ATHANASIOS GAGATSIS ET ANNITA MONOYIOU

LES STRATEGIES DES FUTURS INSTITUTEURS DANS LA RESOLUTION DE TACHES SUR LES FONCTIONS. APPROCHE PONCTUELLE OU APPROCHE COORDONNEE ?

Abstract. Future teachers' strategies in solving tasks about functions - Point wise approach or coordinated approach?
The aim of this research was to contribute to the understanding of the point wise and coordinated approaches pre-service teachers develop and use in solving function tasks, and to examine which approach is more correlated with their ability in solving verbal complex problems. The study was conducted in three phases. Participants were 548 pre-service teachers. A test consisted of seven tasks was administrated to all the participants. Results were similar in all phases, indicating the stability of teachers' approaches and providing support for their intention to use the algebraic approach. Teachers who were able to use the coordinated approach had better results in problem solving.

Résumé. Le but de cette recherche a été d'une part de contribuer à la compréhension de l'approche ponctuelle et l'approche coordonnée que les élèves-enseignants développent et utilisent dans la résolution des tâches de fonction, d'autre part d'examiner laquelle de ces approches est la plus adaptée à leur capacité à résoudre des problèmes verbaux complexes. L'étude a été conduite en trois phases et 548 élèves-enseignants y ont participé. Un test constitué de sept tâches a été appliqué à tous les participants. Les résultats ont été similaires dans toutes les phases, ce qui montre la stabilité de l'approche des enseignants et confirme leur volonté d'utiliser l'approche ponctuelle. Les enseignants qui ont été capable d'utiliser l'approche coordonnée ont eu de meilleurs résultats dans la résolution de problèmes.

Mots-clés. *Fonction, élèves-professeurs, approche ponctuelle, approche coordonnée*

1. Le concept de fonction dans la recherche en didactique des mathématiques

Bien des chercheurs se sont intéressés aux fondements théoriques des recherches en didactique des mathématiques. Brousseau (1997) propose la théorie des situations didactiques, qui joue un rôle important dans les recherches françaises en didactique des mathématiques. Duval (2002) insiste sur le rôle primordial des représentations pour l'apprentissage des mathématiques et il propose la théorie des registres de représentation, qui constitue le fondement théorique de la présente recherche. Vergnaud propose « Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques » (Vergnaud, 1981) et quelques années plus tard il présente « La théorie des champs conceptuels » (Vergnaud, 1991). La majorité des chercheurs qui ont travaillé sur le domaine théorique de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques ont

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 18, p. 115 - 137.

cherché des relations entre les comportements des étudiants et la connaissance acquise (Balacheff, 1995). Cette relation entre comportement et connaissance est cruciale ; si elle n'était pas apparente comme conséquence de la mise en cause du behaviorisme (Balacheff, Gaudin, 2002), elle a toujours été implicitement présente dans la recherche sur l'éducation. La question des relations entre comportements et connaissances est considérée comme fondamentale dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1997). Un de ses postulats est que chaque situation – problème sollicite de la part de l'étudiant des comportements qui sont des indications de la connaissance acquise. Balacheff et Gaudin (2002) présentent plusieurs points de vue sur ces relations entre comportements des étudiants et connaissances acquises :

*Une connaissance est caractérisée comme l'état de l'équilibre dynamique d'une boucle d'action/retour en arrière entre un sujet et un milieu sous des contraintes prohibitives de viabilité (*p.3).

Ces deux auteurs essaient de donner une caractérisation formelle du mot conception. Ils insistent sur la nécessité d'un meilleur fondement de la définition des conceptions, qui, d'ailleurs, a été signalée par plusieurs chercheurs (Confrey, 1990 ;Vinner 1983, 1987 ; Smith, Disessa, & Rochelle, 1993). En se basant sur la définition de Vergnaud (1991) ils proposent la définition suivante :

Nous appelons conception C un quadruplet (P, R, L, S) dans lequel :

- P est un ensemble de problèmes ;

- R est un ensemble d'opérateurs ;

- L est un système de représentation ;

- S est une structure de contrôle.

Toutes les idées développées dans leur article sont ensuite appliquées au domaine des fonctions et notamment aux conceptions des étudiants liées à ce concept. En particulier, ils analysent les conceptions proposées par différents chercheurs et ils les caractérisent au moyen du quadruplet défini plus haut. Les auteurs mettent l'accent sur l'analyse des conceptions des étudiants à propos du concept de fonction.

Le concept de fonction est central en mathématiques et mathématiques appliquées. Il est donc naturel que l'enseignement et l'apprentissage des fonctions soit un thème qui fasse l'objet de très nombreuses recherches (Dubinsky & Harel, 1992 ; Artigue, 2009; Vanderbrouck, 2011). La compréhension des fonctions n'est apparemment pas simple : Les étudiants de l'enseignement secondaire, voire même de l'enseignement supérieur, quel que soit leur pays, ont des difficultés à conceptualiser la notion de fonction. La compréhension du concept de fonction constitue donc un souci majeur des éducateurs en mathématique et attire l'attention toute particulière de la part de la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques (Dubinsky & Harel, 1992 ; Sierpinska, 1989, 1992). Bien souvent, les étudiants qui entrent à l'université ne savent pas manipuler des fonctions qui ne sont pas définies par une formule algébrique (Vandebrouck, 2011). Les travaux de Vinner sur le domaine des conceptions des étudiants à propos des fonctions sont classiques.Vinner (1983, 1987, 1992) a identifié plusieurs comportements conceptuels des étudiants à propos des fonctions :

- *La correspondance qui constitue la fonction devrait être systématique et être établie par une règle ;*
- *Une fonction doit être un terme algébrique ;*
- *Une fonction est identifiée par une de ses représentations graphiques ou algébriques ;*
- *Une fonction devrait être donnée par une règle ; une fonction peut avoir différentes règles de correspondance pour des domaines disjoints ;*
- *La représentation graphique d'une fonction doit être régulée de manière systématique ;*
- *Une fonction est une bijection.*

Dans le même esprit, Vinner et Dreyfus (1989) ont étudié les images des étudiants associées aux fonctions et leur relation avec la définition de la fonction. Il faut observer que ces conceptions existent chez les étudiants de pays différents. Ainsi Elia, Panaoura, Eracleous & Gagatsis (2007) ont examiné les conceptions des élèves du second degré de Chypre à propos du concept de fonction et ses relations avec les représentations de fonctions. En utilisant la classification hiérarchique implicative et cohésive à l'aide du logiciel CHIC, plusieurs chercheurs (Lerman, 1981 ; Bodin, A., Coutourier, R. & Gras, R., 2000) ont trouvé des relations entre les conceptions des étudiants, les conversions entre représentations des fonctions et la résolution des problèmes verbaux sur les fonctions. En se fondant sur un cadre théorique semblable, Elia, Panaoura, Gagatsis, Gravvani & Spyrou (2008) ont trouvé des relations similaires entre les conceptions des élèves du second degré en Grèce et leur résolution de problèmes verbaux sur les fonctions.

Enfin, il faut dire qu'il y a quantité de recherches sur la fonction et sur des concepts relatifs aux fonctions. Ainsi d'autres recherches ont examiné le concept de limite d'une fonction et le rôle des représentations sur la compréhension de ce concept (Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T., & Zoulinaki, F., 2009), ou le concept de tangente au graphe d'une fonction (notamment Castella, 1995).

2. Le rôle des représentations graphiques dans l'apprentissage des fonctions

Un facteur qui influence l'apprentissage des fonctions réside dans la diversité des représentations liées à ce concept (Hitt, 1998). Au paragraphe précédent, nous avons présenté la définition de la conception par un quadruplet (Balacheff & Gaudin, 2002). Une composante de ce quadruplet concerne les systèmes de représentation. En effet, un objectif éducatif important en mathématiques consiste pour les élèves en le fait d'identifier et d'utiliser efficacement diverses formes de représentation du même concept mathématique et de savoir passer avec aisance d'un système de représentation à un autre.

L'utilisation de représentations multiples est fortement liée au processus complexe d'apprentissage en mathématiques, et plus particulièrement, à la recherche d'une meilleure compréhension par les étudiants des concepts mathématiques importants (Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987 ; Greeno & Hall, 1997), telle que celui de fonction. Etant donné que la représentation ne peut décrire complètement une construction mathématique (un concept mathématique) et que chaque représentation possède différents avantages, l'utilisation de différentes représentations pour la même situation mathématique constitue le noyau de la compréhension mathématique (Duval, 2002). C'est un des postulats principaux theoriques adoptés dans cette étude. Ainsworth, Bibby et Wood (1997) ont suggéré que l'utilisation de multiples représentations peut aider les élèves à développer des idées et processus différents, à retenir des significations et à promouvoir une compréhension plus profonde. En combinant les représentations, les élèves ne sont plus limités par les forces et faiblesses d'une représentation particulière. De plus, l'utilisation de multiples représentations peut aider les élèves à développer des capacités d'interprétation des représentations graphiques dans diverses situations (Bell et Janvier, 1981).

Certains chercheurs interprètent les erreurs des élèves soit comme le résultat d'une mauvaise manipulation des représentations, soit comme un manque de coordination entre les représentations (Greeno & Hall, 1997 ; Smith, DiSessa, & Roschelle, 1993). Les formes standard de représentation de certains concepts mathématiques, tel que le concept de fonction (la forme algébrique), ne sont pas suffisantes pour que les élèves puissent construire une signification entière et saisissent la portée réelle de leurs applications. Les enseignants de mathématiques, au secondaire, se focalisent traditionnellement dans leur cours sur l'utilisation de la représentation algébrique des fonctions (Eisenberg & Dreyfus, 1991). Sfard (1992) a montré que beaucoup d'élèves étaient incapables de passer d'une représentation algébrique à une représentation graphique des fonctions, alors que Markovits, Eylon et Bruckheimer (1986) ont observé que la conversion d'une représentation graphique à une représentation algébrique était plus difficile que l'inverse. Sierpinska (1992) soutient que les étudiants ont des difficultés à créer des liens entre les différents types de représentation des fonctions, ainsi que des difficultés à interpréter les graphes et à manipuler les symboles liés aux fonctions. De plus, Aspinwall, Shaw et Presmeg (1997) ont constaté dans certains cas que des images gravées dans les esprits d'étudiants peuvent provoquer des difficultés réduisant par exemple leurs possibilités de passer d'une représentation graphique à une représentation algébrique.

Gagatsis, A. Deliyianni, Elia & Panaoura (2011) ont exploré la flexibilité dans le cas du domaine numérique. Même si cet article ne portait pas sur les fonctions, il a paru justifié d'adopter dans la présente recherche les fondements théoriques sur la flexibilité représentationnelle.

Enfin, Artigue a présenté un certain nombre d'outils conceptuels pour aborder l'apprentissage et l'enseignement des fonctions (Artigue, 2009). Nous adoptons trois d'entre eux qui nous semblent particulièrement efficaces pour l'étude des résultats de notre recherche concernant la transition du Lycée à l'Université :

- l'identification de différents registres de représentation de fonctions et l'analyse des caractéristiques des interactions entre ces registres (Duval, 2002).

- l'identification de différents points de vue possibles sur une fonction : le point de vue ponctuel de la correspondance entre un élément et son image mais aussi le point de vue global qui permet de reconnaître les fonctions (Artigue, 2009).

- l'identification de différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances en jeu dans la résolution de tâches mettant en jeu des fonctions (Robert, 1998).

L'outil principal de notre recherche est le premier de ceux proposés par Artigue, celui des registres. En particulier, nous nous intéressons au passage d'un registre à l'autre, autrement dit à la conversion d'une représentation à une autre. Celle-ci conduit à la mise en œuvre du deuxième outil proposé par Artigue, concernant l'identification de différents points de vue possibles sur la fonction : les points de vue ponctuel et global. Ce point de vue théorique a été essentiellement utilisé dans les études d'Even (1998), et de Mousoulides et Gagatsis (2004). Even (1998) s'est attaché à analyser les corrélations entre la flexibilité dans le passage d'une représentation à une autre et d'autres aspects de connaissance et de compréhension. Cette étude a montré que les élèves ont des difficultés quand ils ont besoin de créer un lien flexible entre différentes représentations de fonctions. Un résultat important de l'étude est que beaucoup d'élèves traitent les fonctions de manière ponctuelle mais ne peuvent pas réfléchir sur une fonction d'une manière globale, c'est-à-dire n'accèdent pas à la conception objet d'une fonction au sens de Tall. Des données de l'étude, il apparaît aussi que les sujets qui peuvent facilement et librement utiliser une analyse globale des modifications dans la représentation graphique ont une meilleure et plus profonde compréhension des relations entre la représentation graphique et la représentation symbolique. Mousoulides et Gagatsis (2004) ont aussi adopté l'approche de Michèle Artigue et ont introduit les deux expressions d'approche algébrique et d'approche géométrique. Ils ont analysé les performances des étudiants de l'Université de Chypre dans les activités mathématiques qui impliquent principalement la conversion entre des systèmes de représentation de la même fonction, et se sont intéressés à l'approche opérée par les étudiants dans l'utilisation des représentations de fonction et quant à leur lien avec le processus de résolution de problèmes. Le résultat le plus important de cette étude est que deux groupes distincts se sont formés avec constance : les approches algébriques et géométriques. Les étudiants suivant l'approche algébrique calculent différents points du graphe de la fonction en calculant des valeurs de y pour différentes valeurs de x à l'aide de la formule algébrique de la fonction. Il s'agit donc d'une approche ponctuelle. La majorité des étudiants suit cette approche ponctuelle. De l'autre côté, les étudiants qui suivent l'approche géométrique, c'est-à-dire les ceux qui traitent les différentes tâches en ayant recours aux représentations graphiques des fonctions, réussissent mieux les problèmes verbaux sur les fonctions : ils peuvent plus facilement comprendre les relations entre les représentations symboliques et graphiques qui interviennent dans les problèmes verbaux.

Dans cette étude, le concept de fonction est abordé selon deux perspectives différentes, la perspective ponctuelle et la perspective coordonnée. La perspective algébrique est similaire à l'approche ponctuelle décrite par Even (1998) et à l'approche algébrique décrite par Mousoulides et Gagatsis (2004). Dans cette perspective, une fonction est perçue comme la transition entre des valeurs x et y : pour chaque valeur de x, la fonction possède une valeur y correspondante (Moschkovich et al., 1993). La perspective coordonnée combine les approches ponctuelles et géométriques. Dans cette perspective, la fonction est pensée d'une manière locale (c'est-à-dire ponctuelle) et globale (c'est-à-dire géométrique) en même temps. Les étudiants peuvent « coordonner » (manipuler avec dextérité) deux systèmes de représentation, algébrique et graphique. En d'autres termes, les étudiants sont amenés à tirer des informations à la fois de la représentation algébrique $y = f(x)$ d'une fonction et de sa représentation graphique.

Finalement le troisième outil proposé par Michelle Artigue, c'est à dire l'idée de Robert (1998) des différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances en jeu dans la résolution de tâches de fonction est pris en compte lors de la résolution de problèmes verbaux proposés aux étudiants.

3. Méthode

Le but de cette étude est de contribuer à la compréhension des approches ponctuelle et coordonnée que les élèves-professeurs de l'école primaire développent et utilisent dans les tâches de résolution de fonction et d'examiner quelle approche est la plus adaptée à leur capacité de résolution de problèmes verbaux. Ainsi, l'étude présente, basée sur des recherches précédentes, examine les questions suivantes :

- Quelle approche (ponctuelle ou coordonnée) les élèves-professeurs préfèrent-ils utiliser quand ils résolvent des tâches sur des fonctions simples ?
- Jusqu'à quel point les élèves-professeurs sont-ils capables de résoudre des problèmes verbaux sur les fonctions ?
- Qui sont les élèves-professeurs qui réussissent le mieux aux problèmes verbaux sur les fonctions : ceux qui suivent l'approche ponctuelle afin de dessiner la représentation graphique d'une fonction ou ceux qui suivent l'approche coordonnée ?

Cette étude a été conduite en trois phases. La première phase s'est déroulée en 2005 avec 135 participants, la deuxième phase s'est déroulée deux ans plus tard, en 2007, avec 153 participants et la troisième phase s'est déroulée en 2008 avec 260 participants. Les participants, dans chacune des phases, étaient des étudiants du Département de l'Education de l'Université de Chypre se préparant aux métiers de l'enseignement, c'est à dire des futurs professeurs des écoles. Les sujets étaient pour la plus grande partie des étudiants de bon niveau académique admis à l'Université de Chypre sur la base de leur note au concours d'entrée à l'université. Ils étaient diplômés de lycées de Chypre mais avec un baccalauréat différent : 30% parmi eux avaient un baccalauréat scientifique et les 70% restant un baccalauréat classique. En plus les participants des deuxièmes et troisièmes phases étaient diplômés de lycées d'un type légèrement différent, avec des manuels de mathématiques différents et différentes procédures de sélection des cours, du fait de changements majeurs effectués dans le système éducatif du secondaire. En fait, les étudiants de la première phase ont suivi un enseignement de mathématiques dans les trois dernières classes du lycée chypriote (élèves des classes de seconde, première et terminale scientifiques, de 15 à 18 ans). Les étudiants de la deuxième et de la troisième phase ont suivi un enseignement de mathématiques approfondi dans les deux dernières classes du lycée chypriote (élèves des classes de première et terminale scientifiques, de 16 à 18 ans). En tenant compte des informations précédentes nous pourront conclure que notre population expérimentale est très variée : premièrement les étudiants avaient reçu au lycée un enseignement de mathématiques assez différent pendant les trois dernières années de leur scolarité au secondaire ; deuxièmement ils avaient des baccalauréats de types différents. Il est donc naturel de supposer que leurs conceptions et connaissances sur les fonctions puissent être assez différentes.

Le test fut appliqué à tous les participants (Monoyiou & Gagatsis, 2008a; Monoyiou & Gagatsis, 2008b). Le test était constitué de sept tâches. Les quatre premières tâches étaient de simples tâches sur les fonctions (T1a, T1c, T2a, T2c, T3a, T3c, T4a and T4c). Dans chaque tâche se trouvaient deux fonctions linéaires ou quadratiques. Chaque fonction était donnée sous forme algébrique et l'une d'elle était accompagnée d'une représentation graphique. Il y avait toujours une relation entre les deux fonctions (e.g. $f(x) = 2x$, $g(x) = 2x + 1$). Il était demandé aux étudiants de construire la représentation graphique de la seconde fonction. Ces quatre tâches impliquaient des conversions d'une représentation algébrique à une représentation graphique sans que des traitements soient nécessaires. Un premier objectif de ces quatre tâches était de voir si les étudiants allaient se servir de la représentation graphique de la première fonction pour construire celle de la deuxième fonction. Autrement dit, nous voulions examiner si les étudiants suivraient l'approche coordonnée puisque ces quatre tâches impliquaient des conversions d'une représentation algébrique à une représentation graphique sans que des traitements, au sens de Raymond Duval, soient nécessaires. Dans le cas contraire, les étudiants allaient-ils se baser sur des traitements arithmétiques et algébriques pour construire la représentation graphique de la deuxième fonction ?

Les trois autres tâches étaient des problèmes verbaux sur les fonctions :

- Le premier problème était constitué d'une information textuelle à propos d'un réservoir contenant un certain nombre de litres d'essence (600 L) et d'un camion-citerne remplissant le réservoir avec de l'essence. Le camion-citerne contient 2000 L de pétrole et le débit de remplissage est de 100 L par minute. Il était demandé aux étudiants d'utiliser cette information de manière à donner deux équations (Pr1a), à dessiner les graphes des deux fonctions linéaires (Pr1b) et à trouver quand le contenu du réservoir serait égal à celui du camion (Pr1c).

Il est évident qu'une résolution réussie du premier problème, devrait être liée à la réussite des quatre premières tâches de conversion des représentations de fonctions et en particulier à la réussite de la première tâche de conversion de fonctions linéaires.

- Le deuxième problème consistait en une information textuelle et algébrique à propos d'une colonie de fourmis. Le nombre de fourmis (A) augmente selon la fonction : $A = t^2 + 1000$, où t est nombre de jours). Le nombre de graines que les fourmis conservent dans la colonie augmente en fonction de $S = 3t + 3000$, où t est le nombre de jours. Il était demandé aux étudiants d'utiliser cette information de manière à dessiner des graphes (Pr2a) des fonctions linéaires et quadratiques et à trouver quand le nombre de fourmis dans la colonie et le nombre de graines seraient égaux (Pr2b).

Il est aussi évident qu'une résolution réussie du deuxième problème, devrait être liée à la réussite des quatre premières tâches de conversion des représentations de fonctions.

- Le troisième problème était constitué d'une fonction dans une forme générale $f(x) = ax^2 + bx + c$. Les nombres *a*, *b* et *c* étaient des nombres réels et $f(x)$ était égal à 4 quand *x*=2 et $f(x)$ était égal à -6 quand *x*=7. Les étudiants- enseignants devaient trouver combien de solutions réelles l'équation $ax^2 + bx + c$ possédait et expliquer leur réponse (Pr3).

Il est évident qu'une résolution réussie du troisième problème devrait être liée à la réussite des quatre premières tâches de conversion des représentations de fonctions par les étudiants qui ont suivi l'approche coordonnée. En effet une solution algébrique du problème n'est pas possible et les étudiants devraient avoir un point d'avis global, d'après Artigue, afin d'arriver à une solution correcte.

La passation du test s'est effectuée en une session de 60 minutes dans le contexte des cours de Didactique des Mathématiques du Département de l'Education de l'Université de Chypre.

Les résultats de l'étude concernant les réponses données par les élèves-enseignants aux quatre tâches ont été codifiés en un T majuscule (tâche), suivi par le nombre indiquant le numéro de l'exercice, suivi encore par une lettre qui indique la manière avec laquelle les professeurs ont résolu la tâche : (a) « a » est utilisé pour marquer une « approche ponctuelle – la fonction en tant que processus au sens de Tall », (b) « c » pour les élèves ayant adopté une « approche coordonnée – la fonction en tant qu'objet ». Une solution est reconnue comme « ponctuelle » si les participants n'utilisent pas les informations offertes par le graphe de la première fonction et procèdent à la construction du graphe de la deuxième fonction en trouvant les valeurs correspondantes pour x et y. Au contraire, une solution est reconnue comme « coordonnée » si les étudiants observent et utilisent la relation algébrique entre les deux fonctions dans la construction du graphe de la deuxième fonction ; par exemple les droites *y*=2*x* et *y*=2*x*+1 ont le même coefficient directeur, par conséquent elles sont parallèles. Dans ce cas, les étudiants utilisent et combinent les deux types de représentations, c'est-à-dire la représentation graphique de la première fonction et les représentations algébriques des deux fonctions. Ils ont relevé la relation entre les deux équations données et l'ont interprétée graphiquement en manipulant la fonction comme un objet. Les symboles suivants sont utilisés pour représenter les solutions des élèves aux problèmes : Pr1a, Pr1b, Pr1c, Pr2a, Pr2b et Pr3. Les bonnes ou mauvaises réponses aux problèmes reçoivent la note 1 et 0 respectivement.

Pour l'analyse et le décryptage des informations collectées, une analyse statistique descriptive a été appliquée en utilisant le logiciel SPSS. Afin d'examiner l'existence ou non de différences statistiques substantielles entre les étudiants des phases A, B et C quant à l'approche qu'ils ont utilisée et quant à leur performance dans la résolution du problème, l'analyse de la dispersion (MANOVA) fut appliquée via le SPSS. De plus, la classification hiérarchique (Lerman, 1981) fut utilisée via le logiciel de statistique C.H.I.C (Bodin, Coutourier, & Gras, 2000). Trois diagrammes de similitude des réponses données par les élèves-professeurs, une pour chaque phase, furent créés. Les diagrammes de similitude permettent de classifier les tâches en ensembles selon l'homogénéité avec laquelle les participants les ont maniées.

4. Résultats

4.1 Analyse descriptive

Selon le tableau 1, la plupart des élèves-professeurs, dans les trois phases, ont correctement résolu les tâches 1 et 2. La tâche 1 impliquait une fonction linéaire ($y = 2x$) et la tâche 2 impliquait une forme très simple d'équation d'une parabole ($y = x^2$). Leur réussite a très fortement chuté sur les tâches 3 et 4 des fonctions quadratiques « complexes » (T3 et T4).

Dans les trois premières tâches, l'approche ponctuelle était prédominante, puisque la moitié, voire plus, des participants l'ont choisie pour les résoudre. Dans la tâche 4, la plupart des étudiants ont choisi une approche coordonnée. Dans cette tâche, une approche coordonnée semblait plus facile et plus efficace que l'approche algébrique (résolution d'un système d'équations) ou l'approche ponctuelle. Les étudiants participant aux trois phases ont donné des réponses similaires aux quatre tâches. La seule différence consistait dans le fait que les étudiants des phases B et C ont moins utilisé l'approche coordonnée et ont donné plus de réponses incorrectes que les étudiants de la phase A. Cela pourrait être expliqué par le fait qu'une proportion importante des étudiants de la première phase a suivi un enseignement approfondi des mathématiques dans les trois dernières classes du lycée chypriote. Au contraire, de nombreux étudiants de la deuxième et de la troisième phase ont suivi un enseignement des mathématiques approfondi seulement dans les deux dernières classes du lycée chypriote.

Dans le cas de la tâche 1 ($y = 2x$, $y = 2x + 1$), certains élèves-enseignants qui ont utilisé une approche ponctuelle ont trouvé des points d'intersection avec des axes x et y et ont construit le graphe. D'autres ont construit un tableau de valeurs afin de les aider à construire le graphe. Les étudiants, qui ont utilisé l'approche coordonnée, ont comparé les deux équations et ont mentionné que l'inclinaison était la même et que les deux fonctions étaient parallèles. Ensuite, ils ont mentionné que les points de la deuxième fonction étaient « un de plus » que les points de l'autre. Certains d'entre eux ont trouvé un point de manière à vérifier leur assertion.

<u>Tableau 1 :</u> Les réponses des élèves-professeurs aux quatre premières tâches (Phases A, B et C).

Tâches		Approche ponctuelle avec réponse correcte (%)	Approche coordonnée avec réponse correcte (%)	Réponse incorrecte (%)
1	A	54.8	32.5	12.7
	B	56.2	22.2	21.6
	C	55.8	20.4	23.8
2	A	54.8	31.1	14.1
	B	56.9	25.5	17.6
	C	45.4	24.6	30
3	A	56.3	17.7	26
	B	43.8	15	41.2
	C	44.2	11.2	44.6
4	A	24.4	48.1	27.5
	B	24.8	47.1	28.1
	C	29.2	43.1	27.7

Dans le cas des tâches 2 ($y = x^2$, $y = x^2 - 1$) et 3 ($y = x^2 + 3x$, $y = x^2 + 3x + 2$), les élèves-professeurs qui utilisent une approche ponctuelle trouvent les solutions réelles de la deuxième équation et le point minimum et construisent le graphe sans utiliser le premier graphe. Au contraire, les élèves-professeurs qui utilisent l'approche coordonnée en premier comparent les deux équations et réalisent qu'on passe de la première à la deuxième par une translation verticale. Ils mentionnent que le point minimum dans le premier cas est « un en bas » et dans le deuxième cas « deux au-dessus ». Certains d'entre eux trouvent un autre point de manière à dessiner un graphe plus précis.

Dans le cas des tâches 4 ($y = 3x^2 + 2x + 1$, $y = -(3x^2 + 2x + 1)$), les élèves-professeurs qui ont utilisé une approche ponctuelle ont trouvé le point d'intersection avec l'axe y et le maximum. Les étudiants qui ont utilisé l'approche coordonnée ont comparé les deux équations et ont mentionné que les deux fonctions étaient « opposées » et « symétriques » selon l'axe x. Dans cette tâche, l'approche ponctuelle était plus compliquée, car l'équation n'avait pas de solution réelle. La plupart des étudiants, après des efforts infructueux pour trouver les points d'intersection avec l'axe x, ont dessiné le graphe en utilisant l'approche coordonnée. Les performances des élèves-professeurs aux trois problèmes verbaux ont été évaluées et le tableau 2 décrit les résultats.

Tableau 2 : Réponses des élèves-professeurs aux trois problèmes (Phase A, B et C).

Problèmes		Réponse correcte (%)	Réponse incorrecte (%)
1a	A	38.5	61.5
	B	22.9	77.1
	C	42.7	57.3
1b	A	59.3	40.7
	B	45.8	54.2
	C	35.4	64.6
1c	A	70.4	29.6
	B	55.6	44.4
	C	37.7	62.3
2a	A	46.7	53.3
	B	35.3	64.7
	C	32.3	67.7
2b	A	35.6	64.4
	B	27.5	72.5
	C	28.5	71.5
3	A	37	63
	B	20.3	79.7
	C	22.7	77.3

Dans le problème 1, seuls 38.5% des participants de la phase A, 22.9% de la phase B et 42.7% de la phase C ont réussi à utiliser les informations apportées de manière à donner les deux équations. Un large pourcentage des élèves-professeurs ayant participé aux phases A et B ont construit les deux graphes correctement (59.3% et 45.8% respectivement) et ont trouvé leur point d'intersection (70.4% et 55.6%). Plusieurs élèves-professeurs ayant participé à ces deux phases étaient incapables de donner les équations mais ont réussi à construire les graphes en construisant un tableau de valeurs pour x et y. Certains n'ont pas construit les graphes mais ont trouvé leur point d'intersection grâce à un tableau de valeurs. Quant aux élèves-professeurs ayant participé à la phase C, un plus faible pourcentage a réussi à construire les graphes (35.4%) et à trouver leur point d'intersection (37.7%). Dans ce problème, afin de trouver le point d'intersection, les élèves-professeurs avaient à résoudre une équation de second degré et cela a causé quelques difficultés. Le problème 3 était assez difficile pour les élèves-professeurs ayant participé aux trois phases, puisque seulement 37%, 20.3% et 22.7% respectivement ont réussi à le résoudre correctement. En général, les enseignants ayant participé à la phase A ont mieux réussi que les enseignants des phases B et C dans la résolution des problèmes. Une raison pourrait être attribuée aux différences, entre programmes scolaires de mathématiques, manuels scolaires de mathématiques et enseignement des mathématiques en général, existant entre les étudiants de la phase A d'une part et des étudiants des phases B et C d'autre part, différences déjà signalées au § 4.1.

Afin d'examiner s'il y a des différences significatives entre les étudiants des phases A, B et C quant à l'approche qu'ils ont utilisée et quant à leur capacité à résoudre des problèmes, une analyse de la variance (dispersion) (MANOVA) fut appliquée.

Dans l'ensemble, les effets de la phase des étudiants étaient très significatifs (Pillai's $F_{(6,\ 1088)} = 3.08$, $p<0.05$). En particulier, il y avait des différences importantes entre les trois phases quant à l'efficacité de la résolution des problèmes ($F_{(2,\ 543)} = 7.69$, $p<0.01$). Les étudiants de la phase A ($\overline{X}=0.48$, SD=0.37) ont eu de meilleurs résultats dans la résolution de problèmes que les étudiants des phases B ($\overline{X}=0.34$, SD=0.34) et C ($\overline{X}=0.33$, SD=0.38). Bien que les étudiants de la phase B aient une performance sensiblement meilleure en résolution de problèmes que les étudiants de la phase C, cette différence n'était pas statistiquement significative. Il y avait des différences statistiques significatives entre les étudiants des phases A, B et C quant aux approches ponctuelle ($F_{(2,\ 543)} = 0.51$, $p=0.60$) et coordonnée ($F_{(2,\ 543)} = 2.26$, $p=0.11$). Plus particulièrement, les étudiants de la phase A ($\overline{X}=0.47$, SD=0.36) ont utilisé l'approche ponctuelle plus souvent que ceux des phases B ($\overline{X}=0.45$, SD=0.37) et C ($\overline{X}=0.44$, SD=0.37) mais cette différence n'était pas statistiquement significative. Quant à l'approche coordonnée, les étudiants de la phase A ($\overline{X}=0.32$, SD=0.35) l'ont utilisé plus souvent que ceux des phases B ($\overline{X}=0.27$, SD=0.35) et C ($\overline{X}=0.25$, SD=0.32), mais cette différence n'était pas non plus statistiquement significative. Il est remarquable que de manière générale les étudiants des trois phases ont utilisé plus souvent l'approche ponctuelle que l'approche coordonnée dans les tâches de résolution de fonctions simples.

4.2 Analyse hiérarchique de similitude

Les réponses correctes des étudiants participant dans les phases A, B et C aux tâches 1, 2, 3 et 4 et aux problèmes 1, 2 et 3, sont présentées dans les diagrammes de similitude dans les figures 1, 2 et 3 respectivement. Les trois diagrammes sont assez similaires. Plus particulièrement, dans tous les diagrammes, deux groupes de variables peuvent être distingués.

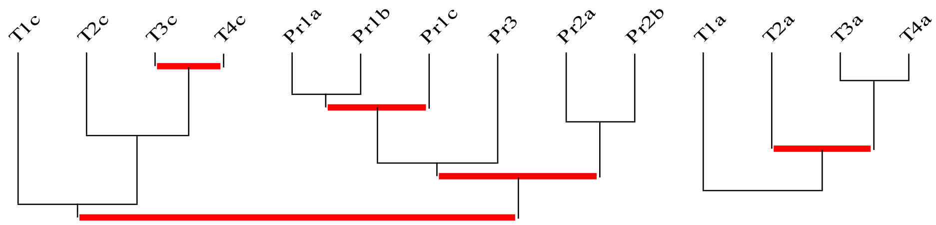


Figure 1 : Diagramme de similitude des réponses des élèves-professeurs participant à la phase A.

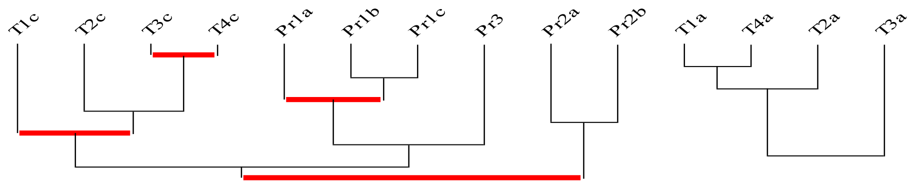


Figure 2 : Diagramme de similitude des réponses des élèves-professeurs participants à la phase B.

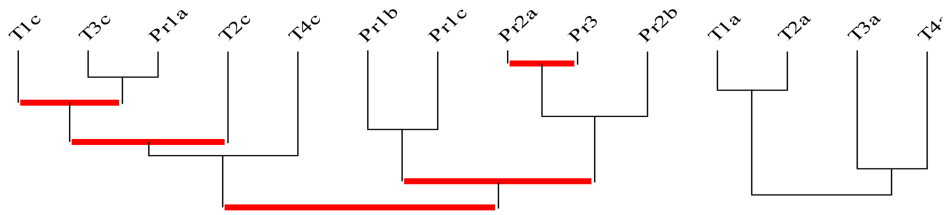


Figure 3 : Diagramme de similitude des réponses des élèves-professeurs participants à la phase C.

Le premier groupe est constitué des variables “T1c”, T2c”, “T3c”, “T4c”, “Pr1a”, “Pr1b”, “Pr1c”, “Pr2a”, “Pr2b” et “Pr3”et se réfère à l’utilisation faite de l’approche coordonnée dans la résolution du problème. Le deuxième groupe est constitué des variables “T1a”, “T2a”, “T3a” and “T4a” qui représentent l'utilisation faite de l'approche algébrique. A partir des diagrammes de similitude, il peut être observé que le premier groupe inclut les variables correspondant à la résolution des problèmes complexes et les variables représentant l'approche coordonnée.

Plus particulièrement, l'approche coordonnée des étudiants pour les tâches simples sur les fonctions est liée étroitement à l'efficacité dans la résolution des problèmes. Cette étroite connexion peut indiquer que les étudiants qui peuvent utiliser efficacement différents types de représentation - dans ce cas à la fois les représentations algébriques et graphiques - sont alors capables d'observer les liens et relations dans les problèmes, et sont plus compétents dans la résolution de problèmes. Il est intéressant de noter le fait que les ensembles de similitudes présentés dans les trois diagrammes sont presque les mêmes, ce qui montre que les liens et relations entre les approches et la résolution du problème sont très forts et durables.

5. Conclusions

La problématique centrale de cette étude se référait à l'approche utilisée par les élèves-professeurs pour la résolution de tâches sur des fonctions simples. Il est important de savoir si les enseignants font preuve de souplesse dans l'utilisation de représentations graphiques et algébriques pour la résolution de problème. La plupart des professeurs ayant participé dans les phases A, B et C, ont utilisé une approche ponctuelle afin de résoudre des tâches de fonctions simples. Une approche coordonnée est fondamentale dans la résolution de problème, et néanmoins beaucoup d'étudiants ne la maîtrisent pas. Ce résultat se situe dans la ligne directe des résultats d'autres recherches qui concluent que beaucoup d'étudiants traitent les fonctions en suivant une approche ponctuelle alors qu'une approche géométrique ou globale est plus puissante (Even 1998). Les étudiants qui peuvent facilement et librement utiliser une approche coordonnée ont une meilleure et plus puissante compréhension des relations entre les représentations graphiques et algébriques et sont plus brillants dans la résolution de problème. La préférence des étudiants pour la représentation algébrique est probablement liée à l'accent mis par l'enseignement sur les représentations algébriques et leur manipulation, qui dominent le programme.

La performance des étudiants dans la résolution des problèmes verbaux est modeste. Les professeurs participant à la phase A ont mieux réussi que ceux des phases B et C. Bien que les problèmes utilisés dans cette étude ressemblent à ceux enseignés à l'école, les étudiants ont éprouvé des difficultés. Ces résultats nous conduisent à penser que, pour donner une réponse correcte à un problème verbal impliquant des fonctions, les étudiants doivent être capables de jongler avec dextérité entre différentes représentations des fonctions et de passer facilement d'une représentation à une autre.

De plus, un résultat important de cette étude réside dans le lien entre l'approche coordonnée et la résolution du problème. Les informations récoltées dans chaque phase montrent que les étudiants qui suivent une approche coordonnée peuvent plus facilement comprendre les relations entre les représentations graphiques et symboliques et ainsi être capables de fournir une solution correcte à des problèmes verbaux. De plus, il est notable que cette étroite relation entre l'approche coordonnée et la capacité à résoudre un problème s'avère forte et stable. Les deux approches sont apparues aussi dans d'autres recherches (Even, 1998 ; Mousoulides & Gagatsis, 2004). En particulier l'approche coordonnée est apparue sous des termes différents comme approche géométrique ou approche globale. Nous avons proposé le terme « approche coordonnée » parce que les étudiants qui suivent l'approche géométrique ou globale tirent aussi des informations de l'expression algébrique des fonctions et coordonnent les deux types des connaissances afin d'arriver à une réponse correcte.

Dans cette étude, un résultat très important réside dans la stabilité de ces deux approches. Même si la deuxième phase a été conduite deux ans après la première et la troisième trois ans après, et bien que des changements majeurs soient apparus dans le système éducatif tant sur les programmes scolaires de mathématiques, que dans les manuels scolaires de mathématiques et les sujets d'examen, les approches ont été les mêmes et la forte relation entre l'approche coordonnée et la capacité à résoudre un problème s'est maintenue. La seule différence entre les trois phases s'observe en résolution de problèmes : Les enseignants participant à la phase A ont mieux réussi dans la résolution de problèmes que ceux des phases B et C. Cette différence est probablement le résultat des changements majeurs effectués dans l'enseignement secondaire mais elle n'influe pas sur la stabilité générale du phénomène, ainsi que le révèlent les trois diagrammes de similarité. Il serait intéressant d'organiser une intervention didactique auprès des élèves de l'enseignement secondaire, basée sur la visualisation dynamique des différentes approches, afin d'étudier de possibles modifications de cette stabilité générale.

Comment introduire le type d'approche (ponctuelle ou coordonnée) dans une définition –modèle de l'Espace de Travail Mathématique (ETM) inspiré de l'Espace de Travail Géométrique (Houdement et Kuzniak, 2003 ; Kuzniak, 2009) ?

La stabilité observée sur les approches suivies par les élèves-professeurs de l'Université de Chypre de trois années académiques différentes, indépendamment de l'enseignement qu'ils ont reçu et des manuels des mathématiques qui ont été utilisés lors de leur scolarité secondaire, conduit à imputer leurs difficultés à des causes d'ordre plutôt sémiotique qu'épistémologique. Donc la nature sémiotique de la transmission des informations et des savoirs devrait être une partie constituante dans une définition–modèle de l'Espace de Travail Mathématique (ETM).

Bibliographie

AINSWORTH, S., BIBBY, P. & WOOD, D. (1997), *Evaluating principles for multi-representational learning environments,* Paper presented at the 7th European Conference for Research on Learning and Instruction, 1997, August, Athens.

ARTIGUE, M. (2006), Apprendre les mathématiques au niveau universitaire : ce que les recherches récentes nous apprennent dans ce domaine. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11, 269 – 288. IREM de Strasbourg.

ARTIGUE, M. (2009), L'enseignement des fonctions à la transition lycée – université. In B. Grugeon (ed.), *Actes du XVe Colloque CORFEM* 2008, pp. 25-44. Université de Cergy-Pontoise, IUFM de Versailles.

ASPINWALL, L., SHAW, K. L. & PRESMEG, N. C. (1997), Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative, *Educational Studies in Mathematics* 33, 301-317.

BALACHEFF N. (1995). Conception, connaissance et concept. In : Grenier D. (ed.) *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaires 1994-1995,* 219-244. Grenoble : Université Joseph Fourier.

BALACHEFF N., GAUDIN N. (2002), *Students' conceptions: an introduction to a formal characterization.* Les cahiers du laboratoire Leibniz, 65, 1-21.

BODIN, A., COUTURIER, R. & GRAS, R. (2000), *CHIC : Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive-Version sous Windows – CHIC 1.2*, Rennes : Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

BREIDENBACH D., DUBINSKY, HAWKS J., NICHOLS D. (1992), Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics* 23, 247-285.

BROUSSEAU G. (1997), *Theory of didactical situations in mathematics.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

BELL A., JANVIER C. (1981), The interpretation of graph representing situations. *For the Learning of Mathematics* 2(1), 34-42.

CASTELA C. (1995), Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en didactique des mathématiques.* 15(1) 7-47.

CONFREY J. (1990), A review of the research on students conceptions in mathematics, science, and programming. In: Courtney C. (ed.) *Review of research in education*. American Educational Research Association 16, pp. 3-56.

DUBINSKY, E. & HAREL, G. (1992), The nature of the process conception of function, dans *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*

(Eds. Dubinsky & Harel), 85-106, United States: The Mathematical Association of America.

DUFOUR – JANVIER, B., BEDNARZ, N. & BELANGER, M. (1987), Pedagogical considerations concerning the problem of representation, dans *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (Ed. Janvier), 109-122*,* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

DUVAL, R. (2002), The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* **1.2**, 1-16.

EISENBERG, T. & DREYFUS, T. (1991), On the reluctance to visualize in mathematics, dans *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (Eds. Zimmermann & Cunningham), 9-24, United States: Mathematical Association of America.

ELIA, I., GAGATSIS, A., PANAOURA, A., ZACHARIADES, T., & ZOULINAKI, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of limit and the impact of the "didactic contract". *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*(4), 765-790.

ELIA, I., PANAOURA, A., GAGATSIS, A., GRAVANNI, K., & SPYROU, P. (2008). Exploring different aspects of the understanding of function: Toward a four-facet model. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 8*(1), 49-69.

ELIA, I., PANAOURA, A., ERACLEOUS, A., & GAGATSIS, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5,* 533-556.

EVEN, R. (1998), Factors involved in linking representations of functions, *The Journal of Mathematical Behavior* **17.1**, 105-121.

GAGATSIS, A., DELIYIANNI, E., ELIA, I. & PANAOURA, A.(2011), Explorer la flexibilité : le cas du domaine numérique. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 21-38.

GREENO, J. G. & HALL, R.P. (1997), Practicing representation: Learning with and about representational forms, *Phi Delta Kappan* **78**, 361-367.

HITT, F. (1998), Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134.

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (2003), Elementary geometry split into different geometrical paradigms, dans *Proceedings of CERME 3* (Ed. Mariotti), Bellaria, Italy. [On line] http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/draft/proceedings draft

KUZNIAK, A. (2009), Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France, dans *Cyprus and France Research in Mathematics Education* (Eds. Gagatsis, Kuzniak, Deliyianni, & Vivier), 71-89, Nicosia, University of Cyprus.

LERMAN, I. C. (1981), *Classification et analyse ordinale des données*, Paris, Dunod.

MARKOVITS, Z., EYLON, B. & BRUCKHEIMER, M. (1986), Functions today and yesterday, *For the Learning of Mathematics* **6.2**, 18-28.

MOSCHKOVICH, J., SCHOENFELD, A. H. & ARCAVI, A. (1993), Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them, dans *Integrating research on the graphical representation of functions* (Eds. Romberg, Fennema, & Carpenter), 69–100, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

MONOYIOU, A. & GAGATSIS, A. (2008a), The stability of students' approaches in function problem solving: A coordinated and an algebraic approach, dans *Research in Mathematics Education* (Ed. Gagatsis), 3-12, Nicosia, University of Cyprus.

MONOYIOU, A. & GAGATSIS, A. (2008b), A coordination of different representations in function problem solving, *Article available at the website of the 11th International Congress of Mathematics Education, under Topic Study Group 20 (http://tsg.icme11.org/tsg/show/21),* Monterrey, Mexico.

MOUSOULIDES, N. & GAGATSIS, A. (2004), Algebraic and geometric approach in function problem solving, dans *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Eds. Johnsen Hoines & Berit Fuglestad), 3, 385-392, Bergen, Norway: Bergen University College.

ROBERT, A. (1998), Outils d'analyse des contenus à enseigner au lycée et à l'université. Recherches en Didactique des Mathématiques, 18(2), 139-190.

SFARD, A. (1992), Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - The case of function, dans *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Eds. Dubinsky & Harel), 59-84, United States: The Mathematical Association of America.

SIERPINSKA, A. (1989) , *On 15-17 years old students' conceptions of functions, iteration of functions and attractive fixed points*. Institut de Mathématiques, preprint 454. Varsovie : Académie des Sciences de Pologne.

SIERPINSKA, A. (1992), On understanding the notion of function, dans *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Eds. Dubinsky & Harel), 25-28, United States: The Mathematical Association of America.

SMITH, J.P., DISESSA, A.A. & ROCCHELLE, J. (1993), Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition, *Journal of the Learning Sciences* **3**, 115-163.

VERGNAUD, G. (1981), Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* 2(2) 215-231.

VERGNAUD, G. (1991), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques,* 10(2/3), 133-169.

VANDERBROUCK, F. (2011), Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16, 149-185. IREM de Strasbourg.

VINNER S. (1983) Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 14, 293-305

VINNER, S. (1987), Continuous functions - images and reasoning in college students. In: Bergeron J. C., HERSCOVICS N., KIERAN C. (eds.) *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3 pp. 177-183). Montréal, Canada: Université de Montréal.

VINNER, S. (1992), The function concept as a prototype for problems in mathematics education. In: DUBINSKY E., HAREL G. (eds.) *The concept of Function*. (MAA Notes Vol. 25, 195-213), Mathematical Association of America.

VINNER, S. & DREYFUS, T. (1989), Images and definition for the concept of function. *Educational Studies in Mathematics* 20(4) 356-366.

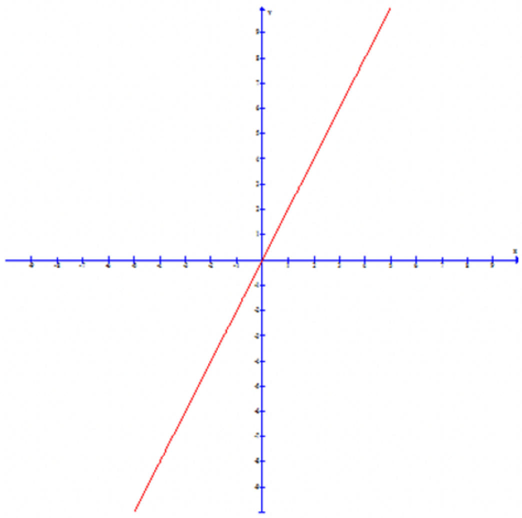
ATHANASIOS GAGATSIS & ANNITA MONOYIOU

gagatsis@ucy.ac.cy monannita @yahoo.com

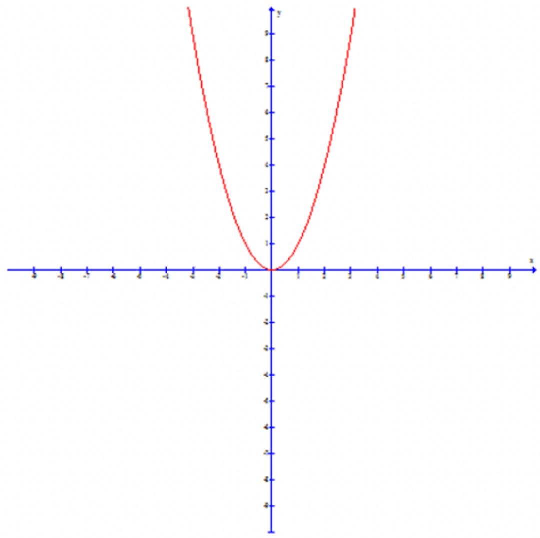
Annexe

Test

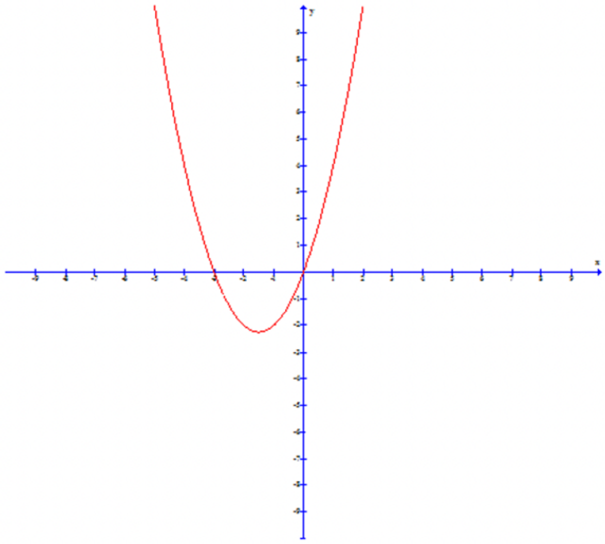
Tâche 1: Dans le diagramme suivant la fonction $y=2x$ est donnée. Dessiner la fonction $y=2x+1$.



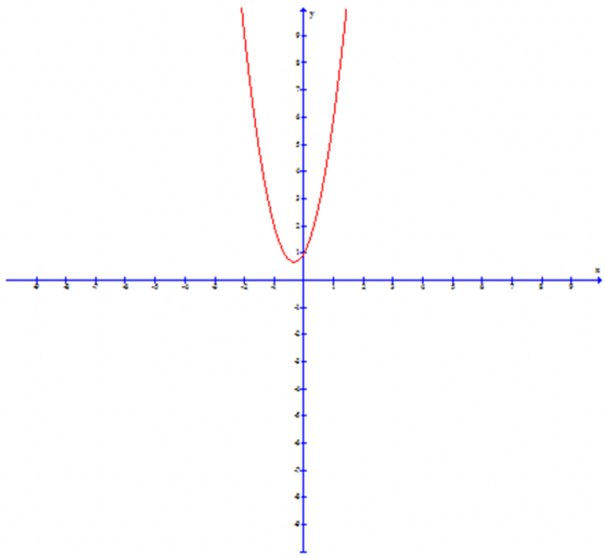
Tâche 2: Dans le diagramme suivant $y=x^2$ est donnée. Dessiner la fonction $y=x^2-1$.



Tâche 3: Dans la diagramme suivant **$y=x^2+3x$** est donnée. Dessiner la fonction **$y=x^2+3x+2$**.



Tâche 4: Dans le diagramme suivant **$y=3x^2+2x+1$** est donnée. Dessiner la fonction **$y= -(3x^2+2x+1)$**.



Problème 1: Un réservoir contient 600 L d'essence (quantité initiale). Un camion-citerne remplit le réservoir avec de l'essence. Le camion-citerne contient 2000 L d'essence et le flux de remplissage est de 100 L par minute.

a. Utilisez cette information afin de donner deux équations.

b. Dessiner les deux graphiques (le volume d'essence dans le réservoir en fonction du temps t et le volume d'essence dans le camion en fonction du temps t).

c. Trouver quand le contenu du réservoir est égal à celui du camion.

Problème 2: Dans une colonie des fourmis le nombre de fourmis (A) augmente selon la fonction: $A = t^2 + 1000$, où t est le nombre de jours. Le nombre de grains que les fourmis conservent dans la colonie augmente selon la fonction $S = 3t + 3000$, où t est le nombre de jours
a. Utiliser cette information de manière à dessiner les deux graphes.
b. Trouver quand le nombre de fourmis dans la colonie et le nombre de grains sont égaux.

Problème 3: La fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ est donnée. Les nombres a, b et c sont des nombres réels et $f(x)$ est égal à 4 quand $x = 2$ et $f(x)$ est égal à (-6) quand $x = 7$. Trouvez combien de solutions réelles possède l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et expliquez votre réponse.