositions de réponses pour conclure (en choisissant celle qui lui paraît la plus vraisemblable) ;

S4 : l'élève élimine les propositions qui paraissent fausses, puis déduit de celle(s) qui reste(nt), la bonne réponse ;

S5 : l'élève répond au hasard ;

S6 : l'élève passe en revue superficiellement toutes les propositions, puis choisit celle qui lui paraît la plus vraisemblable ;

S7 : l'élève ne sait pas expliquer sa procédure ;

S8 : l'élève combine les nombres en présence de manière à trouver, parmi les choix possibles, une solution ;

S9 : l'élève applique une règle simple intériorisée, correcte ou non (théorème en actes) ;

S10 : l'élève teste les propositions de réponse une à une jusqu'à trouver celle qui convient.

1.1.2 Groupes de stratégies

Afin d'analyser plus efficacement le lien entre les différentes stratégies des élèves en fonction de leur niveau de connaissance, nous avons effectué des groupements de stratégies par type :

Stratégies A (S1, S2, S9, S10) : stratégies de savoirs. L'élève active des connaissances ou des savoir-faire (techniques – raisonnement) pour choisir la réponse qu'il pense être la bonne : soit il résout complètement la tâche (par la procédure de son choix, juste ou fausse), soit il teste les propositions de réponse et choisit celle qui peut convenir. Les stratégies S1, S2 et S9 peuvent s'apparenter aux

« *traditional* » stratégies définies par Katz & al (2000), alors que la stratégie S10 est spécifique au format QCM.

Stratégies B (S5, S6, S7, S8) : stratégies de substitution ou de repli. L'élève n'utilise pas ses connaissances mathématiques de façon explicite pour faire un choix : son choix ne repose pas de façon assurée sur ses connaissances.

Stratégies C (S3, S4) : stratégies mixtes. L'élève a initié un raisonnement pour répondre à la question posée, mais il se sert des différentes propositions de réponse pour finaliser son choix.

1.2 Degrés de certitude et de réalisme

En complément des stratégies utilisées, des procédures mises en œuvre et de la réponse choisie, il nous a semblé complémentaire de pouvoir demander à l'élève d'estimer la qualité de sa réponse (bonne ou non) en lui demandant quel degré de certitude il lui attribuait. Définis par Leclercq et Poumay (2004, p. 3), les degrés de certitude sont « l'ensemble des jugements, des analyses, des régulations, conscientes ou non, (mais qu'il importe de rendre explicites, observables et conscientes) effectués par l'apprenant sur ses propres performances ».

En nous inspirant des travaux de Leclercq (1987, 2006), nous avons proposé une échelle de quatre degrés de certitude, adaptée¹ à des élèves de fin d'école et variant de « pas sûr du tout » à « sûr et certain » : pas sûr du tout (1), pas très sûr (2), sûr (3), sûr et certain (4). En effet, même si des travaux de recherche antérieurs ont stipulé que la consigne ne devait pas être verbale, mais devait plutôt être présentée sous forme de pourcentage (0%, 20 %...) car la subjectivité liée aux expressions verbales était problématique (Gilles, 1996 et Leclercq dès 1983), nous n'avons pas suivi cette préconisation. Nous avons en effet considéré que, pour des élèves de cet âge qui ne maîtrisent pas les pourcentages, il était plus opportun de leur présenter une consigne verbale à quatre degrés de certitude, accompagnée d'une échelle numérique (de 1 à 4), en leur laissant la possibilité de positionner leur degré de certitude entre deux degrés « entiers » (c'est-à-dire choisir un degré de certitude de 3,5 par exemple). La présentation de l'échelle choisie (voir Annexe 1) permettait ainsi de doubler la consigne verbale d'une consigne numérique, tout en évitant le recours aux pourcentages. Même s'il est « illusoire » d'avoir une précision supérieure à 20 %, (Leclercq, 2006), c'est à dire correspondant à six degrés de certitude entre 0 et 100 %, l'échelle que nous avons construite conduit à sept degrés possibles, si l'on permet de faire des croix entre deux des quatre degrés indiqués. L'élève, après avoir choisi une réponse pour chaque item, devait donc estimer la qualité de celle-ci à l'aide de ces degrés réaménagés.

¹ Les degrés de certitude proposés par Leclercq varient de 0% à 100%, par tranches de 20%.

Ainsi, en mettant en perspective la réponse choisie (juste ou fausse) et le degré de certitude que l'élève lui confère, nous pouvons savoir si l'élève est réaliste ou non quant à la qualité de sa réponse. Boulé & Laveault (2011) qui utilisent les degrés de certitude et de réalisme dans une évaluation diagnostique expliquent que « l'étudiant réaliste tend à anticiper une bonne réponse lorsque celle-ci est bonne et une réponse incorrecte lorsque celle-ci est incorrecte ». Les recherches menées par Leclercq (1993) et citées par Boulé & Laveault (2011) laissent penser que l'utilisation de degrés de certitude et de réalisme avec des étudiants peut avoir une fonction formative : « l'indice de réalisme obtenu fournit un feedback à l'étudiant et lui permet d'améliorer son estimation de ses compétences ». Nous n'avons pas utilisé les degrés de certitude à cette fin puisqu'ils accompagnaient une évaluation externe, mais plutôt pour estimer l'indice de réalisme dont les élèves de fin d'école pouvaient faire preuve.

Nous avons également estimé que l'adjonction du degré de certitude à une réponse pouvait nous donner des informations sur la connaissance (ou la méconnaissance) d'un élève sur un savoir donné. En effet, pour chaque item la nature de la question posée et des distracteurs² est didactiquement intéressante pour repérer ce qui est vraiment en jeu du point de vue des connaissances. Par exemple, relativement au domaine des nombres décimaux, les élèves ayant une représentation erronée des décimaux et qui associent $62/10$ à $62,10$ avec un degré de certitude supérieur à 3 auront plus de difficulté à déconstruire cette (mé)connaissance que les élèves qui choisissent $62,10$ en étant peu sûrs (degré de certitude compris entre 1 et 2).

A la différence des travaux menés dans le cadre de la docimologie sur les degrés de certitude et de réalisme, comme la recherche évoquée précédemment, nous n'avons pas questionné globalement la cohérence du test ou la fiabilité de nos items, mais, de façon complémentaire, sur un nombre restreint d'items, nous avons cherché à observer comment s'articulaient les degrés de certitude exprimés par les élèves et leur niveau de connaissances en mathématiques ou les stratégies qu'ils adoptent pour répondre à un QCM. En France, à ce niveau scolaire (fin d'école primaire, élèves âgés de 10-11 ans), peu d'études, à notre connaissance, ont été menées pour savoir comment les élèves traitent ce type de question.

Cette recherche permet également d'étudier les « risques » (Pluvinage, 1979) liés à ce type de format de question, ce qui n'est pas sans intérêt. En effet, dans le cadre d'une évaluation institutionnelle de fin de niveau scolaire, il est indispensable de minimiser les risques d'attribuer un résultat négatif à un élève qui a acquis la connaissance ou les compétences en jeu et réciproquement car les résultats des

² Dans un QCM, un distracteur est une des réponses proposées qui n'est pas la bonne.

bilans tels que ceux produits dans CEDRE³ peuvent contribuer aux décisions qui orientent les politiques éducatives.

Après avoir décrit la méthodologie employée, nous présentons en premier des résultats globaux portant sur les stratégies employées par les élèves pour répondre aux différents items, selon leur niveau de connaissance et en lien avec le degré de certitude qu'ils accordent à leurs réponses. Une deuxième partie porte sur les stratégies employées, les degrés de certitude accordés aux réponses selon la qualité de la réponse fournie (degré de réalisme) et le niveau de connaissance de l'élève. Logiquement, nous faisons l'hypothèse que les stratégies de savoir sont plus employées par les élèves « forts », qu'elles conduisent davantage à la bonne réponse que les autres stratégies et qu'elles sont accompagnées de degrés de certitude élevés. Cette hypothèse est-elle valable sur l'ensemble des items choisis ? Quelles sont les stratégies mises en œuvre par les élèves moyens » ou « faibles » ? Avec quel degré de certitude fournissent-ils leur réponse ?

Enfin, ces résultats généraux seront complétés dans une troisième partie par une analyse plus locale sur les écritures décimales ; elle nous permettra d'interroger les apprentissages qui peuvent être (ou non) évalués par QCM et montrera l'intérêt de l'utilisation des degrés de certitude et de réalisme dans ce type de résultats.

2. Expérimentation

2.1 Principe

L'expérimentation que nous avons menée s'est déroulée en juin 2012, dans six classes de CM2 de Paris et de Montreuil. Elle a eu lieu après les évaluations nationales en mathématiques (début juin) afin de pouvoir bénéficier des résultats des élèves et ainsi déterminer leur niveau de connaissances de manière objective et permettant des comparaisons. Nous avons convenu d'élaborer un test comportant un nombre limité d'items afin que chaque élève puisse nous expliciter son raisonnement individuellement lors de la passation, et ainsi être en capacité de déterminer au plus juste la stratégie employée par l'élève pour choisir sa réponse.

2.2 Classes

Nous avons souhaité réaliser notre expérimentation dans des classes variées en termes de population et de niveau scolaire afin de pouvoir tester toutes nos hypothèses. Ainsi, nous avons retenu 2 classes des « beaux » quartiers parisiens,

³La direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance qui conçoit les bilans CEDRE exerce une fonction de suivi statistique, d'expertise et d'assistance pour le Ministère de l'éducation nationale et le ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche.

deux classes « banales » (1 à Paris, 1 à Montreuil), 2 classes ZEP ou « éclair » (1 à Paris, 1 à Montreuil), soit 155 élèves au total.

2.3 Test

Le test a été conçu à partir de sept items (énoncés figurant en Annexe 1) ; trois d'entre eux (items 1, 4 et 6) sont extraits de l'évaluation bilan CEDRE 2008 pour lesquels les scores de réussite se distinguaient des résultats habituels en mathématiques. Pour la formulation des questions et le choix des distracteurs⁴ nous nous sommes appuyées sur les « règles » déterminées dans différents ouvrages, en particulier ceux de Leclercq (1986) et Grégoire & Laveault (1997) ; nous avons donc principalement retenu des distracteurs « vraisemblables » afin qu'ils ne soient pas éliminés immédiatement et qu'ils correspondent à des erreurs fréquentes d'élèves. En effet, si les distracteurs ne correspondent pas à des erreurs classiques, le format QCM sera plus simple que la question ouverte, alors que dans le cas contraire, les deux formats pourraient être équivalents du point de vue de la difficulté (Katz, et al., 2000), sous certaines conditions. Pour les items relevant des fractions-décimaux, les différents choix de réponses ont été effectués à partir d'erreurs reconnues comme fréquentes par différents travaux en didactique des mathématiques (Douady & Perrin-Glorian (1986), Comiti et Neyert (1979), Roditi (2007)).

En choisissant des distracteurs correspondant à des erreurs fréquentes d'élèves, nous souhaitons également savoir s'ils étaient attractifs pour certains élèves (selon leur niveau de connaissances) ou au contraire s'ils étaient d'emblée rejetés. L'utilisation des degrés de certitude, notamment pour les réponses correspondant à des conceptions erronées sur les fractions-décimaux nous permettra, au-delà du score de réussite, de préciser si l'élève est réaliste ou non du point de vue de ses connaissances. En Annexe 2 figure une analyse didactique du choix des distracteurs proposés⁵.

Il convient de noter que nous avons opté pour des QCM avec 4 choix de réponses possibles pour rester dans le format du bilan CEDRE.

Observer des élèves pendant qu'ils résolvaient ces problèmes spécifiques devait ainsi nous permettre de mieux comprendre les scores de réussite. Nous avons choisi les sept items pour qu'ils soient de niveaux variés du point de vue de la difficulté (l'item 7 étant particulièrement difficile) et pour qu'ils relèvent de deux catégories : ceux pour lesquels l'élève doit mobiliser des connaissances relatives

⁴Nous précisons que dans les items que nous proposons, comme dans ceux figurant dans l'évaluation CEDRE, chaque question possède une seule bonne réponse.

⁵ Cette analyse est menée *a posteriori* pour les items 1, 4 et 6 que nous avons extraits de l'évaluation ; nous n'avons pas choisi les distracteurs *a priori*.

aux fractions et aux nombres décimaux et ceux pour lesquels l'élève doit résoudre un problème dans le cadre des grandeurs et mesures (problèmes additifs, de proportionnalité et de calcul de périmètre).

Un espace libre a été prévu pour chaque item afin que les élèves puissent éventuellement faire des calculs.

2.4 Passation

Une présentation à la classe entière a été proposée avant la passation individuelle pour expliquer la nature du test et le déroulement de l'entretien, en précisant les consignes : « pour chaque exercice, il faut trouver la bonne réponse parmi celles proposées et indiquer son degré de certitude ». Nous avons choisi de faire des entretiens individuels pour que les élèves puissent nous expliquer précisément comment ils avaient choisi leurs réponses et leurs degrés de certitude. Nous avons fait passer le test aux élèves un par un⁶ et noté toutes les explications ou remarques qu'ils avaient formulées.

A la fin du test, nous avons demandé aux élèves s'ils avaient déjà fait des QCM et ce qu'ils pensaient de ce type d'évaluation.

2.5 Niveaux de connaissance des élèves

Enfin, pour déterminer les niveaux de connaissance des élèves, nous avons utilisé leurs résultats aux évaluations nationales de mathématiques qu'ils venaient tous de passer quelques jours avant notre test. Nous avons ensuite classé les élèves suivant trois groupes en fonction de leurs résultats à ces évaluations :

- Élèves « faibles » : ceux qui ont moins de 40% de réussite (32 élèves),
- Élèves « moyens » : entre 40% et 75% de réussite (64 élèves),
- Élèves « forts » : ceux qui ont plus de 75% de réussite (59 élèves).

3. Résultats

3.1 Résultats globaux

Les scores de réussite par item figurent dans le tableau 1, ci-dessous. Le premier constat que nous pouvons faire concerne l'aspect spécifique du fonctionnement cognitif des élèves en situation. Il s'avère en effet qu'il est parfois extrêmement difficile d'appréhender leur fonctionnement cognitif car il ne s'inscrit pas dans la même logique que celui d'un adulte. Il n'a d'ailleurs pas toujours été facile de comprendre comment un élève était arrivé à faire tel ou tel choix car il n'était pas capable de l'expliciter lui-même.

⁶ Nous nous sommes placées dans un espace proche de la classe (couloir ou salle à côté) afin que les élèves effectuent leur test, sans perturber le déroulement prévu de la classe.

Pour formaliser les résultats de l'évaluation-bilan CEDRE 2008, la DEPP a construit une échelle de performance⁷ à six niveaux selon la méthodologie décrite dans la Note d'information n°10-18 : « La partie la plus basse de l'échelle est constituée des scores obtenus par les 15% d'élèves ayant les résultats les plus faibles. À l'opposé, la partie supérieure, constituée des scores les plus élevés, rassemble 10% des élèves. Entre ces deux niveaux, l'échelle a été scindée en trois parties d'amplitude de scores égale correspondant à trois groupes intermédiaires». Les élèves sont donc répartis en 6 groupes : du groupe 0 (les plus faibles) au groupe 5 (les plus performants).

Les items 1, 4 et 6 extraits de l'évaluation CEDRE 2008 permettent de caractériser certaines connaissances des élèves d'un groupe donné : les items 1 et 4 correspondent à celles du groupe 3 et l'item 6 à celles du groupe 4. Ce qui signifie, d'après les résultats de l'évaluation-bilan CEDRE, que 58% des élèves de fin de CM2 ont une probabilité supérieure à 50% de réussir les items 1 et 4, alors que seulement 28% des élèves ont la même probabilité de réussir l'item 6. Les résultats que nous obtenons dans ce test pour les items 1, 4 et 6 sont ainsi globalement cohérents avec ceux de l'évaluation-bilan. En comparant les items 2, 3 et 5 à des items *a priori* équivalents du point de vue de la tâche et de la complexité et figurant dans l'évaluation bilan, on peut aussi constater que les scores de réussite obtenus dans ce test sont également cohérents avec ceux de l'évaluation bilan.

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7
Score de réussite	58,7%	51,6%	54,8%	71,6%	50,3%	46,5%	27,1%

Tableau 1 - Score de réussite moyen pour chacun des items.

Les difficultés relevées sur les connaissances des nombres décimaux par de nombreuses recherches en didactique des mathématiques sont aussi confirmées à nouveau par les scores de réussite aux items 3, 4 et 6.

La plupart des élèves n'avaient jamais été confrontés à des QCM, si ce n'est en français ou en anglais comme certains nous l'ont indiqué. Dans l'ensemble, ce type de dispositif d'évaluation leur a plu. Certains ont estimé qu'il était plus facile que ce qu'ils avaient l'habitude de faire, d'autres plus difficile, mais ces considérations se rapportaient essentiellement aux questions posées et non à la modalité d'évaluation, nous a-t-il semblé.

⁷ Des précisions sur cette évaluation et sur le contenu de l'échelle figurent dans la Note d'information n°10-18 (éditée par le Ministère de l'éducation nationale) ou dans la brochure "Mathématiques en fin d'école primaire : le bilan des compétences", éditée par le Sceren.

3.2 Stratégies employées par les élèves

3.2.1 Choisir « au hasard »

Précisons qu'il est important de distinguer, ce qui relève effectivement du hasard (*random-guessing* ou *blind-guessing*) de stratégies permettant de deviner la bonne réponse (*guessing*) : « si un choix aléatoire est aveugle, un choix deviné ne l'est pas » (Leclercq, 1987, p. 13). Par ailleurs, le choix « au hasard » n'est retenu que par les élèves qui ne savent pas répondre, donc généralement par les plus faibles. Or, il s'avère, pour les élèves les plus faibles, que s'ils répondaient au hasard (c'est à dire dans un QCM à quatre choix, avec une probabilité de 1/4 de trouver la bonne réponse), ils auraient de meilleurs résultats que ceux qu'ils obtiennent (Grégoire & Laveault, 1997). Les résultats que nous proposons ici dans le tableau 2 s'appuient sur le déclaratif des élèves quant à leur procédure « au hasard », et ne permettent pas de discerner véritablement ce qui relève du hasard et ce qui relève du « *guessing* ».

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7
Réponse "au hasard"	1,9 %	1,3 %	8,4 %	9,7 %	3,9 %	9 %	12,9 %

Tableau 2 - Pourcentage d'élèves ayant déclaré répondre "au hasard" pour chacun des items.

Environ 2% des élèves déclarent choisir une réponse au hasard pour répondre aux items 1, 2 et 3, c'est à dire ceux correspondant à un problème peu complexe. Si on considère les autres items, environ 10% des élèves semblent répondre au hasard principalement dans deux cas : face à un problème complexe (item 7) pour lequel ils n'arrivent pas à mener à terme une procédure de résolution ou pour répondre à une question dont ils ignorent totalement quelle pourrait être la réponse (notamment items 3 et 4 portant sur les fractions /décimaux).

La recherche que nous avons menée tend à montrer que finalement peu d'élèves déclarent répondre « au hasard » dans ce type de dispositif. De façon globale, les élèves ne semblent pas avoir perçu les avantages que ce dispositif pouvait leur procurer lorsqu'ils ne connaissaient pas la réponse et ont été peu nombreux à utiliser la stratégie S5 (au hasard) ; ils ont volontiers expliqué qu'ils utilisaient d'autres stratégies de repli, correspondant davantage à du « *guessing* » qu'à du hasard. Il semblerait de plus qu'un effet de contrat didactique empêche les élèves de fin d'école primaire à considérer que « répondre au hasard » puisse être envisageable pour répondre, même dans les rares cas où nous leur avons suggéré face à leur désarroi.

3.2.2 Stratégies utilisées par item et scores de réussite

Globalement, comme l'indique le tableau 3, pour répondre aux QCM, les élèves utilisent majoritairement des stratégies de savoir (type A). Dans le cas particulier de l'item 7 (résolution d'un problème complexe), les élèves procèdent différemment. Une analyse plus fine des stratégies utilisées pour cet item montre que 12% des élèves combinent les nombres en présence pour obtenir une des réponses proposées, ce qui n'est pas le cas face à un problème de moindre complexité (item 5) où seulement 1,3 % des élèves procèdent ainsi.

	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7
Stratégies A	73,5%	89,0%	68,4%	79,4%	63,9%	60,6%	41,9%
Stratégies B	16,1%	7,7%	26,5%	18,1%	8,4%	25,2%	43,9%
Stratégies C	10,3%	3,2%	5,2%	2,6%	27,7%	14,2%	14,2%

Tableau 3 - Répartition des stratégies utilisées par les élèves selon les items.

Pour les items mettant en jeu des connaissances sur les nombres décimaux (items 3, 4 et 6), les élèves appliquent majoritairement une règle simple intériorisée qui les mène ou non à la bonne réponse (stratégie S9) : dans ces cas, les élèves appliquent plus ou moins justement une technique (décalage de la virgule ou ajout de zéros...) afin de trouver une réponse. Par exemple, pour trouver le quotient de 872 par 100 (item 4), 58,7% des élèves utilisent une stratégie S9, mais parmi eux, seulement 77% trouvent la bonne réponse.

La spécificité du dispositif QCM influence particulièrement les stratégies des élèves lorsqu'ils sont face à un problème difficile à résoudre pour eux : la possibilité de choisir une réponse parmi d'autres modifie apparemment les procédures de résolution (*guessing* ou combinaison des nombres en jeu pour obtenir un des choix proposés) : ce qui a déjà été explicité pour des étudiants, notamment dans Katz & al (2000), et dans des études visant à comparer les effets du format de question (ouvert ou QCM) sur la réussite, telles que celles recensées dans Simkin & Kuechler (2005).

3.2.3 Changement de stratégie au cours du test

La nature des questions posées et des distracteurs proposés n'est évidemment pas sans incidence sur les stratégies que déploient les élèves pour y répondre ; le tableau 4 nous permet d'étudier la variété des stratégies adoptées par des élèves de fin d'école confrontés à des QCM.

	Stratégies A	Stratégies B	Stratégies C
7 fois	13,5%	0,0%	0,0%
6 fois	21,3%	0,0%	0,0%
1 fois	0,0%	27,7%	32,9%
0 fois	0,0%	29,7%	49,0%

Tableau 4 - Répartition des élèves selon le nombre de fois où ils ont utilisé une stratégie donnée sur l'ensemble du test.

Globalement, les élèves utilisent des stratégies différentes suivant les items auxquels ils sont confrontés, notamment selon leur niveau de connaissances (comme nous le verrons dans le paragraphe suivant). En effet, on peut relever que seulement 13,5% des élèves ne changent pas de type de stratégies sur l'ensemble des items et que ces élèves n'utilisent que des stratégies de type A. Par ailleurs, on peut également noter que 30% des élèves n'utilisent jamais de stratégies de type B, c'est à dire que pour répondre, ils utilisent forcément des connaissances ou a minima, initient un raisonnement.

Nous en concluons que les élèves de fin d'école savent tirer avantage du format QCM, même s'ils ne sont pas habitués à ce type de dispositif : ils n'hésitent pas à utiliser des stratégies de repli ou de substitution (en utilisant éventuellement les ordres de grandeurs) lorsqu'ils ne connaissent pas la réponse ou encore à se servir des réponses proposées pour les tester comme solutions potentielles (stratégie S10 utilisée par exemple dans l'item 2 pour trouver la longueur du rectangle en testant les différentes valeurs proposées).

3.2.4 Stratégies utilisées et niveaux de connaissance

Afin de considérer dans quelle mesure les stratégies utilisées par les élèves étaient conditionnées par leur niveau de connaissances, nous avons répertorié le type de stratégies utilisé par les élèves suivant leur groupe d'appartenance pour chaque item (Annexe 3) et pour l'ensemble du test (tableau 5 ci-dessous).

	Stratégies A	Stratégies B	Stratégies C
Élèves « faibles »	64,9%	25,4%	9,7%
Élèves « moyens »	63,5%	24,7%	11,8%
Élèves « forts »	76,1%	12,8%	11,1%

Tableau 5 – Répartition des stratégies utilisées par les élèves selon leur groupe d'appartenance pour l'ensemble du test

En moyenne, les élèves les plus faibles et ceux du groupe intermédiaire utilisent des types de stratégies assez similaires ; les élèves les plus forts utilisent deux fois moins de stratégies de repli ou de substitution que les autres élèves. C'est

seulement à partir d'un niveau de connaissance élevé (élèves « forts ») que les élèves utilisent prioritairement des stratégies qui relèvent de la connaissance, alors que les élèves « moyens » ou « faibles » emploient davantage de stratégies mixtes ou de repli.

En observant plus finement item par item (Annexe 3), on peut constater que, logiquement, les stratégies de type A sont davantage utilisées par les élèves ayant un plus haut niveau de connaissances (jusqu'à 98%), sauf pour les items 3 et 6 (lien fraction/décimaux) où les élèves les plus faibles sont les plus nombreux à utiliser ce type de stratégies, même si les techniques qu'ils appliquent sont erronées.

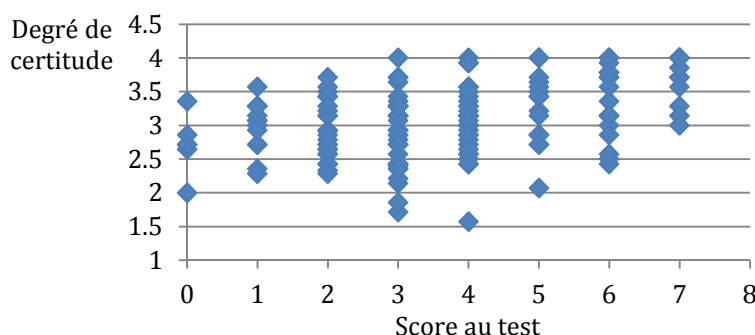
De la même manière, les élèves qui utilisent davantage des stratégies de substitution ou de repli se trouvent parmi les élèves les plus faibles (jusqu'à 61% pour l'item 7, le plus complexe du test), même si pour les items 3 et 6, ce sont les élèves de niveau « moyen » qui y ont le plus recours (36% et 33% contre 13% et 16% pour les plus faibles).

3.3 Degrés de certitude

Les élèves se sont très bien appropriés les degrés de certitude (de 1 à 4 suivant qu'ils étaient peu ou très sûrs d'eux) et n'ont pas hésité à faire une croix entre deux degrés quand cela leur semblait plus proche de ce qu'ils ressentaient. Il n'y a eu aucun refus à renseigner ces degrés et les hésitations étaient peu nombreuses.

3.3.1 Degrés de certitude et réussite

Le nuage de points ci-dessous représente le degré de certitude en fonction du score de réussite au test (nombre de réponses justes sur l'ensemble du test) ; le score varie entre 1 et 7.



Sur l'ensemble des sept items, la réussite globale au test est corrélée avec le degré de certitude ($r = 0,393$), ce qui signifie que plus l'élève a un score de réussite important, plus il est sûr de ses réponses. Ce résultat nous paraît assez logique,

mais nous avons souhaité l'affiner, notamment en étudiant plus spécifiquement les degrés de certitude selon les différents groupes d'élèves (forts, moyens et faibles) et les différents items.

3.3.2 Degrés de certitude et niveaux de connaissance des élèves

Pour chaque item, nous avons souhaité étudier comment les élèves répondaient et avec quel degré de certitude, en les distinguant suivant leur niveau de connaissances. Le tableau 6 ci-dessous indique les scores de réussite par items et les degrés de certitude attribués à chacun des items par les trois groupes d'élèves :

		Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7	Moyenne
Élèves faibles	SR	25,8 %	35,5 %	32,3 %	41,9 %	19,4 %	19,4 %	19,4 %	27,7%
	DC	2,74	3,13	3,06	2,74	3,11	3,06	2,35	2,887
Élèves moyens	SR	54 %	46%	58,7 %	73 %	39,7 %	44,4 %	19 %	47,8%
	DC	2,92	3,52	2,67	3,10	3,54	2,75	2,35	2,974
Élèves forts	SR	81 %	67,2 %	65,5 %	86,2 %	79,3 %	63,8 %	39,7 %	68,9%
	DC	3,30	3,70	3,03	3,61	3,65	3,04	2,90	3,319

Tableau 6 - Scores de réussite (SR) et degrés de certitude (DC) par item et par groupe d'élèves

Logiquement, les élèves les plus performants sont plus sûrs de leurs réponses que les élèves qui le sont moins (en moyenne, 2,887 pour les plus « faibles », 2,974 pour les « moyens », 3,319 pour les plus « forts »). Il convient de noter que le degré moyen de certitude est relativement élevé pour les trois groupes d'élèves, et que celui du groupe « forts » se démarque de façon significative⁸ de ceux des deux autres groupes qui sont eux, assez proches.

Pour les deux items 3 et 6 relatifs au lien fractions/décimaux : les élèves du groupe le plus faible ont le degré de certitude le plus élevé des trois groupes (3,06) alors que leur score moyen de réussite pour ces deux items n'est respectivement que de 32,3% et 19,4%. Ces élèves utilisent des théorèmes en actes faux dont ils sont certains de leur validité (ils associent généralement la fraction a/b au nombre

⁸ La comparaison des moyennes des DC entre les différents groupes a été réalisée en calculant le z de la loi normale. Pour la différence entre DC (élèves forts - élèves moyens), $z = 3,734$: ce qui est significatif ; alors que pour la différence entre DC (élèves moyens - élèves faibles), $z = 1,438$: ce qui n'est pas significatif.

décimal a,b), ce qui est préoccupant. Nous reviendrons plus spécifiquement sur les items 3, 4 et 6 dans le paragraphe 3.4 portant sur les écritures décimales.

On peut être étonné aussi de relever que chez les élèves du groupe « faible », l'item 5 peu réussi (moins de 20%) soit aussi affecté d'un degré de certitude supérieur à 3. Comme pour les deux items précédents relatifs aux liens fractions/décimaux, cela signifie que ces élèves ne réalisent pas que leurs connaissances mathématiques ne sont pas suffisantes pour réussir les tâches proposées. Pour ces trois items, les élèves accordent un degré de certitude important à leur réponse parce qu'elle correspond à un des choix proposés parmi les distracteurs : ici, pour l'item 5, les élèves qui ont choisi 3,60 € (résultat intermédiaire de la résolution du problème) étaient sûrs de leur choix puisque le résultat trouvé figurait parmi la liste des réponses proposées.

Enfin, l'item 7, qui est le plus difficile, a logiquement des degrés de certitude les plus bas, pour les trois groupes.

Les recherches sur le sentiment d'efficacité personnelle (Bandura (2003), Rondier, (2004)) peuvent nous amener à penser que les élèves en difficulté n'ont pas confiance en eux et que cela impacte leur réussite à l'école, mais nous constatons à travers cette enquête, que ce n'est pas forcément ce sentiment qui est à l'origine de l'échec de ces élèves et qu'il faudrait relativiser cette croyance. L'utilisation des degrés de réalisme obtenus en croisant le degré de certitude à la qualité de la réponse de l'élève peut permettre de questionner différemment les difficultés des élèves pour mieux les prendre en compte dans l'enseignement (ce que nous ferons localement dans le paragraphe 3.4 pour les items de ce test portant sur les fractions et les nombres décimaux).

3.3.3 Stratégies et degrés de certitude

Mettre en perspective le degré de certitude accordé à une réponse avec la stratégie employée pour la trouver nous semble intéressant pour éclairer le rapport au savoir mathématique que les élèves de fin de primaire peuvent avoir : est-ce qu'ils sont plus sûrs de leur réponse lorsqu'ils emploient une stratégie de savoir (A) que lorsqu'ils emploient une stratégie d'évitement (B) ? Est-ce toujours le cas ?

Nous avons synthétisé dans le tableau 7, relativement aux stratégies employées, les degrés de certitude qui étaient accordés à la réponse. Ainsi, pour les élèves qui ont employé une stratégie A pour répondre à l'item 1, 13 % d'entre eux accordent un DC inférieur à 2 et 77 % accordent un DC supérieur à 3 (le reste accordant un DC égal à 2,5).

	Stratégie A		Stratégie B		Stratégie C	
	$0 \leq DC \leq 2$	$3 \leq DC \leq 4$	$0 \leq DC \leq 2$	$3 \leq DC \leq 4$	$0 \leq DC \leq 2$	$3 \leq DC \leq 4$
Item 1	13,2%	77,2%	76,0%	4,0%	43,8%	18,8%
Item 2	5,8%	89,1%	25,0%	58,3%	20,0%	60,0%
Item 3	20,7%	74,5%	58,5%	17,1%	62,5%	25,0%
Item 4	8,1%	86,9%	71,4%	14,3%	100,0%	0,0%
Item 5	6,1%	90,9%	69,2%	30,8%	13,9%	83,7%
Item 6	18,1%	72,3%	64,1%	30,8%	40,9%	50,0%
Item 7	27,7%	58,5%	58,8%	26,5%	54,5%	31,8%

Tableau 7 – Degrés de certitude (DC) relativement aux stratégies employées.

De façon globale, pour tous les items, les élèves qui emploient une stratégie A accordent un degré de certitude élevé à leur réponse (mis à part pour l'item 7) ; en revanche, les élèves qui emploient des stratégies de repli (B) ou mixtes (C) n'accordent pas de façon aussi systématique un faible degré de certitude à leur réponse. En effet, principalement pour l'item 5 qui correspond à la résolution d'un problème, les élèves qui emploient une stratégie mixte (C) sont 83,7 % à être sûrs de leur réponse.

Au vu de ces quelques résultats, et avec toutes les précautions qu'il faut prendre relativement à la taille à notre échantillon, il semblerait, notamment en situation de résolution de problèmes sous forme QCM, que les élèves de fin d'école sont en capacité de trouver dans d'autres stratégies que celles de savoir une certaine efficacité pour répondre. Ce type de stratégies, spécifiquement lié aux QCM, ne peut certainement pas fonctionner dans le cas d'une question ouverte.

3.4 Évaluation des connaissances des élèves sur les nombres décimaux

Au-delà des résultats globaux que nous avons présentés précédemment, nous souhaitons détailler dans ce paragraphe ce que les trois items relatifs aux nombres décimaux nous ont permis de mettre en évidence car les résultats attachés à ces items sont à la fois surprenants et instructifs et nous permettent d'étudier plus finement le comportement des élèves de fin d'école confrontés à des QCM.

3.4.2 Passage d'une écriture fractionnaire à une écriture à virgule et réciproquement : réussite et échec

Les items 3 et 6 du test permettent de révéler les apprentissages des élèves sur l'écriture d'un nombre décimal et les difficultés qu'ils peuvent rencontrer dans deux tâches différentes : transformer une écriture sous forme de fraction décimale en une écriture à virgule (item 3) et réciproquement (item 6).

Un tableau croisé des réponses à chacun de ces deux items (Annexe 4, tableau 1) nous conduit à un premier constat : seuls 38 % des élèves réussissent cette transformation dans les deux sens, ce qui pourrait être considéré comme un indice de connaissance maîtrisée (alors que les items 3 et 6 ont respectivement un score de réussite de 54,8 % et 46,5 %). Ce constat met en évidence que d'une part, la connaissance des décimaux n'est pas achevée en fin d'école, et que d'autre part les scores de réussite à ces deux items sont à interpréter avec prudence et réserve.

Par ailleurs, dans chacun de ces deux items, un des distracteurs correspond à l'erreur signalée précédemment consistant à considérer le trait de fraction et la virgule comme deux séparateurs similaires (c'est-à-dire à concevoir $237/8$ comme $237,8$ et $62,10$ comme $62/10$) : nous constatons que 18 % des élèves ont cette conception sur les deux items, soit presque un élève sur cinq ! Même si à la fin du cycle 3, les apprentissages relatifs à l'écriture des nombres décimaux sont encore en cours de construction et que l'utilisation des QCM à ce stade de l'apprentissage peut surévaluer les connaissances de l'élève (Grégoire & Laveault, 1997), il n'empêche que ces résultats sont révélateurs d'une difficulté qui perdure.

Nous voyons ici l'intérêt de croiser les réponses à ces deux items pour préciser les connaissances acquises par l'élève sur ces changements de représentation, mais nous nous interrogeons aussi sur la comparaison de ces deux items : les deux items sont-ils indépendants (c'est-à-dire, est-ce que le pourcentage de réussite à l'item 6 est le même à l'item 3 pour tous les participants au test, qu'ils aient ou non réussi ou échoué l'item 3) ?

Pour répondre à cette question, nous avons choisi de regrouper nos données dans un tableau croisé des réussites et des échecs à chacun des deux items (Annexe 4, tableau 2). Les élèves qui réussissent à transformer une écriture fractionnaire en une écriture décimale (item 3) et qui échouent à la transformation d'écriture inverse (item 6) sont plus nombreux que ceux qui réalisent correctement la transformation d'un nombre d'une écriture décimale à une écriture fractionnaire en (item 6) et qui échouent à l'inverse (item 3). Plusieurs éléments peuvent expliquer ce résultat : l'un d'eux se rapporte à l'ordre habituel⁹ d'enseignement des nombres décimaux à partir des fractions, l'autre au fait qu'il y a une pluralité d'écritures fractionnaires correspondant à une écriture décimale ($3,2$ peut s'écrire $32/10$ ou $320/100$ ou $3+2/10$), alors que, pour une écriture fractionnaire donnée, une seule écriture décimale lui correspond.

⁹ Dans la majorité des manuels de cycle 3 consultés, la progression d'enseignement adoptée pour les fractions et les nombres décimaux est dans l'ordre pour le CM 1 : Fractions (fraction partage dans le cas général) – Fractions décimales – Nombres décimaux – Opérations avec les nombres décimaux.

3.4.3 Écritures décimales : degrés de certitude et qualité de la réponse

Adjoindre un degré de certitude à la réponse donnée permet d'apporter des éléments d'évaluation plus précis et de distinguer des états de connaissance spécifiés, tels que « l'ignorance reconnue (réponse incorrecte et peu sûre), la connaissance incomplète (réponse correcte mais peu sûre), la connaissance assurée (réponse correcte et très sûre), l'ignorance ignorée (réponse incorrecte et très sûre) » (Gilles, 1996). Pour les trois items (3, 4 et 6) évaluant des connaissances sur les nombres décimaux, nous avons mis en relation, dans le tableau 8, la qualité de la réponse avec le degré de certitude qui lui a été accordé.

	Item 3	Item 4	Item 6
Réponse juste et $0 \leq DC \leq 2$: connaissance ignorée	15,48%	9,68%	10,32%
Réponse juste et $3 \leq DC \leq 4$: connaissance assurée	36,77%	58,71%	32,26%
Réponse fausse et $0 \leq DC \leq 2$: ignorance reconnue	17,42%	12,26%	22,58%
Réponse fausse et $3 \leq DC \leq 4$: ignorance ignorée	20,00%	12,90%	26,45%

Tableau 8 – Répartition des élèves selon les items et selon les degrés de certitude accordés à leur réponse

Ce tableau permet de révéler que les élèves semblent plus incertains concernant leur aptitude à répondre à l'item 6 (passage d'une écriture à virgule à une écriture sous forme de fraction décimale) qu'à l'item 3 (passage d'une écriture sous forme de fraction décimale à une écriture à virgule) puisqu'ils sont à la fois moins assurés quand ils répondent correctement et à la fois plus réalistes concernant leur ignorance. Globalement, nous constatons qu'un élève sur cinq ignore son ignorance ; ce constat rejoint ce que nous avons observé sur l'« ignorance ignorée » des élèves « faibles » et sur le fait qu'environ 20% des élèves conçoivent l'écriture à virgule a,b comme celle de la fraction a/b.

Conclusion

Indubitablement, il existe des différences de stratégies de réponse aux QCM selon que l'on soit un adulte, étudiant au lycée ou à l'université, et un enfant, élève de l'école primaire. Ces différences sont, en partie, la conséquence d'une approche différenciée de l'évaluation dans les différentes institutions scolaires. Les adultes chercheraient davantage « la bonne réponse », quitte à convoquer le hasard en

dernier recours, alors que les enfants chercheraient davantage à trouver « une réponse ».

Nous avons constaté que les élèves de l'école primaire n'adoptaient pas un type de stratégies uniforme pour résoudre les tâches auxquelles ils étaient confrontés, mais qu'ils en changeaient suivant la nature de ces tâches. Les stratégies qu'ils utilisent dépendent également de leur niveau de connaissances en mathématiques. Ainsi, les élèves les plus faibles sont plus enclins à utiliser des stratégies de repli ou de substitution, même s'ils rechignent à choisir leur réponse totalement au hasard. Il semblerait qu'un contrat didactique s'opère dans le cadre de ce type d'évaluation, ne permettant pas aux élèves d'envisager cette stratégie comme scolairement acceptable, à moins qu'ils n'aient pas suffisamment de recul pour utiliser le hasard comme recours possible ; la notion de « contrat d'évaluation » développée par Van den Heuvel Panhuizen (2005) en perspective de celle de « contrat didactique » (Brousseau, 1998) mériterait, au vu des résultats de cette recherche, d'être approfondie dans le cas spécifique des questions sous forme de QCM à l'école primaire lorsqu'elles sont effectivement présentées en situation d'évaluation.

Les items relatifs au lien entre écriture décimale et fraction ont produit des résultats assez inquiétants car, au-delà des scores de réussite assez faibles témoignant d'une mauvaise compréhension des décimaux, ils nous ont alerté sur le fait que certains élèves utilisent des règles erronées qu'ils appliquent avec un degré de certitude élevé (ignorance ignorée). Ainsi, l'intégration du degré de certitude au choix d'une réponse nous a permis, à l'échelle de notre test et de la taille de l'échantillon, de mieux mesurer le degré de connaissance des élèves et l'ancrage de leurs conceptions erronées, surtout pour les fractions - décimaux.

Les travaux menés en docimologie sur l'utilisation des degrés de certitude et de réalisme avec des étudiants offrent des perspectives pour faire évoluer les évaluations diagnostiques et formatives pour des élèves de primaire. Même si l'utilisation de QCM en cours d'apprentissage n'est pas préconisée (Grégoire & Laveault, 1997), on mesure à travers ce travail et ce type de dispositif, l'intérêt que présentent de telles informations pour l'enseignant et pour l'élève. L'utilisation en classe, par l'enseignant de tels indicateurs, semble une voie intéressante pour mieux appréhender le niveau de ses élèves et pour réguler son enseignement. Pour les erreurs fréquentes repérées par les didacticiens, nous convenons avec Pluvinaud (1979) que « pointer cette erreur et faire remarquer son caractère attractif à un élève qui l'a commise est un service à lui rendre ». En ce sens, les degrés de réalisme peuvent être un levier intéressant pour faire entrer l'élève dans l'évaluation de ses propres apprentissages et considérer l'erreur comme faisant partie du processus d'apprentissage.

Enfin, même si cette recherche ne l'a pas pris en compte, nous avons pu constater l'aspect potentiellement formateur du QCM, notamment en situation de résolution

de problèmes, puisque la forme même de la question offre à l'élève de possibles rétroactions sur la qualité de son résultat et peut le conduire à reprendre ses calculs. Au-delà d'un apprentissage possible de stratégies propres aux QCM (écarter les réponses invraisemblables, utiliser les ordres de grandeur, tester les différentes propositions, etc.), apprendre avec les QCM pourrait permettre d'aider à la résolution de problèmes et développer chez l'élève une certaine autonomie : d'une part les différents choix de réponse « sécurisent » l'élève, mais d'autre part les choix de réponses lui permettent d'exercer un auto-contrôle sur ses résultats.

Ces questions nous semblent importantes à traiter car les représentations des enseignants sur leurs élèves, qu'ils soient performants ou en difficulté, ont une incidence non négligeable sur leurs pratiques. En effet, si un enseignant estime que certains élèves échouent par manque de confiance en eux, ils peuvent être amenés à leur proposer des situations mathématiquement moins riches qui produisent plus facilement des réussites (logique de réussite immédiate, Butlen, Peltier, Pézard, 2002), mais qui au final réduisent les apprentissages effectifs des élèves. Les travaux du groupe RESEIDA ont montré que les difficultés des élèves pouvaient être, en partie, due à une différenciation pédagogique inadaptée conçue par des enseignants ayant pourtant une réelle volonté d'aider leurs élèves (Rochex & Crinon, 2011). Les questions d'évaluations sont au cœur des pratiques enseignantes, et peuvent donc aider à mieux appréhender la réalité des connaissances des élèves. Nous espérons que cette étude autour des stratégies de réponses aux QCM et des degrés de certitude y contribuera.

Bibliographie

- ADDA J. (1976), Difficultés liées à la présentation des questions en mathématiques, *Educational Studies in Mathematics* 7, 3–22.
- BANDURA A. (2003), *Auto-efficacité. Le sentiment d'efficacité personnelle*, De Boeck, Bruxelles.
- BLOOM B. S., HASTING J. T. & MADAUS G. F. (1971). *Handbook on formative and summative evaluation of student learning*, Mac Graw Hill, New York.
- BOULE S. & LAVEAULT D. (2011), Utilisation du degré de certitude et de réalisme dans un contexte d'évaluation diagnostique, dans *Des mécanismes pour assurer la validité de l'interprétation de la mesure en éducation, Volume 2*, (Eds. Raîche & alii), 31-48, Presses de l'Université du Québec, Québec.
- BOURNY G., CENS I, COPPENS N., DUPE C., FUMEL S., JOST R., MONNIER A-L., OBERT M-C., OLIVIER Y., PEYLET D., ROCHER T., TALAMONI C. (2003), *L'évaluation internationale PISA 2003 : compétences des élèves français en mathématiques, compréhension de l'écrit et sciences*, Les dossiers de l'enseignement scolaire, n°180, Direction de l'évaluation de la prospective et de la performance, Paris.

- BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- BUTLEN D., PELTIER M-L., PEZARD M. (2002), Nommé(s) en REP, comment font-ils ? Pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques en ZEP : cohérence et contradictions, *Revue française de pédagogie* **140**, 41-52.
- COMITI C. & NEYRET R. (1979), A propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en classe de CM, *Grand N* **18**, 5-20.
- CHOPPIN B.H. (1975), Guessing the answer on objective tests, *British Journal of Educational Psychology* **45**, 206-213.
- DE LANDSHEERE G. (1979), *Dictionnaire de l'évaluation et de la recherche en éducation*, Presses universitaires de France, Paris.
- DOUADY R. & PERRIN-GLORIAN M.J (1986), *Liaison école – collège : Nombres décimaux*. Brochure n°62, IREM de Paris 7, Paris.
- DUVAL R., PLUVINAGE F. (1977), Démarches individuelles de réponse en mathématique, *Educational Studies in Mathematics* **8-1**, 51-116.
- GILLES J-L. (1996), Utilisation des degrés de certitude et normes de réalisme en situation d'examen et d'auto-estimation à FA.P.S.E. - ULG, *Colloque de l'ADMEE-EUROPE "Dix années de travaux de recherche en évaluation"*.
- GREGOIRE J., LAVEAULT D. (1997), *Introduction aux théories des tests en sciences humaines*, De Boeck, Bruxelles.
- HUNT, D. (1993). Human self assessment - Theory and application to learning and testing, dans *NATO ASI Series, Item Banking : Interactive Testing and Self Assessment*, (Eds D. Leclercq, J. Bruno), **112**, 177-189, Springer Verlag, Berlin.
- KATZ, I., BENNETT, R. E., & BERGER, A. (2000), Effects of Response Format on Difficulty of SAT Mathematics Items: It's Not the Strategy. *Journal of Educational Measurement* **37-1**, 39-57.
- LECLERCQ D. (1986), *La conception des questions à choix multiple*, Labor, Bruxelles.
- LECLERCQ D. (1987), *Qualité des questions et signification des scores*, Labor, Bruxelles.
- LECLERCQ D. &POUMAY M. (2004), Une définition opérationnelle de la métacognition et ses mises en œuvre. *Communication présentée à la 21ème conférence internationale de l'AIPU*, Marrakech.
- LECLERCQ D. (2006), L'évolution des QCM, dans *Recherche sur l'évaluation en éducation* (Eds. Figari &Mottier-Lopez), 139-146, L'Harmattan, Paris.
- PLUVINAGE F. (1979), Loto-questionnaires (pour l'évaluation et l'auto-contrôle en mathématiques), *Educational Studies in Mathematics* **10**, 443-485.

ROCHEX J. & CRINON J. (2011), *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*, Presses Universitaires de Rennes, Rennes.

RODITI E. (2007), La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **12**, 55-81.

RONDIER M. (2004), « A. Bandura. Auto-efficacité. Le sentiment d'efficacité personnelle », *L'orientation scolaire et professionnelle* **33/3**, 475-476.

SIMKIN, M. G., & KUECHLER, W. L. (2005). Multiple Choice Tests and Student Understanding: What is the Connection? *Decision Sciences Journal of Innovative Education* **3-1**, 73-97.

VAN DEN HEUVEN-PANHUIZEN, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics, *For the Learning of Mathematics* **25(2)**, 2-9.

NATHALIE SAYAC & NADINE GRAPIN

Université Paris-Est, Laboratoire de Didactique André Revuz

(LDAR-EA 4434)

nathalie.sayac@u-pec.fr

nadine.grapin@u-pec.fr

Annexe 1 : Énoncé des sept QCM pour les élèves

Item 1 :

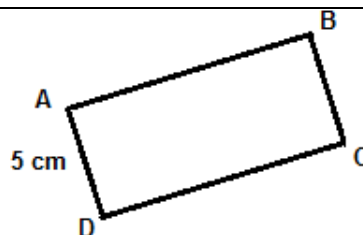
Dans une heure, combien y a-t-il de secondes ?

- ☐ 360 secondes
☐ 3 060 secondes
☐ 3 600 secondes
☐ 6 300 secondes

1	2	3	4
pas sûr du tout	pas très sûr	sûr	sûr et certain

Item 2

ABCD est un rectangle dont la largeur est 5 cm.
Quelle doit être la longueur de ce rectangle pour que son périmètre soit égal à 30 cm ?



- ☐ 6 cm
☐ 10 cm
☐ 25 cm
☐ 14 cm

1	2	3	4
pas sûr du tout	pas très sûr	sûr	sûr et certain

Item 3

A quel nombre correspond la fraction $\frac{62}{10}$?

- ☐ 6,2
☐ 0,62
☐ 62,10
☐ 620

1	2	3	4
pas sûr du tout	pas très sûr	sûr	sûr et certain

Item 4

Lorsqu'on divise 872 par 100, on obtient:

- ☐ 0,872
☐ 8,72
☐ 87,20
☐ 87 200

1	2	3	4
pas sûr du tout	pas très sûr	sûr	sûr et certain

Item 5

Sophia va à la boulangerie et achète 3 croissants à 1,20 € l'un.

Elle paie avec un billet de 10 €. Combien lui rend la caissière ?

- ☐ 7,20 €
- ☐ 3,60 €
- ☐ 8,80 €
- ☐ 6,40 €

1	2	3	4
pas sûr du tout	pas très sûr	sûr	sûr et certain

Item 6

Quelle est la fraction égale à 237,8 ?

- ☐ $\frac{237}{8}$
- ☐ $\frac{2378}{100}$
- ☐ $\frac{2378}{10}$
- ☐ $\frac{237}{10}$

1	2	3	4
pas sûr du tout	pas très sûr	sûr	sûr et certain

Item 7

Pour faire une bonne confiture, il faut mettre 300 g de sucre pour 400 g de fruits. Combien faut-il mettre de sucre pour 1 kg de fruits ?

- ☐ 600 g
- ☐ 700 g
- ☐ 750 g
- ☐ 800 g

1	2	3	4
pas sûr du tout	pas très sûr	sûr	sûr et certain

Annexe 2 : Explicitation des distracteurs pour chaque item

Item 1 (Item extrait de l'évaluation Cedre 2008)

Dans une heure, combien y a-t-il de secondes ?

- ☐ 360 secondes ☐ 3 060 secondes ☐ 3 600 secondes ☐ 6 300 secondes

Les distracteurs choisis correspondent à des réponses erronées proches, en termes d'écriture, de la bonne réponse. 360 peut correspondre aussi à une erreur de calcul du produit de 60×60 si un élève ne connaît pas de façon automatique la réponse.

Item 2

ABCD est un rectangle dont la largeur est 5 cm. Quelle doit être la longueur de ce rectangle pour que son périmètre soit égal à 30 cm ?

- ☐ 6 cm : correspond à la confusion de la formule du périmètre avec celle de l'aire.
- ☐ 10 cm : bonne réponse.
- ☐ 25 cm : $30 \text{ cm} - 5 \text{ cm}$
- ☐ 14 cm : double confusion : utilisation de la formule de l'aire d'un rectangle pour déterminer la longueur ($30 : 5 = 6$) puis utilisation du résultat avec la formule du périmètre d'un rectangle pour calculer (à nouveau) la longueur : $30 \text{ cm} - 2 \times 5 \text{ cm} - 6 \text{ cm} = 14 \text{ cm}$.

Notons que la question était accompagnée d'une figure à l'échelle (cf annexe 1) ; certains élèves ont trouvé 10 cm en constatant sur la figure que la longueur mesurait le double de la largeur.

Item 3

A quel nombre correspond la fraction $\frac{62}{10}$?

- ☐ 6,2 : bonne réponse.
- ☐ 0,62 : confusion dixième – centième ou technique de division par 100 non maîtrisée.
- ☐ 62,10 : le trait de fraction est perçu comme un séparateur, au même titre que la virgule.
- ☐ 620 : confusion dixièmes / dizaines ou confusion diviser par 10 / multiplier par 10.

Item 4 (Item extrait de l'évaluation Cedre 2008)

Lorsqu'on divise 872 par 100, on obtient:

- ☐ 0,872 ☐ 8,72 ☐ 87,20 ☐ 87 200

Les mauvaises réponses correspondent à des résultats provenant d'un usage non maîtrisé d'une technique de la division par 10 : décalage de la virgule de 3 rangs pour 0,872 ; décalage de 1 rang pour 87,20 et pour 87200 confusion entre une division par 100 et une multiplication par 100.

Item 5

Sophia va à la boulangerie et achète 3 croissants à 1,20 € l'un.

Elle paie avec un billet de 10 €. Combien lui rend la caissière ?

- ☐ 7,20 € : double erreur de calcul : $3 \times 1,20\text{€} = 3,20\text{€}$ et $10\text{€} - 3,20\text{€} = 7,20\text{€}$.
☐ 3,60 € : correspond au prix des croissants (résultat d'une étape intermédiaire)
☐ 8,80 € : $10\text{€} - 1,20\text{€}$ (l'élève a pris en compte le prix d'un seul croissant)
☐ 6,40 € : bonne réponse

Item 6 (Item extrait de l'évaluation Cedre 2008)

Quelle est la fraction égale à 237,8 ?

- ☐ $\frac{237}{8}$: le trait de fraction est perçu comme un séparateur, au même titre que la virgule.
☐ $\frac{2378}{100}$: technique non maîtrisée de la division par 100 (on garde 3 chiffres avant la virgule).
☐ $\frac{2378}{10}$: bonne réponse
☐ $\frac{237}{10}$: la virgule, perçue comme un séparateur et la présence d'un chiffre après la virgule conduit l'élève à penser à une division par 10.

Item 7

Pour faire une bonne confiture, il faut mettre 300 g de sucre pour 400 g de fruits. Combien faut-il mettre de sucre pour 1 kg de fruits ?

- ☐ 600 g : $2 \times 300\text{g}$ ou $1\ 000\text{g} - 400\text{g}$
☐ 700 g : $300\text{g} + 400\text{g}$
☐ 750 g : bonne réponse
☐ 800 g : écart de 100g entre 300g et 400g qui s'applique sur 1000g ou $2 \times 400\text{g}$.

Annexe 3

Tableaux récapitulatifs des stratégies utilisées suivant le groupe d'élèves (faibles, moyens, forts) et selon l'item.

<i>Faibles</i>	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7
Stratégies A	64,5%	83,9%	87,1%	61,3%	54,8%	77,4%	25,8%
Stratégies B	16,1%	16,1%	12,9%	35,5%	19,4%	16,1%	61,3%
Stratégies C	19,4%	0,0%	0,0%	3,2%	25,8%	6,5%	12,9%

<i>Moyens</i>	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7
Stratégies A	73,0%	84,1%	54,0%	77,8%	65,1%	55,6%	34,9%
Stratégies B	17,5%	7,9%	36,5%	20,6%	4,8%	33,3%	52,4%
Stratégies C	9,5%	7,9%	9,5%	1,6%	30,2%	11,1%	12,7%

<i>Forts</i>	Item 1	Item 2	Item 3	Item 4	Item 5	Item 6	Item 7
Stratégies A	81,0%	98,3%	74,1%	93,1%	69,0%	58,6%	58,6%
Stratégies B	12,1%	1,7%	22,4%	3,4%	5,2%	19,0%	25,9%
Stratégies C	6,9%	0,0%	3,4%	3,4%	25,9%	22,4%	15,5%

Annexe 4

Tableau croisé des réponses aux items 3 et 6 :

Item 6 Item 3	1 : 237/8	2 : 2378/100	3 : 2378/10	4 : 237/10
1 : 6,2	13,5%	5,2%	34,8%	1,3%
2 : 0,62	9,7%	0,6%	5,8%	0,0%
3 : 62,10	18,1%	0,6%	1,9%	1,3%
4 : 620	1,3%	1,9%	3,9%	0,0%

Tableau croisé des réussites et des échecs aux items 3 et 6 (en nombre d'élèves et en pourcentage) :

Item 6 Item 3	Echecs	Réussites	Total
Réussites	31 (20%)	54 (35 %)	85 (55 %)
Echecs	52 (33 %)	18 (12 %)	70 (45 %)
Total	83 (53 %)	72 (47 %)	155

Britta Eyrych JESSEN

HOW CAN STUDY AND RESEARCH PATHS CONTRIBUTE TO THE TEACHING OF MATHEMATICS IN AN INTERDISCIPLINARY SETTING?

Abstract. This study investigates the perspectives of using study and research paths (SRP) as a design tool for bidisciplinary work at upper secondary level. This study is using a special kind of diagrams both as tool for SRP design and as a tool to analyse the actual SRP realised with students. Specifically I present the design and realisation of a SRP combining mathematics and biology. The results point to advantages of the SRP approach in terms of the way bidisciplinary work is organised, but also challenges in relation to the design process. As for the last point, the test of the designs raises the question to what degree of detail is it necessary to know the practice and theory of both disciplines in order to formulate questions that help students to develop the intended praxeologies, and also for the weak students to discover the need of mathematics for solving problems in other disciplines.

Key words. Upper secondary level; bidisciplinary work; Study and Research Paths.

Résumé. Comment les Parcours d'Étude et de Recherche peuvent-ils contribuer à l'enseignement des mathématiques dans un contexte interdisciplinaire ? Cette étude examine les perspectives d'utilisation des Parcours d'Étude et de Recherche (PER) comme outil de conception pour du travail bidisciplinaire au niveau secondaire supérieur. Cette étude utilise un type spécial de schémas comme outil à la fois pour la conception de PER et pour analyser le PER réellement réalisé avec les élèves. Plus précisément, je présente la conception et la réalisation d'un PER combinant mathématiques et biologie. Les résultats montrent les avantages de l'approche PER en termes d'organisation du travail bidisciplinaire, mais signalent aussi les conditions à remplir pour la conception. En ce qui concerne le dernier point, le test des réalisations soulève la question du niveau de détail auquel il est nécessaire de connaître la pratique et la théorie des deux disciplines, afin de formuler des questions qui aident les élèves à développer les praxéologies voulues, et aussi permettent aux élèves faibles de découvrir le besoin de mathématiques pour résoudre des problèmes d'autres disciplines.

Introduction

This study presents the results of testing the design tool called *Study and Research Paths* (SRP) at upper secondary level. The basic idea of a SRP is to organise students' approach to a field of knowledge through meaningful and challenging questions. I describe this tool in more detail in the theory section. SRP has been tested in both monodisciplinary settings (e.g. see Winsløw, Matheron & Mercier, in press) and in bidisciplinary settings (Barquero, Bosch & Gascón, 2007; Thrane,

2009). The SRP developed by Barquero, Bosch and Gascón (2007) concerned the growth of a population of geese on an isolated island; it does not require students to develop substantial knowledge on population biology, but the motivating problem is clearly extra-mathematical. Thrane (2009) experimented a series of SRP concerning analysis of curves in different sport activities actually, which involve students knowledge of how to perform different sport activities, and the students were supposed to use the mathematical analysis improving their own performance in these activities. In this sense the latter seems to be integrating the two concrete school disciplines more than the first one. This study explores the use of SRP in a bidisciplinary setting combining mathematics and biology where the two disciplines are given equal importance. I am particularly interested in how the bidisciplinary setting can help developing mathematical knowledge – and more concretely, in how a SRP combining mathematics with a discipline like biology could support the learning of mathematics. This is not a new idea and similar ones are presented in (Davison, Miller & Metheny, 1995) and (Czemiak, Weber, Sandmann & Ahern, 1999). What this study offers is a thorough analysis of the students detailed outcomes in terms of presented praxeologies, which illustrates the disciplines and their possible connections regulated by the potentials and limitations of ATD and study and research paths.

This paper is a natural continuation of previous work (Hansen & Winsløw, 2011 and Hansen, 2009), which presented a method to use SRP for analysing bidisciplinary written assignments combining mathematics and history. The study revealed severe challenges for creating bidisciplinary projects, that are well functioning both from the viewpoint of students and teachers. The reason for the identified shortcomings were not just caused by the manifest distance between mathematics and history as disciplines, but also by the fact that the teachers' formulation of the assignments were often leading to a parallel structure in the students' work where the two disciplines were not interacting at all. This was clear already from an *a priori* analysis of the assignments. How the *a priori* analysis is carried out will be elaborated in the section on methodology.

Context of the study

The institutional frame for the experiments with SRP presented in this paper, was general high school (upper secondary level) in Denmark. In this context, a certain amount of time and lessons are devoted to bidisciplinary work. There are many formal regulations of the bidisciplinary work, which acted as constraints and conditions for the testing of the SRP. The most important condition for our experiment was that the SRP should combine mathematics and biology and that the students should write a bidisciplinary report at the conclusion of their work. The report described in this experiment should prepare the students for writing an autonomous report combining to disciplines (called the “study line project”), which

represents a high stake exam at the end of high school, and so it is heavily regulated. Similar the report and this experiment was highly regulated; I give some details in order to allow the reader to grasp the setting of our design. After handing in the report, the students get feedback on their writing from the teachers and they rewrote their report as a 3 pages synopsis to be defended in an oral exam months later. The students must do all work on the first version of the report along with their mandatory classes; after six weeks they get two days off for the final writing. They are allowed to write the report in groups of two students. Each student must hand in at most 10 pages.

After handing in the reports, students should have some kind of evaluation of their work. The rules require that students get a grade for their reports along with comments. These comments must reflect what is expected of the student in their “study line project”. Therefore a sheet of comments was created for each student. The comments were formulated with explicit reference to the ministerial guidelines for grading study line projects. This means that the students would get comments from both teachers on the following sentences:

“To what extent are the questions answered? To what extent does the report fulfil the ministerial aims of the biology teaching? To what extent does the report fulfil the ministerial aims of the mathematics teaching? To what extent are the sections of the assignment mutually coherent? Is the use of notes and citations in the text appropriate? Is the list of references satisfying? What is the overall impression of the assignment?”

Based on the comments, they rewrote their report to the synopsis – a paper containing introduction, research questions, answers to these, conclusion and a section putting the problematique in a broader perspective – used at the oral exam.

On the side of the teachers, none of them have an academic background in both mathematics and biology. The biology teacher is an experienced teacher of biology and geography. He is involved with didactic developments in Danish high school, but not a researcher and without any experience teaching SRP. The mathematics teacher has some years experience in teaching mathematics and physics in Danish High school. She is also a researcher in the field of didactics of mathematics and the author of this paper. Both teachers are the everyday teachers of the class in biology and mathematics respectively. The research part was only conducted by the mathematics teacher, which is reflected in the analysis. The choice of disciplines depends on the disciplines the class specialises in. Therefore it is not likely both disciplines are in the academic background of one teacher. The experiment included the entire class of 25 students.

Theory

The theoretical framework of this study is the anthropological theory (ATD). The key notion is *study and research path*, which is used as a design tool as well as for analysing the outcomes of the student reports, and which we now proceed to explain in more detail.

The notion of SRP was presented by Chevallard around 2004¹ and he describes it as based on what he calls a *generating question*, which will be denoted Q_0 . This question must be so strong² that students can derive new questions Q_i from it – here, each index i represent a branch of inquiry. The answers to the derived questions add up to an answer for the original question Q_0 (Chevallard, 2006, p. 28). Another requirement for the generating question Q_0 formulated by Barquero, Bosch & Gascón, is that it must be “of real interest to the students (“alive”) [...]” (2007, p. 3). The research and study process leads to tree diagram of pairs (Q_i, A_i) of question and answers (Barquero, Bosch et Gascón, 2007 and Hansen & Winsløw, 2010), such as the example shown in figure 3 – for simplicity the answers to each question (arising from praxeologies developed by the students) are left out of the diagram.

The notion of inquiry can be interpreted as in inquiry-based mathematics education (IBME), which has been conceptualized by Artigue and Blomhøj (2013). As they argue “ATD is also a theoretical frame whose design perspective seems especially adapted to IBME” (Artigue & Blomhøj, 2013, p. 806), and further discusses the potentials and limitations regarding the inquiry reflecting the choice of study and research activity or programme as they call it. The strong link between study and research paths and inquiry-based learning is addressed in (Winsløw, Matheron & Mercier, 2013), although they stress the importance of the study process, which cannot be discarded from the inquiry process.

We now return to our context to explain how SRP fit with the conditions for the bidisciplinary work leading to a synopsis for the oral exam. The students are supposed to get training in applying existing knowledge. In terms of ATD this means activating existing *praxeologies*, a term which indicates a complex system of practical and theoretical knowledge (Chevallard, 1999). The students knew a little on first order differential equations and human physiology, including the nervous system. They are supposed to apply their knowledge in new contexts and hopefully get a wider picture of both fields. In terms of ATD this is to develop new

¹ However there has been made different suggestions for the translation of *parcours d'étude et de recherche*. In this paper I have chose to use *study and research paths*.

² A strong question means that students are able to understand it but unable to deliver a complete answer before studying works of others and use these answers in the formulation of an answer to the generating question.

(mathematical, biological or bidisciplinary) praxeologies from the existing ones (Barquero, Bosch & Gascón, 2007, pp. 9; Hansen, 2009, p. 53). Another requirement for the assignment is that the students should gain experience with searching for information and resources for answering the assignment questions – and also, where possible, develop answers on their own. This is consistent with what Chevallard calls the dialectic of media and milieu (2006, p. 9) where the student on the one hand is studying existing “works”, and at the same time is exploring a problem (in this case, mathematical modelling of the distribution of a drug). It is important to point out the necessity and delicacy of this dialectics (Winsløw, 2011, p. 129): a SRP must include *both* study (of works) and *research* (on problems). The students are supposed to do this since the answers were not directly available in the textbooks. On the contrary the students must study the works of others (the textbooks, new materials from library, internet and likewise), and they have to deconstruct this knowledge, combine this with existing praxeologies in order to develop new praxeologies as answers to questions – formulated by themselves or the assignment questions.

The teaching design

The starting point for testing SRP in the bidisciplinary setting was to formulate a generating question fulfilling the conditions set by the school regulations.

The design was created on the basis of a teaching material for mathematics at upper secondary level, published by Technical University of Denmark. The material deals with the function of painkillers in the body and its’ modelling by differential equations (Jónsdóttir et al., 2009). The reason for choosing this material as inspiration for the generating question is that many of the students involved in the experiment were interested in biology and wanted to work in the health care system later on. Hence the teachers assumed that these students would find a problem on the dosing of medicine relevant and interesting. This might not give students a better mastery of their immediately lived world but it could help them relate their school knowledge to real uses which, in the end, could fulfil the higher goal of a better mastery of their lived worlds.

Based on the material, the generating question was formulated. It starts by questioning how one of the most common drugs used in households can relieve patients from their pain, how the functioning can be described from a mathematical perspective and how that description can be used to design a correct dosing. The full formulation is shown below:

Q₀: How can a patient be relieved from his pain by painkillers like paracetamol – how does deposit medication work and how can this be modelled mathematically? Q₁: Explain the biological functioning and consequences of taking paracetamol orally versus taking it intravenously. Q₂: Create a

mathematical model using differential equations that illustrates the two processes and solve the equations in the general case. Q₃: Give a concrete example, where the patient is relieved from pain and estimate from your own model how often paracetamol has to be dosed – which parameters (absorption, elimination factor, bioavailability) are important to be aware of? Q_{3,1}: Does it make any difference whether the dose is given oral or intravenously? Use your models while giving your answer. (translated from Danish)

Notice that some of the derived questions are already given along with the generating question in order to guide the inquiry of the students (Chevallard, 2012, p. 11). It is crucial for the SRP to be successful that the students gets some guidance and are not left alone with a too open and overwhelming question. In this setting, the regulation of students' and teachers' work further necessitates that some of the "guiding" is provided from the outset. It should be possible for the students to see, from the outset, that their praxeological equipment in biology and mathematics can help them answer the generating question, and the given derived questions serve this purpose, asking for more specific cases to guide and delimit the student inquiry.

The formulation of the questions was followed by an *a priori* analysis before handing out the assignment. This *a priori* analysis will be presented in section on results.

Methodology

To carry out an *a priori* analysis means to explore what derived questions and answers could occur from the particular formulation of Q₀, i.e. what possible paths the students could follow based on their expected praxeological equipment and available media; concretely, a complete "tree" of derived questions and answers is produced. Figure 1 and 2 show the diagrams of the *a priori* analysis for the SRP considered in this study. In this case, the *a priori* analysis led to minor corrections of the design before it was tried out with students.

The school does not allow the use of lessons for guidance or classroom debate on the progress of the students work. Therefore, other ways to keep track of the students' work with the SRP were developed. To record the students' first thoughts on the generating question, they were asked to provide their spontaneous answer to the question in writing immediately after reading it. Two and four weeks later the students were asked to answer the following questions:

What is your answer to the generating question right now? What have you done to answer the question? What are you planning to do next in order to come up with more fulfilled answers?

The teachers were only allowed to answer questions from the students after class. These conditions for guidance made it hard to track the exact progress of each student. Therefore the students were told only to ask questions if they gave them in writing by e-mail before meeting the teachers. It actually turned out that most questions could also be answered by e-mail. Examples of questions are given in the section on results.

Because of the little data available from the students working process, it is the outcome of the students' writings which is the main evidence of their study and research process. The reports were analysed as SRP, using the method developed earlier (cf. Hansen, 2009, pp. 60) and which I now describe. While reading the reports every small section was identified with the (derived) question it treats. An example could be "how to model a one-compartment system when knowing the diffusion of the drug from the vein alone relies on the elimination factor?" This can be answered by the praxeology of "setting up a first order differential equation from given conditions". This is a praxeology on mathematical modelling using differential equations. In this way the entire report was split up in small pieces of questions and answers (Q_i , A_i). The organisation and relation between praxeologies can be depicted by tree diagrams (see figure 3). The relations were identified from the way the student referred to or drew on previously presented praxeologies ie. sections or part of sections. When it comes to the parts of the reports consisting of pure biology, the praxeologies were only identified as a question and the answer given by the student – that is, I did not model or analyse biological praxeologies in detail, due to lack of knowledge in the field of biology.

The analysis of the students' reports was compared to the a priori analysis. The comparison of the diagrams showed to what extent the students had developed the intended praxeologies and maybe some unexpected ones. At the same time the diagrams show to what extent the two disciplines were incorporated and combined in the report and solutions. This helps to answer the crucial question: Does the formulation of the generating question function as a bidisciplinary task and do the student use and combine both disciplines while answering the assignment?

For the last part of the project the students were told to continue to ask questions by e-mail while rewriting their reports. The synopses were handed in electronically and during the oral exam written notes were taken. From this the new praxeologies were identified even though the synopsis format is not suitable for a thorough praxeological tree diagram analysis. Through these steps of analysis the results of the design and the students activities can be presented.

Results

As expected, there was a great diversity in the students' reports. Some students worked thoroughly with the questions and were able to formulate derived questions

themselves – even explicitly. Others were not able to see the use of mathematics in the assignments and tried to answer the exact questions formally, without further inquiry. This was expected as the class was not particularly “strong” (mathematically and academically) – but many of them were hard working and for them the study phase seemed very enriching. They clearly developed new mathematical praxeologies during their work with the SRP, as will be explained in detail in this section

The analysis of the formulation of the assignments gives the tree diagram figure 1 which shows the connections between the generating question and derived ones.

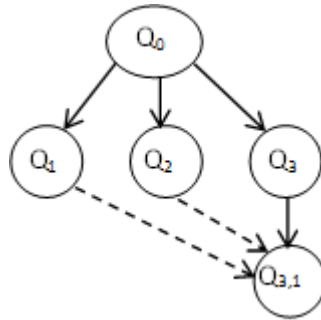


Figure 1: Tree diagram showing the formulation of the assignment

The dotted line indicates that question number $Q_{3,1}$ draws on the knowledge worked out as answers to questions Q_1 and Q_2 . The solid lines indicate that the questions are derived questions in the sense described by Chevallard (2006); in short, derived questions are natural prolonging of the former in order to achieve a more detailed inquiry. The tree diagram in figure 1 is part of the *a priori* analysis of the assignment. To get a more complete picture of the potentials of the SRP design, a full *a priori* analysis was made. This analysis is presented in the tree diagram of figure 2. Question numbers refer to the same as those in figure 1. The rest of the questions are derived questions, which are the questions students are intended to work with in this particular SRP. The answers to those questions are the praxeologies the students are supposed to develop in the field of differential equations and nerve physiology in relation to the diffusion of a drug in the body. The lines connecting the questions have the same interpretation as in figure 1.

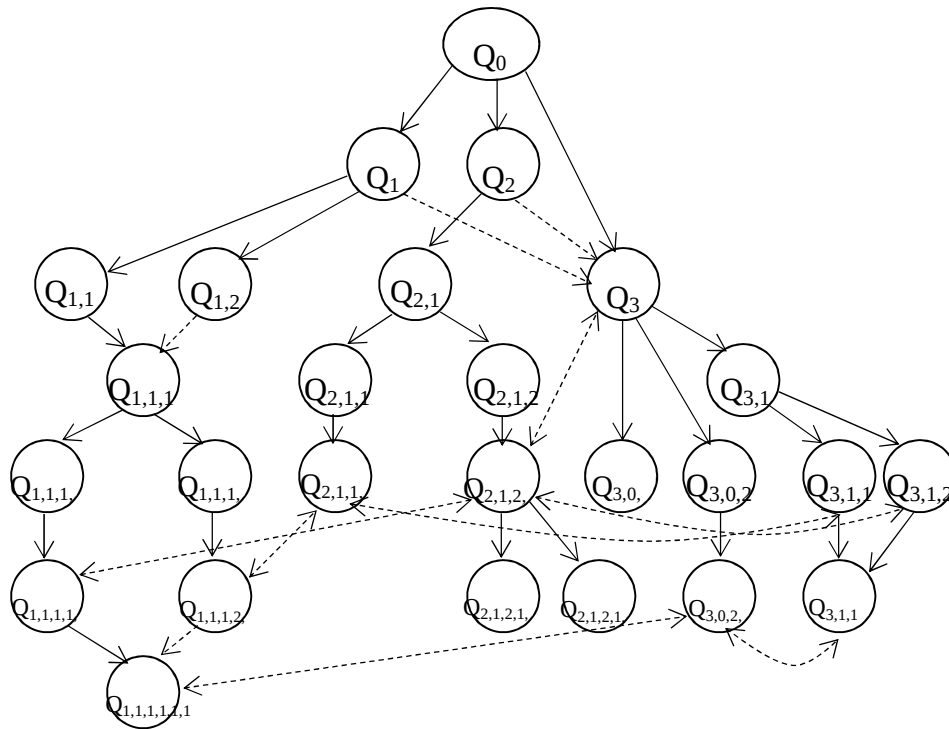


Figure 2: Tree diagram of the a priori analysis of the assignment. See the text below for the contents of each question.

The questions formulated by the author³, only having an academic background in mathematics, during the a priori analysis is the following where question numbers corresponds to those of figure 2. The questions representing the expected praxeologies are written in *italic* (these are not handed out to the students):

Q_0 : How can a patient be relieved from pain, using a drug like paracetamol? How does deposit medication work and how can this be modelled mathematically?

Q_1 : Explain the biological functioning and consequences of taking paracetamol orally versus intravenously.

$Q_{1,1}$: *What is the biological mechanism underlying the concept of pain?*

$Q_{1,2}$: *What kind of drug is paracetamol?*

$Q_{1,1,1}$: *How does paracetamol function in the body?*

³As mentioned earlier, this research was conducted by the author, who is the mathematics teacher and a didactic researcher. This means that the perspective of the questions is considered only from the standpoint of the mathematician. The *a priori* analysis would look differently, if it was carried out by others, with a different academic background.

Q_{1,1,1,1}: How does paracetamol function when it is dosed orally?

Q_{1,1,1,1,1}: How is paracetamol transported from the stomach to the vein biochemically seen?

Q_{1,1,1,1,1,1}: How long does it take from the drug is injected in the vein till a person is relieved from his pain?

Q_{1,1,1,2}: How does paracetamol function when it is dosed intravenously?

Q_{1,1,1,2,1}: What is the biochemical functioning of paracetamol in the vein?

Q₂: Set up a mathematical model using differential equations that illustrates the two processes and solve them in the general case.

Q_{2,1}: What is a differential equation?

Q_{2,1,1}: What can the differential equation $y' = ky$ model and what is the general solution?

Q_{2,1,1,1}: How do we model a one compartment system modelled using the elimination factor?

Q_{2,1,2}: What can the differential equation $y'(t) = c_1 z(t) - c_2 y(t)$ model and what is the general solution?

Q_{2,1,2,1}: How can we model the effects of the absorption using differential equations?

Q_{2,1,2,2}: How can we model the effects of the bioavailability using differential equations?

Q₃: Give a concrete example, where the patient is relieved from pain and estimate from your own model how often paracetamol has to be dosed – which parameters (absorptivity, elimination factor, bioavailability) are important to notice?

Q_{3,0,1}: What numbers can be put on the relevant notions and what do they tell?

Q_{3,0,2}: How can we model multiple dosing using the existing models?

Q_{3,0,2,1}: How often must the doses be given in order for the patient not to feel any pain?

Q_{3,1}: Does it make any difference whether the dose is given oral or intravenously? Use your models to support your answer.

Q_{3,1,1}: What does the model of multiple dosing look like in the case of intravenous dosing?

Q_{3,1,2}: What does the model of multiple dosing look like in the case of oral dosing?

Q_{3,1,1,1}: What differences appear while comparing the graphic presentation of the two functions of multiple dosing?

The diagram of figure 2 is satisfactory in terms of the requirements for the design, as it shows several paths for the students to pursue, with possibilities for the students to work interdisciplinarily, to activate their initial praxeological

equipment, and potentially to develop new praxeologies in the field of differential equations and nervous physiology.

Results of the students writings

I will now present the outcomes of this teaching design. I will do so by presenting a well written report richly unfolding the intended praxeologies. After this I present a report written by a weak student only poorly unfolding the potentials of the design and finally I give some of the outcomes of the synopsis and oral exam.

As mentioned some of the students were able to realise these potentials and wrote mathematically rich and substantially bi-disciplinary reports. Figure 3 shows a tree diagram of the analysis of one of these reports in its final state. We can say a little about the process of the author of this report from what she wrote as spontaneous and intermediate responses to the generating question. Just after seeing the question, she noted that she needed to know something about the dosing of the drug in relation to the weight of a given person. She calls it the “strength” of the drug. And she needs to know something about how long the drug stays in the body, and refers to what she calls “the half-life of the drug”⁴. This she planned to use to find out how to relieve a patient from pain for a longer time period. This indicates that she believed from the start that the model involves an exponential function, without knowing anything else about this question.

Two weeks later (when again asked for her ideas on the generating question), this student also wants to know more about how paracetamol is functioning biologically, and she indicates that she needs more knowledge on mathematical modelling. This is what she is planning to study the next weeks. This indicates that she is narrowing down to more specific questions for her to answer.

The notion model or modeling in the students writings probably refer to the one the student encounters in her textbook and official documents for Danish high school, which is somehow close to the notion in mathematical competence theory (see Niss et al., 2002 and Blum & Fermi, 2009, p 46). However the approach to modeling in ATD is that it is the development of praxeologies in two domains answering a generating question.

In the text below several technical terms are used. They are translations of the notions the student used. Many of them comes from the biological field being modelled and therefore will not be explained further. As to differ questions formulated by the student from those she has adopted from the assignment handed out, the students’ questions and formulations are put into squared brackets.

⁴ She knows this notion from previous work on exponential function and from radio activity.

drug is transported in the case of orally dosing, how drug is transported in the case of intravenous dosing. The former is further explored by showing how the drug is absorbed in the body, how this process runs in the small intestine and how the drug is distributed in the body, which leads to a description of the biochemical conditions and mechanisms that are relevant for this problem, hence how substances are transported through cell membranes ($Q_{3,1}$, $Q_{3,2}$, $Q_{3,1,1,1}$, $Q_{3,1,2}$, $Q_{3,1,2,1}$ and $Q_{3,1,2,1,1}$). Finally the metabolism of paracetamol including the chemical reactions occurring and the elimination with the role of the kidneys and timescale of the process is presented ($Q_{3,1,3}$, $Q_{3,1,3,1}$, $Q_{3,1,4}$, $Q_{3,1,4,1}$ and $Q_{3,1,4,2}$). These questions and answers all represent pure biological praxeologies, which are found relevant in order to model the processes of dosing paracetamol along with the discussion of how should be used....

Next the student poses question number Q_4 : "How can the dosing be modelled mathematically based on the biological knowledge?". She finds the answer by looking at the form of the model in the case of intravenous dosing, how the proportionality between added amount of paracetamol and elimination can be

modelled, what can be described by the equation $\frac{dA}{dt} = -K.A$, the biological

interpretation of $-K$ with respect to the former treated questions ($Q_{4,1}$, $Q_{4,1,1}$, $Q_{4,1,1,1}$ and $Q_{4,1,1,1,1}$). These are all bidisciplinary praxeologies where the student alternates between using the established biological praxeologies in the construction and justification of a first order differential equation – a mathematical object. She ends this section by finding the complete solution using a CAS tool and showing by hand, that this solution actually solves the equation ($Q_{4,1,1,1,2}$ and $Q_{4,1,1,1,2,1}$). These two questions are identified as pure mathematical.

After treating the more simple case she looks at the oral case and performs the same praxeologies though taking into account that she needs to treat the two compartments separately and combine these results in one equation describing the entire system ($Q_{4,2}$, $Q_{4,2,1}$, $Q_{4,2,1,1}$, $Q_{4,2,1,1,2}$ and $Q_{4,2,2}$). She further argues how the added amount of paracetamol can be described by the solution to the differential equation of the stomach compartment and how the model incorporates the bioavailability ($Q_{4,2,2,1}$ and $Q_{4,2,2,2}$). Again, this is denoted bidisciplinary praxeologies. The student investigates what can be described by the equation:

$\frac{dA}{dt} = A.K_a.A^{stomach} - K.A$, finds the solution and argues that the model solves

the equation as in the simple case ($Q_{4,2,2,2,1}$, $Q_{4,2,2,2,1,1}$ and $Q_{4,2,2,2,1,1,1}$).

The student uses the two models to form functions describing the concentration of paracetamol in the blood, she gives all parameters numerical values and discusses both the mathematical and the biological interpretation of $K_a > K$ ($Q_{4,3}$, $Q_{4,3,1}$, $Q_{4,3,2}$,

$Q_{4,3,2,1}$ and $Q_{4,3,2,1,1}$). Finally she discusses the knowledge of the numeric versions of the functions and its graphical representation. From these representations she discusses the long term effects, high amount dosing and how patients can be relieved from their pain through multiple dosing and how this can be carried out repeated dosing with constant amount of paracetamol ($Q_{4,3,2,1,2}$, $Q_{4,3,2,1,2,1}$, $Q_{4,3,2,1,2,1,1}$, $Q_{4,3,2,1,2,1,1,1}$ and $Q_{4,3,2,1,2,1,1,1,1}$). The method of these praxeologies is mainly mathematical but constantly links to her knowledge in the biological field and she concludes on the biological issues from the mathematical models. Hence These praxeologies are regarded bidisciplinary. The student further notes that multiple dosing leads to a concentration alternating around a mean called steady state. She uses the mathematical models to determine steady state level and whereas the patient feel a constant relieve of pain when maximum recommended dose is given every 4 and 6 hours (the two standard time intervals) ($Q_{4,3,2,1,2,1,1,1,2}$, $Q_{4,3,2,1,2,1,1,1,2,1}$, $Q_{4,3,2,1,2,1,1,1,2,1,1}$, $Q_{4,3,2,1,2,1,1,1,2,1,1,1}$, $Q_{4,3,2,1,2,1,1,1,2,1,1,1,2}$ and $Q_{4,3,2,1,2,1,1,1,2,1,1,1,3}$). As the praxeologies just mentioned these are regarded bidisciplinary for the same reasons.

In the end the student compares the two ways of dosing the drug with respect the type of pain it is supposed to relieve. This is done by a comparing the concentration profiles, discussing similarities and differences (Q_5 , $Q_{5,1}$, $Q_{5,1,1}$, $Q_{5,1,2}$ and $Q_{5,1,1,1}$). These praxeologies are likewise bidisciplinary since biological results are based on mathematical models treated by mathematical tools. The treatment of Q_5 ends in a further investigation of intravenous dosing, as to what kind of situations and what kind of lack in health condition among patients calls for this kind of dosing ($Q_{5,2}$, $Q_{5,2,1,1}$, $Q_{5,2,1,2}$ and $Q_{5,2,1,2,1}$). These praxeologies are mainly biological. They discusses some of the results showed in the graphical representations of the concentration function, but it is only treated in a biological context. The last two biological praxeologies performed are examining the relation between concentration functions and the recommendations on the painkiller packages and further discusses whether the functions implies a change of recommendations ($Q_{5,3}$ and $Q_{5,3,1}$).

After this the students returns to the models and functions she has created discussing the limitations of these ($Q_{4,4}$ – the choice of numbering reflects praxeologies relation the rest of the SRP and not the chronology of the report). She starts by discussing in general terms the meaning of modelling the real world, then she turns to biological conditions effecting absorption, bioavailability and the pharmacokinetics in general due to the patient being pregnant, a child or elderly. This is supported by listing the consequences of taking other drugs, eating, vomiting or having diarrhea while taking paracetamol ($Q_{4,4,1}$, $Q_{4,4,2}$, $Q_{4,4,2,1}$, $Q_{4,4,2,2}$, $Q_{4,4,3}$, $Q_{4,4,3,1}$, $Q_{4,4,3,2}$, $Q_{4,4,4}$, $Q_{4,4,4,1}$, $Q_{4,4,4,2}$ and $Q_{4,4,4,3}$). These praxeologies are mainly biological though they are all used in a critique of the models created by the student.

As indicated, the path starting from Q_4 is mainly treating the mathematical organisation. The answers are constantly referring to the biological field which is being modelled. Still the student uses pure mathematical praxeologies such as $Q_{4,1,1,1,2}$ and $Q_{4,1,1,1,2,1}$. These praxeologies are examples of intended mathematical praxeologies which the student has developed working with this specific SRP.

Comparing figure 2 and 3 it is obvious that the student has followed most of the intended path and even added necessary details in order to answer the question in a satisfying manner. The student also adds branches not intended such as $Q_{4,3,2,1,2,1,1,1,2}$, where she treats the notion of steady state concentration both mathematically and biologically.

The student asks three questions during the writing process and they concern her critique of the mathematical models – she lists 3 points and asks if they are reasonable – the notion of deposit medication and how it is interpreted and finally she asks if she can put her mathematical calculations in appendix due to many pages of text. This means that her study of the sources is done without help from the teachers and the tree diagram is showing her working process with the SRP. This diagram and others like it (based on other student reports) show that it is possible to create bidisciplinary assignments on the basis of SRP that function well for some students.

Rich outcomes were found in other reports as well. Students normally having difficulties working on the theoretical level engaged themselves in the SRP and managed to develop arguments on how to model the transportation of a drug in the vein. One student explains that when you are modelling the change of the amount of drug in the vein, differential equations are suitable since they model how fast something changes. In a particular case she needs to know how much drug is added and how fast it eliminates from the vein. From this she presents the model, with the factors representing added and eliminated amount of drug. This student is normally quick at solving simple standard tasks, but she rarely argues precisely at the theoretical level. The reason for the change in the setting of the SRP could be that the student consulted classmates and was inspired by their work. Another reason could be that the entire assignment makes it obvious for her that she needs to justify her model explicitly – it is not possible to answer the questions “mechanically”.

The students having difficulties to engage seriously with the SRP were those who generally find mathematics and biology hard. Some of those students did not find the topic interesting. They were able to solve simple questions involving simple praxeologies. Some of them did not succeed to combine mathematical and biological praxeologies, these students mainly referring the source (Jonsdóttir et al., 2009) and some textbooks on the biological topic. When they were supposed to interpret the models, they would invent two persons in order to compare the

Q_{1,4} – nothing new is added to the text book presentation of the notions of absorption, distribution, metabolism and elimination. Only once the student combines two answers (Q_{1,3,1} and Q_{1,4,1,1} on how the kidneys contribute to the elimination of the drug). The rest of the report had a parallel structure, which indicates that the student was not able to combine the different answers to subquestions. The teacher proposed, as an explanation, that this student is often doing her work in last minute, and so she did not see how much effort she had to invest to properly answer the questions. This suggests that working with SRP requires adaptation through more than one experience, at least for some students.

Other students simply were not able to see the relevance of mathematics in the response to the generating question. An example is a student who answer the question on modelling by citing the handout without commenting or using the model. This indicates that the student only sees this question as a way to add mathematics to the report or project, but not as something necessary from the theoretical point of view. She spends several pages on drug development⁵ and obviously finds this interesting. Maybe she did not have enough time for the mathematical part because she spent her time on what she found most interesting. This student usually was able to combine simple praxeologies but was not theoretically strong. This supports the hypothesis that the student did not see the need of mathematics to answer the generating question. How to deal with this concern will be discussed later.

Outcomes of the synopses and oral exam

To begin with, the focus was put on the reports, but interesting findings occurred during the students' work with synopses and at the oral exam. The students who did well on the reports were still performing well in the synopsis and at the oral exam. Some students who made acceptable reports were able to improve their work after the written feedback. As mentioned earlier I did not get equivalently systematic evidence from this part of the students' work. The findings presented below are therefore simple and tentative descriptions of student work in this phase.

One of the most interesting observations occurred with a student who had made a nice report using differential equations and explaining them using knowledge from biology. When asked to place the case of using paracetamol in a broader context she did an Internet search and found articles written by Danish researchers on the use of the drug during pregnancy. The article discussed whether there was a significant amount of degeneration of the genitals of baby boys when the mothers

⁵ As part of the teaching the class visited Faculty of Pharmaceutical Sciences at University of Copenhagen to learn about drug development research and how drugs are distributed and functioning in the body.

had taken paracetamol during pregnancy. The result was not clear and in fact there is no recommendation against the drug during pregnancy today. The article gave the numbers of women tested, the expected percentage of degenerations and the actual number of boys born with these problems. The researchers used a statistical test with level of significance at 5 %. The student did not know the particular type test therefor she performed a χ^2 -test instead, which gave a p-value just above the level of significance. She used this in a discussion of the recommendations on whether the drug should be available outside pharmacies. She further referred to articles found in journals and on the Internet. This study was very surprising for both teachers. They did not know the relation to pregnancy nor had χ^2 -test been part of the intended mathematical praxeologies for the SRP, but it was a tool the student knew from classes and put to use in a new context. This is a nice example of a potential of SRP: “that the contents learnt [...] have not been planned in advance” (Chevallard, 2012, p. 7).

The student who did the report represented in Figure 3 continued her work on the effect of paracetamol in the brain and the nervous system. She was able to explain how new ideas could be modelled and tested, as she focused on the problematique of mentally ill people whose abuse of paracetamol cause long-term damages. She discussed this in relation to question of the drug being sold legally outside pharmacies.

The results mentioned above from the oral exam are examples of students combining the study of works of others combined with an autonomous treatment of results. In this sense a more general aim for the SRP was reached. On the other hand, the students who handed in poorer reports were not able to improve for the synopsis and did not perform well at the oral exam either. There remains, thus, a considerable challenge in making this SRP successful for all students.

Discussion

Many students engaged in a real study process, to find answers on their own rather than just citing the works of others, which on the other hand seems to be the pitfall for other students. The real world problem seems to motivate the students for an inquiry where they can use and combine their previous knowledge and experience from both mathematics and biology.

The SRP enables most students to make the two disciplines interact. As already said it is crucial to choose a strong generating question that engages the students to develop the intended praxeologies, and the quality of this choice could secure the possibility of actual interdisciplinary work. This means that a thorough *a priori* analysis must be the starting point of all bidisciplinary SRP designs since the interaction between disciplines is clearly not obvious or automatic.

But there are still issues to deal with if SRP should be successful for all students. The interplay between the two disciplines was weak or absent in the work of some students. These students fail to see the need of one discipline (primarily mathematics) or were not able to realise it in the given setting. Probably it requires more directions, by way of concise questions in both disciplines, to secure that students develop new intended praxeologies. This was seen in the report written by the student focusing on drug development as well as the report depicted in Figure 4. The big question is how to detect and treat these obstacles while creating the design. This relates to the *a priori* analysis of the SRP designs and to a more theoretical study of the possible interplays of mathematics and biology. Is it sufficient that two teachers (representing each discipline) formulate the design? or is it necessary for the teachers to do an analysis of the didactic transposition (e.g. see Bosch & Gascón, 2006, pp. 55) of the interplay of the involved scientific disciplines in order to identify interdisciplinary praxeologies combining the school disciplines? What are the scientific interactions between biology and mathematics and how can they be transposed to interactions between the secondary school subjects? To identify bidisciplinary praxeologies and what questions they answer we need to know more about what a biological praxeology is (and more generally, what are praxeologies in the natural sciences). This is formulated by Mortensen (2011) and Madsen & Winsløw (2009) but in other contexts.

Another approach to bidisciplinarity is found by Hansen (2009, p. 35) who suggests that what constitutes a discipline (as well as interdisciplinary praxeologies) is the methods of the disciplines used in the particular praxeology together with the objects of knowledge. This means that in order to formulate more concise questions, it is needed to identify the methods of mathematics and biology respectively as well as the relevant objects of knowledge. From this one can form the didactic transposition of the bidisciplinary knowledge, which can be used in a reference model for the SRP while carrying out the *a priori* analysis. In this way one might be able to create the more concise bidisciplinary questions which seem to be needed by some students.

The general hypothesis is that after identifying the possible interdisciplinary praxeologies, one will be able to formulate more exact questions which allow students to see the need of combining the two disciplines, and to develop more precise and complete answers. Also, by focusing on the interplay between the disciplines we might be able to make the students develop new monodisciplinary (e.g. mathematical) praxeologies.

Another concern regarding the students who wrote the poor reports is if the generating question hinders their engagement. It is obvious it is almost impossible to find generating questions which everybody finds equally exiting. Maybe the question seemed too vague compared to what they are used to. This obstacle can be

handled using SRP in every day teaching so the students know the concept and what is required of them.

Knowing how students generate these new or derived questions would certainly be another way to overcome this challenge formulating good generating questions. It is an open problem in ATD. It is assumed that if posed a generating question within reach of the students existing praxeological equipment they are able to consult relevant medias – or in this study they know, that they need to study more advanced differential equations or exponential models. Therefor they consult medias on these topics and from the media pose new more concrete questions. It is assumed if the generating question is more guided in order to secure the student develop certain praxeologies, some of the potentials of the design and inquiry process disappear. This is also discussed in relation to inquiry in (Artigue & Blomhøj, 2013, 806). Further study in this matter could be interesting to pursue.

Some of the difficulties among the weak students might have been avoided, if the external conditions and constraints had been different. In the study of Barquero, Bosch and Gascón (2007) and Thrane (2009) the procedure of carrying out the SRP is that students share their findings. They present their findings and discuss academically what path tends to be the most promising one, and then everybody follows it. These sequences secure that no one remains stuck, with no ideas of how to progress. There are several reasons for organising the SRP process this way. When the student argues that one praxeology is a better or more general solution to a certain task they learn the scope and limitations of each praxeology, which helps them developing the intended knowledge.

The reason for not creating these sessions during the testing of the teaching design was that the requirements set by the institutional frame prescribed that the project should not use mathematics or biology lessons for the work. The students were supposed to work autonomously or in groups of two – not as a whole class together. This condition makes sense since they are supposed to get training for their final autonomous project. But the students did actually meet after classes to discuss their findings. This process seemed fruitful. Still some of the students who needed it the most did not attend. Because of this one could argue for a loosening of the constraints so that it is allowed for the teacher to organise such sessions and to guide the debate. If the students engaged themselves in this process one could argue that they still work autonomously – just in a more collective manner.

A final point: for the bidisciplinary assignments to function, the teachers must engage themselves in what could be called a bidisciplinary SRP for themselves as well. It is not evident that both teachers know the knowledge field of the other discipline. Therefore, in order to form questions concerning the interplay between the disciplines, the teachers must study a certain amount of the other discipline. For an academically trained person, this task is reasonable and crucial for the SRP to

function as bidisciplinary assignment. The gained knowledge should be used to perform the *a priori* analysis and reveal the possibilities and limitations of the two disciplines in treating a given problematique or generating question.

Conclusion

The experiment and open issues with the SRP design showed clear evidence for the advantages of using SRP as a model for designing bidisciplinary assignments. The *a priori* analysis secures that the possible paths of inquiry are connected in the sense that the disciplines are interacting – not just in theory but also in reality. The reports the students handed in substantiated this finding since most students actually pursued the intended paths and even identified new directions, corresponding to substantial new derived questions. The students even succeeded in giving more detailed arguments and rich mathematical sections of their reports. Still the format of an academic-like autonomous written report is a difficult task for the students, therefor it is suggested that students encounter these types of reports more often in order to deliver rich and detailed documentation for their inquiry process, which these SRP's represents.

The experiment also showed that the teachers must be prepared to engage themselves in a SRP as well. For the teacher to carry out the *a priori* analysis she must cross disciplinary boundaries in order to see possibilities and pitfalls in the SRP design. The teachers must do the inquiry of the bidisciplinary field before formulating the assignment. Though it should be noted that boundaries between mathematics and biology are historical and evolving constructions that do not have to be taken from granted outside school institutions – nor in the praxeological analysis done here in the case of mathematical questions extended to biological phenomena treated in the SRP.

Moreover the tree diagrams shows to be a strong tool for depicting the praxeologies presented in the reports as the result of the discourse analysis. This diagram compared with the one from the *a priori* analysis gives a more clear view to what extend the intended praxeologies are present in students work. Concretely the two presented tree diagrams show two very different reports. It could be a question for further study to what extend the tree diagrams can be direct indicators for the richness of students writings.

The experiment suggests that some of the conditions for carrying out this particular design were not to the advantage of all students. The fact that almost all work on the SRP was placed outside school, and the lack of debate on particular paths to take during the inquiry, were problematic to some students. On the other hand many students were successful in engaging themselves with the SRP.

The experiment finally revealed questions for further inquiry. It is still an unresolved task to formulate bidisciplinary questions which all students see as such. Moreover the notion of bidisciplinary praxeology needs further exploration in terms of how to define and identify them, and in terms of their role for students' success with monodisciplinary praxeologies. Further it is suggested that in order to carry out a sufficient a priori analysis it would be enriching to formulate an reference epistemological model as described in the didactic transposition. It is supposed that this could enlighten some disconnection regarding the students inability to see the full need of mathematics in their answer to the generating question.

References

- Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education* 45, 797-810.
- Barquero, B., Bosch, M. & Gascón J. (2007). Using research and study courses for teaching mathematical modelling at university level. In D. Pitta-Pantazi, & G. Pilippou (Ed.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2050-2059). Larnaca: University of Cyprus.
- Bosch, M. & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, 58, 51-65.
- Blum, W. and Fermi, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application* 1(1), 45-58.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Reserches en Didactique des Mathematiques* 19 , 221-229.
- Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In Bosch, M. (Ed.), *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Barcelona: FUNDEMI IQS. (pp. 21-30).
- Chevallard, Y. (2012). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an ancoming counterparadigm. Paper presented at the 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea. Retrieved from http://www.icme12.org/upload/submission/1985_F.pdf
- Czerniak, C. M., Weber, W. B., Sandmann, A., & Ahern, J. (1999). A literature review of science and mathematics integration. *School Science and Mathematics*, 99(8), 421-430.
- Davison, D. M., Miller, K. W., & Metheny, D. L. (1995). What does integration of science and mathematics really mean?. *School science and mathematics*, 95(5), 226-230.

Hansen, B. (2009). *Didaktik på tværs af matematik og historie – en prakseologisk undersøgelse af de gymnasiale studieretningsprojekter*. Retrieved from <http://www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/studenterserie10/>

Hansen, B. & Winsløw, C. (2011). Research and study diagrams as an analytic tool: The case of bi-disciplinary projects combining mathematics and history. In M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage & M. Languier (Eds.), *Un panorama de TAD* (pp. 685-694). *CRM Documents 10*. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica.

Jónsdóttir, A. H., Klim, S., Mortensen, S. & Madsen, H. (2009). Matematik i medicinudviklingen. In Hansen, C. B., Hansen, P. C., Hansen, V. L. & Andersen, M.M. (Eds.), *Matematiske horisonter*, (pp. 116-132). Retrieved from http://www.imm.dtu.dk/upload/institutter/imm/nyheder/matematiskehorisonter_lo_w_update-jan2011.pdf

Madsen, L. & Winsløw C. (2009). Relations between teaching and research in physical geography and mathematics at research- intensive universities. *International Journal of Science and Mathematics Education* 7, 741-763.

Mortensen, M. F. (2011). Analysis of the educational potential of a science museum learning environment: Visitors' experience with and understanding of an immersion exhibit. *International Journal of Science Education* 33, 517-545.

Niss, M., Højgaard Jensen, T., Bai Andersen, T., Wåhlin Andersen, R., Christoffersen, T., Damgaard, S., Gustavsen, T., Jess, K., Lange, J., Lindenskov, L., Bonné Meyer, M. and Nissen, K. (2002). *Kompetencer og matematiklæring - Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Copenhagen: Undervisningsministeriet. Online English translation available on http://pure.au.dk/portal/files/41669781/THJ11_MN_KOM_in_english.pdf.

Thrane, T. (2009). *Design og test af RSC-forløb om vektorfunktioner og bevægelse*. Retrieved from <http://www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/studenterserie12/>

Winsløw, C., Matheron, Y. & Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactics. *Educational Studies in Mathematics* 83, 267-284.

Winsløw, C. (2011). Anthropological theory of didactic phenomena: Some examples and principles of its use in the study of mathematics education. In M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage & M. Languier (Eds.), *Un panorama de TAD* (pp. 117-138). *CRM Documents 10*. Bellaterra (Barcelona): Centre de Recerca Matemàtica

Britta Eyrych JESSEN < britta.jessen@ind.ku.dk >

Department of Science Education,
University of Copenhagen and Frederiksborg Gymnasium & HF.

Appendix A

The entire report treats the questions listed chronologically in Appendix A. The question numbers refer to those of figure 3:

- Q₁: How is pain registered?
- Q_{1,1}: “What are diffuse pains and how are they registered?”
- Q_{1,2}: What are acute pains and how are they registered?
- Q₂: How does paracetamol relieve pain (pharmacodynamic)?
- Q_{2,1}: How does paracetamol relieve pain relative to the amount of dose?
- Q_{2,2}: How does paracetamol relieve diffuse pain?
- Q_{2,1,1}: What is known about the effect of paracetamol on the nervous system?
- Q_{2,1,1,1}: What is known about paracetamol in general?
- Q₃: How is paracetamol transported through the body (pharmacokinetics)?
- Q_{3,1}: How is the drug transported in the case of orally dosing?
- Q_{3,2}: How is the drug transported in the case of intravenous dosing?
- Q_{3,1,1}: How is the drug absorbed in the body?
- Q_{3,1,1,1}: How does this process function in the small intestine?
- Q_{3,1,2}: How is the drug distributed in the body?
- Q_{3,1,2,1}: What biochemical conditions and mechanisms are relevant for this process?
- Q_{3,1,2,1,1}: How are substances transported through cell membranes?
- Q_{3,1,3}: How is paracetamol metabolized?
- Q_{3,1,3,1}: Which chemical reactions occur during the metabolism of paracetamol?
- Q_{3,1,4}: How is paracetamol eliminated in the body?
- Q_{3,1,4,1}: What is the role of the kidneys, with respect to the metabolites?
- Q_{3,1,4,2}: What is the timescale or half-life of paracetamol in the body?
- Q₄: How can the dosing be modelled mathematically based on the biological knowledge? Q_{4,1}: What does the model look like in the case of intravenous dosing?
- Q_{4,1,1}: How can the proportionality between added amount of paracetamol and the elimination be modeled?
- Q_{4,1,1,1}: What is described in by the equation $\frac{dA}{dt} = -k \cdot A$?
- Q_{4,1,1,1,1}: What is the biological interpretation of $-k$?
- Q_{4,1,1,1,2}: What is the complete solution to the differential equation?
- Q_{4,1,1,1,2,1}: How can one check the validity of a given solution?
- Q_{4,2}: What does the model look like in the case of oral dosing with a two-compartment system?
- Q_{4,2,1}: How can the stomach compartment be modeled?
- Q_{4,2,1,1}: What is described by the equation $\frac{dA^{mave}}{dt} = -k_a \cdot A^{mave}$?
- Q_{4,2,1,1,1}: What is described by $-k_a$?
- Q_{4,2,1,1,2}: What is the solution to the differential equation?

Q_{4,2,2}: How can the dosing be modeled from the perspective of the vein compartment?

Q_{4,2,2,1}: How can it be argued that the added amount of paracetamol can be described by the solution to the differential equation of the stomach compartment?

Q_{4,2,2,2}: How is the bioavailability incorporated in the model?

Q_{4,2,2,2,1}: What is described by the equation: $\frac{dA}{dt} = F \cdot k_a \cdot A^{mave} - k \cdot A$?

Q_{4,2,2,2,1,1}: What is the complete solution to the differential equation?

Q_{4,2,2,2,1,1,1}: How can one check the validity of a given solution?

Q_{4,3}: How can the concentration of paracetamol in the blood be modeled?

Q_{4,3,1}: How does this look in the case of intravenous dosing?

Q_{4,3,2}: How does this look in the case of oral dosing?

Q_{4,3,2,1}: What numbers are reasonable for the constants: K, F, F_a and V?

Q_{4,3,2,1,1}: What is the biological interpretation of K_a>K?

Q_{4,3,2,1,2}: What function describes the concentration?

Q_{4,3,2,1,2,1}: How does the function look graphically?

Q_{4,3,2,1,2,1,1}: How can the concentration be interpreted in relation to long time effect and high amount of paracetamol?

Q_{4,3,2,1,2,1,1,1}: How can a patient be relieved from his pain due to multiple dosing?

Q_{4,3,2,1,2,1,1,1,1}: How can this be carried out sequentially with constant amount of paracetamol?

Q_{4,3,2,1,2,1,1,1,2}: What is steady state?

Q_{4,3,2,1,2,1,1,1,2,1}: When and how is this state reached?

Q_{4,3,2,1,2,1,1,1,2,1,1}: What is concentration at steady state?

Q_{4,3,2,1,2,1,1,1,2,1,1,1}: In which cases are the amount of dose 1000mg every 4 hours?

Q_{4,3,2,1,2,1,1,1,2,1,1,2}: In which cases are the amount of dose 1000mg every 6 hours?

Q_{4,3,2,1,2,1,1,1,2,1,1,3}: Which function is modeling multiple dosing?

Q₅: When and why is orally and intravenous dosing used respectively?

Q_{5,1}: How can the two concentration profiles be compared?

Q_{5,1,1}: When do the two profiles reach their maximum concentrations?

Q_{5,1,2}: When does the effect of paracetamol die out?

Q_{5,1,1,1}: When is there an effective difference between the two forms of dosing?

Q_{5,2}: When is intravenous dosing preferable?

Q_{5,2,1,1}: In which cases will time be the determining factor for choosing intravenous dosing?

Q_{5,2,1,2}: Under what health conditions are the intravenous dosing preferable?

Q_{5,2,1,2,1}: What kind of conditions of the stomach makes the intravenous dosing preferable?

Q_{5,3}: What is the dosing profiles telling about the dosing of paracetamol compared to the recommendations on the painkiller packages?

Q_{5,3,1}: How should paracetamol be dosed according to the profiles?

- Q_{4,4}: What biological factors are disregarded in the mathematic models?
- Q_{4,4,1}: What is the relation between a (mathematical) model and the real world?
- Q_{4,4,2}: What other biological factors affect the absorption K_a ?
- Q_{4,4,2,1}: What effect causes other drugs taken a long with paracetamol?
- Q_{4,4,2,2}: What effects are caused by eating while taking paracetamol?
- Q_{4,4,3}: What factors can effect the bioavailability?
- Q_{4,4,3,1}: What are the consequences of vomiting?
- Q_{4,4,3,2}: What are the consequences of diarrhea?
- Q_{4,4,4}: What other factors affect the pharmacokinetics?
- Q_{4,4,4,1}: What effects are caused by pregnancy?
- Q_{4,4,4,2}: What effects are due to the person being a child?
- Q_{4,4,4,3}: What effects are due to the person being elderly?

OSIEL RAMÍREZ-SANDOVAL, CÉSAR F. ROMERO-FÉLIX, ASUMAN OKTAÇ

COORDINACIÓN DE REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA EN EL USO DE TRANSFORMACIONES LINEALES EN EL PLANO

Abstract. Coordinating semiotic registers in the use of linear map in the plane. This paper presents an analysis of interviews with college students, which includes various situations involving the concept of linear map. Our goal is to analyze the coordination of registers by students and their relationship to the success and efficiency to solve the given situations. To clarify the concept of coordination of registers, we describe successful cases of coordination and various ways in which this coordination is not achieved, with analysis of possible sources causing non-coordination, for example the confusion of registers. To achieve meaningful analysis, we study the representations used by students, as well their verbal explanations, segmented into interpretable units. We include a discussion through examples about the notion of *mixing registers*.

Résumé. Coordination des registres de représentation sémiotique des transformations linéaires du plan. Ce document présente les résultats d'une analyse d'entretien avec les étudiants de premier cycle en mathématiques à propos de diverses situations impliquant la notion de transformation linéaire. Le but est d'analyser la coordination des registres par les étudiants et sa relation à la réussite et l'efficacité pour la résolution. Afin de clarifier la notion de coordination des registres, sont présentées des descriptions de cas réussis de coordination ainsi que de diverses façons non couronnées de succès, avec l'analyse des causes possibles de non-coordination, tel le mélange de registres. Pour réaliser une analyse significative, nous étudions les représentations utilisées par les étudiants ainsi que leurs explications orales, segmentées en unités interprétables. Est incluse une discussion sur la notion de *mélange de registres* appuyée par des exemples.

Mots-clés. Algèbre linéaire, transformation linéaire, registres de représentation sémiotique, coordination de registres, mélange de registres.

Resumen. El presente artículo muestra resultados de un análisis de una entrevista realizada a estudiantes de Licenciatura en Matemáticas que incluye diversas situaciones que involucran el concepto de Transformación Lineal. Con este análisis se pretende analizar la coordinación de registros por parte de los estudiantes y su relación con el éxito y eficiencia al resolver las situaciones planteadas. Para aclarar el concepto de coordinación de registros se presentan descripciones de casos exitosos de coordinación y de diversas formas en que no se logra ésta, analizando posibles fuentes que provocan la no coordinación como es el caso de la mezcla de registros. Para lograr un análisis significativo, se estudian las representaciones utilizadas por los estudiantes, así como sus explicaciones verbales, segmentadas en unidades interpretables. Se incluye una discusión a través de ejemplos, sobre la noción de *mezcla de registros*.

1. Objetivos de Investigación y Antecedentes

Como Dorier y Sierpinska (2001) señalan "[el] Álgebra Lineal es un tema cognitivamente y conceptualmente difícil" (p. 256). Hay varios factores que influyen en esta dificultad, entre ellos la diversidad de registros empleados y sus interpretaciones.

La presente investigación toma como marco de referencia a la teoría de registros de representación semiótica elaborada por Duval (1993, 1999, 2008) y centra su atención en el concepto de Transformación Lineal, con el objetivo de explicar la relación que guarda la coordinación de registros con el éxito al resolver situaciones matemáticas que involucran a dicho concepto, partiendo de la identificación de los registros que usaron los estudiantes y las conversiones que lograron. Por otro lado, se pretende contribuir al debate sobre los registros de representación que se emplean en Álgebra Lineal, señalando discrepancias entre las interpretaciones existentes y ofreciendo nuestro punto de vista. Aunque no fue un objetivo propuesto al iniciar la investigación, se ofrece una discusión respecto a la noción de mezcla de registros, como resultado de la interpretación de las producciones de los estudiantes.

Existen investigaciones sobre el concepto Transformación Lineal bajo diversos enfoques. Roa-Fuentes y Oktaç (2010) describen dos posibles maneras de construir el concepto; Soto, Romero e Ibarra (2012) analizan la eficacia de una propuesta que parte de un acercamiento gráfico al concepto de transformación lineal, mismo que puede ser útil para crear una base de significación más concreta, antes de presentar su versión más abstracta; Ramírez y Oktaç (2012) reportan que las concepciones de varios estudiantes pueden reducirse a considerar sólo a las transformaciones lineales prototipo; Dreyfus, Hillel y Sierpinska (1999) analizan las concepciones que pueden desarrollar los estudiantes de la transformación en un ambiente de geometría dinámica.

El enfoque del presente trabajo está en la coordinación de los diversos sistemas de representación que emplean los estudiantes para dar solución a problemas de matemáticas que involucran el concepto de Transformación Lineal, sin negar que la complejidad intrínseca del concepto juega un papel importante en su aprendizaje. Según Duval (1999) "la ausencia de coordinación entre los diferentes registros produce con mucha frecuencia un handicap para los aprendizajes conceptuales" (p. 30). Esta coordinación implica realizar conversiones entre registros, lo cual generalmente no es trivial ni espontáneo porque se necesitan de diversos recursos como: la identificación de las unidades significantes del registro de partida y llegada, la diferenciación entre representado y representante, y la identificación de los registros. De no llevarse a cabo la coordinación entre los registros, la comprensión conceptual de este tópico podría converger tarde o temprano a un fracaso.

El artículo se divide en seis apartados, iniciando con esta introducción para dar paso a los aspectos metodológicos en el apartado dos. Posteriormente en la sección tres se proporciona información sobre los actores involucrados en el curso de álgebra lineal que se observó y del cual se seleccionaron a los estudiantes participantes en la entrevista, continuando con el apartado cuatro donde se muestran los elementos teóricos que sustentan la presente investigación; incluyendo nuestra interpretación del concepto de coordinación de registros, que es empleada en el análisis de la entrevista presentado en la sección cinco. Finalmente se reportan las conclusiones de la investigación, proponiendo una serie de reflexiones que invitan al debate y a realizar futuras investigaciones.

2. Aspectos Metodológicos

La presente investigación se apoya en las consideraciones metodológicas hechas por Duval (2008), para investigaciones con un enfoque semiótico, partiendo de que no es suficiente analizar sólo las producciones de los estudiantes:

En primer lugar, lo principal es no confundir dos cuestiones. Una se refiere a la identificación de las variables que determinan el desarrollo de la comprensión en matemáticas. La otra se refiere al análisis e interpretación de las producciones de los alumnos que se adquieren sea en las aulas, sea a través de la observación individual, o bien a través de experimentos. La primera es con mucha frecuencia ignorada o reducida a la segunda, y, sin embargo, es crucial porque se trata de un modelo del funcionamiento del pensamiento matemático. (p. 56)

Apelando a estas consideraciones, en la presente investigación se identificaron las variables que denotan la comprensión y uso del concepto de Transformación Lineal. Para ello se realizó una descripción de los posibles registros a emplear por los estudiantes, abarcando sus reglas de formación, características de los tratamientos y conversiones, y relaciones entre algunos de estos registros (ver sección 4.2).

Duval (2008) comenta que una aproximación semiótica permite describir al menos un procedimiento de análisis, el cual se compone de tres etapas:

- (1) Las observaciones se realizan en el contexto de un problema; es esencial empezar por hacer el mapa representacional de todo el campo de trabajo de representaciones... en el que la búsqueda de la solución puede ser gestionada por los estudiantes. Esto no depende de lo que los estudiantes han hecho, sino de lo que se les proporciona o lo que se espera de ellos.
- (2) Este campo de trabajo es una herramienta para dividir la producción de cada estudiante en segmentos o unidades interpretables en función de:

- los pasajes que él / ella hace o no hace ... entre los diferentes registros de representación
 - el registro elegido por el alumno para realizar un tratamiento.
- (3) Por último, sobre esta base, una comparación verificable puede llevarse a cabo entre las distintas producciones conseguidas. Naturalmente, esta comparación puede estar correlacionada con el nivel de habilidades matemáticas, sin confundirse con ellas. Y, esta comparación se puede extender también a las producciones conseguidas durante largos períodos de tiempo, con el fin de observar si la comprensión evoluciona en profundidad o no. (p. 57)

Para los fines de la presente investigación, estas etapas se interpretan de la siguiente manera: En la primera se realizó la descripción de los registros y sus relaciones, así como un análisis a priori de cada actividad. El segundo momento corresponde a segmentar la producción de los estudiantes en situaciones de coordinación y no coordinación. En la etapa final se analizaron las producciones de los estudiantes buscando relaciones entre la coordinación y el éxito al resolver las situaciones.

3. Tratamiento Didáctico

Con base en los señalamientos metodológicos se hizo una revisión del acercamiento de los libros de texto empleados en el curso, se identificó el perfil del profesor y se realizó la observación en clases durante un semestre. Al final de éste se realizó un estudio piloto, aplicando una secuencia de actividades que involucraba el concepto de Transformación Lineal en los registros algebraico, matricial y gráfico, propiciando conversiones entre ellos. De los resultados obtenidos de esta aplicación, de los productos entregados durante el curso y del desempeño de los estudiantes en el curso, se seleccionó a cinco estudiantes, cuidando que se tuviera una muestra heterogénea de los integrantes del grupo, para realizarles posteriormente una entrevista individual.

La investigación se apoyó en un curso de Álgebra Lineal que se ofreció en una universidad pública en México. Los estudiantes cursaban el segundo semestre en una carrera de Licenciatura en Matemáticas. Con la intención de observar el tipo de ejemplos, ejercicios y registros que se emplearon en el curso, nos apoyamos en la filmación y toma de notas en las sesiones.

El curso tomó como base la noción de sistema de ecuaciones; se avanzaba explorando las características de otros conceptos como: matrices, espacios vectoriales, subespacios, bases y dimensión, entre otros, para posteriormente redefinirlos de manera formal, demostrando algunos teoremas y aplicándolos a ejemplos vistos e integrándoles nuevos elementos de otros conceptos. Los libros de texto en el curso fueron los siguientes: Hoffman y Kunze (1973) que presenta un

enfoque teórico; Poole (2007) y Grossman (2008) que ofrecen una perspectiva orientada a las aplicaciones. Lejos de que esta diversidad fuese un inconveniente, ofrece una oportunidad de ver diferentes ejercicios que el profesor previamente seleccionaba para su concatenación. El profesor que impartió el curso, tiene el grado de Doctor en Matemáticas, cuenta con una trayectoria de catorce años de docencia, y ha impartido durante este periodo de manera intermitente el curso de Álgebra Lineal.

4. La Teoría de Registros de Representación Semiótica

En este apartado señalamos brevemente algunos de los elementos que componen la teoría de registros de representación semiótica, en los que nos apoyamos en la investigación presentada en este artículo.

4.1. Registro de Representación Semiótica

Duval (1993) manifiesta que las representaciones semióticas son producciones constituidas por el empleo de signos que pertenecen a un sistema de representación, el cual tiene sus propios constreñimientos de significancia y de funcionamiento. Para ello, resumiendo la definición de Duval (1993), un sistema de signos puede ser un **registro de representación**, si permite las tres actividades cognitivas relacionadas con la semiosis:

1. La formación de una representación identificable.
2. El tratamiento de una representación.
3. La conversión de una representación a otra.

Acerca de la tercera actividad, Duval (2006) comenta que “es más compleja que el tratamiento porque cualquier cambio de registro requiere primero del reconocimiento del mismo objeto entre dos representaciones cuyos contenidos tienen muy seguido nada en común” (p. 112). Más precisamente, es común que dos representaciones de un mismo objeto en distintos registros no sean congruentes. La congruencia de representaciones está determinada por las siguientes “tres condiciones: correspondencia semántica entre las unidades significantes que las constituyen, igual orden posible de aprehensión de estas unidades en las dos representaciones, y convertir una unidad significativa en la representación de salida en una sola unidad significativa en la representación de llegada” (Duval 1999, p. 6), siendo las unidades significantes las partes en que se puede descomponer una representación.

Es importante señalar que cuando se tiene congruencia entre dos representaciones en un sentido, no necesariamente se va a tener congruencia en el otro sentido de la conversión. Asimismo se pueden cumplir parcialmente, en diferente medida, los tres criterios de congruencia lo cual nos permite comparar la congruencia entre

distintas representaciones y hablar de representaciones más o menos congruentes. Por otro lado, cuando dos representaciones son congruentes se facilita la actividad de conversión, logrando en algunos casos que ésta sea realizada de manera instantánea como una traducción o sustitución, cosa que no es posible para la mayoría de las representaciones.

Sin embargo, Duval (1993) advierte que no se debe confundir a la conversión con dos actividades que le son próximas: la codificación y la interpretación. La importancia de estas distinciones es que la conversión, en general, no puede ser reducida a una codificación o interpretación, aunque haya casos particulares de conversiones triviales.

Lo que uno llama generalmente «interpretación» requiere de un cambio de marco teórico, o de un cambio de contexto. Ese cambio no implica un cambio de registro, sino que con frecuencia moviliza analogías.

El «código» es la «transcripción» de una representación en otro sistema semiótico distinto de aquél donde está dada. (p. 179)

Diversos conceptos en Álgebra Lineal como por ejemplo sistemas de ecuaciones, dependencia e independencia lineal, transformaciones lineales al trabajarlos en R^2 o R^3 , pueden representarse en por lo menos tres registros. Uno de los objetivos de la presente investigación es identificar los que emplearon los estudiantes entrevistados y las conversiones que realizaron entre ellos.

4.2. Coordinación de Registros de Representación Semiótica

Se ha hecho énfasis en que un concepto matemático se puede representar bajo diferentes formas semióticas, sin embargo se reporta que la complejidad de utilizar varios registros genera obstáculos para el aprendizaje del Álgebra Lineal (Pavlopoulou, 1993; Soto et al., 2012) y “...que sólo la coordinación de varios registros de formas semióticas ayuda a remontarlos” (Duval, 1993, p. 173).

La coordinación de registros de representación es una condición esencial para la aprehensión conceptual e implica ineludiblemente la conversión entre registros; pero esta última suele ser la menos espontánea y la más difícil de realizar de las tres actividades cognitivas propias de los registros de representación.

La coordinación consiste en la movilización y la articulación cuasi-inmediatas de los registros de representación semiótica. Esta coordinación supone como condición principal la discriminación de las unidades significantes a poner en correspondencia en cada registro.

Una persona con una buena coordinación de registros podría resolver situaciones matemáticas trabajando en un solo registro, no porque no pueda emplear otros, sino

porque decidió que la manera más eficiente de llegar a la solución es trabajar en ese único registro, considerando los datos que tiene, los tratamientos que podría realizar en los diferentes registros y la solución a la que desea llegar. Incluso no se requiere el señalamiento hacia el exterior, en papel o verbalmente por ejemplo, de representaciones de los registros coordinados en la situación que se esté tratando.

4.3. Registros de representación en Álgebra Lineal

Existen investigaciones (Pavlopoulou, 1993; Soto, 2003; Soto et al., 2012) que describen características de los registros de representación usados o recomendados para el estudio del Álgebra Lineal; para los propósitos de este artículo consideramos necesario precisarlas aún más. En esta sección presentamos una descripción que, aunque no es exhaustiva, proporciona mayor detalle sobre las características de los cuatro registros que pueden emplearse para dar solución a las situaciones que aparecen en las entrevistas.

Algunas de las situaciones que necesitan ser atendidas, corresponden a las definiciones de registros específicos. Distintos autores identifican diferentes registros utilizados en Álgebra Lineal; por ejemplo Pavlopoulou (1993) habla de un registro gráfico y uno algebraico, mientras que Soto (2003) analiza dos registros gráficos y dos algebraicos distintos (p.14). Nos encontramos ante una falta de consenso sobre las definiciones de registros específicos, aunque no parece haber confusiones con la definición general dada por Duval mencionada en la sección anterior.

En nuestro caso, coincidimos con Soto (2003) al apreciar dos registros gráficos, mientras que Pavlopoulou (1993), maneja solo un registro algebraico, aunque no exactamente el mismo; pero diferimos de ambos sobre las representaciones matriciales. Mientras que Pavlopoulou y Soto parecen coincidir con lo que ambos llaman “registro tabular”, nosotros apreciamos distintas reglas de formación y tratamiento aplicadas a arreglos rectangulares de signos, con las que definimos el “registro matricial” que analizamos en las producciones de los estudiantes. Resaltamos entonces la necesidad de tener en mente estas diferencias entre nombres y definiciones de los registros mientras se consulta algún trabajo sobre representaciones en Álgebra Lineal.

Cabe aclarar que los conceptos de Álgebra Lineal que aparecen en las preguntas de la entrevista tales como espacio vectorial, vector y transformación lineal pueden ser representados en los cuatro registros que describiremos en este apartado. En la descripción nos enfocamos en la manera particular que cada registro permite representar a estos objetos, en algunos tratamientos elementales y en características de algunas conversiones, coincidiendo en general con la descripción hecha por Pavlopoulou (1993).

4.3.1. Registro gráfico sintético

Como menciona Soto (2003), en el sistema educativo mexicano es común que el primer encuentro de estudiantes con el concepto de vector sea en cursos de física en donde los vectores (principalmente magnitudes vectoriales) se representan con “flechas” definidas ya sea por un punto inicial y un punto final, o por su magnitud, dirección y sentido. En ambos casos las representaciones se aprecian como en la Figura 1.

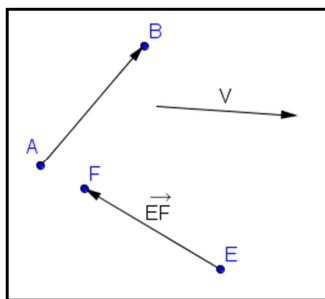


Figura 1. Representación gráfica sintética de vectores

Este registro tiene reglas de formación particulares que lo distinguen de otros, por ejemplo, para representar a un vector fijo se puede utilizar cualquier flecha de una familia infinita con la misma magnitud, dirección y sentido (Figura 2) ya que comparten características definitorias en el registro; esto implica que la traslación de las flechas es un tratamiento neutro, en el sentido de que las representaciones conservan la misma información después de realizado el tratamiento. El hecho de que la traslación sea neutra permite que se utilice como método para comprobar si dos flechas representan al mismo vector: se traslada una flecha hacia la otra y si coinciden los puntos iniciales y finales se concluye que están representando al mismo vector.

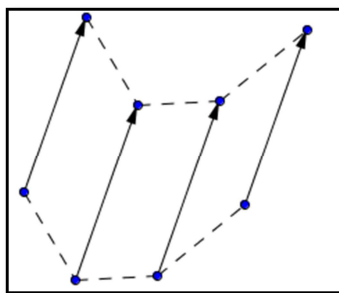


Figura 2. Familia de flechas que representan al mismo vector

Sobre los tratamientos esenciales en este registro, retomamos de Soto (2003) que existen dos tratamientos para la suma de vectores: regla del paralelogramo y regla del triángulo. Para sumar dos vectores, digamos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, con la regla del paralelogramo se traslada uno hasta que coincidan los puntos iniciales de ambos de manera que forman los lados adyacentes de un paralelogramo; los otros dos lados se construyen dibujando copias de los dos vectores iniciales, cada uno iniciando en el punto final del otro (ver Figura 3). El vector suma se representa entonces como la flecha que coincide con la diagonal del paralelogramo. Con la regla del triángulo, se traslada una flecha de modo que el punto inicial de ésta coincida con el punto final de la segunda flecha y el vector suma se representa con la flecha formada con el punto inicial del segundo vector y el punto final del primero (Figura 3).

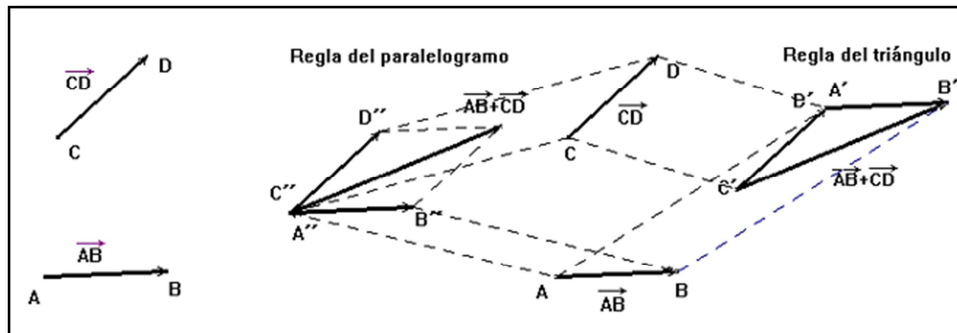


Figura 3. Tratamientos de suma en el registro gráfico sintético (tomada de Soto, 2003, p. 16)

Es común encontrar dificultades al utilizar este registro en Álgebra Lineal por la multitud de representaciones válidas para la misma situación (sea para vectores o para sumas) o por las muy distintas interpretaciones que se les puede atribuir a una misma representación, como la que trata con la forma de la letra “M” en el plano (Figura 4).

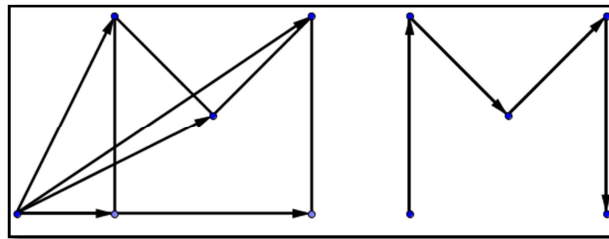


Figura 4. Interpretaciones posibles de una figura con forma de “M” en el plano

La ambigüedad del registro puede implicar complicaciones para su uso en determinadas situaciones al poder significar cosas considerablemente distintas, como podremos ver más adelante.

4.3.2. Registro gráfico cartesiano

Comúnmente en los cursos de Álgebra Lineal se deja de utilizar el registro sintético para representar a los vectores pasando a un nuevo registro gráfico que tiene inicialmente distintas reglas de formación para las representaciones. En este otro registro gráfico, los vectores también son representados por flechas pero ahora todas las flechas comparten el punto inicial; este punto inicial común es llamado *el origen* y generalmente es definido por la intersección de dos rectas perpendiculares llamadas *ejes*. Los ejes pueden estar graduados y de tal manera las flechas pueden estar acompañadas de etiquetas como en el otro registro gráfico (Figura 1) o con etiquetas de coordenadas como (2,3), como se observa en la Figura 5.

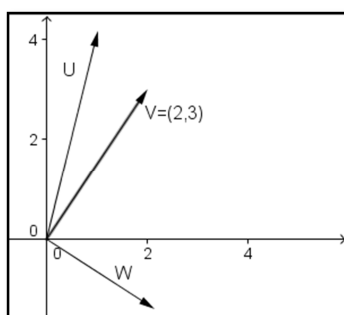


Figura 5. Representación cartesiana de vectores

En este segundo registro, dos flechas representan al mismo vector sólo si tienen el mismo punto final (o coordenadas), por lo que sólo hay una flecha para cada vector, y el vector cero es representado por el origen. La suma de vectores puede realizarse sólo con la regla del paralelogramo ya que no es válido desplazar una flecha de modo que su punto inicial sea distinto al origen. El registro cartesiano no comparte la ambigüedad del registro sintético al facilitar una única interpretación de representaciones como la de la letra M (y en general de cualquier región del plano) que podía ser vista en el registro sintético de dos formas distintas; la interpretación en el registro cartesiano corresponde a las flechas que van del origen a cada punto de la región indicada.

4.3.3. Registro algebraico y registro matricial

Presentamos estos dos registros en la misma subsección porque, a diferencia del par de registros gráficos, estos pueden ser utilizados simultáneamente sin mayores

complicaciones y sin generar ambigüedad de las representaciones involucradas en las situaciones analizadas en la entrevista.

El registro algebraico es quizá el más usado cuando se definen conceptos o se redactan teoremas por las ventajas que su estatus de lenguaje formal le proporciona. En este registro se utilizan letras, números y símbolos para representar diversos tipos de objetos como vectores, escalares y operaciones, formando expresiones discursivas separadas en renglones, como por ejemplo: la combinación lineal de tres vectores $a \cdot V + c \cdot W + d \cdot Z$; o la definición de vectores propios para una transformación $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\exists U \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \wedge \exists k \in \mathbb{R}: T(U) = k \cdot U$$

En este registro dos letras representan al mismo vector si se declara explícitamente, es decir, el vector V es igual al vector W si se tiene la expresión $V=W$, o si se puede inferir a partir de tratamientos algebraicos como la sustitución de expresiones equivalentes. En general el registro algebraico permite una organización más eficiente del conocimiento matemático, ya que facilita la representación de situaciones complejas de una manera más precisa y compacta aunque con las desventajas propias del formalismo (ver Duval, 1999 y Soto et al., 2012).

El registro matricial permite representar una gran diversidad de objetos del Álgebra Lineal. Por un lado las matrices son arreglos rectangulares de otros objetos (números, polinomios, otras matrices, etc.) vistos como un elemento de algún espacio vectorial, por ejemplo los elementos de $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$. Por otro lado mediante el mismo tipo de arreglos rectangulares se pueden representar conceptos de otra naturaleza como cambios de base, transformaciones lineales y sistemas de ecuaciones. En el caso de una transformación lineal, ésta se puede representar con una matriz que al multiplicarla por cualquier vector se obtenga la imagen de tal vector bajo la transformación lineal. De antemano, reconocemos como desafortunada la selección de la palabra “matriz” para designar tanto al objeto matemático como a una de sus representaciones ya que esto puede llevar a una confusión entre ambos entes, y aparentemente también puede provocar la paradoja cognitiva del pensamiento matemático (Duval, 2006).

La naturaleza de las matrices como arreglos de otros objetos provoca que en cierta forma se “hereden” algunas características de estos y de sus representaciones. De tal manera, es importante tener en cuenta que los tratamientos matriciales son generalmente derivados o influenciados por los tratamientos de las componentes de éstas. Si se tiene una matriz con entradas racionales de la forma a/b el tratamiento de suma es significativamente distinto a si la matriz tuviera entradas enteras o entradas algebraicas. Esta característica de los tratamientos matriciales nos puede llevar a interpretar partes de éstos, por ejemplo la suma de componentes, como

tratamientos de otros registros, pero la información dada por la ubicación de cada componente en el arreglo matricial, el orden de los tratamientos así como las relaciones entre las componentes de la matriz resultado y las componentes de las matrices iniciales, excede la información obtenida por los tratamientos aislados de las componentes. Entonces, una suma de dos matrices conlleva más información que la sola suma de sus componentes, por lo tanto no se puede reducir por completo el tratamiento matricial a un tratamiento algebraico. Esto es similar a las relaciones entre los tratamientos de los números naturales y los números racionales; los tratamientos racionales se desarrollan a partir de los naturales pero no pueden reducirse a estos.

En las situaciones relevantes para este artículo nos podemos encontrar con arreglos de números, como $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ elemento de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$; o de arreglos de polinomios, como $\begin{pmatrix} 2 \cdot x + y \\ x - 3 \cdot y \end{pmatrix}$ elemento de $\mathcal{M}_{2 \times 1}(\mathbb{P}[x, y])$.

El uso simultáneo de estos dos registros puede ser observado en expresiones del tipo $\alpha \cdot U + \beta \cdot V = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Es común encontrar en libros o en producciones de los estudiantes expresiones mixtas que, en el mejor de los casos, implican que se ha desarrollado la coordinación de esos registros a tal grado de poder realizar conversiones de manera espontánea en una misma expresión. A pesar de que se pueden encontrar abundantes ejemplos de expresiones mixtas, no significa que los registros matricial y algebraico sean en su totalidad congruentes, como muestra Pavlopoulou (1993) en casos de conversión de matrices a sistemas de ecuaciones.

Atribuimos la abundante utilización de estas expresiones algebraico-matriciales al nivel de congruencia entre algunas representaciones en estos dos registros. Las reglas de formación en ambos registros tienen varias coincidencias, como se aprecia en la representación de una combinación lineal de vectores. Las unidades significantes en las expresiones de combinación lineal mantienen el mismo orden para la suma y para el producto por escalar. De tal manera, una simple sustitución puede ser suficiente para la conversión de una combinación lineal entre los registros matricial y algebraico.

El uso simultáneo de registros se menciona como una característica de la coordinación de registros (Duval, 1999) aunque aclarando que no son equivalentes, incluso hay usos simultáneos que provocan confusiones y obstruyen la actividad matemática; sobre esto hablaremos más en las siguientes secciones.

5. Análisis de la entrevista

En la entrevista se usó una secuencia de cinco actividades. Las tres primeras pretenden situar el concepto de Transformación Lineal mediante

preguntas abiertas; las dos restantes son situaciones que comúnmente no se encuentran en los libros de texto. El entrevistador tuvo el papel de conducir, plantear y explicar las situaciones que se presentaban durante el desarrollo de la entrevista; uno de sus principales tareas consistió en obtener información extra en los argumentos aportados por los estudiantes, principalmente cuando se detectaba la no coordinación de registros por parte de los estudiantes, dado que estas situaciones sugerían un análisis más profundo.

A continuación presentamos el análisis de algunas situaciones realizadas durante la entrevista, poniendo especial énfasis en los casos donde las situaciones guardaban estrecha relación con la coordinación de registros, así como en algunos usos inapropiados de representaciones.

5.1. Definición de Transformación Lineal, según los estudiantes

La primera pregunta que se presentó a los estudiantes tenía el propósito en situar su concepción de Transformación Lineal, al cuestionarles ¿Qué entiendes por Transformación Lineal?

La mayoría de los estudiantes hicieron alusión a la definición que se muestra en sus libros de texto, especialmente la definición que ofrece Grossman (2008, p. 460):

Sean V, W dos espacios vectoriales reales. Una transformación lineal T de V en W es una función que asigna a cada vector $v \in V$ un vector único $Tv \in W$ y que satisface, para cada u y v en V y cada escalar α ,

$$T(u + v) = Tu + Tv$$

y

$$T(\alpha v) = \alpha Tv$$

Por ejemplo durante la entrevista Natalia¹ presentó su propia “definición” de la siguiente manera:

Natalia: Me basaría en lo que es la definición, entonces: Se supone que una transformación lineal, es tal que pasa un vector $\alpha \in V$, lo pasa a ser otro vector y el cual pertenece a un espacio vectorial diferente de V o puede ser el mismo. Esa es la definición, que yo daría por así decirlo.

¹ Todos los nombres de los estudiantes son pseudónimos.

$$\text{Def. } \alpha \in V \quad \alpha_1 \in W \\ T(\alpha) = (\alpha_1)$$

Figura 6. Definición de Natalia de Transformación Lineal

Natalia aporta una “definición”, que no incluye suficientes condiciones para definir a una Transformación Lineal, aunque el siguiente extracto muestra que ella conoce la definición formal al explicarla de la siguiente manera:

Natalia: ...claro, si ya nos lo explican en los libros, bueno nos dice que la definición, dado dos vectores, su transformación cada uno; bueno, que la transformación lineal de la suma de los dos vectores es igual a que si fuera la transformación por separado y que si dado un escalar β , entonces este β al multiplicarlo por el vector, es como si tuviéramos al escalar β multiplicando a la transformación lineal, bueno ésta es la definición que he visto en los libros.

$$\text{Def } T(u+v) = T(u) + T(v) \quad \beta \in K \\ T(\beta \cdot v) = \beta T(v)$$

Figura 7. Definición formal representada por Natalia

Sin embargo ella insiste en usar su propia definición y nuevamente la explica, empleando el siguiente diagrama:

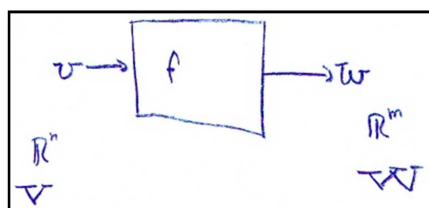


Figura 8. Diagrama de Transformación Lineal de Natalia

Esta figura, evoca a la presentación elemental de función que emplean algunos libros de cálculo al verla como una “caja negra”, que transforma los valores u objetos de entrada en los valores u objetos de salida. Natalia muestra confusión entre el concepto de función y el concepto de Transformación Lineal, ya que emplea algunos elementos distintivos de un curso de Cálculo. La concepción de Natalia consiste en el cambio de un vector en el dominio a uno del contradominio,

sin considerar condiciones de linealidad. Como veremos más adelante esto afectará su desempeño en el resto de la entrevista.

Por otro lado, el estudiante Luis al abordar la misma actividad, explica de manera más detallada lo que entiende por transformación lineal.

[Luis] (Escribe): Por transformación lineal, entiendo una función que va de un subespacio dado a otro subespacio o en su defecto al cuerpo de los escalares en el cuál se esté trabajando, que cumple con la siguiente propiedad: Dados 2 elementos del subespacio (u,v) y un escalar (α) del cuerpo correspondiente, se tiene que

$$\alpha T(u) + T(v) = T(\alpha u + v)$$

Al parecer, Luis se apega a la definición presentada en uno de sus libros de texto, donde se define la Transformación Lineal de la siguiente manera (Hoffman y Kunze, 1973):

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo F . Una transformación lineal de V en W es una función T de V en W tal que

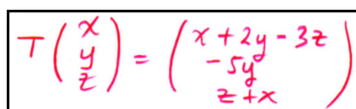
$$T(c\alpha + \beta) = c(T\alpha) + T(\beta)$$

para todos los vectores α y β de V y todos los escalares c de F . (p. 67)

La definición personal de Luis corresponde a la definición formal, y esto influye positivamente en su desempeño durante la entrevista.

5.2. Ejemplos de Coordinación de Registros

La elección del registro adecuado para iniciar la solución de un problema y la articulación de los demás registros que se decida utilizar contribuyen al éxito de la solución del problema matemático. Situaciones que provocan este tipo de decisiones se presentaron en diversos momentos de la entrevista, por ejemplo, se pidió a los estudiantes un *ejemplo de una Transformación Lineal*. Luis presentó el siguiente ejemplo:



$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y-3z \\ -5y \\ z+x \end{pmatrix}$$

Figura 10. Transformación Lineal propuesta por Luis

El estudiante además de proporcionar un ejemplo de Transformación Lineal, decidió demostrar por qué lo es y en el transcurso de esta actividad, reveló la coordinación de los registros algebraico y matricial al emplear acertadamente conversiones en diferentes momentos para obtener su resultado de manera

eficiente. Luis podría haber intentado hacer la demostración en el registro algebraico, planteando y resolviendo un sistema de ecuaciones; podemos apreciar que ese camino sería menos eficiente que el matricial y suponemos que él mismo observó esto, por lo que decidió utilizar tratamientos matriciales. Luis escribe los vectores que va a utilizar de manera algebraica y matricial, pero cada uno para un fin distinto. Las expresiones algebraicas son utilizadas para presentar combinaciones lineales pero los tratamientos son realizados en las representaciones matriciales, pues necesita operar con las coordenadas de cada vector para realizar la demostración. De esta manera, al inicio de su demostración pasa del registro algebraico al matricial sin presentar dificultades.

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{R}$$

$$cu = \begin{pmatrix} cx_1 \\ cy_1 \\ cz_1 \end{pmatrix} \rightarrow cu + v = \begin{pmatrix} cx_1 + x_2 \\ cy_1 + y_2 \\ cz_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

Figura 11. Coordinación de los registros algebraico y matricial por Luis

Posteriormente aplicó su transformación lineal al resultado de la suma de los vectores; esto incluye una serie de tratamientos algebraicos englobados en el tratamiento matricial de evaluación de la transformación. La evaluación de cada componente, o coordenada, puede ser vista por separado como tratamiento algebraico pero el conjunto de la evaluación de la matriz, conservando el orden de las componentes es un tratamiento matricial.

$$T \begin{pmatrix} cx_1 + x_2 \\ cy_1 + y_2 \\ cz_1 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [cx_1 + x_2] + 2[cy_1 + y_2] - 3[cz_1 + z_2] \\ -5[cy_1 + y_2] \\ [cz_1 + z_2] + [cx_1 + x_2] \end{pmatrix}$$

Figura 12. Aplicación de la transformación lineal de Luis

Con tratamientos adecuados, acomodó la expresión de tal manera que presentara un alto nivel de congruencia con la expresión algebraica $cT(u) + T(v)$; esto le permitió realizar la conversión del registro matricial al algebraico de manera instantánea, como se muestra en la Figura 13. Concluyó su demostración al comprobar la condición de linealidad con la igualdad que propuso en su definición.

$$c \begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 - 3z_1 \\ -5y_1 \\ z_1 + x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + 2y_2 - 3z_2 \\ -5y_2 \\ z_2 + x_2 \end{pmatrix} = cT(u) + T(v)$$

Figura 13. Conversión del registro matricial al algebraico

La conversión mostrada en la figura anterior se aprecia como un ejemplo en Álgebra Lineal de la afirmación general de Duval (1999) de que “el paso de una representación a otra se hace espontáneamente cuando ellas son congruentes” (p. 35).

Una situación de coordinación semejante a la anterior se aprecia cuando se solicita al mismo estudiante que *proporcione un ejemplo de una Transformación No Lineal*.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2y \\ z \\ y^2 \end{pmatrix}$$

Figura 14. Transformación no lineal propuesto por Luis

Luis proporciona un ejemplo en el registro matricial (Figura 14) y haciendo un análisis similar a su ejemplo de transformación lineal, demuestra que éste no lo es. La estrategia que emplea consiste primero en trabajar el resultado obtenido al evaluar $T(c\alpha + \beta)$, iniciando con el tratamiento matricial que incluye varios tratamientos algebraicos, posteriormente trabajar con la expresión $c(T\alpha) + T(\beta)$ y averiguar la igualdad con la imagen de la combinación lineal. Debido a que no son iguales los resultados, concluye que su ejemplo no corresponde a una Transformación Lineal.

$$\begin{aligned} cT(u) + T(v) &= c \begin{pmatrix} x_1^2 - 2y_1 \\ z_1 \\ y_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2^2 - 2y_2 \\ z_2 \\ y_2^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} cx_1^2 - 2cy_1 + x_2^2 - 2y_2 \\ z_1 + z_2 \\ cy_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix} \neq T(cu + v) \end{aligned}$$

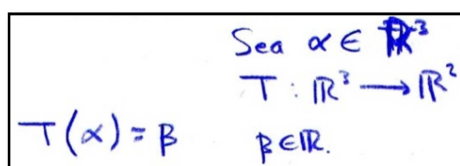
Figura 15. Argumento final de la demostración de Luis

De esta manera Luis llega a demostrar que el ejemplo que propuso, efectivamente corresponde a una Transformación No Lineal. De la misma manera que en la situación anterior, parece diseñar un plan de acción que involucra los dos registros,

haciendo uso frecuente de expresiones mixtas, para luego transitar libremente entre ellos. Estas características son interpretadas como coordinación ya que puede utilizar ambos registros de manera simultánea aprovechando las ventajas de cada uno.

5.3. Ejemplos de No Coordinación de Registros

La ausencia de coordinación de registros crea obstáculos en el aprendizaje del Álgebra Lineal, provocando incluso el fracaso en la resolución de problemas. Por ejemplo en el caso de Natalia, cuando se le solicitó que proporcionara un ejemplo de Transformación Lineal, ella inicia planteando la siguiente expresión, aludiendo a la forma que tendría la transformación lineal que propone.



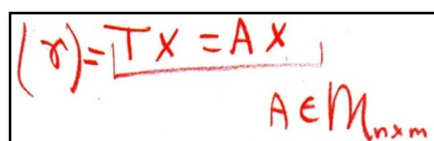
$$\begin{array}{l} \text{Sea } \alpha \in \mathbb{R}^3 \\ T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ T(\alpha) = \beta \quad \beta \in \mathbb{R} \end{array}$$

Figura 16. Propuesta de Natalia de Transformación Lineal

Inicialmente notamos que Natalia tiene dificultades con las reglas de formación del registro algebraico, pues le faltó escribir el superíndice de $\mathbb{R}^2$ para que la última expresión indique que beta es un vector del plano; además utiliza letras para designar vectores que se acostumbran usar para escalares. A lo largo de su intento de respuesta Natalia emplea la única característica de las Transformaciones Lineales que declaró en su definición. Al solicitarle que especifique cómo sería la Transformación Lineal, recurre al registro matricial para señalar que sería del tipo

$$\alpha = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ con } T \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ empezando a revelar dificultades para trasladar su}$$

ejemplo del registro algebraico al matricial, pues sólo representa una pequeña parte de la información que tenía en la representación algebraica. Para indagar sobre esta dificultad, se le solicita a Natalia que proporcione el arreglo matricial correspondiente a la Transformación Lineal que propuso inicialmente; ella nuevamente acude al registro algebraico para argumentar que la Transformación Lineal solicitada tendría la siguiente forma:



$$(x) = T x = A x \quad A \in M_{n \times m}$$

Figura 17. Expresión algebraica propuesto por Natalia

Argumenta que “la matriz tendría que ser de...2x2...bueno, sería buscar entonces una matriz, tal que al multiplicarse entonces diera al producto, entonces como éste es un vector (x, y, z) la matriz que buscamos nos va a mandar a R^2 ”. Natalia se conforma con dar una expresión que contenga una matriz pero vista como elemento de un espacio de matrices y no como un arreglo rectangular como era esperado, esto relacionado a la inconveniencia de la palabra “matriz” para ambos significados. Posteriormente, en su intento por trasladar su representación algebraica al registro matricial, erra nuevamente y al percatarse que no puede proporcionar una matriz y por ende no puede realizar el producto matricial, como lo muestra la Figura 18, termina por no lograr proporcionar un ejemplo de Transformación Lineal.

$$\begin{pmatrix} a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mathbb{R}^2$$

Figura 18. Representación matricial propuesta por Natalia

Esta última expresión muestra que Natalia no pudo realizar la conversión de la igualdad escrita algebraicamente al registro matricial, esto como consecuencia de la definición incompleta que utiliza. Sin embargo, el hecho de que no se diera cuenta de qué datos le faltaban implica que no reconoce algunas unidades significantes en ambos registros, las que describen la relación entre las componentes de la matriz y la ecuación algebraica.

5.3.1. Mezcla de registros de representación

A continuación describimos otros ejemplos en los que no se logra la coordinación de registros para Transformaciones Lineales, pero ahora debido a que se han mezclado dos registros diferentes y esto obstruye el proceso de solución o interpretación de los problemas. Para aclarar a qué nos referimos con mezcla de registros, partimos de que “...incluso si han sido movilizados varios registros, simultánea o sucesivamente, esto no acarrea su coordinación” (Duval, 1999, p. 51).

En la coordinación el uso simultáneo implica la selección consciente del registro en el que se va a trabajar para aprovechar las ventajas de éste en la situación particular. Un estudiante podría intentar utilizar varios registros pero sin hacer esa discriminación y sin tomar en cuenta las particularidades de cada registro. No mantener presente la diversidad y heterogeneidad de registros podría llevar a un sujeto a mezclar dos o más de ellos. De esta manera, identificamos la mezcla de registros como un tipo de uso simultáneo sin coordinación.

La mezcla de registros consiste en la utilización de representaciones que no respetan las reglas de formación del registro al que se supone pertenecen, mezclando reglas de formación de dos o más registros. Al mezclar dos registros se acaba trabajando en un tercer *sistema* de representación que podría ni siquiera ser ya un registro al no conservar alguna de las tres propiedades definitorias de los registros de representación. Esto resulta problemático ya que, según nuestras observaciones, los estudiantes pueden no ser conscientes de que han mezclado registros y actúan como si siguieran trabajando en uno de los registros originales habiendo perdido propiedades y posibles ventajas de éste.

Cabe señalar que la mezcla de registros que observamos es distinta a las expresiones mixtas del registro de la escritura formal y la lengua natural descritas por Duval (1999). En nuestro caso, la mezcla de registros no incluye la identificación de las reglas de formación en ninguno de los registros ni intenta conservar coherencia con algún registro de manera que permita la interpretación adecuada de la expresión formada. Además, las expresiones obtenidas no permiten ser convertidas a expresiones válidas en uno de los registros involucrados pues se pierde la información necesaria al ignorar las reglas de formación. Sin embargo, coincidimos en que la mezcla de registros genera representaciones no funcionales, pues no se pueden aplicar los tratamientos de ninguno de los registros involucrados ya que las reglas de tratamiento están estrechamente ligadas a las reglas de formación.

Por ejemplo Natalia al intentar dar un ejemplo de transformación no lineal inicia su respuesta en el registro algebraico con la expresión $T(x) = mx + b$, procede a representar una transformación lineal gráficamente como punto de comparación para lo que ella intenta representar como una transformación no lineal. La primera gráfica que realiza corresponde al registro gráfico cartesiano (Figura 19) y consiste en un par de flechas que parten del origen representando a un vector y su imagen, respectivamente.

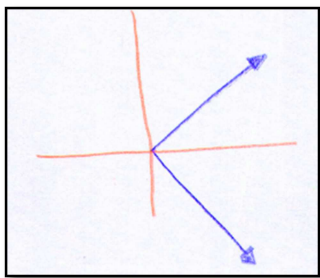


Figura 19. Representación gráfica cartesiana de una transformación lineal, hecha por Natalia

Esta gráfica cartesiana está bien formada y funciona como representación de lo que Natalia expresa verbalmente: la transformación manda, de alguna manera, un vector a otro. La mezcla de registros aparece a continuación, cuando explica su ejemplo de transformación no lineal. Para este caso Natalia grafica dos flechas pero ahora una de ellas, la flecha imagen, no parte del origen.

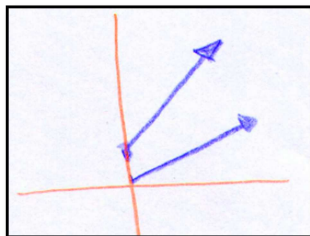


Figura 20. Representación de transformación no lineal según Natalia

Natalia describe la gráfica aclarando que el vector que no parte del origen es la imagen del otro y por esa razón la transformación no es lineal. Al parecer, intenta representar el tipo de transformaciones que no mandan el cero al cero, tal como lo hizo algebraicamente. Ella argumenta que la flecha imagen “...ya ni siquiera comienza en el origen, entonces ya no [es lineal]”.

En su segunda gráfica utiliza reglas de representación de ambos registros gráficos que no son compatibles. La flecha imagen no respeta la regla del registro cartesiano de iniciar en el origen, por lo que en ese registro la representación no es válida. Por otro lado, si consideramos su representación como si estuviera en el registro gráfico sintético, al parecer las flechas tienen misma dirección, magnitud y sentido por lo que representarían al mismo vector y no se serviría para representar a una transformación como la que Natalia expresó algebraicamente. Natalia supone que está trabajando en el registro cartesiano, al utilizar los ejes y porque identifica a las flechas como vectores diferentes, pero en realidad utiliza una mezcla de los registros cartesiano y sintético, manteniendo algunas reglas de ambos pero de una manera contradictoria que no le permite realizar representaciones coherentes que le sirvan para expresar su idea y resolver el problema en cuestión.

Por otro lado Franco, otro estudiante entrevistado, muestra algunas coincidencias con el caso de Natalia al interpretar el problema de la “M”, que consistía en encontrar una transformación lineal que *mandara* una figura con forma de “M” a una figura con forma de *M* itálica; esta pregunta fue adaptada de Wawro (2009).

A continuación se proporciona una figura de la letra ‘M’, escrita con estilo de fuente “normal” de tamaño 12, y a la derecha, se muestra la misma letra con fuente “cursiva” de tamaño 16. ¿Podrías encontrar una matriz que transforme la ‘M’ en la letra de la derecha?



Figura 21. La letra M escrita en dos fuentes y tamaños diferentes

Franco parte de una estrategia general para resolver el problema: obtener información en el registro gráfico de un par de vectores y sus imágenes para luego convertir representaciones gráficas al registro algebraico y resolver sistemas de ecuaciones con cuyos resultados se obtendrían las entradas de la matriz transformación. En general, la estrategia que Franco siguió era la correcta para resolver el problema. Sin embargo, al principio de su solución tuvo problemas al mezclar los registros gráficos.

Franco inicia la solución del problema seleccionando dos vectores de la letra M, uno vertical hacia arriba y otro diagonal como se ve en la Figura 22. La mezcla de registros ocurre cuando *lee* las coordenadas de los vectores; Franco interpreta al vector vertical como $(0,3)$ y al diagonal como $(1,-2)$. Esta interpretación nos lleva a pensar que Franco se permite leer coordenadas como en el registro cartesiano y al mismo tiempo interpretar las flechas con respecto a su punto inicial y final. Interpreta a dos puntos distintos como si ambos fueran el origen y así lee de manera independiente las coordenadas de cada flecha.

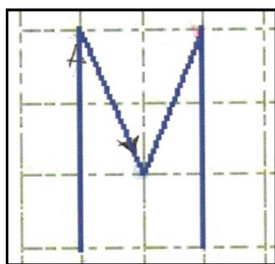


Figura 22. Representación de vectores en la letra M de Franco

De esta manera, la mezcla de registros que utiliza Franco no le permite resolver el problema, pues tendría que haber mantenido el origen fijo como punto de referencia para obtener datos consistentes. La existencia de dos puntos origen le genera datos contradictorios que no pueden ser usados para resolver el problema ya que por separado, cada interpretación corresponde a una transformación lineal distinta.

6. Conclusiones

Después de estudiar los registros de representación usados por los estudiantes entrevistados notamos que la falta de consenso sobre los registros de representación del Álgebra Lineal genera problemas al analizar la información obtenida y para comunicar nuestros resultados. Al intentar compartir algunas de nuestras observaciones se volvió obvio que en la literatura no existe un acuerdo sobre los nombres y características de los registros de representación del Álgebra Lineal aunque se sigan las mismas definiciones propuestas por Duval; dichas variaciones en las interpretaciones de los registros generan diferencias significativas en el análisis de las producciones de los estudiantes.

Las aportaciones del presente estudio residen en la descripción sobre las reglas de formación y tratamiento en los diversos registros, particularmente en el registro gráfico y el registro matricial, los cuales no se reducen a su presentación estructural. Asimismo se ofrece por primera vez, una descripción para profundizar sobre los fenómenos de mezcla de registros, expresiones mixtas y sus implicaciones en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal.

En nuestras observaciones comprobamos que cuando un estudiante tiene la habilidad de coordinar registros exitosamente al presentársele alguna situación matemática, busca y está en mejores condiciones de encontrar estrategias eficientes para resolverlas. Sin embargo, el que resuelva alguna situación de manera satisfactoria no implica que tenga esta habilidad. Por ejemplo el estudiante Franco al solicitarle un ejemplo de Transformación Lineal responde con la transformación identidad, caracterizándola con $T(I)=I$ y comprobando algebraicamente las propiedades de la definición. Aunque el estudiante proporcionó una respuesta correcta, la pregunta no nos permite averiguar si el estudiante realiza o no una coordinación; simplemente pudo haber recordado un ejemplo trivial de Transformación Lineal.

Destacamos la importancia de analizar las producciones semióticas de los estudiantes junto con sus expresiones verbales, así como a través de preguntas de seguimiento para comprobar las hipótesis sobre lo que significa cada expresión aportada por ellos; de ahí la pertinencia de realizar un análisis a priori de las situaciones a presentar, que incluya la identificación de las variables visuales y unidades significantes en los registros, según sea el caso. Esta estrategia permitirá obtener un análisis más confiable sobre los conocimientos que poseen los estudiantes en función de las evidencias empíricas que podamos obtener.

Por otro lado, en algunas ocasiones se presentaron situaciones donde se muestra una gama de registros no coordinados, como fue el caso de Natalia al intentar proporcionar un ejemplo de Transformación Lineal. Su acercamiento incluye representaciones de varios registros pero no lo consideramos coordinación porque

sólo está realizando conversiones entre los registros que se le ocurren, partiendo de la poca información que pudo obtener de la definición incompleta de transformación lineal que usa; esta definición le impide tomar en cuenta algunas unidades significantes y el no hacerlo implica no cumplir la condición principal para la coordinación. Más adelante, dando un ejemplo de transformación no lineal, ella intenta coordinar los registros gráfico cartesiano y el algebraico para que su respuesta sea más clara que con sólo la expresión $T(x) = mx + b$. Sin embargo, debido a la mezcla de registros en la que cae, su respuesta queda opacada por las representaciones no válidas obtenidas de una conversión fallida en su intento de coordinar los registros, haciendo parecer que no tenía un significado claro de transformación no lineal, aunque el principio de su explicación (la ecuación) es una respuesta aceptable. De hecho, Natalia tiene un significado más desarrollado de transformación no lineal que de lineal, lo cual se observa comparando su definición de transformación lineal con el ejemplo de transformación no lineal.

Duval (2006) afirma que es primordial para el aprendizaje matemático no confundir un objeto con alguna de sus representaciones; paralelamente, en esta investigación afirmamos que también es importante no mezclar los registros mismos. La mezcla de registros que observamos surgió por no mantener presente las propiedades del registro en el que se pretendía trabajar, tratando de usar conjuntamente propiedades de otro registro con características similares, al parecer inconscientemente. Identificamos a la mezcla de registros como un problema importante porque no sólo inhibe la coordinación, obstruye la exteriorización de las ideas y la interpretación de representaciones; provoca además la imposibilidad de las conversiones y que no se pueda estimar de manera correcta la conveniencia de usar un registro u otro.

Observamos que la coordinación favorece la solución eficiente de situaciones matemáticas, mas no la garantiza y en algunos casos ni siquiera es necesaria. Las soluciones algorítmicas de problemas prototipo en la enseñanza mono-registro son un caso claro de esta situación. La importancia mayor de la coordinación según la teoría es para la aprehensión conceptual.

Después de haber observado a estudiantes que han pasado por un proceso de instrucción, nos surgen algunas inquietudes, las cuales merecen una investigación propia.

¿En el contexto de Transformaciones Lineales, cómo se puede desarrollar la coordinación de registros?

¿Cómo se puede evitar la mezcla de registros?

¿A parte de la conversión qué hay que desarrollar para lograr la habilidad de la coordinación?

Las respuestas a estas preguntas contribuirán a mejorar teoría al esclarecer las relaciones entre la coordinación de registros y el aprendizaje conceptual; asimismo facilitará el desarrollo de propuestas de enseñanza que generen comprensión integrativa.

Referencias

- DORIER J. L. & SIERPINSKA A. (2001), Research into the teaching and learning of Linear Algebra, en *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, (Ed. Holton), 255-273, Kluwer Academic Publishers.
- DREYFUS T., HILLEL J. & SIERPINSKA A. (1999), Cabri based Linear Algebra: Transformations, en *European Research in Mathematics Education I: Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (Ed. Schwank), 1, 209-221.
- DUVAL R. (1993), Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, en *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Ed. Hitt), 173-201, Université Louis Pasteur de Strasbourg, France; México: Grupo editorial Iberoamérica.
- DUVAL R. (1999), *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- DUVAL R. (2006), A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, **61.1-2**, 103-131.
- DUVAL R. (2008), Eight Problems for a Semiotic Approach in Mathematics, en *Semiotic perspectives in the teaching and learning of mathematics series. Semiotics in Mathematics Education, Epistemology, History, Classroom, and Culture* (Eds. Radford, Schubring & Seeger), 39-63, Rotterdam/Taipei: Sense Publishers.
- GROSSMAN S. (2008), *Álgebra Lineal*. México: Sexta Edición, McGraw-Hill Interamericana.
- HOFFMAN K. & KUNZE R. (1973), *Álgebra lineal*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.
- PAVLOPOULOU K. (1993), Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation, *Annales de didactique et de sciences cognitive* **5**, 67-93.
- POOLE D. (2007), *Álgebra Lineal: una introducción moderna*. México: Thomson Editores.
- RAMÍREZ O. & OKTAÇ A. (2012), Modelos intuitivos sobre el concepto de Transformación Lineal. La didáctica de la Matemática: Enfoques y problemas. *Colloque Hommage à Michèle Artigue*. DIDEROT, París.

ROA-FUENTES S. & OKTAÇ A. (2010), Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* **13.1**, 89-112.

SOTO J. L. (2003), *Un estudio sobre las dificultades para la conversión gráfico-algebraica, relacionadas con los conceptos básicos de la teoría de espacios vectoriales en R^2 y R^3* , Tesis doctoral, Cinvestav - IPN, México.

SOTO J. L., ROMERO C. F. & IBARRA S. E. (2012), El concepto de transformación lineal: una aproximación basada en la conversión Gráfico-Algebraica, con apoyo de GeoGebra, en *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (Eds. Hitt & Cortés), 38-49, Quebec, Canada, Loze-Dion éditeur.

WAWRO M. (2009), Task design: Towards promoting a geometric conceptualization of linear transformation and change of basis, *Twelfth Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*, Raleigh, NC.

Osiel Ramírez Sandoval

Cinvestav-IPN, México y UACJ, México
osiel.ramirez@uacj.mx

César F. Romero Félix

Cinvestav-IPN, México
cromero@cinvestav.mx

Asuman Oktaç

Cinvestav-IPN, México
oktac@cinvestav.mx

MARIA DEL ROCIO JUAREZ, ADELINA ARREDONDO & FRANÇOIS PLUVINAGE

ETUDE COMPAREE DE LA FORMATION INITIALE DE PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES EN FRANCE ET AU MEXIQUE

Abstract. Comparative Study of Pre-service Mathematics Teacher Education in France and Mexico. This paper presents a comparative study of mathematical and pedagogical competencies that prospective teachers of mathematics can acquire in France and Mexico. In order to identify these competencies, a questionnaire was designed on the basis of common knowledge and skills coming out from curriculum and national proofs. The observed results suggest some possible ways in order to improve teacher education in both countries.

Résumé. Cet article présente une étude comparée des compétences disciplinaires et pédagogiques acquises par de futurs professeurs de mathématiques en France et au Mexique. Un questionnaire a été construit sur la base de connaissances communes aux deux pays, identifiées dans leurs programmes scolaires et leurs épreuves nationales des concours de recrutement des professeurs. L'étude s'appuie en particulier sur les réponses à ce questionnaire données dans deux groupes d'étudiants, l'un français et un mexicain. Il apparaît que les étudiants des deux groupes ont des motivations assez semblables mais des trajectoires de formation différentes. Les français ont moins de connaissances pédagogiques mais manifestent une plus grande maturité mathématique que les mexicains, à relativiser toutefois par le fait que ces derniers ne sont pas préparés à enseigner jusqu'au baccalauréat, mais seulement jusqu'en neuvième année de la scolarité (élèves de quinze à seize ans).

Mots-clés. Etudes comparées, Formation initiale des enseignants, Enseignement du second degré, Compétences mathématiques, compétences pédagogiques.

Resumen. Estudio comparado de la formación de profesores de matemáticas en Francia y México. El objetivo del presente trabajo es mostrar algunos resultados obtenidos en un estudio comparado sobre las competencias disciplinares y pedagógicas de las matemáticas que han adquirido los futuros profesores de matemáticas en Francia y en México durante su formación inicial. Para identificar las competencias que adquirieron los futuros profesores al llegar a la parte final de su formación, se diseñó un cuestionario a partir de un denominador común identificado en los programas y las pruebas nacionales de oposición a las que se deben someter los estudiantes de ambos países al llegar al proceso final de su formación.

Introduction

Au vu de résultats d'élèves jugés faibles, tels ceux qui apparaissent dans le rapport pour le Mexique sur l'évaluation internationale TIMSS de 1995 (Backhoff & Solano, 2003), les autorités du système éducatif mexicain ont reconnu, il y a de

cela plusieurs années, une situation difficile de l'enseignement des mathématiques dans le second degré (au Mexique, ce niveau est dit moyen – *nivel medio*, la préparation du baccalauréat correspondant à un niveau plus élevé – *nivel medio superior*). Par ailleurs, des articles de chercheurs, tels Sáenz (2007), Rico (2008) et Vaillant (2009), mentionnent qu'au terme de leur formation initiale de professeurs de mathématiques, les étudiants présentent des déficiences sur des compétences mathématiques qui devraient être acquises dans les institutions de formation des enseignants. Nous entendons ici par compétence mathématique la capacité à raisonner mathématiquement, à poser et résoudre des questions et à appliquer un mode de pensée mathématique à la résolution de problèmes de la vie réelle. C'est précisément ce que les enquêtes internationales PISA cherchent à cibler chez les jeunes en fin ou au sortir de la scolarité de base, soit à l'âge de 15 ans.

Quelles compétences en mathématiques les futurs professeurs de cette discipline doivent-ils acquérir dans les pays qui obtiennent de bons résultats dans les épreuves standardisées telle PISA ? Comment les plans de formation des futurs professeurs de mathématique, en France et au Mexique, favorisent-ils l'acquisition de compétences mathématiques ? Quelles places respectives les compétences disciplinaires et les compétences pédagogiques occupent-elles dans le parcours de formation de professeurs de mathématiques en France et au Mexique ?

Des réponses à de telles questions peuvent provenir d'études comparées de la formation, lesquelles ont tenu un rôle stratégique dans le système éducatif en incitant à des améliorations tant de l'enseignement mathématique que de la formation des enseignants de mathématiques (Arredondo & Juárez, 2011).

Un objectif de la présente étude est ainsi de montrer une comparaison des compétences mathématiques acquises par les futurs professeurs de mathématiques en France et au Mexique, lors de leur formation initiale d'enseignants. Pour ce faire, la méthodologie utilisée a consisté en la consultation, la sélection, l'examen, l'analyse et la comparaison des parcours de formation des futurs professeurs de l'enseignement du second degré en France et au Mexique. Pour effectuer de manière précise l'analyse de ces parcours, les unités qui les composent ont été réparties en trois catégories : connaissances générales, mathématiques en tant que telles, enseignement des mathématiques.

De manière à identifier les compétences disciplinaires et pédagogiques propres aux mathématiques acquises en fin de formation théorique, un questionnaire a été élaboré sur la base de critères communs, identifiés dans les épreuves des concours nationaux de recrutement organisés dans chacun des deux pays. Les catégories d'analyse constitutives du questionnaire ont été fondées sur la proposition de Godino (2009) pour l'évaluation des connaissances et compétences professionnelles acquises par le futur professeur de mathématiques de l'enseignement du second degré lors de son parcours de formation. Le

questionnaire qui fut élaboré a été révisé par des spécialistes de l'enseignement des mathématiques et des formateurs d'enseignants, tant du côté français que mexicain. Il a ensuite été appliqué à deux groupes d'étudiants en fin de leur formation théorique en vue de l'enseignement des mathématiques: en France, un groupe de préparation au CAPES (Certificat d'Aptitude à l'Enseignement Secondaire) de l'Université de Paris 7-Diderot, dont les résultats au niveau national sont habituellement bons, et au Mexique, un groupe de l'École Normale Supérieure de l'État de Mexico, institution également bien placée du point de vue de la réussite aux concours de recrutement des professeurs. Notamment, lors de l'année universitaire 2010-2011, les taux de réussites à ces concours des deux institutions retenues furent les plus élevés dans leur pays respectif.

Des raisons de choisir la France et le Mexique pour une étude comparée

Comme nous l'avons dit en introduction, la présente étude a notamment été motivée par des préoccupations qui ont été exprimées au sein du système éducatif mexicain. Pour plus de précisions quant au bien-fondé de ces inquiétudes, nous avons pris en compte les résultats des enquêtes internationales standardisées PISA. Le rapport de l'OCDE sur les résultats en mathématiques de l'enquête PISA 2012 dans soixante-quatre pays (OECD, 2013), place le Mexique en cinquante-deuxième position. On trouve en tête du classement des pays qui ont peu de points communs avec le Mexique : Shanghai, Singapour, Hong-Kong, Corée, Chine, Taiwan, Japon, Liechtenstein, Suisse, Finlande. Pour sa part, la France, dont la culture est plus proche de la culture latine du Mexique et dont le système éducatif se rapporte à des modèles semblables, est classée dans la moyenne, au vingt-cinquième rang. Elle peut donc constituer pour le Mexique une référence intéressante pour une comparaison.

Il convient par ailleurs de noter que les résultats de l'enquête PISA de 2012 ont fait apparaître des glissements par rapport à l'enquête précédente, qui avait été réalisée en 2003. Ces glissements se sont produits dans un sens favorable pour le Mexique et défavorable pour la France (OCDE, 2013), rapprochant ainsi les résultats des deux pays. Pour le Mexique : augmentation du score global en mathématiques de 28 points, soit l'une des plus fortes augmentations parmi les pays participants à l'enquête, ce score atteignant 413 points, soit une valeur encore inférieure à la moyenne des pays de l'OCDE qui est de 494 points, et réduction de l'écart des résultats entre jeunes de milieux sociaux avantagés ou non. Au contraire pour la France : baisse de 16 points du score global, qui s'est situé en 2012 à 495 points, donc dans la moyenne des pays de l'enquête, alors qu'en 2003 il était supérieur à cette moyenne, et augmentation de la proportion d'élèves en difficulté. Il convient de signaler que lors de cette période de référence 2003-2012, les systèmes éducatifs des deux pays ont évolué ; par exemple, une mesure prise en France a été la diminution de 2 heures de la durée hebdomadaire d'enseignement à l'école

primaire, réduite de 26 heures à 24 heures¹. Plus avant dans la présente étude, nous revenons sur celles des évolutions qui concernent la formation initiale des enseignants.

Un second critère de choix pour une étude comparée a été l'appartenance des deux pays à l'OCDE, ce qui est d'une très grande importance, car cela rend possible la consultation des bases de données statistiques et des indicateurs de développement élaborés par cet organisme, susceptibles de servir pour effectuer des comparaisons. Soulignons que l'OCDE offre aux gouvernements un cadre pour comparer des expériences politiques, chercher des réponses à des problèmes communs et considérer la coordination des politiques nationales.

Le troisième critère tient à la conception de l'École Normale Supérieure au Mexique, en charge de former les futurs enseignants de la scolarité dite de base (*educación básica*). Cette École a été pensée, créée et développée dans une large mesure en réplique au système français (Ducoing, 2004), cela même si les sous-systèmes de formation des enseignants qui enseignent des mathématiques empruntent dans les deux pays des chemins différents.

1. Formation initiale des professeurs en France et au Mexique : similitudes et différences

La France et le Mexique ont des caractéristiques qui leur sont propres en matière de formation d'enseignants de mathématiques. Du côté français, une réforme est en marche, avec la création en 2013 des Écoles supérieures du professorat et de l'éducation (ESPE), qui ont pris la relève des Instituts Universitaires de Formation des Maîtres (IUFM). Au Mexique, le régime actuel est en vigueur depuis 1999. Nous pointons tout d'abord les traits principaux des deux systèmes de formation, tels qu'ils fonctionnent actuellement ; nous examinerons ensuite ce qu'il en est des contenus d'enseignement.

Le tableau 1 ci-après met en regard les niveaux de scolarité et la formation des enseignants. On y remarque qu'en France, les enseignants de mathématiques se forment dans les ESPE et peuvent dispenser des cours aussi bien au Collège qu'au Lycée, tandis qu'au Mexique, les enseignants issus des Ecoles Normales Supérieures n'interviennent pas au niveau des Preparatorias (équivalentes aux Lycées). Pour simplifier, le tableau 1 ne présente que les filières d'enseignement général et technique les plus fréquentées, sans inclure des formations professionnelles courtes qui viennent après la scolarité obligatoire (exemple : en

¹ Voir Bulletin Officiel, BO 2002 hors-série n° 1 du 14 février et BO 2008 hors-série n° 3 du 19 juin, consultés à <http://www.education.gouv.fr/bo/2002/hs1/default.htm> et <http://www.education.gouv.fr/bo/2008/hs3/MENE0813208A.htm>.

France, il existe un concours spécifique de recrutement des professeurs de lycée professionnel).

France		Age en années des élèves accueillis	Mexique	
Formation des enseignants	Niveaux de scolarité		Niveaux de scolarité	Formation des enseignants
ESPE → CRPE (*) organisation par académie	Maternelle	Moins de 6	Kinder	Escuela Normal
	Ecole (5 années)	De 6 à 12	Primaria (6 années)	
ESPE → CAPES (**) ou Agrégation	Collège (4 années)	De 12 à 13	Secundaria (3 années)	Escuela Normal Superior
		De 13 à 15		
	Lycées (3 années)	De 15 à 18	Bachillerato ou Preparatoria (3 années)	Universités

Tableau 1. Enseignement et formation des enseignants en France et au Mexique

(*) CRPE : Concours de Recrutement des Professeurs des Ecoles

(**) CAPES : Certificat d'Aptitude au Professorat du second degré

Les étudiants français qui préparent la maîtrise “*Métiers de l’enseignement, de l’éducation et de la formation*” (MEEF) la présentent dans le contexte des ESPE. Parmi les unités qui constituent cette maîtrise, on trouve des modules consacrés à l’enseignement disciplinaire, les mathématiques dans le cas qui nous intéresse, ainsi que des modules d’initiation à la recherche, d’ouverture internationale, de mise en œuvre d’outils pédagogiques innovants. La formation inclut également la préparation aux concours nationaux de recrutement, comportant des épreuves écrites d’admissibilité suivies d’épreuves orales d’admission. Les candidats admis à l’issue de ces épreuves suivent une année de stage pratique, qui consiste un enseignement en responsabilité de neuf heures hebdomadaires et en l’élaboration d’un mémoire issu d’une réflexion sur la pratique enseignante ; ce stage est rémunéré comme un enseignement à temps complet (voir EDUSCOL, 2013).

Au Mexique, les institutions en charge de la formation des enseignants du secondaire sont les Ecoles Normales Supérieures du pays. La durée de formation est de quatre ans après le baccalauréat. A partir de la signature de l’Accord National de Modernisation de l’Education de Base (ANMEB, 1992) les programmes de la formation initiale des professeurs ont été modifiés. Ils comportent un tronc commun portant sur l’enseignement de base (préscolaire, primaire et secondaire) et une présence intense en classe pour observation et

pratique. Il s'agit que l'enseignant domine les contenus fondamentaux et acquière les bases pédagogiques suffisantes pour la pratique dans le domaine de l'éducation.

A partir de 1996, la SEP (Secrétariat d'Education Publique, équivalent au Mexique du Ministère de l'Education Nationale en France), en coordination avec les autorités éducatives des États (semblables aux régions françaises, mais avec autonomie législative et exécutive), mit en marche le programme pour la transformation et le renforcement académique des Écoles Normales (PTFAEN), selon les quatre lignes d'action suivantes: modifications de programmes d'enseignement, formation du personnel enseignant des écoles normales, élaboration d'orientations et de normes pour la gestion institutionnelle et la régulation du travail académique, amélioration des installations et équipements des écoles normales. Le programme partait de l'idée que les écoles normales devaient continuer comme par le passé à former les maîtres de l'éducation de base, mais en répondant aux demandes sans cesse plus nombreuses et plus complexes, issues du besoin d'une éducation suffisante pour tous, de qualité de formation élevée et dont les bénéfices soient distribués équitablement (SEP, 1999).

Le plan de formation des enseignants du second degré est entré en vigueur en 1999 et n'a pas été réformé depuis cette date. Il a un caractère national et se distribue dans trois directions, qui sont : activités scolaires, activités d'approche de la pratique scolaire, pratique intensive en conditions réelles de travail. La formation vise à ce que les normaliens acquièrent la connaissance de l'élève du second degré ainsi que la pédagogie et la didactique d'une discipline. Pour obtenir leur titularisation, les élèves-professeurs en dernière année de formation doivent rédiger un mémoire, témoin d'une réflexion sur la pratique enseignante avec les élèves de l'enseignement du second degré. Leur formation achevée, les élèves-professeurs doivent également se présenter au concours d'accès au système éducatif national.

2. Comparaison des plans de formation initiale des professeurs de mathématiques en France et au Mexique

Pour identifier les similitudes et les différences dans les processus de formation des enseignants de mathématiques du secondaire dans l'un et l'autre pays, on a effectué une analyse comparée des résultats des formations initiales. Le tableau 2 présente les meilleurs scores obtenus localement dans les deux pays pour les candidats aux concours nationaux de recrutement de professeurs de mathématiques pour l'année scolaire 2010-2011.

France (CAPES Externe de MATHÉMATIQUES. Sesión 2011)				Mexique (Résultats du concours national de recrutement 2011)			
Académies	Pré- sentés	Admissi- bles	Reçus	Ecole normale	Pré- sentés	Admissi- bles	Reçus
Paris- Créteil- Versailles	299	244 81.6%	104 35%	Normal Superior del Estado de México	30	26 86%	10 33%
Lille	95	77 81%	44 46%	Normal Superior "Prof. Medrano R." del Estado de Chihuahua	29	17 58%	12 41%
Aix- Marseille	91	67 73.6%	33 36%	Centro de Actualización del Magisterio de Chilpancingo	24	16 66%	8 30%
Rennes	87	70 80.4%	36 41%	Normal Superior de Guanajuato	23	15 65%	9 39%
Bordeaux	84	73 86.9%	42 50%	Normal Superior de Chiapas	21	17 80%	10 47%

Tableau 2. Meilleurs résultats locaux en France et au Mexique des candidats aux concours nationaux 2010-2011 de recrutement de professeurs de mathématiques

Sources : Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche (2011) et SEP (2011)

Pour la France, notre analyse de la formation des professeurs de mathématiques s'est appuyée sur le *Cahier des charges du plan académique de formation 2012-2013* (précisant le plan de formation académique 2012-2013) mis en œuvre par l'Université de Paris Diderot-VII, laquelle appartient à l'Académie de Paris et organise la préparation aux concours pour les académies de Paris, Créteil et Versailles. Dans le cas du Mexique, le document analysé est le plan d'études 1999, pour la licence en éducation secondaire de spécialité les mathématiques pour l'enseignement.

Le programme de formation des futurs professeurs de mathématiques de France offre une formation à la fois professionnelle et disciplinaire à l'enseignement des mathématiques (collège et lycée) et comprend la préparation aux concours nationaux du CAPES et du CAFEP (enseignement professionnel). Cette formation permet aux étudiants d'acquérir une culture mathématique de base solide, adaptée aux besoins de l'enseignement secondaire et à l'évolution de ses contenus, et les prépare à enseigner les mathématiques à partir d'une première expérience d'enseignement et d'acquérir une culture plus approfondie sur le domaine de leur choix (histoire des mathématiques, didactique des mathématiques, ou diversification des pratiques professionnelles).

Le programme pour la formation des futurs enseignants de mathématiques du Mexique est divisé en trois domaines principaux: la formation disciplinaire, la formation didactique et la sensibilisation à la pratique scolaire. Pour les normaliens l'étude du contenu disciplinaire devrait être associée aux besoins, processus et formes d'apprentissage de leurs futurs élèves, en s'appuyant sur des activités didactiques spécifiques, des ressources pour l'enseignement et certaines pratiques et modalités d'évaluation.

De l'examen des deux documents précités résulte le constat de quelques aspects communs tels que par exemple, concernant les compétences professionnelles à acquérir en formation des futurs enseignants, le fait de dominer les objectifs et les contenus de l'enseignement secondaire, ainsi que celui de dominer la discipline. Une différence constatée dans les plans de formation est le total des crédits propres à chaque plan de formation.

Dans le cas de la France, il y a 180 crédits pour le premier cycle et 120 pour la maîtrise, soit un total de 300 crédits. Au Mexique le programme comprend 392 crédits pour la seule licence. En procédant à une analyse plus approfondie, on peut diviser le programme de chaque pays en sections de connaissances générales qui incluent les questions relatives à l'éducation, au système éducatif et aux sujets de l'éducation, en sections de mathématiques en tant que discipline et en sections portant sur l'enseignement des mathématiques. On est ainsi conduit au tableau 3.

France			
Total de crédits	Mathématiques	Enseignement des mathématiques	Connaissances générales
Licence (180)	135	6	39
Master (120)	63	54	3
Total (300)	198	60	42
Pourcentages	66%	20%	14%

Mexique			
Total de crédits	Mathématiques	Enseignement des mathématiques	Connaissances générales
Licenciatura	63	105	224
Total (392)			
Pourcentages	16%	26%	58%

Tableau 3. Distribution des crédits de formation des professeurs de mathématiques en France et au Mexique

Sources. Données de la SEP, 1999 et du Site de l'UFR de mathématiques de l'Université de Paris- Diderot, 2012

Dans ce tableau 3, nous pouvons voir que le programme France privilégie la maîtrise des mathématiques, en allouant 66% de crédits à son étude, en plus des séances de préparation aux épreuves du CAPES, ce qui implique que pour devenir professeur de mathématique, il faut surtout être fort dans la discipline. La situation est différente en ce qui concerne le Mexique, car la préparation aux épreuves du concours de recrutement ne fait pas partie du programme; bien que celui-ci spécifie que les futurs enseignants possèdent une maîtrise du contenu de base de mathématiques, il alloue seulement 16% des crédits de formation à l'étude des mathématiques en tant que discipline, ce qui peut être vu comme une faiblesse du programme. Il vaut ainsi la peine de se pencher de plus près sur la formation, notamment mathématique, que reçoivent les futurs professeurs de mathématiques.

3. La formation spécifique des professeurs de mathématiques

Dans le cas de la France, la formation des professeurs de mathématiques a été traditionnellement orientée prioritairement, pour ne pas dire exclusivement, vers l'acquisition d'un solide bagage mathématique. On pourrait résumer cette orientation en disant qu'elle correspond à l'application rigoureuse, quoiqu'implicite, d'un principe que nous énoncerons comme suit.

Principe $N(N+1)$: Pour bien pouvoir enseigner les mathématiques à un niveau de scolarité N , il convient de résoudre aisément les questions du niveau $(N+1)$.

Dans l'énoncé de ce principe, il convient d'entendre par niveaux de scolarité les grands niveaux répertoriés dans le tableau 1. Ainsi en application de ce principe un professeur des écoles (ou Primaria au Mexique) doit être à l'aise sur des exercices mettant en jeu des nombres négatifs, ou des problèmes nécessitant un recours à l'algèbre élémentaire, notions ou pratiques qui sont du niveau du second degré (Secundaria) et dépassent donc le niveau auquel il enseigne. De même, ce principe demandera à un professeur de Secundaria du Mexique, équivalent au collège en France, de résoudre sans difficulté des exercices du niveau baccalauréat.

En France dans la situation actuelle, le recrutement des professeurs est prévu pour tout l'enseignement du second degré, allant jusqu'au niveau du baccalauréat. Il y avait bien eu au moment de la création des Collèges d'Enseignement Général un corps de professeurs spécialisés pour ce niveau d'enseignement secondaire, mais ce corps a été mis en extinction par décret de décembre 2003. Aujourd'hui, l'application du principe $N(N+1)$ pour le recrutement des professeurs de l'enseignement du second degré en France conduit donc, en l'absence de palier reconnu pour le niveau de la fin de scolarité obligatoire, à des exigences qui correspondent aux contenus mathématiques de la licence ou des classes préparatoires aux grandes écoles.

Or il y a une rupture dans l'enseignement du second degré, entre l'esprit et les contenus des mathématiques de la scolarité obligatoire et celles des lycées. Les premiers s'adressent de manière indifférenciée à l'ensemble de la population, et ont pour objectifs essentiels ceux de la formation de citoyens concernés et responsables, objectifs que nous avons déjà mentionnés à propos des évaluations internationales PISA. Les seconds portent la marque de futures orientations professionnelles des publics concernés. La rupture peut notamment être repérée par la considération de grands blocs homogènes du point de vue de leurs problématiques et leurs moyens d'expression, dénommés *strates* par Adjage & Pluvinaud (2012), la *strate algébrique* étant une cible (difficilement atteinte) de la scolarité obligatoire, alors que la *strate fonctionnelle* est réservée au lycée.

En vertu de ces considérations, il apparaît que les professeurs qui enseignent au niveau du collège français sont recrutés pour leurs connaissances mathématiques non pas selon le principe $N(N+1)$, mais selon un principe $N(N+2)$. Deux types d'effets négatifs peuvent en résulter :

- une insuffisance du nombre des candidatures par rapport aux besoins en enseignants, le niveau exigé pour le concours permettant de postuler avec de bonnes chances ailleurs que dans l'enseignement du second degré,
- un décalage créant des difficultés à s'adresser à un public de 11-15 ans, ce public étant souvent jugé par les professeurs plus difficile que les lycéens.

Dès la fin du 20^e siècle, plusieurs chercheurs français, tels Artigue (1995) et Chabanet (1996), ont décrit la formation des professeurs de mathématique en France et ont notamment pointé son manque de prise en compte des particularités d'élèves auxquels l'enseignement s'adresse. Les conditions actuelles ne font que renforcer ces observations.

Les contenus figurant dans la licence de mathématique (mathématiques pour l'enseignement) présentent beaucoup de points communs à travers toute la France : structures algébriques, fondements du calcul différentiel et intégral et de l'analyse, un peu de géométrie (cf. Dorier, 2007). À partir de la troisième année (maîtrise) des cours d'informatique sont donnés dans toutes les universités et les étudiants s'initient souvent à des programmes de calcul formel tels *Maple*, *Mathematica* et *Matlab*. Par contraste, les relations avec les autres disciplines, les applications et la modélisation, les statistiques, l'analyse numérique sont généralement absentes du programme de la licence et sont facultatives au niveau de la maîtrise.

Au Mexique, la formation des professeurs de mathématiques est dévolue aux Ecoles Normales Supérieures selon le plan d'études de 1999. Il y a un tronc commun de formation à l'Education de Base (premier et second degré), offrant les champs suivants de formation : une formation générale à l'Education de Base, une formation commune à toutes les matières de l'enseignement du second degré, une formation spécifique à chaque discipline, les mathématiques dans le cas qui nous

intéresse. Les futurs professeurs sont censés acquérir les compétences et la sensibilité nécessaires à l'éducation d'adolescents, en plus de la capacité à mettre en œuvre les contenus de la discipline d'enseignement pour laquelle ils se forment.

Pour les futurs professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire au Mexique, l'objectif fondamental du plan d'études de la licence en éducation secondaire, du point de vue de la discipline d'enseignement, est le développement de capacités à manipuler en profondeur les contenus mathématiques de ce niveau. Ce n'est donc pas le principe $N(N+1)$ qui s'applique, mais bien plutôt un principe NN' , qui s'énonce comme suit.

Principe NN' : Pour bien pouvoir enseigner les mathématiques à un niveau de scolarité N , il convient de connaître les fondements mathématiques des contenus de ce niveau.

En nous exprimant en termes d'espaces de travail mathématiques considérés par Kuzniak (2011), nous dirons que ce principe conduit à attendre des professeurs à un niveau N qu'ils voient les contenus de ce niveau au sein d'une structure mathématique N' plus avancée que celle présentée à leurs élèves. Par exemple, on peut attendre en vertu de ce principe que le nom de Peano à propos des entiers naturels ne soit pas inconnu d'un professeur des écoles, ou qu'un professeur du niveau secondaire sache considérer la géométrie plane du point de vue des transformations (e. g. caractériser un parallélogramme non seulement comme un quadrilatère à côtés opposés parallèles, mais comme un quadrilatère ayant un centre de symétrie).

Du point de vue pédagogique, la formation vise à ce que les futurs professeurs de mathématiques sachent analyser les situations didactiques dont la mise en œuvre dans l'enseignement favorise l'acquisition par les élèves d'une connaissance qui ait du sens et soit fonctionnelle (SEP, 1999). La formation propre à la spécialité comprend quatorze cours de mathématiques sur les contenus et les compétences didactiques, chacun d'une durée moyenne de quatre heures hebdomadaires, à savoir :

- *introduction à l'enseignement des mathématiques,*
- *la pensée algébrique, les nombres et leurs relations,*
- *les figures géométriques et les corps,*
- *le plan cartésien et les fonctions,*
- *les processus de changement ou de variation,*
- *la mesure et le calcul en géométrie,*
- *les processus cognitifs et le changement conceptuel en mathématiques et en sciences,*
- *échelles et similitude,*
- *séminaire sur des thèmes choisis de l'histoire des mathématiques,*
- *séminaire de recherche sur l'enseignement des mathématiques,*

- *technologie et enseignement des mathématiques,*
- *la prévision et le hasard,*
- *saisie de données et traitement de l'information.*

Mais quelles compétences vont pouvoir résulter de l'application de ces principes et modalités de formation ? Rappelons qu'une compétence est plus qu'une somme de connaissances et savoir-faire, elle implique la capacité à répondre à des demandes complexes en mobilisant des ressources psychosociales dans un contexte particulier (OCDE, 2004). Que sont alors exactement des compétences en mathématique? Et quelles compétences sont attendues des enseignants de cette discipline?

Les compétences en mathématiques ont été considérées par l'Union européenne comme l'une des compétences clés pour le développement personnel, la citoyenneté active, l'inclusion sociale et l'employabilité dans la société de la connaissance du XXI^e siècle. Le concept de compétence mathématique dépasse donc les compétences de base en calcul, et comprend une combinaison de connaissances, compétences et attitudes (EURYDICE, 2011). Au niveau international sont reconnues huit compétences mathématiques, qui sont les suivantes: utiliser des modes mathématiques de pensée, poser et résoudre des problèmes mathématiques et avec les mathématiques, être capable d'analyser et de construire des modèles mathématiques, être capable de faire un raisonnement mathématique, gérer différentes représentations d'objets mathématiques, être capable de gérer le langage symbolique et les formalismes mathématiques, et être en mesure de s'approprier des outils mathématiques (Niss et Højgaard, 2011).

4. Une étude de cas sur des préparations à l'enseignement mathématique

Après notre étude comparative entreprise sur les documents qui régissent la formation des professeurs de mathématiques dans chacun des systèmes éducatifs propres aux deux pays, il vaut la peine de jeter un regard sur la réalité du terrain. Nous nous contenterons dans la présente étude d'obtenir une vision synthétique sur les publics en cours de formation, et notamment d'appréhender entre les deux pays quelques traits de similitude ou des particularités. L'application de questionnaires permet de recueillir des données provenant d'instruments que l'on peut considérer comme identiques. En effet, s'agissant de mathématiques et de leur enseignement, la langue utilisée est de peu d'importance pour l'expression des questions posées. Dans notre étude, celles-ci ont été des trois types:

- positionnement personnel, motivations et impressions des étudiants sur la formation en cours,
- exercices du champ didactique,

- exercices mathématiques.

Les deux premiers types ont été regroupés dans un même questionnaire. Pour le questionnaire de positionnement, motivations et impressions, il nous semble suffisant ici de citer les rubriques proposées, qui ont été les suivantes :

1. Trajectoire personnelle
2. Vécu de formation
3. Expérience personnelle en rapport avec l'éducation ou l'enseignement
4. Quelle image avez-vous de l'enseignement des mathématiques ?
5. Quels problèmes voyez-vous dans l'enseignement des mathématiques ?

En revanche, en annexe 1, nous reproduisons intégralement dans leur version française les deux exercices du champ didactique qui ont été posés.

Les exercices mathématiques, au nombre de quatre, ont constitué un second questionnaire, prévu pour une durée de passation de deux heures. Les énoncés en version française sont reproduits en annexe 2. Ci-après, nous présentons en premier lieu l'analyse a priori des exercices, puis l'application du questionnaire et l'analyse des résultats observés auprès des populations interrogées.

4.1 Analyse a priori des exercices proposés

Exercice D1

L'application du questionnaire dans lequel sont proposés *in fine* deux exercices de caractère didactique était prévue « papier-crayon », c'est-à-dire sans recours à des informations extérieures. Le premier exercice didactique fait simplement appel à une culture personnelle, en présentant des noms qui se sont illustrés par leur contribution à l'étude des phénomènes d'apprentissage ou d'enseignement. Plusieurs réponses peuvent être acceptées:

- pour Socrate, l'*ironie socratique* ou la *maïeutique*,
- pour Piaget, l'*épistémologie génétique* ou les *stades de développement*,
- pour Vygotsky (nom qui s'écrit aussi Vygotski), les *zones de développement* et notamment la *zone proximale de développement*,
- pour Brousseau, la *théorie des situations*, avec les dialectiques qui la sous-tendent, telle la *dialectique de l'action* ou celle de la *formulation*.

Nous ne ferons pas aux distingués lecteurs de cet article l'injure de détailler davantage.

Exercice D2

Le second exercice didactique correspond à une activité professionnelle pas toujours très prisée des enseignants, mais néanmoins nécessaire (n'est-ce pas, Socrate !): la correction de réponses (écrites) d'élèves. Nous avons choisi une réponse donnée par un lycéen mexicain (élève de *preparatoria*) pour sa typicité et sa facilité d'adaptation au français: il a suffi de remplacer quelques expressions originellement en espagnol par leur équivalent français, le reste de la production

étant présenté en écriture symbolique. L'exercice résolu par l'élève est une équation de la forme $\sqrt{A} = B$, où A et B sont des expressions contenant x .

Ce type d'équation est présenté dans des manuels scolaires, tel celui de Swokowski & Cole (1996). Nous reproduisons en figure 1 un extrait de la page 90 de ce manuel, avec en regard la traduction française des indications données. On remarquera que les auteurs ne précisent jamais le statut logique d'une ligne par rapport à celle qui la précède ; précisons pour le lecteur de cette étude qu'il s'agit toujours d'une équivalence SAUF pour la troisième ligne de la solution, consistant en une égalité qui est impliquée par la seconde mais ne lui est pas équivalente.

Resolver $3 + \sqrt{3x + 1} = x$.			
SOLUCIÓN			
$3 + \sqrt{3x + 1} = x$	ecuación dada		Equation donnée
$\sqrt{3x + 1} = x - 3$	se aísla el radical		On isole le radical
$(\sqrt{3x + 1})^2 = (x - 3)^2$	se elevan ambos miembros al cuadrado		On élève au carré les deux membres
$3x + 1 = x^2 - 6x + 9$	se simplifica		On simplifie
$x^2 - 9x + 8 = 0$	se resta $3x + 1$		On ôte $3x + 1$
$(x - 1)(x - 8) = 0$	se factoriza		On factorise
$x - 1 = 0, \quad x - 8 = 0$	se iguala a 0 cada factor		On égale à 0 chaque facteur
$x = 1, \quad x = 8$	se despeja x		On en déduit x

Figure 1. Reproduction de la p. 90 du manuel de Swokowski & Cole

Bien évidemment les auteurs du manuel n'en restent pas à ce qui est présenté en figure 1, ils poursuivent en s'appuyant sur une précision générale qu'ils ont formulée au préalable, à savoir que *quand on élève les deux membres à une puissance paire, il est nécessaire de vérifier les solutions*. En l'occurrence, cette vérification conduira à rejeter la valeur 1 comme solution et au contraire à accepter la valeur 8.

Une telle ligne de conduite préconisée par les auteurs permet d'éviter d'introduire des considérations et des notations logiques. La résolution d'une équation du type considéré est en effet possible par équivalence logique :

$$(\sqrt{A} = B) \Leftrightarrow ((A = B^2) \wedge (B \geq 0)), \text{ le symbole } \wedge \text{ signifiant « et »}.$$

Mais les auteurs de manuels doivent juger trop complexe pour les élèves le symbolisme logique et en particulier une telle équivalence, car elle remplace une égalité par une égalité doublée d'une inégalité. Ce point mériterait toutefois réflexion, car il n'est pas difficile de comprendre que si deux quantités sont égales, leurs carrés le sont, mais que si les carrés de deux quantités sont égaux, les quantités peuvent être opposées.

Venons-en à présent à la correction demandée dans l'exercice D1. La résolution présentée suit très précisément la démarche du manuel que nous avons cité, mais omet la vérification préconisée dans le manuel. Celle-ci conduirait à rejeter la valeur 3. En effet, pour $x = 3$, $\sqrt{7-x} = \sqrt{4} = 2$, tandis que $x - 5 = -2$. Les deux nombres qui ont même carré ne sont pas égaux, mais opposés. Par ailleurs, l'attention de l'élève s'est portée sur l'inégalité $x \leq 7$ qui exprime que la racine carrée de $7 - x$ est définie, mais cette condition sera forcément remplie quand on égalera $7 - x$ à $(x - 5)^2$, c'est-à-dire un nombre positif. Il se peut d'ailleurs que la formulation de cette condition finalement inutile occulte aux yeux de l'élève l'inégalité qui seule importe : $x - 5 \geq 0$.

Quelle est alors la tâche du correcteur confronté à cette résolution ? S'il a lui-même résolu correctement l'équation, condition *sine qua non* pour faire ce travail, il se rendra compte du principal défaut de la réponse, qui est de ne pas avoir rejeté la valeur $x = 3$ comme solution. Ce défaut le conduira probablement à proposer une note de l'ordre de 3 sur le maximum de 5, car le reste est correct. Plus délicate est alors la décision concernant le commentaire à rédiger à l'intention de l'élève. D'une manière générale, les objectifs de tels commentaires sont doubles :

- justifier la notation aux yeux de l'élève concerné,
- lui donner l'occasion de s'améliorer.

Dans notre exemple, l'élève peut avoir l'impression d'avoir parfaitement résolu l'équation et il faut en conséquence qu'il comprenne pourquoi le correcteur ne lui a pas attribué la note maximum de 5 sur 5, mais seulement 3. Pour l'objectif de conduire l'élève à s'améliorer, des explications très détaillées ne sont peut-être pas ce qui est le plus approprié : d'une part, le paquet de copies, qui est la situation courante de correction, ne permet pas au correcteur de rédiger un « roman » pour chacune, mais pousse à la brièveté ; d'autre part, le commentaire ne peut pas être une répétition du cours, qui devrait avoir un caractère collectif dans la situation de classe, mais sera efficace s'il délivre un message qui se grave dans la mémoire de l'élève. En l'occurrence, nous pensons au contrôle, qui est une composante très importante de l'activité mathématique ; on ne peut que conseiller aux professeurs d'inciter les élèves à contrôler leurs résultats systématiquement, pas seulement dans les conditions particulières signalées par les auteurs du manuel cité. En l'occurrence, un feed-back de type socratique pourrait être suffisant, sous la forme « Les valeurs obtenues sont-elles toutes solutions de l'équation donnée ? » ou avec plus de précision « La valeur 3 est-elle solution de l'équation donnée ? »

Exercice M1

Pour les exercices de mathématiques, l'usage des machines était explicitement autorisé. Le temps total de 2h15 pour la passation de ces exercices, soit une moyenne d'un peu plus de 30 minutes par exercice, peut être jugé suffisant. Pour le

premier exercice, de multiples traitements sont possibles. Par exemple avec le logiciel GeoGebra, un tracé de quelques courbes de la famille $y = x + \sqrt{x^2 - 4ax - 3a}$ dépendant du paramètre a permettait de répondre rapidement : Pour $a > 0$, la courbe ne coupe pas l'axe des x , donc l'équation n'a pas de solution ; pour $a = 0$ (voir Figure 2), l'équation admet tout nombre réel négatif comme solution (placer alors une croix dans l'avant-dernière ligne de la colonne) ; pour $a < 0$, la courbe coupe en un point l'axe des x , donc l'équation a une solution unique.

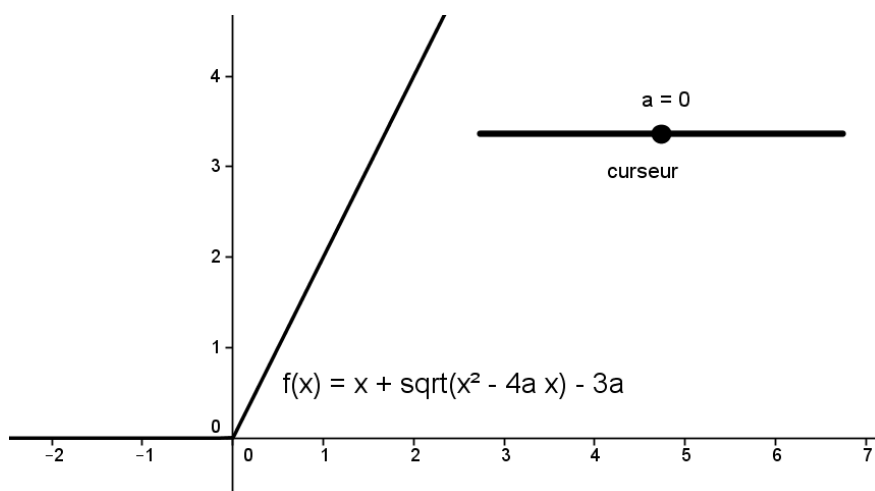


Figure 2. Traitement rapide de l'exercice M1 avec GeoGebra.

D'autres traitements sont possibles. Par exemple, avec le logiciel Derive, la commande `SOLVE(sqrt(x*(x-4)) + x - 3, x, Real)` renvoie la réponse "false", ce qui indique que l'équation proposée n'a pas de solution pour $a = 1$. Sans recourir à des TIC (calculatrice programmable ou ordinateur), on peut conduire une étude analogue à celle montrée dans l'exercice D2, en isolant le radical.

$x + \sqrt{x^2 - 4ax} = 3a$	L'équation donnée
$\sqrt{x^2 - 4ax} = 3a - x$	On isole le radical
$x^2 - 4ax = (3a - x)^2$	On élève au carré les deux membres
$x^2 - 4ax = 9a^2 - 6ax + x^2$	On développe le second membre
$2ax = 9a^2$	On simplifie et isole x

Sauf si a est nul, l'équation ne peut donc avoir pour solution que $x = 9a/2$. Et la vérification dans l'équation donnée conduit à écarter cette valeur comme solution si a est positif, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de solution dans ce cas.

Exercice M2

L'exercice porte sur une construction tout en présentant une figure achevée. Il faut donc la déconstruire, notamment en se représentant la situation initiale. L'énoncé aidait en indiquant « A partir de deux droites graduées de même origine ». Ces deux droites sont celles qui se coupent en O et portent les marques de graduation indiquant 1. Le segment joignant l'une de ces marques au point marqué a a été tracé ensuite, suivi pour conclure par la parallèle à ce segment qui va produire le résultat voulu ab , qui résulte de la propriété de Thalès : ab est à a comme b est à 1.

La construction de Descartes a le gros intérêt, contrairement à la multiplication ab vue comme aire d'un rectangle de côtés a et b , de présenter le produit comme une longueur, autrement dit un objet mathématique qui a la même dimension que chacun de ses facteurs. De plus la construction est opérante pour les nombres négatifs et fournit alors directement la règle des signes, habituellement si difficile à faire comprendre aux élèves. La seule propriété que la construction met moins en évidence que le produit comme aire de rectangle est la distributivité du produit sur la somme. La figure 3 illustre cette propriété, que l'interprétation de la somme comme translation (la flèche qui va de O à b est égale à celle qui va de c à $b + c$) et l'observation de la congruence des deux triangles grisés permettent de justifier.

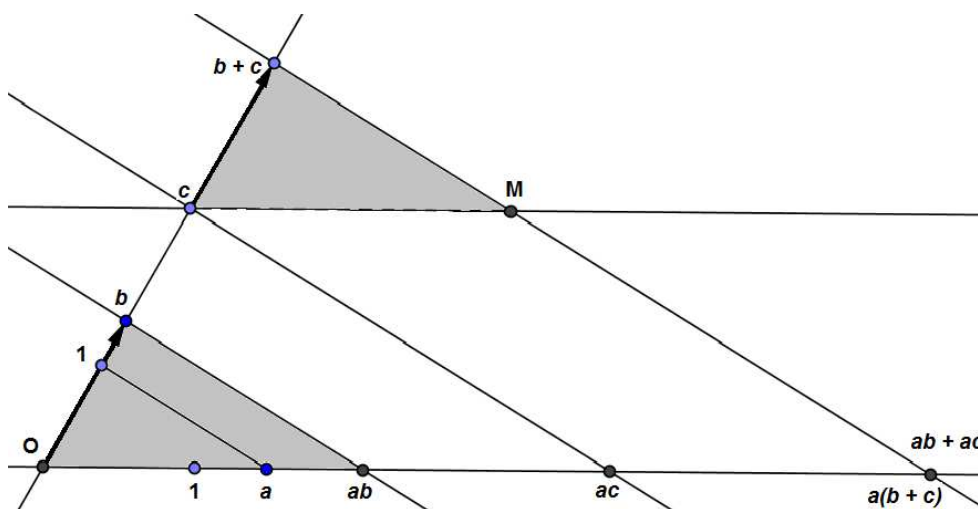
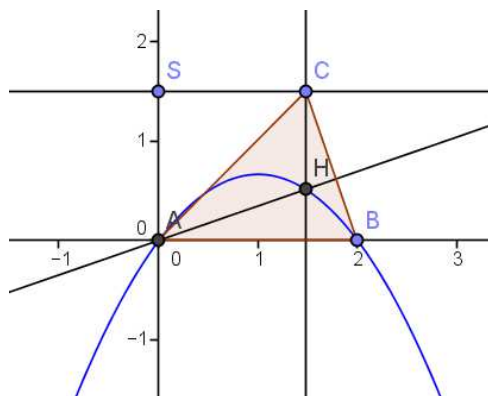


Figure 3. Distributivité $a(b + c) = ab + ac$ dans la construction de Descartes

Exercice M3

L'exercice demande d'obtenir en géométrie analytique le lieu de l'orthocentre d'un triangle ABC dont les sommets A et B sont fixes et C décrit une parallèle à la droite AB. Il paraît naturel pour cette situation de choisir l'axe des x confondu avec

la droite AB. La hauteur du triangle ABC issue de C est alors parallèle à l'axe des y , donc a pour équation $x = t$, où t désigne l'abscisse de C.



Cela conduit, malgré la symétrie de rôle de A et B, à privilégier l'un de ces sommets, par exemple A, en choisissant en ce point l'origine des axes. Dans ces conditions (Figure 4), les sommets ont respectivement pour coordonnées $A(0, 0)$, $B(b, 0)$, $C(t, c)$, et la droite BC a pour pente $c/(t - b)$. Il en résulte que sa perpendiculaire en A a pour équation : $y = (b - t)x/c$. Les coordonnées de l'orthocentre H sont ainsi $(t, (b - t)t/c)$, et le lieu de H est donc la parabole d'équation $y = (b - x)x/c$.

Figure 4.

Exercice M4

L'exercice M4 porte sur le jeu de la « course à 20 », lequel a pu être utilisé à l'école primaire au profit d'un apprentissage de la division. Ici, on ne recherche pas le gain, mais on cherche le nombre de parties possibles. Même si la situation présentée est finie, elle échappe par sa taille à des résolutions par comptage direct. Deux pistes différentes peuvent être suivie pour obtenir le nombre de parties possibles de « course à 20 » : l'une relève d'une démarche combinatoire, l'autre d'une démarche inductive.

La démarche combinatoire consiste à considérer d'abord la plus longue partie possible, celle où l'on n'ajoute que 1 à chaque coup. Cette partie est de 20 coups. Ensuite, on considère les parties dans lesquelles on aura ajouté 2 lors de l'un des coups. Ces parties comportent 19 coups et on a dit 2 à l'un quelconque de ceux-ci.

Elles sont donc au nombre de 19. Les parties en 18 coups sont au nombre de $\binom{18}{2}$, le nombre de possibilités de choisir 2 éléments parmi 18. De même on obtiendra $\binom{17}{3}$ parties en 17 coups. Et ainsi de suite, jusqu'à l'unique partie en 10 coups où l'on ajoute 2 chaque fois. D'où le nombre total $p(20)$ de parties de « course à 20 » :

$$p(20) = \sum_{k=0}^{10} \binom{20-k}{k}.$$

La démarche inductive consiste à observer que l'on dira 20 soit après avoir dit 19, soit après avoir dit 18. Autrement dit, si $p(n)$ désigne le nombre de parties possibles de course à n , on obtient la relation $p(20) = p(19) + p(18)$, et plus généralement $p(n) = p(n-1) + p(n-2)$. On reconnaît là la relation classique des suites de Fibonacci. Ci-après nous reproduisons les sorties Excel correspondant à chacune de

ces deux démarches, avec les combinaisons $\binom{20-k}{k}$ pour k allant de 0 à 10 dans la démarche combinatoire et les nombres $p(n)$ de parties possibles de course à n pour n allant de 1 à 20 dans la démarche inductive, le résultat final étant 10946.

<u>Démarche combinatoire</u>		<u>Démarche inductive</u>	
0	1	1	1
1	19	2	2
2	153	3	3
3	680	4	5
4	1820	5	8
5	3003	6	13
6	3003	7	21
7	1716	8	34
8	495	9	55
9	55	10	89
10	1	11	144
Somme	10946	12	233
		13	377
		14	610
		15	987
		16	1597
		17	2584
		18	4181
		19	6765
		20	10946

Remarques sur les compétences sollicitées par les exercices proposés

Les exercices proposés ont été choisis pour être comparables aux exercices posés lors des épreuves de recrutement des professeurs, que ce soit en France ou au Mexique. Nous avons aussi voulu qu'ils soient illustratifs des principes $N(N+1)$ ou NN' que nous avons présentés dans le § 3. Nous avons considéré pour ce faire que N est le niveau du collège français ou de la *secundaria* mexicaine et $N+1$ le niveau

du baccalauréat (*preparatoria* au Mexique), ce qui nous a conduit à ne pas retenir d'exercices de niveau proprement universitaire.

L'exercice le plus en conformité avec le principe $N(N+1)$ est l'exercice M3, la parabole lieu de l'orthocentre d'un triangle, car c'est un exercice qui serait très normalement soumis à des lycéens préparant le baccalauréat, simplement peut-être en précisant le repère à utiliser, plutôt que d'en confier le choix aux personnes interrogées. Des quatre exercices mathématiques, le plus illustratif du principe NN' est M2, le produit par la construction de Descartes, qui ne mobilise aucune connaissance dépassant le niveau de la scolarité obligatoire, mais amène à approfondir le concept de produit de nombres beaucoup plus que cela est fait dans le discours mathématique scolaire. Pour les exercices M1 et M4, l'informatique représente dans chaque cas un apport intéressant, mais de manière très différente pour les deux exercices: Pour M4 (les parties de course à 20), l'informatique vient après la résolution: ce n'est qu'une fois une démarche trouvée (combinatoire ou inductive) que l'outil calcul opérera sur les objets déterminés. Et l'obtention de l'une ou l'autre démarche suppose une bonne culture mathématique, faute de laquelle on n'a aucune chance de faire surgir les objets mathématiques pertinents. Pour M1 au contraire, nous avons vu que l'informatique peut fournir des résultats expérimentaux qui permettent de répondre sans avoir complètement conduit l'étude mathématique; au passage, notons que cette réduction est une critique fréquemment exprimée par les détracteurs de l'utilisation de l'outil informatique dans l'enseignement.

Au total, mise à part l'absence d'un exercice qui demanderait de produire une démonstration, les quatre exercices retenus constituent un échantillon qui représente bien les divers types de démarches mathématiques que l'on peut attendre de professeurs.

4.2 Application des questionnaires, population interrogée et résultats

Les questionnaires qui viennent d'être présentés ont été appliqués en 2012 et 2013 à deux groupes d'étudiants en formation de professeurs de mathématiques, l'un au Mexique et l'autre en France, chaque groupe recevant évidemment les questionnaires dans sa langue. Les réponses obtenues pour le groupe français, constitué d'étudiants de la préparation de Paris 7-Diderot, ont été au nombre de douze et pour les étudiants de l'Ecole Normale Supérieure de l'Etat de México de dix-sept. Ils s'agit donc de petits effectifs, qui conduisent à situer la présente étude comme une étude de cas et à l'analyser comme telle, même si l'on peut considérer que les deux groupes ont un certain caractère de représentativité du public en formation de professeurs de mathématiques, compte tenu des sélections auxquelles ce public est soumis.

Sans entrer dans les détails, nous pouvons indiquer que les questionnaires de positionnement et de motivations ont conduit à des résultats assez voisins entre les deux pays: on s'y oriente vers les métiers de l'enseignement pour des raisons similaires. Mais les trajectoires d'études sont distinctes: Les étudiants français ont passé une licence de mathématiques avant de s'inscrire à l'ESPE, les étudiants mexicains sont entrés à l'École Normale Supérieure à l'issue d'études de type lycée, ne leur donnant que des connaissances très basiques de mathématiques. Leur formation à l'École, ainsi que nous l'avions vu dans le tableau 3, n'a ensuite comporté que 16% de crédits pour l'étude des mathématiques, alors que 66% des crédits de formation sont dévolus aux mathématiques dans le programme français. La formation mathématique des mexicains est donc nettement moins poussée que celle des français, alors qu'ils bénéficient en revanche de plus de formation pédagogique et didactique.

Ces contrastes se retrouvent dans les réponses aux deux questions didactiques des exercices D1 et D2: Des 17 étudiants mexicains, 12 peuvent associer des concepts didactiques aux personnages indiqués, ce que seuls 2 des 12 étudiants français savent faire. Et en contraste, si moins d'un étudiant du groupe mexicain sur quatre s'est rendu compte de l'erreur présentée par la copie d'élève de l'exercice D2, deux étudiants français sur trois l'ont repérée (voir Figure 5). Un tel résultat serait inquiétant pour la formation mexicaine, si le sujet de la copie présentée dans l'exercice D1, au lieu d'être de *preparatoria* (lycée), était de *secundaria* (collège).

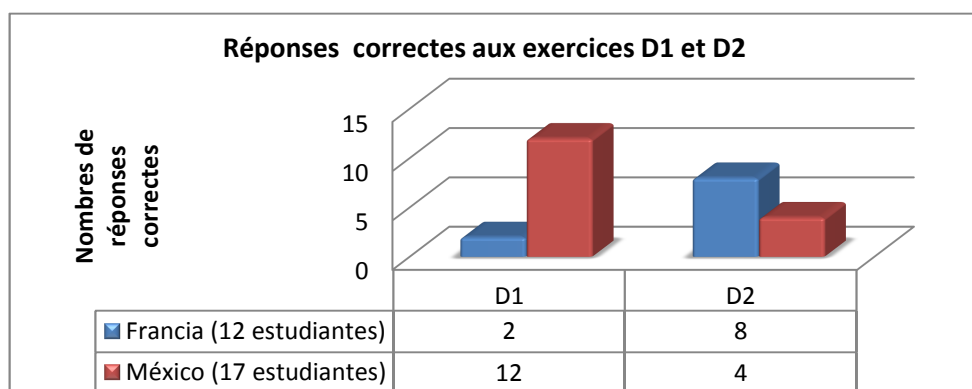


Figure 5. Réponses aux questions didactiques

Pour les résultats aux exercices mathématiques, nous nous sommes rapportés à des critères suffisants par rapport à l'idée de compétence qui nous intéresse, donc des réussites au moins partielles, sans exiger des réussites totales. C'est ainsi que pour M1, les réponses correctes seront suffisantes, sans exigence de justification complète, que pour M2, nous compterons comme réussite une réponse correcte à la première question, sans nous inquiéter des suivantes, et que pour M3 la

reconnaissance d'une parabole sera suffisante, même si son équation n'est pas donnée.

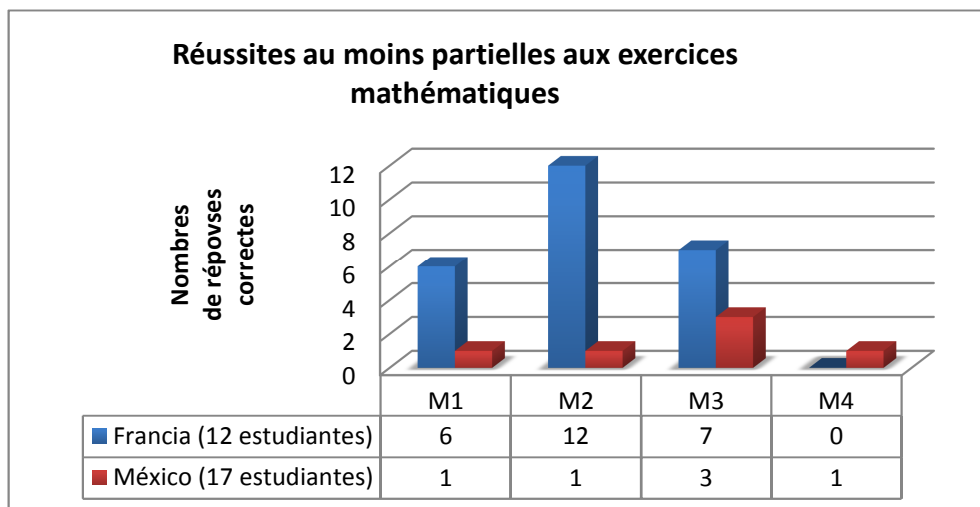


Figure 6. Réussites au moins partielles aux exercices mathématiques proposés

Les résultats apparaissent sur le Figure 6. Pour les étudiants du groupe français, la gamme de réussite est complète: réussite de tous pour M2, d'environ la moitié pour M1 et M3, échec total pour M4. Et, comme on pouvait s'y attendre compte tenu de leur programme de formation, les résultats des étudiants du groupe mexicain sont faibles sur les questions qui dépassent le niveau de la *secundaria*. Seul l'exercice M3 (lieu d'un orthocentre) a amené la plupart des étudiants de ce groupe à se lancer dans des recherches, mais le succès n'est au rendez-vous que pour un étudiant sur quatre.

Un résultat dont l'ampleur nous a frappés est celui obtenu sur M2: Ont réussi cet exercice tous les étudiants du groupe français et un seul du groupe mexicain. Or, nous l'avons dit, cet exercice ne mobilise aucun savoir qui dépasse le niveau de la scolarité obligatoire. Un étudiant mexicain nous donne une piste possible pour expliquer ce phénomène, en déclarant (nous traduisons ses propos) : « *Je n'ai pas réussi à interpréter le schéma. Je ne l'avais pas vu auparavant.* » C'est peut-être alors non pas tant les connaissances mathématiques que la maturité mathématique qui pourrait faire défaut aux étudiants mexicains. Et l'acquisition d'une telle maturité pourrait être favorisée sans doute par une certaine augmentation des crédits affectés à la formation proprement mathématique, mais aussi par la mobilisation dans cette formation du principe $N(N+1)$ plutôt que de privilégier presque exclusivement le principe NN' . En effet, le premier, en ne se focalisant pas

sur les contenus à enseigner, pourrait favoriser l'acquisition de davantage d'autonomie dans l'activité mathématique.

En annexe 3, nous avons reproduit deux réponses à l'exercice M3 et deux réponses à l'exercice M4, chaque fois une de chaque pays. Dans la réponse de l'étudiant français à M3, on peut voir une caractéristique qui est souvent présente, mais n'est pas visible sur les seuls résultats : une tendance à répondre rapidement. Pour l'étudiant français qui a produit la réponse à M3, le recours à Geogebra lui a permis d'obtenir rapidement le tracé du lieu cherché. Il ne s'est pas prononcé pour reconnaître dans ce tracé une parabole. Il se trouve qu'avec Geogebra, le tracé du lieu est malheureusement inopérant pour une parabole : Le logiciel ne se prononce pas sur sa nature et, si l'on prend cinq points du lieu obtenu et que l'on demande au logiciel la conique définie par ces cinq points, il retournera une équation approchée, mais celle-ci correspondra inmanquablement à une conique autre qu'une parabole (notre essai nous a retourné une ellipse). Remarquons au passage que le logiciel Cabri est plus performant ici, il donne l'équation du lieu, alors qu'il faut reprendre toute l'étude avec Geogebra et passer par la géométrie analytique que l'énoncé suggère. L'étudiant ne l'a pas fait. Pour cet exercice M3, une majorité des étudiants français a eu recours à un logiciel de géométrie dynamique (Geogebra), mais ce n'est donc pas une garantie de réussite.

La réponse reproduite à ce même exercice M3 de l'étudiant mexicain est incorrecte, mais pour une autre raison que le fait d'aller vite. L'étudiant n'a pas eu recours à l'informatique, il a procédé à des constructions « papier-crayon ». Signalons au passage que le recours à la technologie a été, d'une manière générale, bien moindre pour les étudiants du groupe mexicain que pour ceux du groupe français. Suite aux quelques tracés effectués, l'étudiant exprime l'idée que le lieu cherché est un demi-cercle, peut-être en référence à mauvais escient au théorème de Thalès sur l'angle droit, parce que qui dit hauteur dit angle droit. On peut avancer que ce type d'erreur correspond à une connaissance insuffisamment assimilée.

La tendance des étudiants français à répondre vite est probablement favorisée par la nature des épreuves des concours français, dont la longueur exige en retour une bonne vitesse de résolution. Si l'on prête attention aux manifestations de ce phénomène, on peut facilement en repérer parmi les réponses données. Par exemple, une réponse (non reproduite) d'un étudiant français à l'exercice M1 consiste à obtenir avec la machine des tracés pour les deux valeurs 1 et -1 du paramètre a . Il en déduit des réponses correctes pour $a > 0$ et $a < 0$. Mais pour $a = 0$, il ne se réfère pas à un tracé et conclut sans argument à l'appui que tout réel est solution, ce qui est faux. Ici, la vitesse est ainsi devenue de la précipitation. Sans doute l'entraînement à travailler vite est-il bon pour la formation de futurs mathématiciens, mais en est-il de même pour celle de futurs professeurs ?

Les réponses à M4 reproduites en annexe 3 renforcent, si besoin était, les propos qui précèdent. Il s'agit des réponses fournies par un étudiant français et un étudiant mexicain, qui sont tous deux entrés dans la démarche combinatoire. Mais si l'étudiant mexicain a conclu correctement, l'étudiant français a commis des erreurs par manque de soin, en allant vite.

Conclusion

Pour limité qu'il soit, le regard que nous avons porté sur les formations initiales de professeurs de mathématiques dans les deux pays met en évidence des pistes de réflexion pour de possibles améliorations, pouvant s'appuyer sur des recherches expérimentales. L'étude comparée a en effet conduit à des questionnements qui n'auraient pas surgi dans des études séparées.

Du côté français, le dogme de la formation unique pour les professeurs enseignant tant au collège qu'au lycée mérite d'être questionné. Ce dogme avec pour conséquence la quasi exclusivité accordée au savoir et au savoir-faire mathématique pour le pré-recrutement (le concours du CAPES) risque d'avoir des effets négatifs surtout pour l'enseignement au collège français. En effet l'application du principe $N(N+1)$ s'est transformée *de facto* en un principe $N(N+2)$ pour les professeurs qui enseigneront au collège français, avec le risque pour eux de se couper de leur public. Par ailleurs, pour donner un exemple pédagogique, connaître Socrate au moment de corriger une copie de mathématique n'est sans doute pas inutile.

De côté mexicain, l'organisation générale semble satisfaisante, et d'ailleurs les résultats de l'enquête PISA au Mexique entre 2003 et 2012 sont apparus en hausse notable, contrairement à la France où ils se sont détériorés durant la même période. En revanche, un sérieux regard sur les contenus proposés dans la formation de l'École Normale Supérieure pourrait permettre des améliorations sensibles du niveau mathématique des professeurs recrutés, sans perte en retour pour la qualité de leur enseignement, au contraire. Les nombres de crédits peuvent être discutés, mais aussi la philosophie de la formation proprement mathématique, pour laquelle le principe $N(N+1)$ pourrait être mis en concurrence avec le principe NN' qui seul fonctionne actuellement.

Annexe 1 DEUX QUESTIONS DIDACTIQUES**Exercice D1 : Une question de connaissance de la didactique des mathématiques**

Pouvez-vous associer un concept didactique à chacun des personnages qui suivent?

Socrate : _____

Piaget : _____

Vygotsky : _____

Brousseau : _____

Exercice D2

Corriger la résolution suivante d'équation par un lycéen, en lui attribuant une note de 0 à 5 et en rédigeant le commentaire que vous destineriez à cet élève.

3. Résoudre l'équation	Note proposée (de 0 à 5)
$\sqrt{7-x} = x-5$ $(\sqrt{7-x})^2 = (x-5)^2$ $7-x = x^2 - 10x + 25$ $x^2 - 9x + 18 = 0$ $(x-6)(x-3) = 0$ $\Rightarrow \boxed{x_1 = 6}$ $\boxed{x_2 = 3}$ solutions	 Commentaire pour l'élève

Annexe 2 QUESTIONNAIRE DE MATHÉMATIQUES

Durée: 2 heures. Calculatrice programmable ou ordinateur personnel autorisés

Exercice M1

Dans le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, on considère l'équation suivante, dépendant du paramètre a :

$$x + \sqrt{x^2 - 4ax} = 3a$$

Pour chaque colonne de la table ci-dessous, placer une croix dans la case qui convient.

Dans le cas où

$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$

l'équation a 0 solution

l'équation a 1 solution

l'équation a 2 solutions

l'équation a une infinité de solutions ne recouvrant pas $\mathbb{R}$

l'équation admet tout élément de $\mathbb{R}$ comme solution

Pour répondre, avez-vous utilisé l'outil informatique (de la calculatrice programmable à l'ordinateur) ? ☐ Oui ☐ Non

En cas de réponse affirmative, merci de préciser brièvement l'outil utilisé et l'usage fait :

.....

Exercice M2

A partir de deux droites graduées de même origine, pour obtenir le produit de deux nombres, René Descartes propose une méthode dans l'appendice géométrique à son fameux *Discours de la Méthode* (Descartes, 1637, p. 298).

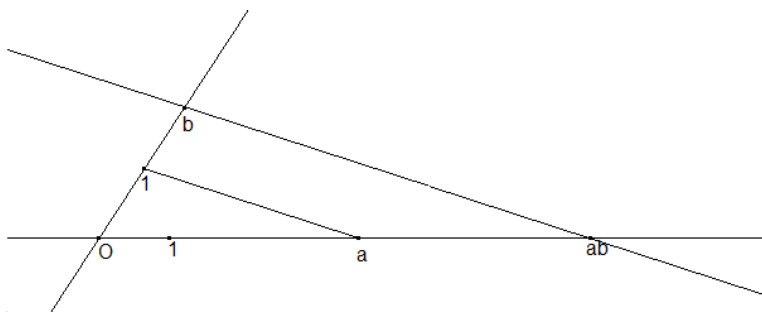


Figure. Illustration de l'obtention géométrique de $a \times b$ par la méthode de Descartes.

1) Ainsi que Descartes l'a fait, décrire la construction illustrée pour l'obtention géométrique du produit $a \times b$.

2) Justifier l'obtention géométrique du produit $a \times b$ par cette construction.

3) Illustrer géométriquement la distributivité du produit sur la somme.

4) La *Figure* tracée illustre la méthode de Descartes dans le cas de deux nombres positifs. A la lumière de la construction, commenter la *règle des signes* pour le produit de deux nombres relatifs.

Exercice M3

Un triangle ABC a ses sommets A et B fixes, tandis que son sommet C est mobile sur une droite parallèle à AB . Quel est le lieu géométrique de l'orthocentre du triangle ABC ? Justifier la réponse.

Recommandation : Choisir un repère convenable et recourir à la géométrie analytique.

Exercice M4.

La *course à vingt* est un jeu pour deux joueurs. Le premier joueur commence le jeu en disant 1 ou 2, à son choix. Ensuite, chacun des deux joueurs, à tour de rôle, ajoute au dernier nombre déclaré 1 ou 2, toujours à son choix. Le gagnant est le joueur qui dit vingt.

A	1		5		7		10		14		17		20
B		3		6		9		12		16		18	

La table ci-dessus montre une partie, dont le gagnant est le joueur A.

A	1		5		7		10		13		16		19	
B		3		6		9		11		14		17		20

Et cette autre table montre une revanche du joueur B.

Combien y a-t-il de parties possibles de *course à vingt* ? Justifier la réponse.

Annexe 3

REPRODUCTION DE RÉPONSES A M3 ET M4

M3. ¿Cuál es el lugar geométrico del ortocentro de un triángulo ABC cuyos vértices A y B son fijos, mientras C se mueve sobre una paralela dada a AB? Justifica tu respuesta.

Recomendación: En un sistema de ejes escogido a propósito, utiliza geometría analítica.

Es la semicircunferencia que tiene como diámetro al segmento AB.



$A(1,1)$ y $B(5,1)$

Exercice M3

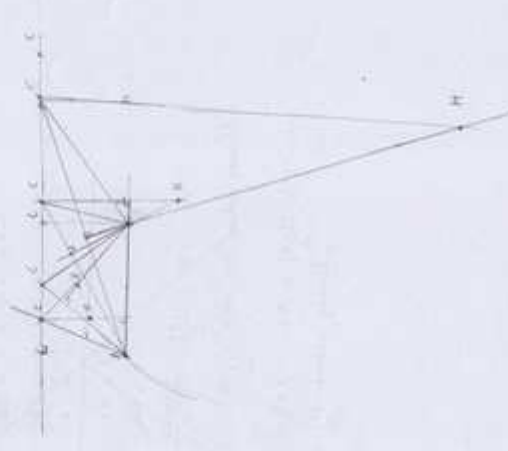
Un triangle ABC a ses sommets A et B fixes, tandis que son sommet C est mobile sur une droite parallèle à AB. Quel est le lieu géométrique de l'orthocentre du triangle ABC? Justifier la réponse.

Recommandation: Choisir un repère convenable et recourir à la géométrie analytique.

Utilizar el teorema para investigar la semicircunferencia de Celly.

Que el triángulo ABC

que para A y B fijos, el punto C puede moverse sobre una recta paralela a AB. Se construye el triángulo ABC y se busca el lugar geométrico del punto H, ortocentro del triángulo.



Bibliographie

Acuerdo Nacional de Modernización de Educación Básica, ANMEB (1992). Diario Oficial de la Federación. P. 12.

Consulté à: <http://www.sep.gob.mx/work/models/sep1/Resource/b490561c-5c33-4254-ad1c-aad33765928a/07104.pdf>.

ADJIAGE, R. & PLUVINAGE, F. (2012) Strates de compétence en mathématique. *Repères-IREM* Numéro 88. Nancy, France, TOPIQUES éditions. P.43-72

ARREDONDO, A. & JUÁREZ M. R. (2011). Los estudios comparados, la formación de docentes en matemáticas, categorías e indicadores. Ponencia presentada en el Congreso Internacional de Educación y Prácticas Innovadoras de la UNAM. México. P. 19. ISBN 978-607-02-2575-8

ARTIGUE, M. (1995). Ingeniería didáctica, en *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica. Bogotá. Colombia. Impreso en México. p. 25

BACKHOFF ESCUDERO, E. & SOLANO FLORES, G. (2003), Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias Naturales (TIMSS): Resultados de México en 1995 y 2000, Informe técnico, Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). P.34 Consulté à http://www.inee.edu.mx/images/stories/Publicaciones/Reportes_investigacion/TIMSS_95/Completo/timss95_00completo.pdf

DORIER, J. L. (2007). Panorama de las matemáticas en la educación francesa desde el parvulario hasta la universidad. *Repères-IREM*, (Institut de Recherche sur l'enseignement des mathématiques) de Paris 7. Consulté à: <http://www.cfem.asso.fr/sysedufresp.pdf>

DUCOING, P. (2004). Origen de la Escuela Normal Superior de México en *Revista Historia de la Educación Latinoamericana*. Vol. 6. Num. 6. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Colombia. P. 35. Consulté à: <http://www.redalyc.org/pdf/869/86900604.pdf>

EDUSCOL (2011). *Le site des professionnels de l'éducation*. (<http://eduscol.education.fr/>).

EDUSCOL (2013). *Le site des professionnels de l'éducation*. (<http://eduscol.education.fr/>).

EURYDICE, (2011). La enseñanza de las matemáticas en Europa. Retos comunes y políticas nacionales. Red española de información sobre educación. Gobierno de

España. Ministerio de Educación, cultura y deporte. P. 23. Consulté à: <http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice>

GODINO J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. Departamento de Didáctica de la Matemática Facultad de Ciencias de la Educación Universidad de Granada. En *Revista de Educación Iberoamericana de Educación Matemática*. No. 20.

ICMI, 2009. *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics: The 15th ICMI Study*, eds: Ruhama Even and Deborah Loewenberg Ball. New ICMI Study Series 11

UFR de mathématiques de l'Université de Paris- Diderot, (2012). Consulté à http://www.math.univ-paris-diderot.fr/#les_cursus

KUZNIAK, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16(1), 9-24.

MINISTERIO DE ENSEÑANZA SUPERIOR Y DE LA INVESTIGACION, (2011). *Cahier des charges du plan académique de formation 2012-2013*. Académie de Paris. Ministère de l'éducation nationale française. Consulté à : http://www.ac-paris.fr/portail/upload/docs/application/pdf/201201/cahier_des_charges_paf12-13.pdf

NISS, M. y HOJGAARD, T. (2011). *Competencies and Mathematical Learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. MFUFA, Roskilde University, Denmark. Consulté à: https://pure.au.dk/portal/files/41669781/THJ11_MN_KOM_in_english.pdf

OCDE, (2004). Definición y selección de competencias. Executive summary. Consulté à: <http://www.oecd.org/centrodemexico/laocde/>

OECD (2013) *PISA 2012 Results*, Consulté à <http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results.htm>

OCDE (2013), Note par pays. Consulté à: <http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-results-france.pdf>

RICO, L. Y CAÑADAS, M. (2008). *Estudio TEDS-M. Estudio internacional sobre la formación inicial del profesorado de matemáticas*. Universidad de Granada. España. P. 123. Consulté à: <http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas13SEIEM/SEIEMXIIIRicoGomezCanadas.pdf>

SÁENZ, C. (2007). *La competencia matemática (en el sentido de PISA) de los futuros maestros*. Investigación didáctica. Instituto Universitario de Ciencias de la

Educación (IUCE). Universidad Autónoma de Madrid (UAM). P. 45 Consulté à:
<http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/87932/216422>

SEP, (1999). *Plan de estudios de la licenciatura en educación secundaria con especialidad en matemáticas*. Programa para la Transformación y el Fortalecimiento Académicos de las Escuelas Normales. Subsecretaría de Educación Básica y Normal. pp. 25-28. México. D.F.

SEP, (2011). Plan de estudios 2011. Educación Básica. Dirección General de Desarrollo Curricular. Primera edición México. D.F. Pag. 15-18 Consulté à:
<http://basica.sep.gob.mx/reformaintegral/sitio/pdf/secundaria/plan/PlanEstudios11.pdf>

SEP, (2011). Competencias para el México que queremos. Hacia PISA 2012. Dirección General de Formación Continua de Maestros en Servicio. México. D.F.

SWOKOWSKI, E. & COLE, J. (1996) *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Grupo Editorial Iberoamérica, Tercera Edición, p. 90

VAILLANT, D. (2009). *La formación de docentes de matemática: reveladores hallazgos*. Grupo de Trabajo sobre Desarrollo Profesional Docente en América Latina. Programa de Promoción de la Reforma Educativa de América Latina y el Caribe. Facultad de Administración y Ciencias Sociales Universidad ORT Uruguay. Pag. 5-6. Consulté à:

http://www.preal.org/Grupo3NN.asp?Id_Noticia=215

MARÍA DEL ROCÍO JUÁREZ
roci_1978@hotmail.com

ADELINA ARREDONDO
adelinaarredondo@yahoo.com

FRANÇOIS PLUVINAGE
fpluvinage@cinvestav.mx

INFORMATIONS AUX AUTEURS

Les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives sont une revue annuelle éditée par l'IREM de Strasbourg, Université Louis Pasteur. Elle a été fondée en 1988 par R. Duval et F. Pluvinage.

La revue publie des articles de recherches propres à développer et à stimuler la réflexion sur l'enseignement des mathématiques en direction de tous les types de publics : écoliers, lycéens, étudiants et adultes en formation. Les présentations de recherches concernant la formation initiale et continue des enseignants et sur l'enseignement dans des contextes socioculturels variés sont les bienvenues.

Les articles peuvent être de nature théorique en relation étroite avec une expérimentation dans le cadre d'un enseignement. Ils peuvent être aussi des comptes rendus d'une expérience d'enseignement appuyée sur un cadre théorique explicite. Les domaines théoriques de références sont issus de la didactique des mathématiques. Lorsqu'ils s'insèrent dans une problématique d'enseignement des mathématiques, les travaux peuvent aussi prendre appui sur la psychologie cognitive et sur la linguistique.

Les articles ne doivent généralement pas dépasser vingt pages mais exceptionnellement ils peuvent être plus longs et permettre ainsi à l'auteur de développer un point de vue original et émergeant dans le champ de recherche. Il est aussi possible de présenter une synthèse des recherches menées dans un domaine particulier de la didactique des mathématiques. Les articles proposés sont soumis à un arbitrage avant publication. Le cas échéant, des demandes de modifications, aménagements ou compléments des textes présentés seront adressées aux auteurs.

La langue de la revue est le français. Des articles peuvent être publiés dans d'autres langues (notamment anglais et espagnol) ; ils seront alors précédés d'une présentation analytique rédigée en français par l'auteur ou par l'équipe de rédaction.

Les articles proposés pour publication dans les *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* de l'IREM de Strasbourg peuvent être transmis sous forme de documents attachés à des messages électroniques. Il convient d'adresser ces messages à l'un des rédacteurs en chef, à son adresse électronique qui est indiquée dans ce volume.

Un modèle d'article au format des Annales se trouve sous forme de fichier *word* à l'adresse URL :

http://irem/data/publi/annales/templates/modele_annales_didactiques.doc

Après ouverture et enregistrement sous un nouveau nom, il permet d'introduire par copier-coller aux emplacements appropriés, en respectant les fontes de caractères et les tailles :

- le nom de du ou des auteurs ;

- le titre complet ;
- le titre éventuellement abrégé, figurant dans l'en-tête des pages impaires ;
- le bloc « abstract – résumé – mots clés » ;
- le texte proprement dit de l'article proposé ;
- la bibliographie sous forme normalisée (s'inspirer du modèle où apparaissent les différents cas pour la présentation des références).

Pour composer un article sans utiliser le modèle, par exemple en recourant à LaTeX, voici des précisions sur le format des pages et les caractères utilisés.

Feuille A4 portrait, avec les marges suivantes :

Haut :	3 cm
Bas :	8 cm
Gauche :	4 cm
Droite :	4 cm
Reliure :	0 cm
En tête :	2 cm
Pied de page :	7 cm

Caractères :

- Auteur(s) en première page : Arial 12 points, gras, petite capitale, Centré ;
- Titre en première page : Arial 14 points, petite capitale, Centré ;
- Abstract – Résumé – Mots clés : Times New Roman 10 points ;
- En-tête : Arial 9 points ;
- Corps de texte : Times New Roman 11 points.

Pour la pagination d'un article proposé, commencer par le numéro 1.

Adresses électroniques :

- pour des commandes de volumes, mailto :

bibirem@math.u-strasbg.fr

- pour des propositions d'articles, mailto :

alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr
fpluvinage@cinvestav.mx

Imprimerie et reprographie
Direction des affaires logistiques intérieures
Université de Strasbourg
Dépôt légal au 4^e trimestre 2014