ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

Revue internationale de didactique des mathématiques

Rédacteurs en chef : ALAIN KUZNIAK & FRANÇOIS PLUVINAGE

IREM de Strasbourg
Université de Strasbourg

Volume 18 **2013**

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
ISSN 0987 - 7576

Rédacteurs en chef

ALAIN KUZNIAK
Université Paris-Diderot,
UFR de Mathématiques- Case 7018
Laboratoire de didactique André Revuz
75205 PARIS Cedex 13
alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr

FRANÇOIS PLUVINAGE
IREM de Strasbourg
7 Rue René Descartes
67084 Strasbourg
francois.pluvinage@math.unistra.fr

Comité de rédaction

ALAIN BRONNER – Montpellier
VIVIANE DURAND-GUERRIER – Montpellier
RAYMOND DUVAL – Lille
CECILE DE HOSSON – Paris
ATHANASIOS GAGATSIS – Chypre
FERNANDO HITT – Canada
CATHERINE HOUDEMENT – Rouen
MICHALIS KOURKOULOS – Crète
MARIA ALESSANDRA MARIOTTI – Italie
ASUMAN OKTAÇ – Mexique
LUIS RADFORD – Canada
JEAN-CLAUDE REGNIER – Lyon
ÉRIC RODITI – Paris
MAGUY SCHNEIDER – Belgique
CARL WINSLOW – Danemark
MONCEF ZAKI – Maroc

Responsable de publication

JOSIANE NERVI – Directrice de l'IREM de Strasbourg

Secrétariat d'édition

CHRISTINE FUSSNER – IREM de Strasbourg

Éditeur

IREM de Strasbourg
Université de Strasbourg
7, rue René Descartes
F - 67084 Strasbourg CEDEX
Tel. +33 (0)3 68 85 01 30
Fax. +33 (0)3 68 85 01 65
Bibliothèque : +33 (0)3 68 85 01 61
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
VOLUME 18 – 2013

SOMMAIRE

ÉDITORIAL *..... 7*

Fernando HITT (Canada)
Théorie de l'activité, interactionnisme et socioconstructivisme. Quel cadre théorique autour des représentations dans la construction des connaissances mathématiques ?.....9

Alicia AVILA (Mexique)
Conocimientos en construcción sobre los números decimales : los resultados de un acercamiento conceptual 29

Jérôme PROULX (Canada)
Le calcul mental au-delà des nombres : conceptualisations et illustrations avec la résolution d'équations algébriques.....61

Benoît RITTAUD (France)
Une approche de la croissance exponentielle par l'introduction d'une virgule glissante 91

Athanasios GAGATSIS et Annita MONOYIOU (Chypre)
Les stratégies des futurs instituteurs dans la résolution de tâches sur les fonctions. Approche ponctuelle ou approche coordonnée ?.....115

Moncef ZAKI et Zahid El M'HAMEDI (Maroc)
Aspects de quelques critiques non fondées de la théorie des tests statistiques.....139

Charles CHANDLER (France)
Des outils sémiotiques pour une évaluation de la complexité des expressions mathématiques. 173

Note de lecture par François PLUVINAGE de l'ouvrage de ROBERT, A., PENNINCKX, J. & LATTUATI, M., (2012) :
Une caméra au fond de la classe de mathématiques 215

INFORMATIONS POUR LES AUTEURS.....219

EDITORIAL

Alors que nous participions à Montréal en octobre 2012 au troisième symposium sur les espaces de travail mathématiques (en abrégé ETM3), nous avons eu la grande tristesse d'apprendre le décès de notre amie et collègue Marie-Agnès Egret. Les quatre premiers volumes des Annales de Didactique et de Sciences Cognitives contiennent des articles dont Marie-Agnès Egret est auteur, notamment dans le volume 2 (1989) un compte-rendu d'expérience sur le raisonnement conduite avec Raymond Duval, alors qu'à l'époque elle-même était professeur de mathématiques au collège Fustel de Strasbourg. Cette étude reste une référence fréquemment citée aujourd'hui et cela même si elle n'est pas d'un accès commode, car les articles des Annales sont consultables en ligne seulement à partir du volume 9, le volume 2 sous forme imprimée étant pour sa part épuisé. L'expérimentation, conduite en classe de quatrième, portait sur la prise de conscience du raisonnement par les élèves. L'étude concernait ainsi la didactique et l'enseignement, double préoccupation qui se reflète dans bien des articles de notre revue.

Dans le cadre de l'IREM de Strasbourg, un groupe s'est constitué avec pour projet une publication en hommage à Marie-Agnès Egret. Nous avons été saisis par ce groupe d'une demande de reproduction d'un de ses articles publié dans les Annales. Bien évidemment, nous avons accepté, avec la satisfaction de penser qu'au moins cet article d'un des premiers volumes des Annales serait consultable en ligne. Cette sollicitation nous invite aussi à rendre possible à terme la mise en ligne de tous les articles des volumes parus des Annales.

Á propos de préoccupations concernant les pratiques de l'enseignement, nous écrivions dans l'éditorial du volume 17 : « Les Annales restent ainsi ouvertes à toutes les contributions argumentées qui permettent de penser l'évolution de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques en contexte scolaire. » Nous ne pouvons pas manquer de relever que l'enseignement évolue de manière actuellement très sensible avec les changements que les technologies au sens large peuvent apporter. La note de lecture qui se trouve en fin de ce volume se rapporte à un ouvrage qui est surtout destiné à la formation des professeurs et qui est constitué non seulement d'un livre imprimé, mais aussi de vidéos de classes à visionner en ligne. Sans même aller jusqu'à l'étude des enjeux des "Massive Online Open Course" (en abrégé MOOC), l'enseignement ouvert et en ligne, des articles sur l'usage des technologies seront les bienvenus dans les prochains volumes des Annales. Avis aux auteurs potentiels...

Par ailleurs, nous souhaitons que la revue soit un lieu où apparaissent des débats. Il y a des courants d'étude en didactique et il ne serait pas judicieux que chacun d'eux reste isolé, sans accepter une certaine confrontation avec d'autres. Dans bien des études en effet, on ne peut pas se contenter de juxtaposer des théories ou des points de vue, il y a lieu de trancher en faveur d'un choix plutôt que d'un autre. Par exemple, un débat connu est celui qui concerne la modélisation, la place que l'on souhaite qu'elle tienne dans l'acquisition de notions et de méthodes mathématiques et la sélection des concepts à apprendre à laquelle elle conduit. D'autres débats importants touchent, par exemple, les points sur lesquels l'attention des enseignants devrait se porter concernant l'activité et les productions de leurs élèves. D'ores et déjà un tel débat se trouve amorcé, dont les lecteurs des Annales trouveront le dossier dans le prochain volume.

Enfin, les lecteurs ne manqueront pas de remarquer la présence régulière dans les Annales d'articles provenant du Canada, plus précisément du Québec. Cette contribution nous est particulièrement chère, notamment parce que nos amis québécois ne peuvent manquer de nous rendre attentifs aux apports provenant des courants nord-américains. A très court terme, une mise en place d'un site miroir des Annales est prévue dans la Belle Province. Si une telle ouverture présage de plus étroites relations qui puissent être concrétisées par un partenariat éditorial, nous en serons très heureux.

ALAIN KUZNIAK & FRANÇOIS PLUVINAGE

FERNANDO HITT

THEORIE DE L'ACTIVITE, INTERACTIONNISME ET SOCIOCONSTRUCTIVISME.
QUEL CADRE THEORIQUE AUTOUR DES REPRESENTATIONS DANS LA CONSTRUCTION DES CONNAISSANCES MATHEMATIQUES ?

Abstract. Activity theory, interactionism and social constructivism. What theoretical framework in the construction of mathematical knowledge related to representations? In the '80s, mental representations were analyzed by educators in a constructivist approach. A paradigm shift, but always in a constructivist approach, took place in the same decade with the analysis of constructions of mathematical concepts in a theoretical framework based on semiotic representations. New theoretical frameworks on the social construction of knowledge took place at the end of the last century, where new paradigms took into account the perspective of social construction of knowledge. Different teaching methods have appeared in these theoretical frameworks and also new concepts such as functional representation and its evolution in an environment of collaborative learning, scientific debate and self--reflection (ACODESA). In this paper we show how this development fits within a theoretical framework of activity in a dialectical process between activity and communication in the mathematics classroom.

Résumé. Dans les années 80, les représentations mentales étaient analysées par les didacticiens dans une approche constructiviste. Un changement de paradigme, mais toujours dans une approche constructiviste, a eu lieu dans la même décade avec l'analyse des constructions des concepts mathématiques sous un cadre théorique basés sur les représentations sémiotiques. Nouveaux cadres théoriques sur la construction sociale des connaissances a eu lieu à la fin du siècle dernier, où les nouveaux paradigmes prennent en compte une perspective de construction sociale des connaissances. Différentes méthodes d'enseignement ont apparu sous ces cadres théoriques et nouvelles notions comme la représentation fonctionnelle et son évolution dans un milieu d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'autoréflexion (ACODESA). Dans ce document nous voulons montrer comme cette évolution s'insère dans un cadre théorique de l'activité dans un processus dialectique entre activité et communication dans la classe de mathématiques.

Mots-clés. Construction sociale des connaissances, méthodologie ACODESA, représentation fonctionnelle, théorie de l'activité.

---

1. Introduction

La recherche à la fin du XIXe et au début du XXe siècle autour de la signification du signe a marqué le XXe siècle. Il y eut deux courants principaux. D'une part,

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 18, p. 9-27.
© 2013, IREM de STRASBOURG.

celui suivi par Peirce (1992, 1998), où le signe est une triade « objet-representamen-interprète », d'autre part, celui de Saussure (1915/1973), lié au signe linguistique, où le signe est un couple constitué par le concept (représentation mentale) et l'image acoustique (son en rapport avec l'objet).

Sans prendre parti pour l'une ou l'autre de ces tendances, il est indéniable qu'à partir de ces travaux, les représentations mentales ont commencé à prendre un rôle important dans l'étude de la construction des connaissances. Dans les travaux de Piaget et collaborateurs, nous pouvons trouver une approche profonde de la notion de représentation mentale. Dans les travaux plus récents, son influence a conduit à essayer de comprendre les représentations mentales des individus à travers leurs productions. Par exemple, Richard (1990), en psychologie, se centre sur « Les Activités mentales » et Vinner et Tall (1991), en didactique des mathématiques, ont développé les aspects théoriques d'« image conceptuelle » et de « définition du concept ». Ces approches ont promu la recherche sur le rôle des représentations mentales pour essayer de comprendre les constructions cognitives des élèves. L'accent était alors mis sur l'étude des représentations mentales à travers les représentations sémiotiques, soit sur ce qui a été construit et non pas sur la façon dont il a été construit. Cette approche a marqué le constructivisme.

Un changement substantiel de paradigme a émergé dans les années quatre-vingt où l'objet principal d'étude était axé autour du rôle des représentations sémiotiques dans la formation des concepts mathématiques. C'est en essayant de voir le revers de la médaille (toujours dans une approche constructiviste), pour ainsi dire, que Janvier (1987) et Duval (1988, 1993, 1995), entre autres, se sont intéressés à l'analyse du rôle des représentations sémiotiques dans le processus de conversion entre représentations dans la construction de concepts mathématiques. L'idée derrière ces deux approches était, et continue à être, que la représentation d'un objet mathématique est partielle par rapport à ce qu'elle représente, d'où l'importance des processus de « traduction entre représentations » pour Janvier ou de « conversion entre représentations » pour Duval. Donc, Janvier a proposé sa table de conversion, tandis que Duval a introduit les notions de « Registre de représentations » et de processus de conversion entre représentations des différents registres. Pour Janvier et Duval, la conversion de représentations était liée aux représentations institutionnelles (ce que l'on trouve dans les livres, ou dans les écrans des ordinateurs, etc.).

L'approche de Janvier est étroitement liée à la notion de fonction et à l'importance de l'élaboration des tâches sur la modélisation mathématique. Pour Janvier (Claude) et Janvier (Bernadette), cette approche sur les fonctions et les processus de modélisation les a amenés à discuter sur une représentation particulière « schéma » qui n'a pas de place dans la notion de registre chez Duval.

Toutefois, dans le cas de Duval, la précision sur les processus cognitifs associés à la conversion entre les représentations conduit à analyser les unités significatives sur lesquelles on devrait se concentrer dans une représentation lorsque l'on va faire une conversion vers une autre représentation dans un autre registre. Sur quoi fixons-nous notre attention quand on veut passer d'une représentation dans un registre à une autre représentation dans un autre registre? Précisément, dans le processus d'association, nous devons prêter attention aux unités significatives liées à chacune des représentations (Duval, 1988, 1993, 1995).

2. Représentations dans un cadre théorique de communication dans la classe de mathématiques

Prenant en compte le caractère socioculturel de l'apprentissage dans la classe de mathématiques (Hitt, 2003, 2004, 2006, 2007), Hitt présente certaines représentations qu'il n'est pas possible d'étudier exclusivement sous le cadre théorique des registres de représentation (Duval, 1993, 1995).

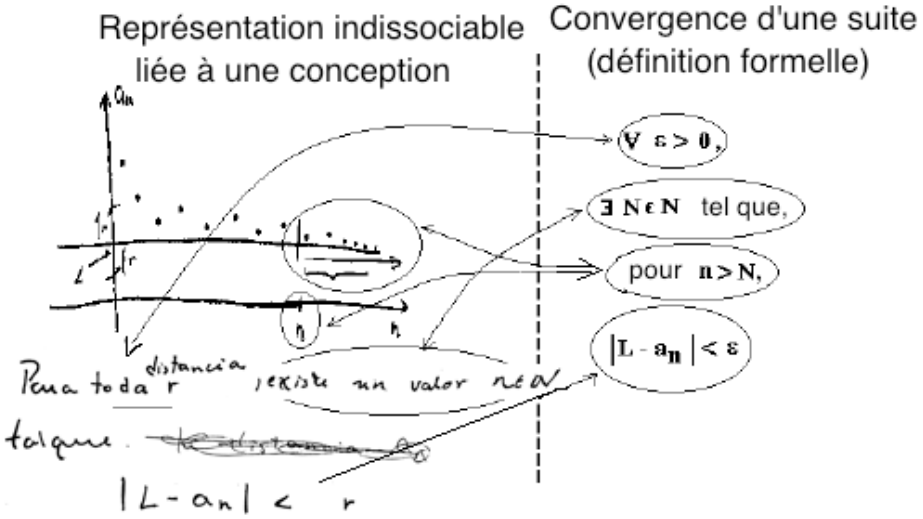


Figure 1. Un exemple d'une production en équipe liée à une représentation fonctionnelle (Hitt, 2003) dans une ambiance d'activité et communication dans la classe de mathématiques

Plus tard, Duval (2006, p. 111) reconnaît ce type de représentations et les nomme représentations auxiliaires transitoires. De notre point de vue, en les nommant ainsi, Duval (*ibid*.) leur attribue implicitement un rôle mineur dans la construction de concepts. Ainsi, Duval donne une primauté aux représentations sémiotiques

institutionnelles sur les représentations, disons pour le moment, non institutionnelles dans la construction de concepts mathématiques. Cependant, cette approche néglige le rôle important des représentations « non officielles » (pour l'instant, nous allons les désigner de cette manière pour les distinguer des représentations officielles) qui émergent généralement dans la résolution de problèmes et de situations problèmes indépendamment de la construction d'un concept mathématique. Dans le processus de modélisation mathématique (Hitt et Morasse, 2009), où les représentations non officielles émergent de façon naturelle, elles n'ont pas un caractère temporaire comme Duval (*ibid.)* l'affirme ; en fait, dans une approche socioculturelle, ces représentations ont une tendance à se développer par communication et validation dans la classe de mathématiques vers les représentations officielles.

Comme nous l'avons noté chez Hitt (2003, 2004, 2006), il y a des représentations qu'il n'est pas possible de classer à l'intérieur d'un registre de représentations. Ces représentations sont très importantes dans la construction de concepts (Hitt, 2003) ou dans la résolution de situations problèmes (diSessa et al., 1991 ; Hitt, 2004, 2006 ; Hitt et Morasse, 2009 ; Hitt et González-Martin, en préparation). Selon une approche de la construction sociale de la connaissance, diSessa et al. *(ibid*.) et Hitt et González-Martin (*ibid*.) montrent l'importance d'observer et d'analyser les constructions d'étudiants et, aussi, d'analyser leur évolution dans un contexte de construction sociale des connaissances au sein de la classe de mathématiques.

Les résultats obtenus chez Hitt (2003, 2004 et 2006), Hitt et Morasse (*ibid*.) et Hitt et González-Martin (*ibid*.) nous ont permis d'identifier ce type de représentations comme une *représentation de type fonctionnel, représentation mentale qui émane dans l'activité mathématique non routinière, qui s'exprime par une représentation liée à l'action*. Ce caractère fonctionnel de la représentation est très important pour comprendre un énoncé mathématique et, en même temps, pour amener l'action de résoudre le problème ou la situation problème liée à l'énoncé.

Selon ce point de vue, au regard de l'insuffisance de l'approche constructiviste de Duval, d'une part, et de la possibilité d'avoir des représentations qui n'appartiennent pas à un registre de représentations, nous avons vu la nécessité de rechercher des solutions alternatives liées à la construction socioculturelle des connaissances et d'examiner les représentations fonctionnelles en profondeur.

3. À la recherche d'une théorie globale et une théorie locale autour de la communication dans la classe de mathématiques

Des auteurs comme Sierpinska (1998) préfèrent une approche interactionniste à l'approche socioconstructiviste et socioculturelle pour l'analyse de la communication dans la classe de mathématiques liée aux constructions des

connaissances. La plupart des auteurs dans le même ouvrage de Steinbring et al. (1998) prônent que l'interactionnisme est le mieux placé pour rendre compte des interactions de communication dans la classe de mathématiques. En revanche, Lerman (1998 p. 345) affirme de son côté que les théories socioculturelles offrent une meilleure approche pour décrire le processus selon lequel l'environnement construit les individus (et vice versa). De leur côté, Steinbring *et coll*. ainsi que Lerman coïncident dans le rejet de l'approche socioconstructiviste comme l'idéal pour décrire une construction sociale où la communication et l'environnement sont fondamentaux. Sierpinska (*Ibid*.), entre autres, se penche sur les interactionnistes liés aux travaux de Wittgenstein, par contre, Lerman (*Ibid*.) penche plutôt vers une théorie de l'activité. Et Davydov (1999, p. 47) signale que, dans une approche théorique de l'activité, on ne doit pas opposer activité avec communication, mais plutôt les considérer comme inséparables.

Notre travail est lié à l'analyse de ce qui se passe dans une microsociété qui est la classe de mathématiques, précisément, l'analyse des processus de résolution de situations problèmes, où sont essentiels la communication, la manipulation d'objets physiques, le travail individuel, en équipe et en grand groupe, ainsi que les gestes. Dans cette perspective, nous nous rapprochons de la nouvelle génération de la théorie de l'activité. Cette théorie fondée sur le travail de Liontev (considéré comme appartenant à la première génération) prend en compte l'articulation entre *activités et motifs*, *actions et objectifs*, et *opérations* restreintes à un contexte. Elle peut être vue comme un système social d'interactions et, ainsi que Nardi (1997) le signale :

> Activity theory is a powerful and clarifying descriptive tool rather than a strongly predictive theory. The object of activity theory is to understand the unity of consciousness and activity. Activity theory incorporates strong notions of intentionality, history, mediation, collaboration and development in constructing consciousness. Activity theorists argue that consciousness is not a set of discrete disembodied cognitive acts (decision making, classification, remembering...) and certainly it is not the brain; rather consciousness is located in everyday practice: you are what you do. And what you do is firmly and inextricably embedded in the social matrix of which every person is an organic part. This social matrix is composed of people and artifacts. Artifacts may be physical tools or sign systems such as human language. Understanding the interpenetration of the individual, other people and artifacts in everyday activity is the challenge activity theory has set for itself. (p. 4)

Nous prenons la même théorie élargie par Engeström (1999), qui nous permet de mieux appliquer les différentes phases autour de la division du travail face à une tâche mathématique (individuelle, en équipe, en grand groupe) dans notre approche méthodologique.

De ce point de vue, une théorie générale socioculturelle vygotskienne, avec une approche de théorie de l'action fondée sur la proposition d'Engeström, va nous permettre d'analyser la communication dans la classe des mathématiques. La question qui émerge alors est : Que voulons-nous promouvoir dans la classe de mathématiques ?

Dans la Figure 2, nous montrons une représentation visuelle des étapes de la méthode d'enseignement ACODESA et, en même temps, une adaptation du triangle d'Engeström, qui montre les interactions entre les différents acteurs dans un processus de résolution d'une situation problème en accord avec la méthode ACODESA.

Selon Engeström (1999, p. 28), l'aspect principal dans la théorie de l'activité est la médiation. Celle-ci se fonde sur l'approche théorique de Vygotsky, comme le signale Cole (1999, p. 89) : "Vygotsky (1934/1987) also emphasized the qualitative change in human activity engendered by tool mediation". La médiation est le principal constituant dans le triangle d'Engeström qui modélise un système d'activité collective. Dans l'approche théorique de Liontev, la division du travail est importante. De même, dans le modèle d'Engeström, un aspect principal est aussi cette composante. Le sujet peut être, un élève, une équipe, l'enseignant, le groupe en entier incluant l'enseignant; cela dépend de l'étape en jeu dans un moment donné avec ACODESA.

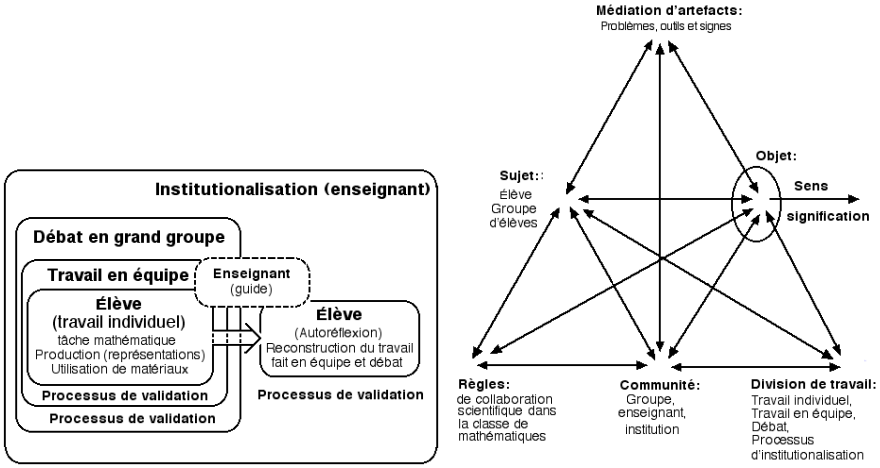


Figure 2. ACODESA (Apprentissage COllaboratif, DEbat Scientifique et Autoréflexion) issu de la théorie de l'activité selon Engeström (1999)

Les règles s'accordent avec la méthode d'enseignement. Un aspect très important est la médiation d'artefacts. Dans ce nœud, on rassemble: la situation problème, les objets physiques disponibles, les productions des élèves (représentations), la

communication, etc. Les flèches nous indiquent l'interaction entre les différents acteurs dans le processus de résolution d'une situation problème. Nous avons une chaîne de significations pour arriver à une solution de la situation.

Dans un contexte socioculturel, nous nous sommes efforcés d'analyser l'approche de Bourdieu (1980, p. 88-89), autour de la notion d'*habitus* :

> Les conditionnements associés à une classe particulière de conditions d'existence produisent des *habitus*, systèmes de *dispositions* durables et transposables, structures structurées prédisposées à fonctionner comme structures structurantes, c'est-à-dire en tant que principes générateurs et organisateurs de pratiques et de représentations qui peuvent être objectivement adaptées à leur but sans supposer la visée consciente de fins et la maîtrise expresse des opérations nécessaires pour les atteindre, objectivement « réglées » et « régulières » sans être en rien le produit de l'obéissance à des règles, et étant tout cela, collectivement orchestrées sans être le produit de l'action organisatrice d'un chef d'orchestre.

Est-il possible d'adapter cette notion générale d'*habitus* qui est liée à la pratique dans la vie courante au milieu scolaire ? De notre point de vue, la réponse est oui, en prenant l'école comme une micro société où la pratique dans un milieu d'enculturation (la classe de mathématiques) joue un rôle important dans la formation d'un *habitus* lié, dans notre cas, à la modélisation mathématique en 3e secondaire (élèves de 14 ans). L'*habitus* devrait être lié aux représentations fonctionnelles et à leur évolution dans un milieu socioculturel. Nous voulons nous attarder sur des éléments d'une théorie locale des représentations qui devrait permettre d'expliquer, d'une part, les constructions des connaissances d'un point de vue d'enculturation dans la classe de mathématiques et, d'autre part, la construction individuelle des connaissances des élèves dans ce milieu.

Notre approche méthodologique prend en compte différentes étapes (voir les étapes d'ACODESA) dans un milieu socioculturel lié à la théorie de l'activité. La réflexion individuelle d'un élève est faite à l'intérieur de ce milieu, dans la mise en place duquel participe notre méthodologie, avec ses étapes de travail en équipe, de discussion en grand groupe, de retour à la réflexion individuelle et finalement d'institutionnalisation, qui sont les étapes de notre méthodologie. Ci-après nous détaillons les étapes proposées dans le cadre de la méthodologie ACODESA pour l'étude des problèmes et situations-problèmes dans la classe de mathématiques.

I. Travail individuel en milieu socioculturel dans la classe de mathématiques

Le travail individuel dans un premier temps vise à fournir aux étudiants la possibilité de se représenter le problème ou la situation problème, afin qu'ils puissent en avoir une certaine idée avant de passer à la discussion d'équipe (voir Figures 1 et 2). Les représentations fonctionnelles (probablement non liées aux

représentations institutionnelles) apparaissent souvent à ce stade et, à travers elles, les élèves produisent un schéma (représentation externe) qui leur permet de passer à l'action.

II. Travail en équipe en milieu socioculturel dans la classe de mathématiques

L'interaction entre les élèves a comme fonction l'enrichissement de l'approche individuelle développée dans la première étape. En règle générale, les étudiants ayant le plus de pouvoir de persuasion sont ceux qui vont diriger l'équipe pour la résolution de la tâche mathématique. C'est pourquoi, il est crucial que l'étudiant ait d'abord eu une approche individuelle. La manipulation des objets physiques est très importante dans cette étape (Figure 2). Habituellement, c'est là que commencent les processus de validation (Figure 1) et le travail de raffinement des représentations fonctionnelles dans un processus de communication qui doit se matérialiser en représentations dites institutionnelles dans un processus de communication. C'est ici que les normes (voir Figure 2) interviennent pour la distribution du travail entre les membres de chacune des équipes.

III. Débat (avec la possibilité de promouvoir un débat scientifique)

Le rôle de l'enseignant est de promouvoir la communication scientifique dans la classe de mathématiques (Legrand, 1993). Son rôle n'est pas de fournir la réponse correcte aux élèves (voir Figure 1 et 2), mais de les questionner et aussi de promouvoir un débat scientifique entre eux. Les différents résultats donnés par les équipes sont pesés et discutés par les différentes équipes jusqu'à arriver à la conviction et au consensus. Encore une fois, un processus de raffinement des représentations non institutionnelles apparaît régulièrement à ce stade. Attention! Il est habituel pour les élèves d'exprimer leur accord lors d'une discussion en grand groupe. L'enseignant peut donc penser que ses élèves ont compris, mais quelques élèves, s'ils sont consultés individuellement, seront probablement incapables de reconstituer par eux-mêmes ce qui a été exprimé par les autres (Thompson, 2002). C'est pourquoi la prochaine étape est essentielle à notre modèle d'enseignement. À ce stade, il faut ramasser les productions des élèves avant de passer à l'étape suivante.

IV. L'autoréflexion en milieu socioculturel dans la classe de mathématiques

Cette étape n'est pas explicitée dans les approches d'apprentissage collaboratif ni dans les recherches (cf. Figure 1). La reconstruction individuelle des connaissances qui ont émergé en équipe et en grand groupe est une étape essentielle pour promouvoir l'*abstraction* chez les élèves (dans notre cas reconstruction individuelle de la connaissance). Nous prenons en compte le fait que le consensus dans la classe de mathématique peut être éphémère pour quelques élèves et qu'il est pour cela important de revenir sur la reconstruction de ce qui avait été fait en classe.

V. Le processus d'institutionnalisation

À ce stade, l'enseignant résume ce qui a été produit par les étudiants et permet une utilisation efficace des représentations institutionnelles (voir Figure 1 et 2). De plus, l'enseignant peut certainement discuter les différentes représentations qui ont émergé au cours de la résolution de la tâche mathématique.

4. Comment et quand utiliser la méthodologie ACODESA?

Les situations problèmes sont généralement conçues dans le but de générer une pensée diversifiée. En revanche, en général, les exercices sont conçus pour promouvoir une pensée avec un but précis, ou si vous voulez, ils sont conçus pour consolider la connaissance en savoir (comme Conne, 1992, nous faisons la distinction entre connaissance et savoir). Les problèmes ou les situations problèmes pour lesquels ACODESA est intéressante sont ceux qui permettent des voies de solution diversifiées.

Dans un cours magistral, il est difficile de promouvoir une pensée diversifiée. C'est dans une approche d'apprentissage collaboratif que la pensée diversifiée peut donner le plus de résultats. Les différents membres de chaque équipe peuvent avoir des idées différentes et la discussion en grand groupe donne aux élèves l'opportunité de préciser leurs idées et commencer le travail d'une pensée orientée vers un but précis. Le contrôle de la classe pour faire avancer les élèves est donné par les différentes étapes de la méthode d'enseignement ACODESA; et la théorie de l'activité fournit la base théorique pour un apprentissage où les différentes étapes de la méthode et la manipulation d'objets jouent un rôle important.

De cette façon, la méthodologie ACODESA a un sens quand il s'agit de la résolution de situations problèmes ou des problèmes où l'on a l'intention de promouvoir une pensée diversifiée, comme une phase préliminaire avant de promouvoir une pensée vers un but précis. Autrement dit, on essaye de promouvoir la connaissance et ensuite le savoir.

Les situations problèmes sont généralement associées à des processus de modélisation mathématique. Ces processus sont habituellement associés à des tâches non routinières, qui génèrent chez les élèves la production des représentations fonctionnelles, soit des représentations qui sont liées à l'action et se dégagent lors de la lecture d'un énoncé mathématique pour comprendre la tâche, et la production d'une représentation qui émerge en vue de résoudre la tâche. La représentation n'est pas fonctionnelle si elle n'est pas liée à l'action.

Cette distinction combinée au fait de travailler une méthode d'enseignement dans laquelle la dialectique artéfact-outil, division du travail, communication dans la classe dans un contexte d'interaction sociale nous éloigne du constructivisme, du

socioconstructivisme, de l'interactionnisme et nous rapproche de la théorie de l'activité et celle-ci d'une théorie socioculturelle vygotskienne. Dans ce contexte, dans notre cadre théorique, nous distinguons les représentations fonctionnelles qui peuvent s'exprimer par des représentations, institutionnelles ou non. Avec la méthodologie ACODESA, nous essayons d'introduire un moteur de construction d'un habitus au sens de Bourdieu. Cela dit, nous essayons de promouvoir la construction d'une structure (structurant dans le sens de Bourdieu) régissant l'activité des individus en résolution de problème ou de situation problème dans le contexte de la modélisation mathématique. En bref, nous visons la mise en place d'un habitus lié à la résolution des problèmes et des situations problèmes en rapport avec la modélisation mathématique dans un environnement socioculturel.

Immergés dans un cadre théorique de l'action, nous pouvons utiliser l'approche d'Engeström, dans laquelle l'*habitus* est construit comme une chaîne où chaque anneau peut être représenté par le triangle d'Engeström, dans une approche complexe (un système) pour l'étude de la communication dans la classe de mathématiques (voir Figure 2).

5. But de l'expérimentation

Nous avons développé cinq activités conçues pour travailler pendant 13 rencontres d'une heure 15 minutes. Ainsi qu'indiqué précédemment, l'objectif général de l'expérience était de promouvoir chez les élèves la construction d'un *habitus* relatif à la résolution de situations problèmes en lien avec le contenu mathématique sur la modélisation mathématique et les fonctions. Plus précisément, notre intention était de promouvoir un *habitus* lié à la construction d'un schéma (à partir d'un énoncé lié à une situation problème), de promouvoir l'association avec d'autres représentations : verbales, numériques, construction de l'allure de la représentation graphique (qui peut jouer comme élément de contrôle), construction de la représentation algébrique et, finalement, tracé de la représentation graphique à l'aide de la représentation algébrique. Dans tout cela, il s'agit d'expliquer le phénomène étudié à l'aide des différents modèles construits. La méthode ACODESA, en plus de promouvoir la coordination entre représentations en incluant les représentations fonctionnelles dans un milieu socioculturel, veut promouvoir une sensibilité à écouter ses coéquipiers et à engager un débat scientifique si nécessaire. A un niveau plus élevé, l'argumentation pour convaincre et la sensibilité à la contradiction devraient aboutir à la démonstration. Ici, l'abstraction passe par plusieurs étapes et se termine avec la reconstruction des processus développés avec ses coéquipiers et en grand groupe, abstraction qui devrait être intégrée à un savoir dans le processus d'apprentissage.

6. Expérimentation sur la modélisation mathématique en 3e secondaire avec ACODESA

Nous avons effectué une expérimentation de 13 séances avec deux groupes de 3e secondaire au Québec (âge de 14 ans). L'enseignant était intéressé par la méthodologie ACODESA pour mener une expérience avec deux groupes d'étudiants : un groupe dit « fort » par l'enseignant, de 36 élèves, et un groupe dit « faible » de 24 élèves.

6.1. Description générale des activités[1]

La première activité (le photographe) favorise la construction d'une représentation fonctionnelle et de son produit dans la représentation d'un schéma, la représentation verbale consistant à expliquer la situation en termes de covariation entre variables.

La deuxième activité (le randonneur) favorise la construction d'une représentation fonctionnelle et de son produit dans la représentation d'un schéma, la représentation verbale consistant à expliquer la situation en termes de covariance entre variables et l'« allure de la représentation graphique » produite à partir de certaines données expérimentales.

La troisième activité (jacuzzi) favorise les mêmes éléments que les deux premières activités, ainsi que la représentation algébrique et un retour à la représentation graphique (d'un point de vue plus précis) une fois l'expression algébrique trouvée.

Les quatrième et cinquième activités (les carrés et les ombres) font la promotion des mêmes aspects que la troisième activité, mais cette fois-ci, on essaye de renforcer chez les élèves la construction d'un *habitus* lié aux processus de modélisation mathématique et aux fonctions.

Dans Hitt et Morasse (2009), Gonzalez et coll. (2008), Hitt et Gonzalez (en cours), nous avons montré les caractéristiques à la fois de l'évolution d'une représentation « schéma » liée à une représentation fonctionnelle, la construction des connaissances dans un travail collaboratif et l'autoréflexion. Tous ces aspects sont liés à la méthodologie ACODESA. Dans ces documents, nous avons discuté différents aspects des résultats expérimentaux, montrant des exemples de productions liées aux représentations fonctionnelles, de processus de covariation entre les variables en tant que prélude à la notion de fonction et de constructions

[1] Des présentations préliminaires ont été travaillées dans le cours MAT3225 Didactique de la variable et les fonctions à l'UQAM, par C. Janvier, B. Janvier, L. Charbonneau et F. Hitt en différents cours. L'activité du "Randonneur" a été considérablement améliorée par V. Passaro (2007, 2009) dans son mémoire de maîtrise.

individuelles et sociales des connaissances. C'est ici que nous discutons de la notion d'*habitus* de façon plus précise. Dans ce document, nous analysons la notion d'*habitus* que, croyons-nous, certains étudiants ont développée et que nous pensons former une connaissance stable.

Comme nous l'avons dit, nous avons choisi de suivre quelques élèves dans leur parcours des 13 sessions d'une heure et quart. L'expérimentation a été développée pendant un mois et demi. Deux caméras ont filmé toutes les sessions.

La formation des équipes n'a pas été exactement celle qui est planifiée dans la méthodologie ACODESA (Hitt, 2007). Le professeur nous a expliqué que dans son école, chaque élève doit choisir une activité personnelle qui va durer tout au long de l'école secondaire (cinq ans). Ainsi, de façon naturelle les équipes se forment en raison d'activités similaires liées soit au sport soit au design assisté par ordinateurs, soit à la musique, aux arts, etc. Il nous a demandé de respecter les équipes ainsi formées au fil des ans. Alors, on a demandé aux élèves de rester toujours avec une seule équipe de leur choix. Mais le professeur a permis aux élèves de changer s'ils le voulaient. En fait, dans certains cas, quand les compagnons d'un élève n'étaient pas en classe, l'élève pouvait travailler avec une autre équipe.

6.2. Co-construction de connaissances dans une approche de théorie de l'activité

6.2.1. Groupe de 36 élèves

Dans le groupe de 36 élèves, nous avons choisi deux binômes, même s'il y avait dans certaines activités plus de deux personnes par équipe. Pendant les activités, ces deux binômes sont restés stables. Voici les caractéristiques des quatre élèves qui les constituent.

Harold* et *Luc

Les idées intuitives de *Harold* lui permettent de commencer chaque situation avec un schéma qui lui permet de passer à l'action. Quand il travaille tout seul, il passe à la représentation numérique et essaye de trouver l'allure de la représentation graphique de la fonction en jeu. Quand il travaille en équipe, sous l'influence de *Luc*, il essaye d'aller le plus vite possible vers la représentation algébrique. Nous pensons que, dans son pays d'origine, *Harold* a eu une formation où les représentations algébriques ont une priorité. Il n'aime pas travailler les autres représentations en général. Ses schémas sont en général faits sans beaucoup de soin. Il a de la difficulté à faire une manipulation cohérente des symboles algébriques et il a tendance à répéter ce qu'il a fait avec *Luc* sans faire vraiment une réflexion profonde. Nous pouvons dire qu'en général l'*habitus* que nous avons voulu promouvoir chez cet élève n'a pas fonctionné. Sa formation s'opposait à

notre approche, et son coéquipier (*Luc*), qui avait beaucoup d'influence sur lui aussi, avait une préférence marquée pour les représentations algébriques.

Luc a eu une formation similaire à *Harold* dans son pays d'origine (différent de celui de *Harold*). Il donne une priorité aux représentations algébriques et c'est difficile de le faire s'attarder sur d'autres représentations (il a eu une grande influence sur *Harold*). Il a en général une bonne manipulation des symboles algébriques. Même si sa performance est bonne en général, nous ne pouvons pas dire qu'il a construit un *habitus* dans le sens que nous avons voulu. C'est plutôt le contraire, l'*habitus* qu'il avait construit dans son pays d'origine fait un blocage par rapport à notre approche.

Annie* et *Carol

Annie est une fille très attentive à ce qu'elle fait. Quand on lui demande de faire premièrement un schéma, elle le fait à l'échelle. Cela et la manipulation des objets physiques lui ont permis dans toutes les situations d'arriver à trouver l'allure de la représentation graphique sans problème. Elle a de la difficulté à passer aux processus algébriques. La discussion avec ses coéquipiers (en particulière avec *Carol*) lui permet d'avancer avec ses idées intuitives. Elle a bien construit un *habitus* comme nous l'avons promu, même si elle a de la difficulté avec l'approche algébrique. En fait, son approche avec les représentations différentes de l'algèbre lui permet d'avoir un moyen de contrôle sur les processus algébriques.

Carol est une jeune fille qui essaye de comprendre ce que les autres disent. Elle a de la difficulté à mettre en œuvre ses idées intuitives, mais une fois qu'elle voit faire les autres, elle essaye de comprendre toutes les approches des autres. Elle a la capacité de bien résumer ce que les autres disent. Par exemple, quand le professeur dit quelque chose, elle est capable de répéter avec ses propres mots l'idée du professeur. Dans les processus d'*abstraction*, elle essaye de résumer et présenter toutes les idées discutées en classe.

Cette élève est très à l'aise quand elle travaille en équipe avec *Annie*. Nous pouvons dire qu'elle s'est construit l'*habitus* prévu par les chercheurs et le professeur. Nous pouvons même dire qu'elle a développé une sensibilité à la contradiction. Dans la dernière activité de reconstruction, elle a essayé toutes les approches de ses compagnons de classe et dans la représentation algébrique, même si elle n'a pas pu la résoudre, elle a exprimé sa déception (sentiment de malaise lié à la contradiction cognitive).

Nous avons choisi ces deux équipes parce que, même si les équipes étaient aux deux extrémités de la salle, nous avons montré dans Hitt et Morasse 2009 et Hitt et Gonzalez (en préparation) que le schéma et l'approche numérique ont eu chez *Annie* et *Carol* une influence dans la résolution de la dernière activité, tandis que chez *Harold* et *Luc* ce fut leur approche algébrique. En fait, *Harold* est allé

directement vers *Carol* pour lui demander si elles avaient fini, et la réponse de *Carol* fut : « l'ombre mesure un tiers de la distance parcourue par le bonhomme ». *Carol* a fait un geste du bras qui montre qu'une ligne droite représente graphiquement la situation.

6.2.2. Dans le groupe de 24 élèves

Après les premiers cours, *Elena* est allée demander au professeur de donner ses cours « comme avant ». Elle a expliqué qu'avec la méthodologie suivie, elle est incapable de faire quoi que ce soit. Elle a dit qu'elle regarde ses compagnons faire des choses, mais qu'elle n'arrive pas à faire comme eux. Elle explique qu'en revanche, quand le professeur fait un cours magistral, elle peut le suivre et qu'après elle peut résoudre des problèmes similaires. Elle pense que premièrement il faut voir comment le professeur fait et elle peut l'imiter. Les membres de son équipe sont faibles et pensent de la même manière. Tous avaient de la difficulté à travailler de façon organisée. En général, ils attendaient l'étape du débat pour regarder ce que les autres avaient fait. Un élément intéressant est que cette élève a pu améliorer son approche quand ses compagnons n'étaient pas là. Dans ce cas, elle était obligée de travailler avec une autre équipe. On a vu qu'elle pouvait améliorer ses représentations et même profiter des idées des autres, par exemple lorsqu'elle a travaillé la première activité avec une équipe différente (avec *Lino, Yag, Mina* et *Ago*). Elena n'a pas développé un *habitus* dans le sens que nous avons promu.

Betty, Damien, Agnès, Charlie

Betty est très dynamique, elle participe immédiatement avec les idées de ses compagnons, mais elle a une tendance à s'arrêter rapidement une fois une idée développée. Elle aime la manipulation d'objets. Par conséquent, pendant que l'activité est liée à la manipulation des objets et à la recherche de représentations, elle est très accrochée à la situation problème. Quand ses compagnons passent à une étape algébrique, elle a tendance à décrocher et à ne pas faire beaucoup attention à ce que ses compagnons disent. Alors, elle ne fait pas en profondeur le travail d'*abstraction* que l'on demande dans l'avant-dernière phase de la méthodologie. L*'habitus* que nous avons voulu promouvoir avec cette élève reste à mi-chemin, mais dans les premières étapes elle aide ses coéquipiers dans la résolution de la situation.

Damien est quelqu'un qui s'engage de temps en temps dans le travail de ses coéquipiers. Il peut suivre les idées des autres, mais il n'essaye pas de réfléchir beaucoup. Quand il s'accroche à une situation problème, il a de bonnes idées, mais en général, il a une grande tendance à répéter ce que ses coéquipiers font sans faire un effort supplémentaire vers une *abstraction*. L'*habitus* que l'on a voulu promouvoir n'a pas bien fonctionné avec lui. Quand il travaille avec une équipe forte, il peut retenir ce que ses coéquipiers font ; quand l'équipe est faible, il reste

au même niveau que ses coéquipiers. La méthodologie n'a pas bien fonctionné avec cet élève.

Charlie semble être plus méthodique dans son travail. Il semble qu'il a une bonne mémoire et qu'il peut faire des associations avec des contenus traités les années précédentes. Il a besoin de travailler avec une équipe dynamique pour aider les autres avec ses idées. Dans une occasion où il a changé pour une équipe plus faible, il a eu une tendance à rester au même niveau que les autres. En général, il a bien réussi avec son équipe forte dans laquelle il a été un pilier pour la résolution des situations proposées grâce à sa capacité d'intégrer des connaissances apprises antérieurement. La méthodologie a bien fonctionné avec lui et nous pensons qu'il a construit un *habitus* dans le sens que nous avons promu.

Agnès est une fille très dynamique. Elle a tendance à être leader sans imposer ses idées aux autres. Elle n'a pas d'habileté pour la manipulation des objets physiques comme *Betty*. Par contre, *Agnès* a la capacité d'assimiler ce que les autres disent d'une façon extraordinaire. Par exemple, lors de la dernière activité, elle a fait une erreur de calcul quand elle est passée au tableau. Le professeur lui a signalé son erreur. Elle a non seulement corrigé l'erreur en cours de route, mais elle a su donner une explication cohérente intégrant le résultat à une coordination entre représentations. Dans son cahier, on peut remarquer l'erreur, mais dans le processus d'*abstraction*, elle a su montrer le processus sans erreur. Il semble que la communication avec ses pairs lui donne l'opportunité d'organiser ses idées. Elle a une bonne connaissance et un savoir-faire pour passer du côté pratique manipulatoire au côté algébrique. Elle a eu une bonne équipe qui lui a permis d'avancer (*Betty* qui se charge de la manipulation des objets physiques, *Charlie* qui aide beaucoup par les associations qu'il fait avec des contenus déjà travaillés et *Damien* qui n'aide pas beaucoup). Nous pensons qu'elle a développé un *habitus* comme nous l'avons promu. Elle fait un schéma de la situation pour passer tout de suite à l'action. Elle a besoin de ses pairs dans la manipulation des objets physiques. Elle a une bonne communication avec ses pairs, qui discutent de ce qu'elle propose, et cela lui permet d'avancer. Elle a une bonne approche de la manipulation des symboles algébriques.

Frida

Frida (élève qui, en général, préfère travailler seule) a une tendance à imaginer la situation problème et à utiliser ses idées intuitives, qui sortent du commun. Cette élève a une tendance à travailler seule, même si elle est en principe liée à une équipe. Elle a de la difficulté à se concentrer sur la tâche demandée. Toutefois, quand elle s'accroche, ses idées intuitives sont très riches, voire surprenantes (voir débat dans Hitt & Morasse, 2009). Les idées promues par notre méthodologie fonctionnent bien lorsqu'elle se concentre sur l'activité, sinon elle reste dans sa

bulle sans faire grand-chose. Elle peut même, de temps en temps, être indifférente à ce qui se passe dans la classe.

Anne

Anne est leader dans son groupe (cinq élèves). Il semble qu'elle soit la seule à travailler de façon organisée. Une autre élève a tendance à la suivre et à poser des questions. Les trois autres filles se contentent de regarder ce qu'elles font. *Anne* a des intuitions et elle les suit. La communication avec l'autre fille lui permet d'avancer en organisant ses idées pour donner une explication. Elle est une fille qui est très attentive à ce que les autres disent. Elle a construit un *habitus* comme nous avons voulu le promouvoir. Elle commence par un schéma qui lui permet de passer à l'action. Elle respecte les consignes d'approcher la situation de façon numérique, elle essaye de donner l'allure de la représentation graphique de la fonction, puis elle passe au registre algébrique. C'est alors qu'elle a de la difficulté, et généralement ses pairs ne l'aident pas dans cette partie. C'est plutôt dans la discussion en grand groupe qu'elle profite des idées des autres, qu'avec ses coéquipiers elle ne trouve pas.

C'est dans le groupe de 24 élèves que la méthodologie ACODESA a le mieux fonctionné. Le bruit que faisaient les 36 élèves de l'autre groupe a incité à mi-expérimentation l'enseignant à ne permettre la communication qu'entre deux élèves voisins, sans que des déplacements de tables soient autorisés.

Discussion

Notre préoccupation générale au sujet de la construction des connaissances dans la classe de mathématiques dans une approche de théorie de l'activité nous a amenés à examiner des questions générales telles que la notion d'*habitus* de Bourdieu. En même temps, dans notre approche théorique, nous avons considéré l'étape d'autoréflexion. Les deux approches, liées à un cadre théorique de l'action où l'apprentissage se développe en milieu socioculturel, nous permettent d'utiliser le triangle d'Engeström dans une approche complexe d'analyse de la communication dans la classe de mathématiques.

Nous sommes conscients que nous avons pris la notion d'*habitus* de Bourdieu dans un sens local au sein de la classe de mathématiques. En fait, dans nos considérations théoriques, l'élève arrive à l'école avec des pratiques issues de son milieu, ce qui fait que l'*habitus* ne résulte pas uniquement de l'interaction sociale dans la salle de classe. De notre point de vue, il y a besoin d'un processus d'autoréflexion (dans la reconstruction individuelle) pour la construction d'un *habitus* (comme produit final dans un contexte d'enculturation).

Dans chacune des étapes, l'enseignant devrait davantage insister auprès des élèves pour qu'ils effectuent le travail individuel, puis celui en équipe, et devrait donner toute son importance à l'étape de reconstruction liée à une autoréflexion, car, de

notre point de vue, le « consensus » dans la classe de mathématiques est éphémère pour certains élèves.

La construction de l'*habitus* se fait à travers la communication, dans un travail collaboratif en milieu socioculturel de construction sociale des connaissances combinée avec des processus individuels à l'intérieur de ce milieu. Dans cette étude, nous avons pu observer que pour certains élèves la méthodologie ACODESA n'a pas été efficace. Probablement faudrait-il revenir à l'idée originale (Hitt, 2007), où la composition des équipes devait être pensée en prenant en compte les aptitudes des étudiants. Il semble qu'il ne faut pas laisser se former des équipes faibles, mais plutôt combiner ces élèves avec des élèves forts. Une autre condition qui pourrait être importante est de travailler un cours au complet comme nous l'avons fait avec des enseignants (*Ibid*.).

La méthodologie ACODESA vise à offrir une nouvelle approche d'enseignement dans un contexte socioculturel (théorie de l'activité), en tenant compte des aspects individuels à l'intérieur de ce milieu et d'une construction sociale des connaissances dans la classe de mathématiques avec une approche théorique liée aux représentations.

REMERCIEMENTS
La recherche présentée dans ce document a été réalisée grâce à la subvention Fonds de la Recherche sur la Société et la Culture du Québec (No. 008-SE-118696), Conseil de Recherche en Sciences Humaines du Canada (No. 410-2008-1836, CID 130252).

REFERENCES

BOURDIEU, P. (1980). *Le sens pratique*. Paris, Éditions de Minuit.

CONNE, F. (1992). Savoir et Connaissance dans la Perspective de la Transposition Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 12, nº. 2.3. 221-270.

DISESSA A., HAMMER D., SHERIN B. & KOLPAKOWSKI, T. (1991). Inventing Graphing : Meta-Representational Expertise in Children. *Journal of Mathematical Behavior,* 10, 117-160.

DUVAL, R. (1988). Graphiques et équations: l'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1*, 235-253.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 5*, 37-65.

DUVAL, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels. Peter Lang, Suisse.

DUVAL, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61. 103-131.

ENGESTRÖM, Y. (1999). Activity theory and individual and social transformation. In Engeström Y., Miettinen R. Punamäki R-L. (Eds.), *Perspectives on activity theory* (p. 19-38). Cambridge: Cambridge University Press.

ENGESTRÖM, Y., MIETTINEN, R., PUNAMÄKI, R-L. (Eds.). (1999). *Perspectives on activity theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

GONZALEZ, A., HITT, F. & MORASSE, C. (2008). The introduction of the graphic representation of functions through the concept of co-variation and spontaneous representations. À case study. In Figueras, O., Cortina, J. L., Alatorre, S., Rojano, T. & Sepúlveda, A. (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of PME and the XX North American Chapter* Vol. 3, pp. 89-97. Morelia, Michoacán, México: PME.

HITT, F. (2003). Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Strasbourg,* Vol. 8, 255-271.

HITT, F. (2004). Les représentations sémiotiques dans l'apprentissage de concepts mathématiques et leur rôle dans une démarche heuristique. En Gisèle Lemoyne (Rédactrice), *Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : complexité et diversité des cadres d'étude. Revue des Sciences de l'Éducation*. Volume XXX, no. 2, p. 329-354.

HITT, F. (2006). Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example: The concept of limit. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*. Strasbourg, Vol. 11, 253-268.

HITT, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éditeurs), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. conception et usages, regards croisés* (p. 65-88). Éditorial Hermes.

HITT, F. & MORASSE, C. (2009). Développement du concept de covariation et de fonction en 3ème secondaire dans un contexte de modélisation mathématique et de résolution de situations problèmes**.** Proceedings CIEAEM 61 – Montréal, Quebéc, Canada, July 26-31, 2009. *"Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)", Supplemento n. 2, 2009*. G.R.I.M. (Department of Mathematics, University of Palermo, Italy). http://math.unipa.it/~grim/cieaem/quaderno19_suppl_2.htm

JANVIER, C. (Editor). (1987). *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Lawrence Erlbaum Associates.

LEGRAND, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères*, no. 10, 123-159.

LERMAN, S. (1998). Research on Socio-Cultural Perspectives of Mathematics Teaching and Learning. In Sierpinska A. & Kilpatrick J. (p. 333-350).

Mathematics Education as a Research Domain, a Search for Identity: An ICMI Study . Kluwer Academic Publishers.

PEIRCE, C. S. (1992). *The essential Peirce : Selected philosophical writings*. N. Houser & C. Klosel (Eds). Vol. 1. Bloomington, IN: Indiana University Press.

PEIRCE, C. S. (1998). *The essential Peirce : Selected philosophical writings*. N. Houser & C. Klosel (Eds). Vol. 2. Bloomington, IN: Indiana University Press.

RICHARD, J-F. (1990). *Les activités mentales. Comprendre, raisonner, trouver des solutions*. Armand Colin, Paris.

SAUSSURE, F. (1915/1973). *Cours de linguistique générale*. Paris : Payot.

SIERPINSKA, A. (1998). Three épistémologies, three views of classroom communication : Constructivism, Sociocultural approaches, Interactionism. In Steinbring H., Bartolini, B. & Sierpinska, A. (Eds), *Language and Communication in the Mathematics Classroom* (p. 30-64). NCTM. Reston, Virginia.

STEINBRING, H., BARTOLINI BUSSI & SIERPINSKA, A. (Eds). (1998). *Language and Communication in the Mathematics Classroom*. NCTM. Reston, Virginia.

TALL, D. & VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

THOMPSON, P. (2002). Some remarks on conventions and representations. In Hitt F. (ed.). *Mathematics Visualisation and Representations* (pp. 199-206). Psychology of Mathematics Education North American Chapter and Cinvestav-IPN. Mexico.

VINNER, S. (1983). Concept Definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

FERNANDO HITT
hitt.fernando@uqam.ca
Département de Mathématiques
Université du Québec à Montréal, Québec

ALICIA AVILA

CONOCIMIENTOS EN CONSTRUCCIÓN SOBRE LOS NÚMEROS DECIMALES: LOS RESULTADOS DE UN ACERCAMIENTO CONCEPTUAL

Résumé. Construction de connaissances sur les nombres décimaux : résultats d'une approche conceptuelle. Il est bien connu que les nombres décimaux sont difficiles à comprendre, comme le montrent les résultats de multiples recherches. En général, ce sujet est signalé comme l'un des plus complexes pour les élèves de 10 à 12 ans. C'est à cet âge qu'est attendue la maîtrise de ces nombres, au vu des programmes d'enseignement de nombreux pays. Le cas mexicain ne fait pas exception, eu égard au taux très bas de succès dans les examens nationaux de mathématiques. Dans cet article, nous présentons un cas, dans un certain sens, hors du commun : les connaissances en construction sur les nombres décimaux dans une classe de la dernière année de l'école primaire au Mexique, dont l'institutrice a appliqué une approche conceptuelle du sujet. Nous constatons que les élèves sont en train de construire des connaissances assez importantes sur ces nombres, notamment celles qui leur permettent d'établir des équivalences, d'ordonner des nombres décimaux ou d'en mettre d'autres entre deux *nombres faussement consécutifs*. Ceci pourrait être la marque d'une première approche de la propriété de densité des décimaux. Même si l'on observe aussi des traitements syntactiques, on perçoit l'influence des approches conceptuelles promues par l'institutrice. Ceci montre qu'à condition que l'enseignement s'écarte de l'idée que les décimaux ne sont qu'une simple écriture, il est possible d'amener les élèves à une compréhension des décimaux à l'âge proposé par le curriculum officiel.
Mots – clés *:* école primaire, processus cognitifs, registres de représentation, nombres décimaux, relation d'ordre, équivalence, densité, droite numérique.

Abstract. Knowledge under construction about decimal numbers: Results from a conceptual approach. According to results from many research reports, it is difficult to understand decimals; in general, it is reported that this subject is very difficult for children from 10 to 12 years of age, when they have to learn it as established in the curriculum for elementary education of many countries. Mexico is not the exception: results in national exams of mathematics show that this is one of the themes in which students exhibit the lowest scores. This paper reports on findings of a case that, to a certain point, differs from that situation. We present the under-construction knowledge about decimals of a sixth-grade group of students from elementary school (11-12 years of age) whose teacher—with a special training in mathematics—tried an instructional practice based on a conceptual perspective to this topic. It was evidenced that very important knowledge about decimals was under construction, outstanding that which allows establishing equivalences, ordering decimals, or interpolating decimals between two falsely consecutive decimals—this last one seemed to reveal an incipient understanding of the density property of decimals. Although syntactical treatments were observed as well, the influence of the conceptual perspective promoted by the teacher was noticeable. It is shown that if teaching practices move away from the idea that decimals are just a way of writing numbers, then it is

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 18, p. 29 - 60.
© 2013, IREM de STRASBOURG.

possible to set students on the right road to understanding decimals at the age proposed in the official curriculum.

Resumen. De acuerdo con resultados de múltiples investigaciones, los números decimales son difíciles de comprender. En general, se reporta que el tema es muy complejo para niños de 10 a 12 años de edad, que es cuando deben estudiarlo según se establece en el currículum de la educación elemental de muchos países. México no es la excepción, éste es uno de los temas en los que los estudiantes muestran más bajo desempeño en los exámenes nacionales de matemáticas. En este artículo se presenta un caso que discrepa, hasta cierto punto, de esa situación. Se exponen los conocimientos en construcción sobre los números decimales de un grupo de niños que cursaban el sexto grado de educación primaria (11-12 años), y cuya maestra —con una formación especial en matemáticas— intentó un acercamiento conceptual al tema. Se constata que estaban en construcción conocimientos importantes sobre estos números, destacando los que permiten establecer equivalencias, ordenar decimales, o insertar otros entre dos falsos consecutivos; esto último parece reflejar una incipiente comprensión de la propiedad de densidad de los decimales. Aunque se observaron también tratamientos sintácticos, se percibió la influencia del acercamiento conceptual promovido por la profesora. Se muestra que es posible encaminar a los alumnos hacia la comprensión de los decimales en la edad en que el currículum oficial lo propone, si la enseñanza se aleja de la idea de que los decimales son sólo una escritura**.**

1. Problemática

Guy Brousseau señaló hace ya bastante tiempo que algunos conocimientos sobre los números naturales constituyen luego un obstáculo para comprender los decimales (cf. Brousseau; 1981 y 1983). Una amplia cantidad de indagaciones realizadas después de los trabajos de este investigador, han constatado el hecho una y otra vez: lo más común es que se traslade la lógica de los números naturales al interpretar los decimales y al operar con ellos (Perrin-Glorian; s/f; Brown 1981; Resnik et.al, 1989; Roditi; 2007). La idea planteada por Brousseau en los años ochenta es apoyo fundamental de este escrito, tanto porque las indagaciones posteriores constatan sus afirmaciones, como porque la traslación – errónea - de la *lógica natural* al ámbito de los decimales, no siempre se resuelve con el paso del tiempo, según lo reportan algunas investigaciones más recientes (p.ej. Alatorre y cols; 2002; Roditi; 2007).

Brousseau señaló, en el contexto de las reformas conocidas como “matemáticas modernas”, que en ese entonces las dificultades sobre los decimales no habían sido identificadas o eran consideradas como menores: “Si hay en matemáticas una enseñanza que no se presta a ninguna discusión y no presenta ninguna dificultad, es la de los decimales” (Brousseau; (1980; 175). Pero esa creencia – que las investigaciones del propio Brousseau pronto permitirían rebatir - persiste en muchas latitudes. En México, por ejemplo, las dificultades de niños y jóvenes para desprenderse de la lógica de los naturales al interpretar los decimales han sido

documentadas a través de los exámenes nacionales conocidos como EXCALE[1] (cf. Backhoff, 2006; Avila y García, 2008; INEE, 2009) así como en los llamados ENLACE[2] (cf. SEP; 2006, o SEP, 2011a). Y estas dificultades parecen relacionadas con la manera en que los decimales se enseñan.

1.1. Los decimales en las pruebas nacionales

En la primera edición de los Excale, se reportó que al concluir la primaria sólo entre un 25 y un 30% de los niños daba respuestas correctas en las tareas de comparación y ordenación de decimales, porcentaje que se repitió en tareas de identificación de decimales equivalentes, estando éstos representados mediante escrituras con punto (Backhoff, 2006). En general, entre los conocimientos y habilidades matemáticas que fueron evaluados ese año y que más del 50% de los estudiantes tenía probabilidades de resolver con éxito, no hubo ninguno relacionado con el tema de los números decimales (Avila y García, 2008, 87).
En la edición de los Excale 2009, los resultados son muy similares. Destaco de esta edición los bajos porcentajes de respuestas correctas alcanzados en ítems que implicaban:

> Identificar la escritura de un número decimal hasta milésimos (45%)
> Convertir, a decimales, números fraccionarios con denominador distinto a una potencia de 10 (44%)
> Identificar la representación con letra (en lenguaje natural) de un número decimal hasta centésimos (43%)
> Identificar la equivalencia entre números decimales hasta milésimos (42%)
> Comparar números decimales no enteros hasta milésimos (34%) (cf. INEE, 2009).

En estas pruebas no se incluyeron ítems para evaluar el conocimiento de la propiedad de densidad de los decimales en el sexto grado. Sobre dicha propiedad, sólo se tiene como referente un reactivo aplicado en el año 2006 en tercero de secundaria (Backhoff, 2006) consistente en "Usar la propiedad de densidad de los decimales", en la que se obtuvo un 53% de aciertos.

La representación de los decimales sobre la recta numérica – tema incluido en los EXCALE con una única pregunta - también se muestra problemática en ese examen y en los más recientes de ENLACE (SEP, 2011a), que reportan un 38 y un 44% de aciertos en las preguntas correspondientes.

---

[1] EXCALE: Exámenes de la calidad y el logro educativo, elaborados y aplicados a muestras nacionales de estudiantes de educación básica por el Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.
[2] ENLACE: Exámenes Nacionales del Logro Educativo, elaborados y aplicados anualmente por la Secretaría de Educación Pública a todos los estudiantes de educación básica.

Los exámenes ENLACE tienen un menor grado de confiabilidad que los Excale, sin embargo, los consideré también como referente por ser los de aplicación más reciente; por supuesto sin olvidar que son sólo un indicador del aprendizaje logrado en matemáticas al finalizar la primaria. De estos exámenes, me interesa señalar los porcentajes de aciertos en las tareas de conversión de números decimales (expresados con punto) a fracciones con denominador 2, 4, 5 y 8 y viceversa: 46% (cf. SEP; 2011a).

Por último, comento que en una pregunta que solicitó "resolver problemas que impliquen el uso del valor posicional de una cifra ubicada a la derecha del punto hasta el orden de los milésimos" se obtuvo 34% de aciertos (cf. SEP, 2011a).

Como se habrá observado, en general, lo porcentajes de aciertos en cuestiones vinculadas con los decimales no alcanzan el 50% en ninguna de las pruebas referidas. Estos porcentajes de aciertos servirán de referencia para ponderar los conocimientos del grupo participante en la investigación.

1.2. Los decimales en los programas de educación primaria

Conforme a los programas de educación primaria vigentes, los niños que concluyen este nivel educativo (generalmente a la edad de 12 años) deberían lograr un conocimiento adecuado de estos números y algunas de sus propiedades. Deberían saber ordenarlos, entender que entre dos decimales siempre hay otro decimal; también convertir fracciones decimales a escrituras decimales, encontrar equivalencias entre distintos decimales, ubicar estos números en la recta numérica y resolver problemas aditivos y multiplicativos que los impliquen (cf. SEP: 2006a; SEP; 2011b). ¿Hasta dónde una enseñanza que enfatice los aspectos conceptuales de estos números podrá producir mejores aprendizajes que los que reportan los exámenes nacionales?, o ¿La dificultad conceptual propia de los decimales marca límites infranqueables, de ahí que reiteradamente las investigaciones y exámenes nacionales arrojen malos resultados en el tema?

1.3. Supuestos de la investigación

Lo hasta aquí expuesto permite considerar los conocimientos sobre los decimales como un objeto de investigación relevante. Pero no es mi interés repetir resultados y dificultades conocidas sobre estos números. Lo que pretendo en este escrito va en otra dirección. Consiste en analizar los conocimientos en construcción sobre los números decimales de un grupo de niños que cursan el último grado de la educación primaria (11-12 años) y cuya docente – con una preparación especial en enseñanza de las matemáticas - ha intentado un *acercamiento conceptual* a estos números. También interesa saber si existe alguna relación entre la comprensión de los distintos aspectos y propiedades de los decimales, así como entre las diversas formas de representarlos.

Para el desarrollo de la indagación asumimos varios supuestos:

A. El concepto de número decimal es complejo; su comprensión no resulta fácil a los alumnos, aun cuando sus profesores crean lo contrario (cf. Avila; 2008).
B. Conforme a los principios del socio-constructivismo, el aprendizaje matemático escolar está mediado por la acción del maestro y los intercambios entre compañeros. El rol del profesor y las experiencias que éste ofrezca a sus alumnos, son fundamentales en los aprendizajes.
C. También asumo, siguiendo a Duval (1993), que la comprensión de un objeto matemático requiere necesariamente aprehender y producir representaciones diversas, y transitar entre esas distintas representaciones, puesto que: "Un lenguaje no ofrece las mismas posibilidades de representación que una figura o que un diagrama […] y de un registro de representación a otro no son los mismos aspectos del contenido los que son representados" (Duval; 1993; 127), ni las mismas propiedades las que se destacan. (cf. Duval, 1993 y 1995).
D. El conocimiento del número decimal, como ha señalado R. Adjiage para el conjunto de los racionales (Adjiage; 2003 y 2005), supone poder movilizarlo en diferentes situaciones de referencia, y utilizarlo en diferentes registros de representación, articulando las situaciones y las representaciones.

En otras palabras, y en acuerdo con los autores mencionados, nuestro punto de partida es que los decimales implican a la vez la pluralidad de sus representaciones y referentes y la unicidad del concepto que subyace en ellas. Por ejemplo, el número que en lenguaje natural llamamos *veinte centésimos* – expresión que es en sí un registro de representación - puede representarse al menos en los siguientes modos:

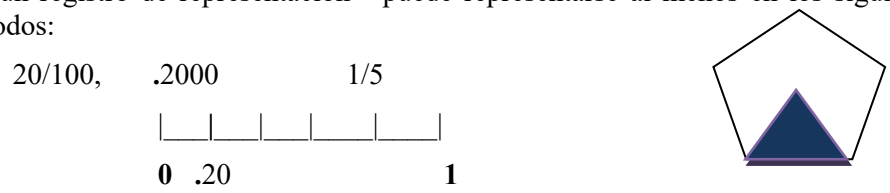


Figura 1. Algunos modos de representación de veinte centésimos

Es un reto para la enseñanza hacer comprender a los alumnos que estos diversos registros representan el mismo número, o dicho más formalmente, hacerlos comprender la unicidad del concepto decimal subyacente en esta pluralidad de representaciones.

Ahora bien, la comprensión, tratamiento y coordinación de registros implica dificultades particulares en el caso de los decimales; las razones son diversas:

a) La tendencia a la confusión entre número y representación del número que afecta a todos los conjuntos numéricos pero que se agudiza en el caso de los decimales (cf. Centeno; 1997; Sáiz et. al; 2011);
b) La amplia diversidad de registros en que estos números pueden representarse;
c) La interferencia de algunos conocimientos sobre los números naturales que hacen obstáculo para la comprensión de los decimales.

1.4. Objetivos de la investigación

La complejidad conceptual y representacional de los decimales me obligó a enfocarme sólo en algunos de sus aspectos: orden, equivalencia y densidad, y a algunas de sus representaciones: escrituras decimales (con punto), representación en la recta numérica y mediante superficies fraccionadas. Incorporé también al análisis los tratamientos de que se valen los niños para realizar las tareas propuestas. Es importante hacer aquí una acotación metodológica. Entiendo los tratamientos no en el sentido de R. Duval, sino simplemente como la actividad cognitiva que despliega el alumno sobre la situación planteada para obtener la respuesta solicitada. En términos de E. Roditi (2007), indagué si se trata de tratamientos sintácticos o de tratamientos semánticos, diferencia que considero indicador del nivel de comprensión de los números que en la cultura escolar mexicana son llamados *números con punto*. En menor medida analicé el tránsito entre los distintos registros de representación de los decimales.

Con base en lo antes expuesto, mi interés fue identificar los conocimientos sobre los números decimales que pueden construir los niños si se les ofrece un *acercamiento conceptual* al tema. Con el término *conceptual* me refiero a un acercamiento que destaca la naturaleza de los decimales: la relación de orden, la de equivalencia, la propiedad de densidad, los significados que subyacen a su representación decimal.

Específicamente, indagamos:

a) Qué conocimientos respecto de los números decimales muestran los niños de un grupo de sexto grado con desempeño académico destacado y cuya maestra ha favorecido un acercamiento conceptual a estos números;
b) Si estos conocimientos son distintos de los reportados en las pruebas nacionales que ponderan el logro académico de los estudiantes;
c) Qué tratamientos utilizan estos niños para construir las respuestas que se les solicitan;
d) Qué huellas de la enseñanza se identifican en esos tratamientos y qué papel juegan en ellos los procedimientos aprendidos en la escuela.

2. Estrategia de indagación

2.1. La maestra y el grupo participante

2.1.1. El grupo

El grupo participante en la investigación (en adelante el grupo), de sexto grado de educación primaria, está compuesto por 28 niños de 11 años (excepto uno de 10 y uno de 12) y pertenece a una escuela pública de jornada ampliada[3] ubicada en la ciudad de México. Son niños de nivel socio-económico medio y medio-bajo, pero la escuela se considera de desempeño destacado en matemáticas con base en los parámetros que se explican a continuación.

En México, los exámenes de *Evaluación Nacional del Logro Académico* conocidos como "Prueba ENLACE" se aplican anualmente en todas las escuelas primarias. El puntaje máximo de estos exámenes es de 800 puntos, pero se considera un reto que los grupos escolares alcancen 600 como promedio. En la última aplicación de ENLACE (2011), el grupo rebasó con amplitud esta meta, alcanzando 680 puntos en matemáticas. Estos datos permiten considerar que el grupo - comparativamente y en esos términos - tiene un desempeño sobresaliente en matemáticas.

La elección del grupo fue intencional, se escogió bajo el interés ya señalado de identificar los conocimientos que se generan sobre los números decimales cuando éstos se enseñan con un enfoque que acerca a sus propiedades y su estructura y que, con el afán de sintetizar he llamado *enfoque conceptual*.

2.1.2. La profesora del grupo

Los logros académicos del grupo están muy probablemente asociados al perfil de la profesora y su acción docente en matemáticas. Ella tiene 20 años de servicio y se ha interesado especialmente en la enseñanza de esta disciplina, motivo por el que ha buscado prepararse más en esta temática. Es graduada en una maestría con especialidad en educación matemática, donde estudió textos sobre los números decimales y su enseñanza. "Siempre he andado con lo de matemáticas, pero lo de decimales lo aprendí cuando leí el librito aquél en la maestría" (se refiere al libro *Los decimales más que una escritura*, cuya ficha aparece en la bibliografía). "En ese libro… aprendí lo que es un decimal. Porque aquí [en las escuelas], nos vamos con la idea de que los decimales son los números con punto, les enseñamos la *tabla de posiciones* y ya pasamos a las operaciones".

La maestra atendió al grupo también en el quinto grado, por lo que - conforme a los programas vigentes en educación primaria - la enseñanza de los decimales a estos niños ha estado a su cargo.

---

[3] Escuelas donde los niños permanecen para comer, hacer tareas y actividades co-curriculares una vez concluido el horario normal de clases.

2.2. El *acercamiento conceptual* a los decimales y su contraste con las tradiciones de la escuela mexicana

2.2.1. La secuencia

La secuencia trabajada en el grupo para enseñar y aprender los decimales fue reconstruida a partir de las dos entrevistas realizadas a la profesora; de las páginas de libros de texto utilizadas y de las libretas de los niños que la profesora me permitió revisar. La secuencia es la siguiente:

1. Representación, mediante el *cuadrado-unidad*, de décimos, centésimos y milésimos (ver anexo 1)
2. Introducción a la comparación de decimales mediante su representación en el *cuadrado-unidad* (comparación con apoyo visual).
3. Repaso del valor posicional en la *tabla numérica*, la cual se anota en el pizarrón cada vez que se utiliza; la maestra enfatiza sobre la tabla: *"hacia la derecha la cifra representada tienen un valor 10 veces menor que la cifra de la izquierda y, al revés, hacia la izquierda, el valor es 10 veces mayor".*
4. Equivalencia entre décimos, centésimos y milésimos y uso del cero para establecer dichas equivalencias; la maestra enfatiza: "un décimo equivale a diez centésimos, y equivale a cien milésimos…"
5. Ubicación de decimales en la recta numérica y expresión, mediante escrituras decimales, de puntos señalados en la recta;
6. Noción de densidad de los decimales en los decimales, a partir de subdivisiones decimales sobre la recta[4];
7. Conversión de fracciones a decimales*
8. Integración de diversos registros de representación*

La profesora considera que todos los aspectos de los decimales trabajados en el grupo son importantes.

> "Antes, cuando no sabía yo gran cosa, me centraba en la escritura, que fuera correcta, y nos íbamos a las operaciones, pero ya con las nuevas lecciones que empezaron a traer los libros, las empecé a resolver yo para ver qué dificultades irían a tener los niños, como la representación en la recta numérica, la conversión de fracciones a decimales, de hecho todo lo que nos va demandando el currículum pienso que es importante".

La dinámica de las clases en el grupo, se da alrededor de la resolución de situaciones y ejercicios - generalmente los que vienen en los libros de texto

[4] En el inciso 3.7 se explica por qué se habla de densidad de los decimales en los decimales.

* Las tareas marcadas con asterisco no había sido trabajada cuando se aplicó el cuestionario y se realizaron las entrevistas a los niños.

gratuitos, u otros que la profesora incorpora, - pero en medio de un ambiente de libertad intelectual:

> Investigadora: ¿Cómo das las clases, les explicas, les planteas problemas, les pones ejemplos, situaciones que los hagan pensar…?
>
> Maestra: Yo pienso que ellos son los que me hacen pensar… porque lo que sí, es que se da apertura a todo tipo de respuestas y de preguntas […]. Hay algunos que se quedan '*un poquito cortos'*, pero hay otros que piensan cosas que no se les han enseñado.

El aspecto de los decimales que a la profesora se le ha hecho más difícil enseñar: "es esta parte de la densidad. Yo digo que porque los alumnos insisten en darle el mismo tratamiento de los números naturales a los decimales, o a los fraccionarios, entonces esta parte de "seguir dividiendo" sí les ha costado trabajo 'verla'".

También considera necesario reiterar que los décimos son la décima parte de la unidad, que los centésimos son la centésima parte y que los milésimos son la milésima parte de la unidad, pues "[…] en los niños hay el problema de que [piensan que] si son 10, son más chicos, y si son mil son más grandes, por eso los vamos representando, y en el libro de quinto, el de la reforma de 1993 [SEP, 2000], viene un ejercicio muy claro para eso (se refiere al *cuadrado-unidad* y a una lección que se desarrolla utilizándolo).

2.2.2. El enfoque propio de la tradición mexicana[5]

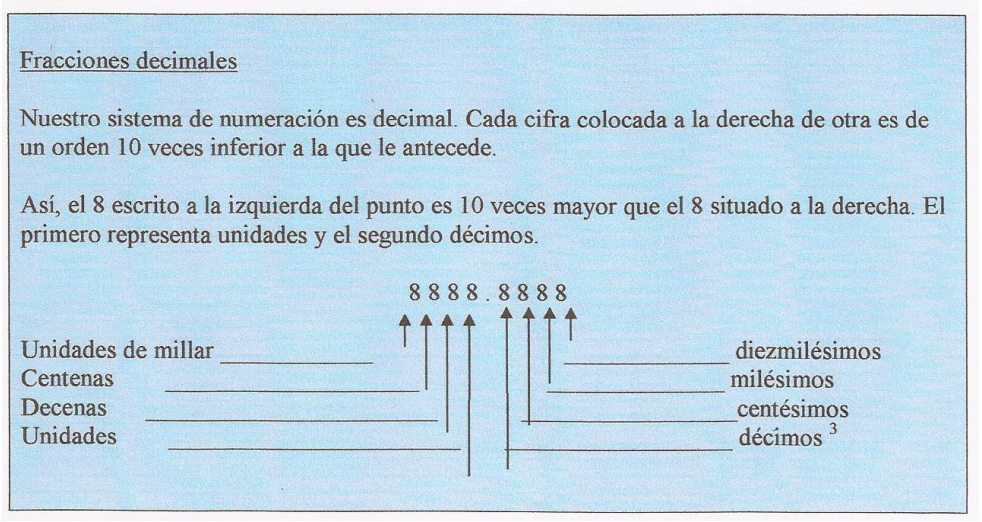
Conforme a las ideas imperantes en las escuelas primarias mexicanas, la enseñanza de las fracciones ocupa muchísimo más tiempo que la de los decimales. Una de las tareas típicas en esta cultura escolar es relacionar expresiones de la forma a/b con fracciones representadas a través de superficies fraccionadas. No obstante que las reformas curriculares de 1993 enfatizaron la diversidad de significados que pueden asociarse a una fracción (cf. SEP; 1993 y SEP; 2006b), en las aulas se sigue privilegiando esa forma de representación y de tratamiento de las fracciones (cf. Izquierdo; 2006), aunque no de los decimales que, comúnmente se trabajan como simple extensión de la escritura decimal de los naturales.

En efecto, lo primero que se aprende sobre los decimales en la escuela es su representación mediante el sistema decimal de numeración. Pero lo más común es que la enseñanza tome una orientación "nominalista", es decir, que se interese más

[5] Mis afirmaciones sobre la enseñanza común de los decimales, se basan en observaciones de clase en varias escuelas, el análisis de los currículos de educación primaria de los últimos 50 años, los resultados de una investigación previa (Avila; 2008) y la tesis doctoral, en proceso, de Isidro González Molina.

en hacer aprender los nombres de las *posiciones* y menos por el valor de los agrupamientos que cada cifra representa conforme a su posición (Avila; 2008). Y es que en general, los maestros consideran muy simple la tarea de enseñar los decimales, por lo que pronto pasan a las operaciones, principalmente a la multiplicación y a la división, que – en opinión de muchos - "son las que sí cuestan trabajo" (cf. Avila; 2008).

El acercamiento anterior ha sido promovido desde hace muchas décadas, por la forma en que estos números se presentaban en el currículum y en los libros de texto que se distribuyen gratuitamente a los niños en las escuelas. Aunque el currículum se ha modificado y en parte ha incorporado los resultados de la investigación educativa sobre el tema, la tabla que se incluyó en los libros gratuitos de 1960 para iniciar la enseñanza de estos números (figura 1) parece seguir articulando la enseñanza de los decimales.


Fracciones decimales

Nuestro sistema de numeración es decimal. Cada cifra colocada a la derecha de otra es de un orden 10 veces inferior a la que le antecede.

Así, el 8 escrito a la izquierda del punto es 10 veces mayor que el 8 situado a la derecha. El primero representa unidades y el segundo décimos.

8 8 8 8 . 8 8 8 8

Unidades de millar
Centenas
Decenas
Unidades

diezmilésimos
milésimos
centésimos
décimos [3]

Figura 2. Lección con la que iniciaba la enseñanza de los decimales en los primeros libros de texto gratuitos distribuidos por la SEP (1960).

Este enfoque prevalece a pesar de los cambios operados en el currículum, entre los que destacan los introducidos en el año 2000. La mayoría de los profesores así lo declaran (Avila; 2008). Declaran también que las lecciones dedicadas a los decimales (SEP, 2000) son muy difíciles o incluso les son incomprensibles, por lo que no las trabajan.[6]

[6] Aquí vale señalar que las innovaciones sobre los decimales se introdujeron sin que mediara alguna capacitación de los decentes para instrumentarlas.

En coherencia con ese enfoque, un procedimiento muy utilizado para comparar los decimales, que se presta a no escudriñar en sus propiedades, y que puede considerarse "sintáctico", fue claramente expresado por un niño participante en la etapa preliminar de esta investigación:

> "[Es que] dice el maestro que hay que fijarse en el que está más cercano al punto, el más cerca del punto es el que vale, no importa si [el número] tiene 10 o más cifras, lo que cuenta es el número más cerca del punto" (Edwin, alumno de 6° grado, escuela pública vespertina de la Cd. De México)

Otra constatación de la enseñanza de los decimales alejada de sus propiedades y su naturaleza, se obtiene de las libretas de los alumnos de cuatro grupos de sexto grado de primaria del estado de Puebla (cf. González Molina, en preparación). Se ve en ellas que sólo en un grupo se trabaja la densidad de los decimales; a la comparación y orden se dedica una o dos actividades; a las operaciones con decimales se dedican bastantes más actividades (7 u 8); en un caso, la división ocupa 21 de las 25 actividades sobre los decimales anotadas en la libreta.

2.3. Recolección de la información

La información se recogió mediante un cuestionario escrito que se aplicó a fines del mes de septiembre de 2011 (dos meses después de haber iniciado las clases en el sexto grado) (véase anexo 2). El cuestionario constó de dos tipos de preguntas: las que pueden clasificarse como de respuesta correcta-incorrecta (21 preguntas) y siete cuyas respuestas no implicaban la clasificación *correcto – incorrecto* pues estaban dedicadas a obtener información sobre las ideas amplias construidas alrededor de los decimales, su ámbito de uso y utilidad (preguntas 1 a la 5 y 21 y 22). Algunas de las preguntas solicitaban más de una respuesta, por lo que el total de éstas fue 28. Se elaboraron dos versiones del cuestionario, cambiando el orden de las preguntas, con el fin de controlar los efectos de una eventual fatiga. Los aspectos incluidos en el cuestionario son los siguientes:

- Naturaleza y utilidad de los números decimales (qué son, en dónde se usan, cuál es su utilidad)
- Posición y valor posicional de las cifras correspondientes a la representación decimal de números decimales
- Orden y equivalencia entre decimales de distinto orden
- Noción de densidad de los decimales en los decimales

- Distintos registros de representación de números decimales: escritura decimal (con punto), escritura fraccionaria (forma a/b), sombreado de superficies fraccionadas, puntos en la recta numérica.[7]

En el cuestionario se adaptaron preguntas típicas sobre los decimales utilizadas en otras investigaciones (p.ej Brown, 1981; Perrin-Glorian s.f; Resnick et. al, 1989; Roditi, 2007) y se incluyeron otras diseñadas para fines de esta investigación, utilizándose en su redacción el lenguaje que es común en la cultura escolar mexicana. En las preguntas evaluadas con las categorías *correcto- incorrecto* se pidió a los niños argumentar sus respuestas por escrito. Este dispositivo resultó de gran utilidad puesto que, en su mayoría, las explicaciones de los niños nos permitieron identificar los tratamientos que les permitieron obtener las respuestas.

Antes de aplicarse en el grupo, el cuestionario se aplicó sucesivamente en otros y en función de los resultados obtenidos - en cuanto a tiempo de resolución, claridad, complementariedad o pertinencia de las cuestiones incluidas - se fue ajustando hasta obtener la versión utilizada durante la investigación.

3. Resultados: conocimientos en construcción sobre los números decimales

Los resultados se exponen de la manera siguiente: las preguntas planteadas, se insertan en cuadros o viñetas a lo largo del escrito y entre paréntesis se anota el número de respuestas correctas. Cuando la tasa de éxito se compara con la correspondiente a las pruebas nacionales, en vez de las respuestas correctas aparece el porcentaje respectivo. Para no fatigar al lector se omiten estos elementos en el cuerpo del texto, donde sólo se incluye la interpretación de los datos.

3.1. ¿Qué son los números decimales?

Algunos de los niños del grupo consideran decimales a las fracciones con denominador potencia de 10 o señalan que los decimales (escrituras decimales) pueden expresar fracciones. Pero la idea más recurrente en el grupo es que los decimales son los números con punto, lo cual es natural considerando que conforme a la tradición escolar es así como se introducen y como los entienden en gran medida los profesores (cf. Avila; 2008; Saiz et.al. 2011). No obstante las reformas educativas que han tratado de revertir este estado de cosas resaltando el carácter racional de los decimales, la reducción de estos números a *casi una escritura* continúa prevaleciendo en las escuelas.

[7] Siguiendo a Adjiage (1999) y a Roditi (2007), he considerado la representación de decimales mediante puntos en la recta como otro registro de representación, aun cuando en este trabajo sólo se hayan incluido dos tareas similares utilizando este recurso.

Pregunta 22. - ¿Qué son los números decimales?

Noción subyacente en las respuestas	*Números con punto como rasgo exclusivo de identificación*	*Fracciones con denominador 10, 100, 1000… también pueden escribirse con punto*	*El punto como rasgo necesario pero no único*		
			Resultado de una división, llevan punto	*Números compuestos (de un entero y un decimal), el punto los separa*	*Otros*
Número de respuestas correctas (sobre 28)	*10*	*7*	*4*	*5*	*2*

Pocos alumnos han retenido la noción que la profesora buscaba favorecer: "Los decimales son los números que pueden representarse mediante una fracción con denominador potencia de 10" (entrevista a la profesora del grupo).

3.2. ¿Dónde se usan los decimales y cuál es su utilidad? (preguntas 1, 2, 4 y 5)

Los decimales son números útiles en diversidad de situaciones y prácticas sociales vinculadas a distintos ámbitos: las finanzas, el comercio, la ingeniería, la política y la medicina, entre otros (cf. p.ej. Centeno; 1997). Los niños del grupo también vinculan los decimales con diferentes dominios de actividad, orientando su atención en proporciones más o menos iguales hacia:

a) el ámbito escolar, porque estos números sirven para "hacer operaciones" y para "responder lo que te piden";
b) en la casa o el trabajo al hacer cuentas; y
c) el comercio y el manejo del dinero.

Hay además otras ideas que muchos de ellos comparten, como señalar que los decimales sirven para hacer ciertas divisiones, o cálculos más exactos, o sacar porcentajes. Los que parecen saber más, afirman que estos números son útiles para ganar en exactitud (en los precios, en las monedas, en *los cambios*, en los repartos…). Los argumentos son del tipo siguiente:

> *"[Los decimales son importantes] porque no se puede ir en el mundo con puros enteros"*
>
> *"[Si no hubiera decimales] yo creo que no se podría dar cambio y todo sería un desastre"*

Llama la atención las escasas referencias a los decimales como números que expresan el resultado de una medición, a pesar de que éste es el ámbito al que se vincula con más frecuencia la enseñanza del tema en las escuelas. Es que en su enfoque de enseñanza la maestra no ha trabajado esto suficientemente: "*Me imagino que no hacen referencia a ella porque no hemos trabajado lo suficiente*

con esta relación" (entrevista a la maestra del grupo). Pero aun con esta ausencia, los niños tienen ideas sobre el uso y la utilidad de los decimales que darán sustento a sus aprendizajes sobre estos números.

3.3. La posición y el valor de las cifras

Como es bien sabido, un número está representado en el sistema decimal de numeración cuando constituye una sucesión de símbolos y es interpretado como la suma de los términos que resultan de multiplicar el valor de cada símbolo por la potencia de diez correspondiente a la *posición* o *el lugar* que ocupa el símbolo con relación al punto decimal.

Comprender la escritura decimal de los números no es tan fácil como los maestros creen, implica tanto el conocimiento de un "bagaje simbólico" y un "vocabulario técnico", como el sentido que tienen esas escrituras, lo que se vincula con el valor de los agrupamientos que cada cifra representa, es decir, su valor posicional (cf. Bernardz y Janvier; 1984, cit. por Tempier; 2010). Pero en México ocurre lo que Liping Ma (1999) señaló hace tiempo respecto de profesores estadounidenses:

> "[Lo que esos profesores] querían decir con valor posicional, era solamente la primera mitad de la expresión: "lugar" – la posición de los números […] Cuando los profesores […] hablaban de la "columna de las decenas" (columna de los dieces) o de la columna de las centenas, no se concentraban en el valor de las cifras en esas columnas. Utilizaban los términos decenas y centenas como etiquetas para las columnas (Liping Ma, 1999, 29; cit. por Tempier 2010).

Para averiguar si en el grupo se había rebasado el enfoque "nominalista", en el cuestionario se abordó: a) la "mitad más simple" del concepto valor posicional: identificar y dar nombres a las *posiciones* antes y después del punto (preguntas 9a, 9b y 13); b) la "segunda mitad" del concepto: el valor de los agrupamientos que representan las cifras según su posición, y las relaciones de equivalencia entre esos agrupamientos (preguntas 12 y 17).

Pregunta 9a.- Encierra en un círculo la cifra que representa 4 centésimos (444.444) (53% de ciertos)

Pregunta 9b.- Encierra en un círculo la cifra que representa 4 centenas (444.444) (42% de aciertos)

Pregunta 13.- En el número 0.32 el tres representa 3 décimos, en el número 0.023, ¿cuánto representa el 3?(57% de aciertos)

Se ve en los puntajes obtenidos, que una tarea típica de la tradición escolar – aprender los nombres de las posiciones - no corresponde al mejor desempeño en el grupo. ¿Por qué ocurre esto? Una primera apreciación de las respuestas muestra

errores difíciles de comprender o clasificar. Pero un análisis más detenido muestra cierta lógica en algunas respuestas. Por ejemplo, ante la solicitud de señalar los centésimos y las centenas en el número 444.444 aparecen respuestas e ideas como las siguientes:

Respuesta	*Comentario sobre la respuesta*	*Razonamiento que sustenta la respuesta*
444. 444 | | *centésimos centenas*	Inversión de los lugares que ocupan las cifras: las centenas son centésimos y los centésimos son centenas	Lectura en espejo y confusión sobre el lugar (respecto del punto) correspondiente a la parte entera y la fraccionaria del número

Es probable que algunos niños (en general los que obtuvieron puntajes bajo la media) hagan una lectura en espejo de las cifras antes y después del punto. En general, la confusión respecto de las posiciones y sus nombres es alta en el grupo (aproximadamente un 50% de errores). Identificar la representación de un número decimal hasta centésimos, o hasta milésimos – cuestión que obtiene un 48% de aciertos en los EXCALE 2009 - sirve de referente para observar que en este aspecto los niños del grupo no han avanzado como sí lo han hecho en otros rubros.

Pregunta 12. - En 6 décimos cuántos milésimos hay? (14% de aciertos)

Pregunta 17.- Si al número 8 449 le agregas 14 centenas, ¿qué número obtienes? (35% de aciertos)

En conjunto, las respuestas reflejan también poca claridad sobre los valores representados en las distintas posiciones y la relación de equivalencia entre ellos, observándose dificultades a la derecha y a la izquierda del punto. Así, establecer en unidades el equivalente a 14 centenas tuvo un bajísimo número de aciertos; conforme a nuestra solicitud (véase viñeta), la mayoría sumó 140 unidades al número 8449 en vez de las 1400 correspondientes a las 14 centenas.

Estos resultados están incluso por debajo de los obtenidos en el nivel nacional al "resolver problemas que impliquen el uso del valor posicional de una cifra ubicada a la derecha del punto hasta el orden de los milésimos" (34%) (ENLACE, 2011).

Las respuestas colectadas hacen pensar que la introducción de la escritura decimal de los números decimales perturba los conocimientos asociados a la escritura de los naturales. Quizás porque el significado expresado en tal registro no ha sido bien comprendido. Pero, ¿La fragilidad de un conocimiento esencial en el aprendizaje de estos números socavará la construcción del resto del edificio conceptual? En los siguientes incisos se ofrecen elementos de respuesta a esta pregunta.

3.4. Orden y equivalencia entre decimales

3.4.1. El orden y el tratamiento que lo sustenta

Comparar decimales ha sido una tarea recurrente en las indagaciones sobre el aprendizaje de estos números (cf. por ejemplo Brown; 1981; Resnick et.al, 1989; Alatorre y cols, 2002; Roditi; 2007). También ha sido indicador del grado de comprensión que los estudiantes tienen sobre ellos. Así, en México, los exámenes nacionales incluyen comparación de decimales, tema en el que se reporta un bajísimo desempeño ya señalado al inicio del artículo (entre 25 y 30% en el año 2006 y 34% en 2009).

Pregunta 7.- De los dos números siguientes, subraya el que es mayor: 25.08 o 25.6 (20 respuestas correctas)

Pregunta 6.- Anota sobre la línea **mayor que**, **igual** *o* **menor que**, *para que la expresión sea correcta: 19.60 _____ 19.6000 (21 respuestas correctas)*

Si ordenar decimales implica comprender el valor de décimos, centésimos y milésimos…, parecía válido suponer un igual o más bajo desempeño en las tareas de comparación que el mostrado en aquellas cuestiones. Empero, la mayoría de los niños del grupo ordena correctamente dos decimales y da argumentaciones que reflejan un tratamiento semántico de la comparación, por ejemplo al comparar 25.6 y 25.08:

> *"Los décimos son más grandes que los centésimos, este ocho representa centésimos [por lo tanto], aunque el 6 es menor, el 25.6 es mayor porque son décimos".*
>
> *"Porque el cero convierte los décimos en centésimos y eso hace más chico el número, porque los décimos son más grandes que los centésimos".*

La gran mayoría de los argumentos colectados se sustenta en la idea de que "los décimos valen más que los centésimos", aunque sin especificar cuánto más. Es decir, como base de las respuestas se expresa una comparación cualitativa - y no una relación de equivalencia - de los décimos, centésimos y milésimos. Sin duda es la facilidad la que está detrás de este argumento pero, para complementar la información al respecto, solicité a nueve de los 28 niños participantes representar un décimo, un centésimo y un milésimo en un *cuadrado-unidad* fraccionado en 100 partes iguales. Hubo dos representaciones correctas pero la mayoría como las que se muestran en la figura 2.

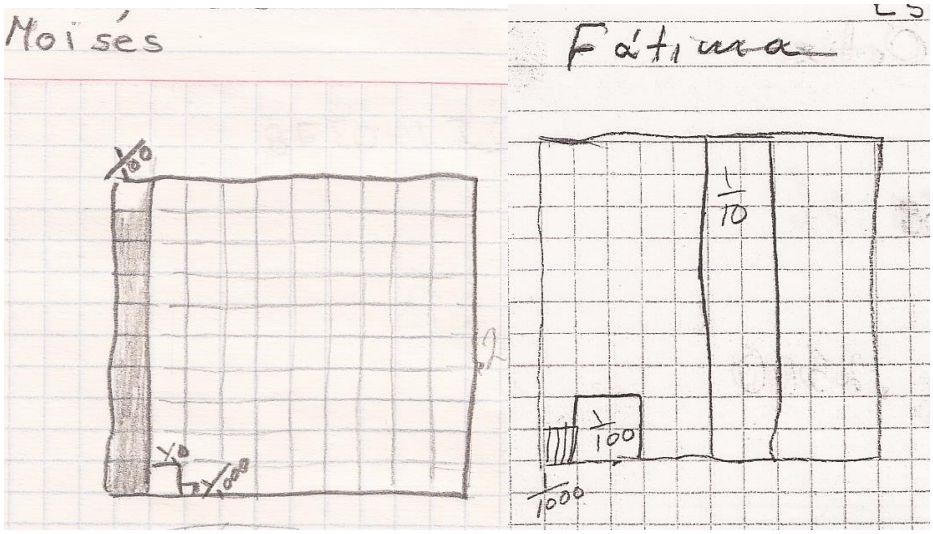


Figura 3. Respuestas de Moisés (11 años, desempeño bajo) y Fátima (11 años, desempeño alto) a la tarea de representar un décimo, un centésimo y un milésimo en una unidad cuadrada."

Estos dibujos fueron producidos por niños con distinto grado de desempeño en el cuestionario y reflejan, o bien el poco manejo de este registro de representación, o un desconocimiento real del valor del décimo, el centésimo y el milésimo y de las relaciones de equivalencia entre ellos. Es posible considerar esto último con base en la baja tasa de éxito en las preguntas 12 y 17 (14 y 35% de aciertos, respectivamente).

Igual que Fátima, muchos niños muestran, a través de la representación gráfica, conocimiento de la relación de orden, pero no de equivalencia entre unidad, décimos, centésimos y milésimos. Esto es, algunos – entre los que no se encuentra Moisés - muestran conocer la relación siguiente:

unidad > décimo > centésimo > milésimo,

Pero no necesariamente la relación:

1 = 10 décimos = 100 centésimos = 1000 milésimos.

¿Cómo es que la mayoría es competente al comparar decimales y no lo es al reconocer los nombres de las posiciones o al establecer equivalencias entre los valores en ellas representados? Se ve aquí que no es indispensable manejar los nombres de las posiciones para determinar el orden entre los decimales, aun utilizando un tratamiento semántico; tampoco parece necesaria la equivalencia, un ordenamiento cualitativo (basado en la relación mayor que, menor que) es suficiente. Y considero que es un ordenamiento cualitativo, porque los argumentos

expresados por la mayoría de los niños refieren a que "los décimos son más grandes que los centésimos", cuestión muy diferente que argumentar "primero te fijas en el número que está junto al punto decimal…", procedimiento sintáctico aprendido mediante un enfoque que no profundiza en los significados.

Cabe comentar que Fátima respondió correctamente todas las preguntas referentes a identificación de posiciones y equivalencia entre ellas, pero respondió que en 6 décimos hay cero milésimos, lo cual puede ser muestra de una menor comprensión de los milésimos. Moisés, por su parte, respondió que en 6 décimos hay 6000 milésimos).

3.4.2. Los ceros como recurso para comparar

Resulta llamativo que los niños se valen recurrentemente de los ceros para tener éxito en algunas tareas de comparación y equivalencia. Lo hacen produciendo *escrituras ostensiblemente comparables*, como se explica a continuación.

Cuando los números tienen cifras iguales antes del punto y distinto número de ellas después de éste – se producen escrituras con igual número de cifras para hacer las comparaciones. Estas escrituras - *ostensiblemente comparables* - se elaboran (por escrito o mentalmente) agregando o quitando ceros a la derecha de las cantidades originales hasta igualar el número de cifras después del punto. Tal transformación en la representación facilita la comparación y el análisis:

> *19.60 = 19.600, porque es como si le pones 2 ceros al 19.60, sería 19.600… son iguales.*
>
> *Los* emparejas *a milésimos [agregando ceros] y ya los puedes comparar*

En la producción de *escrituras ostensiblemente comparables* se utiliza el conocimiento siguiente: tratándose de números con punto, "los ceros a la extrema derecha, no valen". Este conocimiento permite establecer correctamente el orden y la equivalencia entre dos o más decimales, aun sin saber los nombres de los lugares o la equivalencia entre décimos, centésimos y milésimos.

3.5. El tránsito entre registros

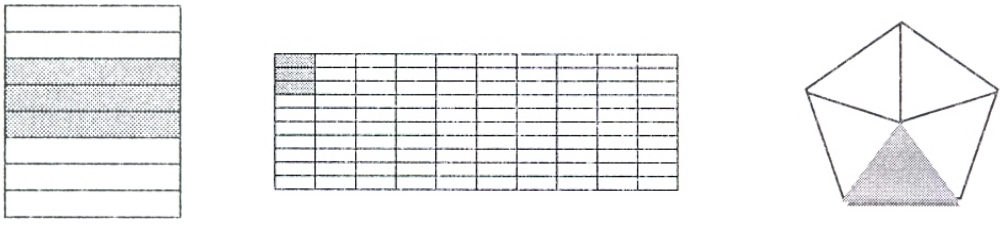
3.5.1. ***Decimales, fracciones y superficies fraccionadas***

Señalé antes que una de las tareas típicas en la cultura escolar mexicana es relacionar expresiones de la forma a/b con fracciones representadas a través de superficies fraccionadas. En cambio, no es frecuente el trabajo que vincula las superficies fraccionadas y los decimales en su representación decimal.

En el grupo se observa una limitada capacidad de convertir a escrituras decimales, fracciones decimales representadas mediante superficies fraccionadas (preguntas 20 a, c y e). Las tareas que vinculan estos dos registros de representación se ubican

entre las de más baja tasa de respuestas correctas (véase viñeta siguiente). Sin duda, está el problema de que la conversión de las representaciones y el cambio de registro – como ha señalado Duval (1995) – no es simple. En el caso de las representaciones gráficas presentadas, resulta difícil percibir que, a partir de 8 rectángulos - 3 de los cuales están sombreados – la representación correspondiente en el registro decimal será **.**375; la conversión no es congruente. Es más congruente la conversión de esta misma representación gráfica a la fracción 3/8 que resultaría en el registro fraccionario. Esto ayuda a explicar la tasa más alta de respuestas correctas. Un análisis similar puede hacerse en relación con el pentágono y la quinta parte sombreada. Convertir dicha representación a **.**2 implica pasar por la fracción 1/5 y tratarla en su significado de cociente, la conversión tampoco es congruente. Por otra parte, los alumnos no contaban con calculadora para realizar los cálculos.

Pregunta 20.- Escribe el número decimal y la fracción que indica la parte sombreada de cada figura[8]:



a) ____ ____ b) ____ ____ c) ____ ____ d) ____ ____ e) ____ ____ f)

Pregunta	a)	b)	c)	d)	e)	f)
Respuestas correctas	1	17	6	16	4	17
Porcentajes globales según tipo de tarea	Representación mediante forma a/b: 59%			Representación mediante escritura decimal: 13%		

Además de lo anterior, otros factores vinculados a la enseñanza pudieron haber influido en el bajo índice de respuestas correctas: en la secuencia no se incluyó la

[8] Como mencioné al inicio, en todas las preguntas del cuestionario se usó el vocabulario sobre los números racionales y decimales utilizado en el contexto escolar mexicano, donde decimales refiere a los números expresados con punto y fracciones a los expresados en la forma a/b. En el mismo sentido, respecto de las figuras mostradas, en todos los casos la unidad es "la gran figura": los rectángulos y el pentágono. Los niños así lo entienden.

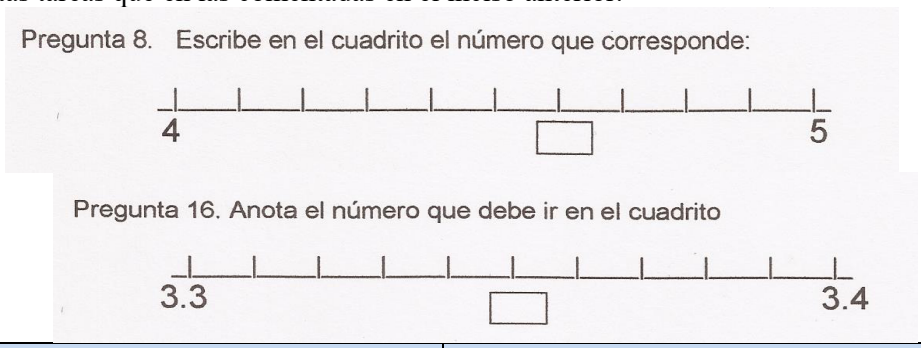
representación de decimales mediante áreas de figuras fraccionadas, sí se vinculó a las fracciones en su forma a/b, tarea que muestra un número mucho más alto de respuestas correctas. En entrevista la profesora comenta:

> Esto prácticamente lo hemos visto más cuando son fracciones, no con decimales, pero ahorita sí ya estoy tratando de englobar todo; cuando es un medio, también es igual a cero-punto-cinco […], no sé qué tan funcional sea, porque hace ratito me di cuenta que me perdí en mi clase, por querer estar metiendo todo.

Se ve en lo anterior una debilidad en la secuencia de enseñanza. En cambio, la profesora ha trabajado otras formas de representar los decimales, como por ejemplo mediante puntos en la recta numérica, lo que se traduce en un mejor desempeño en las tareas vinculadas con este recurso.

3.5.2. Los decimales y su representación en la recta numérica

Representar decimales en la recta hace necesario transitar entre dos registros: el numérico y el geométrico lineal. Presentamos al grupo dos tareas de este tipo. Como puede verse en la viñeta siguiente, los niños tienen más respuestas correctas en estas tareas que en las comentadas en el inciso anterior.



Pregunta 8. Respuestas correctas: (64%)	*Pregunta 16.- Respuestas correctas: (64%)*

En las explicaciones anotadas por los niños en la pregunta 8, identificamos un tratamiento muy frecuente para obtener las respuestas:

Agregar un cero a la derecha del 3.3 (3.30) y del 3.4 (3.40), para luego asociar un decimal - con dos cifras después del punto - con cada uno de los puntos señalados en la recta: 3.31, 3.32, 3.33… hasta 3.35. Los niños explican claramente lo que hacen:

> *Porque después del 3.30 sigue el 3.31, el 3.32… hasta 3.35*, o
> *3.31, 3.32,…3.39 entran en esa recta.*

Se ve otra vez la producción de escrituras ostensiblemente comparables, como herramienta para agregar claridad a la situación y estar así en mejores condiciones de anotar sin error el decimal correspondiente al punto indicado.

Aunque quizás en la escuela mexicana la recta numérica no ha sido suficientemente valorada como recurso para el aprendizaje de los decimales, la profesora la ha incorporado en su secuencia de enseñanza y los niños obtienen un porcentaje de aciertos bastante más alto en las tareas que la implican (64%) que el nacional de primaria (ubicado en 38 y 44% de aciertos, según los datos de ENLACE 2011, y de 53%, según los de EXCALE 2009).

3.6. Intercalar un decimal entre otros dos: una aproximación a la *densidad de los decimales en los decimales*

Las investigaciones realizadas con niños y jóvenes han reportado la propiedad de densidad como uno de los aspectos de los decimales que resultan más difíciles de entender a los estudiantes (cf. por ejemplo Brown; 1981; Perrin-Glorian, s/f; Adgiaje; 1999).

Brousseau señaló hace décadas que las formas en que estos números se enseñan, son en parte responsables de las dificultades para entender sus propiedades, y que las consecuencias a veces se arrastran hasta la universidad:

> "[…] el niño no encontrará decimales entre 3.25 y 3.26 pero, por el contrario encontrará un antecesor en D [los decimales] para 3.15: éste será 3.14, etcétera. Aún si corrige su respuesta sobre tal o tal punto, los razonamientos intuitivos se guiarán por este modelo erróneo" (Brousseau; 1998; 132).

En el grupo se obtuvo un resultado relativamente diferente de los previamente reportados: la tasa de aciertos fue comparativamente alto en la tarea de intercalar un decimal entre otros dos (pregunta 10) ¿Qué tratamientos permitieron esto?

Pregunta 10.- Escribe un número que vaya entre 0.25 y 0.26 (19 respuestas correctas) (67% de aciertos)

Pregunta 19.- Un alumno respondió que entre 1.70 y 1.80 se pueden escribir sólo nueve números ¿crees que tenía razón o que estaba equivocado? (4 aciertos)

Pregunta 15. ¿Cuántos números se pueden ir entre 0.42 y 0.43? (un acierto)

La mayoría de los niños da respuestas sobre la base de una concepción que he llamado "*densidad restringida*", la cual permite intercalar correctamente nueve decimales entre dos "*falsos consecutivos"* - números que me he permitido denominar así porque son consecutivos si se les mira con la lógica de los naturales, obviando los efectos del punto decimal - . El procedimiento utilizado para intercalar consiste en agregar un dígito a la derecha del decimal menor, iniciando

con el 1 y siguiendo el orden de los naturales hasta el 9 (**.**251, **.**252… **.**259 en nuestro ejemplo). La concepción puesta en acto lleva a insertar correctamente nueve decimales entre los dos *falsos consecutivos*, pero no permite insertar ninguno más, de ahí el nombre de "densidad restringida". Dicen varios niños que:

> *"Son sólo nueve los que puedes poner, porque no puedes llegar al 10"*

Hasta niños que tuvieron un bajo desempeño en el cuestionario intercalaron decimales utilizando este procedimiento. Esto es posible gracias a las enseñanzas de la profesora, quien señala:

"Se creó la necesidad de ver que entre dos números decimales podemos encontrar *n* número de decimales más, porque vienen en el libro de quinto, entonces, de acuerdo a las situaciones que vienen, empezamos, por ejemplo, ¿qué números están entre 1.5 y 1.6?, entonces empiezan a dividir los décimos en centésimos, en milésimos, para ver que sí cabe otro número entre 1.5 y 1.6".

Por este acercamiento basado en subdivisiones decimales considero que la que se trabaja es la *densidad de los decimales en los decimales*. Su enseñanza, tal como fue instrumentada, no ha redituado en una comprensión amplia de la propiedad que permite la intercalación. Unos pocos niños muestran dudas sobre el límite de los nueve números. Sin embargo, sólo uno rompe francamente el límite y agrega muchos números más. Su respuesta - para mí sorpresiva - es la siguiente:

> *Podría ser 0.251080043100 […] Porque mientras el cinco no se pase a [.]26, será un número* en-medio [de los otros dos] (Daniel; 11 años).

Las restricciones que Daniel pondría a un número – para estar seguro de que va entre 0**.**25 y 0**.**26 – son: que las dos primeras cifras después del punto sean 2 y 5, en ese orden, y que a partir de la tercera cifra, al menos una sea diferente de cero. En términos más generales, para asegurarse de que un decimal puede intercalarse, las dos cifras después del punto deberán ser iguales que las del primer falso consecutivo y al menos una cifra después de la segunda no debe ser cero.

Quien dio estas explicaciones obtuvo el mayor puntaje en el cuestionario y en entrevista aporta evidencias de una cierta comprensión de la *densidad* de *los decimales en los decimales* (o quizás más allá de los decimales). Veamos si no, un fragmento del diálogo sostenido con él:

> *Inv. Puedes decirme cuántos números pueden ir entre **.**42 y **.**43? (los anota)*
>
> *Daniel. Infinitos*
>
> *Inv. ¿Puede ir infinito, qué quiere decir eso?*

Daniel. Porque pueden ir, por ejemplo… no sé… punto-425 *y sería más chica [que* **.***43] la cantidad, porque éste [el número 0***.***425] vale menos que el tres [de 0***.***43], porque este tres está más cerca del cuatro*

Inv. ¿Y otro número que pudiera ir en medio del **.***42 y* **.***43?*

*Daniel. No sé. Le puedo poner muchos dos, y es imposible que llegue a la cantidad [a 0***.***43], pero entre más números le pongas más se aproxima a la cantidad (anota .4222222)*

Inv. A ver si te entendí, si tienes aquí el **.***42 y el* **.***43, ¿puedes poner muchos otros y no llega al* **.***43?*

Daniel. Sí

Inv. ¿Y cómo sabes que no llega al **.***43?*

Daniel. Por eso mismo, porque ésta [señala el 4 y el 2] es 42 y estos [señala los otros 2's] son los números que se aproximan [al **.***43], y acá está el* **.***43.*

Las respuestas de Daniel sorprenden porque reflejan un acercamiento semántico a la propiedad de densidad de los decimales que involucra incluso dos nociones importantes: la de infinito (como proceso) y la de aproximación. Pero no todos los niños están en este caso, la mayoría se atiene a un tratamiento sintáctico asociado a "la densidad restringida".

Por otra parte, resultado de una comprensión incompleta, no siempre el tratamiento utilizado lleva a respuestas correctas, por ejemplo, una niña considera que 1**.**250 se ubica entre 1**.**25 y 1**.**26 porque se obtuvo aplicando el procedimiento "Agregar una dígito a la derecha del decimal menor…" Se ve aquí un tratamiento sintáctico con una base conceptual endeble. Esto, sin embargo, no quita lo llamativo al hecho de que un 67% de los alumnos haya dado una buena respuesta en la tarea de insertar un decimal entre dos falsos consecutivos.

No tengo parámetro de comparación en los exámenes nacionales de primaria, donde no se incluye el tema, pero en los de tercero de secundaria (15 años), el porcentaje de éxito es apenas de 53% según los datos disponibles (cf. Bakhoff; 2006).

Las respuestas a las otras preguntas relacionadas con la propiedad de densidad llaman a limitar el entusiasmo. En efecto, a partir de una comprensión limitada, se acepta que "entre **.***45 y* **.***46* se pueden intercalar sólo nueve números", y se reitera tal afirmación ante la pregunta ¿*Cuántos números pueden ir entre* **.**70 y **.**80?

Se trata, como ya dije, de un tratamiento sintáctico. Y sus límites se ponen de manifiesto cuando en las entrevistas casi todos los niños definen el **.**449 como "el que va antes" de **.**45 y el **.**461 como "el que va después de **.**46".

Unos cuantos comienzan a visualizar realmente la propiedad de densidad de los decimales en los decimales y aceptan, por ejemplo, que podrían ponerse no sólo nueve, sino muchos números de muchas cifras en medio" de dos falsos consecutivos, y eso sería correcto, porque, por ejemplo, al **.**45 y **.**46 "podrían ponerles muchos ceros y así tendrían el mismo número de cifras" que los decimales intercalados.

Ante estas preguntas, nuevamente las ideas de Daniel parecen mucho más avanzadas que las del resto de sus compañeros:

Inv. Y cuando me dijiste que había infinito de números, ¿qué querías decir?

Daniel. Que son muchos, muchos, muchos y nunca se van a acabar

*Inv. Hubo niños que dijeron que entre **.**42 y **.**43, sólo hay nueve números…*

Daniel. Están mal, por eso que dije, que podría haber infinidad de números

*Al. ¿Habrá un número que vaya antes del **.**42, que esté pegadito al **.**42?*

Da. No sé… podría ser que aquí tuviera muchos ceros (anota .420000001)

*Al. Ese va pegadito al **.**42, ¿pero adelante o atrás?*

Da. Un tantitito adelante

Al. ¿Y un número que vaya tantitito atrás?

*Da. (anota **.**41999999999) éste va tantitito atrás*

Daniel refiere al infinito como a un conjunto que no se termina, también incorpora la idea de aproximación en su razonamiento, ambos son elementos importantes en la comprensión de los decimales y de una propiedad que los diferencia de los naturales. Probablemente este conocimiento, - por el momento individual - contribuya a que sus compañeros avancen en su entendimiento de los decimales.

4. Conclusiones

En este artículo analizamos las respuestas a un cuestionario sobre números decimales, aplicado a un grupo de niños de sexto grado con desempeño destacado en matemáticas y cuya maestra, con una formación especial en enseñanza de esta disciplina, instrumentó un acercamiento conceptual al tema.

La profesora se apartó del enfoque nominalista – muy común en las escuelas mexicanas - e introdujo como aspectos a estudiar, no sólo la escritura de decimales, los nombres de las posiciones o el valor posicional. Si bien incorporó estos aspectos, incluyó también en su secuencia de enseñanza: el orden, la equivalencia,

la densidad (de los decimales en los decimales), y la representación en la recta numérica.

Ordenar decimales, intercalar otros entre dos falsos consecutivos, o representar decimales como puntos en la recta, son los aspectos donde parece haber dado mejores frutos el acercamiento instrumentado. En todos estos aspectos, hay avances considerables. La tasa de éxito en el grupo oscila entre el 60 y 70%, mientras que, en general, en los exámenes nacionales las tareas vinculadas a los decimales no alcanzan el 50% de aciertos.

Por otra parte, los tratamientos observados dejan ver que la acción docente se orientó a los significados y no sólo a los procedimientos. Por ejemplo, la mayoría de los niños compara correctamente dos decimales dando un tratamiento semántico a la comparación, esto es, tomando como base una apreciación del valor relativo de las cifras. Tal forma de comparar constituye un rasgo distintivo del grupo pues, en los niños de otras escuelas, identificamos la prevalencia de una ordenación de tipo sintáctico.

Otro rasgo que caracteriza al grupo es lo que parece un conocimiento incipiente de la propiedad de densidad (de los decimales en los decimales), prevaleciendo en el grupo la noción de *densidad restringida*, asociada a los procedimientos enseñados por la profesora.

Llama también la atención una herramienta de probada utilidad en el grupo: el uso de ceros para producir escrituras ostensiblemente comparables y facilitar con ello las tareas de comparación.

Se ve en todo lo anterior la impronta de la enseñanza y cómo ésta puede moldear los trayectos hacia la comprensión de los decimales. La aproximación *conceptual*– posible por la preparación de la docente del grupo - favoreció el acercamiento a la estructura de estos números, así sea de manera incipiente o procedimental. También dejó puntos débiles, por ejemplo: a) en la conversión de figuras bidimensionales a escrituras decimales; b) en la denominación de las posiciones o lugares; c) en el valor de las cifras que ahí se representan, y d) en la equivalencia entre décimos, centésimos y milésimos.

Hay en el conjunto de los resultados una cuestión llamativa: algunas propiedades, como el orden y la densidad, o el tratamiento de los decimales en ciertos registros, presentan aprendizajes más importantes que los alcanzados respecto de los nombres de las posiciones, los valores ahí representados y las relaciones de equivalencia entre ellos. La diferencia en los puntajes obtenidos en esos aspectos es tal que unos aprendizajes parecen independientes de los otros. De ahí que sea válido afirmar: es posible comprender el orden y la densidad sin haber establecido el valor preciso de los décimos, centésimos y milésimos y sus relaciones de

equivalencia, incluso sin saber los nombres de todas las posiciones o lugares antes y después del punto.

En pocas palabras, la secuencia de enseñanza planeada e instrumentada por la profesora del grupo, produjo mejores aprendizajes sobre los decimales que los identificados mediante las pruebas nacionales. No obstante esta afirmación, hay dificultades que se deben considerar: los alumnos no transitan con facilidad entre distintos registros de representación, y organizar una enseñanza que favorezca este tránsito, no resulta simple. Así mismo, las dificultades para establecer el valor de décimos, centésimos, milésimos… y su relación con la unidad, llama a revisar la forma en que este tema se aborda en el currículum y la utilidad que proporciona el cuadrado-unidad, recurso que parece bien valorado - tanto por la profesora del grupo, como por otros profesores.

Una reflexión final:

La profesora ha trabajado con la recta numérica más que con superficies fraccionadas, pero ha enfrentado las limitaciones inherentes al trabajo con lápiz y papel, como lo constatamos al solicitar en las entrevistas explicaciones sobre la densidad de los decimales en los decimales a sus alumnos. Adjiage ha experimentado con éxito un acercamiento informático a los racionales, teniendo como registro básico la recta graduada. A partir de los datos recogidos en este trabajo, nos parece que será productivo experimentar en tal sentido para facilitar y potenciar las comprensiones que sobre los decimales deben alcanzar los niños.

REFERENCIAS

ADJIAGE, R. (1999). *L'expression des nombres rationnels et leur enseignement initial***.** Thèse de doctorat en didactique des mathématiques. Université Louis Pasteur de Strasbourg.

ADJIAGE, R. (2003). Registres, grandeurs, proportions et fractions. *Annales de didactique et de sciences cognitives* **8**, 127-150

ADJIAGE, R. (2005). Diversité et invariants des problèmes mettant en jeu des rapports. *Annales de didactique et de sciences cognitives* **10,** 95 – 129.

ALATORRE, S., DE BENGOECHEA, N. & MENDIOLA, E. (2002). Aspectos matemáticos del efecto remanente de las matemáticas escolares, en *Algunos problemas de la educación en matemáticas en México*. (Compilador José Antonio de la Peña), Siglo XXI-UNAM, 51-112. México.

AVILA, A.(2008). Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber cuasi invisible. *Educación Matemática.* **20.2,** 5 – 34.

AVILA, A. & GARCÍA, S. (2008). *Los decimales: más que una escritura*. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación, México.

BACKHOFF, E. (2006). *El aprendizaje del español y las matemáticas en la Educación Básica en México: sexto de primaria y tercero de secundaria.* INEE, México.

BROUSSEAU, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des mathématiques*, **2.3,** 37-127.

BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématique*s, **4.2,** 164 – 197.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La pensée Sauvage, Grenoble.

BROWN, M. (1981). Place value and decimals, en K. M. Hart (Ed.) *Children's understanding of mathematics* (p. 11 – 16). John Murray Eds, Londres.

CENTENO, J. (1997). *Números decimales ¿Por qué?, ¿Para qué?* Ed. Síntesis, España.

DUVAL, R. (1993). Semiosis y noesis. Conférence A.P.M.E.P, I.R.E.M. Francia. En E. Sánchez y G. Zubieta (Eds.). *Lecturas en didáctica de las matemáticas. Escuela Francesa.* México. DME-CINVESTAV, 118 – 144.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berna.

GONZÁLEZ-MOLINA I. *Significados y usos de las fracciones y los decimales en aulas de 6° grado de educación primaria y 1° de secundaria.* Tesis de doctorado en Educación. Universidad pedagógica Nacional, México (en preparación)

IZQUIERDO, G. (2006). Representaciones de los profesores en torno a las fracciones y su enseñanza. Tesis de Maestría en Desarrollo Educativo. Universidad Pedagógica Nacional, México.

PERRIN-GLORIAN, M-J. (s/f). *Représentation des fractions et des nombres décimaux chez des élèves de CM2 et du College*. Cahier de didactique des mathématiques, Núm. 24, IREM-Universidad de Paris VII , París.

RESNICK, L., NESHER, P., LEONARD, F., MAGONA, M., OMANSON, S. & PELED, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: the case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, **20.1,** 8 – 27

RODITI, É. (2007). La comparaison des nombres décimaux, conception et expérimentation d'une aide aux élèves en difficulté. *Annales de didactique et de sciences cognitives, Vol. 12*, 55 – 81.

SAIZ, I., GOROSTEGUI, E. & VILOTTA, D., (2011). Problematizar los conjuntos numéricos para repensar su enseñanza: entre las expresiones decimales y los números decimales. *Educación Matemátic,.* **23.1**, 123 – 152.

SEP (1993). *Plan y programas de estudio para la educación básica primaria*. México, Secretaría de Educación Pública.

SEP (2006). *Plan y programas de estudio para la educación básica. Primaria.* Secretaría de Educación Pública, México.

SEP (2006). ENLACE. *Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros escolares. Características generales e información de los reactivos aplicados para su uso pedagógico*. Secretaría de Educación Pública, México.

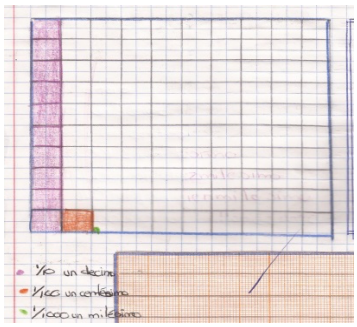
SEP (2011a). ENLACE. *Evaluación Nacional del Logro Académico en Centros escolares. Características generales e información de los reactivos aplicados para su uso pedagógico. Sexto grado de primaria*. Secretaría de Educación Pública, México

SEP (2011b). *Plan y programas de estudio para la educación básica. Primaria*. Secretaría de Educación Pública, México.

TEMPIER, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N*, ***86*,** 59 – 90.

ALICIA AVILA
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
ÁREA ACADEMICA DIVERSIDAD E INTERCULTURALIDAD
CARRETERA AL AJUSCO NUM. 24
COL. HEROES DE PADIERNA
C.P. 14000
MÉXICO D.F.

Anexo 1. Cuadrado-unidad (tomado de la libreta de Daniel)



Anexo 2. Cuestionario aplicado durante la investigación (versión *a*).

Te pedimos que respondas lo mejor posible, y de manera individual, las siguientes preguntas. El objetivo del cuestionario es saber cuáles son los temas de matemáticas que causan más dificultad a los alumnos y poder ayudar a los maestros a enseñarlos mejor. De antemano, gracias por tu cooperación

Fecha: _____ Escuela:_____ Grado: _____Edad : _____

Nombre (si no quieres no pongas tus apellidos): _____

Calificación que sacas con más frecuencia en matemáticas _____

En el grado que cursas, ¿Cuáles temas de matemáticas se te han hecho más difíciles? _____

¿Cuáles se te han hecho más fáciles? _____

En tu opinión, ¿los números decimales son un tema fácil, un tema difícil o un tema regular? _____ ¿Por qué? _____

Responde las preguntas siguientes, explica tu respuesta cuando se te pida.

1. Anota falso o verdadero sobre la línea:

Si no tiene punto no es decimal _____

¿Por qué? _____

2. Además de en la escuela, ¿en qué se utilizan los números decimales? Pon al menos dos ejemplos:

_____

3. De la lista siguiente, subraya los que son números decimales

2 0.7 ½ 4/10 1/1000 4.3333 3.0

Explica tu respuesta: _____

4. ¿Para qué crees que sirven los números decimales? _____

_____

5. ¿Qué crees que pasaría si no hubiera números decimales? _____

_____

6. Anota sobre la línea ***mayor que***, ***igual*** o ***menor que***, para que la expresión sea correcta:

19.60 es _____ que 19.6000

Explica tu respuesta: _____

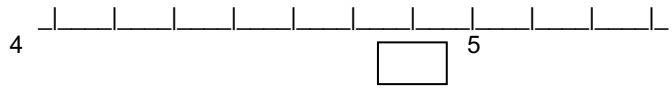
7. Subraya el número que es mayor:

25.08 25.6

Explica tu respuesta: _____

_____

8. Escribe en el cuadrito el número que corresponde:



9. Haz lo que se te indica:

a) encierra en un círculo la cifra que representa 4 centésimos

4 4 4 . 4 4 4

b) subraya la cifra que representa 4 centenas:

4 4 4 . 4 4 4

10. Escribe un número que vaya entre 0.25 y 0.26 _____

Explica tu respuesta: _____

11. Encierra el número más cercano a 0.18

a) 0.1 b) 20 c) 0.01 d) 0.2

Explica tu respuesta: _____

12. ¿En 6 décimos cuántos milésimos hay? _____

13. En el número 0.32 el tres representa 3 décimos, ¿en el número 0.023 cuánto representa el 3? _____

14. Tengo un listón de 0.600 metros de largo. Deseo hacer moños de 0.6 metros de largo, ¿cuántos moños puedo hacer con el listón? _____

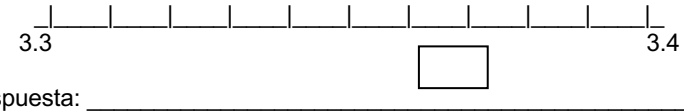
Explica tu respuesta _____

15. ¿Cuántos números pueden ir entre 0.42 y 0.43? _____

Explica tu respuesta _____

_____

16.- Anota el número que debe ir en el cuadrito



Explica tu respuesta: _____

17. Si al número 8 449 le agregas 14 centenas, ¿qué número obtienes? _____

18. Si al número 75. 67 le agregas 15 centésimos, ¿qué número obtienes?

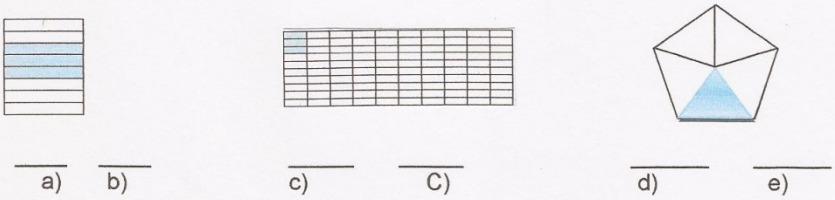
_____

19. Un alumno respondió que entre 1.70 y 1.80 se podían escribir únicamente nueve números, ¿crees que tenía razón o que estaba equivocado? _____

¿Por qué? _____

_____

Pregunta 20. Escribe el número decimal y la fracción que indica la parte sombreada de cada figura:



a) b) c) C) d) e)

21. Anota, con tus propias palabras qué es una fracción _____

_____

22. Anota, con tus propias palabras lo que es un número decimal

_____

_____

MUCHAS GRACIAS

JÉRÔME PROULX

LE CALCUL MENTAL AU-DELÀ DES NOMBRES : CONCEPTUALISATIONS ET ILLUSTRATIONS AVEC LA RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

Abstract. Mental calculations beyond numbers: conceptualization and illustrations about algebraic equations solving. In this paper, I offer an illustration of what doing mental calculations (or mental mathematics) with objects other than numbers can look like. Through examples about algebraic equation solving, I illustrate how this activity made emerge numerous strategies, which can differ from paper-and-pencil work and open up a variety of understandings about what solving an algebraic equation means. The data analyses also offer ways to a better understanding of the nature of the mathematical activity in which solvers engage in this mental mathematics environment, by pointing out the importance of the "entry" into the problem and less on the search for an answer. These considerations put forth the significance of continuing to investigate mental mathematics activities with objects other than numbers for its potential for developing mathematical understandings and strategies, as well as a better understanding of the nature of the mathematical activity that the mental mathematics environment can make emerge.

Résumé. Je présente dans cet article des illustrations de ce que peut signifier faire du calcul mental sur autre chose que des nombres, dans ce cas-ci en algèbre. Par le thème choisi – la résolution d'équations algébriques – je montre la richesse qu'une entrée par le calcul mental peut provoquer au niveau de l'émergence d'une variété de stratégies, qui peuvent différer des stratégies en contexte papier-crayon et ouvrir sur une diversité de compréhensions de ce que peut signifier résoudre une équation algébrique. Les analyses conduites offrent de plus des pistes de compréhensions du phénomène de résolution en calcul mental, pointant sur l'importance de l'entrée dans le problème et moins sur la recherche d'une réponse à proprement parler. Ces considérations font ressortir l'intérêt de continuer à étudier le calcul mental sur d'autres objets mathématiques que les nombres, pour son potentiel pour développer des compréhensions et stratégies mathématiques et mieux comprendre la nature de l'activité mathématique que ces activités permettent de faire émerger.

Mots-clés. Calcul mental, résolution d'équations algébriques, stratégies mathématiques, processus de résolution

---

Introduction

Pour souligner la pertinence et l'importance du calcul mental dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, Thompson (1999, dans Threlfall, 2002), à travers une revue de la littérature, souligne quatre raisons spécifiques :

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 18, p. 61 - 90.
© 2013, IREM de STRASBOURG.

- La plupart des calculs faits dans la vie de tous les jours sont faits mentalement.
- Le travail du calcul mental fait développer le sens du nombre chez les apprenants.
- Le travail du calcul mental fait développer l'habileté à résoudre des problèmes.
- Le travail du calcul mental accroit le succès dans les calculs écrits.

Ces raisons soulignent les retombées élargies du travail du calcul mental, alors que les habiletés qui y sont développées touchent plus que la seule activité du calcul mental et développent des habiletés et compréhensions mathématiques beaucoup plus larges ; on peut parler alors d'habiletés de résolution de problèmes, de sens du nombre, du réinvestissement dans les calculs écrits et même dans la vie de tous les jours. Pour Butlen et Pézard (1992), le travail du calcul mental permet même de faire avancer des compréhensions mathématiques que le calcul écrit traditionnel n'arrive que peu à faire car souvent trop cadré, avec l'apprentissage de techniques et d'algorithmes qui sont suffisamment performants et qui ne font pas ressortir le besoin de penser plus loin qu'eux. Ces constats se retrouvent de plus chez les élèves eux-mêmes, qui affirment que la pratique du calcul mental les aide dans leurs résolutions subséquentes de problèmes (Butlen et Pézard, 2000).

On retrouve donc dans différentes études des retombées importantes de la pratique du calcul mental en classe : sur les habiletés de résolution de problèmes (Trafton, 1986 ; Leutzinger et al., 1986 ; Butlen et Pézard, 1992, 2000), sur le développement du sens du nombre (Boule, 2008 ; Butlen et Pézard, 1992, 2000 ; Leutzinger et al., 1986 ; Murphy, 2004 ; Heirdsfield et Cooper, 2004), sur les habiletés papier-crayon et les algorithmes standard (Butlen et Pézard, 1992, 2000) et même sur les habiletés en estimation (Heirdsfield et Cooper, 2004 ; Schoen et Zweng, 1986). Ainsi, en plus du caractère stimulant souvent documenté chez les élèves concernant leur investissement dans ce type d'activités (voir Butlen et Pézard, 1992 ; Carlow, 1986), ce qui apparaît le plus convaincant est la presque unanimité des résultats obtenus dans les travaux faisant intervenir le calcul mental. Ainsi, qu'on soit aux États-Unis (e.g., Schoen et Zweng, 1986; Reys et Nohda, 1994), en France (Butlen et Pézard, 1992, 2000 ; Douady, 1994), au Japon (Reys et Nohda, 1994), ou en Angleterre (Murphy, 2004 ; Thompson, 2000, 2009; Threlfall, 2002, 2009), et souvent suite à des approches qui diffèrent les unes des autres, on note que ce type de travail mathématique bonifie le sens du nombre chez les apprenants, fait développer des stratégies diverses et adaptables de calcul et enrichit les habiletés de résolution de problèmes.

Ce convaincant corpus de recherches sur les bénéfices du calcul mental au niveau de l'apprentissage mathématique des élèves amène à se demander si le travail du calcul mental ne peut pas être pensé de façon plus large ou simplement étendu vers

d'autres objets de l'enseignement des mathématiques. Dans cette lignée, Rezat (2011) souligne que le travail du calcul mental a presque toujours été centré sur les nombres naturels et l'apprentissage des mathématiques au niveau élémentaire. Ce chercheur suggère alors de regarder le calcul mental sur les décimaux, travaillés dans les premières années du secondaire. Malgré sa critique, Rezat continue toutefois à travailler sur les « nombres ». Mes travaux de recherche m'amènent à vouloir mieux comprendre ce que peut signifier le travail du calcul mental sur d'autres objets mathématiques, par exemple le volume des solides, l'aire des figures, l'algèbre, les fonctions, la trigonométrie, ainsi qu'à analyser le potentiel de ce type de travail pour la compréhension et l'activité mathématiques. Dans cette optique, une étude exploratoire autour de la résolution d'équations algébriques en contexte de calcul mental a été réalisée, avec un groupe de 12 étudiants universitaires. Cet article fait état des résultats de cette étude.

1. Objectifs et apports de cette recherche

Un premier objectif de recherche, pour cette étude exploratoire, est d'investiguer un contexte de calcul mental pour la résolution d'équations algébriques et d'y étudier son potentiel et son intérêt pour faire émerger des façons de faire, de comprendre et de résoudre. L'analyse conduite dans cette étude, discutée et détaillée à la section 5, illustre le potentiel du calcul mental pour la résolution d'équations algébriques, à travers l'émergence d'une variété de façons de résoudre, façons qui se distinguent des approches usuelles de résolution en contexte papier-crayon. Ces façons de résoudre font aussi ressortir une diversité de compréhension sur ce que signifie « résoudre une équation algébrique », ouvrant sur un éventail de significations riches pour le travail algébrique.

De plus, à travers cette richesse sur les façons de faire, de comprendre et de résoudre en contexte de résolution d'équations algébriques, l'analyse offre des pistes de compréhensions sur le phénomène de résolution en contexte de calcul mental. Ceci touche à un deuxième objectif de recherche, soit de mieux comprendre le processus de résolution en calcul mental et son fonctionnement. Au cœur de ces pistes de compréhensions se situe le fait que les solveurs, en contexte de calcul mental, sont davantage axés sur la recherche d'une façon d'entrer dans le problème que de trouver la réponse ; une situation qui rend le contexte de calcul mental très différent du contexte papier-crayon.

Ces résultats sont présentés dans cet article à travers diverses sections. Dans un premier temps, je clarifie ce que j'entends par le calcul mental sur d'autres objets mathématiques que les nombres, pour ensuite développer sur la perspective théorique enracinant cette étude. Après avoir cadré théoriquement le travail, et discuté des enjeux méthodologiques, j'analyse des stratégies produites en contexte de calcul mental sur la résolution d'équations algébriques pour (1) montrer la richesse des compréhensions déployées dans ce contexte et (2) caractériser la

nature de l'activité mathématique mobilisée. Cette analyse permet de mieux comprendre le potentiel de ce type de travail et l'activité mathématique qu'il permet de mobiliser, mais surtout ouvre sur le développement d'une conceptualisation du processus de résolution en contexte de calcul mental. La conclusion offre différentes pistes et questions sur le calcul mental avec d'autres objets que les nombres et le besoin de (continuer à) les explorer par la recherche.

2. Clarifications conceptuelles : que signifie faire du calcul mental au-delà des nombres ?

Les travaux sur le calcul mental sont majoritairement sur les nombres. Ceci peut paraître sans grande surprise, puisque l'expression utilisée est « calcul mental » (ou en anglais *mental arithmetic*, *mental calculations*, etc.). Toutefois, l'expression anglophone *mental mathematics* semble avoir un certain potentiel pour ouvrir plus large la visée de ce type de travaux vers d'autres objets mathématiques, ce qui est au cœur de l'étude présentée ici. Bien qu'il n'existe pas de définition formelle de l'expression « mathématiques mentales » dans la littérature de recherche, les travaux de recherche antérieurs sur le calcul mental offrent des conceptualisations fort utiles pour s'intéresser aux « mathématiques mentales », qui englobent, selon Thompson (2009), plus que le calcul mental[1]. En effet, à travers la diversité de définitions existant dans la littérature, Hazelkemp (1986, p. 116) en offre une qui résume ce qui est généralement entendu par calcul mental : « the computing of exact answers without paper and pencil or other computational (material) aids, usually with non-traditional mental processes (strategies) ». Cette définition, quoique pensée en termes de nombres et de *mental arithmetic*, s'adapte à un travail sur d'autres objets mathématiques (tels algèbre, géométrie, fonctions, etc.) et cadre bien avec le thème de cet article, soit la résolution mentale d'équations algébriques. On peut donc définir les mathématiques mentales comme étant la détermination de réponses à une question mathématique à l'aide d'une résolution mentale, sans papier-crayon ou toute autre aide matérielle.

Pour aider à développer une compréhension plus fine de ce que signifie faire du calcul mental au-delà des nombres, on retrouve dans la littérature diverses déclinaisons sur la nature des stratégies utilisées par les apprenants pour résoudre des problèmes de calcul mental, et qui ont un potentiel d'adaptation pour d'autres objets mathématiques[2]. Une première déclinaison concerne le « calcul réfléchi/raisonné », qui implique chez l'apprenant l'élaboration de ses propres

[1] Thompson (2009) ne définit toutefois pas ce qu'il entend par *mental mathematics*, et affirme uniquement que les *mental calculations* sont un « subset of mental mathematics ».

[2] Ces déclinaisons proviennent, entre autres, de la synthèse des travaux de Boule (2008), Butlen et Pézard (1990, 1992, 2000), Kahane (2003) et MJER (2008). Quoique proposés ici en termes de « *versus* », les types de stratégies présentées ne se veulent pas en opposition, mais sont plutôt contrastés pour mieux les comprendre et les comparer.

stratégies de résolution, souvent non-standard et contingentes/adaptées au type de problème, *versus* le « calcul automatisé » qui implique l'accès immédiat à un résultat, soit par l'utilisation de faits/résultats mathématiques connus ou de procédures (standard) mémorisées. Une deuxième déclinaison concerne le calcul approché, basé sur l'estimation et les approximations pour démarrer un raisonnement d'ordre de grandeur, *versus* l'application d'un algorithme ou un fait pour obtenir une réponse exacte. Finalement, une troisième déclinaison concerne le calcul rapide, qui exige une rapidité d'exécution pour trouver la réponse. Type de stratégie souvent critiquée, car pouvant être perçue uniquement comme un travail de vitesse au détriment du développement du sens (MJER, 2008), elle peut aussi être vue comme aidant au développement de nouvelles méthodes de résolution puisqu'elle force, dans un souci d'économie, l'abandon de méthodes plus lentes (les procédures standard, par exemple) et donc moins efficaces pour la tâche (Butlen et Pézard, 1990) ; on pense par exemple à une lecture globale du nombre, obligeant à quitter le dénombrement un à un ou forçant des regroupements plus intéressants pour aller plus vite, voire le recours à diverses propriétés. Ces déclinaisons de stratégies montrent une diversité d'entrées possibles pour résoudre en contexte de calcul mental et peuvent aider à la compréhension de ce que peut signifier ce travail au-delà des nombres. Ces dimensions sont réinvesties plus bas dans l'analyse des données, montrant par le fait même leur portée sur d'autres objets que les nombres.

3. Ancrage théorique pour conceptualiser l'activité mathématique en calcul mental

Les travaux récents sur le calcul mental soulignent le besoin de mieux comprendre et mieux conceptualiser le processus de développement de stratégies en calcul mental. Confronté à une variété importante de stratégies créatives et une insatisfaction au niveau de leur « classification » dans des catégories précises, certains chercheurs ont critiqué l'idée que les solveurs font un « choix » de stratégie à partir d'un coffre à outils rempli de stratégies déjà élaborées pour résoudre un problème de calcul mental. En particulier, Threlfall (2002, 2009) insiste plutôt sur l'émergence organique et le caractère contingent des stratégies en fonction des tâches *et* du solveur (ce qu'il comprend, préfère, connait, a comme expérience, est confiant de, etc., voir aussi Butlen & Pézard, 2000; Rezat, 2011). Cette idée d'émergence est aussi présente chez Murphy (2004), qui discute les travaux de Lave (1988) en cognition située où les stratégies mentales sont conceptualisées comme étant des réponses flexibles, émergentes et adaptées, liées à un certain contexte.

Parce qu'elle s'intéresse aux notions d'émergence, d'adaptation et de contingence, des aspects de la théorie de l'enaction (des travaux de Maturana, 1987, 1988 ; Maturana & Varela, 1992 ; Varela, 1999 ; Varela, Thompson & Rosch, 1991) sont

utilisés pour enraciner cette étude au niveau de la caractérisation du processus de développement de stratégies en contexte de calcul mental. En particulier, la distinction proposée par Varela (1996) entre la « résolution de problèmes » et la « pose de problèmes » offre une entrée préliminaire pour mieux comprendre l'émergence et la génération de stratégies et du processus de résolution.

Pour Varela, la notion de « résolution de problèmes » implique que des problèmes sont déjà présents, en attente d'être résolus, indépendamment de nous. Varela explique que, plutôt, nous spécifions les problèmes que nous rencontrons, à travers le sens que nous donnons au monde qui nous entoure et notre compréhension des choses, ce qui nous amène à reconnaitre les choses d'une façon spécifique. En un mot, *nous* posons les problèmes. Nous ne « choisissons » pas ou ne « prenons » pas les problèmes comme s'ils existaient « à l'extérieur » de nous, de façon objective et indépendante de nos actions : plutôt, nous les faisons émerger.

> La plus importante faculté de toute cognition vivante est précisément, dans une large mesure, de *poser* les questions pertinentes qui surgissent à chaque moment de notre vie. Elles ne sont pas prédéfinies mais *enactées*, on les *fait-émerger* sur un arrière-plan, et les critères de pertinence sont dictés par notre sens commun, d'une manière toujours contextuelle. (Varela, 1996, p. 91)

Les problèmes que nous rencontrons et les questions que nous posons font autant partie de nous que de notre environnement : ils émergent de notre interaction avec lui. Nous interprétons les évènements qui nous entourent comme des éléments à aborder, nous les voyons comme des problèmes à résoudre. Nous n'agissons pas sur des situations préexistantes, notre interaction avec notre environnement crée les situations possibles sur lesquelles agir. Les problèmes que nous résolvons, alors, sont implicitement pertinents pour nous, car nous permettons à ceux-ci d'être des problèmes pour nous. Évidemment, certains éléments de l'environnement qui déclenchent des réactions chez certaines personnes ne déclenchent pas les mêmes réactions chez d'autres.

Si cette perspective est acceptée pour le calcul mental, on ne peut pas tenir pour acquis, tel que René de Cotret (1999) l'explique, que des propriétés instructionnelles sont présentes dans les tâches offertes et que celles-ci vont déterminer les réactions des solveurs. Heirdsfield et Cooper (2004) et Rezat (2011) ont en effet montré l'occasionnelle futilité en calcul mental de varier le type de problèmes ou les variables didactiques pour encourager l'utilisation de stratégies spécifiques. Ces stratégies émergent de l'interaction du solveur et de la tâche, influencées par les deux comme le dit Davis (1995) : pas uniquement reliées à la tâche (sa nature), ni uniquement reliées au solveur (ses expériences, ses habitudes, ses succès, sa confiance, sa compréhension de la tâche, etc.), mais aux deux. Ces stratégies sont donc « nouvelles », d'une certaine façon. Non pas que rien auparavant n'ait été fait de la sorte, mais plutôt qu'elles sont générées *pour* cette

tâche, taillées sur mesure pour elle, reflétant ainsi autant le solveur que la tâche. Tel que l'explique Threlfall (2002) :

> As a result of this interaction between noticing and knowledge each solution 'method' is in a sense unique to that case, and is invented in the context of the particular calculation – although clearly influenced by experience. It is not learned as a general approach and then applied to particular cases. […] The 'strategy' (in the holistic sense of the entire solution path) is not decided, it emerges. (p. 42)

Dans cette perspective, le solveur ne « choisit » pas une stratégie sur la base d'un groupe prédéterminé de stratégies, mais plutôt s'engage dans la tâche d'une façon spécifique et développe une stratégie taillée pour la tâche. Les stratégies ne sont pas prédéterminées, mais générées pour les tâches rencontrées, émergeant de l'interaction d'avec la tâche lorsque le solveur s'y engage. Ainsi, le solveur *transforme* la tâche mathématique, la fait sienne; ce qui est souvent différent des intentions du concepteur de la tâche, comme l'explique René de Cotret (1999). Ce faisant, le solveur génère une stratégie développée pour la tâche « posée », pour résoudre « sa » tâche. C'est cette entrée dynamique sur le processus de résolution qui enracine cette étude sur le calcul mental, en particulier autour des questions sur l'émergence de stratégies de résolution.

4. Considérations méthodologiques : le contexte de l'étude exploratoire

Je présente dans ce qui suit l'analyse d'une activité donnée à l'intérieur d'un cours universitaire pour (douze) futurs enseignants de mathématiques du secondaire. Lors du chapitre centré sur l'algèbre et la résolution d'équations, un bloc d'une heure à été consacré à la résolution mentale d'équations algébriques. Les équations algébriques données à résoudre étaient des équations habituelles et ordinaires, rencontrées dans le travail quotidien en algèbre au début du secondaire. Il a été proposé une certaine variété d'équations, de formes $Ax + B = C$, $Ax + B = Cx + D$, $Ax/B = C/D$, $Ax^2 + Bx + C = 0$, avec diverses variantes.

L'organisation de la classe s'apparente à celle proposée par Douady (1994), portant une attention particulière à installer un climat respectueux qui permet le partage et l'écoute des solutions entre les apprenants : (1) Le formateur offre oralement *et* par écrit (sur acétate) la tâche à résoudre. (2) Les étudiants écoutent, réfléchissent et résolvent mentalement la tâche. (3) Au signal du formateur, les étudiants écrivent uniquement leur réponse sur une feuille de papier. (4) Le formateur demande aux étudiants d'expliquer oralement et en détails leur solution (bonne ou mauvaise) et comment ils y sont parvenus (et dans certains cas de venir devant la classe pour l'expliquer au tableau). (5) Le formateur, si les réponses sont expliquées oralement, prend soin de noter clairement celles-ci sur transparent (projeté) un après l'autre. (6) Les solutions offertes doivent être justifiées et les autres étudiants sont invités à questionner ou intervenir s'ils ne sont pas complètement convaincus de la solution

ou ne la comprennent pas. (7) Le formateur invite les autres étudiants qui ont résolu la tâche différemment (ou qui pensent à la résoudre différemment) à se manifester et à offrir leur solution. (8) Les différentes solutions sont comparées, autant que possible, et le formateur et les étudiants discutent leurs efficacités, leurs liens, leurs avantages/inconvénients, les possibilités qu'elles offrent pour résoudre d'autres problèmes, etc. Les données recueillies pour l'analyse proviennent des transparents sur lesquels les stratégies des étudiants ont été notées, ainsi que des notes « à chaud » et des réflexions issues de la séance.

L'analyse veut illustrer la nature des stratégies déployées en contexte de résolution mentale en algèbre, et tout le potentiel que ceci recouvre, pour y comprendre et caractériser la nature de l'activité mathématique mobilisée. À l'instar de Douady (1994), il ne s'agit pas de faire un rapport de recherche complet sur les apprentissages réalisés chez les étudiants, ni d'aller voir le réinvestissement à long terme que les étudiants en font sur d'autres objets mathématiques, mais bien de comprendre le sens et la fonctionnalité des outils utilisés (i.e. le calcul mental en algèbre), et particulièrement d'explorer leur potentiel. À travers les exemples/illustrations de stratégies développées par les étudiants, l'intention est (1) d'explorer la richesse et le potentiel d'une entrée en calcul mental en algèbre et (2) de caractériser la nature de l'activité mathématique mobilisée. Ce contexte avec douze étudiants à la formation des maîtres, qui ont eu dans leur parcours une expérience avec une variété de problèmes, est fort riche pour arriver à étudier le potentiel d'un contexte de calcul mental et voir ce qui peut émerger comme stratégies dans ce contexte. En ce sens, le choix de travailler avec des futurs enseignants, semi-experts, est méthodologiquement important. En effet, ces futurs enseignants n'en sont pas à leurs débuts en algèbre et ne sont donc pas en contexte nouveau de résolution ou en familiarisation avec les objets algébriques, évitant des blocages et difficultés reliées à l'algèbre comme sujet. Ce contexte permet que les solveurs puissent « entrer » dans les problèmes et tenter de les résoudre. Ceci pourrait être très différent avec des élèves ne connaissant pas bien l'algèbre, qui en resteraient possiblement au sens des lettres algébriques par exemple et n'entreraient pas dans la résolution, ne permettant pas d'avoir accès aux résolutions des solveurs.

Ainsi, cette analyse, il est important de le souligner, en est une pour étudier un phénomène et n'a pas pour but d'offrir des prescriptions et de montrer comment l'approche est ou n'est pas « bonne » et de quelle façon elle permet de mieux faire apprendre la résolution d'équations chez l'élève du secondaire ; en particulier parce que ce travail se fait avec des semi-experts, qui ont déjà amplement résolu des équations dans leur parcours académique et n'en sont pas à leurs débuts[3]. Cette

[3] La littérature scientifique regorge toutefois d'études questionnant le niveau de connaissances et de compréhensions algébriques des (futurs) enseignants de mathématiques du secondaire (e.g. Bryan, 1999 ; Hitt, 1998 ; Schmidt et Bednarz, 1997 ;

analyse n'a pas non plus comme intention de tracer un parallèle entre ce qui s'est passé avec ces futurs enseignants et ce qui peut se produire en classe avec des élèves du secondaire, même si les analyses en cours pour d'autres objets mathématiques suggèrent que la nature des activités de ces deux groupes en contexte de calcul mental est fort similaire (e.g. sur les opérations sur les fonctions, voir Proulx, 2012). Ce travail, et ce qui le prolonge, pourra dans le futur déboucher dans la classe, mais à ce stade ce travail sur la résolution algébrique en contexte de calcul mental veut regarder ce que ce contexte *peut* produire comme activité mathématique et tenter de la caractériser, ainsi que de penser à de futures pistes de recherche et éléments à étudier.

Au niveau de l'analyse des données, les déclinaisons de stratégies (calcul réfléchi/raisonné, automatisé, approché, exact, rapide) sont mises à profit pour caractériser les entrées utilisées et leur diversité/richesse, ainsi que de voir leurs apports possibles à l'analyse de travaux sur d'autres objets que les nombres. De plus, puisque cette analyse dépend de la nature des stratégies déployées et que celles-ci sont relatives à la résolution d'équations algébriques, l'approche du réinvestissement de concepts théoriques disponibles de Desgagnés (1998) est utilisée, ici avec les concepts issus de la littérature scientifique en didactique de l'algèbre, dans le but de guider et d'enrichir l'analyse conduite sur les stratégies déployées. À titre d'exemple, les procédures inverses de Hewitt (1996), Nathan et Koedinger (2000) et Filloy et Rojano (1989), la transformation d'équations d'Arcavi (1994), les équations équivalentes de Mary (2003), pour ne nommer que celles-ci, ont été réinvesties lorsqu'elles étaient pertinentes dans l'analyse. Ainsi, à travers cette analyse, l'intérêt est porté sur l'activité mathématique par les façons d'entrer dans la résolution des tâches proposées, et le sens donné à la résolution d'équations algébriques (Bednarz, 2001; Bednarz & Janvier, 1992).

5. Illustrations des entrées sur la résolution mentale d'équations algébriques

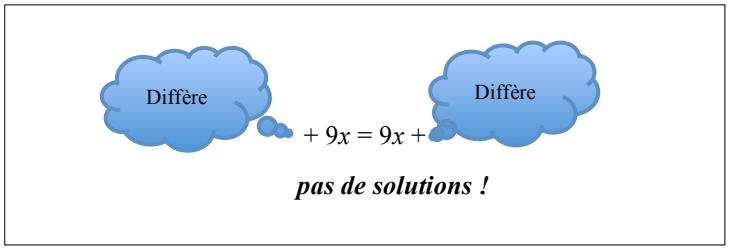
Dans ce qui suit, parce que le but est d'offrir des illustrations la manière selon laquelle ces tâches ont été résolues, et parce que leur résolution a fait émerger un nombre considérable d'entrées et que l'espace ne me permet pas de traiter tous les exemples, je présente un exemple pour une équation de la forme $Ax + B = Cx + D$ et un exemple pour une équation de la forme $Ax^2 + Bx + C = 0$. Je montre ensuite, dans le cas d'équations de la forme $Ax/B = C/D$ et ses variantes, l'éventail des stratégies qui sont ressorties à travers les diverses équations posées et je centre la discussion sur quelques-unes en particulier. À travers cette diversité de stratégies déployées, une attention particulière est portée sur les différentes significations accordées à la résolution d'équations algébriques.

Van Dooren, Verschaffel et Onghena, 2003 ; voir la recension des écrits faite dans Mewborn, 2003, et Proulx et Bednarz, 2010)

5.1. Résolution de l'équation 5x + 6 + 4x + 3 = –1 + 9x

Lors de la résolution de l'équation 5x + 6 + 4x + 3 = –1 + 9x, trois stratégies différentes sont ressorties : (1) lecture globale de l'équation, (2) manipulations algébriques standard, et (3) essai numérique.

(1) *Lecture globale de l'équation*. Une première entrée, affirmant qu'il n'y a pas de solutions, est qu'on peut rapidement voir 9*x* d'un côté comme de l'autre de l'équation, et qu'on voit aussi rapidement, sans les additionner, que les nombres restants ne donnent pas une réponse égale, ce qui amène à voir aussitôt qu'il n'y a pas de solution satisfaisant l'équation à résoudre, car aucun *x*, quel qu'il soit, ne peut faire en sorte que des nombres différents deviennent égaux.



On retrouve dans cette stratégie une idée de lecture rapide et globale de l'équation, permettant d'attester rapidement de la réponse, sans entrer dans les manipulations algébriques ou procédures standard de résolution. On peut voir ce type de réponse comme étant provoqué, tel que l'indiquent Butlen et Pézard (1990), par l'empressement de trouver une réponse, un *calcul rapide*, sans passer par une procédure plus lourde de résolution algébrique. Cette entrée rappelle aussi ce que Arcavi (1994) nomme la lecture du sens des symboles ou l'inspection *a priori* des symboles, soit une sensibilité pour analyser une expression algébrique et prendre des décisions avant d'entrer dans les processus algorithmiques de résolution. Il donne, entre autres, l'exemple de l'équation $(2x + 3)/(4x + 6) = 2$, qui n'a pas de solution parce que, quelle que soit la valeur de *x*, le numérateur vaut la moitié du dénominateur, rendant futile la mise en route d'étapes supplémentaires de résolution.

La procédure de lecture globale pour 5x + 6 + 4x + 3 = –1 + 9x a eu un effet intéressant lors de la résolution d'autres tâches, par exemple $x + x^2 = 2x^2 + 5 – x^2$. Face à cette équation, plusieurs ont tenté de « voir » ce qui se répétait de chaque côté de l'égalité, soit en *x* et en x^2, dans le but de ne pas les considérer dans la résolution. Ainsi, on peut voir que chaque côté possède un x^2 et qu'on peut en faire abstraction, amenant à dire $x = 5$. D'une certaine façon, le « bruit » provoqué par l'exposant 2 dans x^2, de la même façon que le bruit provoqué par la présence d'une

fraction dans l'exemple $x + \frac{x}{4} = 6 + \frac{x}{4}$, a été évité, au profit d'une reconnaissance des répétitions non importantes pour la résolution. En fait, confrontés à $x + \frac{x}{4} = 6 + \frac{x}{4}$, plusieurs étudiants ont aussi rapidement reconnu que $x = 6$, par une lecture globale de l'équation (Bednarz et Janvier, 1992).

(2) *Manipulations algébriques standard*. Une deuxième entrée sur la résolution de cette équation a été de la traiter de façon similaire à ce qui peut se faire en contexte papier-crayon, soit de soustraire $9x$ à droite et à gauche pour arriver à $9 = -1$ ou à $10 = 0$. Dans un premier temps, cette approche a amené l'étudiant à affirmer que la réponse est « infinité de solutions », alors qu'il a « éliminé » tous les x et donc qu'il n'en reste plus pour orienter la détermination de la réponse. Toutefois, la contradiction obtenue, soit $10 = 0$ ou $9 = -1$ l'a amené après coup à réaliser que ceci signifie qu'il n'y a pas de solution.

$$\begin{array}{c} -9x \qquad\quad -9x \\ 5x + 6 + 4x + 3 = -1 + 9x \\ 9 = -1 \\ 10 = 0 \end{array}$$

~~***infinité !***~~ .... ***pas de solutions !***

Il y a une différence intéressante, mis à part le fonctionnement davantage standard de résolution, entre les stratégies (1) et (2). En effet, la stratégie (2) fonctionne plus par automatismes, un certain *calcul automatisé*, pour l'étudiant : enlever de chaque côté le x ; absence de x donc « infinité de solutions » ; contradiction sur la réponse ($9 = -1$ ou $10 = 0$) donc correction et affirmation de « pas de solution ». La stratégie (1), avec les explications données par l'étudiant, est davantage une lecture globale de l'équation amenant à ne pas considérer (et non pas à « enlever ») ce qui est répété des deux côtés de l'égalité et à regarder si ce qui reste permet de conserver l'égalité. Ainsi, pour la stratégie (1), on cherche à voir si l'égalité est satisfaite, alors que dans la stratégie (2) on cherche davantage la signification de l'absence de x ou de la contradiction (et on s'y trompera au début, cherchant à se rappeler ce que ceci implique). La différence d'approche est parlante pour la signification donnée à la résolution d'équations algébriques, particulièrement dans une idée de trouver les valeurs pour lesquelles l'égalité est satisfaite (Bednarz, 2001). Cette idée se retrouve dans la stratégie (1), mais peu dans la (2).

(3) *Essai numérique*. Une autre stratégie utilisée est celle de l'essai numérique. Celle-ci a été utilisée pour se donner une indication de ce qui se passe dans cette équation ; une entrée de type *calcul approché*, où on tente d'obtenir un certain

aperçu de la réponse. En effet, l'étudiant a essayé de remplacer x par la valeur 1 et s'est retrouvé avec 18=8.

$$5x+6+4x+3 = -1+9x$$
$$\Rightarrow \text{si } x = 1$$
$$5+6+4+3 = -1+9$$
$$18 = 8$$

À ce moment, l'étudiant a expliqué que cette stratégie peut prendre beaucoup de temps (sans parler de la lourdeur à se rappeler de tous les essais effectués et leurs résultats) et donc une autre stratégie doit être tentée (e.g., lecture globale). Cette entrée peut être vue comme provoquée par le calcul mental, émergente dans ce contexte, car sur papier-crayon l'étudiant dit qu'il aurait fait quelque chose de plus standard comme la stratégie (2) pour y arriver. Mais, ici, avec l'idée implicite de rapidité (bien que non-imposée), l'étudiant a cherché une entrée rapide sur le problème (x=1 est une stratégie ingénieuse pour gagner du temps), mais celle-ci n'a pas abouti, l'amenant à chercher d'autres façons de faire plus efficaces (autant en termes de temps, d'économie de mémoire, que pour l'obtention d'une réponse). Ces étudiants peuvent être vus comme étant mûrs pour l'écoute d'autres stratégies plus efficaces en calcul mental, la mise en commun des stratégies de calcul mental s'avérant intéressante car un besoin de résolution évident est créé (Butlen et Pézard, 1992).

Retour. Déjà, par ces premiers exemples pour une première équation, on voit l'émergence d'une diversité d'entrées pour « résoudre », provoquée par le contexte de calcul mental (et ses contraintes implicites de rapidité, et celles explicites telles ne pas pouvoir prendre de notes ni laisser des traces écrites). Ces contraintes peuvent faire émerger des stratégies de résolution – telle la lecture globale – qui a le potentiel d'influer en retour sur les stratégies papier-crayon et de forcer à une lecture plus critique de l'équation algébrique (voir Bednarz et Janvier, 1992).

Le contexte de calcul mental, on le voit ici, pousse à faire une affirmation, à avancer quelque chose, voire à prendre position, pour formuler ou proposer une *réponse* au lieu de trouver un *résultat*. L'aspect « mental » oriente vers la formulation d'une réponse, mais pas de la même façon qu'on l'entend normalement. L'entrée est davantage sur le processus, alors qu'on cherche une façon de voir vite, d'entrer dans le problème rapidement et efficacement, sans nécessairement chercher un résultat. La régulation de la résolution se fait par le solveur lui-même, et non pas par le déroulement de la procédure papier appliquée à l'équation. Plusieurs travaux de recherche reprochent aux élèves de s'obnubiler sur l'idée de trouver un résultat et d'y perdre le sens et le raisonnement sous-jacent en

cours de résolution (voir e.g. les travaux sur le contrôle de Saboya, 2010). Pour ces exemples de calcul mental, tout semble orienté vers une réponse mais en procédant par raisonnements et par le sens sous-jacent, donc très peu sur l'application mécanique d'une méthode ou d'un algorithme (ceci dit, ce ne serait pas impossible comme entrée, mais elle s'est rarement produite, voire jamais). On entre alors dans une idée de créer son propre contexte de résolution, sa propre entrée adéquate et adaptée pour résoudre, où la part des résolutions mécaniques est réduite et se fond dans le contexte global de résolution.

5.2. Résolution de l'équation $x^2 - 4 = 5$

La résolution de l'équation $x^2 - 4 = 5$ a produit quatre approches différentes, mais qui font ressortir des entrées complémentaires bonifiant, voire transformant, la compréhension de ce que signifie résoudre une équation algébrique : (1) transformation de l'équation, (2) passage par un système d'équations, (3) recherche des zéros de la fonction, (4) résolution suivie d'une vérification.

(1) *Défaire les opérations*. « Tu transfères le 4 avec le 5 et tu prends la racine carrée » ; « Mon nombre a été élevé au carré et ensuite on lui a enlevé 4, alors j'ajoute 4 et j'extrais la racine carrée ». Ces approches, donnant +/- 3 comme réponse, sont similaires aux méthodes de résolution « inverses » retrouvées dans Hewitt (1996) et Filloy et Rojano (1989) et dans le *unwinding* de Nathan et Koedinger (2000), où les opérations sont défaites pour arriver à la valeur de *x*. Tel que l'expliquent Filloy et Rojano (1989), pour résoudre l'équation avec cette méthode « il n'est pas nécessaire d'opérer sur ou avec les inconnues » (traduction de la p. 20), le travail se ramenant à une suite d'opérations arithmétiques réalisées sur des nombres.

Dans ce cas, résoudre l'équation algébrique est centré sur la recherche d'une façon d'isoler *x*, dans un contexte arithmétique. Même si cela fait penser à un contexte papier-crayon, la différence majeure est qu'il n'y a pas de papier-crayon et qu'ainsi un dialogue interne se met en place entre l'élève et sa tâche *pendant* sa résolution (car il ne peut pas laisser de traces écrites ou transformer par écrit l'équation, voire en écrire une nouvelle comme dans Hewitt, 1996, p. 34). Parce qu'il ne peut laisser de traces écrites ou ne peut transformer par écrit l'équation, et ne peut ainsi interagir avec les résultats obtenus sur papier après chacune des transformations de l'équation, la *régulation* de la solution se fait à travers un dialogue personnel, la création d'une histoire dans laquelle le solveur s'engage. La narration de la solution – « Mon nombre a été élevé au carré et ensuite on lui a enlevé 4, alors j'ajoute 4 et j'extrais la racine carrée » – est parlée à travers la résolution, pendant celle-ci, chaque « étape » étant réalisée après celle qui la précède pour arriver à garder le fil de la résolution et des opérations suivantes à faire. Chacune des étapes oriente les suivantes (e.g. « alors…et… »). La *régulation* de la résolution se fait en

cours de résolution par le solveur, dans l'action mathématique, par sa réflexion, et non pas par l'application d'une mécanique ou procédure connue nécessitant la réalisation d'une suite d'étapes à respecter (où ce sont alors les étapes et leur respect qui guident la *régulation* de la solution). Il y a un côté *ad hoc* à la nature de la stratégie déployée, qui émerge et est orientée par la résolution. Avec cette entrée, on est davantage sur une idée d'isoler x pour retrouver sa valeur, que de trouver les valeurs de x pour lesquelles l'égalité est vérifiée. La résolution d'équations n'a pas tout à fait la même signification.

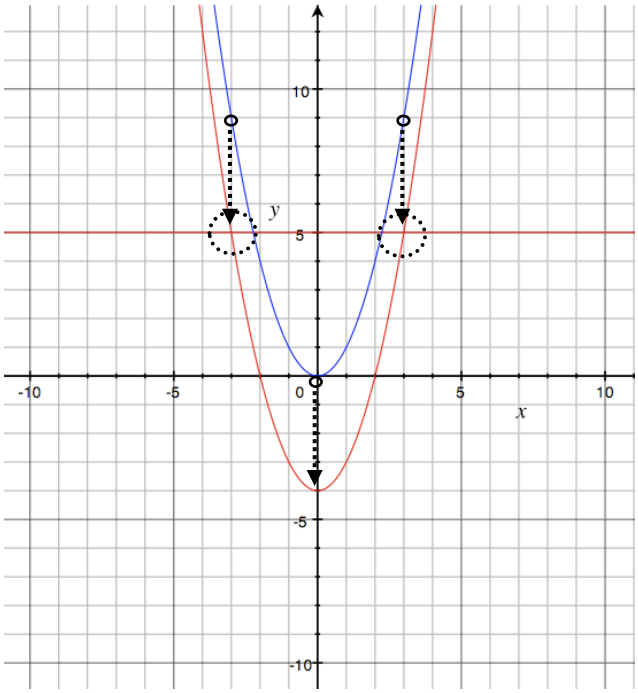
(2) *Passage par un système d'équations*. Une autre stratégie proposée est de considérer l'équation à résoudre comme la comparaison de deux équations dans un système d'équations ($y = x^2 - 4$ et $y = 5$) et de chercher les points d'intersection de ces deux fonctions dans le graphique.

Pour y arriver, l'étudiant s'est représenté la droite $y = 5$ et ensuite a positionné $y = x^2 - 4$. Cette dernière réfère à la fonction quadratique $y = x^2$, laquelle coupe la droite $y = 5$ en $x = \sqrt{5}$. Dans le cas de $y = x^2 - 4$, elle est déplacée de 4 vers le bas dans le graphique et donc le 5 de la droite $y = 5$ devient en quelque sorte un 9 par translation. Ainsi, comment obtenir une image de 9 avec la fonction $y = x^2$? Avec $x = 3$. Donc, en $x = 3$, la fonction $y = x^2 - 4$ coupe la droite $y = 5$. Le graphique présenté ci-après permet un peu de comprendre ce qui a été fait par l'étudiant, mais nécessite un raisonnement de la part du lecteur, un peu de la même façon que le reste de la classe a dû le faire lors de la communication de la solution.

Cette entrée sur le graphique, qui rappelle l'idée d'en appeler à diverses formes de représentation pour résoudre un problème algébrique (Arcavi, 1994), permet de penser le signe d'égalité autrement[4]. C'est-à-dire, de penser le signe d'égalité en termes d'une comparaison entre deux fonctions pour trouver le x commun, donc qui satisfait ces deux fonctions en un y considéré commun. La signification de l'égalité change ici, car on ne cherche pas la valeur qui rend l'égalité vraie, mais plutôt un x auquel les deux fonctions associent le même y.[5]

[4] Il est possible de penser ce type de stratégie comme étant davantage de l'ordre d'une estimation, par un *calcul approché*, que de l'ordre du calcul d'une réponse exacte. Toutefois, parce que les nombres utilisés étaient exacts, ceci a donné une réponse exacte. Les analyses en cours sur le travail des opérations sur les fonctions en contexte de calcul mental avec des élèves du secondaire montrent en effet des entrées davantage en termes de *calcul approché* pour résoudre les problèmes posés en contexte graphique (Proulx, 2012).

[5] Il y a, évidemment, d'autres idées déployées, telles les notions de droites à images constantes et de variation des paramètres dans la fonction quadratique.



(3) *Recherche des zéros de fonctions*. Une autre stratégie proposée est celle de chercher les valeurs de x qui donnent une valeur en y nulle ou ce qu'on appelle couramment la recherche des zéros de la fonction, où la courbe de la fonction croise l'axe des x, autrement dit la droite $y=0$.

$$x^2 - 9 = 0$$
$$(x + 3)(x - 3) = 0$$

En ce sens, dans l'explication donnée par l'étudiant, on peut voir qu'on ne recherche pas ici nécessairement les valeurs qui vérifient l'égalité (même si on peut le faire), mais surtout les valeurs qui « annulent » la fonction $y=x^2-9$, donc qui donnent le(s) point(s) pour le(s)quel(s) l'image vaut 0.[6] On se retrouve à mi-chemin entre un travail de la fonction quadratique et de la résolution d'équation, donnant un autre sens à la résolution de cette équation.

[6] Reste à voir si l'étudiant pense complètement en termes de fonction ici. En effet, on peut faire cette résolution à un niveau davantage algébrique, en passant par une identité remarquable, pour voir vite que pour que le produit soit nul il suffit qu'un des deux facteurs soit nul. On parle alors davantage d'un *calcul automatisé*, faisant intervenir les identités remarquables.

(4) *Résolution suivie d'une vérification*. Cette quatrième stratégie ressemble à la stratégie (1) alors que l'équation $x^2 - 4 = 5$ est rapidement transformée en $x^2 = 9$. Toutefois, la réponse obtenue est 3, sous l'effet de la vitesse. Parce qu'il est en situation de calcul mental et qu'il sait bien que dans ce contexte ses réponses sont données rapidement et peuvent manquer de précision, l'étudiant décide de faire une vérification de sa réponse. En vérifiant que $(3)^2 = 9$, il réalise alors que $(-3)^2$ donne aussi 9 et se réajuste. Cette façon de faire est intéressante, car elle se rapproche de l'idée non pas de trouver une valeur pour laquelle l'égalité est vérifiée, mais plutôt de trouver toutes les valeurs possibles qui satisfont à l'égalité. C'est une entrée qui permet de réaffirmer le sens de la résolution d'équations algébriques.

Retour. On retrouve avec ces autres exemples, pour une deuxième équation, une diversité d'entrées possibles en calcul mental pour la résolution d'équations algébriques. Ceci, il faut le souligner, avec des tâches très simples. Cette diversité d'entrées sur la résolution a un potentiel énorme pour permettre de donner un sens à ce que signifie résoudre une équation algébrique, et sous diverses formes, passant par une vision globale de l'équation, des essais-erreurs, la réalisation d'étapes intermédiaires (–4 et 5), la vision d'un système d'équations, des zéros de fonctions, etc. Ceci ouvre considérablement ce qui est permis de faire pour résoudre une équation algébrique : dépassant les procédures habituelles de résolution algébriques étapes par étapes pour aller au-delà de la clarté des étapes en résolution et vers une compréhension plus large de ce que signifie résoudre une équation algébrique. Cet aspect est discuté en 5.4.

De plus, dans cette résolution d'équations « purement » mathématique ou « sans contexte », on peut voir encore que les solveurs se sont créés leurs « contextes » de résolution d'équation, en interprétant ou « contextualisant » l'équation à leur façon ; ils posent l'équation en lui assignant un contexte. Cette contextualisation ne s'est pas faite en termes de situations de la vie de tous les jours (achats de bonbons, lancer de balle, etc.), mais en termes de « chercher les zéros », « chercher un point de rencontre de deux équations », « chercher les valeurs qui satisfont l'équation », etc. C'est cette diversité qui ressort et qui se traduit par des heuristiques de résolution différentes pour résoudre la même équation (qui n'en devient plus la même équation soudainement, car elle est contextualisée, *posée*, différemment et signifiée différemment). Cette expérience ne fait pas que bonifier, mais surtout transforme la signification et la compréhension des entrées possibles de résolution d'équations algébriques, les solveurs leur donnent un sens particulier, adaptent leurs entrées, posent leur problème. Ils développent leurs façons d'entrer dans le problème. On voit donc l'ouverture vers une diversité de sens possibles, autant au niveau des stratégies que de la signification attribuée au fait de résoudre une équation algébrique.

5.3. Résolution sous la forme Ax/B = C/D

La pose d'équations sous la forme A*x*/B = C/D, soit $3x = 3/4$, $\frac{2}{5}x = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3x} = \frac{2}{5}$ et $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$, a aussi fait émerger une diversité d'entrées pour les résoudre. Celles-ci sont résumées dans le tableau suivant.

Équations proposées	Stratégies déployées
$3x = 3/4$ $\frac{2}{5}x = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{3x} = \frac{2}{5}$ $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$	(1) *Recherche d'un nombre qui satisfait l'équation* (2) *Éliminer les fractions* (3) *Manipulations pour isoler la variable x* (4) *Se donner un ordre de grandeur* (5) *Établir des équations équivalentes pour simplifier la résolution* (6) *Décomposition de l'équation et mise en évidence de facteurs* (7) *Défaire les opérations* (8) *Distinguer ce qui n'est pas* (9) *Lecture par dessous* (10) *Utilisation de propriétés mathématiques* (11) *Éliminer le x* (12) *Utiliser des ratios*

Sans méconnaître l'intérêt mathématique de toutes ces stratégies, faute d'espace je ne m'attarde dans ce qui suit que sur celles qui contribuent à la discussion en cours, soit les stratégies (1), (4), (5), (7) et (12).

(1) *Recherche d'un nombre qui satisfait l'équation*. Une stratégie a été de lire l'équation en considérant *x* comme un nombre et en cherchant ce nombre : « je cherche le nombre qui…donne… » (voir Bednarz, 2001 ; Whitman, 1982). Par exemple, avec une équation algébrique du type $4x + 2 = 10$, on peut dire « le quadruple d'un nombre, additionné de 2, donne 10. Ce quadruple vaut 8, donc le nombre vaut 2 ». Avec $3x = 3/4$, la stratégie a été de se demander quel nombre multiplié par trois donnera 3/4 ou « le triple d'un nombre vaut 3/4, quel est ce nombre ? ». On parle ici l'équation, on la verbalise ainsi que le dit Bednarz (2001), ce qui fait travailler l'idée que l'inconnue *est un nombre* que l'on recherche. Cette stratégie permet de lire l'équation comme on lit une phrase et d'insister sur le fait que *x* est un nombre, une compréhension à la base de l'algèbre au secondaire et de l'utilisation des lettres algébriques dans les mises en équations de problèmes (Bednarz et Janvier, 1992, 1996 ; Bednarz, Kieran et Lee, 1996).

Cette idée de « parler » l'équation se distingue du travail fait habituellement par écrit. Sans vouloir le stigmatiser, notons que le travail écrit n'amène pas habituellement à verbaliser l'équation, mais plutôt à la traiter et chercher à isoler le x en manipulant les symboles à travers une série de manipulations algébriques (c'est en fait la force de l'algèbre… sur papier !). Dans ces cas en résolution mentale, l'étudiant se dit l'équation, il se raconte une histoire, la fait vivre pour pouvoir suivre ce qui se passe et retracer les étapes à faire, de façon similaire à la stratégie (1) *Défaire les opérations* pour l'équation $x^2 - 4 = 5$.

(4) *Se donner un ordre de grandeur*. Cette stratégie fait référence à l'idée de *calcul approché* et se distingue des autres approches, car elle n'amène pas nécessairement à la réponse, mais plutôt à se donner un ordre de grandeur pour la réponse. Par exemple, dans le cas de $\frac{2}{5}x = \frac{1}{2}$, un étudiant a transformé les fractions en décimaux et a comparé 0,4 et 0,5 ; il a alors trouvé que x devait être plus grand que 1 pour permettre d'atteindre 0,5 en multipliant x par 0,4. Ceci lui a donné un ordre de grandeur pour répondre à la question. Toutefois, l'étudiant n'a pas offert de réponse finale, arrêtant ici sa résolution[7].

(5) *Établir des équations équivalentes pour simplifier la résolution*. Pour arriver à résoudre l'équation algébrique $\frac{2}{5}x = \frac{1}{2}$, certains ont eu comme stratégie de trouver des équations équivalentes pour lesquelles la résolution est plus facile. Ainsi, certains ont *doublé l'équation*, pour aboutir à $\frac{4}{5}x = 1$, ce qui pour eux était maintenant simple à résoudre, en multipliant par 5/4 pour obtenir x = 5/4. Cette stratégie rappelle les approches de division arithmétique, où par exemple on dit que diviser 5,08 par 2,54 est égal à 508 ÷ 254, car 254 entre le même nombre de fois dans 508 que 2,54 entre dans 5,08.

Cette démarche sémiotique de produire des équations équivalentes a beaucoup de potentiel pour réussir à résoudre des équations, mais aussi pour la compréhension du principe d'équivalence : dès lors que la valeur de x demeure la même, peu importe la variation d'une équation à une autre, et celle-ci sera conservée dans les autres équations équivalentes (Mary, 2003). D'une certaine façon, trouver des équations équivalentes devient la façon de résoudre l'équation. Arcavi (1994) parle de cette démarche comme résultant de la connaissance qu'en transformant une expression algébrique en une autre équivalente, il devient possible de lire de l'information qui n'était pas visible dans l'expression originale. On obtient alors,

[7] Son approche aurait pu être exploitée pour y voir que 0,5 est un quart de 0,4 de plus que 0,4, donc vaut 5/4 de 0,4, réalisant ainsi que 0,4 doit être multiplié par 5 quarts.

par les transformations des équations, une façon d'arriver à trouver une valeur pour le *x*. Ainsi, plutôt que d'isoler *x*, on cherche des équations équivalentes qui guideront tranquillement vers l'équation, équivalente elle aussi, de « *x* = quelque chose ». Ces transformations sont aussi à la base de la résolution d'équations par écrit, mais ce ne sont pas exactement ces transformations usuelles que l'on retrouve ici. On ne transforme pas l'équation pour isoler le *x*, mais bien pour obtenir une autre équation plus facile à lire ou plus parlante (on double le 1/2 de $\frac{2}{5}x = \frac{1}{2}$, par exemple, pour obtenir 1 dans $\frac{4}{5}x = 1$), pour ensuite pouvoir trouver la valeur du *x*.

(7) *Défaire les opérations*. Se rapprochant de la stratégie connue sous le nom de « unwinding » (Nathan et Koedinger, 2000) ou celle des procédures inversées répertoriée dans Hewitt (1996) et Filloy et Rojano (1989), cette entrée vise à retrouver la valeur du *x* en faisant le contraire des opérations faites pour obtenir l'équation (tel que cela est discuté dans la stratégie « transformation de l'équation » pour l'équation $5x + 6 + 4x + 3 = -1 + 9x$). Par exemple, dans le cas de $3x = 3/4$, on dira qu'on a multiplié *x* par 3 et donc que pour retrouver *x* il faut faire l'inverse ou « défaire l'opération », soit diviser par 3.

Utilisée ici pour un problème simple, ce type de stratégie est au cœur, avec des problèmes complexes, d'une approche de résolution très sophistiquée comme le montre Hewitt (1996) dans son activité « think of a number » avec des équations du type : $6\left(\frac{2(x+3)-5}{3}+72\right)=100$. Ici aussi, tel que pour la stratégie « transformation de l'équation », le travail se ramène à une suite d'opérations arithmétiques réalisées sur des nombres comme cela est expliqué dans Filloy & Rojano (1989). On se retrouve donc dans un contexte arithmétique.

(12) *Utiliser des ratios*. Finalement, une autre entrée développée par certains étudiants est d'analyser le ratio unissant numérateurs et dénominateurs. Par exemple, certains ont regardé le ratio unissant le numérateur et le dénominateur pour l'expression contenant *x* et ensuite ont imposé ce ratio, car égalité il y a, de l'autre côté de l'équation[8]. Ainsi, avec $\frac{6}{x} = \frac{3}{5}$, inversé pour donner $\frac{x}{6} = \frac{5}{3}$, si mon nombre est 6 fois plus gros que *x*/6, alors il est 6 fois plus gros que 5/3.[9]

[8] L'égalité n'est en effet pas vue ici comme une égalité conditionnelle, mais plutôt comme étant « donnée » et pour laquelle il existe une solution.

[9] Une variante peut être : « mon ratio me dit que pour 3 au numérateur j'ai 5 au dénominateur, donc si j'ai 6 au numérateur, ce qui est le double de 3, j'ai 10 au dénominateur ».

D'autres encore, pour $\frac{6}{x}=\frac{3}{5}$, ont analysé le ratio entre chacun des numérateurs et ont tenté de voir comment celui-ci s'applique aux dénominateurs, qui devaient, pour produire une égalité, être dans le même ratio que les numérateurs. Donc, si 6 est le double de 3, alors *x* est le double de 5, donc vaut 10. Ici encore, on sent l'idée de se raconter l'équation pour la faire parler et comprendre sa signification. Dans ce dernier cas, la réponse 10 vient d'elle-même.

Cette approche réinvestit les idées de raisonnement proportionnel, mais aussi travaille le principe d'égalité. C'est en effet parce qu'il y a une égalité que les ratios doivent être conservés entre numérateurs ou entre dénominateurs ou encore entre numérateur et dénominateur. Il y a aussi le fait qu'on analyse l'expression de l'intérieur, c'est-à-dire en essayant de comprendre son lien et de l'appliquer à l'autre partie de l'égalité, qui doit alors avoir elle aussi ce lien interne.

Cette dernière partie sur les équations algébriques de forme fractionnaire complète l'illustration de la panoplie d'entrées possibles ayant émergé dans ce contexte de calcul mental. L'objet de la sous-section suivante est la signification donnée à la résolution d'équations algébriques à travers ces diverses stratégies.

5.4. Significations données à résoudre une équation algébrique

En plus de l'émergence d'une variété de stratégies, on voit apparaître des significations différentes attribuées à « résoudre une équation algébrique ». Celles-ci émergent de la création des divers « contextes » mis en avant pour résoudre les équations proposées, offrant des façons différentes de concevoir l'équation et sa résolution. Ces différentes significations conduisent à une vision élargie de ce que peut vouloir dire « résoudre une équation algébrique ». En voici quelques-unes :

- Résoudre une équation signifie *rechercher la ou les valeurs pour lesquelles l'égalité, si elle est vérifiée, est vraie*. Il y a sous-jacente une idée d'égalité conditionnelle, alors qu'on retrouve non seulement l'idée de trouver une réponse ou une valeur, mais de rechercher toutes valeurs qui peuvent vérifier l'égalité (e.g. lorsque l'étudiant réalise que $(-3)^2$ donne aussi 9).
- Résoudre une équation signifie *rechercher la valeur du nombre auquel on a appliqué une série d'opérations* et donc défaire ces opérations pour retrouver le nombre. On pense à l'idée de lire l'équation (« $4x+2=10$: quel est le nombre qui multiplié par 4 et ajouté de 2 vaut 10 ? ») ou de défaire les opérations (« unwinding ») pour retrouver la valeur du départ. On est ici davantage dans une idée d'isoler le *x*.
- Résoudre une équation signifie que *chacun des deux côtés de l'égalité sont égaux* et donc que l'opération faite d'un côté doit l'être de l'autre pour conserver l'égalité et obtenir « *x*=quelque chose ». L'entrée par la lecture

globale de l'équation, où on se permet d'éliminer les valeurs identiques à gauche et à droite de l'égalité, et le regroupement des mêmes termes d'un côté ou l'élimination des mêmes termes des deux côtés de l'égalité sont des exemples. On parle en effet en termes des « deux côtés de l'égalité » ou du principe souvent appelé de la « balance ».

- Résoudre une équation signifie *comparer (graphiquement) deux parties d'un système d'équations* ou de deux fonction partageant le même *y*. On ne cherche pas la valeur qui rend l'égalité vraie, mais plutôt la coordonnée en *x* à laquelle les deux fonctions font correspondre une même coordonnée en *y*, ce qui donne un point d'intersection pour les deux fonctions.
- Résoudre une équation signifie *rechercher les valeurs qui font que la valeur en* y *est nulle*, comme pour la recherche des « zéros d'une fonction ». On retrouve cette entrée avec l'équation $x^2 - 4 = 5$, transformée en $x^2 - 9 = 0$. Le 0 devient, dans la fonction $y = x^2 - 9$, la valeur de *y* qui est nulle ; on peut aussi dire que le 0 devient la valeur de l'image.
- Résoudre une équation signifie *se donner avant tout une idée de ce qui se passe dans l'équation donnée* et évaluer alors les approches possibles. On retrouve ceci dans l'essai numérique lors de la résolution de $5x + 6 + 4x + 3 = -1 + 9x$ et même dans l'idée de lecture globale de l'équation ou ce que Arcavi (1994) nomme la lecture du sens des symboles ou l'inspection *a priori* des symboles, pour analyser une expression et prendre des décisions avant d'entrer dans le processus de résolution.
- Résoudre une équation signifie *trouver la valeur manquante dans une proportion*, où le ratio entre numérateurs et dénominateurs est le même pour les deux côtés de l'égalité. Dans ce cas, l'égalité n'est pas conditionnelle mais plutôt tenue pour acquise, menant à vouloir conserver le ratio trouvé entre le numérateur et le dénominateur, par exemple, pour les deux proportions mises en égalités.
- Résoudre une équation signifie *trouver des équations équivalentes* à l'équation de départ, plus simples, pour se diriger vers une équation équivalente de la forme « x = quelque chose » et, dans l'idée d'Arcavi (1994), lire de l'information qui n'était pas visible dans l'expression originale. On retrouve ceci lorsqu'on crée des équations équivalentes en multipliant les deux côtés de l'égalité par un facteur spécifique (e.g. en doublant les deux membres de l'égalité, en créant des coefficients doublés, en éliminant par le fait même la fraction).

Cette diversité de significations accordées à la résolution d'une équation algébrique agit déjà comme démonstration du potentiel du calcul mental en algèbre, alors que ces différentes significations offrent des portes d'entrées différentes sur la résolution d'équations algébriques et ne restreint pas à une vision unique de son interprétation. En ce sens, ces significations sont mathématiquement riches et

contribuent à approfondir la compréhension de ce que « résoudre une équation algébrique » représente.

6. Retour sur les stratégies déployées et l'activité mathématique mobilisée

6.1. Potentiel du calcul mental en algèbre

Malgré le fait que je me sois limité à offrir quelques illustrations, il y a une diversité et un foisonnement assez exceptionnel d'approches pour la résolution mentale de ces équations algébriques simples. C'est le contexte du calcul mental, et ses contraintes inhérentes (rapidité, sans papier-crayon pour garder des traces, etc.), qui a permis de faire émerger cette variété de stratégies, qui en retour ont contribué à bonifier, voire transformer, la compréhension de ce que signifie « résoudre une équation algébrique ». Ces stratégies de résolution ne sont pas nécessairement toutes « nouvelles », et plusieurs peuvent apparaître dans différents contextes de résolution impliquant l'algèbre. Toutefois, ce qui est significatif est le fait que ce contexte de calcul mental a permis de les faire émerger, de faire émerger toute cette diversité, durant la même activité avec des équations fort simples ; les participants ont été conduits à voir le potentiel de ce contexte et les réinvestissements possibles pour établir des liens entre stratégies et solutions. On voit, dans ce contexte de calcul mental, une pratique qui a du potentiel pour *élargir l'espace du possible* (Sumara et Davis, 1997) au niveau de ce que signifie résoudre une équation algébrique, ainsi que de la variété des entrées possibles pour résoudre. De la même façon que le contexte de calcul mental pour Threlfall (2002) permet de faire émerger des « *possibilities for numbers* », ce contexte de calcul mental en algèbre a fait émerger des « possibilités pour l'algèbre ». Cette variété de résolutions a beaucoup de portée pour l'enseignement-apprentissage de l'algèbre, parce qu'elle offre différentes voies pour la résolution d'équations algébriques et ne restreint pas à une seule interprétation du comment ceci peut se faire.

Sans encore une fois stigmatiser le contexte papier-crayon, le contexte de calcul mental peut être perçu comme ayant permis ou provoqué l'émergence de stratégies et significations algébriques qui diffèrent du contexte habituel de résolution papier-crayon. Un bon exemple est la stratégie d'établir des équations équivalentes (e.g. $\frac{2}{5}x = \frac{1}{2}$ et $\frac{4}{5}x = 1$), raisonnement à la base de la résolution d'équations par écrit. Toutefois, cette démarche diffère de la façon usuelle de résoudre, car l'équation n'est pas transformée pour arriver à isoler *x*, mais l'est plutôt pour obtenir des équations plus simples, plus faciles à lire. En fait, même si plusieurs des stratégies déployées ressemblent à certaines stratégies retrouvées en contexte papier-crayon, la différence majeure est qu'il n'y avait pas de papier-crayon et que les solveurs avaient à inventer leurs propres façons de résoudre, à interpréter l'équation dans leurs termes à eux, pour arriver à résoudre cette équation. Ceci est relié à ce

qu'affirment Butlen et Pézard (1992) concernant le fait que la pratique du calcul mental peut permettre le développement de nouvelles façons de résoudre en mathématiques que le contexte papier-crayon traditionnel offre rarement parce qu'il se centre sur des techniques et des algorithmes qui sont efficaces et ne créent pas le besoin de s'en éloigner. Ceci semble aussi être ici le cas, alors que la résolution d'équations algébriques a fait émerger des façons très diverses et non-usuelles de résoudre.

Ce contexte de calcul mental en algèbre a amené en fait au développement de façons *locales* de résoudre les équations. Tel que l'expliquent Butlen et Pézard (1990), les tâches de calcul mental font souvent émerger des stratégies spécifiques, qui n'ont pas toujours des propriétés « universelles » (i.e. pour résoudre des classes de problèmes) : les solveurs développent des stratégies particulières, pour des problèmes particuliers, efficaces de façon locale. Ceci est aussi mentionné par Plunkett (1979), qui réfère aux stratégies mentales comme étant « *fleeting* and often difficult to catch hold of […as] *variable* […and] *active* » (p. 3). Faisant référence aux travaux de Plunkett, Murphy (2004) explique que ces stratégies sont vues comme étant :

> Invented 'on the spot' by the user for that calculation and may not even be remembered for future use […] mental calculation strategies [are] seen as 'active' as they are created by the user to suit the numbers involved (pp. 3-4).

Ainsi, ces stratégies, développées sur-le-champ, n'avaient pas pour but d'être universelles ou optimales, mais uniquement de réussir à résoudre, d'être capable de faire entrer dans la tâche en générant une façon de donner un sens à la tâche et la résoudre. Cet aspect « dynamique » et « émergent » des stratégies mène à la prochaine sous-section concernant le processus de résolution et la nature de l'activité mathématique déployée en contexte de calcul mental.

6.2. Pistes de compréhensions sur le phénomène de résolution en contexte de calcul mental

Ces stratégies « actives » ont émergé en fonction des équations proposées et des contraintes du contexte de calcul mental. La plupart de ces stratégies n'existaient pas vraiment « avant » que l'équation soit donnée et ont été provoquées par l'interaction de l'équation posée et du solveur, qui en a développé une façon adéquate pour entrer, pour résoudre. Le contexte du calcul mental force une certaine entrée, souvent rapide, pour résoudre l'équation. Pour la majorité des stratégies proposées, les solveurs sont passés par des chemins inattendus pour arriver à la réponse, alors qu'ils ne pouvaient pas garder leurs traces et devaient trouver des façons de faire « économiques », mais efficaces et adaptées, pour résoudre l'équation : ils ont cherché une façon adéquate d'entrer, qui permette de résoudre l'équation.

L'activité mathématique dans ce contexte de calcul mental est alors centrée sur la façon d'entrer dans la tâche, de trouver une façon d'y arriver, d'avancer dans la tâche. Le défi, le but premier, n'est pas de trouver la réponse elle-même. On veut arriver à résoudre, et non pas uniquement donner une réponse. On veut évidemment trouver la réponse, mais ce n'est pas le défi premier, qui est plutôt de trouver une façon d'entrer dans la tâche. L'activité mathématique en est donc affectée. Ceci contraste avec l'utilisation des procédures et algorithmes traditionnels, ceux souvent utilisés en contexte de papier-crayon, où le défi n'est pas de se demander comment entrer, mais de les utiliser/appliquer correctement pour arriver à la réponse. Le contexte de calcul mental amène à faire les mathématiques différemment, en étant centré sur la recherche de façons d'entrer (et non l'application méthodique d'une procédure quelconque).

Dans la résolution des équations, les étudiants ont tenté de développer des façons de résoudre, des façons d'entrer pour résoudre ces équations. Ces entrées se sont souvent faites, tel qu'expliqué plus haut, en créant leurs propres contextes de résolution, en se créant leurs histoires : on voit l'équation comme un système d'équations, comme un contexte arithmétique où « défaire » les opérations, comme une recherche des zéros de fonction, comme une proportion à résoudre, etc. Le premier travail mathématique est alors de trouver un contexte pour entrer, un contexte pour résoudre. C'est en trouvant ces entrées que par la suite la résolution a pu se faire, que le tout a pu continuer. De plus, la création de ces contextes transforme l'équation, qui n'est plus la même dans ces contextes, car elle se fait donner un sens spécifique : on « pose » l'équation...

Ces considérations sur la création d'un contexte de résolution ramènent effectivement à la question de la « pose des problèmes », à la Varela, telle qu'expliquée dans la partie théorique. Cette variété mise en avant par les solveurs illustre bien comment les différentes façons de « poser » les tâches ont mené à des stratégies différentes et comment des sens différents sont attribués à ce que signifie « résoudre une équation algébrique ». La même équation a permis de faire émerger une variété de « poses », de stratégies, de sens. Ceci souligne le fait que les stratégies de résolution émergent à l'interaction du solveur et de la tâche, où le solveur joue un grand rôle à travers la pose de la tâche, mais où la nature de la tâche joue aussi un rôle (voir e.g. l'effet des formes fractionnaires ou du second degré sur la nature des stratégies déployées). Tout émerge de façon contingente où, ainsi que Davis (1995) l'explique, les stratégies sont inséparables du solveur et de la tâche résolue, émergeant des deux et de leur interaction. En ce sens, et bâtissant sur le travail de Simmt (2000), les situations données n'étaient pas des tâches mais plutôt des incitatifs. Les équations ne sont devenues des tâches que lorsque les solveurs se sont engagés dans ces dernières, lorsque les solveurs en ont *fait* un système d'équations, des fonctions, des rapports, etc., lorsqu'ils ont fait émerger

leur histoire/contexte, lorsqu'ils ont trouvé une façon de résoudre, lorsqu'ils ont « posé » leur tâche. En tentant d'entrer dans la tâche, le solveur a posé cette tâche en ses propres termes et y a développé sa façon de résoudre. Ceci a fait émerger cette variété de stratégies et de façons de résoudre, focalisant de plus directement le potentiel de cette activité de calcul mental.

Conclusion

Cette étude exploratoire permet d'illustrer le potentiel d'une entrée en calcul mental sur la résolution d'équations algébriques et d'offrir un démarrage de caractérisation de l'activité mathématique mobilisée dans ce contexte. Ce potentiel s'est illustré par la diversité des entrées développées pour résoudre, et les significations données à la résolution d'équations par l'activité mathématique mobilisée. Ces entrées sont de belles illustrations du fait que le travail du calcul mental force le solveur à trouver ses façons personnelles de résoudre, de comprendre et de donner une signification à la résolution d'équations algébriques. De cette façon, la résolution d'équation et sa signification se transforment en cours de tâche, prenant des visages mathématiques différents d'un étudiant à l'autre et d'une résolution à l'autre. Les résolutions d'équations deviennent fortement personnifiées, ce qui contraste avec les approches souvent standardisées de résolutions algébriques. On peut même dire qu'on ne résout plus les équations de la même manière dans ces deux cas – résoudre ne veut plus dire la même chose – l'une étant normalisée par une façon de faire que tous adoptent sans toujours en avoir le choix, alors que l'autre permet de créer une entrée adaptée à la tâche et à la façon pour le solveur d'y donner un sens. On permet donc au solveur d'entrer dans le problème, de le transformer à sa façon, pour arriver à résoudre l'équation. Comme l'expliquent Butlen et Pézard (1992), le travail du calcul mental permet de faire avancer des compréhensions mathématiques que le calcul écrit traditionnel n'arrive que peu à faire car souvent trop cadré, avec l'apprentissage de techniques et d'algorithmes qui sont suffisamment performants et qui ne font pas ressortir le besoin de penser plus loin qu'eux. Le contexte de résolution mentale, et ses contraintes, a fait sortir des sentiers déjà battus des approches traditionnelles de résolution d'équations algébriques pour ouvrir vers des entrées moins habituelles, adaptées, et plus « bricolées », comme le dit Hazelkemp (1986), mais personnifiées et permettant tout autant de résoudre l'équation.

La situation de calcul mental en algèbre semble avoir engendré un contexte différent de résolution, ouvrant des espaces d'explorations, des « possibilités pour l'algèbre », desquelles on peut tirer avantage pour l'enseignement-apprentissage (pour y faire ressortir les sens sous-jacents, les liens, les différentes conceptions, etc.). L'émergence de cette variété de stratégies montre aussi que le contexte de calcul mental a offert des possibilités pour penser différemment la résolution d'équations algébriques. L'ouverture de cet espace de possibles, qui ne restreint

pas à une façon unique de résoudre, peut avoir des retombées importantes sur la compréhension des solveurs et sur leur attitude de résolution. Évidemment, ces stratégies et sens divers ont émergé dans ce contexte spécifique, avec ces étudiants, et rien ne garantit que ceci se représentera dans un autre contexte. Mais là n'est pas la question, car ce qui importe est de générer une compréhension plus approfondie des occasions d'apprentissages que la résolution d'équations algébriques en contexte de calcul mental peut offrir, et d'en savoir davantage sur la nature des stratégies mobilisées.

Au niveau de pistes futures de recherche, en plus d'offrir une caractérisation de la nature de l'activité mathématique déployée, et les stratégies, ces résultats apportent des précisions importantes sur le sens à attribuer aux différentes déclinaisons de stratégies en contexte de calcul mental (calcul réfléchi/raisonné, automatisé, approché, exact, rapide) avec d'autres objets mathématiques que les nombres, ici avec l'algèbre. Ceci enrichit et étend l'application de ces déclinaisons pour l'analyse et la compréhension de l'activité mathématique déployée en contexte de calcul mental, en plus d'offrir un cadre, une certaine lunette, à l'intérieur duquel faire sens de ces stratégies. D'autres études sur d'autres objets mathématiques permettront de clarifier encore plus finement l'apport possible et la signification de ces déclinaisons pour l'analyse des stratégies de calcul mental.

Ces résultats soulignent le besoin de conduire des recherches sur ces aspects, ainsi que de continuer à scruter par des analyses fines et précises les processus de résolution mobilisés par les solveurs dans ces contextes de calcul mental et l'impact de ce travail sur les processus écrits et de résolution de problèmes. Entre autres, est-ce que le travail du calcul mental en algèbre (et pour d'autres objets) peut avoir une influence sur le travail écrit en algèbre (et pour d'autres objets), de la même façon que ceci semble le cas pour les nombres (voir e.g. Butlen, 2007) ? Beaucoup en ce sens reste à investiguer. Mais, déjà, cette variété de stratégies et de significations fait foi de belles promesses pour l'enrichissement des compréhensions algébriques par le calcul mental.

BIBLIOGRAPHIE

ARCAVI, A. (1994). Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics. *For the learning of Mathematics*, *14*(3), 24-35.

BEDNARZ, N. (2001). Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas de l'Université du Québec à Montréal. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *1*(1), 61-80.

BEDNARZ, N. & JANVIER, B. (1992). L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. *Actes du colloque international « Didactique des mathématiques et formation*

des enseignants », 21-40, 20 au 22 mai 1992, École normale supérieure de Marrakech.

BEDNARZ, N. & JANVIER, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran, et L. Lee. (Eds.) *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching,* 115-136, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

BEDNARZ, N., KIERAN, C. & LEE, L. (Eds.). (1996). *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

BOULE, F. (2008). *Le calcul mental au quotidien. Cycles 2 et 3*. Dijon, France : SCÉREN, CRDP de Bourgogne.

BRYAN, T.J. (1999). The conceptual knowledge of preservice secondary mathematics teachers: How well do they know the subject matter they will teach? *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal. Volume 1: Content Knowledge*. http://www.k-12prep.math.ttu.edu/journal/journal.shtml

BUTLEN, D. (2007). *Le calcul mental: entre sens et technique*. Presses universitaires de France-Comté: France.

BUTLEN, D. & PÉZARD, M. (1990). Calcul mental, calcul rapide. *Grand N*, *47*, 35-59.

BUTLEN, D. & PÉZARD, M. (1992). Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une experimentation du CP en CM2. *Recherches en didactique des mathématiques*, *12*, 319-68.

BUTLEN, D. & PÉZARD, M. (2000). Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège. *Repères IREM n° 41,* 5-24.

CARLOW, C.D. (1986). Critical balances and payoffs of an estimation program. In H.L. Schoen et M.J. Zweng (Eds.), *Estimation and mental computation. 1986 NCTM Yearbook,* 93-102, Reston, VA : NCTM.

DAVIS, B. (1995). Why teach mathematics? Mathematics education and enactivist theory. *For the Learning of Mathematics, 15*(2), 2-9.

DESGAGNÉ, S. (1998). La position du chercheur en recherche collaborative: illustration d'une démarche de médiation entre culture universitaire et culture scolaire. *Recherches qualitatives*, *18*, 77-105.

DOUADY, R. (1994). Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères IREM n° 15,* 25 pages.

FILLOY, E. & ROJANO, T. (1989). Solving equations : the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25.

HAZELKEMP, D.W. (1986) Components of mental multiplying. In H.L. Schoen et M.J. Zweng (Eds.), *Estimation and mental computation. 1986 NCTM Yearbook,* 116-126. Reston, VA : NCTM.

HEIRDSFIELD, A.M. & COOPER, T.J. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: case studies of flexible and inflexible computers. *Journal of Mathematical Behavior*, *23*, 443-463.

HEWITT, D. (1996). Mathematical fluency: the nature of practice and the role of subordination*, For the Learning of Mathematics*, *16*(2), 28-35.

HITT, F. (1998). Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *6*(1), 7-26.

KAHANE, J.-P. (2003). *Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques — rapport d'étape sur le calcul.* Paris, Centre national de documentation pédagogique, document disponible au http://smf4.emath.fr/en/Enseignement/CommissionKahane/

LEUTZINGER, L.P., RATHMELL, E.C. & URBATSCH, T.D. (1986). Developing estimation skills in the primary grades. In H.L. Schoen et M.J. Zweng (Eds.), *Estimation and mental computation. 1986 NCTM Yearbook,* 82-92, Reston, VA : NCTM

MARY, C. (2003). *Les hauts et les bas de la validation dans une classe de mathématiques au secondaire!* Éditions Bande Didactique: Trois-Rivières, Qc, Canada.

MATURANA, H.R (1987). Everything is said by an observer. In W.I. Thompson (Ed.) *GAIA: A way of knowing,* 65-82, Hudson, NY: Lindisfarne Press.

MATURANA, H.R (1988). Reality: The search for objectivity of the quest for a compelling argument. *Irish Journal of Psychology*, *9*(1), 25-82.

MATURANA, H.R. & VARELA, F.J. (1992). *The tree of knowledge: The biological roots of human understanding* (Rev. ed.). Boston, MA: Shambhala.

MATURANA, H.R. & VARELA, F.J. (1994). *L'arbre de la connaissance: racines biologiques de la compréhension humaine*. Addison-Wesley: Paris.

MEWBORN, D. (2003). Teaching, teachers' knowledge, and their professional development. In J. Kilpatrick, W.G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to the Principles and Standards for School Mathematics,* 45-52, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

MJER [Ministre Jeunesse Éducation Recherche]. (2008). *Les nouveaux programmes de l'école primaire. Mathématiques. Document d'accompagnement. Le calcul mental*. Direction de l'enseignement scolaire. France. 22 pages.

MURPHY, C. (2004). How do children come tu use a taught mental calculation strategy? *Educational Studies in Mathematics*, *56*, 3-18.

NATHAN, M. J. & KOEDINGER, K. R. (2000). Teachers' and researchers' beliefs about the development of algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(*2*), 168-190.

PLUNKETT, S. (1979). Decomposition and all that rot. *Mathematics in Schools*, *8*(3), 2-5.

PROULX, J. (soumis). *Mental calculations with/in a graph : operating on functions*. Article soumis pour publication.

PROULX, J. & BEDNARZ, N. (2010). Formation mathématique des enseignants du secondaire. Partie 1 : Réflexions fondées sur une analyse des recherches. *Revista de Educação Matemática e Tecnologica Ibero-americana*, *1*(1), http://emteia.gente.eti.br/index.php/emteia

RENÉ DE COTRET, S. (1999). Perspective bio-cognitive pour l'étude des relations didactiques. In G. Lemoyne et F. Conne (Eds.), *Le cognitive en didactique des mathématiques* (pp. 103-120). Montréal, Qc: Presses de l'Université de Montréal.

REYS, R.E. & NOHDA, N. avec SHIMIZU, K. & SMITH, D. (Eds.) (1994). *Computational alternatives for the 21st century: Cross-cultural perspectives from Japan and the United States*. Reston, VA: NCTM.

REZAT, S. (2011). Mental calculation stratefies for addition and subtraction in the set of rational numbers. *Proceedings of CERME-7.* Rseszow, Pologne: CERME.

SABOYA, M. (2010). *Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement du contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire*. Thèse de doctorat, Université du Québec à Montréal, Montreal, Canada.

SCHMIDT, S. & BEDNARZ, N. (1997). Raisonnements arithmétiques et algébriques dans un contexte de résolution de problèmes: Difficultés rencontrées par les futurs enseignants. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(2), 127-155.

SCHOEN, H.L. & ZWENG, M.J. (Eds.) (1986). *Estimation and mental computation. 1986 NCTM Yearbook*. Reston, VA : NCTM.

SIMMT, E. (2000). *Mathematics knowing in action: A fully embodied interpretation*. Thèse de doctorat. University of Alberta, Canada.

SUMARA, D.J. & DAVIS, B. (1997). Enlarging the space of the possible: Complexity, complicity, and action-research practices. In T.R. Carson et D.J. Sumara (Eds.), *Action research as a living practice*, 299-312, New York: Peter Lang.

THOMPSON, I. (1999). Getting your head around mental calculation, in I. Thompson (ed.), *Issues in Teaching Numeracy in Primary Schools,* 145-156, Open University Press, Buckingham.

THOMPSON, I. (2000). *Understanding and assessing children mathematical understanding through mental calculations*. Texte présenté à ICME-9. 10p.

THOMPSON, I. (2009). Mental calculation. *Mathematics Teaching*, *213*, 40-42.

THRELFALL, J. (2002). Flexible mental calculations. *Educational Studies in Mathematics, 50*, 29-47.

THRELFALL, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM*, *41*, 541-555.

TRAFTON, P.R. (1986). Teaching computational estimation : establishing an estimation mind-set. In H.L. Schoen et M.J. Zweng (Eds.), *Estimation and mental computation. 1986 NCTM Yearbook*, 16-30, Reston, VA : NCTM.

VAN DOOREN, W., VERSCHAFFEL, L. & ONGHENA, P. (2003). Pre-service teachers' preferred strategies for solving arithmetic and algebra word problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *6*(1), 27-52.

VARELA, F. J. (1996). *Invitation aux sciences cognitives*. Paris: Seuil.

VARELA, F.J. (1999). *Ethical Know-how*. Stanford: Stanford University Press.

VARELA, F.J., THOMPSON, E. & ROSCH, E. (1991). *The embodied mind: Cognitive science and human experience*. Cambridge, MA: MIT Press.

WHITMAN, B.S. (1982). Intuitive équation-solving skills. In Silvey, L & Smart, J.R. (Eds.), *Mathematics for the middle grades (5-9). 1982 NCTM Yearbook*, (p. 199-204), Reston, VA : NCTM.

JÉRÔME PROULX
Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal
Case Postale 8888, succ. Centre-Ville
Montréal, Qc
H3C 3P8 Canada
proulx.jerome@uqam.ca

BENOIT RITTAUD

UNE APPROCHE DE LA CROISSANCE EXPONENTIELLE PAR L'INTRODUCTION D'UNE VIRGULE GLISSANTE

Abstract. Introducing the slippery point to represent exponential growth. We offer an overview of the evolution of an exponential phenomenon from the kinematic model of a "slippery point." This proposal was submitted to the four experiments reported here: one with adults untrained in mathematics, a second with engineering students and two other with students in different classes of general secondary education.

Résumé. Nous proposons une présentation de l'évolution d'un phénomène exponentiel à partir du modèle cinématique d'une « virgule glissante ». Cette présentation a été soumise aux quatre expérimentations rapportées ici : une première avec un public d'adultes non formés aux mathématiques, une seconde avec des élèves-ingénieurs, et deux autres avec des élèves de différentes classes de l'enseignement secondaire général.

Mots - clés. Croissance exponentielle, notation décimale, continu, placement de virgule.

Introduction

En classe, les élèves étudient la croissance exponentielle d'abord sous sa forme séquentielle au travers des suites géométriques de raison supérieure à 1. Or les formules qui permettent le calcul du n^e terme d'une suite géométrique, ou la somme de ses n premiers termes, apparaissent comme impuissantes à dissiper le « biais exponentiel », c'est-à-dire la tendance intuitive fautive qui conduit à sous-estimer de façon assez systématique la rapidité de croissance d'un phénomène exponentiel. Le biais exponentiel a fait l'objet de diverses études, d'abord par des psychologues (Wagenaar *et al.* 1975, 1977a, 1977b, 1979, Jones 1977, 1979, 1984, Keren 1983, Kemp 1984, Mackinnon & Wearing 1991…) puis plus récemment par des économistes (Bolton *et al.* 2003, Christandl & Fetchenhauer 2009, Stango & Zinman J. 2009…). Dès le IXe siècle toutefois, et peut-être même avant, les conteurs orientaux avaient mis en évidence le phénomène, au travers de l'histoire bien connue du grain de blé placé sur la première case de l'échiquier et que l'on double sur chaque nouvelle case, pour un total dépassant les dix-huit trillions de grains.

Par ailleurs, la croissance exponentielle est l'une des rares notions mathématiques dont il soit occasionnellement fait mention dans la vie de tous les jours. Un phénomène semble notamment avoir pris de l'ampleur durant la seconde moitié du XXe siècle : l'insistance de plus en plus grande portée à la très grande rapidité de cette croissance, qui fait de celle-ci une formulation mathématique de diverses angoisses. La peur d'une explosion démographique mondiale en est l'exemple le

© 2013, IREM de STRASBOURG.

plus courant, ses origines remontant au moins au XVIIe siècle et à William Petty (Rohrbasser 1999), c'est-à-dire bien avant le célèbre *Essai sur le principe de population* (1798) de Thomas Malthus.

L'importance prise par les phénomènes exponentiels dans les représentations collectives justifie à l'évidence que l'on s'attache à permettre aux élèves, et plus largement au grand public, de mieux s'approprier l'exponentielle, moins dans ses dimensions calculatoire (intégration, calcul de la somme des premiers termes…) et théorique (réciproque de la fonction logarithme, solution de $y' = y$…) que dans sa propriété d'être à croissance « rapide ». Mieux apprécier la rapidité de croissance de l'exponentielle permettrait non seulement une appropriation plus intime de l'objet mathématique, mais également de limiter la sidération que provoque parfois le biais exponentiel, sidération qui est un frein à la réflexion rationnelle.

La première partie du présent article propose une présentation nouvelle de la croissance exponentielle, la *virgule glissante*. L'idée consiste à exprimer un phénomène exponentiel à partir d'une représentation « cinématique » de la position de la virgule au fil du temps. En s'intéressant ainsi aux nombres de chiffres plutôt qu'aux nombres eux-mêmes, l'on obtient une expression de la croissance exponentielle à partir d'un phénomène linéaire plus facile à appréhender. Le caractère « transgressif » de la notation par virgule glissante est destiné à éviter le recours à la notation exponentielle, plus théorique et donc, en un sens, moins accessible.

La seconde partie consiste en la description de quatre expérimentations réalisées sur des publics différents, qui fournissent un premier ensemble de données pour analyser dans quelle mesure la virgule glissante permet une appropriation intime de la croissance exponentielle. Il s'agissait, dans un premier temps, de cerner les compétences *a priori* des sujets sur la croissance exponentielle et à les raffermir. Les problèmes classiques du pliage répété d'une feuille de papier et du grain de blé que l'on double sur chaque nouvelle case de l'échiquier fournissaient le contexte autour duquel se sont articulées les questions posées ainsi que les discussions. Dans toutes les expériences, une première étape mettait en évidence le biais exponentiel, une seconde présentait l'outil de « virgule glissante », outil dont l'efficacité était ensuite testée.

Une dernière partie rassemble brièvement quelques conclusions générales et propose des prolongements.

1. La virgule glissante

Soit g une fonction exponentielle définie sur $\mathbf{R}^+$, que dans un premier temps nous prendrons de la forme $g(x) = b^x$, où $b > 1$ (b est la *base*). Les valeurs de g pour x entier avec $b = 2$ produisent la suite bien connue des puissances de deux, dont les premières valeurs sont 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1 024. La croissance de

plus en plus rapide de *g* rend impossible le calcul direct des termes suivants au-delà de quelques-uns. L'histoire du grain doublé sur chaque nouvelle case de l'échiquier montre les limites d'un tel calcul, que ce soit de tête, à la main ou même à la machine à calculer (laquelle, en général, ne permet pas l'affichage des dix-huit chiffres significatifs du nombre total de grains). Le calcul approché, en revanche, surmonte facilement l'obstacle à l'aide de la relation $2^{10} \approx 10^3$ (soit 1 024 ≈ 1 000), qui fournit une approximation de la réponse 2^{63} que l'on peut écrire ainsi :

$$2^{63} = 2^3 \times (2^{10})^6 \approx 8 \times 10^{18}.$$

Parce qu'elle repose de manière cruciale sur la relation $2^{10} \approx 10^3$, cette méthode présente l'inconvénient d'être limitée au cas particulier des puissances de 2. Ainsi, bien que très simple à mettre en œuvre pour un résultat excellent (la véritable valeur est voisine de $9{,}22 \times 10^{18}$), elle constitue davantage un point d'appui intermédiaire qu'une technique suffisante pour une appropriation qualitative de la croissance exponentielle en général.

Il est certes possible d'étendre la technique précédente en cherchant, une valeur de *b* étant donnée, une puissance *n* raisonnable telle que b^n soit proche d'une puissance de dix (ou, plus généralement, d'une valeur dont on sache facilement estimer les puissances). Utile pour l'enseignement du calcul mental, pour l'appropriation de l'idée d'ordre de grandeur et pour développer l'aptitude au maniement des très grands nombres, une telle technique peut être considérée comme un premier pas, qui doit ensuite se compléter par une présentation plus synthétique. Celle-ci doit notamment permettre de légitimer en quoi il est pertinent de parler de « l'exponentielle », au même titre que nous disons fréquemment, en géométrie, « le » cercle ou « le » plan plutôt qu'« un » cercle ou « un » plan. Si l'usage du singulier a pour fonction de rassembler un ensemble d'objets au sein d'une même réalité mathématique, le cas de « l'exponentielle » correspond au fait que différentes fonctions exponentielles ne diffèrent que par un changement de variable affine.

La présentation ici proposée de la croissance exponentielle est d'ordre plus qualitatif que quantitatif. Elle consiste en une représentation des nombres dans laquelle seule la virgule se déplace et est autorisée à se trouver *dans* un chiffre et non uniquement entre deux chiffres comme c'est l'usage. Strictement adossée, du point de vue mathématique, à la représentation exponentielle, cette présentation a l'avantage de rester proche de l'écriture décimale ordinaire des nombres, à cette seule originalité près, donc, d'une virgule qui se place de façon continue et non discrète au sein d'un nombre.

Prenons le problème des grains sur l'échiquier dans lequel la valeur 2^{10} est approchée par la valeur 1 000. La première case contient 1 grain, la onzième 1 000 (environ), la vingt-et-unième 1 000 000, et ainsi de suite. En ajoutant des 0 après la

virgule, ces nombres de grains se réécrivent 1,00000000, puis 1000,00000, puis 1000000,00, et ainsi de suite. Il est intuitif que le passage d'un nombre au suivant s'effectue en faisant glisser la virgule le long de l'expression 1000000000. Du point de vue mathématique, cela revient à écrire le nombre de grains sur la n-ième case sous la forme $10^{f(n)}$. L'approximation $2^{10} \approx 10^3$ conduit à $f(11) \approx 3$, puis donne $f(21) \approx 6$ et plus généralement $f(10k+1) \approx 3k$. Du point de vue cinématique, ces valeurs prises par la fonction f représentent la distance de la virgule au chiffre 1. Une interpolation linéaire très naturelle conduit alors à poser que, pour tout n, on a $f(n) \approx 3(n–1)/10$, c'est-à-dire que « la virgule glisse à la vitesse de trois 0 toutes les dix cases ». Pour des valeurs de n qui ne sont pas de la forme $10k+1$, on en tire une représentation chiffrée qui prend la forme matérielle d'un 1 suivi de suffisamment de 0, avec une virgule placée « dans » l'un des 0, comme dans le cas suivant du nombre de grains sur la seizième case :

1000,00000

Puisque $f(16) \approx 4+(1/2)$, la virgule est placée au milieu du cinquième 0, figurant ainsi la valeur $10^{4,5}$. Dans la suite, nous désignons cette notation comme une *écriture en virgule glissante*.

À moins de mentionner explicitement la position de la virgule dans le 0 (ce qui rend la notation assez lourde), la vocation première de l'écriture en virgule glissante est de négliger volontairement la valeur exacte au profit de l'ordre de grandeur. Une expression comme la précédente est utile dans un contexte de calcul approché, où il est suffisant de savoir qu'une valeur est comprise entre 10 000 et 100 000 et encombrant d'en savoir davantage.

Le caractère général de cette représentation tient à ce qu'elle demeure valable pour une suite géométrique dont la raison est quelconque : pour s'en représenter qualitativement l'évolution des termes, la seule chose à comprendre est que la virgule se déplace toujours à vitesse constante (la raison de la suite fixant la vitesse). Par ailleurs, il apparaît assez naturellement que le terme initial, sur lequel on fait « glisser » la virgule, joue un rôle secondaire dans le comportement général de la suite. En effet, pour une suite géométrique dont le premier terme n'est pas nécessairement égal à 1 (c'est-à-dire si g est de la forme $g(x) = ab^x$, avec $a > 0$), il suffit de remplacer le 1,0000000 dans lequel glisse la virgule par la valeur de $a = g(0)$. D'autre part, l'écriture en virgule glissante permet une transition naturelle entre l'étude des suites géométriques (situation discrète) et celle des fonctions exponentielles (situation continue).

Cette écriture permet aussi de comparer des nombres et d'effectuer des opérations arithmétiques, étant entendu une fois encore qu'il ne s'agit pas de travailler sur des valeurs exactes mais sur des ordres de grandeur. Voyons brièvement de quelle manière (sachant que des difficultés théoriques ont été soulevées lors de la quatrième expérience : voir section 2.4). Un nombre x étant donné dont l'écriture

décimale commence par le chiffre 1, notons $d(x)$ la distance de la virgule au 1 initial dans son écriture en virgule glissante, et $[d(x)]$ la partie entière de $d(x)$ (qui correspond au nombre de zéros « entièrement à gauche de la virgule » dans l'écriture de x en virgule glissante). Soient deux nombres r et s. Le premier peut être dit plus grand que le second si, et seulement si, $[d(r)] > [d(s)]$. En cas d'égalité, r et s sont considérés comme du même ordre de grandeur. De manière alternative (et plus générale), l'on peut préférer décider d'un écart maximal e entre $[d(r)]$ et $[d(s)]$ en-dessous duquel r et s sont réputés comme du même ordre de grandeur (sans que cela soit exclusif du fait que l'on puisse, si $[d(r)]$ et $[d(s)]$ diffèrent, de déterminer que l'un est plus grand que l'autre).

L'écriture en virgule glissante permet d'effectuer les opérations arithmétiques courantes de façon élémentaire. En particulier les expressions $r+s$ (resp. $|r–s|$) sont réputées égales à r (resp. à s) si, et seulement si, $[d(r)] > [d(s)]$ (resp. $[d(r)] < [d(s)]$). Le produit rs, quant à lui, est donné en plaçant la virgule au point correspondant à la somme $[d(r)] +[d(s)]$ (plus un petit décalage vers la droite).[1] Enfin, l'extraction de racines carrées, et plus généralement n-ièmes, est elle aussi très simple. Bien sûr, tout cela n'a rien d'inattendu : l'écriture en virgule glissante n'étant qu'une réécriture plus intuitive de la notation exponentielle, il est naturel qu'elle hérite des facilités de calcul permises par cette dernière.

2. Expérimentations

2.1. À l'université populaire de Bondy (« Expérimentation de Bondy »)

L'université populaire Averroès est une initiative de la municipalité de Bondy (Seine - Saint-Denis, France) consistant en des cycles annuels de conférences. L'un de ces cycles, présenté par l'auteur depuis quatre ans, traite de mathématiques. Il réunit, un jeudi sur deux de 18h30 à 20h30, un public qui oscille entre dix et trente personnes selon les séances. Plusieurs d'entre elles sont assidues depuis les débuts de l'Université populaire. Le public est fait d'adultes, dont une grosse proportion de retraités, et dont seule une faible minorité à suivi une filière scientifique lors de sa scolarité. Bien que le rythme des conférences soit relativement soutenu, l'objectif n'y est pas de faire un cours de mathématiques, mais des présentations générales de différents sujets. Les participants ne viennent pas pour apprendre mais pour découvrir. Il n'y a pas de devoir à faire d'une séance sur l'autre, ni d'évaluation d'aucune sorte. En principe, les personnes intéressées s'inscrivent en début d'année scolaire et s'engagent à assister à toutes les séances. En pratique, les choses sont un plus erratiques, mais les conférences comptent tout de même un noyau important de fidèles.

---

[1] Comme me l'a fait remarquer Pierre-Alain Chérix (université de Genève), ces opérations correspondent à celles de la *géométrie tropicale* (Itenberg, 2008), laquelle reçoit ainsi une interprétation inattendue de géométrie des ordres de grandeur.

L'expérimentation a été menée à l'occasion de l'une des dernières séances de la troisième année du cycle, le jeudi 24 mai 2012. Les sujets n'étaient pas prévenus à l'avance, le seul indice à leur disposition sur le sujet du jour était l'intitulé de la conférence (publié en 2011 avec l'ensemble des titres des autres exposés) : « Les logarithmes ou comment multiplier en additionnant ». Le mot « logarithme » n'a toutefois pas eu l'occasion d'être prononcé durant la séance, faute de temps. Quatorze personnes étaient présentes, toutes âgées de plus de 50 ans. Quatre d'entre elles ont une formation scientifique supérieure, quatre autres ont l'équivalent d'un baccalauréat scientifique. Aucun sujet n'a ou n'a eu de profession liée aux mathématiques, sauf peut-être, de loin, deux ou trois d'entre eux (chimie, pharmacologie).

Toutes les personnes présentes se sont prêtées de bonne grâce à l'exercice. L'attitude des sujets étaient celle de personnes désireuses d'apprendre et de progresser. Une grosse proportion de sujets n'a donc pas hésité à proposer des réponses mais aussi à poser des questions ou à exprimer leur incompréhension, leurs hésitations ou leur sentiment sur tel ou tel point. Il s'agit là d'un élément qui distingue particulièrement cette expérience, raison pour laquelle il s'agit de celle que nous avons choisi de détailler de manière toute particulière.

Dans la mesure où les sujets n'étaient ni des élèves ni des étudiants mais seulement des auditeurs d'un cycle de conférences, il n'était guère envisageable de leur proposer une feuille d'exercices à rédiger durant la séance : cela ne leur aurait à l'évidence pas convenu et plusieurs d'entre eux se seraient assez vite découragés et auraient regretté d'être venus. C'est pourquoi, s'il leur était bien demandé de répondre sur une feuille à des questions, une seule question était posée à la fois, rédigée sur un petit tableau blanc et à laquelle ils avaient quelques minutes pour répondre. Durant ces instants de réflexion et de rédaction, il leur était demandé de ne pas communiquer entre eux. Ensuite, la réponse à chaque question était donnée avec tous les détails et explications nécessaires, parfois assortis de commentaires plus généraux qui permettaient de faire en sorte que la séance ne se distingue pas trop d'une conférence ordinaire du cycle.

La consigne était de n'écrire sur sa feuille que ses propres réponses et non les explications données ensuite. Malheureusement, bien qu'il ait été expliqué d'emblée que les feuilles seraient anonymes, il est manifeste que plusieurs sujets ont reporté sur la leur les réponses données par l'expérimentateur. L'analyse des copies est donc difficile, un inconvénient heureusement compensé par le fait que la discussion à l'occasion de chaque explication était très libre et que certaines réactions orales ont ainsi fourni des renseignements éclairants sur l'état d'esprit et sur la compréhension des sujets.

La première question est ainsi formulée :
1)a) Une feuille (épaisseur 1 mm) est pliée en deux 10 fois. Quelle est l'épaisseur atteinte ?

En même temps que la question est posée, une feuille est pliée pour illustrer le propos. La moitié des sujets entament alors leurs recherches en commençant par effectuer d'eux-mêmes une série de pliages. Environ la moitié des sujets donnent la bonne réponse. Certains écrivent l'expression 2^{10}, tâchant parfois d'en tirer une valeur plus explicite, sans toujours y parvenir.

La bonne réponse est ensuite présentée en donnant la liste des premières puissances de deux et en comptant le nombre de pliages avec les doigts. Les sujets scandent la liste en chœur, tous la connaissant visiblement très bien. Le résultat est écrit au tableau sous la forme 1 024 mm, puis 1,024 m, et enfin approché à 1 m (approximation écrite sur le tableau).

La question 1)a), qui devait n'être qu'une mise en condition, a parfois été la source de problèmes qui se sont prolongés, liés aux unités de longueur et à leurs conversions. Un sujet qui avait fait l'expérience de quelques pliages a ainsi déclaré « incroyable » la valeur obtenue, avant de réaliser que l'énoncé proposait en fait une épaisseur irréaliste pour la feuille.

La question suivante a révélé des éléments plus profonds :
1)b) Et si on plie 50 fois ?

- *10 m ?*
- *entre 10 m et 10 km ?*
- *entre 10 km et 100 km ?*
- *plus de 100 km ?*

Au moment de la rédaction de la question, il est bien précisé que le cadre était celui d'une approximation et non d'une valeur exacte ; en pratique toutefois, les sujets ne tentent pas d'utiliser la valeur approchée donnée juste auparavant de 1 m pour les dix premiers pliages. L'énoncé 1)b) provoque aussi la question : « qu'est-ce qu'un kilomètre par rapport à un millimètre ? », les questions de conversion continuant ainsi à obscurcir la situation pour certains sujets.

Un événement remarquable au moment de l'écriture de la question au tableau est l'éclat de rire général provoqué par la seconde proposition (« entre 10 m et 10 km »), rire causé (comme une discussion le révélera par la suite) par le fait que 10 km apparaît aux sujets comme une longueur déraisonnablement grande pour le problème posé.

Les copies ne dégagent pas vraiment de majorité, seuls les sujets disposant d'une formation scientifique solide proposant une bonne réponse.

La présentation de la solution commence par une réinterprétation du résultat de la question 1)a) : plier dix fois est à peu près la même chose que multiplier par mille. Des sujets en déduisent à tort que plier 50 fois revient à peu près à multiplier par 5 000. En-dehors de cette erreur classique, un point d'achoppement est que, pour obtenir la valeur approchée 1 000 000 (= 1 000 × 1 000), le 1 000 obtenu lors de la question 1)a) n'est pas seulement une quantité de papier mais un facteur multiplicatif, valable quel que soit le nombre de morceaux de feuilles considéré.

La réponse est présentée, comme d'ailleurs toutes les suivantes, sans le recours à la notation exponentielle, c'est-à-dire sous la forme 1 000 000 000 000 000. Des cris de surprise accompagnent cette écriture. Tout le monde s'étonne de l'immensité du résultat, qui ne part pourtant que de trois valeurs numériques tout à faits insignifiantes (1 feuille, que l'on plie 50 fois en 2). Une question, qui reviendra ensuite plusieurs fois lors de l'écriture d'autres valeurs très grandes, est : « comment appelle-t-on ce nombre ? » (*cf. infra)*.

La question 2)a) n'est pas écrite au tableau, mais seulement posée oralement. Elle consiste à demander si les sujets connaissent l'histoire du légendaire ministre Sessa qui, pour distraire son roi, inventa le jeu d'échecs et demanda pour récompense que lui fût donné un grain de blé pour la première case de l'échiquier, deux pour la deuxième, quatre pour la troisième, et ainsi de suite en doublant les grains pour chaque nouvelle case. Presque la moitié des sujets répond par l'affirmative, précisant pour la plupart « *depuis très longtemps* ». Deux d'entre eux se souviennent même des circonstances où ils l'ont apprise : « *entendue dans un doc[umentaire] » pour l'un, « vers 13 ans dans un cours de math[ématique]s sur les puissances* » pour l'autre.

Après le rappel complet de l'histoire est proposée la question suivante :
2)b) Combien de grains (approximativement) sur la 64e case ?
(Pour être plus fidèle à l'histoire, il eut plutôt fallu poser la question de la somme des grains. Toutefois, cela eut ajouté une difficulté supplémentaire quelque peu hors-sujet.)

L'un des sujets demande : « *Au grain près ?* », provoquant les rires. Quelqu'un ajoute alors : « *On va faire comme 1 024* ! », sous-entendant l'idée d'une approximation. Enfin, malgré le changement complet de contexte, l'un des sujets reste encore un temps bloqué par la question de la conversion entre mètres et kilomètres.

L'analyse des copies dégage trois grands types de réponses, plusieurs types pouvant apparaître au sein d'une même copie. Le premier type, qui s'observe aussi dans les réponses aux questions 1)a) et 1)b) et concerne ici 5 copies, est celui des réponses qui utilisent une notation exponentielle, parfois comme introduction à un calcul, parfois comme un refuge devant une valeur trop difficile à calculer. Deux

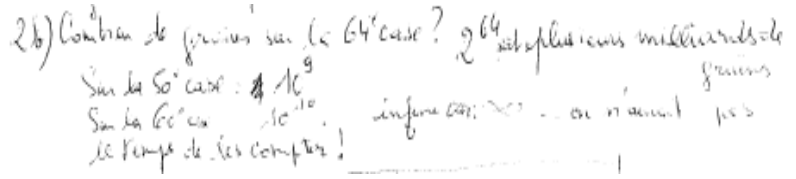
copies donnent la réponse correcte 2^{63}, une autre propose 2^{64}, une quatrième 2^n, et une dernière un étrange 10^{1064} (qui vient juste après une première réponse barrée : 1000^{64} ; peut-être le sujet rôde-t-il autour de l'expression correcte $1000^{63/10}$). Quatre des cinq sujets, visiblement gênés par leur réponse qu'ils estiment sans doute incomplète, tentent de la prolonger. Ainsi, une copie contient une écriture de toute la suite des puissances de 2 jusqu'à 2^{10} (bien que déjà donnée en 1)a)), sous la forme $n \;\; 2^n$; elle passe ensuite directement de 2^{10} à 2^{20} (puis à 2^{30}, 2^{40}, etc. jusqu'à 2^{60}) en ajoutant un point d'exclamation pour indiquer le changement de rythme ; pour ces dernières puissances de 2, elle propose les valeurs 256×256 (pour 2^{20}), puis indique simplement « ×256 » à chaque nouvelle ligne, dans ce qui est à l'évidence une erreur d'indice dans le choix du facteur à appliquer. Dans un coin, un calcul à la main du produit 256×256 (avec le résultat incorrect 65 512 au lieu de 650536) apparaît, sans être réinvesti.

La difficulté devant le calcul est explicitée sur une copie qui n'utilise pas de notation exponentielle mais donne la liste des premières puissances de 2 jusqu'à 2 048, suivi de « *Je ne vais pas faire t[out] le calcul comment trouver l'expression ((1×2)×2…) 64 fois ? non, pour le coup, ce n'est pas assez* ! »

Le second type de réponses apparaît sur sept copies (dont deux qui montrent aussi le type précédent), qui tentent de réutiliser l'idée donnée en 1)b) (au point que l'une parle de plis). Parmi celles qui aboutissent à un résultat détaillé, deux réutilisent l'évaluation de 2^{50} déjà connue, trois repartent de l'approximation de 2^{10} par mille pour aller de dix en dix jusqu'à soixante. Une copie, atteignant 8×10^{18}, choisit d'arrondir à 10^{19}. La copie la plus aboutie sur cette question donne le calcul $2^{63} = 2^{50}\times2^{13} = 2^{50}\times2^{10}\times2^3$, réutilise le résultat de 1)b) pour évaluer 2^{50}, signale sous 2^{10} « 1000 fois », mentionne que $2^3 = 8$, pour finalement donner la réponse approchée attendue : « 8 millions de millions de millions ». Le résultat de cette copie est d'autant plus remarquable que la réponse de son auteur à la question 1)b), si elle montrait une bonne connaissance des règles sur les puissances (« $2^{50} = 2^{10}\times2^{10}\times2^{10}\times2^{10}\times2^{10}$ »), n'avait conclu que par une piètre approximation : « 32 mètres ~ ». (L'auteur est un ingénieur de 64 ans, dont « la profession en période active [a été] très éloignée des math[ématiques]») À une faute de calcul près (qui donne quatre trillions au lieu de huit), une autre copie est presque aussi remarquable, de la part d'un sujet n'ayant aucune formation scientifique.

Les réponses du dernier type sont celles qui tâchent d'exprimer une idée générale de l'immensité, comme : « des millions donc des tonnes de riz. Les réserves du sultan n'y ont pas suffi ». Une autre copie propose « des milliards de milliards », avant de se raviser pour barrer les deux premiers mots et les remplacer par « plusieurs », puis se raviser à nouveau et réécrire sa première proposition. Une copie propose la réponse reproduite ci-dessous, jolie synthèse des trois types de réponses, qui se conclut sur l'affirmation de l'infinité des grains sur la dernière

case :



« 2)b) Combien de grains sur la 64e case ? 2^{64} est plusieurs milliards de grains. Sur la 50e case : 10^9. Sur la 60e case : 10^{10}. infini car : « on n'aurait pas le temps de les compter ! »

Lors de la présentation de la réponse approchée, écrite sous la forme 8 000 000 000 000 000 000, certains sujets manifestent leur connaissance des puissances de dix en proposant d'écrire plutôt 8×10^{18}. Surtout, tout comme pour la réponse à la question 1)b), plusieurs sujets se montrent très demandeurs du nom de ce nombre ; quelques instants sont donc consacrés aux noms des grands nombres (selon l'échelle longue). Une discussion s'engage également sur la manière d'appréhender les grands nombres, l'un des sujets expliquant qu'il les considère comme « effrayants », de même que les très petits nombres, au motif qu'ils sont hors du champ de ce qu'on peut atteindre.

La question suivante n'est pas traitée par écrit, mais seulement au travers d'une discussion, à partir d'un support écrit au tableau :

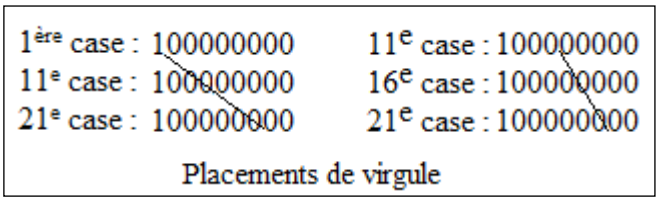
1ère case :	1,00000000
11e case :	1000,00000
21e case :	1000000,00

Ce qui est demandé aux sujets est de décrire l'évolution de la valeur (approchée) du nombre de grains au fil des cases, en s'inspirant de ce qui s'observe sur les valeurs particulières indiquées. L'idée de « virgule glissante » ne s'est pas imposée d'elle-même ; après quelques instants de discussion, une question plus quantitative porte sur l'évaluation de la quantité de grains sur la 16e case, les données du tableau étant complétées ainsi :

1ère case :	1,00000000
11e case :	1000,00000
16e case :	
21e case :	1000000,00

Les sujets tournent autour de l'objectif pendant un certain temps, certains l'atteignant même probablement l'espace d'un instant avant de se censurer (« Mais on ne peut pas couper un 0 en deux ! »). L'un des sujets propose alors, idée décisive, de tracer la diagonale menant de la virgule de la première ligne à celle de la dernière, observant que cette diagonale passe par la virgule de la ligne

intermédiaire (11e case). Avec un peu d'aide, il franchit finalement le pas : pour la 16e case aussi, on met la virgule « sur la diagonale », et donc au milieu d'un 0.



Placements de virgule

Le présentateur explique que cette notation est avant tout destinée à rendre compte d'ordres de grandeur et non de valeurs exactes. Au fil de la discussion, l'expression

$$10000{,}00000$$

dans laquelle la virgule est « au milieu » du cinquième 0 est, selon une faute de raisonnement classique, interprétée comme la valeur 50 000. Un cas particulier de multiplication de deux puissances (entières) de dix fournit le moyen de rectifier cette erreur en justifiant l'égalité

$$10{,}=\sqrt{10}$$

après laquelle les sujets montreront une bonne anticipation collective de ce que

$$10{,}$$

(avec la virgule placée « au tiers du 0 ») est égal à $\sqrt[3]{10}$.

Le point central que révèle la discussion est la surprise de plusieurs sujets devant cette notation originale (« C'est autorisé, comme écriture ? »). La confiance qui s'est installée entre eux et l'expérimentateur au fil des années n'est pas de trop pour les convaincre du bien-fondé de telles expressions. Certains estiment que $10^{4,5}$ est plus légitime que

$$10000{,}00000$$

et il faut consacrer un moment à expliquer en quoi ces notations procèdent toutes deux de conventions.

La question suivante est destinée à se familiariser avec cette nouvelle notation.
3) Ordonner les nombres suivants par ordre croissant.

$$a=100{,}000 \qquad b=100{,}00$$
$$c=100{,}0 \qquad d=10{,}0000$$
$$e=1000 \qquad f=100{,}$$
$$g=1000{,} \qquad h=100{,}0$$

Il est précisé oralement que les virgules de *a* et de *c* sont « entre les 0 », que celle de *b* est « plutôt à droite », celle de *d* « plutôt à gauche », et celles de *f* et de *h* « à la verticale l'une de l'autre ». Une bonne majorité de réponses sont correctes, le seul point litigieux étant, pour certains sujets, la question des 0 superflus, qui crée

parfois une hésitation sur le classement entre valeurs en réalité égales (*a* et *c*, *e* et *g*, *f* et *h*). Une copie exprime explicitement des doutes : « Pour moi, ce qu'il y a après la virgule ne compte pas ! Ai-je bien compris 100,000=100,0 ? » La question ne suscite pas d'autres commentaires théoriques, comme ce sera le cas, d'ailleurs, pour les autres expériences, à l'exception de la quatrième (*cf. infra*, où des détails sont présentés sur les problèmes posés par cette question 3)).

Au moment de l'annonce de la question suivante, l'un des sujets s'exclame : « *Ouh ! J'abandonne* ! ». Le ton est badin et le sourire de rigueur mais le propos exprime sans doute une certaine fatigue, fort compréhensible après plus d'une heure de travail et l'heure tardive (19 heures 30 passées). La bonne volonté collective permettra tout de même de traiter la question, qui sera la dernière (et suivie d'un exposé plus général sur les motivations de l'expérience). Elle constitue une incursion dans le domaine des opérations :
4) Multiplier :

$$10{,}0 \times 1000{,}0$$

Il est précisé par écrit que la première virgule est « à la moitié » et la seconde « aux trois quarts ». L'explication donnée précédemment de l'égalité

$$10{,}0 = \sqrt{10}$$

avait déjà permis d'exposer le principe général de la multiplication (par addition des 0 situés avant les virgules).

Quelques copies écrivent sans problème la réponse en virgule glissante, quelques autres oublient un 0 avant la virgule, n'ayant peut-être ajouté que les nombres de 0 entièrement à gauche de la virgule et donc placé celle-ci dans le quatrième 0 au lieu du cinquième. D'autres copies encore choisissent de revenir au formalisme des racines carrées, l'une proposant notamment la forme « 10 000 □ $^{4}\sqrt{10}$ », une autre réécrivant l'expression de l'énoncé sous la forme « 10 □ $\sqrt{10}$ □ 100 □ $^{?}\sqrt{10}$ », débouchant après calculs sur le résultat

$$10000 \times 10{,}0$$

2.2. Avec des élèves ingénieurs (« Expérimentation de Villetaneuse »)

La seconde expérimentation s'est tenue dans le cadre d'un cours d'histoire des sciences destiné aux élèves de l'école d'ingénieurs de l'Institut Galilée (Université Paris-13, Villetaneuse, Seine - Saint-Denis). Ce cours était facultatif, sans examen final et donc assez informel d'une manière générale. Il s'est tenu au second semestre, le mercredi de 12h30 à 13h30. L'expérimentation a été menée lors de la dernière séance, le 30 mai 2012, avec sept étudiants de première année de la filière Énergétique, qui n'avaient pas été prévenus de l'expérience au préalable. Tous disposaient d'un bagage scientifique et mathématique de niveau universitaire.

Pour des questions de temps, les questions 3 et 4 n'ont pas été posées mais une question a été ajoutée après 2)b) :

2)c) Même question si les grains sont triplés.

Bien qu'apparemment intéressés par l'expérience, les sujets se sont montrés plus réservés dans leur participation que ceux de l'expérimentation de Bondy. D'autre part, eux aussi semblent n'avoir pas entièrement suivi la consigne qui était de n'écrire sur leur copie que ce qui venait d'eux et non des réponses données par l'expérimentateur. Notons que, bien qu'aucune consigne n'ait été donnée à ce propos, aucun des sujets n'a voulu utiliser une calculatrice, à aucun moment.

La question 1)a) n'obtient la réponse 1 024 mm que sur une seule copie. Quatre autres font figurer l'expression 2^{10} et deux autres commettent des erreurs de calcul (une copie ne répond pas, peut-être s'agit-il de celle d'un étudiant arrivé un peu en retard). Deux copies utilisent des expressions littérales pour l'épaisseur au lieu de s'en tenir à la valeur numérique proposée. Certaines copies indiquent l'épaisseur au fil des plis, parfois en s'arrêtant en cours de route pour finir par écrire 2^{10}, peut-être dans une démarche visant à déterminer le bon exposant à considérer. Contrairement à la première expérience, cette question du juste exposant a été considérée avec une certaine attention par le groupe.

Lors de la discussion, la question du caractère irréaliste de la réponse, provenant en fait du choix d'une épaisseur anormalement grande, se pose à nouveau mais de façon brève et sans conséquence sur la suite. La question de l'exposant à attribuer au 2 est aussi évoquée (9 ou 10 ?).

La réponse à la question 1)b) est « plus de 100 km » pour cinq copies, « entre 10 m et 10 km » pour les deux autres. Contrairement à la première expérience, il n'y a pas eu de discussion particulière sur cette question car, au vu du niveau mathématique des sujets, une telle discussion aurait fait doublon avec 2)b).

Deux sujets connaissent l'histoire des grains sur l'échiquier, les deux l'ayant appris durant un cours de mathématiques (à l'université pour l'un, l'autre indiquant : « *Depuis la 4ème. Exercice de math[ématiques] sur les puissance* »).

À la question 2)b), deux copies se contentent de la réponse 2^{63}, après s'être focalisées sur la recherche du bon exposant, sans tenir compte de la consigne de donner une réponse approchée. Un doute existe sur une troisième, dont l'auteur a probablement recopié des propos discutés ensuite. Une copie propose 2^{64} puis tente d'obtenir une valeur explicite à l'aide d'un algorithme d'exponentiation rapide (« $2^{64} = (2^8)^8 =$ [illisible] $= (93612)^4$ ») sans parvenir au but. Un sujet écrit 2^{64}, expression qu'il approche ensuite par 100 000 000 sans explication. Une sixième copie propose 2^{63} puis ajoute « plus de 1 000 000 grains de blé », des mots ultérieurement rayés et suivis d'un début de résolution approchée : « 2^{10} 1000 2^{20} 1 000 000 », qui s'arrête là peut-être par manque de temps. La dernière copie, enfin, écrit « $2^{63} = 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 10^{10} \times 10^{10} \times 10^{10} \times 8$ » ; le glissement des 2^{10} aux 10^{10} n'altère pas la suite du calcul qui débouche, *via* l'approximation « $2^{10} = 1024$ »,

sur la valeur 10^{20} « = 100 milliards de milliards ». Le sujet donnera ensuite une explication orale de cette valeur 10^{20} : étant parvenu à 8×10^{18}, il a tout d'abord arrondi à 10^{19} avant de décider de redresser cette valeur à 10^{20} pour compenser la sous-évaluation de 2^{10} par 1 000.

La question 2)c) a donné lieu à des réponses variées. Toutes ont tenté de réinvestir l'idée institutionnalisée lors de la discussion de la question 2)b) mais plusieurs sont restés prisonniers de l'exposant 10 du cas antérieur et ont ramené 3^{63} à $3^3 \times (3^{10})^6$. Une faute de calcul a permis à un sujet, ayant obtenu 17 223 pour 3^{10} (au lieu de 59 049), d'effectuer l'approximation $3^{10} \times 2 \times 10^4$ à partir de laquelle il atteint 3^{60} de façon cohérente avec l'erreur initiale. Une copie écrit « $3^{63} = (3^9)^7$ » sans parvenir à aller plus loin. Une copie (la même que celle ayant donné 10^{20} comme réponse à la question 2)b)) approche 3^7 (= 2187) par 2000 et en déduit que $3^{63} = (3^7)^9$ est approché par 2000^9 soit 512×10^{27} (arrondi ensuite à 10^{28}). Une copie, heureusement isolée, multiplie par 3/2 la valeur 8×10^{19} du doublement des grains !

2.3. Avec des élèves du secondaire en cursus mathématique ordinaire (« Première expérimentation de Genève »)

Cette expérimentation a été menée le 29 janvier 2013 au collège Rousseau de Genève (Suisse). Elle a rassemblé des élèves de Deuxième (l'équivalent de la Seconde en France), âgés normalement de 16 ans. Leur cursus mathématique est ordinaire (2e MA 1) à la seule différence que les cours de mathématiques leur sont donnés en anglais. Puisque les élèves comme l'expérimentateur étaient francophones, il a néanmoins été décidé que l'expérience aurait lieu en français pour éviter tout parasitage par des problèmes de langue.

L'expérimentation a rassemblé 19 élèves (dont 17 filles) ainsi que leur enseignant, Peter King, qui n'est pas intervenu (et a fort obligeamment permis que l'expérimentation se déroule durant l'une de ses séances de cours, ce dont je le remercie chaleureusement ici). Les élèves n'avaient pas été prévenus de l'expérience. Celle-ci a duré deux fois 45 minutes, avec une pause intermédiaire trop brève (5 minutes) pour avoir une quelconque incidence. L'expérimentation étant arrivée à son terme au bout d'environ 1h15, le dernier quart d'heure a été consacré à un petit exposé sur l'histoire de la perception de l'exponentielle chez différents auteurs des XVIIIe et XIXe siècles.

Pour éviter les problèmes de vraisemblance rencontrés lors des deux premières expérimentations, la question 1)a) a été cette fois formulée de la manière suivante :
1)a) Une feuille (épaisseur 0,1 mm) est pliée en deux 10 fois. Quelle est l'épaisseur totale ?
Les questions suivantes, elles, n'ont pas été modifiées par rapport à l'expérience de Bondy, aux différences près que la question 1)c) a été supprimée et que deux questions supplémentaires ont été ajoutées en fin de séance (*cf. infra*).

Contrairement à l'expérience de Bondy, la question 1)a) n'a pas été illustrée par le pliage d'une feuille (simple oubli de l'expérimentateur). Le fait d'avoir affaire à des dixièmes de millimètres n'a posé aucun problème ; il est donc clair que cette autre formulation, plus vraisemblable, est meilleure que l'autre à tout point de vue.

Pour répondre à la question, certains élèves utilisent leur calculatrice tandis que d'autres se lancent dans le pliage d'une feuille. Une nette majorité de copies (au moins 13) répond à la question en donnant l'épaisseur atteinte au bout d'un pliage, puis de deux, de trois, et ainsi de suite jusqu'à dix pliages. Deux d'entre elles tentent aussi une autre méthode mais en viennent finalement aux doublements successifs, pour des raisons différentes : la première y vient après avoir proposé d'abord le calcul « (0,1×2)10 » qui donne 2 mm, résultat jugé « *pas très vraisemblable (t[ro]p fin)* » ; la seconde copie, elle, indique : « *Peut-être qu'on aurait pu faire* $0{,}1^{10}$*, mais comme la calculatrice ne me donnait pas le résultat sous forme de chiffre à virgule (elle le laissait sous la forme d'une puissance), j'ai préféré faire toutes les étapes*. » Une prudence qui a involontairement conduit à éviter une grossière erreur… Quoi qu'il en soit, la plupart des copies obtiennent la bonne réponse.

Aussi bien à l'oral qu'à l'écrit, la question 1)a) suscite des doutes sur la faisabilité de l'expérience : « *L'épaisseur totale sera de 102,4 mm (si on arrive à la plier 10 fois…)* », indique une copie. Mais « *est-ce possible de pli[er] une feuille dix fois ?* » demande une autre. « [*i]l est possible que ce soit impossible* » lui répond sans le savoir une troisième, qui précise qu'« *il y a aussi la place que prend l'air*. » La deuxième copie précédente reviendra sur le problème lors de la question 1)b), en indiquant « *entre 10 m et 10 km mais c'est impossible de pli[er] une feuille A4 50 fois… c'est un peu abstrait. C'est plus large que long…* »

Lors de la résolution orale, l'approximation de 2^{10} par 1 000 est spontanément proposée par plusieurs élèves. En revanche, le listage de la suite des puissances de 2 est problématique, peu d'élèves semblant en connaître les premiers termes.

Les réponses à la question 1)b) (sur l'ordre de grandeur atteint en pliant 50 fois) se partagent plus ou moins équitablement entre les quatre possibilités offertes : deux choisissent 10 m, six entre 10 m et 10 km, deux entre 10 km et 100 km, cinq plus de 100 km (trois copies donnent une expression du genre $2^{50}\times0{,}1$ sans en déduire d'ordre de grandeur). Quant à la question 2)a) sur la légende des grains sur l'échiquier, cinq copies indiquent la connaître, deux autres sont incertaines. Pour la plupart, l'histoire évoque des souvenirs de travail mathématique, principalement scolaire : « *On y a eu droit en cours de math[ématiques] lorsque on f[ai]sait des exerci[c]es sur les puissances* », explique une copie. Deux élèves indiquent que c'est leur père qui la leur a raconté et une autre évoque un roman.

Lors de la discussion qui suit la question 1)b) et accompagne les réflexions sur le

nombre de grains de la 16e case qui préludent à l'introduction de la virgule glissante, les élèves semblent intégrer sans problème le fait que la valeur approchée 1 000 est non seulement un nombre de grains (le nombre de grains sur la 11e case et non sur la 10e : ce point-là, en revanche, pose quelques soucis, heureusement mineurs) mais aussi un facteur multiplicatif (le facteur qui s'applique au nombre de grains lorsqu'on avance de 10 cases). « *C'est si facile* ? » s'étonne même une élève.

Pour l'expression du nombre de grains de la 16e case, des élèves proposent pertinemment la valeur 32 000. Avec l'interdiction supplémentaire d'utiliser d'autres chiffres que des 1 et des 0, certains tentent d'expulser le 3 et le 2 en les mettant en facteur (32×1000,00000). Lorsque les élèves renoncent à ce type d'expédients, l'idée leur vient de « *faire une moitié de multiplication par mille* ». La valeur 500 est citée mais brièvement car le groupe sent bien que le problème est plus profond.

Les élèves ne parviennent pas d'eux-mêmes à l'écriture en virgule glissante, en revanche l'idée est très bien acceptée. Aucun problème psychologique n'apparaît, aucune contestation ne se manifeste. Interrogés par l'expérimentateur, les élèves insistent même sur le caractère raisonnable de la représentation. « *Tant qu'on sait de quoi on parle…* », considère une élève avec confiance. Une autre va plus loin et explique que l'écriture « *donne un ordre de grandeur : 10 000* ». L'expérimentateur affine cette dernière proposition en parlant plutôt d'encadrement entre 10 000 et 100 000.

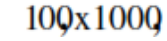
Les réponses à la question 3) confortent la légitimité de cette assurance collective. Toutes les copies ordonnent correctement les nombres proposés (sauf deux pour qui on a $f < h < b$, $c < a$ et $e < g$; dans ces deux cas sans doute, les 0 placés après la virgule ont été source de confusion). Une copie s'inquiète même de la facilité de la question : « *[J]e sens qu'il y a un piège avec les nombres après les virgules… ça m'a l'air trop simple* ». La question 4), en revanche, révèle beaucoup plus de difficultés. Sept copies proposent la bonne réponse. Une autre, prudemment, utilise des encadrements de facteurs pour proposer finalement : « *en gros, réponse entre 1000 à 100'000…* »[2]. Les autres éprouvent des difficultés dans la manière de compter les 0 qui doivent venir avant la virgule (plusieurs copies n'en mettent que trois) ou bien tentent d'en revenir à la numération ordinaire, typiquement en approchant le premier facteur par 50 et le second par 750.

S'agissant de cette question 4), deux copies méritent une attention particulière pour

[2] Rappelons qu'en Suisse les grands nombres sont notés avec des apostrophes séparant chaque groupe de trois chiffres, comme par exemple dans 100'000 pour écrire 100 000. Une copie a été gênée par ce point, de façon localisée et sans incidence grave, à la question 3).

leur créativité. La première commence par faire le calcul « 100×1000 = 10000 » puis ajoute « *et avec 2/4+1/4 virgules en moins* » pour écrire le résultat correct avec la virgule placée « *aux 1 quarts* ». Soustraire des portions de 0 en trop plutôt qu'ajouter les 0 à gauche des virgules est une possibilité à laquelle l'auteur n'avait pas songé. Une seconde copie, elle, colorie en bleu l'intérieur des trois 0 à gauche des virgules des deux facteurs, en violet la moitié de 0 du facteur de gauche, également en violet une moitié du 0 sur la virgule du facteur de droite et enfin, en orange le quart de ce même 0 qui reste à gauche de la virgule. La réponse proposée, correcte, est présentée sous la forme d'un 1 suivi de trois 0 coloriés en bleu, d'un 0 colorié en violet et d'un 0 colorié en orange dans son quart de gauche, la virgule étant placée immédiatement après ce dernier coloriage. Un commentaire ajouté (en vert) au-dessus du 0 non colorié du facteur de gauche (« *je ne sais pas où le mettre…* », la partie droite de ce 0 étant cerclée de vert) semblant néanmoins indiquer un certain manque d'assurance. L'élève a-t-elle eu du mal à identifier la place, dans sa réponse finale, de la partie non coloriée de ce 0 ?

Les deux questions ajoutées en fin de séance ont été celles-ci :
5) Ajouter



6) Calculer la racine carrée de 1000.

La question 5) n'est traitée correctement par aucun élève. La plupart d'entre eux tente de poser une addition selon la méthode usuelle, en ignorant le problème du placement des virgules à la verticale l'une de l'autre. Des réponses comme 1100 sont données, avec une virgule placée selon une règle improvisée. La discussion, où la réponse est proposée à partir de considérations sur les ordres de grandeur et l'argument « grand plus petit égale grand », n'emporte que faiblement la conviction. Nous touchons visiblement là aux limites des compétences des élèves sur la notion d'ordre de grandeur et des développements plus longs et des exercices complémentaires auraient à l'évidence été nécessaires.

La question 6) a davantage de succès, avec un majorité de copies (12) qui propose la réponse attendue d'une virgule « dans » le second 0. Le fait que c'est « à la moitié » est régulièrement signalé, même si deux copies placent explicitement la virgule au premier tiers.

2.4. Avec des élèves du secondaire en cursus mathématique de spécialité (« Seconde expérimentation de Genève »)

Cette quatrième expérimentation s'est déroulée le même jour que la précédente, juste après et dans les mêmes conditions générales, avec cette fois 14 élèves (dont 7 filles). La seule différence initiale était que les élèves suivaient un cursus de spécialité mathématique. Pour cette raison, nous reprenons les résultats de cette expérimentation principalement dans l'objectif de la comparer avec la précédente.

La réponse à la question 1)a) ne pose pas de problème et ni cette question ni les suivantes ne suscitent de question sur la vraisemblance de 10 ou 50 pliages. La question 1)b), elle, montre une différence importante avec l'expérimentation précédente. En effet, lors de l'écriture au tableau des quatre possibilités proposées, de petits rires étouffés se font entendre et vont crescendo au fil de la rédaction de la question. Les premiers pouffements se font entendre dès la proposition « entre 10 m et 10 km », une épaisseur de 10 km semblant déjà visiblement excessive à certains élèves.

Les copies portent pourtant un message assez différent. Deux copies seulement proposent « entre 10 m et 10 km », cinq proposent « entre 10 km et 100 km » et les sept autres vont au-delà des 100 km. De nombreuses copies tentent un calcul, exact ou approché, pas toujours valide (l'une d'elles atteint la valeur de… 102 km, ce qui lui permet de répondre juste à la question !). Cinq copies mentionnent explicitement leur « intuition », trois autres éprouvent le besoin d'expliquer qu'ils ne font que donner un avis (« je crois », « Mon chiffre choisi me semble probable », « à mon avis »), un phénomène qui apparaît moins dans l'expérimentation précédente (au cours de laquelle les élèves avaient par ailleurs peu tenté de calculer).

La connaissance de la légende des grains sur l'échiquier est proportionnellement importante, avec sept copies qui répondent oui à la question 2)a). Le contexte scolaire est moins souvent cité, au profit du contexte familial. Une copie indique une bande dessinée[3], une autre mentionne un cours de biologie illustrant « la croissance exponentielle des bactéries » à l'aide de « l'exercice avec la feuille que l'on plie ».

La discussion destinée à présenter l'écriture en virgule glissante se révèle très différente de celle de l'expérience précédente. D'un côté, en effet, les élèves arrivent assez vite à parler d'« un zéro et demi » au sujet du nombre de grains sur la 16e case. En revanche, voir un zéro coupé en deux provoque stupeur et doute chez de nombreux élèves. « C'est contre les règles des mathématiques », s'indigne l'une tandis qu'une autre demande : « On a le droit ? » Chez ces élèves de bon niveau scolaire en mathématiques, le côté transgressif de la virgule glissante est difficile à

[3] La copie précise : « dans un « Picsou magazine » (Donald demandait à Picsou 1 pièce pour la première case…) ». L'histoire des grains sur l'échiquier est mise en scène dans *Paperiade* de Guido Martina & Luciano Bottaro (*Topolino*, n°202-204, 1959), paru en français dans *Mickey Parade* n°25, janvier 1982 sous le titre *La Bataille des héros*. Ce n'est toutefois pas Donald qui demande à Picsou de doubler des grains. J'ignore si l'élève avait une autre histoire en tête, quoi qu'il en soit les souvenirs sont parfois trompeurs : lors de l'expérimentation de Bondy, l'un des participants avait cru se souvenir avoir lu l'histoire des grains sur l'échiquier dans un roman de Katherine Neville, *Le Huit* (Pocket, 2004). En réalité, bien que le roman tourne effectivement autour du jeu d'échecs, l'histoire des grains n'y apparaît pas.

accepter. Une copie exprime son angoisse à la question 3) : « *Très perturbant, les virgules au milieu des zéros* ». Une autre, répondant à la question 4), écrit tout d'abord « *On ne peut pas multiplier 2 ordres de grandeur (je pense), mais j'ai sans doute tort* » puis barre cette phrase et écrit en-dessous : « *Je ne sais pas comment faire et n'arrive pas à me les représenter* ».

L'obstacle ne vient pas d'une difficulté technique. Une fois l'écriture acceptée bon gré mal gré, la suite des questions montre une compréhension fine des mathématiques en jeu, qui va jusqu'à prendre l'expérimentateur à revers en montrant une faille dans la formulation de la question 3). En effet, lors de la présentation de l'écriture en virgule glissante, il est beaucoup insisté sur le fait que ce sont des ordres de grandeurs qui sont représentés, bien davantage que des nombres. Dans ce cas, la réponse à la question 3) pose divers problèmes théoriques majeurs. Par exemple, est-il licite d'écrire $b = f$, et n'est-il pas plus prudent d'écrire $b \approx f$? D'autre part, l'expression *e* a la forme d'un nombre tandis que la virgule du *g* suggère un ordre de grandeur. Est-il alors légitime d'écrire $e = g$, ou même seulement de vouloir comparer ces objets de nature différente ? Enfin, comme le remarque une élève, écrire $f < a$ est contestable : si *f* peut être n'importe quelle valeur entre 10 et 100 alors il est possible que *f* soit égal à *a* et il faut donc plutôt écrire $f \leq a$.

Si l'essentiel des copies classe correctement les expressions données à la question 3), il est toutefois notable que les signes < ou ≤ sont plusieurs fois absents au profit d'une notation alternative, par exemple « *d*/*f*/*h*/*b*/*c*/*a*/*e*/*g* » (parfois, des parenthèses ou des accolades rassemblent les expressions considérées comme égales), un phénomène que l'on retrouve beaucoup moins dans les copies de l'expérience précédente. Dans une respectable prudence, les élèves choisissent de manier l'écriture en virgule glissante avec précaution, lui refusant l'usage des notations usuelles permettant de comparer des nombres.

La question 4) produit la réponse attendue sur cinq copies. Cinq autres reformulent les facteurs typiquement sous la forme « 50×750 » et deux utilisent des encadrements. Oralement, une élève propose la même idée apparue lors de la troisième expérience consistant à écrire 10000 et à déterminer ensuite où placer la virgule en « enlevant » les 0 et portions de 0 en trop.

La question 5) est l'occasion de tentatives variées, souvent infructueuses, mais trois copies se distinguent tout de même par leur emploi pertinent d'encadrement, proposant que la réponse est « entre 110 et 1100 ». Une élève, dont la copie est à l'évidence l'une de ces trois, explique oralement qu'elle a procédé ainsi car elle « *a du mal avec ces notations* » (en virgule glissante).

Enfin, 10 copies répondent correctement à la question 6), confirmant le caractère relativement facile de cette question et suggérant que le calcul de racines carrées

serait peut-être une introduction plus simple aux opérations en virgule glissante que la multiplication.

2.5. Réactions à froid des élèves des expérimentations de Genève

Peter King a eu l'heureuse idée de demander à ses élèves leurs réactions quelques jours après l'expérimentation. Les élèves ont ainsi répondu par écrit, et de façon anonyme, à trois questions ainsi rédigées :

- *Qu'avez-vous appris lors de la présentation de M. Rittaud ?*
- *Qu'avez-vous apprécié lors de la présentation de M. Rittaud ?*
- *Qu'est-ce que M. Rittaud peut améliorer ?*

Les réponses montrent des éléments généraux sur la tenue de l'expérience mais aussi plusieurs remarques plus ciblées. Parmi les éléments généraux qui reviennent, mentionnons (outre l'importance, pour les élèves, d'un exposé dynamique, ludique, fait dans la bonne humeur et avec une bonne diction) l'intérêt largement partagé pour les questions historiques. Les élèves ont également pris leur rôle très au sérieux : ils apprécient beaucoup d'avoir pu pouvoir participer, tout en regrettant de n'avoir pas été suffisamment éclairés sur les objectifs de l'expérimenation. Ils expriment leur satisfaction d'avoir fait des mathématiques d'une manière qui leur a semblé originale : l'un explique avoir apprécié de « *découvrir un autre aspect des math[ématiques], pour une fois pas aussi préci[s] et exact que les math[ématiques que l'on fait en classe* », un autre indique avoir appris « *à développer des manières de penser [plus] logiques* », un troisième « *[à] voir les mathématiques un peu différemment, de façon plus large* » et non simplement « *résoudre telle équation* ». Un quatrième estime que la séance lui a permis d'« *exerc[er] [s]on sens logique* », et un cinquième, dans une tournure un rien paradoxale, écrit : « *J'ai aimé apprendre des choses qui [sont] intéressantes même si elles ne sont pas importantes pour l'avenir (comme la plupart des mathématiques du collège). Il est plus agréable d'étudier des sujets réels ou de la vie de tous les jours*».

Pour ce qui est du sujet de l'expérience lui-même, les élèves semblent y avoir trouvé un réel intérêt. L'exponentielle (que plusieurs appellent « exponentialité ») est un sujet nouveau pour eux et ils se sont plu à en découvrir la rapidité de croissance (« *j'ai appris qu'il était difficile de se représenter l'exponencialité (sic) parce que l'on ne pense pas que cela va faire un si grand nombre* » ; « *la vitesse incroyable* » ; « *le nombre peu devenir très grand en `peu de temps'* »…). Plusieurs élèves évoquent le caractère « étonnant », « perturbant et déroutant », « impressionnant »… mettant en balance « l'impact énorme » de la croissance exponentielle en regard des valeurs « anodines » initiales. Si plusieurs rappellent combien « le cerveau humain est souvent dépassé », certains ne manquent pas d'affirmer leurs progrès (« *J'ai appris à ne plus être surpris en entendant le résultat d'une grandeur exponentielle*» ; « *[cela] m'a d'abord laissée perplexe,*

mais je m'y suis vite habituée»)

Le thème des ordres de grandeur et la façon de les visualiser fait partie de ce que plusieurs élèves écrivent avoir appris (« *la notation dépend de ce que l'on considère* »). La virgule glissante est, bien sûr, l'objet de commentaires divers, parfois intrigués mais le plus souvent positifs : « *la virgule au milieu du zéro était une idée assez intéressante* » ; « *Maintenant on sai[t] qu'on peut mettre des virgules dans des chiffres* » ; « *on peut mettre des virgules un peu partout* », et même… « *j'ai appris* 1000 *choses* ».

Le dernier élément saillant de ces retours des élèves est l'intérêt considérable éveillé par les histoires qui mettent en scène la croissance exponentielle. En particulier, l'histoire des grains doublés sur les cases de l'échiquier a marqué les esprits : elle est citée au moins aussi souvent que celle de la feuille pliée, bien que cette dernière ait mobilisé nettement plus de temps au cours de l'expérimentation.

3. Conclusions et perspectives

La variété des résultats produits par les quatre expériences montre qu'il est sans doute peu de lignes directrices universelles sur le sujet et qu'à des publics différents correspondent des problématiques différentes. Quelques points généraux semblent néanmoins pouvoir être dégagés.

1) L'étonnement que provoque la rapidité de la croissance exponentielle se manifeste à tous les niveaux ; il n'est que partiellement corrélé aux compétences mathématiques. Ainsi, les élèves de la seconde expérimentation de Genève, en principe plus avancés en mathématiques que ceux de la première, montrent une surprise bien plus considérable[4].

2) De même, l'idée de la virgule glissante n'est pas nécessairement mieux acceptée par des sujets de niveau plus avancé, les sujets des expérimentations de Genève mais aussi ceux de l'expérimentation de Bondy semblant même suggérer partiellement une corrélation inverse. Une piste d'explication est la suivante : le niveau avancé en mathématiques de certains sujets peut tenir à une certaine docilité dans l'apprentissage, qui les conduit à se conformer aux prescriptions de l'institution. Le caractère évidemment transgressif de la notation en virgule glissante est ainsi susceptible de poser des problèmes particuliers à ces sujets, qui se retrouvent davantage que d'autres placés dans une situation d'inconfort[5].

[4] En passant, il conviendrait de réfléchir à une formulation de la question 1)b) plus neutre, le choix des options proposées pouvant être considéré comme biaisé en faveur des réponses erronées. Une idée serait de proposer davantage d'ordres de grandeur, jusqu'à atteindre des ordres dépassant la bonne réponse - mais cela constituerait peut-être un biais inverse.

[5] Par-delà cette dimension transgressive, une analyse psychanalytique plus fine révèlerait peut-être des éléments symboliques d'ordre sexuels susceptibles de poser des problèmes, notamment à des sujets adolescents (je songe ici à la pénétration d'une virgule, de forme

Certains sujets de l'expérimentation de Bondy, pourtant éloignés depuis fort longtemps des bancs de l'école, ne sont pas les moins gênés par cette transgression avec l'institution, la question de la « légalité » de l'écriture en virgule glissante étant revenue plusieurs fois (« *on a le droit de mettre de virgules dans un zéro* ? » ; « *C'est autorisé* ? »), même si un réflexion finale à l'issue de la séance montre que ces réticences ne sont pas insolubles (« *Finalement, ça devient clair après un moment* »). L'expérimentation de Villetaneuse suggère par ailleurs que des compétences suffisamment élevées sont une condition suffisante pour vaincre l'obstacle psychologique d'une virgule à l'intérieur d'un zéro.

3) Toutes les expérimentations montrent que la légende des grains sur l'échiquier est connue d'une fraction non négligeable de la population (une vingtaine de personnes parmi les 54 sujets des expérimentations, réparties de manière relativement homogènes entre 25 % et 50 % des quatre échantillons) et que le cours de mathématiques est le lieu le plus courant où cette histoire est apprise (environ la moitié du temps). Cela témoigne du potentiel émotionnel considérable de cette histoire plus que millénaire.

4) De même, les premiers termes de la suite des puissances de 2 jusqu'à 1024 constituent une connaissance assez répandue, bien qu'elle ne soit jamais institutionnalisée à l'école.

5) Les expérimentations de Genève suggèrent que, de façon un rien paradoxale, un éventuel enseignement des opérations entre expressions en virgule glissante devrait commencer par l'extraction de racines carrées, continuer par la multiplication (et la division) et finir par l'addition. Toutefois, au vu des difficultés théoriques qui se sont révélées lors de la première de ces deux expériences, et de la nécessité qui est apparue de l'utilisation d'outils fins sur les ordres de grandeur, il paraît sans doute prudent de s'en tenir à la rectification de l'intuition et de limiter les ambitions arithmétiques.

6) Le problème ne s'est manifesté explicitement que lors de l'expérimentation de Bondy mais il convient de réfléchir à la question de savoir dans quelle mesure l'aptitude à nommer un très grand nombre est important pour en permettre l'appropriation. Pour une partie au moins des sujets de Bondy, un nombre n'est « réel » que s'il désigne une quantité accessible ; le fait d'être capable de l'écrire et de mener sur lui toutes les opérations que l'on veut n'est pas spontanément identifié comme un élément décisif.

---

phallique, dans un zéro, de forme vaginale).

BIBLIOGRAPHIE

BOLTON L. E., WARLOP L. & ALBA J. W., (2003). Consumer Perceptions of Price (Un)Fairness. *Journal of Consumer Research*, *29*, 474-491.

CHRISTANDL F. & FETCHENLAUER D., (2009). How laypeople and experts misperceive the effect of economic growth. *Journal of Economic Psychology*, *30* (3), 381-392.

ITENBERG I., (2008). Introduction à la géométrie tropicale. *In* : *Géométrie tropicale* (ed.: P. Harinck, A. Plagne, and C. Sabbah), Journées mathématiques X-UPS 2008, Éditions de l'École Polytechnique, 1 - 25.

JONES G., (1977). Polynomial perception of exponential growth. *Perception & Psychophysics*, *21*, 197-198.

JONES G., (1979). A generalized polynomial model for perception of exponential series. *Perception & Psychophysics*, *25* (3), 232-234.

MACKINNON A. J. & WEARING A. J., (1991). Feedback and the forecasting of exponential change. *Acta Psychologica*, *76* (2), 177-191.

ROHRBASSER J.-M., (1999). William Petty (1623-1687) et le calcul du doublemnet de la population. *Population*, *4-5*, 693-705.

STANGO V. & ZINMAN J., (2009). Exponential Growth Bias and Household Finance. *The Journal of Finance*, *LXIV* (6), 2807-2849.

TIMMERS H. & WAGENAAR W., (1977a). Inverse statistics and misperception of exponential growth. *Perception & Psychophysics*, *21* (6), 558-562.

WAGENAAR W., (1977b). Polynomial perception of exponential growth: A reply to Jones. *Perception & Psychophysics 21* (2), 199.

WAGENAAR W. & SAGARIA S., (1975). Misperception of exponential growth. *Perception & Psychophysics*, *18* (6), 416-422.

WAGENAAR W. & TIMMERS H., (1978). Extrapolation of exponential time series is not enhanced by having more data points. *Perception & Psychophysics*, *24* (2), 182-184.

WAGENAAR W., (1979). The pond-and-duckweed problem; Three experiments on the misperception of exponential growth. *Acta Psychologica*, *43* (3), 239-251.

Benoît RITTAUD
Université Paris-13
rittaud@math.univ-paris13.fr

ATHANASIOS GAGATSIS ET ANNITA MONOYIOU

LES STRATEGIES DES FUTURS INSTITUTEURS DANS LA RESOLUTION DE TACHES SUR LES FONCTIONS. APPROCHE PONCTUELLE OU APPROCHE COORDONNÉE ?

Abstract. Future teachers' strategies in solving tasks about functions - Point wise approach or coordinated approach?
The aim of this research was to contribute to the understanding of the point wise and coordinated approaches pre-service teachers develop and use in solving function tasks, and to examine which approach is more correlated with their ability in solving verbal complex problems. The study was conducted in three phases. Participants were 548 pre-service teachers. A test consisted of seven tasks was administrated to all the participants. Results were similar in all phases, indicating the stability of teachers' approaches and providing support for their intention to use the algebraic approach. Teachers who were able to use the coordinated approach had better results in problem solving.

Résumé. Le but de cette recherche a été d'une part de contribuer à la compréhension de l'approche ponctuelle et l'approche coordonnée que les élèves-enseignants développent et utilisent dans la résolution des tâches de fonction, d'autre part d'examiner laquelle de ces approches est la plus adaptée à leur capacité à résoudre des problèmes verbaux complexes. L'étude a été conduite en trois phases et 548 élèves-enseignants y ont participé. Un test constitué de sept tâches a été appliqué à tous les participants. Les résultats ont été similaires dans toutes les phases, ce qui montre la stabilité de l'approche des enseignants et confirme leur volonté d'utiliser l'approche ponctuelle. Les enseignants qui ont été capable d'utiliser l'approche coordonnée ont eu de meilleurs résultats dans la résolution de problèmes.

Mots-clés. *Fonction, élèves-professeurs, approche ponctuelle, approche coordonnée*

---

1. Le concept de fonction dans la recherche en didactique des mathématiques

Bien des chercheurs se sont intéressés aux fondements théoriques des recherches en didactique des mathématiques. Brousseau (1997) propose la théorie des situations didactiques, qui joue un rôle important dans les recherches françaises en didactique des mathématiques. Duval (2002) insiste sur le rôle primordial des représentations pour l'apprentissage des mathématiques et il propose la théorie des registres de représentation, qui constitue le fondement théorique de la présente recherche. Vergnaud propose « Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques » (Vergnaud, 1981) et quelques années plus tard il présente « La théorie des champs conceptuels» (Vergnaud, 1991). La majorité des chercheurs qui ont travaillé sur le domaine théorique de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques ont

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 18, p. 115-137.
© 2013, IREM de STRASBOURG.

cherché des relations entre les comportements des étudiants et la connaissance acquise (Balacheff, 1995). Cette relation entre comportement et connaissance est cruciale ; si elle n'était pas apparente comme conséquence de la mise en cause du behaviorisme (Balacheff, Gaudin, 2002), elle a toujours été implicitement présente dans la recherche sur l'éducation. La question des relations entre comportements et connaissances est considérées comme fondamentale dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1997). Un de ses postulats est que chaque situation – problème sollicite de la part de l'étudiant des comportements qui sont des indications de la connaissance acquise. Balacheff et Gaudin (2002) présentent plusieurs points de vue sur ces relations entre comportements des étudiants et connaissances acquises :

Une connaissance est caractérisée comme l'état de l'équilibre dynamique d'une boucle d'action/retour en arrière entre un sujet et un milieu sous des contraintes prohibitives de viabilité (p.3).

Ces deux auteurs essaient de donner une caractérisation formelle du mot conception. Ils insistent sur la nécessité d'un meilleur fondement de la définition des conceptions, qui, d'ailleurs, a été signalée par plusieurs chercheurs (Confrey, 1990 ;Vinner 1983, 1987 ; Smith, Disessa, & Rochelle, 1993). En se basant sur la définition de Vergnaud (1991) ils proposent la définition suivante :

Nous appelons conception C un quadruplet (P, R, L, S) dans lequel :

- P est un ensemble de problèmes;

- R est un ensemble d'opérateurs;

- L est un système de représentation;

- S est une structure de contrôle.

Toutes les idées développées dans leur article sont ensuite appliquées au domaine des fonctions et notamment aux conceptions des étudiants liées à ce concept. En particulier, ils analysent les conceptions proposées par différents chercheurs et ils les caractérisent au moyen du quadruplet défini plus haut. Les auteurs mettent l'accent sur l'analyse des conceptions des étudiants à propos du concept de fonction.

Le concept de fonction est central en mathématiques et mathématiques appliquées. Il est donc naturel que l'enseignement et l'apprentissage des fonctions soit un thème qui fasse l'objet de très nombreuses recherches (Dubinsky & Harel, 1992; Artigue, 2009; Vanderbrouck, 2011). La compréhension des fonctions n'est apparemment pas simple : Les étudiants de l'enseignement secondaire, voire même de l'enseignement supérieur, quel que soit leur pays, ont des difficultés à conceptualiser la notion de fonction. La compréhension du concept de fonction

constitue donc un souci majeur des éducateurs en mathématique et attire l'attention toute particulière de la part de la communauté des chercheurs en didactique des mathématiques (Dubinsky & Harel, 1992; Sierpinska, 1989, 1992). Bien souvent, les étudiants qui entrent à l'université ne savent pas manipuler des fonctions qui ne sont pas définies par une formule algébrique (Vandebrouck, 2011). Les travaux de Vinner sur le domaine des conceptions des étudiants à propos des fonctions sont classiques.Vinner (1983, 1987, 1992) a identifié plusieurs comportements conceptuels des étudiants à propos des fonctions :

- *La correspondance qui constitue la fonction devrait être systématique et être établie par une règle ;*
- *Une fonction doit être un terme algébrique ;*
- *Une fonction est identifiée par une de ses représentations graphiques ou algébriques ;*
- *Une fonction devrait être donnée par une règle ; une fonction peut avoir différentes règles de correspondance pour des domaines disjoints ;*
- *La représentation graphique d'une fonction doit être régulée de manière systématique ;*
- *Une fonction est une bijection.*

Dans le même esprit, Vinner et Dreyfus(1989) ont étudié les images des étudiants associées aux fonctions et leur relation avec la définition de la fonction. Il faut observer que ces conceptions existent chez les étudiants de pays différents. Ainsi Elia, Panaoura, Eracleous & Gagatsis (2007) ont examiné les conceptions des élèves du second degré de Chypre à propos du concept de fonction et ses relations avec les représentations de fonctions. En utilisant la classification hiérarchique implicative et cohésive à l'aide du logiciel CHIC, plusieurs chercheurs (Lerman, 1981; Bodin, A., Coutourier, R. & Gras, R., 2000) ont trouvé des relations entre les conceptions des étudiants, les conversions entre représentations des fonctions et la résolution des problèmes verbaux sur les fonctions. En se fondant sur un cadre théorique semblable, Elia, Panaoura, Gagatsis, Gravvani & Spyrou (2008) ont trouvé des relations similaires entre les conceptions des élèves du second degré en Grèce et leur résolution de problèmes verbaux sur les fonctions.

Enfin, il faut dire qu'il y a quantité de recherches sur la fonction et sur des concepts relatifs aux fonctions. Ainsi d'autres recherches ont examiné le concept de limite d'une fonction et le rôle des représentations sur la compréhension de ce concept (Elia, I., Gagatsis, A., Panaoura, A., Zachariades, T., & Zoulinaki, F., 2009), ou le concept de tangente au graphe d'une fonction (notamment Castela, 1995).

2. Le rôle des représentations graphiques dans l'apprentissage des fonctions

Un facteur qui influence l'apprentissage des fonctions réside dans la diversité des représentations liées à ce concept (Hitt, 1998). Au paragraphe précédent, nous avons présenté la définition de la conception par un quadruplet (Balacheff & Gaudin, 2002). Une composante de ce quadruplet concerne les systèmes de représentation. En effet, un objectif éducatif important en mathématiques consiste pour les élèves en le fait d'identifier et d'utiliser efficacement diverses formes de représentation du même concept mathématique et de savoir passer avec aisance d'un système de représentation à un autre.

L'utilisation de représentations multiples est fortement liée au processus complexe d'apprentissage en mathématiques, et plus particulièrement, à la recherche d'une meilleure compréhension par les étudiants des concepts mathématiques importants (Dufour-Janvier, Bednarz, & Belanger, 1987; Greeno & Hall, 1997), telle que celui de fonction. Etant donné que la représentation ne peut décrire complètement une construction mathématique (un concept mathématique) et que chaque représentation possède différents avantages, l'utilisation de différentes représentations pour la même situation mathématique constitue le noyau de la compréhension mathématique (Duval, 2002). C'est un des postulats principaux theoriques adoptés dans cette étude. Ainsworth, Bibby et Wood (1997) ont suggéré que l'utilisation de multiples représentations peut aider les élèves à développer des idées et processus différents, à retenir des significations et à promouvoir une compréhension plus profonde. En combinant les représentations, les élèves ne sont plus limités par les forces et faiblesses d'une représentation particulière. De plus, l'utilisation de multiples représentations peut aider les élèves à développer des capacités d'interprétation des représentations graphiques dans diverses situations (Bell et Janvier, 1981).

Certains chercheurs interprètent les erreurs des élèves soit comme le résultat d'une mauvaise manipulation des représentations, soit comme un manque de coordination entre les représentations (Greeno & Hall, 1997; Smith, DiSessa, & Roschelle, 1993). Les formes standard de représentation de certains concepts mathématiques, tel que le concept de fonction (la forme algébrique), ne sont pas suffisantes pour que les élèves puissent construire une signification entière et saisissent la portée réelle de leurs applications. Les enseignants de mathématiques, au secondaire, se focalisent traditionnellement dans leur cours sur l'utilisation de la représentation algébrique des fonctions (Eisenberg & Dreyfus, 1991). Sfard (1992) a montré que beaucoup d'élèves étaient incapables de passer d'une représentation algébrique à une représentation graphique des fonctions, alors que Markovits, Eylon et Bruckheimer (1986) ont observé que la conversion d'une représentation graphique à une représentation algébrique était plus difficile que l'inverse. Sierpinska (1992) soutient que les étudiants ont des difficultés à créer des liens entre les différents

types de représentation des fonctions, ainsi que des difficultés à interpréter les graphes et à manipuler les symboles liés aux fonctions. De plus, Aspinwall, Shaw et Presmeg (1997) ont constaté dans certains cas que des images gravées dans les esprits d'étudiants peuvent provoquer des difficultés réduisant par exemple leurs possibilités de passer d'une représentation graphique à une représentation algébrique.

Gagatsis, A. Deliyianni, Elia & Panaoura (2011) ont exploré la flexibilité dans le cas du domaine numérique. Même si cet article ne portait pas sur les fonctions, il a paru justifié d'adopter dans la présente recherche les fondements théoriques sur la flexibilité représentationnelle.

Enfin, Artigue a présenté un certain nombre d'outils conceptuels pour aborder l'apprentissage et l'enseignement des fonctions (Artigue, 2009). Nous adoptons trois d'entre eux qui nous semblent particulièrement efficaces pour l'étude des résultats de notre recherche concernant la transition du Lycée à l'Université :

- l'identification de différents registres de représentation de fonctions et l'analyse des caractéristiques des interactions entre ces registres (Duval, 2002).
- l'identification de différents points de vue possibles sur une fonction : le point de vue ponctuel de la correspondance entre un élément et son image mais aussi le point de vue global qui permet de reconnaître les fonctions (Artigue, 2009).
- l'identification de différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances en jeu dans la résolution de tâches mettant en jeu des fonctions (Robert, 1998).

L'outil principal de notre recherche est le premier de ceux proposés par Artigue, celui des registres. En particulier, nous nous intéressons au passage d'un registre à l'autre, autrement dit à la conversion d'une représentation à une autre. Celle-ci conduit à la mise en œuvre du deuxième outil proposé par Artigue, concernant l'identification de différents points de vue possibles sur la fonction : les points de vue ponctuel et global. Ce point de vue théorique a été essentiellement utilisé dans les études d'Even (1998), et de Mousoulides et Gagatsis (2004). Even (1998) s'est attaché à analyser les corrélations entre la flexibilité dans le passage d'une représentation à une autre et d'autres aspects de connaissance et de compréhension. Cette étude a montré que les élèves ont des difficultés quand ils ont besoin de créer un lien flexible entre différentes représentations de fonctions. Un résultat important de l'étude est que beaucoup d'élèves traitent les fonctions de manière ponctuelle mais ne peuvent pas réfléchir sur une fonction d'une manière globale, c'est-à-dire n'accèdent pas à la conception objet d'une fonction au sens de Tall. Des données de l'étude, il apparaît aussi que les sujets qui peuvent facilement et librement utiliser une analyse globale des modifications dans la représentation graphique ont une meilleure et plus profonde compréhension des relations entre la représentation

graphique et la représentation symbolique. Mousoulides et Gagatsis (2004) ont aussi adopté l'approche de Michèle Artigue et ont introduit les deux expressions d'approche algébrique et d'approche géométrique. Ils ont analysé les performances des étudiants de l'Université de Chypre dans les activités mathématiques qui impliquent principalement la conversion entre des systèmes de représentation de la même fonction, et se sont intéressés à l'approche opérée par les étudiants dans l'utilisation des représentations de fonction et quant à leur lien avec le processus de résolution de problèmes. Le résultat le plus important de cette étude est que deux groupes distincts se sont formés avec constance : les approches algébriques et géométriques. Les étudiants suivant l'approche algébrique calculent différents points du graphe de la fonction en calculant des valeurs de y pour différentes valeurs de x à l'aide de la formule algébrique de la fonction. Il s'agit donc d'une approche ponctuelle. La majorité des étudiants suit cette approche ponctuelle. De l'autre côté, les étudiants qui suivent l'approche géométrique, c'est-à-dire les ceux qui traitent les différentes tâches en ayant recours aux représentations graphiques des fonctions, réussissent mieux les problèmes verbaux sur les fonctions : ils peuvent plus facilement comprendre les relations entre les représentations symboliques et graphiques qui interviennent dans les problèmes verbaux.

Dans cette étude, le concept de fonction est abordé selon deux perspectives différentes, la perspective ponctuelle et la perspective coordonnée. La perspective algébrique est similaire à l'approche ponctuelle décrite par Even (1998) et à l'approche algébrique décrite par Mousoulides et Gagatsis (2004). Dans cette perspective, une fonction est perçue comme la transition entre des valeurs x et y : pour chaque valeur de x, la fonction possède une valeur y correspondante (Moschkovich et al., 1993). La perspective coordonnée combine les approches ponctuelles et géométriques. Dans cette perspective, la fonction est pensée d'une manière locale (c'est-à-dire ponctuelle) et globale (c'est-à-dire géométrique) en même temps. Les étudiants peuvent « coordonner » (manipuler avec dextérité) deux systèmes de représentation, algébrique et graphique. En d'autres termes, les étudiants sont amenés à tirer des informations à la fois de la représentation algébrique $y = f(x)$ d'une fonction et de sa représentation graphique.

Finalement le troisième outil proposé par Michelle Artigue, c'est à dire l'idée de Robert (1998) des différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances en jeu dans la résolution de tâches de fonction est pris en compte lors de la résolution de problèmes verbaux proposés aux étudiants.

3. Méthode

Le but de cette étude est de contribuer à la compréhension des approches ponctuelle et coordonnée que les élèves-professeurs de l'école primaire développent et utilisent dans les tâches de résolution de fonction et d'examiner

quelle approche est la plus adaptée à leur capacité de résolution de problèmes verbaux. Ainsi, l'étude présente, basée sur des recherches précédentes, examine les questions suivantes :

- Quelle approche (ponctuelle ou coordonnée) les élèves-professeurs préfèrent-ils utiliser quand ils résolvent des tâches sur des fonctions simples ?
- Jusqu'à quel point les élèves-professeurs sont-ils capables de résoudre des problèmes verbaux sur les fonctions ?
- Qui sont les élèves-professeurs qui réussissent le mieux aux problèmes verbaux sur les fonctions : ceux qui suivent l'approche ponctuelle afin de dessiner la représentation graphique d'une fonction ou ceux qui suivent l'approche coordonnée ?

Cette étude a été conduite en trois phases. La première phase s'est déroulée en 2005 avec 135 participants, la deuxième phase s'est déroulée deux ans plus tard, en 2007, avec 153 participants et la troisième phase s'est déroulée en 2008 avec 260 participants. Les participants, dans chacune des phases, étaient des étudiants du Département de l'Education de l'Université de Chypre se préparant aux métiers de l'enseignement, c'est à dire des futurs professeurs des écoles. Les sujets étaient pour la plus grande partie des étudiants de bon niveau académique admis à l'Université de Chypre sur la base de leur note au concours d'entrée à l'université. Ils étaient diplômés de lycées de Chypre mais avec un baccalauréat différent : 30% parmi eux avaient un baccalauréat scientifique et les 70% restant un baccalauréat classique. En plus les participants des deuxième et troisième phases étaient diplômés de lycées d'un type légèrement différent, avec des manuels de mathématiques différents et différentes procédures de sélection des cours, du fait de changements majeurs effectués dans le système éducatif du secondaire. En fait, les étudiants de la première phase ont suivi un enseignement de mathématiques dans les trois dernières classes du lycée chypriote (élèves des classes de seconde, première et terminale scientifiques, de 15 à 18 ans). Les étudiants de la deuxième et de la troisième phase ont suivi un enseignement de mathématiques approfondi dans les deux dernières classes du lycée chypriote (élèves des classes de première et terminale scientifiques, de 16 à 18 ans). En tenant compte des informations précédentes nous pourront conclure que notre population expérimentale est très variée : premièrement les étudiants avaient reçu au lycée un enseignement de mathématiques assez différent pendant les trois dernières années de leur scolarité au secondaire ; deuxièmement ils avaient des baccalauréats de types différents. Il est donc naturel de supposer que leurs conceptions et connaissances sur les fonctions puissent être assez différentes.

Le test fut appliqué à tous les participants (Monoyiou & Gagatsis, 2008a; Monoyiou & Gagatsis, 2008b). Le test était constitué de sept tâches. Les quatre

premières tâches étaient de simples tâches sur les fonctions (T1a, T1c, T2a, T2c, T3a, T3c, T4a and T4c). Dans chaque tâche se trouvaient deux fonctions linéaires ou quadratiques. Chaque fonction était donnée sous forme algébrique et l'une d'elle était accompagnée d'une représentation graphique. Il y avait toujours une relation entre les deux fonctions (e.g. $f(x) = 2x$, $g(x) = 2x + 1$). Il était demandé aux étudiants de construire la représentation graphique de la seconde fonction. Ces quatre tâches impliquaient des conversions d'une représentation algébrique à une représentation graphique sans que des traitements soient nécessaires. Un premier objectif de ces quatre tâches était de voir si les étudiants allaient se servir de la représentation graphique de la première fonction pour construire celle de la deuxième fonction. Autrement dit, nous voulions examiner si les étudiants suivraient l'approche coordonnée puisque ces quatre tâches impliquaient des conversions d'une représentation algébrique à une représentation graphique sans que des traitements, au sens de Raymond Duval, soient nécessaires. Dans le cas contraire, les étudiants allaient-ils se baser sur des traitements arithmétiques et algébriques pour construire la représentation graphique de la deuxième fonction ?

Les trois autres tâches étaient des problèmes verbaux sur les fonctions :

- Le premier problème était constitué d'une information textuelle à propos d'un réservoir contenant un certain nombre de litres d'essence (600 L) et d'un camion-citerne remplissant le réservoir avec de l'essence. Le camion-citerne contient 2000 L de pétrole et le débit de remplissage est de 100 L par minute. Il était demandé aux étudiants d'utiliser cette information de manière à donner deux équations (Pr1a), à dessiner les graphes des deux fonctions linéaires (Pr1b) et à trouver quand le contenu du réservoir serait égal à celui du camion (Pr1c).

Il est évident qu'une résolution réussie du premier problème, devrait être liée à la réussite des quatre premières tâches de conversion des représentations de fonctions et en particulier à la réussite de la première tâche de conversion de fonctions linéaires.

- Le deuxième problème consistait en une information textuelle et algébrique à propos d'une colonie de fourmis. Le nombre de fourmis (A) augmente selon la fonction : $A = t^2 + 1000$, où t est nombre de jours). Le nombre de graines que les fourmis conservent dans la colonie augmente en fonction de $S = 3t + 3000$, où t est le nombre de jours. Il était demandé aux étudiants d'utiliser cette information de manière à dessiner des graphes (Pr2a) des fonctions linéaires et quadratiques et à trouver quand le nombre de fourmis dans la colonie et le nombre de graines seraient égaux (Pr2b).

Il est aussi évident qu'une résolution réussie du deuxième problème, devrait être liée à la réussite des quatre premières tâches de conversion des représentations de fonctions.

- Le troisième problème était constitué d'une fonction dans une forme générale $f(x) = ax^2 + bx + c$. Les nombres a, b et c étaient des nombres réels et $f(x)$ était égal à 4 quand x=2 et $f(x)$ était égal à -6 quand x=7. Les étudiants- enseignants devaient trouver combien de solutions réelles l'équation $ax^2 + bx + c$ possédait et expliquer leur réponse (Pr3).

Il est évident qu'une résolution réussie du troisième problème devrait être liée à la réussite des quatre premières tâches de conversion des représentations de fonctions par les étudiants qui ont suivi l'approche coordonnée. En effet une solution algébrique du problème n'est pas possible et les étudiants devraient avoir un point d'avis global, d'après Artigue, afin d'arriver à une solution correcte.

La passation du test s'est effectuée en une session de 60 minutes dans le contexte des cours de Didactique des Mathématiques du Département de l'Education de l'Université de Chypre.

Les résultats de l'étude concernant les réponses données par les élèves-enseignants aux quatre tâches ont été codifiés en un T majuscule (tâche), suivi par le nombre indiquant le numéro de l'exercice, suivi encore par une lettre qui indique la manière avec laquelle les professeurs ont résolu la tâche : (a) « a » est utilisé pour marquer une « approche ponctuelle – la fonction en tant que processus au sens de Tall », (b) « c » pour les élèves ayant adopté une « approche coordonnée – la fonction en tant qu'objet ». Une solution est reconnue comme « ponctuelle » si les participants n'utilisent pas les informations offertes par le graphe de la première fonction et procèdent à la construction du graphe de la deuxième fonction en trouvant les valeurs correspondantes pour x et y. Au contraire, une solution est reconnue comme « coordonnée » si les étudiants observent et utilisent la relation algébrique entre les deux fonctions dans la construction du graphe de la deuxième fonction ; par exemple les droites y=2x et y=2x+1 ont le même coefficient directeur, par conséquent elles sont parallèles. Dans ce cas, les étudiants utilisent et combinent les deux types de représentations, c'est-à-dire la représentation graphique de la première fonction et les représentations algébriques des deux fonctions. Ils ont relevé la relation entre les deux équations données et l'ont interprétée graphiquement en manipulant la fonction comme un objet. Les symboles suivants sont utilisés pour représenter les solutions des élèves aux problèmes : Pr1a, Pr1b, Pr1c, Pr2a, Pr2b et Pr3. Les bonnes ou mauvaises réponses aux problèmes reçoivent la note 1 et 0 respectivement.

Pour l'analyse et le décryptage des informations collectées, une analyse statistique descriptive a été appliquée en utilisant le logiciel SPSS. Afin d'examiner l'existence ou non de différences statistiques substantielles entre les étudiants des phases A, B et C quant à l'approche qu'ils ont utilisée et quant à leur performance dans la résolution du problème, l'analyse de la dispersion (MANOVA) fut appliquée via le SPSS. De plus, la classification hiérarchique (Lerman, 1981) fut utilisée via le logiciel de statistique C.H.I.C (Bodin, Coutourier, & Gras, 2000). Trois diagrammes de similitude des réponses données par les élèves-professeurs, une pour chaque phase, furent créés. Les diagrammes de similitude permettent de classifier les tâches en ensembles selon l'homogénéité avec laquelle les participants les ont maniées.

4. Résultats

4.1 Analyse descriptive

Selon le tableau 1, la plupart des élèves-professeurs, dans les trois phases, ont correctement résolu les tâches 1 et 2. La tâche 1 impliquait une fonction linéaire ($y = 2x$) et la tâche 2 impliquait un forme très simple d'équation d'une parabole ($y = x^2$). Leur réussite a très fortement chuté sur les tâches 3 et 4 des fonctions quadratiques « complexes » (T3 et T4).

Dans les trois premières tâches, l'approche ponctuelle était prédominante, puisque la moitié, voire plus, des participants l'ont choisie pour les résoudre. Dans la tâche 4, la plupart des étudiants ont choisi une approche coordonnée. Dans cette tâche, une approche coordonnée semblait plus facile et plus efficace que l'approche algébrique (résolution d'un système d'équations) ou l'approche ponctuelle. Les étudiants participant aux trois phases ont donné des réponses similaires aux quatre tâches. La seule différence consistait dans le fait que les étudiants des phases B et C ont moins utilisé l'approche coordonnée et ont donné plus de réponses incorrectes que les étudiants de la phase A. Cela pourrait être expliqué par le fait qu'une proportion importante des étudiants de la première phase a suivi un enseignement approfondi des mathématiques dans les trois dernières classes du lycée chypriote. Au contraire, de nombreux étudiants de la deuxième et de la troisième phase ont suivi un enseignement des mathématiques approfondi seulement dans les deux dernières classes du lycée chypriote.

Dans le cas de la tâche 1 ($y = 2x$, $y = 2x + 1$), certains élèves-enseignants qui ont utilisé une approche ponctuelle ont trouvé des points d'intersection avec des axes x et y et ont construit le graphe. D'autres ont construit un tableau de valeurs afin de les aider à construire le graphe. Les étudiants, qui ont utilisé l'approche coordonnée, ont comparé les deux équations et ont mentionné que l'inclinaison était la même et que les deux fonctions étaient parallèles. Ensuite, ils ont

mentionnés que les points de la deuxième fonction étaient « un de plus » que les points de l'autre. Certains d'entre eux ont trouvé un point de manière à vérifier leur assertion.

Tableau 1 : Les réponses des élèves-professeurs aux quatre premières tâches (Phases A, B et C).

Tâches		Approche ponctuelle avec réponse correcte (%)	Approche coordonnée avec réponse correcte (%)	Réponse incorrecte (%)
1	A	54.8	32.5	12.7
	B	56.2	22.2	21.6
	C	55.8	20.4	23.8
2	A	54.8	31.1	14.1
	B	56.9	25.5	17.6
	C	45.4	24.6	30
3	A	56.3	17.7	26
	B	43.8	15	41.2
	C	44.2	11.2	44.6
4	A	24.4	48.1	27.5
	B	24.8	47.1	28.1
	C	29.2	43.1	27.7

Dans le cas des tâches 2 ($y = x^2$, $y = x^2 - 1$) et 3 ($y = x^2 + 3x$, $y = x^2 + 3x + 2$), les élèves-professeurs qui utilisent une approche ponctuelle trouvent les solutions réelles de la deuxième équation et le point minimum et construisent le graphe sans utiliser le premier graphe. Au contraire, les élèves-professeurs qui utilisent l'approche coordonnée en premier comparent les deux équations et réalisent qu'on passe de la première à la deuxième par une translation verticale. Ils mentionnent que le point minimum dans le premier cas est « un en bas » et dans le deuxième cas « deux au-dessus ». Certains d'entre eux trouvent un autre point de manière à dessiner un graphe plus précis.

Dans le cas des tâches 4 ($y = 3x^2 + 2x + 1$, $y = -(3x^2 + 2x + 1)$), les élèves-professeurs qui ont utilisé une approche ponctuelle ont trouvé le point d'intersection avec l'axe y et le maximum. Les étudiants qui ont utilisé l'approche coordonnée ont comparé les deux équations et ont mentionné que les deux fonctions étaient « opposées » et « symétriques » selon l'axe x. Dans cette tâche, l'approche ponctuelle était plus compliquée, car l'équation n'avait pas de solution réelle. La plupart des étudiants, après des efforts infructueux pour trouver les points d'intersection avec l'axe x, ont dessiné le graphe en utilisant l'approche coordonnée. Les performances des élèves-professeurs aux trois problèmes verbaux ont été évaluées et le tableau 2 décrit les résultats.

Tableau 2 : Réponses des élèves-professeurs aux trois problèmes (Phase A, B et C).

Problèmes		Réponse correcte (%)	Réponse incorrecte (%)
1a	A	38.5	61.5
	B	22.9	77.1
	C	42.7	57.3
1b	A	59.3	40.7
	B	45.8	54.2
	C	35.4	64.6
1c	A	70.4	29.6
	B	55.6	44.4
	C	37.7	62.3
2a	A	46.7	53.3
	B	35.3	64.7
	C	32.3	67.7
2b	A	35.6	64.4
	B	27.5	72.5
	C	28.5	71.5
3	A	37	63
	B	20.3	79.7
	C	22.7	77.3

Dans le problème 1, seuls 38.5% des participants de la phase A, 22.9% de la phase B et 42.7% de la phase C ont réussi à utiliser les informations apportées de manière à donner les deux équations. Un large pourcentage des élèves-professeurs ayant

participé aux phases A et B ont construit les deux graphes correctement (59.3% et 45.8% respectivement) et ont trouvé leur point d'intersection (70.4% et 55.6%). Plusieurs élèves-professeurs ayant participé à ces deux phases étaient incapables de donner les équations mais ont réussi à construire les graphes en construisant un tableau de valeurs pour x et y. Certains n'ont pas construit les graphes mais ont trouvé leur point d'intersection grâce à un tableau de valeurs. Quant aux élèves-professeurs ayant participé à la phase C, un plus faible pourcentage a réussi à construire les graphes (35.4%) et à trouver leur point d'intersection (37.7%). Dans ce problème, afin de trouver le point d'intersection, les élèves-professeurs avaient à résoudre une équation de second degré et cela a causé quelques difficultés. Le problème 3 était assez difficile pour les élèves-professeurs ayant participé aux trois phases, puisque seulement 37%, 20.3% et 22.7% respectivement ont réussi à le résoudre correctement. En général, les enseignants ayant participé à la phase A ont mieux réussi que les enseignants des phases B et C dans la résolution des problèmes. Une raison pourrait être attribuée aux différences, entre programmes scolaires de mathématiques, manuels scolaires de mathématiques et enseignement des mathématiques en général, existant entre les étudiants de la phase A d'une part et des étudiants des phases B et C d'autre part, différences déjà signalées au § 4.1.

Afin d'examiner s'il y a des différences significatives entre les étudiants des phases A, B et C quant à l'approche qu'ils ont utilisée et quant à leur capacité à résoudre des problèmes, une analyse de la variance (dispersion) (MANOVA) fut appliquée.

Dans l'ensemble, les effets de la phase des étudiants étaient très significatifs (Pillai's $F_{(6, 1088)} = 3.08$, $p<0.05$). En particulier, il y avait des différences importantes entre les trois phases quant à l'efficacité de la résolution des problèmes ($F_{(2, 543)} = 7.69$, $p<0.01$). Les étudiants de la phase A ($\overline{X}$ =0.48, SD=0.37) ont eu de meilleurs résultats dans la résolution de problèmes que les étudiants des phases B ($\overline{X}$ =0.34, SD=0.34) et C ($\overline{X}$ =0.33, SD=0.38). Bien que les étudiants de la phase B aient une performance sensiblement meilleure en résolution de problèmes que les étudiants de la phase C, cette différence n'était pas statistiquement significative. Il y avait des différences statistiques significatives entre les étudiants des phases A, B et C quant aux approches ponctuelle ($F_{(2, 543)} = 0.51$, $p=0.60$) et coordonnée ($F_{(2, 543)} = 2.26$, $p=0.11$). Plus particulièrement, les étudiants de la phase A ($\overline{X}$ =0.47, SD=0.36) ont utilisé l'approche ponctuelle plus souvent que ceux des phases B ($\overline{X}$ =0.45, SD=0.37) et C ($\overline{X}$ =0.44, SD=0.37) mais cette différence n'était pas statistiquement significative. Quant à l'approche coordonnée, les étudiants de la phase A ($\overline{X}$ =0.32, SD=0.35) l'ont utilisé plus souvent que ceux des phases B ($\overline{X}$ =0.27, SD=0.35) et C ($\overline{X}$ =0.25, SD=0.32), mais cette différence n'était pas non plus statistiquement significative. Il est remarquable que de manière

générale les étudiants des trois phases ont utilisé plus souvent l'approche ponctuelle que l'approche coordonnée dans les tâches de résolution de fonctions simples.

4.2 Analyse hiérarchique de similitude

Les réponses correctes des étudiants participant dans les phases A, B et C aux tâches 1, 2, 3 et 4 et aux problèmes 1, 2 et 3, sont présentées dans les diagrammes de similitude dans les figures 1, 2 et 3 respectivement. Les trois diagrammes sont assez similaires. Plus particulièrement, dans tous les diagrammes, deux groupes de variables peuvent être distingués.

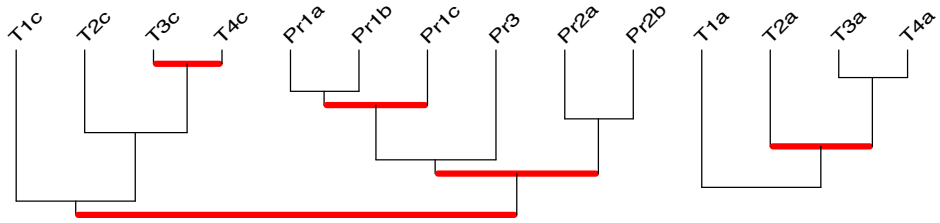


Figure 1 : Diagramme de similitude des réponses des élèves-professeurs participant à la phase A.

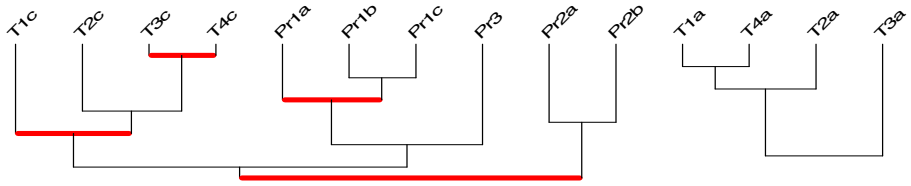


Figure 2 : Diagramme de similitude des réponses des élèves-professeurs participants à la phase B.

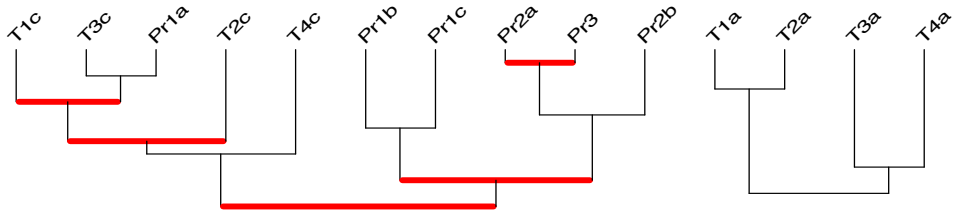


Figure 3 : Diagramme de similitude des réponses des élèves-professeurs participants à la phase C.

Le premier groupe est constitué des variables “T1c”, T2c”, “T3c”, “T4c”, “Pr1a”, “Pr1b”, “Pr1c”, “Pr2a”, “Pr2b” et “Pr3”et se réfère à l’utilisation faite de l’approche coordonnée dans la résolution du problème. Le deuxième groupe est constitué des variables “T1a”, “T2a”, “T3a” and “T4a” qui représentent l’utilisation faite de l’approche algébrique. A partir des diagrammes de similitude, il peut être observé que le premier groupe inclut les variables correspondant à la résolution des problèmes complexes et les variables représentant l’approche coordonnée.

Plus particulièrement, l’approche coordonnée des étudiants pour les tâches simples sur les fonctions est liée étroitement à l’efficacité dans la résolution des problèmes. Cette étroite connexion peut indiquer que les étudiants qui peuvent utiliser efficacement différents types de représentation - dans ce cas à la fois les représentations algébriques et graphiques - sont alors capables d’observer les liens et relations dans les problèmes, et sont plus compétents dans la résolution de problèmes. Il est intéressant de noter le fait que les ensembles de similitudes présentés dans les trois diagrammes sont presque les mêmes, ce qui montre que les liens et relations entre les approches et la résolution du problème sont très forts et durables.

5. Conclusions

La problématique centrale de cette étude se référait à l’approche utilisée par les élèves-professeurs pour la résolution de tâches sur des fonctions simples. Il est important de savoir si les enseignants font preuve de souplesse dans l’utilisation de représentations graphiques et algébriques pour la résolution de problème. La plupart des professeurs ayant participé dans les phases A, B et C, ont utilisé une approche ponctuelle afin de résoudre des tâches de fonctions simples. Une approche coordonnée est fondamentale dans la résolution de problème, et néanmoins beaucoup d’étudiants ne la maîtrisent pas. Ce résultat se situe dans la ligne directe des résultats d’autres recherches qui concluent que beaucoup d’étudiants traitent les fonctions en suivant une approche ponctuelle alors qu’une approche géométrique ou globale est plus puissante (Even 1998). Les étudiants qui peuvent facilement et librement utiliser une approche coordonnée ont une meilleure et plus puissante compréhension des relations entre les représentations graphiques et algébriques et sont plus brillants dans la résolution de problème. La préférence des étudiants pour la représentation algébrique est probablement liée à l’accent mis par l’enseignement sur les représentations algébriques et leur manipulation, qui dominent le programme.

La performance des étudiants dans la résolution des problèmes verbaux est modeste. Les professeurs participant à la phase A ont mieux réussi que ceux des phases B et C. Bien que les problèmes utilisés dans cette étude ressemblent à ceux

enseignés à l'école, les étudiants ont éprouvé des difficultés. Ces résultats nous conduisent à penser que, pour donner une réponse correcte à un problème verbal impliquant des fonctions, les étudiants doivent être capables de jongler avec dextérité entre différentes représentations des fonctions et de passer facilement d'une représentation à une autre.

De plus, un résultat important de cette étude réside dans le lien entre l'approche coordonnée et la résolution du problème. Les informations récoltées dans chaque phase montrent que les étudiants qui suivent une approche coordonnée peuvent plus facilement comprendre les relations entre les représentations graphiques et symboliques et ainsi être capables de fournir une solution correcte à des problèmes verbaux. De plus, il est notable que cette étroite relation entre l'approche coordonnée et la capacité à résoudre un problème s'avère forte et stable. Les deux approches sont apparues aussi dans d'autres recherches (Even, 1998; Mousoulides & Gagatsis, 2004). En particulier l'approche coordonnée est apparue sous des termes différents comme approche géométrique ou approche globale. Nous avons proposé le terme « approche coordonnée » parce que les étudiants qui suivent l'approche géométrique ou globale tirent aussi des informations de l'expression algébrique des fonctions et coordonnent les deux types des connaissances afin d'arriver à une réponse correcte.

Dans cette étude, un résultat très important réside dans la stabilité de ces deux approches. Même si la deuxième phase a été conduite deux ans après la première et la troisième trois ans après, et bien que des changements majeurs soient apparus dans le système éducatif tant sur les programmes scolaires de mathématiques, que dans les manuels scolaires de mathématiques et les sujets d'examen, les approches ont été les mêmes et la forte relation entre l'approche coordonnée et la capacité à résoudre un problème s'est maintenue. La seule différence entre les trois phases s'observe en résolution de problèmes : Les enseignants participant à la phase A ont mieux réussi dans la résolution de problèmes que ceux des phases B et C. Cette différence est probablement le résultat des changements majeurs effectués dans l'enseignement secondaire mais elle n'influe pas sur la stabilité générale du phénomène, ainsi que le révèlent les trois diagrammes de similarité. Il serait intéressant d'organiser une intervention didactique auprès des élèves de l'enseignement secondaire, basée sur la visualisation dynamique des différentes approches, afin d'étudier de possibles modifications de cette stabilité générale.

Comment introduire le type d'approche (ponctuelle ou coordonnée) dans une définition –modèle de l'Espace de Travail Mathématique (ETM) inspiré de l'Espace de Travail Géométrique (Houdement et Kuzniak, 2003 ; Kuzniak, 2009) ?

La stabilité observée sur les approches suivies par les élèves-professeurs de l'Université de Chypre de trois années académiques différentes, indépendamment de l'enseignement qu'ils ont reçu et des manuels des mathématiques qui ont été

utilisés lors de leur scolarité secondaire, conduit à imputer leurs difficultés à des causes d'ordre plutôt sémiotique qu'épistémologique. Donc la nature sémiotique de la transmission des informations et des savoirs devrait être une partie constituante dans une définition–modèle de l'Espace de Travail Mathématique (ETM).

Bibliographie

AINSWORTH, S., BIBBY, P. & WOOD, D. (1997), *Evaluating principles for multi-representational learning environments,* Paper presented at the 7th European Conference for Research on Learning and Instruction, 1997, August, Athens.

ARTIGUE, M. (2006), Apprendre les mathématiques au niveau universitaire : ce que les recherches récentes nous apprennent dans ce domaine. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11, 269 – 288. IREM de Strasbourg.

ARTIGUE, M. (2009), L'enseignement des fonctions à la transition lycée – université. In B. Grugeon (ed.), *Actes du XVe Colloque CORFEM* 2008, pp. 25-44. Université de Cergy-Pontoise, IUFM de Versailles.

ASPINWALL, L., SHAW, K. L. & PRESMEG, N. C. (1997), Uncontrollable mental imagery: Graphical connections between a function and its derivative, *Educational Studies in Mathematics* 33, 301-317.

BALACHEFF N. (1995). Conception, connaissance et concept. In : Grenier D. (ed.) *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaires 1994-1995,* 219-244. Grenoble : Université Joseph Fourier.

BALACHEFF N., GAUDIN N. (2002), *Students' conceptions: an introduction to a formal characterization*. Les cahiers du laboratoire Leibniz, 65, 1-21.

BODIN, A., COUTURIER, R. & GRAS, R. (2000), *CHIC : Classification Hiérarchique Implicative et Cohésive-Version sous Windows – CHIC 1.2*, Rennes : Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques.

BREIDENBACH D., DUBINSKY, HAWKS J., NICHOLS D. (1992), Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics* 23, 247-285.

BROUSSEAU G. (1997), *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

BELL A., JANVIER C. (1981), The interpretation of graph representing situations. *For the Learning of Mathematics* 2(1), 34-42.

CASTELA C. (1995), Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en didactique des mathématiques*. 15(1) 7-47.

CONFREY J. (1990), A review of the research on students conceptions in mathematics, science, and programming. In: Courtney C. (ed.) *Review of research in education*. American Educational Research Association 16, pp. 3-56.

DUBINSKY, E. & HAREL, G. (1992), The nature of the process conception of function, dans *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (Eds. Dubinsky & Harel), 85-106, United States: The Mathematical Association of America.

DUFOUR – JANVIER, B., BEDNARZ, N. & BELANGER, M. (1987), Pedagogical considerations concerning the problem of representation, dans *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (Ed. Janvier), 109-122, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

DUVAL, R. (2002), The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education* **1.2**, 1-16.

EISENBERG, T. & DREYFUS, T. (1991), On the reluctance to visualize in mathematics, dans *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (Eds. Zimmermann & Cunningham), 9-24, United States: Mathematical Association of America.

ELIA, I., GAGATSIS, A., PANAOURA, A., ZACHARIADES, T., & ZOULINAKI, F. (2009). Geometric and algebraic approaches in the concept of limit and the impact of the "didactic contract". *International Journal of Science and Mathematics Education, 7*(4), 765-790.

ELIA, I., PANAOURA, A., GAGATSIS, A., GRAVANNI, K., & SPYROU, P. (2008). Exploring different aspects of the understanding of function: Toward a four-facet model. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 8*(1), 49-69.

ELIA, I., PANAOURA, A., ERACLEOUS, A., & GAGATSIS, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations. *International Journal of Science and Mathematics Education, 5,* 533-556.

EVEN, R. (1998), Factors involved in linking representations of functions, *The Journal of Mathematical Behavior* **17.1**, 105-121.

GAGATSIS, A., DELIYIANNI, E., ELIA, I. & PANAOURA, A.(2011), Explorer la flexibilité : le cas du domaine numérique. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 16,* 21-38.

GREENO, J. G. & HALL, R.P. (1997), Practicing representation: Learning with and about representational forms, *Phi Delta Kappan* **78**, 361-367.

HITT, F. (1998), Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17*(1), 123-134.

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (2003), Elementary geometry split into different geometrical paradigms, dans *Proceedings of CERME 3* (Ed. Mariotti), Bellaria, Italy.[On line]
http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/draft/proceedings draft

KUZNIAK, A. (2009), Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France, dans *Cyprus and France Research in Mathematics Education* (Eds. Gagatsis, Kuzniak, Deliyianni, & Vivier), 71-89, Nicosia, University of Cyprus.

LERMAN, I. C. (1981), *Classification et analyse ordinale des données*, Paris, Dunod.

MARKOVITS, Z., EYLON, B. & BRUCKHEIMER, M. (1986), Functions today and yesterday, *For the Learning of Mathematics* **6.2**, 18-28.

MOSCHKOVICH, J., SCHOENFELD, A. H. & ARCAVI, A. (1993), Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of linear relations and connections among them, dans *Integrating research on the graphical representation of functions* (Eds. Romberg, Fennema, & Carpenter), 69–100, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

MONOYIOU, A. & GAGATSIS, A. (2008a), The stability of students' approaches in function problem solving: A coordinated and an algebraic approach, dans *Research in Mathematics Education* (Ed. Gagatsis), 3-12, Nicosia, University of Cyprus.

MONOYIOU, A. & GAGATSIS, A. (2008b), A coordination of different representations in function problem solving, *Article available at the website of the 11th International Congress of Mathematics Education, under Topic Study Group 20 (http://tsg.icme11.org/tsg/show/21),* Monterrey, Mexico.

MOUSOULIDES, N. & GAGATSIS, A. (2004), Algebraic and geometric approach in function problem solving, dans *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Eds. Johnsen Hoines & Berit Fuglestad), 3, 385-392, Bergen, Norway: Bergen University College.

ROBERT, A. (1998), Outils d'analyse des contenus à enseigner au lycée et à l'université. Recherches en Didactique des Mathématiques, 18(2), 139-190.

SFARD, A. (1992), Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - The case of function, dans *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Eds. Dubinsky & Harel), 59-84, United States: The Mathematical Association of America.

SIERPINSKA, A. (1989) , *On 15-17 years old students' conceptions of functions, iteration of functions and attractive fixed points*. Institut de Mathématiques, preprint 454. Varsovie: Académie des Sciences de Pologne.

SIERPINSKA, A. (1992), On understanding the notion of function, dans *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Eds. Dubinsky & Harel), 25-28, United States: The Mathematical Association of America.

SMITH, J.P., DISESSA, A.A. & ROCCHELLE, J. (1993), Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition, *Journal of the Learning Sciences* **3**, 115-163.

VERGNAUD, G. (1981), Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 2(2) 215-231.

VERGNAUD, G. (1991), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques,* 10(2/3), 133-169.

VANDERBROUCK, F. (2011), Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16, 149-185. IREM de Strasbourg.

VINNER S. (1983) Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* 14, 293-305

VINNER, S. (1987), Continuous functions - images and reasoning in college students. In: Bergeron J. C.,HERSCOVICS N., KIERAN C. (eds.) *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3 pp. 177-183). Montréal, Canada: Université de Montréal.

VINNER, S. (1992), The function concept as a prototype for problems in mathematics education. In: DUBINSKY E., HAREL G. (eds.) *The concept of Function*. (MAA Notes Vol. 25, 195-213), Mathematical Association of America.

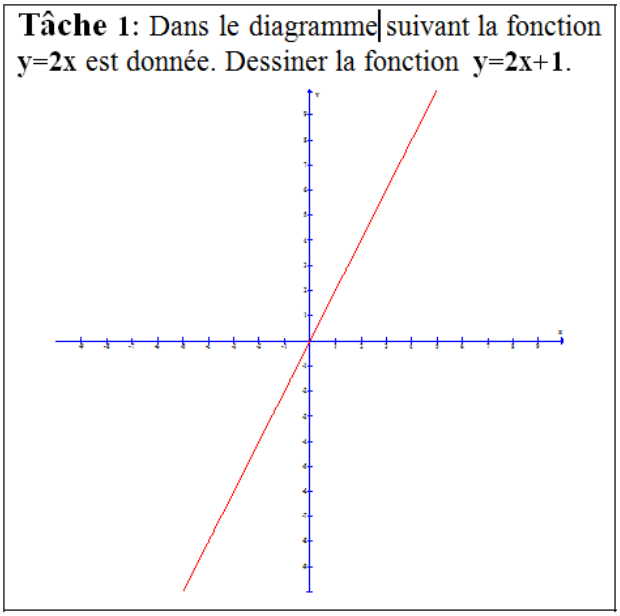
VINNER, S. & DREYFUS, T. (1989), Images and definition for the concept of function. *Educational Studies in Mathematics* 20(4) 356-366.

ATHANASIOS GAGATSIS & ANNITA MONOYIOU

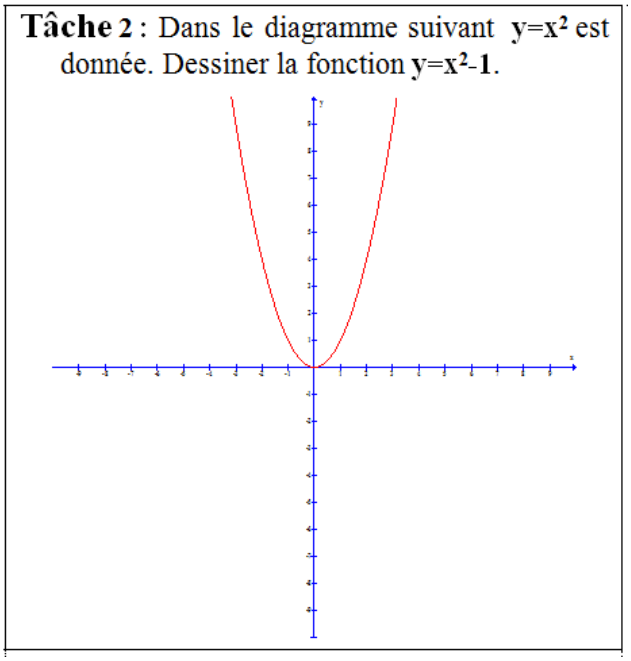
gagatsis@ucy.ac.cy monannita @yahoo.com

Annexe **Test**

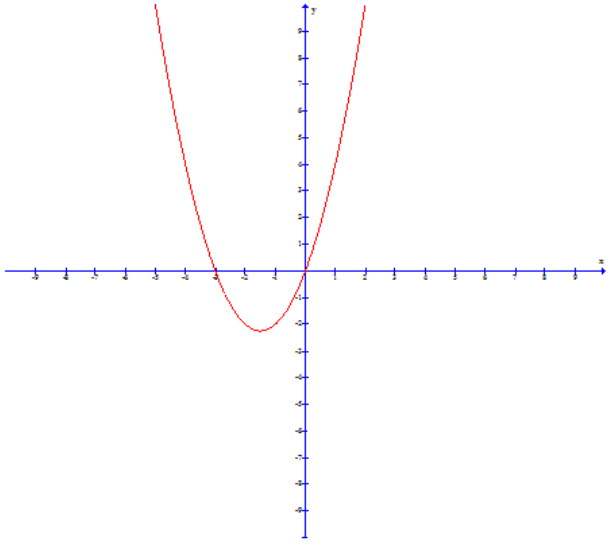
Tâche 1: Dans le diagramme suivant la fonction **y=2x** est donnée. Dessiner la fonction **y=2x+1**.



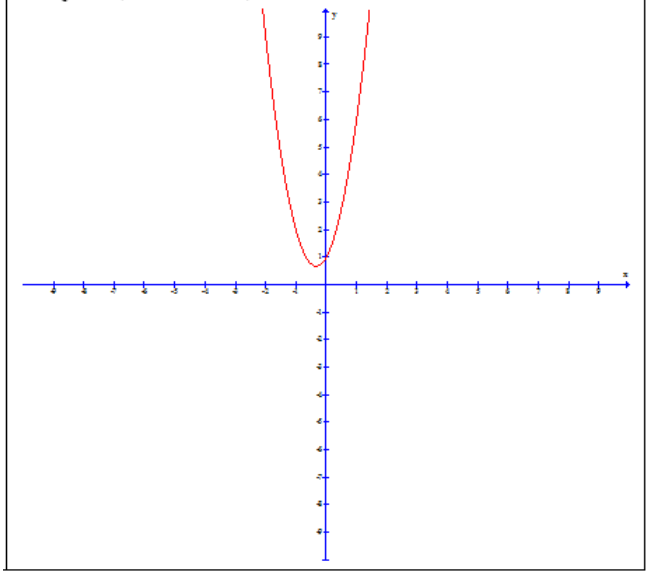
Tâche 2 : Dans le diagramme suivant **$y=x^2$** est donnée. Dessiner la fonction **$y=x^2-1$**.



Tâche 3: Dans la diagramme suivant $y=x^2+3x$ est donnée. Dessiner la fonction $y=x^2+3x+2$.



Tâche 4: Dans le diagramme suivant $y=3x^2+2x+1$ est donnée. Dessiner la fonction $y= -(3x^2+2x+1)$.



Problème 1: Un réservoir contient 600 L d'essence (quantité initiale). Un camion-citerne remplit le réservoir avec de l'essence. Le camion-citerne contient 2000 L d'essence et le flux de remplissage est de 100 L par minute.

a. Utilisez cette information afin de donner deux équations.

b. Dessiner les deux graphiques (le volume d'essence dans le réservoir en fonction du temps t et le volume d'essence dans le camion en fonction du temps t).

c. Trouver quand le contenu du réservoir est égal à celui du camion.

Problème 2: Dans une colonie des fourmis le nombre de fourmis (A) augmente selon la fonction: $A = t^2 + 1000$, où t est le nombre de jours. Le nombre de grains que les fourmis conservent dans la colonie augmente selon la fonction $S = 3t + 3000$, où t est le nombre de jours
a. Utiliser cette information de manière à dessiner les deux graphes.
b. Trouver quand le nombre de fourmis dans la colonie et le nombre de grains sont égaux.

Problème 3: La fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ est donnée. Les nombres a, b et c sont des nombres réels et $f(x)$ est égal à 4 quand $x = 2$ et $f(x)$ est égal à (-6) quand $x = 7$. Trouvez combien de solutions réelles possède l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ et expliquez votre réponse.

MONCEF ZAKI ET ZAHID EL M'HAMEDI

ASPECTS DE QUELQUES CRITIQUES NON FONDEES DE LA THEORIE DES TESTS STATISTIQUES

Abstract. Aspects of some no founded critics of statistical tests theory
Many critics have been issued since 1960 about significance testing theory of Fisher and hypothesis testing theory of Neyman-Pearson, notably in the domains of sociology and psychology. The controversy about the statistical tests has essentially bearing upon, on its use and on the interpretation of results that will generate. Some authors and professional associations proposed the gap of this concept in the teaching or at least be going with others inferential methods. We treat this subject in a purely didactic viewpoint, by analyzing the essential of these critics in the context of teaching these theories. One a priori analysis of these critics has allowed us to isolate many elements that demonstrate the no soundness. So, the exploratory study that we have led with students specialised in statistics, have involved some results that corroborate, if not confirm, the pertinence of the elements of our starting hypothesis «the majority of these critics must rather been imputed to one no mastery of statistical test concept by some users and to underlying interpretative abuses, and not to the considerations intrinsically linked to the concept of statistical test or to its teaching », that represent a plea of the statistical tests and of its teaching.

Résumé. Plusieurs critiques ont été émises à propos de la théorie des tests de signification de Fisher et celle des tests d'hypothèses de Neyman-Pearson, notamment dans les domaines de la sociologie et de la psychologie, et ce dès les années 1960. La controverse à propos des tests statistiques a porté essentiellement sur son utilisation et sur les interprétations qui en découlent. Certains auteurs et associations professionnelles en sont allés jusqu'à vouloir proposer la mise à l'écart de la théorie des tests statistiques de l'enseignement, ou du moins son accompagnement par d'autres méthodes inférentielles. Pour notre part, nous abordons ce sujet d'un point de vue purement didactique, en analysant l'essentiel de ces critiques dans le contexte d'enseignement de ces théories. Une analyse a priori de ces critiques nous a permis de dégager plusieurs éléments qui en démontrent le non bien fondé. Par ailleurs, des observations que nous avons conduites auprès d'étudiants se spécialisant en statistique, ont donné lieu à des résultats qui corroborent, sinon confirment, la pertinence des éléments de notre analyse a priori en faveur des tests statistiques. Ainsi, ce travail nous a permis de valider notre hypothèse de départ « la majorité de ces critiques devrait plutôt être imputée à une non maîtrise du concept de tests statistiques par certains utilisateurs et aux abus interprétatifs qui en découlent, et non pas à des considérations intrinsèquement liées au concept même des tests statistiques ou à leur enseignement », ce qui représente un plaidoyer de taille pour les tests statistiques et leur enseignement.

Mots-clés : Enseignement des tests statistiques, Test de signification, Test d'hypothèses, Approche Bayésienne, Controverse, Critiques non fondées

---

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 18, p. 139-172.
© 2013, IREM de STRASBOURG

1. Introduction

Le concept de test statistique est la pierre angulaire de recherches empiriques dans des domaines aussi variés que l'éducation, la psychologie, la sociologie, la médecine, l'agronomie, l'écologie, le droit ou l'économétrie. Contrairement aux autres outils de l'inférence statistique, ce concept a fait l'objet de multiples controverses et a suscité beaucoup de débats [Jones, 1955 ; Rozeboom, 1960 ; Bakan, 1960 ; Morrisson et Henkel, 1970 ; Meehl, 1978; Oakes, 1986; Cohen, 1994; Krantz, 1999; Wilkinson, 1999; Batanero, 2000; Nickerson, 2000; Ben-Zvi et Garfieled, 2004; Pfannkuch et Wild, 2004; Batanero et Diaz, 2006; Hubbard et Lindsay, 2008;…]. Ces controverses ont essentiellement porté sur sa procédure d'utilisation par les chercheurs et praticiens, ainsi que sur l'interprétation des résultats qui en découlent [Denis, 2004]. Certains auteurs et associations professionnelles [Kline, 2004 ; American Psychological Association, 1994] en sont allés jusqu'au point de vouloir proposer la pure et simple exclusion des tests statistiques de l'enseignement, ou du moins leur accompagnement d'autres méthodes statistiques inférentielles tels les intervalles de confiance, la taille de l'effet, la réplication ou encore la statistique bayésienne. A ce propos, nous citerons Kline [2004] «*I argue that the criticism have sufficient merit to support the minimization or elimination of NHST in the behavioral sciences, …*», ou bien Hager [2000] «*As a consequence of this critique, it is recommended that statistical tests should be banned from science, or replaced by other methods, or supplemented either by other methods or judgment* …», ou encore Brandstätter et Kepler [1999] «*In order to avoid the problems posed by significance tests, various methods like graphic data analyses [Cohen, 1994; Tukey, 1977], meta-analyses [Schmidt, 1996], replications of studies, and confidence intervals [Cohen, 1994; Sedlmeier, 1996] have been proposed as alternatives to significance testing*». Cependant, et malgré les prétendus défauts décelés dans l'application de ce concept, ce dernier a été largement utilisé par le passé, continue de l'être aujourd'hui, et le restera certainement pour plusieurs années encore.

Les critiques avancées à l'encontre des tests statistiques ne peuvent être fondées que si celles-ci sont d'abord présentées dans un contexte d'utilisation bien déterminé. En effet, la méthodologie statistique dans laquelle va s'inscrire un test statistique est intimement liée à la discipline dans laquelle ce dernier sera utilisé. La formulation même des hypothèses va dépendre de la spécificité de la discipline et du modèle théorique qu'elle met en jeu, et ce n'est qu'à partir de cette formulation que l'on va convenir d'un choix pertinent d'une procédure de test statistique et de ses éléments de jugement, qui seront à la base des conclusions et interprétations. Enfin, il y va de soi qu'une bonne maîtrise des raisonnements et procédures sous-jacents aux tests statistiques joue un rôle très important pour un choix approprié et justifié de cet outil inférentiel.

Pour ce qui concerne cette étude, nous nous intéresserons aux tests statistiques dans leur contexte d'enseignement, domaine qui reste peu exploré dans les recherches en didactique des mathématiques, comme le souligne à juste titre Carranza [2011] « *... notre travail révèle les manques dans les recherches en didactique des mathématiques de travaux sur une notion aussi fondamentale que l'inférence statistique. De tels travaux devraient prendre plus en compte le rôle des interprétations tant pour l'architecture d'un test, que pour son interprétation* ». Ainsi, nous analyserons quelques critiques à l'encontre des tests statistiques relevées dans la littérature, que nous confronterons aux résultats d'observations auprès d'étudiants sur leurs approches conceptuelles relatives aux raisonnements et procédures sous-jacents aux tests statistiques, afin de questionner dans le contexte d'enseignement le bien-fondé de ces critiques.

Ces critiques sont généralement adressées aux utilisateurs de tests statistiques, et portent essentiellement sur les procédures utilisées et les interprétations qui en découlent. Notre hypothèse est que la majorité de ces critiques devrait être plutôt imputée à une non maîtrise du concept de tests statistiques par certains utilisateurs et aux abus interprétatifs qui en découlent, et non pas à des considérations intrinsèquement liées au concept même des tests statistiques ou à leur enseignement ; auquel cas, ces critiques s'avéreront non fondées.

Certes, certaines études ont révélé quelques difficultés conceptuelles relatives aux tests statistiques auxquels sont confrontés les étudiants [Zendrera, 2010], notamment autour de l'amalgame entre les *tests de signification* développés par Fisher[1] et les *tests d'hypothèses* (ou de décision) formalisés par les statisticiens Neyman[2] et Pearson[3] que certains auteurs [Gigerenzer, 1993] ont qualifié de « logique hybride de l'inférence scientifique » ; néanmoins, ces difficultés peuvent être surmontées en préconisant des éléments de mesures adéquats pour l'enseignement statistique, en l'occurrence à l'aide d'exemples pertinents qui appuient la différence de procédures chez Fisher et Neyman-Pearson [Zaki et El M'Hamedi, 2009 ; El M'Hamedi, 2010].

Dans cet article, nous présenterons une analyse *a priori* de l'essentiel des critiques s'opposant à l'utilisation du concept de test statistique[4], et que nous jugeons *non fondées*. Ensuite, nous présenterons les résultats d'observations menées auprès d'étudiants, qui vont appuyer notre analyse. Mais auparavant, nous donnerons un

[1]Sir Ronald Aylmer Fisher : (1890 - 1962), statisticien anglais.
[2]Jerzy Neyman : (1894 - 1981), statisticien et mathématicien polonais.
[3]Egon Pearson : (1895 - 1980), statisticien anglais, fils de Karl Pearson (1857 – 1936).
[4]Tout au long de cet article, l'expression ''test statistique'' représente à la fois le concept de test de signification de Fisher et celui de test d'hypothèses de Neyman-Pearson.

bref aperçu sur les procédures d'application des concepts de test de signification et de test d'hypothèses, moyennant une situation de test statistique usuellement utilisée dans l'enseignement. L'objectif en est, d'une part de mettre en évidence ces procédures, et d'autre part de rappeler quelques notions qui seront évoquées dans l'analyse des critiques.

2. La situation du test de conformité selon l'approche de Fisher et celle de Neyman-Pearson

Fisher [1925, 1935, 1956] et Neyman-Pearson [1928, 1933] sont à l'origine d'ouvrages et d'articles fondateurs des théories relatives aux tests de signification et aux tests d'hypothèses. Plus récemment, Carver [1953] et Poitevineau [1998] ont présenté les tests statistiques d'une manière plus simple et facile à comprendre.

Néanmoins, nous allons ci-après nous baser sur la situation de tests statistiques (dite de *conformité*) pour esquisser un bref aperçu sur les procédures sous-jacentes à ces deux types de tests, sachant que nous allons donner quelques éclaircissements dans la partie relative aux critiques non fondées que nous développerons plus loin. La situation est la suivante :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type connu σ :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Nous considérons les deux hypothèses statistiques suivantes H_0 et H_1 relatives à la moyenne μ de X, et auxquelles nous voulons appliquer ***un test statistique***[5] :

$$\begin{cases} H_0 : \text{“}\mu \leq \mu_0\text{”} \\ H_1 : \text{“}\mu > \mu_0\text{”} \end{cases}$$

Pour cela, nous avons recueilli à l'aide d'un échantillon $(X_1,...,X_{n_0})$ de taille n_0 et d'une épreuve (ou réalisation) w_0, les données D_0 : $(x_1^0,...,x_{n_0}^0)$ telles que

$\bar{x}_{ob} = \dfrac{x_1^0 + ... + x_{n0}^0}{n_0}$ (moyenne *ob*servée).

$\overline{X} = \dfrac{X_1 + ... + X_{n_0}}{n_0}$ désigne la moyenne d'échantillon $(X_1,...,X_{n_0})$ issu de la variable aléatoire X.

Tableau 1. Situation du test de conformité

[5]C'est-à-dire : appliquer un test de signification et un test d'hypothèses.

2.1. Tests de signification au sens de Fisher

Le rôle d'un test de signification est de *conclure,* avec une forte probabilité, si les données observées D_0 contredisent l'hypothèse nulle H_0. Les deux conclusions possibles sont "Oui" ou "Non" :

- Oui: H_0 est fausse (ou Rejeter H_0). On dit aussi que les données observées D_0 sont statistiquement significatives.

- Non : Echec dans le rejet de H_0 (ou les données D_0 sont statistiquement non significatives).

Pour ce faire, nous déterminons la probabilité $P(\overline{X} \geq \overline{x}_{ob} \mid H_0)$[6], appelée "p-value". Elle est égale à $P\left[Y \geq \frac{\sqrt{n_0}\left(\overline{x_{ob}} - \mu_0\right)}{\sigma} \right]$, où Y suit la loi N(0,1), car $\frac{\sqrt{n_0}(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma}$ suit la loi N(0,1). Nous la comparons à un seuil de signification, noté α, choisi *a posteriori* (c'est-à-dire après avoir recueilli les données). Si cette probabilité est inférieure ou égale à α, nous concluons que H_0 est fausse. Si, au contraire, elle est supérieure à α, nous concluons que nous avons échoué dans le rejet de H_0.

2.2. Tests d'hypothèses au sens de Neyman-Pearson

Le rôle d'un test d'hypothèses est de *décider*, moyennant un risque d'erreur, entre H_0 et H_1. Les deux décisions auxquelles nous pouvons aboutir sont : "Rejeter H_0 et Accepter H_1" *ou bien* "Accepter H_0 et Rejeter H_1".

La procédure adoptée par Neyman-Pearson consiste à élaborer une règle de décision, en fonction de la taille n_0 de l'échantillon et d'une valeur[7] α appartenant à l'intervalle]0,1[. Cette règle de décision donne lieu à la construction d'une région[8] de rejet de H_0 et d'acceptation de H_1. Cette région notée RC, est caractérisée par :

$$\begin{cases} P(RC|H_0) \text{ ne dépasse pas } \alpha \\ \text{et} \\ P(RC|H_1) \text{ est maximale} \end{cases}$$

[6]C'est la probabilité d'obtenir les données observées D_0 ou des données plus extrêmes que celles observées, sachant que H_0 est vraie.

[7]Appelée : "niveau de signification" du test.

[8]Appelée aussi : région critique du test.

Dans le cas de la situation que nous sommes en train de traiter :

RC= $\left\{(X_1,....,X_{n0})/\overline{X} \in \left]\mu_0 + \Phi_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n_0}},+\infty\right[\right\}$, où Φ_α est le quantile d'ordre (1-α) de la loi normale centrée réduite N(0,1).

Si $\bar{x}_{ob} \in \left]\mu_0 + \Phi_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n_0}},+\infty\right[$ alors nous décidons de rejeter H_0 et d'accepter H_1 : le test est dit statistiquement significatif. Si $\bar{x}_{ob} \in \left]-\infty,\mu_0 + \Phi_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n_0}}\right]$ alors nous décidons d'accepter H_0 et de rejeter H_1 : le test est dit statistiquement non significatif.

Le risque de 1ère espèce est la probabilité $P\left(\overline{X} \in \left]\mu_0 + \Phi_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n_0}},+\infty\right[\middle| H_0\right)$, et celui de 2ème espèce est la probabilité $P\left(\overline{X} \in \left]-\infty,\mu_0 + \Phi_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n_0}}\right] \middle| H_1\right)$. La puissance du test est $P\left(\overline{X} \in \left]\mu_0 + \Phi_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n_0}},+\infty\right[\middle| H_1\right)$: c'est le complément à 1 du risque de 2ème espèce.

3. Quelques aspects de critiques non fondées

La théorie des tests statistiques représente une partie de l'inférence inductive, qui utilise une logique mathématique très particulière, où les propositions inductives ne peuvent être traitées selon une logique formelle en vrai ou faux ; en fait, ces propositions ne peuvent être formulées que moyennant un degré de confiance, c'est-à-dire à l'aide d'une probabilité.

C'est cet aspect des tests statistiques qui a été à l'origine des premières critiques, avec bien entendu un ensemble de glissements au niveau des interprétations engendrés par des pratiques non maîtrisées. Cela a suscité une vive controverse dès le début des années 1960 dans des domaines comme la sociologie ou la psychologie, et qui ont fait l'objet d'études détaillées comme par exemples [Lecoutre B., Lecoutre M.-P. et Poitevineau, 2001], [Lecoutre et Poitevineau, 2000] ou [Morrison et Henkel, 1970].

Pour ce qui nous concerne, nous nous limiterons principalement aux critiques qui versent directement dans le contexte de l'enseignement des tests statistiques, contexte qui nous intéresse dans cette étude, et dont nous ferons une analyse *a priori* à travers laquelle nous mettrons en valeur des éléments qui remettent en question le bien-fondé de ces critiques.

3.1. Le raisonnement sous-jacent aux tests de signification est fallacieux

Pollard et Richardson [1987] ont critiqué la logique adoptée dans le raisonnement des tests de signification, à savoir le fait qu'une p-value est *faible implique* H_0 est *fausse*. Ils ont prétendu que cette logique était basée sur la suite de raisonnements R_1, R_2, R_3 et R_4 suivants :

R1 : Si A alors non B
Si B alors non A

R2 : Si A alors probablement non B
Si B alors probablement non A

R3 : Si A (l'hypothèse nulle est correcte), alors probablement non B (une différence (un effet) de taille égale à celle impliquée par les données observées D_0).
Si B alors probablement non A.

R4 : Si A (personne X est américaine), alors probablement non B (personne X est dans le Congres).
Si B alors probablement non A.

Cohen [1994], encore plus direct que Pollard et Richardson, a affirmé que le raisonnement sous-jacent aux tests de signification, qui apparait implicitement dans certains articles publiés, et explicitement dans certains ouvrages de statistique, est R3. Il a par ailleurs qualifié ce raisonnement de "*Illusion of attaining improbability*" ou encore "*Illusion of probabilistic proof by contradiction*".

Il est clair que le raisonnement R_2 n'a pas de sens défini en logique formelle, et que tout ce qui s'en suit est bien entendu fallacieux, en l'occurrence le raisonnement R_3. Or, le vrai raisonnement qui est sous-jacent aux tests de signification, et qui apparaît dans [Fisher, 1956, p. 42], est le raisonnement R_5 suivant :

R5 : Si A (l'hypothèse nulle est correcte) alors B (l'effet sous test) est improbable.
Si B alors soit (A et un événement improbable) soit non A.

Ce qui est équivalent à :

- Si H_0 est vraie alors l'effet produit par les données D_0 est négligeable (c'est-à-dire l'événement "$D \geq D_0$" est improbable).
- Si les données observées D_0 produisent un effet (c'est-à-dire si la p-value est faible) alors deux cas se présentent :
  (i) soit H_0 est vraie et (mais) l'événement "$(D \geq D_0)$" improbable (rare, inhabituel, ...) est réalisé,
  (ii) soit H_0 est fausse.

Ainsi, dans le cas d'une p–value faible, Fisher accepte (ii) et écarte (i), en utilisant intuitivement un raisonnement (faible) de type *aristotelicien*, considérant que la taille de l'effet observé (produit par les données D_0), ou sous test, est un signe faillible[9], et que cet effet ne doit être dû ni aux fluctuations d'échantillonnage, ni aux erreurs de mesures expérimentales.

3.2. L'hypothèse H_0 est presque toujours fausse

Les tests statistiques mettent souvent en jeu une hypothèse nulle simple du type: H_0: "$\theta=\theta_0$".Meehl [1967] a critiqué ouvertement les tests statistiques, en avançant qu'une telle hypothèse H_0 ne peut être vraie, même à la dixième décimale. Cohen [1977] à son tour a proclamé que dans un test d'hypothèses, H_0 est toujours fausse, en disant qu'il suffit pour cela d'augmenter la taille de l'échantillon. Pourquoi alors mettre en œuvre un test statistique ? Plus récemment, Loftus [1996] a déclaré que : "*rejeter une hypothèse nulle simple, c'est comme rejeter la proposition selon laquelle la lune est faite de fromage vert*".

Il s'agit là de critiques inconsistantes. En effet, le résultat apporté par un test statistique, à savoir "rejeter H_0", "accepter H_0" ou "échouer à rejeter H_0", est une

---

[9]Outre les signes faillibles, Aristote utilise aussi les signes infaillibles, les probabilités, les exemples, les analogies, ..., comme modes de raisonnements dans sa Rhétorique. Pour plus de détail, consulter Macdonald [2004].

D'ailleurs, la théorie basée sur ce raisonnement (les signes faillibles) est appelée : "Théorie *faible* de Fisher". La faiblesse de cette théorie pourrait aisément être expliquée à partir de la règle de Bayès : $P(H_0|(D \geq D_0)) = \frac{P(H_0)}{P((D \geq D_0)|H_0)P(H_0) + P((D \geq D_0)|H_1)P(H_1)} P((D \geq D_0)|H_0)$, du fait que la p-value $P((D \geq D_0)|H_0)$ est faible, ne garantit pas toujours que la probabilité $P(H_0|(D \geq D_0))$ est faible (c'est-à-dire que H_0 est fausse). Il est intéressant de signaler que Fisher a aussi développé une autre théorie dite "Théorie *forte* de Fisher", qui se base sur la probabilité conditionnelle $P(H_0|D_0)$ et qui est utilisée dans le cas où l'on connait de manière *exacte* la probabilité *a priori* $P(H_0)$. L'existence chez Fisher des deux théories faible et forte, a permis aux statisticiens de les étiqueter respectivement de "*fréquentiste modéré*" et de "*quasi-bayésien*".

conclusion qui découle immédiatement de la distribution échantillonnale[10], et qui ne cherche aucunement à traiter la question de véracité ou de fausseté de H_0. En outre, H_0 : "$\theta=\theta_0$" n'est en fait qu'une écriture simplifiée du *modèle probabiliste* H_0 : "$P_\theta = P_{\theta 0}$", représentant une hypothèse ou une action scientifique, pour laquelle l'application d'un test statistique peut conduire à son acceptation, et ce non pas parce qu'il s'agit d'une hypothèse exacte, mais plutôt d'une hypothèse *robuste*, autrement dit capable de fournir de bonnes prédictions.

Quant à l'augmentation de la taille de l'échantillon, cela devrait plutôt renvoyer au registre des pratiques absurdes, sans pour autant constituer une critique à l'encontre des tests d'hypothèses : d'abord, parce qu'en pratique toute expérimentation a un coût, et par voie de conséquence une augmentation raisonnable de la taille d'un échantillon ne devient nécessaire que lorsque cela s'avère indispensable (par ex. approximation de la loi de la statistique mise en jeu ou encore estimation d'un paramètre du modèle sous-jacent). Par ailleurs, il est vrai que la puissance d'un test augmente en fonction de la taille de l'échantillon, mais encore une fois cela engendre un coût. C'est pourquoi, il est plus recommandé de commencer par calculer la taille de l'échantillon qui fournira la puissance recherchée, préalablement à la mise en place proprement dite du test. Maintenant, s'il arrive qu'un praticien doive recourir à un test très puissant, afin de déceler une signification statistique, *a priori* très faible, il est alors difficile d'attribuer un intérêt particulier à une telle signification.

En d'autres termes, un test statistique perd sa fonction et sa raison d'être si l'on augmente sans justification la taille de l'échantillon.

3.3. Le traitement asymétrique des hypothèses H_0 et H_1

Rozeboom [1960] a critiqué les tests statistiques du fait qu'ils sont asymétriques dans leur traitement des hypothèses statistiques H_0 et H_1. L'argument avancé est que dans un test statistique à deux hypothèses (i.e. H_a : "un paramètre $\theta=0$" et H_b : "$\theta=10$") l'acceptation d'une hypothèse reste arbitraire et surtout tributaire de ce qui est considéré comme H_0 et comme H_1.

La critique de Rozeboom n'est pas pertinente, aussi bien pour les tests de signification que pour les tests d'hypothèses. Dans l'approche de Fisher, on met plus de contrainte sur l'hypothèse H_0 en favorisant son rejet, et la question d'asymétrie ne se pose pas puisque la conclusion du test n'est exprimée qu'en fonction de H_0 : "rejeter H_0" ou "échec dans le rejet de H_0".

---

[10]La distribution d'échantillon dans le cas d'un test de conformité est celle de la statistique $Y = \frac{\sqrt{n_0}(\overline{X} - \mu_0)}{\sigma}$.

Dans l'approche de Neyman-Pearson, le test d'hypothèses joue un rôle de règle de décision entre deux hypothèses H_0 et H_1, qui ont respectivement un statut bien défini. Ces deux hypothèses représentent respectivement deux modèles, où l'hypothèse nulle H_0 renvoie au modèle de référence et donc à une action usuelle, que McLean [2000] traduit par « *aucune action* », alors que l'alternative H_1 renvoie à un nouveau modèle, et donc à une nouvelle *action*. En termes de décision, l'acceptation de H_0 ou de H_1 ne doit pas *a priori* être traitée sur le même pied d'égalité, celle de H_1 doit être traitée de manière plus rigoureuse et plus sévère que celle de H_0, car une telle acceptation conduit à une *nouvelle action* dont les conséquences peuvent être très coûteuses en cas de mauvaise décision.

Cela dit, les tests de signification et ceux d'hypothèses ne font *a priori* qu'une partie d'un processus global de l'inférence statistique. En cas de besoin, de telles procédures ne doivent donc pas être mises en œuvre isolément, il faut aussi les intégrer à un modèle de recherche plus général, en présence d'un plan expérimental adéquat.

3.4. L'arbitraire dans le choix du niveau de signification

La controverse sur les tests statistiques a aussi porté sur l'arbitraire du choix de niveau de signification α, en reprochant le fait que certaines données peuvent être statistiquement significatives à un niveau donné et le contraire à un niveau différent.

Il serait intéressant tout d'abord de mettre un peu de lumière sur cette question d'un point de vue historique : Dans son ouvrage "*Design of experiments*", Fisher [1935] a suggéré pour l'étude de la signification statistique de résultats issus d'expériences, la valeur conventionnelle correspondant à 5%. Il faut aussi rappeler qu'à l'époque, la majorité des exemples donnés par Fisher, relevait d'un même et seul contexte, celui de l'agronomie. Ultérieurement, Fisher[1956, p. 42] déclare "*In fact, no scientific worker has a fixed level of significance at wich from year to year and in all circumstances, he rejects hypotheses*" ; en d'autres termes, le choix du niveau de signification est loin d'être arbitraire, mais dépend des contraintes de la problématique, ainsi que des circonstances et conditions expérimentales. Aujourd'hui, avec le développement de nouvelles méthodes inférentielles, comme par exemple le data mining [Lovell, 1983], le choix du niveau de signification sera dans ce cas bien plus grand que la valeur standard 5% (biais de Lovell), du fait que l'on est amené à utiliser une même base de données pour tester différentes hypothèses.

Par ailleurs, dans certains domaines de recherches expérimentales, quelques praticiens en sont allés jusqu'à proposer une sélection de critères qui permettent de procéder à un choix *adéquat* du niveau de signification. C'est le cas par exemple en sociologie, où entre autres, Labovitz [1970] va proposer une liste (bien entendu non

exhaustive) de critères qui relèvent notamment des « *conséquences pratiques* », de la « *plausibilité des alternatives* », du « *degré de contrôle du plan expérimental* », ou encore de la « *robustesse du test* ».

Il serait enfin intéressant de signaler aussi que le choix du niveau de signification α peut être à l'origine d'amalgame dans un contexte d'enseignement entre les procédures de Fisher et celles de Neyman-Pearson, que Zaki et El M'Hamedi [2009] ont qualifié de « *procédure hybride* ». Cependant, cette difficulté peut être surmontée auprès des étudiants, en présentant des situations pertinentes, comme par exemple celles de tests paramétriques relatifs aux modèles continus, où l'on va nuancer la différence entre les logiques utilisées par Fisher et Neyman-Pearson, et ce, au niveau de l'étape ultime concernant les conclusions fournies respectivement par un test de signification et un test d'hypothèses.

3.5. L'attention excessive en faveur du risque de 1ère espèce en dépit de celui de 2ème espèce

Les risques d'erreurs de 1ère espèce : P(Rejeter $H_0|H_0$ vraie) et de 2ème espèce : P(Accepter $H_0|$ H_0 fausse) sont inversement reliés. Si l'on augmente l'un, l'autre est diminué [Cohen, 1977]. On reproche aux tests d'hypothèses de porter davantage d'intérêt au risque de 1ère espèce en dépit du risque de 2ème espèce, à savoir le fait que l'on impose au 1er risque de ne pas dépasser un niveau de signification α fixé au départ, sans pour autant pouvoir maîtriser le 2ème risque.

Cette critique n'a pas de fondement, si l'on se réfère à la construction même d'un test d'hypothèses telle qu'elle a été proposée par Neyman-Pearson. En intégrant les deux hypothèses H_0 et H_1 dans sa procédure de test statistique, Neyman-Pearson va introduire deux types de risques, représentant respectivement sous ces deux hypothèses (mettons pour simplifier les choses, dans un cas de test paramétrique, en fonction de θ) les coûts moyens $R(\theta,\delta)$ de la règle de décision δ, faisant l'objet de la solution du problème : ce sont les risques de première et seconde espèces. Dans la recherche de δ, la solution du problème ne permet pas d'agir (minimiser) sur les deux risques simultanément. Ainsi, dans sa solution, Neyman-Pearson ne va contrôler que le risque de 1ère espèce, *qui fait référence à son hypothèse d'intérêt* H_0, en fixant un seuil de signification α, pour aller chercher parmi les règles de décisions répondant à ce seuil, celles dont le risque de seconde espèce est le plus faible (ou encore dont la puissance est maximale). Ainsi, nous constatons d'emblée dans la procédure de Neyman-Pearson le rôle dissymétrique des hypothèses H_0 et H_1, qui ne relève pas de leur statut respectif (cf. § 3.3), mais qui constitue plutôt une contrainte mathématique dans le traitement de la notion de risque au niveau de l'élaboration de la solution au problème de tests d'hypothèses.

3.6. Les tests statistiques ne sont pas informatifs sur la probabilité que H_0 soit vraie

Une des critiques qui revient le plus souvent à l'encontre de l'utilisation des tests statistiques, est que de telles procédures ne permettent pas aux chercheurs de répondre à la question "sachant les données observées D_0, qu'elle est la probabilité que H_0 soit vraie ? " [Cohen, 1994], question qui revêt une grande importance dans les investigations de ces derniers. Il est certain que le concept de test statistique ne traite pas de telles probabilités. Si maintenant les chercheurs formulent des attentes de cet ordre, en utilisant des tests statistiques ; de telles formulations sont bien entendu aberrantes, et ne peuvent aucunement donner lieu à des critiques à l'encontre des tests statistiques.

Maintenant, d'autres outils de l'inférence statistique peuvent *éventuellement* répondre à une telle question, en l'occurrence celui de la statistique *bayésienne* qui se fonde sur la fameuse règle de *Bayès* :

$$P(H_0|D_0) = P(H_0).\frac{P(D_0|H_0)}{P(D_0)}.$$

4. Etude exploratoire auprès des étudiants

4.1. Objectif de l'étude et expérimentation

Les éléments dégagés à la lumière de l'analyse *a priori* des critiques avancées à l'encontre de la théorie des tests statistiques, corroborent notre plaidoyer en faveur de cette théorie. Le contexte de notre étude étant celui de l'enseignement, il nous a alors semblé pertinent de confronter notre analyse *a priori* de ces critiques avec les conceptions d'étudiants, en explorant leurs approches à propos de questions faisant l'objet des critiques analysées. L'enjeu de cette exploration est d'abord de remettre en question ces critiques, du moins dans le contexte de l'enseignement, et d'autre part de confirmer notre hypothèse de départ (cf. § 1), selon laquelle il faudrait plutôt remettre en question la non maîtrise du concept de test statistique chez certains utilisateurs et praticiens. En validant cette hypothèse, la théorie des tests statistiques peut alors encore prétendre à sa pertinence et son intérêt, au moins du point de vue de son enseignement, mais alors à condition aussi que soient pris en compte quelques éléments de mesures adéquats pour que cet enseignement soit réussi [Zaki et El M'Hamedi, 2009].

Nous avons conduit au courant du deuxième semestre de l'année universitaire 2010/2011 une expérimentation auprès de 55 étudiants répartis de la façon suivante : 41 en 2ème année «spécialité : Statistique» à l'Institut National de Statistique et d'Economie Appliquée de Rabat, et 14 en M1 du Master «Système d'Aide à la Décision et Management de Projets» à la Faculté des Sciences de Kenitra. Nous leur avons donc administré durant une demi-heure un questionnaire

en vrai - faux. Les étudiants interrogés ont tous suivi un enseignement classique de probabilités-statistique, d'un volume horaire qui dépasse les 100 heures, portant, entre autres, sur la théorie de base des probabilités (espaces probabilisés, variables aléatoires et lois de probabilités, lois des grands nombres, Théorème Centrale Limite,…), l'estimation ponctuelle et par intervalles de confiance, ainsi que les tests statistiques habituellement étudiés dans les cas paramétriques et non paramétriques.

Le questionnaire a été élaboré sur la base d'une situation relevant d'un test paramétrique d'hypothèses statistiques simples, généralement présentée aux étudiants dans leur cours sur les tests statistiques. Il est composé de 4 questions (numérotées de A à D), faisant référence aux contenus des critiques analysées précédemment.

Avant de procéder à l'analyse proprement dite des productions des étudiants, nous allons consacrer le prochain paragraphe à la présentation et à l'analyse *a priori* du questionnaire, afin de mieux cerner l'interprétation des réponses des étudiants.

4.2. Présentation et analyse *a priori* du questionnaire

Les quatre questions (numérotées de A à D) qui composent le questionnaire sont toutes relatives à la situation de test paramétrique dont les éléments sont présentés dans le tableau 2 suivant :

- X est une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité continue mais inconnue P_θ, où $\theta \in IR$.
- H_0 : "$\theta = \theta_0$" *vs.* H_1 : "$\theta > \theta_0$" (H_0 : *hypothèse nulle* et H_1 : *hypothèse alternative*).
- $(X_1,...,X_{n_0})$ un échantillon de taille n_0, issu de la variable aléatoire X.
- D_0 : $(x_1^0,...,x_{n_0}^0)$ des données observées, recueillies à l'aide de $(X_1,...,X_{n_0})$ et d'une expérimentation w_0 $\left((x_1^0,...,x_{n_0}^0) = (X_1(w_0),...,X_{n_0}(w_0))\right)$.
- $\hat{\theta}$: l'estimateur empirique de θ, associé à l'échantillon $(X_1,...,X_{n_0})$.
- $\hat{\theta}_{obs}$: la valeur de l'estimateur empirique $\hat{\theta}$ de θ, associée aux données observées D_0.
- $(\hat{\theta}_{obs} > \theta_0)$: condition réalisée.

Tableau 2. Eléments de la situation de test statistique retenue dans le questionnaire

(A) ***L'application d'un test statistique dans cette situation permet de conclure que H_0 est fausse si l'on estime que la probabilité $p = P(\hat{\theta} \geq \hat{\theta}_{obs} \mid H_0)$ est faible (c'est-à-dire si le calcul de p donne une valeur inférieure ou égale au niveau de signification α).***

A votre avis, le (les) raisonnement(s) utilisé(s) dans les procédures des tests statistiques impliquant cette conclusion est (sont) :

(1) [p est faible] *alors* [La probabilité de réalisation de H_0 sachant qu'on a observé les données D_0 est faible]. *Par conséquent*, H_0 est probablement fausse.

□ Vrai □ Faux

(2) [p est faible] *alors* [La probabilité que la différence observée $\left(\hat{\theta}_{obs} - \theta_0\right)$ soit due au seul hasard est faible]. *Par conséquent*, H_0 est probablement fausse.

□ Vrai □ Faux

(3) [p est faible] *implique* [Si H_0 est vraie alors probablement une différence telle celle impliquée par les données observées D_0, à savoir $\left(\hat{\theta}_{obs} - \theta_0\right)$, n'est pas réalisable] *ce qui est équivalent à* [La différence $\left(\hat{\theta}_{obs} - \theta_0\right)$, impliquée par les données observées D_0, est réalisable alors H_0 est probablement fausse].

□ Vrai □ Faux

(4) [p est faible] *alors* [La probabilité de réalisation de H_0, sachant qu'on a observé les données D_0 est égale à 0]. *Par conséquent*, H_0 est probablement fausse.

□ Vrai □ Faux

Notons d'abord que seul l'item A3 fait directement référence à la première critique portant sur le raisonnement fallacieux reproché aux tests statistiques. Il nous a cependant semblé intéressant d'intégrer trois autres raisonnements fallacieux A1, A2 et A4, identifiés chez les étudiants, et que leurs auteurs ont qualifiés respectivement de "*inverse probability error*" [Kline, 2004], "*odds-against-chance fantasy*" [Carver, 1953] et "*Le test statistique comme étant une procédure inductive qui permet de calculer la probabilité a posteriori de l'hypothèse nulle*" [Vallecilos, 1995]. Le recours à ces différents raisonnements fallacieux nous a semblé être intéressant, pour en étudier les liens d'une part, s'il en existe, et d'autre part mesurer la prépondérance des uns par rapport aux autres.

Les seules types de probabilités conditionnelles *autorisées* en théories des tests statistiques sont évidemment les probabilités des données D sachant la réalisation des hypothèses statistiques H_i (i=0 ou 1), notées $P(D|H_i)$. Nous pouvons citer à titre d'exemple, la p-value, égale à la probabilité $P(\theta \geq \hat{\theta}_{obs}|H_0)$ dans le cas de la situation que nous sommes en train de traiter dans ce questionnaire. De telles probabilités ($P(D|H_i)$) sont bien entendu, *de manière générale*, différentes des probabilités inverses: $P(H_i|D)$, et il n'existe pas de relations établies pouvant lier les valeurs prises par ces deux probabilités conditionnelles [Gras et Totohasina, 1995]. Il est à rappeler que le calcul des probabilités $P(H_i|D)$ ne peut être déterminé que dans le cadre du paradigme alternatif aux tests statistiques : la *statistique bayésienne*. Néanmoins, ces types de probabilités ($P(H_i|D)$) sont utilisées à tort chez beaucoup d'étudiants, face à une situation de test statistique. Ces probabilités prennent des formes variées, en se manifestant soit de façon *directe* comme dans le cas de l'item A1 (la probabilité de réalisation de H_0 sachant qu'on a observé les données D_0), soit de façon *indirecte* comme c'est le cas de l'item A2 (la probabilité que la différence observée $(\hat{\theta}_{obs} - \theta_0)$ soit due au seul hasard)[11], ou encore de manière *déterministe* comme c'est le cas de l'item A4 (la probabilité de réalisation de H_0, sachant qu'on a observé les données D_0 est égale à 0).

Par ailleurs, l'item A3 impliquant un *raisonnement fondé sur la contraposée probabiliste*, est bien évidemment faux, comme nous l'avons déjà expliqué auparavant (cf. § 3.1). De ce fait, nous pouvons conclure que les quatre raisonnements des items A1, A2, A3 et A4 sont tous fallacieux.

(B)*A votre avis, dans une situation de test statistique, le niveau de signification α est :*

(1) toujours égal à 5%, 1% ou 0.1%, selon si l'on veut tester si le résultat obtenu $(\hat{\theta}_{obs} - \theta_0)$ est peu significatif, significatif ou très significatif.

□ Vrai □ Faux

(2) choisi de manière arbitraire, dans la mesure où pour une même situation de tests statistiques, deux statisticiens sont libres de fixer leurs niveaux de signification à des valeurs trop éloignées, sans aucune contrainte à prendre en considération.

□ Vrai □ Faux

---

[11]L'événement « la différence observée $(\hat{\theta}_{obs} - \theta_0)$ est due au seul hasard » est en quelque sorte équivalent à l'événement : « H_0 est réalisée ».

Il est vrai que le chercheur choisit son niveau de signification. Néanmoins, ce choix reste tributaire des contraintes de la problématique mise en jeu, auxquelles s'ajoutent les conditions et les contraintes expérimentales (cf. § 3.4).

Par ailleurs, la p-value ($P(\hat{\theta} \geq \hat{\theta}_{obs} | H_0)$), à laquelle on compare le niveau de signification α pour pouvoir conclure, est un indicateur qui mesure sommairement la taille de l'effet impliquée par les données observées D_0 et la taille de l'échantillon dont proviennent ces données. Elle ne permet pas la mesure d'une seule de ces tailles. Par conséquent, des expressions directement liées au concept de taille de l'effet, telles « peu significatif », « significatif » ou « très significatif », n'ont aucun sens dans la théorie des tests statistiques.

En conclusion, les propositions des items B1 et B2 peuvent être considérées comme étant toutes les deux fausses.

(C) Supposons qu'après application du test statistique nous ayons décidé de rejeter H_0: "***$\theta=\theta_0$***". ***Parmi les propositions suivantes, celle(s) qui est (sont) vraie (s) est (sont) :***

(1) Le rejet de H_0 : "$\theta=\theta_0$"est une information sans intérêt parce que si l'on augmente suffisamment la taille n_0 de l'échantillon dont dérivent les données observées D_0, le rejet de H_0 sera systématiquement réalisé.

□ Vrai □ Faux

(2) Le rejet de H_0 : "$\theta=\theta_0$" est une information très importante parce qu'un tel rejet signifie que θ est différent de θ_0, et que θ est beaucoup plus grand que θ_0.

□ Vrai □ Faux

Il est vrai que si l'on augmente la taille n_0 de l'échantillon, la région critique du test statistique s'élargit. Or, la puissance qui croit en fonction de la taille de l'échantillon, a quand même des conséquences coûteuses du point de vue expérimental. Maintenant, si une signification statistique est suffisamment petite, pour que seul un test très puissant peut identifier, il est alors difficilement acceptable de la considérer comme utile : dans ce cas-là, le test statistique perd sa fonction (cf. § 3.2). De ce fait, la proposition de l'item C1 peut être considérée comme fausse.

De la même façon, l'hypothèse nulle H_0 : "$\theta=\theta_0$" est en fait une écriture simplifiée du *modèle probabiliste* H_0 : "$P_\theta = P_{\theta 0}$", représentant une hypothèse ou une action scientifique, qui peut être acceptée par l'application d'un test statistique, non pas pour son exactitude mais plutôt pour sa *robustesse* et sa capacité de fournir de meilleures prédictions (cf. § 3.2). Par conséquent, la proposition de l'item C2 est fausse.

(D) ***Dans cette question, les données observées D_0 sont fixées. On considère alors les deux tests statistiques ci-après, servant à décider entre H_0 et H_1 :***

- Le test statistique n°1 de H_0: "$\theta=\theta_0$" contre H_1 : "$\theta=\theta_1$" $(\theta_1 > \theta_0)$

et

- Le test statistique n°2 de H_0: "$\theta=\theta_1$" contre H_1: "$\theta=\theta_0$" $(\theta_1 > \theta_0)$

Parmi les propositions suivantes, celle(s) qui est (sont) vraie (s) est (sont):

(1) Si l'on fixe le même niveau de signification α pour ces deux tests statistiques, alors si l'on décide de rejeter "$\theta=\theta_0$" par le test statistique n°1 on doit décider d'accepter "$\theta=\theta_1$" par le test statistique n°2.

□ Vrai □ Faux

(2) Si le risque de 1ère espèce du test statistique n°2 est fixé à la valeur du risque de 2ème espèce du test statistique n°1, alors si l'on décide de rejeter "$\theta=\theta_0$" par le test statistique n°1 on doit décider d'accepter "$\theta=\theta_1$'' par le test statistique n°2.

□ Vrai □ Faux

Mettons que l'on se place par exemple dans le cas où la variable aléatoire X suit la loi normale $N(\mu,\sigma^2)$, $\theta = \mu$ et $P_\theta=[N(\mu,\sigma^2)]_\mu$, avec σ connu. Ainsi, les tests statistiques n°1 et n°2 testent respectivement H_0: "$\mu = \mu_0$" contre H_1: "$\mu = \mu_1$" et H_0: "$\mu = \mu_1$" contre H_1: "$\mu=\mu_0$", où $\mu_1>\mu_0$.

Si l'on fixe le même niveau de signification α pour ces deux tests statistiques, alors toutes les données D issues de l'échantillon $(X_1,...,X_{n_0})$ telles que $\overline{X} \in \left]\mu_0 + \Phi_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n_0}}, \mu_1 + \Phi_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n_0}}\right[$ (où $\overline{X} = \frac{X_1 + ... + X_{n_o}}{n_o}$), permettent[12] de rejeter "$\mu=\mu_0$" par le test statistique n°1 et en même temps de rejeter "$\mu= \mu_1$" par le test statistique n°2.

De même, si l'on choisit α comme étant le niveau de signification du test statistique n°1 et si le risque de 1ère espèce du test statistique n°2 est fixé à la valeur β du risque de 2ème espèce du test statistique n°1 ($\beta = P\left(\overline{X} \in \left]-\infty, \mu_0 + \Phi_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n_0}}\right] \middle\| H_1\right)$, où H_1: "$\mu = \mu_1$"), alors en étant dans la condition

[12] Φα est le quantile d'ordre (1- α) de la loi normale centrée réduite N(0,1).

$(\mu_1 - \mu_0) > \frac{\sigma}{\sqrt{n_0}}(\Phi_\alpha - \Phi_\beta)$, avec un choix approprié de μ_0 et μ_1, toutes les données D issues de l'échantillon $(X_1,...,X_{n_0})$ telles que $\overline{X} \in \left]\mu_0 + \Phi_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n_0}}, \mu_1 + \Phi_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n_0}}\right[$, permettent d'une part de rejeter "$\mu = \mu_0$" par le test statistique n°1, et d'autre part de rejeter "$\mu = \mu_1$"par le test statistique n°2 [Zaki et El M'Hamedi, 2009].

Par conséquent, les propositions des items D1 et D2 sont toutes les deux fausses.

4.3. Codage et outil d'analyse retenus pour le traitement des réponses des étudiants

Libellé	Codage	Signification	RR[13]	RE[14]
Raisonnement.	A1	• *Bayésien direct*	A1R	A1E
	A2	• *Bayésien indirect*	A2R	A2E
	A3	• *Contraposé probabiliste*	A3R	A3E
	A4	• *Bayésien déterministe*	A4R	A4E
Niveau de signification.	B1	• *Choix fixe*	B1R	B1E
	B2	• *Choix arbitraire*	B2R	B2E
Rejet systématique de H_0.	C1	• *Effet de la taille de l'échantillon*	C1R	C1E
	C2	• *Pseudo-égalité.*	C2R	C2E
Asymétrie.	D1	• *Au niveau des hypothèses statistiques*	D1R	D1E
	D2	• *Au niveau des risques de 1ère et de 2ème espèces*	D2R	D2E

Tableau 3. Codage des modalités de chaque item du questionnaire

[13] **R**éponse **R**éussie.
[14] **R**éponse **É**chouée (y compris les **N**on **R**éponses).

Libellé de la critique	Items correspondants
Le raisonnement sous-jacent aux tests de signification est fallacieux	A1, A2, A3 et A4
L'hypothèse H_0 est presque toujours fausse	C1 et C2
Le traitement asymétrique des hypothèses H_0 et H_1	D1
L'arbitraire dans le choix du niveau de signification	B1 et B2
L'attention excessive en faveur du risque de 1ère espèce aux dépens de celui de 2ème espèce	D2
Les tests statistiques ne sont pas informatifs sur la probabilité que H_0 soit vraie	A1, A2 et A4

Tableau 4. Correspondances entre critiques non fondées et items du questionnaire

Pour le traitement des réponses des étudiants, l'analyse factorielle des correspondances multiples (AFCM) nous a semblé être un outil adéquat pouvant permettre de procéder à une analyse qui tient compte des croisements des réponses des étudiants, des types de liens qui existent entre ces réponses, et aussi de la prépondérance des réponses (en termes d'inertie relative dans le nuage des réponses), les unes par rapport aux autres.

Par ailleurs, pour ne pas biaiser l'analyse, vu le nombre important de modalités (20 au minimum) de l'ensemble du questionnaire, face au nombre « limité » d'étudiants interrogés (55), nous avons décidé de retenir un codage en bi-modalité « Réussite - Echec » pour tous les items du questionnaire.

Dans le tableau 3, nous avons résumé le codage des modalités des items du questionnaire, les libellés des items, ainsi que la signification de chaque modalité. Nous avons par ailleurs présenté dans le tableau 4 les correspondances qui existent entre les critiques que nous avons analysées et les items du questionnaire.

4.4. Analyse et interprétation des réponses des étudiants

4.4.1. Valeurs propres et inertie totale

L'analyse factorielle des correspondances multiples[15] appliquée au tableau disjonctif complet issu du codage des réponses des étudiants a conduit à des valeurs propres non nulles de moyenne 0,1 (l'inverse du nombre d'items qui est égal à 10). Par ailleurs, les valeurs propres supérieures à cette moyenne sont : λ_1=0,191,

[15] Cette analyse a été conduite à l'aide du logiciel Statistica (Version 6).

λ_2=0,152, λ_3=0,138 et λ_4=0,101. L'inertie totale est égale à 1 (nombre de valeurs propres non nulles, divisé par le nombre d'items).

4.4.2. Nombre d'axes retenus dans l'analyse

Nous rappelons tout d'abord que l'inertie totale en analyse factorielle de correspondances multiples appliquée à un tableau disjonctif complet n'a pas de signification statistique[16]; elle ne dépend pas des observations, elle dépend uniquement du nombre de variables (items) et du nombre de modalités impliquées. Par ailleurs, le calcul des taux d'inertie liés aux trois valeurs propres ci-dessus conduit à des pourcentages décroissant de 19,07% à pratiquement 4,36%, ce qui donne une idée assez pessimiste des parts d'informations obtenues par l'analyse factorielle. Nous avons donc eu recours à la formule proposée par Benzécri [1979], qui dans une telle situation, va permettre une meilleure appréciation des taux d'inertie :

Inertie corrigée = $\left(\frac{s}{s-1}\right)^2\left(\lambda_k-\frac{1}{s}\right)^2$ pour $\lambda_k > \frac{1}{s}$, s étant le nombre d'items du questionnaire et λ_k les valeurs propres obtenues par l'analyse du tableau disjonctif complet.

L'application de cette formule aux inerties initiales[17], donne pour les valeurs propres supérieures à 0,1 (égale à $\frac{1}{10}$) les résultats suivants : 0,010149, 0,003339, 0,001799 et 0,000003.

Le tableau 5 suivant illustre les pourcentages d'inerties corrigées et leurs cumuls, correspondant aux valeurs propres retenues et qui sont supérieures à la valeur moyenne $\frac{1}{10}$.

Valeurs propres	λ_1	λ_2	λ_3
% Inerties corrigées	**66,38%**	**21,84%**	**11,77%**
Cumul % Inerties corrigées	**66,38%**	**88,22%**	**99,99%**

Tableau 5. Pourcentages d'inerties corrigées et leurs cumuls

Par conséquent, le premier axe représente 66,38% de l'information totale, le deuxième axe 21,84% et le troisième axe 11,77%. Ces valeurs indiquent que

[16] Ce n'est pas le cas pour le calcul d'inertie en analyse de correspondances d'un tableau de Burt.

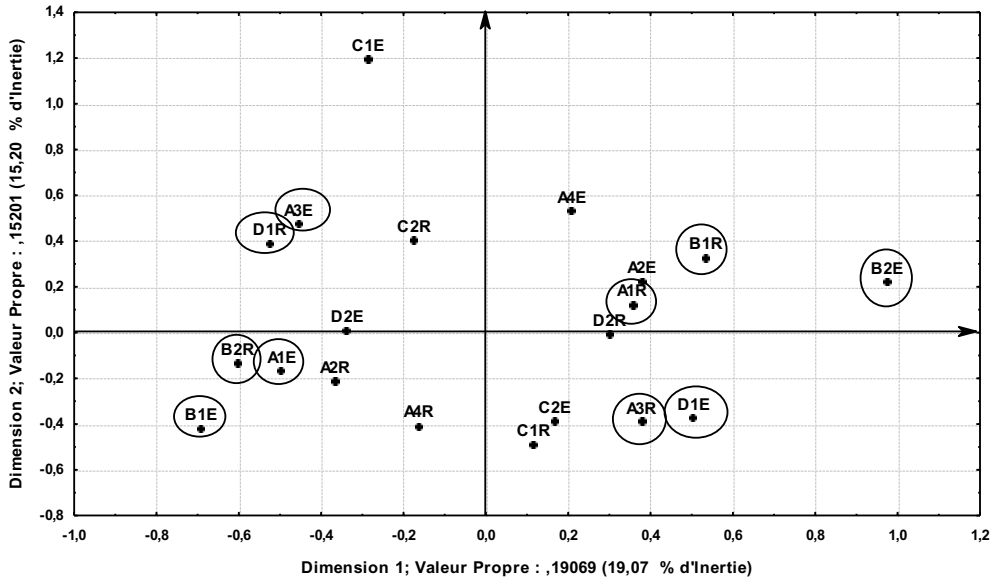
[17] Dans la suite de l'analyse, nous nous limiterons simplement aux 4 premières valeurs propres.

l'essentiel de l'information est porté par les trois premiers axes factoriels, qui représentent ensemble 99,99% de l'information totale.

Par ailleurs, ces trois valeurs propres sont différentes ; cela signifie que nous sommes pratiquement en présence de trois valeurs propres simples. Par conséquent, il va falloir interpréter séparément les axes : 1, 2 et 3.

4.4.3. Interprétation du 1er axe factoriel

L'analyse factorielle de correspondances multiples conduit à une inertie[18] de 66,38% pour l'axe 1. Les modalités qui contribuent le plus à la construction de cet axe sont celles entourées dans le graphique 1 ci-dessous[19]. Elles ont une contribution relative comprise entre 3,8% et 19%. La qualité de représentation de ces modalités par rapport à cet axe est comprise entre 0,17 et 0,58.



Graphique 1. Plan factoriel (1, 2)

En résumé, nous sommes en présence de l'opposition suivante : A1E, A3E, B1E, B2R et D1R vs A1R, A3R, B1R, B2E et D1E.

[18]Il s'agit de l'inertie corrigée.

[19] Notons au passage que ces modalités occupent des positions correspondant aux modalités ayant les plus grandes coordonnées en valeur absolue par rapport au 1er axe factoriel. Sinon, le reste des modalités occupent quasiment des positions intermédiaires, avec en outre de faibles contributions relatives.

Notons dans un premier temps que dans cette opposition, chaque modalité à forte contribution relative, qu'elle relève d'une réussite ou d'un échec, se trouve du côté opposé par rapport à l'axe 1 de sa modalité contraire correspondante, elle-même à forte contribution relative. Par conséquent, il suffira de donner une interprétation à l'un des groupes de modalités opposées, du fait que l'autre groupe aura tout simplement l'interprétation contraire de ce dernier.

Par ailleurs, le 1er axe oppose un mélange de modalités de réussites et d'échecs à leurs modalités correspondantes contraires. Dans cette opposition, nous n'avons pas d'un côté les réussites et de l'autre les échecs, comme c'est classiquement le cas lorsqu'on utilise un codage en bi-modalité réussite-échec. Ainsi, le 1er axe factoriel ne peut être interprété comme étant un axe de réussites-échecs, et qu'il va falloir aborder son interprétation selon une démarche qui répond à l'objectif même du questionnaire dispensé aux étudiants.

Le contenu du questionnaire relève d'une exploration auprès des étudiants sur leurs appréhensions conceptuelles relativement au raisonnement sous-jacent au test statistique, au niveau de signification d'un test et aux statuts de l'hypothèse nulle H_0 et de son alternative H_1, notamment à propos du rejet de H_0 et de l'asymétrie entre H_0 et H_1. Les items du questionnaire font donc référence à une exploration conceptuelle autour du concept de test statistique, et non pas aux performances des étudiants en situation de résolution de problèmes sur les tests statistiques. Il est donc normal que la plus grande part d'information (1er axe factoriel) contenue dans les réponses des étudiants ne se traduise pas en termes de performances des étudiants, autrement dit en termes de réussites-échecs.

Ainsi, nous aborderons l'interprétation du 1er axe factoriel, en portant une attention particulière aux modalités de réussites ayant les plus fortes contributions relatives par rapport à cet axe et qui relèvent des items A1, A2, A3, et A4. En effet, la bonne maîtrise du concept de test statistique commence d'abord par une bonne appréhension du paradigme sous-jacent de probabilité conditionnelle, à partir duquel est fondé le concept même de test statistique. Dans le cas présent (cf. Graphique 1 : Plan factoriel (1,2)), il s'agit de A1R et A3R. Ces deux modalités sont associées dans l'opposition du 1er axe factoriel aux modalités B1R, B2E et D1E, modalités à fortes contributions relatives par rapport à cet axe. Nous noterons au passage, que dans cette opposition de groupes de modalités à fortes contributions relatives, nous avons une opposition exclusive de modalités contraires, ce qui confère au questionnaire un caractère d'homogénéité.

Par ailleurs, la modalité A1R (Réussite au raisonnement Bayésien direct), constitue dans ce questionnaire une modalité discriminante pour l'appréhension du paradigme de probabilité conditionnelle sous-jacent à la construction même du concept de test statistique. Ainsi, dans l'analyse du 1er axe factoriel, pour avoir une idée complète sur les tendances de l'ensemble des items relevant du questionnaire

associées à la bonne appréhension du concept de test statistique (A1R), nous tiendrons compte aussi dans le groupe de modalités contenant A1R (dans l'opposition du 1er axe factoriel), de la nature (réussite ou échec) des modalités de l'ensemble du reste des items du questionnaire ((cf. Graphique 1 : Plan factoriel (1,2)). Pour ce groupe, nous obtenons donc le profil de modalités suivant :

A1R - A2E - A3R - A4E - B1R - B2E - C1R - C2E - D1E et D2R

Dans ce groupe de modalités, nous sommes en présence d'une certaine maîtrise du raisonnement sous-jacent au test statistique, puisqu'il n'y a pas de confusion avec un raisonnement bayésien direct (A1R), ou celui qui utilise la « contraposée probabiliste » (A3R), avec néanmoins une difficulté à identifier un raisonnement bayésien indirect ou déterministe (A2E et A4E), sans grand effet, puisque ces deux modalités n'ont pas une forte contribution relative au 1er axe factoriel.

Les deux modalités B1R et B2E (à fortes contributions relatives) semblent traduire une contradiction à propos de la maîtrise du choix du niveau de signification dans la procédure d'un test statistique : les étudiants reconnaissent bien que le choix du niveau de signification ne correspond pas systématiquement aux standards 5%, 1% ou 0,1%, mais ne vont pas jusqu'à maîtriser le fait que le choix de ce niveau est intimement lié aux contraintes de la problématique dont relève le test statistique. Cela n'est pas surprenant, car dans tout enseignement standard sur les tests statistiques, et surtout dans le traitement de situations-problèmes relevant de tests statistiques, généralement les contraintes du contexte (problématique) pour le choix du niveau de signification sont ignorées ; c'est souvent un aspect qui est passé sous silence dans l'enseignement. Par conséquent, nous pouvons conclure à une maîtrise partielle du traitement du niveau de signification.

La modalité D1E traduit un échec des étudiants à propos de l'asymétrie des hypothèses H_0 et H_1 dans le traitement d'un test d'hypothèses dans l'approche de Neyman-Pearson. Néanmoins, cette modalité est associée à C1R et D2R. Autrement dit, l'échec à propos de l'asymétrie de l'hypothèse nulle et de l'alternative mérite d'être nuancé. En effet, pour les étudiants, dans le traitement d'un test d'hypothèses, lorsqu'une hypothèse nulle H_0 est rejetée au seuil α, la règle de décision conduit à accepter H_1 (sous-entendu au même seuil α) : nous pensons que pour cet item, les étudiants en sont restés à cette étape dans leurs conclusions. Or, lorsqu'on intervertit le rôle de H_0 et de H_1, le test d'hypothèses change et la règle de décision ne conduit plus bien entendu aux mêmes conclusions, et ce même lorsqu'on garde le même niveau de signification α : en fait, les étudiants ont rarement l'occasion d'être confrontés à ce type de situations, ce qui explique leur échec à cet item. Par ailleurs, comme nous l'avons fait remarquer au-dessus, les modalités C1R et D2R, traduisent respectivement chez les étudiants, d'une part la maîtrise de l'effet de la taille de l'échantillon, et d'autre

part celle de l'asymétrie des risques de 1ère et de 2ème espèce, dans le traitement des tests d'hypothèses (Neyman- Pearson). Autrement dit, dans le cas présent, les étudiants font preuve d'une assez bonne maîtrise de la procédure relative au traitement des tests d'hypothèses selon l'approche de Neyman-Pearson. Quant à la modalité C2E (à faible contribution relative), elle traduit en fait une réponse chez ces étudiants non contradictoire avec C1R, à savoir que pour ces derniers le contenu de l'hypothèse nulle H_0 représente une information très importante. Sachant que l'hypothèse nulle H_0 représente chez Neyman-Pearson l'hypothèse d'intérêt, cela renforce auprès de ces étudiants l'idée d'une démarche selon l'approche de Neyman-Pearson dans leur traitement de test statistique.

En conclusion, les tendances expliquées par le premier axe factoriel renvoient au degré de maîtrise du paradigme de probabilité conditionnelle sous-jacent au concept de test statistique, associé au degré de la maîtrise procédurale des tests statistiques au sens de Neyman-Pearson, notamment à propos du choix du niveau de signification et l'asymétrie des risques de 1ère et 2ème espèces. Par conséquent, le premier axe factoriel peut être interprété comme étant un axe de *maîtrise du paradigme de test statistique selon l'approche de Neyman-Pearson.*

4.4.4. Interprétation du 2ème axe factoriel

L'analyse factorielle de correspondances multiples conduit à une inertie de 21,84% pour l'axe 2. En outre, les modalités qui contribuent le plus à la construction de cet axe sont celles entourées dans le graphique 2 ci-dessous. Elles ont une contribution relative comprise entre 5% et 27%. La qualité de représentation de ces modalités par rapport à cet axe est comprise entre 0,18 et 0,58.

Dans le deuxième plan factoriel, le 2ème axe factoriel présente l'opposition suivante :

A3E, A4E et C1E vs A3R, A4R et C1R.

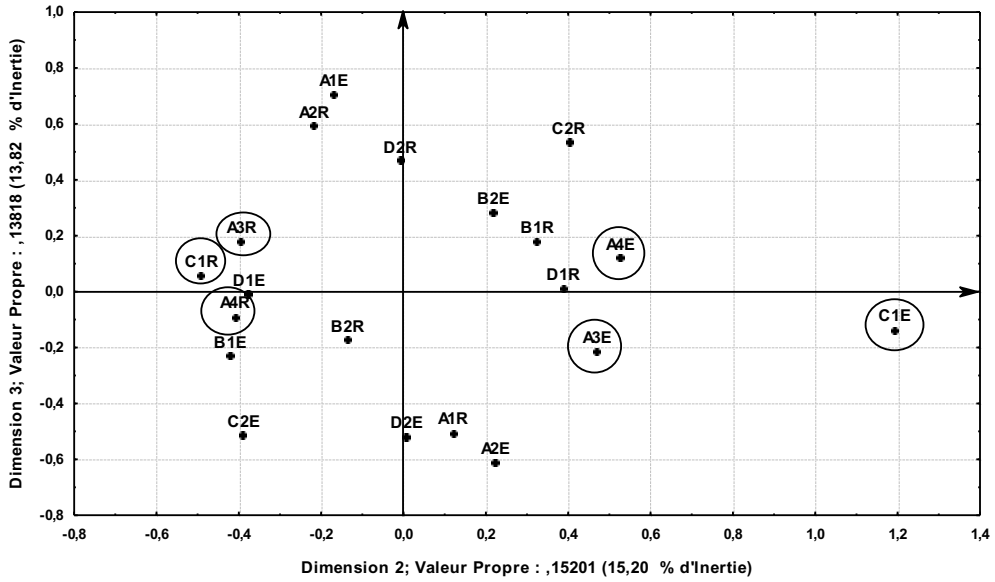
Dans cette opposition, nous avons d'un côté des modalités d'échecs et de l'autre leurs correspondantes de réussites, il suffira alors comme précédemment de donner une interprétation à l'un des groupes de modalités opposées, du fait que l'autre groupe aura tout simplement l'interprétation contraire de ce dernier. Nous noterons au passage, que dans cette opposition de groupes de modalités à forte contribution relative, nous avons une opposition exclusive de modalités contraires, ce qui renforce encore une fois le caractère d'homogénéité du questionnaire.

Ici aussi, nous nous mettrons du côté de la bonne appréhension du paradigme de probabilité conditionnelle sous-jacent au concept de test statistique, à savoir la modalité A1R (Réussite au raisonnement bayésien direct), et ce pour les mêmes raisons que nous avons déjà soulevées dans l'interprétation du 1er axe factoriel. Par ailleurs, nous chercherons aussi à donner une interprétation au 2ème axe factoriel, qui tiendrait compte dans le groupe de modalités contenant A1R (dans l'opposition

du 2ème axe factoriel), non seulement des modalités à forte contribution relative, mais aussi de la nature (réussite ou échec) du reste des modalités des items du questionnaire (cf. Graphique 2 : Plan factoriel (2,3)). Pour ce groupe, nous obtenons donc le profil de modalités suivant :

A1R - A2E - A3E - A4E - B1R - B2E - C1E - C2R - D1R - D2E

Du côté de la modalité A1R, nous avons les modalités A3E et A4E qui sont à fortes contributions relatives, ce qui signifie que malgré une certaine maîtrise du raisonnement bayésien direct, les étudiants font des raisonnements fallacieux de types « contraposée probabiliste » et « bayésien direct déterministe ». Autrement dit, ces deux types de raisonnements fallacieux, auxquels s'ajoute implicitement un raisonnement bayésien indirect (A2E), vont certainement avoir un effet sur leurs conceptions procédurales à propos des tests statistiques.



Graphique 2. Plan factoriel (2, 3)

Les modalités B1R et B2E sont du même côté que A1R, comme c'était le cas dans l'opposition du 1er axe factoriel ; en revanche, les items C1, C2, D1 et D2 ont tous du côté de A1R dans l'opposition du 2ème axe, exactement les modalités contraires à celles relevées du côté de A1R dans l'opposition du 1er axe, avec C1E comme étant la seule modalité à forte contribution relative. Le fait que les étudiants ne reconnaissent pas (C1E) le principe de « l'effet de la taille de l'échantillon » sur le rejet de H_0 dans le cas d'un test d'hypothèses n'est pas en faveur d'une bonne maîtrise procédurale d'un test statistique au sens de Neyman-Pearson. Dans le cas présent (B1R, B2E), les étudiants maîtrisent partiellement le principe de choix du niveau de signification, avec la même appréhension que celle que nous avons

relevée dans l'interprétation du 1er axe factoriel ; en revanche, la modalité D2E qui traduit la non reconnaissance de l'asymétrie des risques de 1ère et 2ème espèce dans le cas des tests d'hypothèses, corrobore la non maîtrise des étudiants d'une procédure de test statistique au sens de Neyman-Pearson. Par conséquent, la réussite D1R à propos de l'asymétrie de H_0 et H_1 (dans un test d'hypothèses) ne peut que traduire une approche correcte, non pas du point de vue des tests au sens de Neyman-Pearson, mais plutôt au sens de Fisher : en effet, le rejet de H_0 dans le cas de tests de signification ne permet pas *a priori* de conclure quant à l'acceptation de H_1. En conséquence, l'approche adoptée dans le cas présent par les étudiants dans le traitement de test statistique se trouve plutôt orientée vers celle des tests de signification, traduisant ainsi une assez bonne maîtrise de la procédure de traitement de test statistique au sens de Fisher.

Enfin, pour ce qui concerne la modalité C2R (à faible contribution relative), elle traduit tout simplement le fait que les étudiants considèrent l'hypothèse nulle H_0 comme étant sans intérêt (contrairement à ce que nous avions obtenu pour le 1er axe factoriel), autrement dit qu'ils considèrent plutôt H_1 comme étant l'hypothèse d'intérêt, ce qui est effectivement le cas dans la procédure de Fisher, et cela renforce justement auprès de ces étudiants l'idée d'une démarche selon l'approche de Fisher dans leur traitement de test statistique

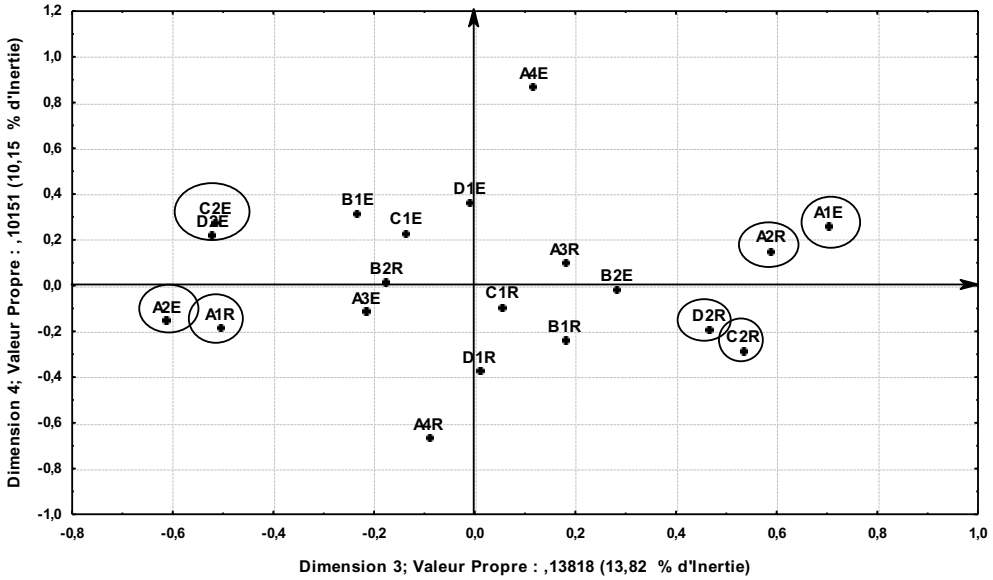
En conclusion, les tendances expliquées par le deuxième axe factoriel renvoient au degré de maîtrise du paradigme de probabilité conditionnelle sous-jacent au concept de test statistique, associé au degré de maîtrise procédurale des tests statistiques au sens de Fisher, notamment à propos du choix de niveau de signification. Par conséquent, le 2ème axe factoriel peut être interprété comme étant un axe de *maîtrise du paradigme de test statistique selon l'approche de Fisher.*

4.4.5. Interprétation du 3ème axe factoriel

L'analyse factorielle de correspondances multiples conduit à une inertie de 11,77% pour l'axe 3. Les modalités qui contribuent le plus à la construction de cet axe sont celles entourées dans le graphique 3 ci-après. Elles ont une contribution relative comprise entre 8,3% et 14,9%. La qualité de représentation de ces modalités par rapport à cet axe est comprise entre 0,24 et 0,36.

Dans le troisième plan factoriel, le 3ème axe factoriel présente l'opposition suivante :

A1R, A2E, C2E et D2E vs A1E, A2R, C2R et D2R.



Graphique 3. Plan factoriel (3, 4)

Comme pour les deux plans factoriels précédents, nous avons d'un côté des modalités d'échec et de réussite et de l'autre les modalités correspondantes contraires. Dans ce cas aussi, nous nous limiterons à une interprétation de l'un de ces groupes de modalités, du fait que le groupe opposé aura l'interprétation contraire.

Enfin, nous constatons que même pour le 3ème plan factoriel, dans l'opposition des modalités à fortes contributions relatives, nous sommes en présence d'une opposition exclusive de modalités contraires, ce qui confirme maintenant de manière très nette (presque 100% de l'inertie (corrigée) totale, en comptant le cumul des inerties absolues des 3 premiers axes factoriels) le caractère d'homogénéité des items du questionnaire.

Du côté de la modalité A1R concernant le raisonnement bayésien direct, nous avons la modalité A2E (raisonnement bayésien indirect) qui est à forte contribution relative ; autrement dit, les étudiants ne présentent ici qu'une appréhension partielle du paradigme de probabilité conditionnelle sous-jacent au concept de test statistique. Quant aux modalités A3E « contraposée probabiliste » et A4R « raisonnement déterministe bayésien », au vu de leurs faibles contributions relatives, elles vont sensiblement renforcer l'aspect de non maîtrise totale du raisonnement sous-jacent au test statistique. L'échec au raisonnement bayésien indirect A2E (à forte contribution relative) est quasiment accompagné ici (hormis B2R qui du reste est à faible contribution relative) d'un échec au reste des items du

questionnaire. Par ailleurs, les modalités qui sont à fortes contributions relatives sont C2E et D2E, et elles traduisent respectivement, d'une part une non maîtrise procédurale aussi bien des tests de signification que ceux d'hypothèses (Fisher et Neyman-Pearson) à propos de l'interprétation du rejet de l'hypothèse nulle H_0 (approche déterministe), et d'autre part une non maîtrise procédurale des tests d'hypothèses (au sens de Neyman-Pearson) à propos de l'asymétrie des risques de 1ère et de 2ème espèces.

En conclusion, les tendances expliquées par le troisième axe factoriel renvoient au degré de maîtrise du paradigme de probabilité conditionnelle sous-jacent au concept de test statistique, associé au degré de la maîtrise procédurale des tests statistiques, selon simultanément les deux approches : Fisher et Neyman-Pearson. Par conséquent, le 3ème axe factoriel peut être interprété comme étant un axe de *maîtrise du paradigme de test statistique selon simultanément les deux approches : Fisher et Neyman-Pearson.*

5. Discussions, conclusions, et perspectives didactiques

L'analyse *a priori* des critiques que nous avons passées en revue à l'encontre de la théorie des tests statistiques, nous a permis de dégager des éléments qui remettent en question le bien-fondé de ces critiques. Si nous avions à résumer la nature de ces éléments de manière non exhaustive, nous dirions que ces éléments renvoient soit à des confusions au niveau du fondement théorique des tests statistiques, soit à des abus d'interprétation dans leur mise en pratique, voire éventuellement les deux à la fois :

a) Le raisonnement fallacieux dans le traitement inductif sous-jacent au test de signification de Fisher (cf. 3.1), la non interprétation de l'hypothèse nulle (de même pour l'alternative) en termes de modèle(s) probabiliste(s) (cf. 3.2), la non maîtrise de l'asymétrie entre H_0 et H_1 dans les deux approches : Fisher et Neyman-Pearson (cf. 3.3), l'amalgame procédural entre les deux approches de Fisher et Neyman-Pearson induit par le niveau de signification (cf. 3.4), la confusion au niveau du traitement des risques de 1ère et 2ème espèces dans la procédure de Neyman-Pearson (cf. 3.5) et le calcul de $P\left(H_0 \middle| D_0\right)$ moyennant des procédures de tests statistiques, renvoient tous *a priori* à des confusions à caractère théorique.

b) Le rejet de H_0 par augmentation de la taille de l'échantillon (cf. 3.2), l'asymétrie dans le traitement de H_0 et H_1 dans l'approche de Fisher (cf. 3.3), l'arbitraire dans le choix du niveau de signification dans un test statistique (cf. 3.4), renvoient *a priori* à des abus d'interprétation d'un point de vue pratique.

c) Le rejet de H_0 par augmentation de la taille de l'échantillon (cf. 3.2) et l'asymétrie dans le traitement de H_0 et H_1 dans l'approche de Fisher (cf. 3.3),

nous semblent *a priori* relever à la fois d'une confusion à caractère théorique et d'un abus d'interprétation d'un point de vue pratique.

Ainsi, quelle que soit la nature des critiques, il s'agit d'abord et avant tout d'une question de *maîtrise du concept de test statistique.* En effet, les résultats d'analyse factorielle multidimensionnelle des réponses des étudiants interrogés ont donné lieu à des axes factoriels avec des interprétations en termes de *maîtrise du concept de test statistique*, axes qui se déclinent selon l'importance de leur part d'inertie absolue (i.e. importance de leur part d'information contenue dans l'ensemble des réponses) suivant les interprétations respectives ci-après :

- *Maîtrise du paradigme de test statistique selon l'approche de Neyman-Pearson (Axe 1)*
- *Maîtrise du paradigme de test statistique selon l'approche de Fisher (Axe 2)*
- *Maîtrise du paradigme de test statistique selon simultanément les deux approches : Fisher et Neyman-Pearson (Axe 3)*

Si maintenant, nous regardons les modalités (de réussite ou d'échec) qui ont le plus contribué à la construction de ces axes factoriels (modalités à fortes contributions relatives), nous constatons que celles-ci renvoient à des éléments de la théorie des tests statistiques, qui sont de natures soit « fondement théorique », soit « pratique », soit les deux à la fois (cf. Tableau 6).

Ces modalités, lorsqu'elles contribuent à un axe factoriel, elles sont exprimées à la fois en termes de réussite et d'échec, autrement dit, l'interprétation des axes ne peut être exprimée qu'en termes de *maîtrise*, dont la spécification est entièrement déterminée par le groupe de modalités ayant contribué à la construction de chaque axe. Ainsi, les interprétations des axes factoriels qui renvoient à *la maîtrise du paradigme de test statistique selon l'approche de Neyman-Pearson, ou celle de Fisher, ou encore des deux à la fois*, constituent en fin de compte une validation de notre hypothèse de départ, à savoir que « *la majorité des critiques devrait être plutôt imputée à une non maîtrise du concept de tests statistiques par certains utilisateurs et aux abus interprétatifs qui en découlent, et non pas à des considérations intrinsèquement liées au concept même des tests statistiques ou à leur enseignement* ».

Maintenant, si nous nous référons à la nature des modalités qui ont donné lieu aux interprétations des axes factoriels, nous constatons qu'elle met plus en avant l'aspect « fondement théorique » que l'aspect « pratique ». Cela traduit une fois de plus, le fait que la maîtrise du concept de test statistique est davantage exprimée par rapport aux éléments de fondements théoriques de ce concept, et par voie de conséquence à un « *bon* » enseignement de ce dernier.

Axe	Libellé et signification des modalités	Nature
1	A1 : « fondement théorique »	Raisonnement *bayésien* direct
	A3 : « fondement théorique »	Contraposition probabiliste
	B1 : « fondement théorique »	Choix de niveau de signification
	B2 : « pratique »	Choix de niveau de signification
	D1 : « fondement théorique »	Asymétrie dans le traitement de H_0 et H_1 dans une procédure de Neyman
2	A3 : « fondement théorique »	Contraposition probabiliste
	A4 : « fondement théorique »	Raisonnement *bayésien* direct déterministe
	C1 : « fondement théorique » et « pratique »	Effet de la taille de l'échantillon sur le rejet de H_0
3	A1 : « fondement théorique »	Raisonnement *bayésien* direct
	A2 : « fondement théorique »	Raisonnement *bayésien* indirect
	C2 : « fondement théorique »	Rejet de H_0 dans la procédure de Fisher (approche déterministe)
	D2 : « fondement théorique »	Asymétrie des risques de 1ère et 2ème espèces

Tableau 6. Nature(s) des modalités ayant contribué à la construction des axes factoriels

Néanmoins, il ne faudrait pas pour autant sous-estimer les autres aspects « pratiques » d'utilisation des tests statistiques, notamment en ce qui concerne le choix du niveau de signification ou l'effet de la taille de l'échantillon sur le rejet de l'hypothèse nulle, comme le souligne notre analyse factorielle. Ces aspects devraient *a priori* aussi être pris en charge par l'enseignement, contrairement à ce qui se fait habituellement, et plus généralement dans toute approche didactique des tests statistiques ; cela permettra certainement d'explorer des perspectives très intéressantes d'investigations en termes d'ingénierie didactique sur les tests statistiques.

A ce propos, en plaçant en individus supplémentaires sur les trois premiers plans factoriels les centres de gravité respectifs du groupe d'élèves ingénieurs et celui des étudiants en Master : le premier centre de gravité s'est toujours positionné du côté de la 'bonne maîtrise' pour les 3 premiers axes factoriels, contrairement au deuxième centre de gravité qui s'est systématiquement positionné du côté de la 'mauvaise maîtrise'. Est-ce un effet d'enseignement ? Cela mérite en tout cas une

étude didactique approfondie en termes d'approche d'enseignement des tests statistiques, autrement dit, l'exploration d'une nouvelle piste de recherche en didactique de la statistique.

BIBLIOGRAPHIE

AMERICAN PSYCHOLOGICAL ASSOCIATION. (1994) *Publication manual of the American Psychological Association* (4th ed.). Washington, DC.

BAKAN, D. (1960) The test of significance in psychological research, *Psychological Bulletin* 66, 423-437.

BATANERO, C. (2000) Controversies around the role of statistical tests in experimental research, *Mathematical Thinking and Learning* 2(1-2), 75-98.

BATANERO, C. & DIAZ, C. (2006) Methodological and Didactical Controversies around Statistical Inference, *Proceedings of 38th Conference of the French Statistical Conference.* Paris: SFDE. CDROM.

BEN-ZVI, D. & GARFIELD, G. (2004) Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Goals, Definitions, and Challenges in D. Ben-Zvi et G. Garfield (eds), *The Challenge of Developing Statistical Literacy. Reasoning and Thinking*, 3-16. Dordrecht.

BRANDSTÄTTER E. & KEPLER, J.(1999) Confidence Intervals as an Alternative to Significance Testing, *Methods of Psychological Research Online* 4(2).

CARRANZA, P. (2011) Dualité dans l'enseignement de la probabilité. Apport pour l'enseignement de la statistique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 31-2, 229-259.

CARVER, R. (1953) The case against statistical significance testing, *Harvard Educational Review* 48, 378-399.

COHEN, J. (1977). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences* (2ème édition). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

COHEN, J. (1994) The earth is round (p<.05), *American Psychologist* 49. 997-1003.

DENIS, D. J. (2004) The Modern Hypothesis Testing Hybrid: R. A. Fisher's Fading Influence. With Discussion by Michel Armatte, Bernard Bru, Michael Friendly, Jeff Gill, Ernest Kwan, Bruno Lecoutre, Marie-Paul Lecoutre, Jacques Poitevineau and Stephen Stigler. *Journal de la Société Française de Statistique* 145(4). 5-68.

ELM'HAMEDI, Z. (2010) *Contribution à une ingénierie didactique pour l'enseignement et l'apprentissage des tests statistiques à l'université*. Thèse de

Doctorat. Université Sidi Mohammed Ben Abdellah- Faculté des Sciences Dhar El Mehraz, Fès, Maroc.

FISHER, R. (1925). *Statistical Methods for Research Workers*, Edinburgh: Oliver & Boyd.

FISHER, R. (1935) *The Design of Experiments*, Edinburgh: Oliver & Boyd.

FISHER, R. (1956). *Statistical Methods and Scientific Inference*, Edinburgh: Oliver & Boyd.

GIGERENZER, G. (1993) The superego, the ego, and the id in statistical reasoning, in G. Keren & C. Lewis (Eds.) *A Handbook for Data Analysis in the Behavioral Sciences: Methodological Issues*, (p. 267-288). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

GRAS, R. & TOTOHASINA, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 15/1, 49-95.

HAGER, W. (2000) About some misconceptions and the discontent with statistical tests in psychology, *Methods of Psychological Research Online* 5(1).

HUBBARD, R. & LINDSAY, R. M. (2008). Why P Values are not a useful measure of evidence in statistical significance testing. *Theory & Psychology* 18(1). 69–88.

JONES, L. V. (1955). Statistical theory and research design. *Annual Review of Psychology* 6. 405-430.

KLINE, R. B. (2004). *Beyond significance testing: Reforming data analysis methods in behavioral research*, Washington, DC: American Psychological Association.

KRANTZ, D. H. (1999). The null hypothesis testing controversy in psychology. *Journal of the American Statistical Association* 44. 1372–1381.

LABOVITZ, S. (1970) Criteria for selecting a significance level: A note on the sacredness of .05. In D. E. Morrison & R. E. Henkel (Eds.), *The significance test controversy* (p. 166-171). Chicago : Aldine.

LECOUTRE, B., LECOUTRE M.-P. & POITEVINEAU, J. (2001). Uses, abuses and misuses of significance tests in the scientific community: won't the Bayesian choice be unavoidable? *International Statistical Review* 69. 399-418.

LECOUTRE, B. & POITEVINEAU, J. (2000). Aller au-delà des tests de signification traditionnels : vers de nouvelles normes de publication [Beyond traditional significance tests: Prime time for new publication norms]. *L'année Psychologique* 100. 683-713.

LOFTUS, G. (1996). Psychology will be much better science when we change the way we analyze data. *Current Directions in Psychological Science* 5. 161-170.

LOVELL, M.C. (1983). Data mining. *Review of Economics and Statistics* 65. 1-12.

MACDONALD, R. R. (2004). Statistical inference and Aristotle's rhetoric. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology* 57. 193-203.

MCLEAN, A.L. (2001). *On the nature and role of hypothesis tests*. Department of Econometrics and Business Statistics Working Paper 4/2001.

MEEHL, P. E. (1967). Theory testing in psychology and physics: A methodological paradox, *Philosophy of Science* 34. 103-115.

MEEHL, P. E. (1978) Theoretical risks and tabular asterisks: Sir Karl, Sir Ronald, and the slow progress of soft psychology. *Journal of Consulting and Clinical Psychology* 46. 806-834.

MORRISSON, D. E. & HENKEL, R. E, (Eds.) (1970). *The Significance Tests Controversy*, A reader. Chicago: Aldine.

NEYMAN, J. & PEARSON, E. S. (1928). On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference. Part I. *Biometrika* 20A. 175-240.

NEYMAN, J & PEARSON, E. S. (1933) On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, Series A 231. 289-337.

NICKERSON, R. S. (2000). Null hypothesis significance testing: A review of an old and continuing controversy. *Psychological Methods* 5(2). 241-301.

OAKES, M. (1986) *Statistical Inference*: *A commentary for the social and behavioural sciences*. Chichester, England: Wiley.

PFANNKUCH, M. & WILD, C. (2004). Towards an Understanding of Statistical Thinking» in D. Ben-Zvi & G. Garfield (eds.) *The Challenge of Developing Statistical Literacy. Reasoning and Thinking* (p. 17-46). Dordrecht.

POITEVINEAU, J. (1998). *Méthodologie de l'analyse des données expérimentales : Etude de la pratique des tests statistiques chez les chercheurs en psychologie, approches normative, perspective et descriptive*. Thèse de Doctorat, Université de Rouen.

POLLARD, P. & RICHARDSON, J. T. E. (1987). On the probability of making Type I errors, *Psychological Bulletin* 102. 159-163.

ROZEBOOM, W. W. (1960). The fallacy of null hypothesis significance testing, *Psychological Bulletin* 57. 416-428.

SCHMIDT, F. L. (1996). Statistical significance testing and cumulative knowledge in psychology. Implications for training of researchers. *Psychological Methods* 1. 115-129.

SEDLMEIER, P. (1996). Jenseits des Signifikanztest-Rituals: Ergänzungen und Alternativen. *Methods of Psychological Research Online* 1. 41-63.

TUKEY ,J. W., (1977) *Exploratory data analysis*. Reading, MA: Addison-Wesley.

WILKINSON, L., TASK FORCE ON STATISTICAL INFERENCE (1999). Statistical methods in psychological journal, *American Psychologist* 54. 594-604.

ZAKI, M. & ELM'HAMEDI, Z. (2009) Eléments de mesures pour un enseignement des tests statistiques, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 14. 153-194.

ZENDRERA, N. (2010) *Enseignement et apprentissage des tests d'hypothèses paramétriques : difficultés rencontrées par les étudiants en sciences humaines. Une contribution à l'éducation statistique.* Thèse de Doctorat de l'Université Sherbrooke (Québec, Canada).

Moncef ZAKI
Moncef Zaki <zaki.moncef@yahoo.fr>

Zahid El M'HAMEDI

Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Dhar El Mehraz
Fès, Maroc

CHARLES CHANDLER

DES OUTILS SEMIOTIQUES POUR UNE EVALUATION DE LA COMPLEXITE DES EXPRESSIONS MATHEMATIQUES

Abstract. Semiotic tools for measuring the complexity of mathematical expressions. We shall try to identify the difficulties of complexity attached to mathematical concept or notion in a text, through the examination of the mathematical expressions which are associated with them. We refer to Hjelmslev, who defines the complexity as being an articulation between level of expression, signs of a language, and the fictitious plan of the contents, which develop by the meanings that the text gives. For this linguist, this interaction carries the complexity of a text. We will build a measure of this complexity by estimating the complexity of the structure of formulae and demonstrations. We apply this method on two Schwartz's textbooks, the one may be considered easy and the second more complex. These initiatives succeeded to build an evaluation of the level of complexity of mathematical texts. This is what we are trying to present here.
Keywords: Semiotics, mathematical demonstrations, mathematical texts, formulae.

Résumé Nous tenterons de cerner les difficultés de complexité relatives au concept ou à la notion mathématique, dans un texte, par l'examen des expressions mathématiques qui leur sont associées. Nous nous référons à Hjelmslev qui définit la complexité comme étant une articulation entre le plan de l'expression, les signes d'un langage, et le plan fictif des contenus, contenus qui s'élaborent par les significations que donne le texte. Pour ce linguiste, cette interaction est porteuse de la complexité d'un texte. Nous allons construire sur cette interaction des évaluations de complexité entre les expressions mathématiques. Nous pouvons construire cette méthode d'évaluation de la complexité en évaluant la complexité de la structure des formules et des démonstrations. Méthode que nous avons testée sur deux traités de L. Schwartz, l'un jugé facile et un autre plus complexe. Ces démarches ont-elles abouti à construire une évaluation du niveau de complexité des textes mathématiques? C'est ce que tente de présenter cet article.

Mots-clés : sémiotique, démonstrations mathématiques, textes mathématiques, formules

---

1-Préambule

La sémiologie peut-elle aider à mettre en place des critères d'évaluation des difficultés de la complexité des textes mathématiques ?

Nous nous sommes écarté des démarches de logiciens au profit des démarches de la sémiologie pour les deux raisons suivantes : d'une part, il aurait fallu commencer nos analyses par la transcription de textes mathématiques en langage formel, transcription qui n'assure pas une plus grande lisibilité à ces textes eu égard à l'insuccès de l'introduction des mathématiques modernes dans l'enseignement ; et

© 2013, IREM de STRASBOURG.

d'autre part, rien dans les références théoriques de la logique, ne donne des outils pour déterminer la démarche de complexité des expressions mathématiques.

En nous appuyant sur les méthodes de la sémiologie, nous pouvons construire une réflexion qui peut conduire à matérialiser une méthode d'évaluation de la complexité. Méthode que nous avons testée sur deux traités de L. Schwartz, l'un jugé facile et l'autre plus difficile. Les démarches de construction de la méthode ont-elles abouti à construire un outil pertinent, au regard du but poursuivi ? C'est ce que tente de présenter cet article.

« *Toutes les sciences se donnent des moyens pour décrire les objets en se construisant un langage* » écrit Louis Hjelmslev (L.Hjelmslev, 1966, p23) On peut établir que pour les mathématiques, le langage formel peut se rapprocher de ce que les linguistes appellent la « métalangue », langue qui sert à décrire les expressions d'une autre langue. Historiquement, certains mathématiciens ont usé de la logique comme « métalangue » pour décrire et expliquer les constructions et les développements de leur science. L'utilisation de la logique comme métalangage a permis d'expliquer la signification et la construction des objets mathématiques, sachant que la langue naturelle est d'usage premier pour les décrire. Ce que nous ferons, pour notre part, c'est remettre la langue naturelle en situation d'expliquer les textes mathématiques. Notre point de vue s'appuie sur une caractéristique que R. Barthes reconnaît à la langue naturelle : celle-ci peut aussi, dit-il, jouer le rôle de métalangue en prenant en charge un système d'objets signifiants ; « *…la notion de métalangue ne doit pas être réservée aux langages scientifiques ; lorsque le langage articulé dans son état dénoté prend en charge un système d'objets signifiants, il se constitue en ''opération'' c'est-à-dire en métalangue…* » (R.Barthes, 1967).

2- Problématique

Notre analyse du texte mathématique - pour rester dans la perspective de R. Barthes - sera reliée aux plus ou moins grandes difficultés à donner au texte une signification. Nous tenterons de cerner les difficultés de compréhension relatives au concept ou à la notion mathématique, lors du passage à leurs significations, par l'analyse de la complexité des éléments essentiels, les expressions (formules, démonstrations) mathématiques qui leur sont associées. Ce qui nous intéresse, c'est la détermination des formes expressives ou expressions mathématiques du contenu de « l'introduction aux distributions » qui se manifestent dans les traités de Laurent Schwartz. Nous envisageons de classer ces traités relativement à leur difficulté de complexité, en évaluant la diversité et la complexité des formes expressives que nous nommons plus loin, objets- expressions, et leur nombre.

La question pour nous, est donc de savoir dans quelle mesure les formes d'expressions visibles peuvent rendre compte de la complexité. Pour répondre à

cette question, nous avons pris pour référence le sémioticien Hjelmslev pour qui ce sujet a fait l'objet d'un long questionnement (L.Hjelmslev, 1971). Nous pouvons alors, avec une certaine assurance, construire des relations pertinentes entre expression, contenu et complexité. Qu'en est-il lorsque nous voulons établir ce type de relations entre les expressions mathématiques, leur contenu et leur complexité ? Est-on encore assuré du lien entre l'expression et le contenu ? Nous avons levé ces dernières objections en examinant la démarche entreprise par Herreman (A.Herreman, 2000 p.17-42) sur la topologie des signes. Herreman analyse les objets-expressions pour identifier l'évolution de la topologie algébrique dans les écrits de R. Poincaré. Ce sont les objets-expressions mathématiques qui concrétisent les concepts ou les objets mathématiques, en rappelant que Hjelmslev, auquel nous nous référons, définit cette concrétisation comme une articulation, dans un langage, entre le plan de l'expression (leur signifiant) les signes d'un langage, et le plan fictif de contenus des concepts. Ce dernier plan se construit par les relations de sens commun de signification que les différentes expressions entretiennent sur les concepts. Rappelons que l'ensemble des différentes remarques ou déviations sémiologiques, que nous avons mis en œuvre - de purs linguistes les considéreront comme des digressions sémiologiques - a été élaboré en prenant pour référence le livre de Louis Hjelmslev, (L.Hjelmslev, 1971).

3-Complexité du texte mathématique

Nous précisons que l'expression « texte mathématique » recouvre les formules et les autres parties du texte dont les démonstrations.

Dans le champ des mathématiques, la compréhension que nous avons liée à la complexité des textes mathématiques a été abordée par Frege qui est certainement un des grands logiciens des mathématiques modernes. Il a permis un abord moderne de la logique pour la complexité - compréhension des notions mathématiques en définissant les notions de « sens » et de « dénotation ». Ces deux éléments ont été déterminants dans sa recherche pour la construction du domaine de la sémantique formelle. Ce dernier domaine prépare des outils possibles pour déterminer rigoureusement la valeur d'un jugement ou de la véracité d'une proposition mathématique. Toutefois, si les positions de Frege s'orientent en effet sur la détermination du «sens» d'une expression mathématique, ces positions ne semblent pas prendre en compte, ou peu, les difficultés de compréhensions liées à la complexité d'expressions des concepts mathématiques énoncés en textes de langue naturelle ou en langage semi-formel. Pour éviter les passages à l'écriture logique de ces textes, nous avons donc envisagé le passage à la sémiotique, comme nous l'avons déjà précisé dans notre introduction.

La langue mathématique est constituée de signes qui sont assemblés selon des règles syntaxiques et sémantiques. Ces signes désignent des objets mathématiques qui représentent des concepts mathématiques. Les objets mathématiques seront

indifféremment désignés par concept, signifié ou représentation. Ces signes représentent les concepts mathématiques dits encore objets mathématiques ; ces signes tiennent lieu et place pour des objets ou des concepts dans cet article, sans confondre les représentations et ce qu'ils représentent, car il ne faut pas confondre les propriétés des représentés et celles de leurs représentants ; et pourtant dans les mathématiques, c'est par le jeu des expressions (représentants) que l'on découvre ou crée les concepts et les propriétés. Nous n'accédons pas aux concepts ou aux objets mathématiques, mais à leurs représentations ; ceux-ci sont en effet évoqués par des ensembles de signes et c'est par les manipulations de ces signes que nous accédons à leurs propriétés, les découvrons voire les construisons (H.Freudenthal, 1980 pp 338-384). Ce langage spécifique est à acquérir de façon précise si on veut comprendre et ensuite donner une signification aux formules et aux démonstrations. Nous devons apporter une précision en définissant ce que nous entendons par « complexité » et « signification ». Le lecteur donne un sens (signification) aux expressions, ensuite il s'attache à comprendre (la complexité du texte). Exemple : *« …. On utilise la convergence uniforme sur K pour définir la convergence des φ_n vers φ… »*. Nous savons lire ce texte, il est correctement écrit, il a un sens (une signification) car il respecte les normes d'écriture, on peut le comprendre (compréhension) si on possède les connaissances mathématiques nécessaires compte tenu de sa complexité inexistante. La signification porte sur le texte et la compréhension sur le concept. La signification est effective quand le texte ou les expressions mathématiques sont conformes aux règles d'écriture, eu égard à sa complexité ; et la compréhension (la fonction sémiotique) se place dans les relations que l'on peut établir entre les expressions (les textes) et les contenus conceptuels ; nous suivons en cela les définitions données par Hjelmslev (L.Hjelmslev, 1971).

Dans le langage mathématique, les expressions s'inscrivent complètement dans une structure ; ces formes syntaxico- sémantiques sont conformes aux normes qui se sont imposées au cours de l'histoire des mathématiques et dont la complexité et la signification se sont élaborées conjointement, et c'est par le calcul et la lecture de ces signes que nous accédons à leurs propriétés, les découvrons, voire les construisons.

Nous nous sommes orienté vers un outil d'analyse qui permet d'évaluer la complexité d'un texte mathématique. Cette analyse reprend pour l'essentiel les hypothèses linguistiques de L. Hjelmslev sur les signes expressions mathématiques. Nous rappelons que dans les distributions, mais aussi dans tous les textes mathématiques d'un certain niveau, les signes ne tiennent pas la place des objets qu'ils évoquent, mais remplacent d'autres signes, ce qui demande un effet de transfert de recodage pour retrouver les objets véritablement évoqués. Nous allons utiliser deux moyens pour déterminer le niveau de complexité d'un texte :

Nous nous appuyons sur Frege qui passe du concept à l'écriture d'objet représentant ce concept dans un ensemble de symboles ; l'objet mathématique sera identifié par une formulation et ses propriétés le plus souvent circonscrites par des formules ou dans un ensemble de normes logiques de propositions, déductives en l'occurrence ; par exemple, l'objet fonction existe dans un texte quand le symbole représentant cet objet, le plus souvent un prédicat, correspond à la définition « conceptuelle » de fonction. « *Sans les signes, nous nous élèverions difficilement à la pensée conceptuelle. En donnant le même signe à des choses différentes quoique semblables, on ne désigne plus à proprement parler la chose singulière mais ce qui est commun : le concept. Et c'est en le désignant qu'on prend possession du concept ; puisqu'il ne peut être objet d'intuition, il a besoin d'un représentant intuitif qui nous le manifeste. Ainsi le sensible ouvre-t-il le monde de ce qui échappe au sens* » nous dit-il (G.Frege, 1971). Dans ce même ouvrage, Gottlob Frege (G.Frege, 1971) relève les aspects applicatifs et fonctionnels du langage mathématique. Ces deux références nous ont conduit à postuler, eu égard à notre pratique de textes mathématiques, qu'une partie des difficultés d'un texte se situe sur le niveau de complexité de la structure écrite du langage mathématique et plus particulièrement des formules et des démonstrations.

4-Démarche méthodologique.

Nous avons pris le parti d'estimer que les éléments de surface du texte mathématique, à savoir les expressions-formules (plus simplement formules) et les démonstrations- sans nous occuper des interactions qu'elles entretiennent entre elles- constituent en partie le sens du texte. Nous avons fait porter nos observations exclusivement sur les traces écrites, en laissant de côté les traitements mathématiques, traces que l'on peut nommer « caractéristiques visuelles ». Dans les caractéristiques visuelles, nous nous limitons à la construction des textes en leurs constituants, et leurs expressions (formules et démonstrations). En pratique, il n'est pas possible d'exclure les interactions entre les éléments mathématiques sans perdre une partie de leurs significations, néanmoins nous suivrons la démarche d'estimation précitée des éléments de surface. Nous avons pris pour modèle la démarche entreprise dans l'observation du champ des données, adoptée par Janvier, Sabatier, Baillé, Maury dans « Essai de typologie des graphiques dans les manuels d'histoire-géographie et biologie-géologie des collèges »

(M. Janvier, 1993) pour classer les graphiques des manuels au niveau de leur difficulté de lecture : méthode consistant à comptabiliser le nombre d'apparitions de certains éléments graphiques. Nous convenons que cette démarche est insuffisante pour saisir la complexité, mais nous avons encore suffisamment d'éléments d'estimation des difficultés de complexité si nous comptabilisons la composition des textes en formules, en démonstrations et en parties qui ne sont pas des formules ou des démonstrations.

Nous nous attacherons donc à évaluer ce degré de complexité, en faisant par analogie la même démarche que les linguistes. Nous n'allons pas prendre pour référence le sens mathématique d'une formule ou d'une expression, mais le nombre d'arrangements et la place des symboles élémentaires qui sont représentés dans leur construction comme unité significative de base porteuse d'une partie de la complexité, suivant en cela ce que propose

Roland Barthes (R.Barthes, 1967) dans sa recherche des unités significatives d'un texte. Notre démarche s'apparente aussi à celle de linguistes comme A. Martinet lors de la construction d'un mot (monème) par des combinaisons avec des éléments plus simples, les lexèmes et les morphèmes.

1-Nous avons complété cette première analyse qui porte sur les formules, par l'analyse sémiotique qui porte sur la complexité des démonstrations et les différents niveaux de difficulté des textes (R.Barthes, 1967). L'analyse sémiotique aborde la complexité par la décomposition fictive des textes en plans de contenus (concepts ou signifiés) et en plans d'expressions (signifiants) puis par la mise en relation de ces deux plans qu'elle appelle fonction sémiotique, comme nous l'avons déjà dit précédemment.

2-Nous avons identifié pour les distributions les symboles primitifs. La liste de ces symboles primitifs est développée à partir de la table de caractères informatiques UNICODE/ U 2200, la liste des notations de fonctions mathématiques, la liste des opérateurs, et la table des symboles de la norme ISO.Nous avons ensuite extrait la liste des symboles primitifs, ceux qui sont communs et présents dans les deux leçons de L. Schwartz. Ces symboles différemment utilisés dans les formules et les expressions sont les points d'achoppement dans la lecture de ces deux leçons, à savoir:

Les opérations.
Le symbolisme algébrique.
Les parenthèses.
Les relations entre objets.
Les constantes et les lettres dites variables.
Les fonctions.
Les symboles trigonométriques.
Les notations liées aux calculs avec les fonctions : dx, D_x etc…
Les ensembles des espaces fonctionnels.
Les notations ensemblistes et logiques. $f(\ )$

Et plus précisément les notations suivantes des objets mathématiques primitifs dans les chapitres de définition et des propriétés générales des distributions, à savoir : les expressions algébriques, $f(\ )$, les fonctions trigonométriques, les signes

opératoires, les signes de la théorie des ensembles et de la logique, les notations des espaces fonctionnels, dx, $\min(\ ,\ ), \rightarrow$ *tend vers*, $\langle T_f, \rangle, \langle\ , D_\varphi \rangle$ $|\ |$, Δ *laplacien*, δ *Dirac*, $\partial, \in, \lim_{\delta x \to 0}, \frac{\delta y}{\delta x}, \exists, \forall, \langle [\ ] \rangle, \geq$ $\int_a^b$ int*égrale bornée*, $\sum\ , \int\ , \iiint\ , \Pi, \partial^{(\ )}\ D^p\ \frac{1}{(\ )}$.

Finalement, nous déterminerons la complexité en considérant :

- La complexité des formules, à l'aide de deux aspects spécifiques : la complexité1 et la complexité 2 ; la complexité 1 portant sur la construction syntagmatique linéaire (longueur de la formule) et la complexité 2 sur la structure de la formule.

- La complexité des démonstrations et des autres parties du texte en nous appuyant sur l'analyse sémiotique.

5- Complexité des formules ou des expressions mathématiques.

Nous avons évalué la complexité des formules mathématiques suivant deux critères : d'abord un critère de lisibilité, qui selon nous permet de rendre compte d'une certaine difficulté de complexité de la formule. Ce premier critère, critère de complexité 1, est lié plus spécifiquement à la longueur de la formule et aux statuts (fonctions) linguistiques des symboles. Le second, que nous désignons par critère de complexité 2, est lié à l'organisation interne de la formule, à savoir l'intrication des symboles entre eux. Cette dernière est analysée par une technique dite de l'emboîtement, qui est issue des langages formels informatiques comme Math Tex, lequel est également utilisé par des logiciels d'affichage des formules mathématiques (L.Rideau, 2002).

5.1 Complexité 1 des formules ou expressions mathématiques.

Le degré de complexité 1 des formules, expressions et résultats de calculs, a été déterminé en incrémentant le nombre de symboles primitifs qui interviennent dans leur écriture et leur statut. Cette complexité se traduit en une formule constituée d'un nombre de quatre chiffres indicateurs du statut et du nombre de symboles primitifs présents et de la longueur de la formule.

5-1.1 Complexité 1 ayant pour critère le statut des concepts des formules :

Lorsque nous lisons un texte, nous en saisissons le sens et ensuite la complexité grâce à certains mots, le verbe, le pronom ou les marques de ponctuation. Les statuts de ces mots sont des facilitateurs de lisibilité des expressions, comme l'ont observé certains sémanticiens (A.Guha, 1955). Nous pensons qu'il en sera de

même pour la complexité des formules et des expressions mathématiques. Nous attachons plus d'importance à certains symboles qu'à d'autres dans une formule complexe, en prenant en considération le statut du symbole ; par exemple dans une formule, le symbole *intégrale* est prioritaire par rapport à d'autres symboles, ce statut est fortement lié à la fonction du symbole, et à sa signification. Cette complexité s'appuie sur le fait que les symboles qui interviennent dans la constitution d'une formule ont différentes statuts. Notre catégorisation prend donc en compte le fait des différents statuts des symboles liés à leur emploi en lieu et place de leur stricte signification mathématique académique: exemple le symbole ou le signe +, le signe intégration $\int$ etc.…, qui interviennent dans la complexité de la formule. Nous avons distingué plus spécifiquement pour les deux traités de L. Schwartz les catégories ou statuts (pour signes) suivants :

- statut constant ou d'objet.
- statut de désignation d'opération.
- statut analytique - fonction.
- statut d'intégration et de différentiation.

Notre méthode d'analyse pour le statut s'appuie sur les méthodes des linguistes : pour nous, ces symboles sont des syntagmes élémentaires que l'on peut concaténer pour former des formules plus complexes, comme des mots constitués de syntagmes élémentaires. La formule prendra pour qualificatif le nom de la catégorie « statut » la plus fortement représentée dans la formule.

Tableau 1 : catégorisation des statuts des symboles.

statuts des symboles	notations de la catégorie	symboles
-objets -résultats d'un calcul ou d'une définition	u	Les constantes sans signe. Les lettres muettes. f(x), exp(x) , { / },
opérations	O	Σ, Π, norme $\| \ \|$, Lim , dx , $d\mu$
analytiques	φ	f( ), φ( ), Δ, δ, norme $\| \ \|$
intégration, différentiation	I	$\int$, $\iint$, ∂, $D^{()}$, $\langle \ \rangle$

5-1.2 Complexité 1 sur la longueur des formules :

Nous avons fait un rapprochement avec la linguistique en assimilant les symboles des objets mathématiques primitifs aux unités minimales, et la construction de

formules plus complexes est calquée sur le principe des règles morphosyntaxiques des linguistes pour représenter des formules qui se définissent à l'aide des ces symboles primitifs ou de formules déjà constituées.

Ce critère a trait, manifestement, au développement horizontal de la formule donc à sa longueur. Nous avons ainsi introduit ce critère d'évaluation de lecture portant sur des difficultés de complexité des formules, qui se rattachait à leur longueur.

Tableau 2 : Indice de complexité (1) sur la longueur

Notations des objets mathématiques dans les traités de L. Schwartz.	indices de complexité
constantes (sans signe), lettres algébriques	0
Expressions algébriques, f(x), <=>, $\prod$, $\sum$, ∂, Δ, $\int$, { }, $D^{()}$, | | , [ ] , notations ensemblistes $\cap$; $\cup$;$\subset$; …, signes opératoires + - x …. ; Ln, ; Sin …, symboles logiques $\forall$;$\exists$; $\Rightarrow$;…dx ou dy…, = ; Δ	1
$\int_a^b$ intégrale bornée, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\iiint_{\Re}$ (intégrale multiple), exp( ), $\frac{1}{(\ )}$, $\langle T_f , \ \rangle$, $\langle \ , D_\varphi \rangle$, f(expr. algébrique)	2

En regroupant les deux critères de complexité 1 nous avons une formule qui est représentée par un couple (indice du statut / indice de la longueur). Pour exemple $\int_a^b f(x)dx$, nous avons $\int \overset{I}{\underset{2}{\overset{u}{a}}}\overset{u}{b}\overset{u}{\underset{1}{f(x)}}\overset{u}{\underset{1}{dx}}$, en exposant les indices des statuts et en exposant la valeur de la longueur, de formule (statut $\underset{I}{1}\underset{\varphi}{0}\underset{O}{0}\underset{u}{4}$/ *longueur* 4).

Nous avons pour la complexité 1 la structure de la formule suivante :

Intégro-différentiel $_I$ – fonction $_\varphi$ – opération $_O$ – objet $_u$ / longueur

Suivant la convention que nous avons adoptée pour le statut, cette dernière formule sera désignée comme « objet» (4_u) de longueur 4.

Nous nous sommes orienté sur les difficultés de signification et de compréhension qui se perçoivent de la complexité des formules, car ce sont elles qui présentent ou élaborent les résultats et les conclusions des démonstrations et des constructions des objets mathématiques.

Selon R. Duval « *Ces symboles ainsi repérés permettent de composer des désignations d'objets et de symboles neutres en des syntagmes qui désignent des nouveaux objets plus complexes. Ces opérations : catégorisation et nombres de symboles, ne sont que partiellement liées aux définitions mathématiques mais à quelque chose de plus général qui renvoie aux distinctions entre objet, opération et modélisation. Opérations que l'on retrouve dans tous les types de langages, naturels et formels* » (R.Duval, Oct. 2009).

5-1.3 Signification de la complexité 1 des expressions mathématiques ou formules.

Nous rappelons ce que nous avons énoncé sur la distinction que nous entretenons entre compréhension et signification, à savoir que la complexité renvoie à ce que le texte dénote sur le concept et la signification renvoie à la conformité de ce texte à des règles d'écriture ou de construction pour les expressions mathématiques ou formules.

Allons-nous identifier par nos analyses une matérialisation de l'écart de difficulté que tout lecteur un peu mathématicien constate entre ces deux traités ? Selon Schwartz, la présentation *Méthodes Mathématiques* convient mieux aux physiciens et la *Théorie des Distributions* est plus adaptée aux mathématiciens. Nous ne pouvons pas bien entendu faire abstraction des conditions d'utilisation ni du niveau de connaissances mathématiques du lecteur. Nous postulons néanmoins que de toutes choses égales par ailleurs, il y a une différence entre ces deux traités que nos analyses peuvent identifier. Un écart de difficulté que Laurent Schwartz signale dans son livre autobiographique : « Un mathématicien aux prises avec son siècle » (L.Schwartz, 1977 pp 253-254). Nous allons nous attacher à déterminer si cette différence, entre les deux traités, porte sur les formules. Dans notre cas, les formules mathématiques sont des expressions algébriques constituées de symboles reliés entre eux par des règles d'écriture. Ces formules, nous l'avons déjà précisé, mais plus sommairement, sont des représentations d'objets mathématiques pouvant de surcroît avoir des statuts différents - intégro-différentiel, fonction, opération, objet - induits par leurs symboles. Les tableaux qui suivent indiquent les valeurs prises par les formules pour la complexité 1 selon la légende : nombres à 4 chiffres pour la catégorisation / la longueur et ensuite les statuts : φ = fonction, O = objet, I = intégro-différentielle. Nous retenons longueur et statut, critères les plus judicieux pour expliquer la différence de complexité entre les deux traités (surlignage dans les tableaux).

Tableau 3 : degrés de complexité 1 des formules dans Méthodes Mathématiques.

Emplacements des formules	Complexité 1	Emplacements des formules	Complexité 1
I I, 1 ;1 p1	0311/1 φ	II,2 ;4 p11	1321/20 φ
I I,1 ;2	0311/6 φ	II,2 ;5-2 ;6 p11	1332/7 I 2321/7 I
I I ,1 ;3 p2	0220/5 φ	II,2 ;7 p11	6624/11 I
I I ,1 ;4 p2	1202/6 φ	II,2 ;8 p12	0202/3 φ
I I,1 ;5 p2	3300/15 I	II,2 ;9 p12	3422/8 I
I I,1 ;6 p2	1008/11 O	II,2 ;10 p12	0300/5 φ
I I ,1 ;7 p3	0031/6 O	II,2 ;11 p12	0320/6 φ
I I,1 ;8 et 1 ;9 p3	0130/13 O	II,2 ;12 p13	2410/8 φ
II, 1 ;10 p4	3220/8 I	II,2 ;13 p13	2410/8 φ
I I, 1 ;11 p4	4330/11 I	II,2 ;14 p13	2520/7 φ
I I, 1 ;12 P4	2011/6 I	II,2 ;15 p13	3513/19 φ
I I,1 ;13 p5	3131/13 I	II,2 ;16 p13	0120/3 O
I I ,1 ;14 p5	3131/11 I	II ,2 ;17 p13	2311/9 φ
II,1 ;15-1 ;16-1 ;17 ; p5	1110/6-8-6 O	II,2 ;18 p13	1211/9 φ
II,1 ;18 p6	1100/10 I	II,2 ;19 p 14	2434/22 φ
II,1 ;19 p6	2131/10 O	II,2 ;20 p14	0063/25 O
I I,1 ;20	3210/10 I	II,2 ;21 p14	0045/17 O
II, ;21 p7	3310/11 I	II,2 ;22 p14	1210/13 φ
II,1 ;22 ;23 ;24 p7	1210/3 φ	II,2 ;23 p14	0201/6 φ
II,1 ;25 p8	1033/13 φ	II,2 ;24 p14	0208/10 φ
II,1 ;26 p8	1201/3 φ	II,2 ;25 p14	0208/9 φ
II,1 ;27 p8	1201/5 φ	II,2 ;26 p14	3220/11 I
II,1 ;28 p8	1310/7 φ	II,2 ;27 p15	1045/22 O
II,1 ;29 p9	1210/7 φ	II,2 ;28 p15	0154/9 O
II,1 ;30 p9	1134/10 O	II,2 ;29 p 15	1072/7 O
II,1 ;31 p9	1011/8 I	II ,2 ;30 p15	3220/10 I
II,2 ;1 p10	1312/9 φ	II, 2 ;31 p15	0455/12 φ

II,2 ;2 p10	2211/9 φ	II,2 ;32 p16	5435/26 I
II,2 :3 p11	1121/11 O	II,2 ;33 – 35 p16	0245/12 O
		II,2 ;36 p16	01450/23 O
		II,2 ;37 p16	1110/6 φ

Tableau 4 : degrés de complexité 1 des formules dans théorie des distributions

Emplacements des formules	Complexité 1	Emplacement des formules	Complexité1
I,1 ;1 p1	0400/7 I	I,2 ;9 p10	0300/3 φ
I,1 ;2 p2	0123/7 O	I,2 ;10 p10	0400/7 φ
I,1 ;3 p2	1400/5 φ	I,2 ;11 p11	005/10 O
I,1 ;4 p3	0012/4 O	I,2 ;12 p13	1330/6 I
I,1 ;5 p3	0053/9 O	I,3 ;1 p14	0200/3 φ
I,1 ;6 p5	2310/11 φ	I,3 ;2 p14	0320/6 φ
I,1 ;7 p5	2310/9 φ	I,3 ;3 p14	0430/9 φ
I,1 ;8 p5	1410/7 φ	II,1,1 p16	4300/17 φ
I,1 ;9 p6	0202/3 φ	II,1 ;2 p16	4230/16 I
I,1 ;10 p6	0302/4 φ	II, 1 ;4 p17	2100/8 φ
I,2 ;1 p8	0303/7 φ	II ,1,5 p17	1300/5 φ
I,2 ;2 p8	0301/3 φ	II,1 ;6 p17	2100/8 φ
I,2 ;3 p8	1011/6 I	II ,1 ;7 p17	2001/7 I
I,2 ;4 p8	1120/6 O	II,2 ;1 p18	1202/6 φ
I,2 ;5 p8	1100/8 I	II,2 ;2 p18	3112/13 φ
I,2 ;6 p9	1100/15 I	II ,2 ;3 p18	0100/1 φ
I,2 ;7 p9	3400/10 φ	II,2 ;4 p19	3222/6 φ
I,2 ;8 p9	0030/4 O	II,1 ;3 p16	4300/16 I
		II,2 ;5 p19	2010/4 I

5-1.4 Répartition en pourcentages des formules sur les différentes composantes de la complexité 1.

Nous avons traité un aspect de la difficulté du texte mathématique, en relevant ce que nous avons relié à la lisibilité donc à la complexité : le statut des formules et leur longueur. Nous avons regroupé les différentes formules de la complexité 1 suivant les critères de cette complexité 1 à savoir :

- catégorisation (statut) des formules : **I** = intégro-différentiel ; **φ** =fonction ; O =opération ;

u = objet.

Le statut u = objet n'ayant pas été attribué à une formule, elle n'apparaîtra pas dans nos récapitulatifs.

Tableau 5 : complexité 1 des formules du traité Méthodes Mathématiques*, répartitions en pourcentages sur les statuts.*

statut	**I** intégro-différentiel	**φ** fonction	**O** opération
longue	16	17	16
courte	4	38	9

Tableau 6 : complexité 1 des formules du traité Théorie des Distributions*, répartition en pourcentages sur les statuts.*

statut	**I** intégro-différentiel	**φ** fonction	**O** opération
longue	13	11	6
courte	8	47	15

Il nous semble que le traité *Méthodes Mathématiques* expose les distributions en usant de formules « longues » qui ont un statut « opération » ; dans le traité *Théorie des Distributions*, les formules sont « courtes » avec également le statut « opération ». Ce type de formules désigne des opérations : somme, produit, norme, limite et résultat du calcul intégral. Des formules courtes, effectivement moins complexes, possèdent une construction elliptique marquée par l'absence de certaines opérations ; en dépit de leur clarté leur lecture induit une compréhension difficile du fait des implicites. On peut noter que dans le traité *Théorie des Distributions* les fonctions (47%) appartiennent aux mesures et aux espaces fonctionnels ; pour *Méthodes Mathématiques* on remarque l'espace des fonctions complexes.

5-2 Construction du critère de complexité 2

Nous avons intégré pour identifier la difficulté de complexité d'une formule la décomposition dite en « boîte ». Nous identifierons le rapport qui se dessine dans une formule entre les différents concepts, en faisant apparaître les constructions qui se tissent entre leurs symboles respectifs. Ces liaisons entre symboles doivent traduire une certaine organisation des concepts initiaux qui participent à la construction du concept ou de la notion représentés par la formule. Nous avons

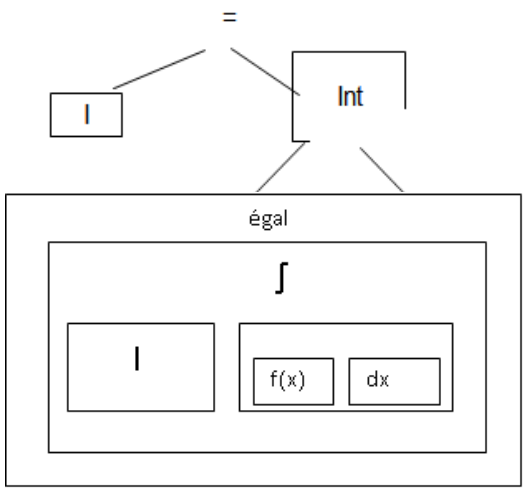
remarqué que le symbole $\frac{\partial}{\partial x}$, de valeur de d° 1 dans la complexité 1, représente la différentiation. Cette notation, rattachée épistémologiquement au concept de vitesse, est facilement compréhensible. La notation du laplacien Δ (L'opérateur laplacien, ou simplement le laplacien, est un opérateur différentiel égal à la somme de toutes les deuxièmes dérivées partielles), qui est aussi évaluée de d°1 dans le critère de complexité 1, n'a pas le même niveau de difficulté de complexité que $\frac{\partial}{\partial x}$. La technique de l'emboîtement, utilisée dans les langages informatiques formels, identifie les relations de construction qui existent entre les différents symboles qui constituent une formule. Nous allons donc utiliser cette méthode de décomposition pour identifier, les liaisons qui s'écrivent entre les symboles représentés. Nous nous sommes appuyé sur le fait que les symboles les plus récents représentent les concepts mathématiques les plus modernes donc de degré de difficulté de complexité le plus élevé selon Jean Dhombres (J.Dhombres, 2006-2007).

5-2.1 Structure de boîtes

Cette structure « boîte » est mise en place sur une formule en s'appuyant au départ sur le signe égal et ensuite sur la lecture des symboles qui se trouvent de part et d'autre de ce signe. Condidérons par exemple : $I = \int f(x)dx$.

Représentation structurée :

Représentation en boîtes :

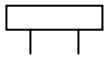
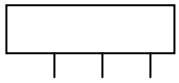


Dans cette dernière formule, le signe « égal » domine, il constitue la boîte enveloppante ou le départ de l'arbre. Nous avons choisi la représentation

arborescente car elle fait apparaître plus aisément les liaisons possibles entre les symboles (comme pour les combinaisons chimiques entre les atomes).

Tableau des liaisons des symboles mathématiques : Les boîtes portent également des embranchements qui représentent les relations possibles que les symboles peuvent entretenir avec d'autres symboles.

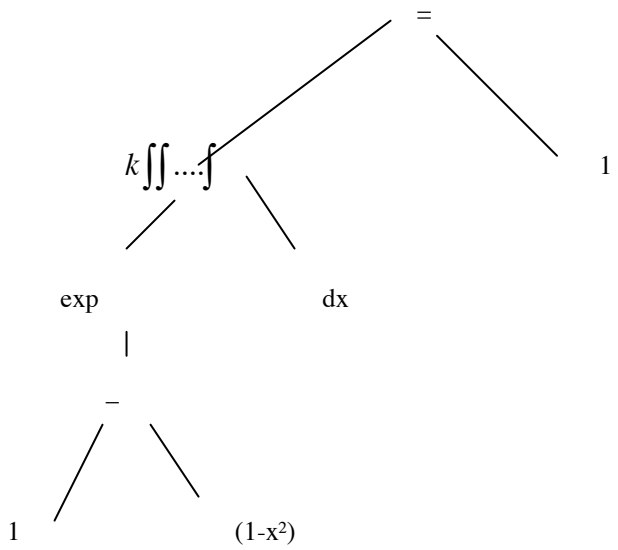
Tableau 7 : degré de liaison des boîtes

Liste des symboles	Degrés des liaisons	embranchements
« les variables » ; « les nombres » ; dx, expressions algébriques ; e^x ; ln x ; les radicaux $\sqrt[()]{}$	zéro-unaire	0
f( ) ; $e^{()}$; ln ( ) ; sup ( ) ; Min ( ) ; inf ( ) ; sup ( )	unitaire	1
signes arithmétiques ; barre de fraction ; = ; symboles avec des indices X_X^X ; < , > ; (,) ; symboles des ensembles ; Π ; $\sum$; ‖ formule-formule‖ ; |formule-formule|	binaire 	2
$\iiint_{\Re} f(x)d\mu$; $\int_a^b f(x)dx$	tertiaire 	3

Pour exemple la formule I, 2 :5 p 8 de la théorie des distributions :

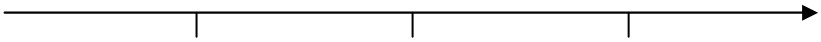
$$k\iint \ldots \int_{r\leq 1} \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right)dx = 1$$

Nous avons l'arborescence suivante :



En conclusion, plus l'arborescence est profonde, plus, nous semble-t-il, nous avons une compréhension élevée conjointement accompagnée d'un indice de complexité élevé exprimant une difficulté liée à la mise en interaction de concepts de plus en plus nombreux. Cette profondeur sera traduite par le degré « le nombre d'embranchements ». Nous avons donné un poids aux symboles, nous appuyant sur l'épistémologie de la mise en mathématiques de Jean Dhombres, en donnant un poids élevé aux concepts les plus récents des mathématiques. C'est ce poids qui sera aussi un évaluateur de la complexité de la formule relative à l'intrication des symboles. Dans la formule, on ne compte qu'une fois le poids du symbole quelque soit le nombre d'occurrences qui le représentent.

Poids des symboles relativement à leur date d'apparitions dans les textes mathématiques.



dates	1700	1800	1900	
poids	1	2	3	4

Tableau 8 : indice de complexité en relation avec l'histoire des symboles

symboles	Dates d'apparition dans les textes mathématiques	Poids de la complexité
Nombres et signes arithmétiques		0
exp( ) ; ln ( ) ; i	1600	1
| | valeur absolue	1631	1
$\langle , \rangle$ fonctionnelle	1920	4
$\sqrt{}$	1525	1
=	1557	1
[ ] ; ( )	1510	1
notations algébriques x^n… expr. algébriques	1600	1
f' ; f '' ; $f^{(n)}$; dx	1675	1
notation des fonct. trigo	1626	1
f(x)	1734	2
≤	1734	2
∑	1755	2
Δ laplacien, ∇ nabla	1780	2
≠	1750	2
$\int$ $et \iint$ (dxdy)… Intégration de Riemann	1822	3
$\frac{\partial}{\partial x}$ diff partielle	1890	3
opérateur différentiel d..	1850	3
∏	1812	3
trait de fraction —	1890	3
combinaison arrangement	1826	3
notations ensemblistes	1890	3

symboles	Dates d'apparition dans les textes mathématiques	Poids de la complexité
$\lim_{j\to\infty}$	1840	3
hypercube dxdydt…	1850	3
fonction Γ d'Euler	1820	3
notations de convergences	1830	3
Max ; min ; Sup ; inf	1930	4
e.v.t ; espaces fonctionnels $\mathcal{D}$; $\mathcal{D}^*$; $\mathcal{L}^\infty$; $\mathcal{C}_0^\infty$…..	1920	4
Fonct. spé, δ , H	1930	4
→ tend vers	1910	4
Topologie $\mathcal{O}$; $\bar{E}$; K ; μ (mesure)	1913	4
notation des fonctions mesurables $\int$ *et* $\iiint_\Omega$ $d\mu$, μ une mesure sur Ω. intégrale de Lebesgue	1907	4
$\|\ \|$ norme	1910	4
Intégrale de Lebesgue	1920	4
T notation des distributions	1954	4

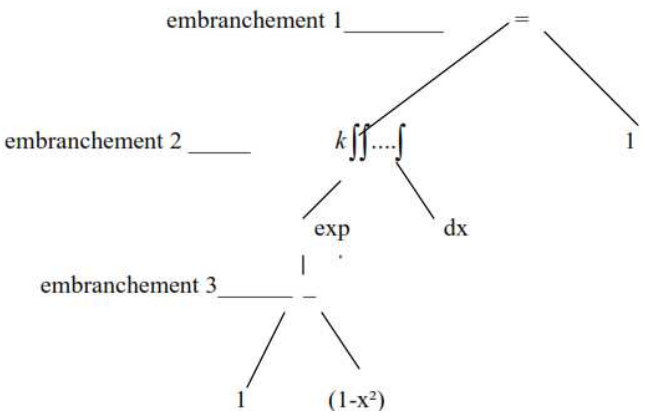
Référence : *notations mathématiques et approche historique,* <http://www.math93.com>

Nous avons désigné les mathématiques du XIXe siècle par « analyse » ou « mathématiques » de l'ingénieur et celles du XXe siècle par « topologie » ou « analyse fonctionnelle ». Généralement, les concepts récents sont plus difficiles à

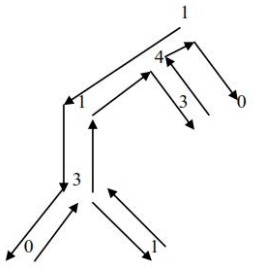
comprendre que les concepts plus anciens ; nous en avons déduit que la difficulté de complexité croît des mathématiques du XIXe aux mathématiques du XXe.

Le poids de la formule et l'arborescence constitueront l'indice de complexité 2 que nous allons prendre comme indice de difficulté de complexité de la formule :

Par exemple la formule que nous avons présentée s'analyse de la façon représentée :



Les embranchements : 3 (trois embranchements)



Son poids total : 13 que l'on fera apparaître en suivant l'arborescence (1,4,1,3,0,1,3,0) ; l'évaluation se faisant de haut en bas et à partir de la droite des embranchements jusqu'au plus bas ; et ensuite, en remontant, on réitère cette opération sur l'autre branche, jusqu'à l'embranchement primaire et on recommence sur les embranchements non évalués.

La complexité (2) de cette formule (embranchement) (déroulement de l'arborescence) (poids total) se décline comme suit : (3) (1,4,1,3,0,1 ,3,0)(13).

Peut-on réduire ces informations ? La forme réduite (embranchement, poids) nous semble appropriée pour indiquer la complexité 2 de la formule. La forme réduite (3,13) prise par l'exemple indique le nombre d'embranchements donc le niveau de profondeur de la formule et par ailleurs le poids total nous indique que la formule est constituée d'objets mathématiques récents donc de complexité difficile.

5-2.2 Identification et classement de la complexité 2 des formules.

De la lecture des chapitres d'introduction et de définitions des distributions des deux traités de L. Schwartz, nous avons déduit des estimateurs de la complexité de lecture des formules, de leur signification par le biais des efforts de compréhension que nous avons fournis pour effectuer les calculs qu'elles réclament et identifier les propriétés des concepts sollicités. En reliant nos difficultés de complexité des formules à la complexité de leur structure, nous avons constaté que les formules ayant des embranchements et constituées de concepts récents sont difficiles à comprendre. Nous avons assigné les qualificatifs de « fort » er de « faible » selon le nombre d'embranchements et la valeur du poids. Le qualificatif « faible » est attaché aux nombres d'embranchements inférieurs ou égaux à 3 et pour le poids, lorsque ce poids sera inférieur ou égal à 8. Les formules ayant un nombre d'embranchements « faible » et un poids de concepts « faible » sont de complexité aisée, ces formules étant faiblement structurées et constituées de formules de concepts non récents. Nous avons, de ce fait, identifié le poids au statut des symboles présents dans les formules.

Tableau 9 : catégorisation des embranchements et des poids

	embranchement		Poids	
	faible	fort	faible	fort
complexité 2	≤ 3	> 3	≤ 8	> 8
notations	1	2	1	2

Tableau 10 : exemples de catégorisations de formules.

$(1,5)$	(f, f)	$\langle T,\varphi\rangle = \iint_S \rho(x)\varphi(x)dx$
(4,8)	(F, f)	$\langle \delta',\varphi\rangle = \langle \delta\ ,\varphi'\rangle = -\varphi'(0)$
(3,10)	(f, F)	$\langle \Delta T,\varphi\rangle = \langle T,\Delta\varphi\rangle$
(9,16)	(F, F)	$\langle Y',\varphi\rangle = -\langle Y\ ,\varphi'\rangle = -\int_{-\infty}^{+\infty} Y(x)\varphi'(x)dx = -\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx$ $= \varphi(0) = \langle \delta,\varphi\rangle$

En référence à notre démarche de lecture et de la complexité des formules telle que nous l'avons précisée précédemment, nous avons dressé le tableau suivant pour mettre en relation structure des formules (embranchements), modernité des concepts (poids) et complexité pour les deux traités de L. Schwartz.

Tableau 11 : rapprochement entre des enseignements des mathématiques et les critères, « faible », « fort » des formules.

formules	embranchements	poids
complexité (compréhension difficile)	fort	fort Topologie-analyse fonctionnel
peu de complexité (compréhension accessible)	faible	faible Mathématiques de l'ingénieur

5-2.3 Résultat de l'évaluation de la complexité 2 sur les formules (embranchements, poids)

Tableau 12 : degré de complexité 2 des formules dans Méthodes mathématiques

Emplacements des formules	Complexité 2	Emplacements des formules	Complexité 2
II, 1 ;1 p1	1,1	II,2 ;4 p10	1,2
II,1 ;2	1,1	II,2 ;5-2 ;6 p10	1,1 -1,1
II,1 ;3 p2	1,1	II,2 ;7	1,2
II,1 ;4 p2	1,1	II,2 ;8 p12	1,2
II,1 ;5 p2	1,2	II,2 ;9 p12	1,1
II,1 ;6 p2	2,2	II,2 ;10 p12	1,1
II,1 ;7 p3	1,2	II,2 ;11 p12	1,1
II1 ;8 et 1 ;9 p3	1,1 -1,1	II,2 ;12 p13	1,2
II, 1 ;10 p4	2,2	II,2 ;13 p13	1,2
II, 1 ;11 p4	2,1	II,2 ;14 p13	1,2
II, 1 ;12 P4	1,1	II,2 ;15 p13	2,2
II,1 ;13 p5	2,2	II,2 ;16 p13	1,1
II,1 ;14 p5	2,2	II ,2 ;17 p13	1,1
II,1 ;15-1 ;16-1 ;17 ; p5	1,1-1,1	II,2 ;18 p13	1,1
II,1 ;18 p6	1,1	II,2 ;19 p 14	2,2

Emplacements des formules	Complexité 2	Emplacements des formules	Complexité 2
II,1 ;19 p6	2,2	II,2 ;20 p14	2,2
II,1 ;20	2,1	II,2 ;21 p14	2,2
II, ;21 p7	2,2	II,2 ;22 p14	2,2
II,1 ;25 p8	2,1	II,2 ;23 p14	2,2
II,1 ;26 p8	1,1	II,2 ;24 p14	1,1
II,1 ;27 p8	1,1	II,2 ;25 p14	1,1
II,1 ;28 p8	1,2	II,2 ;26 p14	1,1
II,1 ;29 p9	1,2	II,2 ;27 p15	1,1
II,1 ;30 p9	1,2	II,2 ;28 p15	1,1
II,1 ;31 p9	2,2	II,2 ;29 p 15	1,2
II,2 ;1 p10	1,2	II ,2 ;30 p15	1,1
II,2 ;2 p10	1,2	II, 2 ;31 p15	1,1
II,2 :3 p10	1,1	II,2 ;32 p16	1,2
		II,2 ;33 – 35 p16	1,2
		II,2 ;36 p16	1,2
		II,2 ;37 p16	1,1

Tableau 13 : degrés de complexité 2 des formules dans théorie des distributions

Emplacements des formules	Complexité 2	Emplacements des formules	Complexité 2
I,1 ;1 p1	1,1	I,2 ;9 p10	1,1
I,1 ;2 p2	1,1	I,2 ;10 p10	1,1
I,1 ;3 p2	1,1	I,2 ;11 p11	1,1
I,1 ;4 p3	1,1	I,2 ;12 p13	1,1
I,1 ;5 p3	1,1	I,3 ;1 p14	1,1
I,1 ;6 p5	2,2	I,3 ;2 p14	1,1
I,1 ;7 p5	2,2	I,3 ;3 p14	1,1
I,1 ;8 p5	1,1	II,1,1 p16	1,2
I,1 ;9 p6	1,1	II,1 ;2 p16	1,1
I,1 ;10 p6	2,2	II, 1 ;4 p17	1,1
I,2 ;1 p8	2,2	II ,1,5 p17	1,1

Emplacements des formules	Complexité 2	Emplacements des formules	Complexité 2
I,2 ;2 p8	2,2	II,1 ;6 p17	1,1
I,2 ;3 p8	1,1	II ,1 ;7 p17	1,1
I,2 ;4 p8	1,2	II,2 ;1 p18	1,1
I,2 ;5 p8	1,2	II,2 ;2 p18	2,2
I,2 ;6 p9	1,2	II ,2 ;3 p18	1,1
I,2 ;7 p9	1,2	II,2 ;4 p19	1,1
I,2 ;8 p9	1,1	II,1 ;3 p16	1,1

Nous avons constaté que pour les formules dont les couples ont peu d'embranchements et sont constitués de concepts de poids fort (embranchements faible, poids fort) et relavant des mathématiques du XXe siècle - espaces fonctionnels, espaces topologiques sont de complexité difficile. Ces formules requièrent, pour leur compréhension, une bonne connaissance en topologie et sur l'intégrale de Lebesgue. D'autres formules de couples de type (embranchement fort, poids faible) concernant les formules des mathématiques de l'ingénieur du XIXe siècle. Ces formules présentent de nombreux embranchements et des symboles du calcul intégral et différentiel. Ces formules sont de compréhension plus facile.

Tableau 14 : répartitions des formules en pourcentages selon la complexité 2.

en %	embranchement faible		embranchement fort	
	poids faible	poids fort	poids faible	poids fort
Méthodes mathématiques	40	30	8	*22*
Théorie des distributions	*70*	14		16

L'écart entre les deux traités porte sur le niveau d'embranchement des formules et le poids des concepts représentés. Le couple (faible, fort) pour la *Théorie des Distributions* indique des formules courtes, peu développées, relatives à des concepts des mathématiques de l'ingénieur. En ce qui concerne *Méthodes Mathématiques*, les formules sont lisibles et compréhensibles par leur structure développée. Le poids ne renvoie pas aux mêmes concepts dans les deux manuels, plus compréhensibles dans les méthodes mathématiques et plus difficiles pour la théorie des distributions. Ces résultats expliqueraient la différence de niveau des difficultés de complexité entre les deux traités.

La perception locale ou globale d'un texte dépend non seulement des connaissances du lecteur mais aussi de la façon dont la construction et le balisage des éléments du document permettent de reconnaître la façon dont les éléments sont hiérarchisés et s'articulent entre eux. Néanmoins les expériences des psycholinguistes montrent que la connaissance d'un texte se fait d'une façon globale sur quelques éléments, les plus fréquents et connus et ensuite par des séries de fixations oculaires, une reconnaissance plus précise se met en place ; ce qui ne correspond pas à notre hypothèse d'emboîtement des formules.

6- Nature et classement des parties de texte qui ne sont pas des formules.

En identifiant au mieux l'interaction entre les formules et les différents segments du texte, nous avons constaté que les deux traités de Laurent Schwartz comportent trois types de textes. La séparation du texte mathématique en ces trois types nous semble la plus fréquente et répond aux exigences d'écrits mathématiques d'enseignement. Ces textes se distinguent par les spécificités suivantes :

- type 1(explicatif) : Ce sont des textes porteurs d'indications, de remarques ou des justifications sur les formules et les démonstrations.

- type 2 (démonstratif): Les textes qui sont recensés dans ce type (démonstrations de base) sont constitués de démonstrations directes où les conclusions sont établies par des suites d'axiomes ou de théorèmes.

- type 3 (constructif): les textes de ce dernier regroupement (type conceptuel) sont des démonstrations constructives, c'est-à-dire que l'élément à démontrer est à construire pour répondre aux exigences des hypothèses afin que l'on puisse appliquer, par la suite, les théorèmes et conclure.

C'est donc l'absence de démonstrations qui caractérise les textes du type 1, textes donc sans démonstration ; type 2, textes de démonstrations de base, type 3, textes de démonstrations conceptuelles.

6-1 Étiquetage des formules

L'étiquetage regroupe les résultats des propriétés 1 et 2 effectuées et rapporte leur place dans les différents types de textes.

Tableau 15 : structure de l'étiquetage de regroupement des valeurs des complexités.

Traités de mathématiques	Nature de la formule	Types de texte	Complexité1	Complexité 2	
MM ou TM	1, 2, 3 ou4	1, 2 ou 3	1 ou 2	embran-chement	poids

Les formules sont de nature:
1- Intégro-différentiel (I).
2-analyse (φ).
3-opératoire (O.

Les textes sont :
1-explicatifs.
2-démonstratifs.
3-constructifs.

La complexité 1 est :
1-faible ; symbolisée par – dans les tableaux.
2 –forte ; symbolisée par + dans les tableaux.

La complexité 2 est :
1-d'embranchements : 1 (peu nombreux), 2 (nombreux).
1-de poids : M (analyse), TP (topologie, analyse fonctionnelle).

6-2 Regroupement des diverses identifications des formules : complexités 1 et 2, embranchements et leurs situations dans les différents types de texte

Nous avons, à la suite de l'étiquetage précédent des formules, analysé leurs répartition dans les différents types de texte. Nous constatons que certains types de formules sont diversement représentés dans les deux traités. Ces différences renvoient, nous l'avons vu précédemment, à des difficultés de compréhension qui se traduisent par la plus ou moins grande difficulté à effectuer les calculs présentés, ou renvoient à des propriétés spécifiques des concepts représentés, et parfois à des difficultés à déterminer les liens conceptuels qui les relient à la seule lecture de la configuration des formules. Dans les tableaux, les mathématiques de l'ingénieur prennent la notation M (poids faible =1), et topologie et analyse fonctionnelle la notation TP (Poids fort = 2). La structure des formules prend les notations : embranchement peu nombreux (-), embranchements nombreux (+).

Les mathématiques de l'ingénieur sont plus anciennes que les mathématiques de la topologie et de l'analyse fonctionnelle, c'est pour cette raison, que nous avons qualifié de poids faible = 1, les formules des mathématiques de l'ingénieur et de poids fort = 2, les formules des mathématiques de la topologie et de l'analyse fonctionnelle.

Les tableaux des trois pages suivantes, disposés horizontalement, indiquent les pourcentages de formules correspondant aux caractéristiques indiquées, pourcentages obtenus respectivement pour le traité *Méthodes Mathématiques* (premier tableau) et le traité *Théorie des Distributions* (deuxième tableau). Ils sont suivis d'un troisième tableau disposé horizontalement lui aussi, qui présente une comparaison des deux traités considérés.

Pourcentages de formules du traité *Méthodes Mathématiques* ayant les caractéristiques suivantes

Place des formules dans le texte	Textes explicatifs				Textes démonstratifs				Textes constructifs			
Longueur de formules	Formules courtes		Formules longues		Formules courtes		Formules longues		Formules courtes		Formules longues	
Embranchements	--	+	--	+	--	+	--	+	--	+	--	+
Poids des formules M (Math-Ing) TP (Topologie/ Analyse fonctionnelle)	M TP	M TP	M TP	M TP	M TP	M TP	M TP	M TP	M TP	M TP	M TP	M TP
Nature des formules ↓ Intégro-différentiel	5		6		3				6		1 1	
fonction	15 9				6		1		6		1	1 1
objet	4	4	3		4				4		9	5

Pourcentages de formules dans le traité *Théorie des Distributions* ayant les caractéristiques suivantes :

	Place des formules dans le texte	Textes explicatifs								Textes démonstratifs								Textes constructifs							
	Longueur des formules	Formules courtes				Formules longues				Formules courtes				Formules longues				Formules courtes				Formules longues			
	Embranchements	--		+		--		+		--		+		--		+		--		+		--		+	
Nature des formules ↓	Poids des formules -M (Math-Ing) -TP (Topologie/ Analyse Fonctionnelle)	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP
intégro-différentiel		10																2	10			2	8		
fonction		20				2	2				8							20				2			
objet		10				2												2							

Comparaison des formules des deux traités																									
	Places des formules dans le texte	Textes explicatifs								Textes démonstratifs								Textes constructifs							
	longueur des formules	Formules courtes				Formules longues				Formules courtes				Formules longues				Formules courtes				Formules longues			
	Embranchements	-		+		-		+		-		+		-		+		-		+		-		+	
Natures des formules	Poids des formules -M (Math-Ing) -TP (Topologie/ Analyse fonctionnelle)	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP	M	TP
intégro-différentielle																									
fonction																									
objet																									

type de formules présent majoritairement dans *Théorie des Distributions*.

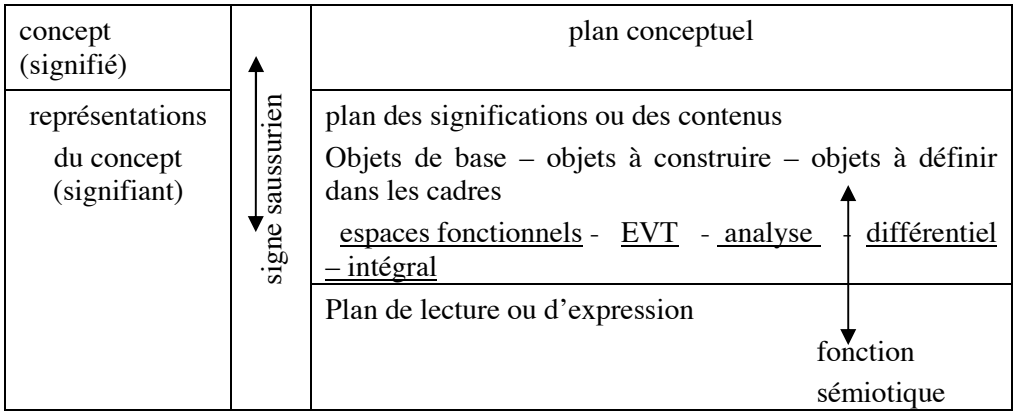
type de formules présent majoritairement dans *Méthodes Mathématiques*.

La présente analyse s'intéresse donc aux différents types de texte où interviennent les formules et les expressions. Dans les textes explicatifs, la *Théorie des Distributions* présente les formules des distributions dans le cadre de l'analyse fonctionnelle et des espaces topologiques ; tandis que pour présenter les distributions, le traité *Méthodes Mathématiques* fait usage des formules de l'analyse. Dans les textes démonstratifs, la *Théorie des Distributions* utilise des symboles de l'analyse et *Méthodes Mathématiques* utilise des symboles de la topologie et de l'analyse fonctionnelle. Dans les textes constructifs de notions, le traité *Méthodes Mathématiques* s'appuie sur des exemples (le statut objet des formules) pour présenter les propriétés à définir. Ces présentations évitent la construction de topologies sur les ensembles de fonctions et facilitent en cela la compréhension des distributions. On peut conclure que la différence entre ces deux traités porte sur les démarches de présentation des distributions : d'une part, une démarche où les prémisses causales appellent directement les résultats des distributions pour les *Méthodes Mathématiques* ; et d'autre part, pour la *Théorie des Distributions*, une démarche s'appuyant sur des conclusions intermédiaires issues d'axiomes de base rendant la démarche très déductive, comme nous le montrerons, par la suite dans l'analyse sémiotique des démonstrations.

7- Analyse sémiotique.

Nous allons faire référence à Hjelmslev pour identifier l'articulation qui se place entre les concepts et leurs représentations. Hjelmslev considère le plan des contenus ou des significations et le plan d'expressions. L'articulation entre ces deux plans du langage mathématique s'est construite historiquement à travers la compréhension des concepts. Cette articulation, Hjelmslev la nomme aussi la fonction sémiotique ; cette fonction s'élabore en effet à l'aide de la compréhension du texte (L.Hjelmslev, 1971). Selon ce linguiste, le contenu des expressions se confond avec le sens courant que peut lui donner la langue mathématique dans laquelle sont écrites les expressions (L.Hjelmslev, 1971). Pour resituer ce postulat linguistique, la substance du contenu serait « la pensée du concept » et la substance de l'expression « la chaîne phonique ou écrite ». Nous disons que le contenu a été introduit pour rendre compte de l'attribution d'une signification au texte, le contenu étant par définition indissociable de l'expression dont il est le contenu. C'est cette relation entre expression et contenu qui est indispensable pour la compréhension que nous déterminons, comme le précise le tableau ci-dessous. Nous utilisons cette fonction sémiotique pour lier le plan de contenu constitué des registres - espaces fonctionnels – EVT – analyse - différentiel – intégration - et le plan d'expression des différents types de langages mathématiques.

Tableau 16 : structure de la sémiotique de Hjelmslev



7.1 - Analyse sémiotique de la complexité des démonstrations

Nous avons caractérisé les démonstrations avec les critères que nous mettons en œuvre quand nous essayons de comprendre ce qui est démontré, à savoir si nous avons une démonstration qui s'appuie sur des objets déjà définis (démonstrations de base) ou qui vise des objets à construire (démonstrations constructives), et ce en considérant le mode d'écriture de la démonstration : le langage naturel (L.N) ou le langage formel. Concernant ce dernier, il est à noter qu'on ne trouve plus dans les démonstrations, comme il y a une trentaine d'années, l'utilisation des symboles de la logique pour les écrire ; ces symboles sont transcrits aujourd'hui en langage naturel, mais la rigueur de la logique formelle est respectée ; ce langage se nomme langage mathématique (LM) (C.Laborde, 1975). Nous avons été également attentif aux cadres des concepts : fonctionnel ou analyse.

Cadre fonctionnel : c'est l'étude des espaces vectoriels topologiques dont les éléments sont des fonctions.

Cadre de l'analyse : c'est le prolongement du calcul infinitésimal, où on privilégie l'utilisation de la notion de limite, des fonctions continues et l'intégrale de Lebesgue.

Cadre des EVT : c'est l'étude des espaces topologiques non- fonctionnels.

Tableau 17 : caractéristiques des démonstrations dans Méthodes Mathématiques.

N° démonstrations	type de démonstrations		langage des démonstrations		cadres mathématiques des démonstrations	
	base	Construc-tive	L.F	L.M	fonc-tionnel	Analyse
1		+		+		+
2	+			+		+
3	+		+			+
4		+		+		+
5		+		+		+
6		+		+		+
7		+		+	+	
8		+		+		+
9		+		+		+
10		+		+		+
11		+		+		+

Tableau 18 : caractéristiques des démonstrations dans Théorie des Distributions.

N° démonstrations	type de démonstrations		langage des démonstrations		cadres mathématiques des démonstrations	
	base	concep-tuel	L.F	L.N	fonc-tionnel	analyse
1		+	+			+
2	+		+			+
3		+	+		+	
4		+	+		+	
5		+	+		+	
6		+	+			+
7		+	+		+	
8		+	+		+	
9		+	+		+	
10		+	+		+	
11		+		+	+	
12		+	+		+	
13		+		+	+	

Si on regroupe les relevés effectués sur ces indices facilitateurs de la compréhension, nous obtenons les tableaux suivants :

Tableau 19 : récapitulatif des spécificités des démonstrations des Méthodes Mathématiques.

Démonstrations de base				Démonstrations constructives			
L.M		L.N		L.M		L.N	
fonct-ionnel	analyse	fonc-tionnel	analyse	fonc-tionnel	analyse	fonc-tionnel	analyse
	1		*1*			*1*	*8*

Tableau 20 : récapitulatif des spécificités des démonstrations de la Théorie des Distributions

Démonstrations de base				Démonstrations constructives			
L.M		L.N		L.M		L.N	
fonct-ionnel	analyse	fonc-tionnel	analyse	fonc-tionnel	analyse	fonc-tionnel	analyse
			1	8	3	1	

Si on relie le type de démonstrations et le langage utilisé, on obtient le regroupement suivant :

Tableau 21 : relation entre langage de la démonstration et cadres mathématiques

Types de démonstration	LM	L.N	Fonc-tionnel	analyse
base			*1* *1* 1	
constructif			*8* *1* 3 8 1	

LM langage mathématique LN langage naturel

n nombre de démonstrations *Méthodes Mathématiques*

n nombre de démonstrations *Théorie des Distributions*

de différents langages des cadres, fonctionnel ou analyse.

Ce que nous pouvons constater, en reliant les langages des démonstrations et leur registre, *La théorie des distributions* expose et construit les distributions en s'appuyant sur 9 démonstrations conceptuelles écrites en langage formel, sur 13 démonstrations dans le registre fonctionnel des espaces vectoriels. Cette approche est plus difficile et surtout plus nouvelle que la présentation prise par *les Méthodes Mathématiques* dont 8 démonstrations s'appuient sur la théorie de l'intégration et le calcul différentiel sur 12 démonstrations Ces derniers objets mathématiques, différentielles et intégrales, rendent plus facile l'accès aux distributions dans la mesure où elles font partie depuis très longtemps des connaissances des ingénieurs.

Nous avons relevé les notions-concepts, qui figurent dans les deux traités, pour déterminer leur répartition dans les différents types de texte, afin d'établir, par la suite, le lien de compréhension entre ces notions-concepts (plan de contenu) avec les types de texte (plan d'expression). Les notions-concepts du traité *Méthodes Mathématiques* sont : sous-espace vectoriel- mesurabilité- ∞ dérivable- support borné- ensembles algébriques- voisinage- espaces fonctionnels- le localement sommable ou mesurable- dérivées partielles de d°n- fonctionnelles linéaires continues- suites convergentes- distributions- opérateur différentiel transposé- fonction continûment différentiable- fonction sur R- la norme euclidienne $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ sur R- dérivabilité de d°n- - support d'une distribution- recollement par morceaux- uniformément continue- topologie faible ou forte- voisinage- espaces fonctionnels- espaces vectoriels. Pour le traité *Théorie des distributions*, nous avons noté les notions-concepts : espace vectoriel de dimension n- hypervolume – mesure – fonction sommable - fonctionnel – espace topologique – absolument continu – densité – compact – partition de l'unité – voisinage – espace de Banach – support – dérivation – mesure de Lebesgue – fonction de Dirac – fonction de Heaviside – forme linéaire.

Nous avons défini la notion-concept comme une proposition première, posée et non déduite, dont les propriétés conduisent les démonstrations, au contraire du lemme qui est un résultat intermédiaire. Nous avons relevé la place des textes qui soutiennent les démonstrations

Tableau 22 : répartitions en pourcentages des types de texte.

Textes	explicatifs	démonstratifs	constructifs
Méthodes mathématiques	40%	20%	40%
Théorie des distributions	40%		60%

Il est à remarquer que les textes explicatifs du traité *Théorie des distributions* s'appliquent sur les éléments de démonstrations des textes constructifs des distributions, tandis que dans le traité *Méthodes mathématiques*, les textes explicatifs répartissent leurs explications aux lecteurs sur les deux autres textes : démonstratifs, constructifs. Les textes explicatifs sont des aides à la compréhension et viennent compléter les informations que portent les formules et les démonstrations.

Nous présentons dans le tableau qui suit les démarches de présentation des distributions, à gauche celle de *Théorie des Distributions* à droite celle de *Méthodes Mathématiques*.

Théorie des distributions	*Méthodes Mathématiques*
Mesure sur un espace borélien. L'espace des fonctions à sup compact (C_K) $\varphi \in C_K$ mesure de φ $\mu(\varphi) = \iint_{\mathbb{R}^n} ... \int \varphi d\mu$ -topologie induite par la conv. unif (C.U) sur C_K - C_K espace de Banach. Théorème de Riesz pour définir une mesure comme forme linéaire continue sur C . A une mesure μ « absolument continue correspond une densité f sommable pour la mesure de Lebesgue et réciproquement. particularités de la mesure δ(φ) généralisation de la notion de mesure la dérivation. -théorème D dense dans C. démontré La même démarche que celle de *Méthodes Mathématiques* mais les propriétés sont démontrées ; en remarquant que la topologie sur D_K plus fine que celle de C_K	Définition de (D) E.V fonctions ∞ dérivables à support borné. Exemple : $\varphi(x) = \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right)$; démonstration φ $\varphi \in D$. Théorème d'approximation. $f \in C_K$ C.U pour la nome définie par l'intégrale de Lebesgue. D dense dans C_K Définition des distributions. Fonctionnelle continue sur D Exemple : $\langle T_f, \varphi \rangle = \iint_{\mathbb{R}^n} ... \int f(x)\varphi(x)dx$ F sommable $\varphi \in D$. Notion de p.p Dérivation des distributions. Définition sur f ∞ différentiable. $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = \iint_{\mathbb{R}^n} ... \int \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi(x)dx$ Du théorème de Fubini et de l'intégration par parties en démontrant que $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle$ et $\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$ sont des distributions, on obtient : .\.

Théorie des distributions	*Méthodes Mathématiques*
l'espace D -L'espace des fonctions ∞ dérivables à support compact K (C_K) -topologie limite par C.U sur les dérivées d e tout ordre (topologie faible) - Les distributions, fonction linéaire élément dual de (D) définition – une distribution T est une forme linéaire sur D dont la restriction à D_K est continue. $\varphi \rightarrow$ T ou $< T,\varphi >$ Théorème démontré : pour qu'une distribution T puisse être définie par une mesure μ, il faut et il suffit Qu'elle soit continue sur chaque D_K muni de la Topologie induite par C_K Définition de la dérivation Si T est une fonction à dérivées partielles continues on calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi) = \iiint \ldots \int \frac{\partial f}{\partial x}\varphi dx$ et on obtient par intégration par parties. $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi) = -f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$ Pour une distribution T, on obtient $\frac{\partial T}{\partial x}(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$ il est démontré que Les résultats sont des distributions. La généralisation par récurrence et les propriétés de l'intégrale de Lebesgue donne une formule générale. $\left\langle D^p T, \varphi \right\rangle = -(-1)^{\lvert p \rvert} \left\langle T, D^p \varphi \right\rangle$	$\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$ On en déduit pour la distribution T : $\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = -\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$ On admet par récurrence la généralisation de la dérivation : $\left\langle D^p T, \varphi \right\rangle = -(-1)^{\lvert p \rvert} \left\langle T, D^p \varphi \right\rangle$

À partir du rapprochement des démarches de présentation des distributions des deux traités, on peut déduire que lorsqu'on développe les propriétés des objets mathématiques- les distributions- en se rapprochant des axiomes de base- la mesure et la topologie- comme le propose le traité *Théorie des Distributions*, la difficulté s'accroît. Pour démontrer des théorèmes nouveaux ou construire des objets nouveaux, on emploie des formules condensées, et des démonstrations plus longues et écrites en langage mathématique proche du langage formel.

Sans perdre de la rigueur, en précisant les propriétés admises, linéarité et continuité, mais en mentionnant les démarches de validité des nouveaux objets et théorèmes, en présentant des exemples, le traité *Méthodes Mathématiques* a des formules plus renseignées en symboles qui remplacent les démonstrations ; les termes des démonstrations présentes sont les traductions en langage naturel des formulations de la logique du langage mathématique pour présenter les distributions. C'est ce qui marque la différence entre ces deux traités.

Plus on fixe les axiomes sur des notions premières, plus la construction de théorèmes et d'objets nouveaux exige une démarche de formalisation plus complexe en assemblant en des constructions logiques ces notions premières. Il nous paraît donc évident que si, au départ, la construction d'objets ou de théorèmes nouveaux repose sur une théorie ayant de nombreux résultats, la construction et les démonstrations en seront simplifiées, et leur démarche sera de lecture plus compréhensible.

7.2- Analyse sémiotique de la complexité du texte.

Comme nous l'avons vu, nous avons découpé le texte des deux traités, en trois types :
- type explicatif
- type démonstratif
- type constructif

Ce classement, nous l'avons déjà présenté pour situer les démonstrations, sans prendre en compte les liens d'énonciation entre les types de texte, les formules et les démonstrations. Ces liens ont une implication dans la compréhension des formules et des démonstrations par leurs ajouts qui appartiennent à la topologie et aux ensembles fonctionnels, et remplacent les cadres mathématiques qui ne sont pas représentés dans les formules ; il n'en va pas de même pour le cadre de l'analyse.

Nous avons repris ces liens pour appréhender la raison de la difficulté croissante que présentent les deux traités, quand sur le plan d'expression on passe de l'analyse mathématique de l'ingénieur (analyse) à l'intégrale de Lebesgue pour

déboucher sur les espaces fonctionnels topologiques. La présence de plus en plus nombreuse de démonstrations et formules de la topologie demande une maîtrise d'axiomes et d'espaces fonctionnels pour aboutir aux propriétés et usages des distributions. Pour dégager cette croissance de la difficulté de complexité, nous avons placé dans le plan de contenu les termes ou terminologies attachés aux concepts mathématiques, et dans le plan d'expression les types de texte. Nous avons relevé en pourcentages pour les deux traités, dans chaque type de texte, les termes ou terminologies présents dans les trois cadres mathématiques (analyse, topologie, espaces fonctionnels).

Tableau 23 : termes et terminologies attachées aux cadres mathématiques :

cadre de l'analyse	
méthodes mathématiques	∝ dérivable - l'ensemble d'intégration est borné- dérivées de tout ordre- conv.uniforme- fonct. localement sommable- p.p égal- densité volumique – mesurable bornée- conv p.p – dérivée partielle- fonct. continûment différentiable- théorème de Fubini- intégration par parties.
théorie des distributions	Fonct. À n variables- hypervolume- dérivée partielle- D.L Mac Laurin- mesure de Lebesgue- fonct..sommable- définie p.p- fonct.continue ou convexe ou harmonique- ∝ dérivable sous le signe intégrale
Cadre de la topologie	
méthodes mathématiques	esp/s.esp vectoriel- fonct..continue à supp. borné- voisinage- famille d'ouverts- complémentaire
théorie des distributions	esp/s.esp vectoriel- mesure- ensemble borélien- recouvrement d'ouverts- partition de l'unité.
cadre d'ensemble fonctionnel	
méthodes mathématiques	Fonct..linéaire continue- distributions nulles dans un ouvert- support de T- fonct fondamentale du calcul symbolique.
théorie des distributions	Ensemble de fonctions- toplogie sur $\mathcal{C}$- th. de Riesz- forme linéaire continue- support d'une mesure- forme linéaire- espace vectoriel de fonctions- dense- correspondances biunivoque- point de vue local- recollement des morceaux- support d'une distribution- distributions dérivable- distributions dérivées partielles.

Tableau 24 : répartitions des termes des notions mathématiques dans les différents types de textes.

textes	texte explicatif		texte démonstratif		texte constructif	
traités	MM	TD	MM	TD	MM	TD
analyse	*28*	7	12	2	*20*	7
topologie	8	22	0	5	8	22
ensemble fonctionnel	8	16	12	7	4	12

Nous pouvons constater que les citations des termes de l'analyse sont plus nombreuses *(28 et 20)* dans le traité des *Méthodes Mathématiques* que dans le traité *Théorie des Distributions* ; par contre ce dernier cite en plus grand nombre les termes de la topologie et de l'ensemble fonctionnel (22, 22, 16 et 12). Ce constat souligne que la présentation des distributions dans le traité *Méthodes Mathématiques* s'appuie sur l'analyse mathématique de l'ingénieur (l'intégration) et la théorie des distributions sur les mathématiques du XXe siècle (topologie, ensembles fonctionnels). Cette répartition des termes de l'analyse, de la topologie et de l'ensemble fonctionnel met en lumière les raisons de l'écart de difficultés de compréhension entre les deux traités.

8- Récapitulation des méthodes de détermination de la complexité des deux traités de L. Schwartz.

- L'outil complexité 1 s'est construit sur la longueur des formules en utilisant le nombre de symboles et leur statut. Cet outil pointe faiblement les raisons des difficultés de complexité entre les deux traités.

- L'outil complexité 2 s'est construit sur la structure de la formule et le poids des symboles qui les constituent.

- Le croisement des informations apportées par les outils de complexité 1 et 2 ont permis de déterminer que les formules-expressions de la *Théorie des Distributions* sont constituées de symboles récents, ce qui les rend plus difficiles à comprendre que les formules-expressions des *Méthodes Mathématiques* qui appartiennent aux mathématiques moins récentes.

- L'analyse sémiologique sur les démonstrations et les textes montre que la divergence des démarches est à prendre en compte pour expliquer la différence des difficultés de compréhension que nous constatons entre les deux traités.

9- Conclusion :

Notre étude s'est limitée aux aspects sémantiques et plus spécifiquement aux difficultés de complexité des formules et des démonstrations. Ces aspects

sémantiques du texte renvoient aux informations sur les préalables mathématiques des formules et des démonstrations. Si l'accès à la signification et à la compréhension s'amorce par la perception visuelle des symboles et des formules, cette première perception donne des informations que nous ne pouvons pas appréhender directement. De ce constat, nous avons construit des outils : la complexité 1 et 2 de la formule et la complexité de la démonstration ; ces outils nous ont permis de mesurer certains éléments de l'écriture mathématiques qui interviennent dans leur compréhension, à savoir la longueur et la structure des formules et la déductibilité de la démonstration. Les complexités 1et 2 et la complexité structure de la formule n'ont fait ressortir que peu d'éléments susceptibles d'expliquer la différence de complexité entre les deux traités. Il n'en va pas de même pour l'analyse sémiotique : nous avons constaté que le traité *Méthodes Mathématiques* développe une démarche qui s'appuie sur les mathématiques de l'ingénieur en usant de théorèmes « forts » qui exposent directement les propriétés des distributions ; alors que le traité *Théorie des Distributions* construit les distributions sur des théorèmes qui font appel à d'autres théorèmes généralement des lemmes. Les textes démonstratifs d'enchaînement de lemmes réclament de la part du lecteur une bonne connaissance de la topologie des espaces fonctionnels. A notre avis, c'est l'ensemble de ces déductions sans l'appel à des théorèmes « forts » qui constitue l'obstacle- à un accès rapide aux distributions, et rend donc la compréhension plus difficile. L'absence de signes ostensibles des concepts ou résultats intermédiaires ne rend pas le texte moins rigoureux sur le plan de la logique comme en témoigne le traité *Méthodes Mathématiques*. Nous avons déduit de cette dernière analyse, que la différence entre les deux traités, sur le plan de la compréhension, porte sur :

-la mise en évidence ou non de liens entre les objets mathématiques.
-la présentation ou l'absence des propriétés.
-la traduction d'une propriété sous une autre forme par le traitement des règles de la logique.
-l'appel à la preuve dans la démonstration par les théorèmes et les lemmes.

Nous pouvons également constater qu'un texte mathématique est d'autant plus compréhensible qu'il développe une démarche de présentation des concepts proche des mathématiques de l'ingénieur, avec des démonstrations écrites dans un langage mathématique simple, où les symboles logiques sont traduits en des expressions de conditions nécessaires et suffisantes, et que ces mêmes démonstrations font appel à des théorèmes « forts » en donnant directement les propriétés, permettant de conclure rapidement la chose à démontrer. Si nous faisons référence à R. Barthes (R.Barthes, 1985, p.79), le traité *Méthodes mathématiques* est plus proche d'une démarche qui reprend des notions communément admises en restant dans la connotation, ce que ne le fait pas le traité *Théorie des distributions* dont le discours est dans le plan de la dénotation.

Nous pensons que la sémiotique peut, en évaluant les modes d'articulations entre les différents éléments d'un texte mathématique : formules, démonstrations, comme nous l'avons fait dans cet article, donner des évaluateurs des difficultés de complexité d'un texte. Notre article fait remarquer l'importance des formules pour présenter les définitions et les propriétés des concepts et celle des démonstrations, même en faible nombre, dans la recherche des propriétés. Il est préférable pour diminuer la complexité de compréhension, de remplacer les démonstrations par des formules, lorsque ce remplacement est possible. Il n'est pas nécessaire de prendre, comme point de départ d'une présentation de concepts, des suites de lemmes, si par la suite l'utilisation de ce concept, ne met pas en lumière l'absence de ces lemmes. La sémiotique des textes suggère qu'un « gros » théorème puissant qui réduit la longueur des démonstrations est préférable à la construction pas à pas de propriétés à l'aide de lemmes intermédiaires, et que des formules de structure peu utilisatrices de symboles sont plus compréhensibles à condition que ceux-ci ne renvoient pas à des concepts de classe d'objets abstrus.

L'article se rattache à la psychologie et à la didactique dans la mesure où il est fait référence à l'organisation des éléments primitifs et des symboles de base dans l'organisation sémiotique des textes mathématiques et poursuit la coopération entre les didacticiens et les psycholinguistes.

OUVRAGES DE REFERENCE

Traité (a) *: Méthodes Mathématiques pour les sciences Physique* de L. Schwartz *p 76-98*.

Traité (b) : *Théorie des distributions* de L. Schwartz *p12-62*.

Dans les tableaux, la numérotation des formules renvoie à leur page et place dans les traités.

BIBLIOGRAPHIE

BARTHES, R. (1967). *Eléments de sémiologie*. Paris: Edition Seuil.

BARTHES, R. (1985). *L'aventure sémiotique*. Paris: Edition Seuil, p.79.

DHOMBRES, J. (2006-2007). *Epistémologie de la mise en mathématiques*. Paper presented at the séminaire Koyré.

DUVAL, R. (Oct. 2009). *note manuscrite*.Unpublished manuscript.

FREGE, G. (1971). *Ecrits logiques et philosophiques*. Paris: Edition du Seuil.

FREUDENTHAL, H. (Ed.) (1980) Encyclopédia Universalis. Paris. P. 338-384

GUHA, A. (1955). *Complexité de textes:Une analyse du modèle de Kintsch*. Université de Paris-Sud, Orsay.

HERREMAN, A. (2000). *La topologie et ses signes*. Paris: L'Harmattan. P. 17-42

HJELMSLEV, L. (1966). *Le langage* (t. f. d. J.Greimas, Trans.). Paris: édition de Minuit, p. 23

HJELMSLEV, L. (1971). *Prolégomène à la théorie du langage*. Paris: Edition de Minuit.

JANVIER, M., BAILLE, J., MAURY, S. (1993). Essai de typologie des graphiques dans les manuels d'histoire-géogaphie et biologie-géologie des collèges. *Les SCIENCES DE L'EDUCATION, 1-3,* P.221-244.

LABORDE, C. (1975). Un langage de prononcé de formules mathématiques. *la revue française de pédagogie, n°23*.

MATH93. Notations mathématiques et approche historique. Retrieved from http//www.math93.com

RIDEAU, L. (2002). Affichage et manipulation interactive des formules. *Arima*.

SCHWARTZ, L. (1977). *Un mathématicien aux prises avec son siècle*. Paris: édition Jacob pp 253-254

Charles Chandler
10 av du maréchal Davout
91800 Brunoy
Chandler.boksztejn@gmail.com

Doctorat sciences de l'éducation : option enseignement des mathématiques, laboratoire EDA (Education Didactique Apprentissage), laboratoire du département sciences humaines de l'Université Paris-Descartes.

FRANÇOIS PLUVINAGE

LECTURE DE L'OUVRAGE DE ROBERT, PENNINCKX & LATTUATI : UNE CAMERA AU FOND DE LA CLASSE DE MATHEMATIQUES.

TOUCHE-T-ON LE FOND ?

Lorsque j'ai eu entre les mains l'ouvrage « Une caméra au fond de la classe de mathématiques », j'ai été animé d'un double mouvement, d'un côté l'envie d'en appréhender le contenu globalement pour voir le terrain couvert, de l'autre au contraire celle de porter mon attention localement, sur des points susceptibles de m'intéresser plus particulièrement. Il se trouve qu'au courant de cette dernière décennie, j'ai été amené à visionner et à tenter d'analyser avec des professeurs des enregistrements vidéo, effectués dans des classes auxquelles j'avais pu ou non assister personnellement. Ce faisant, l'intérêt mais aussi les difficultés du genre n'ont pas manqué de m'apparaître.

Depuis mes débuts de recherche en didactique des mathématiques, j'ai soutenu, aussi vigoureusement que faire se peut, l'appui sur l'observation de ce qui se passe dans la classe. C'est par exemple ainsi que, dans ma thèse de doctorat (1977), à côté d'études cognitives et statistiques sur l'évaluation, figurent trois pages d'une observation d'un élève lors d'une séquence de correction d'exercice dans sa classe, à laquelle j'avais assisté comme observateur : Sans entrer dans les détails sur l'activité de l'élève pendant le quart d'heure que cette séquence avait duré, disons simplement qu'il avait été attentif à ce qui se passait dans sa classe pendant 2 minutes 30 secondes sur ces 15 minutes, soit à peine plus de 15% du temps. Depuis, pour étudier une vidéo de classe, je la visionne non pas une, mais plusieurs fois et lors de l'un des passages, je tâche dans la mesure du possible de me mettre dans la situation d'un élève de la classe enregistrée : Qu'aurais-je compris ? Qu'aurais-je fait ? Comment aurais-je eu envie de réagir ? Qu'aurais-je appris ?

L'ouvrage amènerait plutôt le lecteur à s'identifier avec l'enseignant qu'avec l'élève, ce qui n'est pas surprenant puisqu'il a été élaboré à partir de pratiques de formation d'enseignants. Dans ce sens, une référence aurait mérité d'être faite au mouvement qui est connu sous le nom de « Lesson study » et qui a été largement développé depuis le Japon où il avait été lancé. Aujourd'hui par exemple, depuis la Silicon Valley, la fondation Noyce impulse ce type de travail en groupes

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 18, p. 215 - 218.
© 2013, IREM de STRASBOURG.

collaboratifs, où les analyses d'enregistrements vidéo tiennent une place centrale. Au passage, notons que le point de vue d'élèves, précédemment signalé, y est explicitement pris en compte.

L'absence de référence au courant « Lesson study » amène à se pencher plus généralement sur l'abondante bibliographie qui occupe dans l'ouvrage une vingtaine de pages (de 325 à 344). Incontestablement, cette bibliographie sera d'un grand intérêt pour le lecteur francophone, et plus spécifiquement français, même si des auteurs belges et canadiens y ont une place. En revanche, on peut pointer la part faible qu'y tiennent des documents écrits dans une autre langue que le français : sauf omission, je n'ai relevé que 14 références en anglais et une en allemand sur un total de plus de trois cents références. Il est très bien qu'il y ait en France une école de didactique des mathématiques productive, mais il convient qu'elle ne soit pas trop repliée sur elle-même, et qu'au contraire elle soit ouverte. On peut donc inviter le lecteur d'« Une caméra au fond de la classe de mathématiques » à se documenter sur les productions étrangères ; pour le cas de « Lesson study », nous indiquons en bibliographie deux consultations en ligne qui lui fourniront une entrée sérieuse.

L'analyse de séances occupe dans l'ouvrage la section 1 du premier chapitre de la deuxième partie, soit de la page 57 à la page 75, et tout le chapitre 2 de la même deuxième partie (p. 93-115). Finalement, par rapport au titre du livre, cette quarantaine de pages sur les plus de 350 est mince, même si une annexe de 5 pages (Annexe 2, p. 195) traite de l'utilisation de vidéos en formation. Certes d'autres thèmes abordés dans le livre ne manquent pas d'intérêt, nous pensons par exemple à l'évaluation qui occupe presque autant de place (environ 40 pages). Néanmoins, j'aurais bien vu quelques compléments relatifs à l'analyse de vidéos, ne serait-ce que le problème du découpage d'une séquence complète de classe en épisodes.

Du point de vue des thèmes mathématiques abordés, les vidéos sélectionnées portent toutes sur la géométrie. Dans les considérations didactiques développées au fil de l'ouvrage, l'algèbre est pourtant en bonne place, si bien que l'analyse d'une vidéo sur un sujet d'algèbre ne serait pas dépourvue d'intérêt. Et pourquoi pas des représentations graphiques, ou des probabilités ? Un argument en faveur de la géométrie est qu'elle se prête bien à l'observation. De même, dans les activités des professeurs, la correction d'interrogations ou de devoirs n'est pas de celles dont la gestion est la plus facile. Voir différentes manières de la conduire dans la classe pourrait être intéressant.

Bref, des prolongements de l'ouvrage dans le sens d'un développement en accord avec son titre principal pourront rendre des services appréciables non seulement en formation des enseignants, mais aussi dans la recherche sur l'enseignement des mathématiques. Le site Internet des Presses Universitaires de Franche-Comté, qui héberge déjà les vidéos étudiées dans l'ouvrage pourrait-il permettre au contenu

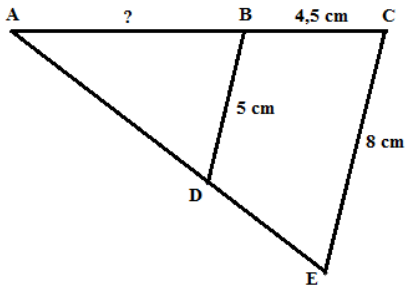
présenté d'évoluer, par exemple par l'incorporation de nouvelles vidéos ?

REGARDER LES VIDEOS

Les vidéos hébergées sur le site des Presses universitaires de Franche-Comté marquent cette évolution appréciable que peut aujourd'hui procurer l'édition, lorsque les livres imprimés sont accompagnés de documents audiovisuels. Un défaut toutefois : en l'absence des indications que nous fournissons ci-après, l'internaute qui souhaite visionner ces vidéos doit faire preuve de patience et s'y reprendre à plusieurs fois avant d'y accéder. Il est facile de se rendre sur le site internet, dont l'adresse est http://pufc.univ-fcomte.fr/. Mais ensuite, il faut se rendre dans le Catalogue à la rubrique *Recherche avancée*. Dans la page interactive qui s'ouvre il faut entrer par exemple Aline Robert comme auteur, et surtout choisir *Didactiques* dans le menu déroulant de la fenêtre *Série*. Une présentation succincte du livre apparaît alors, et le lien *Fiche ouvrage* donne (enfin) accès à une description plus complète du livre et aux vidéos.

Les vidéos ont des durées qui s'échelonnent entre 6 et 14 minutes (la deuxième vidéo est la plus longue, comportant deux enregistrements d'environ 14 minutes chacun). Elles résultent d'enregistrements effectués en caméra fixe. On ne voit pratiquement que l'enseignante sur les deux premières, alors que sur les deux dernières, on voit quelques élèves de dos (le spectateur est donc un peu plus présent dans la classe).

En regardant la chronologie de la séance donnée pour la quatrième vidéo (p. 112 du livre), le temps affecté à *distribution du sujet et explication* m'a semblé long, notamment par rapport aux temps de mise en place de sujets d'une complexité analogue dans les premières vidéos : 5 minutes dans la quatrième vidéo contre à peine plus de 2 minutes dans les premières.



Exercice de la quatrième vidéo

En visionnant cette vidéo « *en situation d'élève* » comme indiqué précédemment, on ne peut manquer de remarquer un phénomène de *sur-intervention* du professeur qui n'apparaît pas dans l'analyse que le livre présente. Il me semble qu'il vaut la peine de signaler ce phénomène, car j'ai eu l'occasion de l'observer somme toute assez souvent lorsqu'un travail individuel sur une tâche est demandé aux élèves d'une classe : Après que l'énoncé a été donné, oralement, au tableau ou en distribuant des feuilles, ce qui occupe à peu près 2 minutes pour une situation comme celle représentée, le professeur ne laisse pas les élèves chercher, alors

même que beaucoup se mettent au travail ou voudraient le faire, mais revient sur l'énoncé, commente la situation, réagit immédiatement aux premières ébauches d'écriture ou de dessin qu'il voit apparaître chez tel ou tel élève, au moment où d'autres se lancent sur des pistes très différentes. Que le lecteur essaie de traiter l'exercice tout en visionnant la vidéo, il se rendra compte qu'après les deux premières minutes initiales, il est gêné par les interventions du professeur, lequel ne reste pas plus de quelques secondes sans parler, durant cette phase qui devrait être de travail individuel.

Pour bien suivre les vidéos en général et comprendre ce qui se joue, il est nécessaire de prendre connaissance au préalable des énoncés dans le livre. Déjà le jeu qu'il est possible de pratiquer en essayant d'analyser alors ces vidéos sans plus d'indication est instructif. L'enrichissement que peut apporter la consultation de l'ouvrage permet d'en tirer ensuite le meilleur profit. Espérons que de telles formes de travail se multiplient et puissent même s'appuyer sur une technologie un peu plus poussée, par exemple l'enregistrement par deux caméras dont l'une suivra l'activité d'élèves en parallèle de la prestation du professeur.

BIBLIOGRAPHIE

Robert, A., Penninckx J. & Lattuati, M. (2012) avec la collaboration de Chesnais, A., Chesné, J.-F., Haskepian, M., Heulot, F., Pouyane, N., Roditi, E., Rousse, S. & Vancauwenberghe, E. *Une caméra au fond de la classe de mathématiques, (Se) former au métier d'enseignant du secondaire à partir d'analyses de vidéos*. Série « Didactiques », Presses Universitaires de Franche-Comté.

Deux références en ligne (en anglais) sur « Lesson study » :
http://www.glencoe.com/sec/teachingtoday/subject/japanese_lesson_study.phtml
http://www.noycefdn.org/documents/math/lessonstudy.pdf

François Pluvinage
pluvin@math.unistra.fr

INFORMATIONS AUX AUTEURS

Les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives sont une revue annuelle éditée par l'IREM de Strasbourg, Université Louis Pasteur. Elle a été fondée en 1988 par R. Duval et F. Pluvinage.

La revue publie des articles de recherches propres à développer et à stimuler la réflexion sur l'enseignement des mathématiques en direction de tous les types de publics : écoliers, lycéens, étudiants et adultes en formation. Les présentations de recherches concernant la formation initiale et continue des enseignants et sur l'enseignement dans des contextes socioculturels variés sont les bienvenues.

Les articles peuvent être de nature théorique en relation étroite avec une expérimentation dans le cadre d'un enseignement. Ils peuvent être aussi des comptes rendus d'une expérience d'enseignement appuyée sur un cadre théorique explicite. Les domaines théoriques de références sont issus de la didactique des mathématiques. Lorsqu'ils s'insèrent dans une problématique d'enseignement des mathématiques, les travaux peuvent aussi prendre appui sur la psychologie cognitive et sur la linguistique.

Les articles ne doivent généralement pas dépasser vingt pages mais exceptionnellement ils peuvent être plus longs et permettre ainsi à l'auteur de développer un point de vue original et émergeant dans le champ de recherche. Il est aussi possible de présenter une synthèse des recherches menées dans un domaine particulier de la didactique des mathématiques. Les articles proposés sont soumis à un arbitrage avant publication. Le cas échéant, des demandes de modifications, aménagements ou compléments des textes présentés seront adressées aux auteurs.

La langue de la revue est le français. Des articles peuvent être publiés dans d'autres langues (notamment anglais et espagnol) ; ils seront alors précédés d'une présentation analytique rédigée en français par l'auteur ou par l'équipe de rédaction.

Les articles proposés pour publication dans les *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* de l'IREM de Strasbourg peuvent être transmis sous forme de documents attachés à des messages électroniques. Il convient d'adresser ces messages à l'un des rédacteurs en chef, à son adresse électronique qui est indiquée dans ce volume.

Un modèle d'article au format des Annales se trouve sous forme de fichier *word* à l'adresse URL :

http://irem/data/publi/annales/templates/modele_annales_didactiques.doc

Après ouverture et enregistrement sous un nouveau nom, il permet d'introduire par copier-coller aux emplacements appropriés, en respectant les fontes de caractères et les tailles :

- le nom de du ou des auteurs ;

- le titre complet ;
- le titre éventuellement abrégé, figurant dans l'en-tête des pages impaires ;
- le bloc « abstract – résumé – mots clés » ;
- le texte proprement dit de l'article proposé ;
- la bibliographie sous forme normalisée (s'inspirer du modèle où apparaissent les différents cas pour la présentation des références).

Pour composer un article sans utiliser le modèle, par exemple en recourant à LaTeX, voici des précisions sur le format des pages et les caractères utilisés.

Feuille A4 portrait, avec les marges suivantes :

Haut :	3 cm
Bas :	8 cm
Gauche :	4 cm
Droite :	4 cm
Reliure :	0 cm
En tête :	2 cm
Pied de page :	7 cm

Caractères :

- Auteur(s) en première page : Arial 12 points, gras, petite capitale, Centré ;
- Titre en première page : Arial 14 points, petite capitale, Centré ;
- Abstract – Résumé – Mots clés : Times New Roman 10 points ;
- En-tête : Arial 9 points ;
- Corps de texte : Times New Roman 11 points.

Pour la pagination d'un article proposé, commencer par le numéro 1.

Adresses électroniques :

- pour des commandes de volumes, mailto :

bibirem@math.u-strasbg.fr

- pour des propositions d'articles, mailto :

alain.kuzniak@univ-paris-diderot.fr
francois.pluvinage@math.unistra.fr

Imprimerie et reprographie
Direction des affaires logistiques intérieures
Université de Strasbourg
Dépôt légal au 3e trimestre 2013