ERIC MOUNIER

DES MODÈLES POUR LES NUMÉRATIONS ORALES INDO-EUROPÉENNES A USAGE DIDACTIQUE
APPLICATION À LA NUMÉRATION PARLÉE EN FRANCE

Abstract. Models for oral Indo-European numbering with an educational purpose, application to spoken numeration in France
Young pupils often perceive the notion of number when using oral numeration. It allows solving various problems such as counting a collection of objects. Learning and considering increasing size of numbers generate an evolution of the methods in use. The syntax of particular numbering provides specific resources. There are similarities between Indo-European oral numerations but also differences in the perception of the logic of their syntax. It is possible to find arithmetic or ordinal principles. By offering a priori models, this article aims to provide an analytical framework to take into account certain characteristics of the constitution of the signs that make up an oral Indo-European numbering. We indicate the place of analysis in earlier finding, explain the link to learning, present the methodology and finally present obtained results: proposals of theoretical models for the mathematical principles of an Indo-European numbering and then their use in interpreting the numeration in France. Its purpose is to provide elements for educational studies on both learning and teaching numbers.

Résumé. Les jeunes élèves découvrent souvent la notion de nombre en utilisant une numération orale. Elle permet de résoudre des problèmes divers comme des dénombrements de collection d'objets. Les procédures employées évoluent au gré des apprentissages et des nombres en jeu. Elles sont susceptibles d'utiliser des ressources propres à la syntaxe de telle ou telle numération. Il existe des ressemblances entre les numérations orales indo-européennes mais aussi des perceptions différentes de la logique de leur syntaxe. Il est possible d'y trouver des principes arithmétiques ou ordinaux. En proposant des modèles *a priori*, cet article a pour but de fournir un cadre d'analyse pour prendre en compte certaines caractéristiques de la constitution des signes qui composent une numération orale indo-européenne. L'article indique la place de l'analyse dans les résultats antérieurs, expose le lien avec l'apprentissage, présente la méthodologie et donne les résultats obtenus : des propositions de modèles théoriques pour les principes mathématiques d'une numération indo-européenne puis leur utilisation pour interpréter la numération parlée en France. Sa finalité est de fournir des éléments pour mener des études didactiques sur le nombre concernant à la fois l'apprentissage et l'enseignement.

Mots-clés. Numération, signes, interprétation, nombre, modèles, modélisation.

Introduction

Dans cet article, une numération est un système de signes qui permet de désigner les nombres entiers naturels. Nous précisons cette définition au fur et à mesure de

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 17, p. 27 – 58.

l'article. Cependant, nous n'utilisons jamais l'expression « la » numération car une numération est pour nous toujours un système particulier de signes. Il en existe de nombreuses, elles peuvent être orales (auxquelles correspondent des mots d'une langue) ou écrites. Avec l'intention d'étudier celle parlée en France, nous nous centrons sur les numérations orales indo-européennes qui composent une famille ayant des origines communes (Guitel, 1975, Ifrah, 1994). Des apports complémentaires peuvent être consultés dans la thèse « *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes* » (Mounier, 2010), dont nous reformulons ici certains résultats.

Cet article traite des relations entre les mathématiques et des systèmes de numération orale. Certains moyens théoriques nous semblaient manquer pour cette étude. En nous référant à des analyses antérieures et en précisant la notion de modélisation, nous définissons trois modèles théoriques de numération susceptibles de pallier ce manque : le premier ordinal, le deuxième arithmétique additif, le dernier arithmétique multiplicatif. Nous souhaitons montrer qu'il est difficile de trancher *a priori* entre des principes ordinaux et/ou arithmétiques. Ce résultat aide à comprendre comment les numérations peuvent être utilisées par les élèves. Ces liens entre les résultats de notre étude et l'apprentissage ou/et l'enseignement ne sont pas traités dans l'article, ils sont cependant évoqués dans une discussion précédant la conclusion.

Dans un premier paragraphe nous replaçons l'étude parmi les travaux antérieurs et faisons le lien avec l'apprentissage puis nous y exposons la méthodologie générale et les outils théoriques qui ont permis d'étudier les questions. Ce sont des modèles *a priori* de principes mathématiques de numération qui sont présentés dans le deuxième paragraphe. Ils permettent de trouver une logique *a posteriori* à la syntaxe des numérations indo-européennes. Le troisième paragraphe est une analyse de la numération parlée en France à l'aide de ces modèles ainsi que d'une discussion sur les raisons et la nature des différents choix menant aux modélisations exposées. La conclusion et la discussion qui la précède portent principalement sur les intérêts didactiques d'une telle étude et ses prolongements possibles.

Pour étayer notre propos, nous allons nous référer à plusieurs numérations : il s'agit des numérations orales en français (de France, de Belgique et de Suisse), en anglais, en allemand et en thaïlandais. Elles sont décrites en annexe. Dans l'article, les nombres sont parfois indiqués par leur écriture chiffrée. C'est essentiellement pour des raisons de lisibilité.

1. Une étude à usage didactique

Pourquoi et comment étudier les signes d'une numération orale ?

1.1. Le lien avec les élèves

Donnons en exemple la tâche consistant à indiquer le cardinal d'une collection d'objets manipulables par sa désignation orale dans la numération parlée en France. Plusieurs procédures peuvent être utilisées par les élèves. En voici trois qui mènent à une réponse exacte (nous prenons l'exemple de « quarante-deux » objets à dénombrer) :
- un comptage de un en un, « un, deux, trois, …, trente-neuf, quarante, quarante-et-un, quarante-deux »,
- une prise en compte du nombre de dizaines (chacune obtenue à l'aide d'un comptage de un en un, « un, deux, …, dix ») par « dix, vingt, trente, quarante », puis le comptage des unités restantes « quarante-et-un, quarante-deux »,
- une prise en compte du nombre de dizaines (obtenues à l'aide d'un comptage) par « un, deux, trois, quatre » et un comptage d'unités restantes « un, deux ».

En se centrant uniquement sur certains aspects du système de numération, et en particulier au-delà des connaissances liées à l'énumération et à l'emploi de la comptine numérique, Briand (1999), Bideaud, Lehalle et Vilette (2004), la deuxième procédure semble utiliser une double structuration de la comptine numérique, celle des dizaines (les mots, « dix », « vingt », « trente », « quarante ».), celle des unités (les mots, « un », « deux »). La première procédure semble prendre en compte une structuration simple de la comptine, dans le sens où les mots sont énoncés au fur et à mesure des objets considérés (un à un), sans que des relations entre ces mots ne semblent employées. Cette structuration simple est aussi utilisée dans les autres procédures pour obtenir des dizaines. La troisième permet de considérer le nombre de dizaines à l'aide de la comptine numérique déjà utilisée pour les unités. « Quatre (dizaines) » est ensuite à relier au mot « quarante ». Ainsi, des procédures relatives à des tâches (ici de dénombrement) peuvent être analysées au regard des mots (et des actions) qui sont employées simultanément. Le système de numération utilisé favorise l'emploi de certaines d'entre elles. Par exemple, en thaïlandais, la dernière procédure demande moins d'étapes qu'en français, puisqu'à « quarante-deux » correspond « sii sip seeaung », littéralement « quatre dix deux ». Nous faisons en outre l'hypothèse, usuelle en didactique des mathématiques, que l'activité des élèves en résolution de problème sous-tend l'utilisation de propriétés mathématiques. Nous pensons en particulier aux notions de concepts-en-acte et de théorèmes-en-acte développées par Vergnaud (1991). Ainsi, une procédure utilisée couramment par un élève, qu'il sait pouvoir mobiliser dans certaines tâches et dont il va pouvoir appréhender la limite dans d'autres (comme par exemple compter de un en un pour de grandes collections), peut être analysée à l'aune de propriétés mathématiques utilisées en acte. Un système de numération rend plus ou moins accessibles certaines procédures.

Comprendre sa logique de constitution permet ainsi de faire une analyse *a priori* des propriétés en actes envisageables.

C'est la logique de la syntaxe des numérations orales que nous étudions. Nous plaçons notre travail dans la lignée de ce qu'indique Artigue (1991) sur les liens entre épistémologie et didactique. De manière plus précise, nous considérons qu'une numération ne fait pas que désigner un nombre mais la « façon » dont elle le désigne, le système que constitue une numération, met en exergue des propriétés différentes du nombre. Ce point de vue est congruent avec celui de la sémiotique peircéenne que nous développons par la suite. C'est donc à partir d'une étude de la logique des signes de la numération parlée en France que nous voulons faire le lien avec les mathématiques, afin d'aider à comprendre la conceptualisation du nombre.

1.2. La place de l'étude dans les recherches antérieures

Depuis longtemps les recherches s'intéressant à l'enseignement étudient le système de numération oral enseigné aux élèves de tel ou tel pays. Pour la langue française ou anglaise, citons Bednarz et Janvier (1982), De Blois (1996), Fuson et al. (1997), Fischer (1990), Brissiaud (2001), ou encore Chambris (2008). Bideaud, Lehalle et Vilette (2004) font une synthèse plus générale sur l'approche du nombre par les enfants, synthèse qui aborde les liens entre nombre et numération orale. Cette dernière est utilisée en tant que comptine numérique pour les « petits » nombres, ceux fréquentés par des jeunes enfants. Signalons du côté historique Guitel (1975) et Ifrah (1994) qui catégorisent les numérations orales en analysant *a posteriori* leur structure et indiquent leur genèse. Certains de ces auteurs, et en particulier ces derniers, mettent en exergue une structure arithmétique sous-jacente pour rendre compte de la constitution des noms des nombres : « quarante-deux » vu comme « quarante plus deux » ou « quatre fois dix plus deux ». La structure ordinale est essentiellement envisagée pour les premiers nombres, en référence à la comptine numérique, déjà constitutive des premières numérations utilisées par les hommes. Cependant, à notre connaissance, il n'existe pas d'étude permettant de comprendre dans un même cadre ces différents aspects de la numération. Par exemple, la numération parlée en France est le plus souvent catégorisée comme ordinale pour les premiers nombres puis arithmétique ensuite. Pour certains nombres, cette distinction n'est cependant pas évidente. On peut penser aux noms des nombres de 11 à 16 en français onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, ou même plus spécifiquement à ceux de 11 et 12 dans beaucoup de pays, qui se disent successivement en français, anglais, allemand et thaïlandais onze/eleven/elf/sip-et (« sip » pour 10, mais « et » ne signifie pas 1) et douze/twelve/zwölf/sip seeaung (seeaung signifie 2). Y retrouve-t-on « dix plus un », « dix plus deux » ? On peut encore citer d'autres noms de nombres comme « vingt-et-un » en français ou « yii-siip-et » en thaïlandais : en quoi peut-on y reconnaître « vingt plus un » plutôt que « deux fois dix plus un » ou encore « un après vingt »? Répondre à ce type de question est un des objectifs poursuivis. Dans l'étude qui suit, certains aspects ont déjà été abordés dans les recherches antérieures, mais elles le sont ici dans un cadre nouveau. Les notions développées permettent en particulier de considérer d'un œil différent la deuxième procédure indiquée dans le paragraphe précédent : « quarante-deux » pouvant être analysé comme « deux après quarante » et non comme « quarante plus deux ».

Comme nous exposons une étude qui peut être un préalable à des recherches didactiques, son objet n'est pas de répondre directement à la question sur le rapport entre procédures, nombre(s) et numération(s), mais son objectif est d'y contribuer. Ainsi, nous considérons que cette analyse peut aider à la compréhension de l'apprentissage et de l'enseignement, spécifiquement via l'étude du rôle que peuvent jouer les problèmes mettant en jeu les quantités, même si ceux-ci ne sont pas étudiés ici. Le lecteur peut néanmoins avoir à l'esprit des problèmes de dénombrement de collections (manipulables ou figurées) et de comparaison de cardinaux, ils ont effectivement motivé la recherche.

1.3. Problématique, choix théoriques et méthodologie

1.3.1. Des questions posées par la formation du nom des nombres

Le procédé de concaténation consiste à accoler plusieurs noms de nombres pour en former un nouveau. Dans certaines numérations, en particulier les numérations indo-européennes, certains noms de nombres se retrouvent dans d'autres (cf. annexe). Ces différentes formations permettent d'envisager des relations entre certains nombres. En français, « vingt » est concaténé avec « un », « deux », …, « neuf » pour former « vingt-et-un », « vingt-deux », etc., et on retrouve cette suite concaténée aussi à d'autres noms comme « trente », « quarante ». Le cas est similaire en anglais ou en allemand, alors qu'en thaïlandais apparait une autre régularité avec des concaténations manifestes pour 30, 40, ..., 90, « saam sip », « sii sip » …, « gaao sip ». Ainsi, une numération engage à structurer les nombres entiers, à « comprendre » le nombre. La logique mathématique de la syntaxe n'est cependant pas donnée *a priori*. En effet, la numération ne s'est pas constituée à partir de principes mathématiques. Nous reprenons l'assertion de Crump (1990) selon laquelle certains principes mathématiques ont rendu possibles les numérations (c'est-à-dire opérationnelles), mais ils ont été éprouvés et utilisés d'une manière pragmatique, expérimentale et culturelle. Par exemple, la décomposition dite polynomiale du nombre (c'est-à-dire selon les puissances de dix) n'a pas servi de fondement pour constituer une numération indo-européenne, ce qui ne veut pas dire que cette décomposition ne puisse être un candidat pour rendre compte de la logique de la formation des noms des nombres. **Il s'agit donc de rendre compte de la logique de la syntaxe, *a posteriori*** à l'aide de ce que nous nommons les principes mathématiques**.** Quel est le lien entre ces principes et les noms des nombres d'une numération ?

Plusieurs questions se posent. Tout d'abord, la décomposition dite polynomiale n'est pas le seul principe envisageable, d'ailleurs une numération n'est pas nécessairement analysable à l'aune d'un seul principe. En effet, deux grandes catégories se dégagent des recherches antérieures : des principes d'essence arithmétique et des principes d'essence ordinale. Pourquoi choisir les uns, pourquoi les autres ? En outre, comme il est possible d'envisager des principes différents pour un même champ numérique, quelle est la variabilité suivant le champ numérique ? Il s'agit aussi d'aborder la « distance » entre des principes et les signes d'une numération, par exemple celle entre la décomposition $4\times10 + 2$ et l'expression en français « quarante-deux », puisqu'il est possible d'envisager d'autres noms de nombre à partir de $4\times10 + 2$, comme « deux-quarante » ou encore « quatre-dix-deux ». On rencontre d'ailleurs ce type de choix en allemand « zwei und vierzig » et en thaïlandais « sii sip seeaung » (littéralement : quatre dix deux).

1.3.2. Les emprunts sémiotiques

Nous considérons les numérations orales dans leur aspect « système sémiotique » comme un langage qui permet d'apprendre sur le nombre, en apprenant ce langage. C'est pourquoi nous utilisons l'expression « numération parlée ». Ceci nous permet de prendre en compte une logique à travers l'étude des signes qui la composent et de l'envisager sans postuler *a priori* une structure mathématique sous-jacente. Du côté sémiotique, il est nécessaire de définir le signe. Ce terme « signe » a été utilisé jusqu'à présent dans un sens courant, de ce qui est à entendre (une expression orale). Ces « signes » sont reliés aux nombres entiers. Il y a donc à distinguer la matérialité du signe et ce qu'il désigne, ici le nombre. En outre, ces signes ne sont pas indépendants les uns des autres. Les règles qui permettent de rendre compte de l'organisation de ces signes constituent la syntaxe, mais pour que l'ensemble des signes fasse une numération, ces règles ne sont pas indépendantes de la nature des « objets » qu'ils désignent, les nombres. Ainsi trois aspects du signe se dégagent : la matérialité du signe, le nombre qu'il désigne, les règles syntaxiques qui permettent à un ensemble de signes d'être une numération. Cependant, la définition mathématique du nombre est plurielle (l'axiomatique de Peano, la théorie des ensembles) et « large » (y entend-on aussi une structure arithmétique et un ordre ?). Qui plus est, la distinction entre nombre et numération (orale ou écrite) n'est pas une évidence, même au niveau des mathématiciens, l'avènement tardif de ces définitions l'atteste. Ces arguments, ajoutés à l'hypothèse que la connaissance du nombre se développe (entre autre) via la manipulation des « signes », expliquent en quoi la sémiotique de Peirce est un cadre adapté pour mener l'analyse.

Peirce (1906) envisage en effet un signe comme une triade : un representamen (écrit ou oral) qui dénote un objet grâce à un interprétant. Dans l'étude menée, nous considérons que l'objet dénoté est le nombre, les representamens étant l'aspect matériel du signe, les sons désignant les nombres en français (qui sont transcrits en mots), et l'interprétant étant à chercher du côté de la logique de la syntaxe du système de numération. Ici nous entendons la syntaxe comme des règles linguistiques qui rendent comptent de certaines régularités (ou non) dans la formation des representamens et qui permettent de relier les representamens aux nombres qu'ils dénotent. Le jeu de relations dans la triade est un moyen d'accéder à des informations sur l'objet « nombre », tel qu'il est donné à voir par les signes. La définition mathématique du nombre n'est donc pas ici un *a priori*, mais elle permet de comprendre ce qui est éclairé ou non par les signes. Nous n'avons pas fait appel à la complexité de la sémiotique de Peirce, mais reste sous-jacent le fait que l'objet est déterminé par les sémioses qui se développent à son propos (Conne 2008), c'est-à-dire, pour nous, le flux des relations entre les interprétants et les representamens et celui des relations avec les autres signes.

1.3.3. Plan d'étude

Nous nommons <u>modèle de principes mathématiques (d'une numération)</u>, une structure d'essence mathématique qui peut rendre compte de la logique de la syntaxe d'une numération. Par exemple, en français, la logique de composition des noms des nombres « vingt » à « vingt-neuf », par concaténation des mots « un », …, « neuf », avec le « vingt » peut être trouvée dans la décomposition additive mettant en exergue le nombre désigné par « vingt ». On retrouve cette possibilité en anglais, allemand et thaïlandais. Comme nous l'avons déjà signalé, cette logique n'est pas la seule envisageable (on peut penser à des principes arithmétiques multiplicatifs comme la décomposition dite polynomiale en base dix, ou encore à des principes ordinaux), un de nos objectifs est d'en considérer un large éventail.

Nous élaborons tout d'abord des modèles de principes mathématiques en reconsidérant les travaux antérieurs. Puis nous utilisons ces derniers pour proposer des modélisations de la numération parlée en France. Il s'agit non seulement d'adopter des modèles mais aussi de discuter de leur pertinence pour rendre compte de la logique de la syntaxe. Les résultats de ce travail sont qualifiés d'interprétation pour signaler les emprunts à la sémiotique de Peirce, mais aussi pour montrer qu'ils ont été obtenus par une méthode spécifique à notre recherche.

2. Des modèles de principes mathématiques pour les numérations orales indo-européennes

2.1. Quels modèles ?

2.1.1. Les critères retenus

Nous avons indiqué que ces modèles de principes mathématiques (pour les numérations orales) servent à rendre compte *a posteriori* de la logique de leur syntaxe. Nous les définissons dans le cadre de ce travail, mais, par ailleurs, de nombreuses études ont déjà été menées. Deux questions méthodologiques se posent. Où chercher (l'idée de) ces modèles ? Quels critères retenir pour leur définition ? Un de nos premiers critères porte sur la potentialité des modèles à analyser les numérations indo-européennes. En outre, nous avons déjà mis en évidence que plusieurs principes mathématiques candidats (arithmétiques, ordinaux) semblent plus ou moins adaptés (en première analyse) selon le champ numérique. Les modèles retenus doivent rendre compte de la complexité interne via la possibilité de tester la pertinence de plusieurs modèles différents pour une même numération (indo-européenne) selon les nombres en jeu. Le dernier critère concerne la potentialité des principes à être des principes d'une numération. Tout d'abord, du fait qu'elle est attestée pour les numérations indo-européennes, nous incluons dans le modèle la règle linguistique de concaténation. Par exemple, à partir d'une décomposition additive du nombre x en a+b, le nom du nombre peut être obtenu par concaténation (des representamens), l'un pour désigner le nombre a, l'autre b. En adoptant la convention qu'un representamen d'un nombre n est signalé par l'italique *n,* on obtient donc « *a b* » ou « *b a* » comme representamen de x. Par ailleurs, il ne suffit pas de postuler des principes généraux pour obtenir des principes candidats à un modèle de numération. Par exemple, tout nombre peut se décomposer de manière additive, mais quelle décomposition retenir ? Par exemple, a+b=c+d mène à quatre representamens différents de cette somme, « *ab* » ou « *ba* », mais aussi « *cd* » ou « *dc* », la numération serait alors redondante. Nous retenons pour nos modèles de principes mathématiques le fait qu'une numération établit une bijection entre un ensemble de representamens et celui des entiers naturels non nuls. Elle doit donc être <u>non-redondante</u> (deux representamens différents ne peuvent désigner un même nombre), mais aussi <u>non ambiguë</u> (un même representamen ne peut désigner deux nombres différents) et <u>exhaustive</u> (tous les nombres entiers peuvent y être désignés, *a minima* tous les nombres entiers inférieurs à une certaine borne). Le travail présenté considère l'ensemble de ces contraintes afin de délimiter des modèles théoriques de principes pouvant rendre compte de la logique de la syntaxe des numérations orales indo-européennes.

2.1.2. Des modèles à la modélisation

Les modèles peuvent servir à modéliser différentes numérations orales qui sont constituées de différents representamens. La <u>mise en signes</u> désigne le passage des principes mathématiques aux representamens. Pour qu'il soit un outil d'analyse pertinent pour une numération orale indo-européenne, nous incluons une partie de la mise en signes dans le modèle, la concaténation. Pour modéliser une numération existante, un premier type de choix concerne les paramètres à fixer dans les modèles. Ils constituent la <u>première partie de l'interprétant</u>, comme par exemple, dans un modèle arithmétique additif, considérer que dix est un appui additif ou non. Un deuxième type de choix pour la mise en signes concerne les representamens : les mots propres à une langue (les mots « quarante » ou « deux » en français ; les mots « vierzig » ou « zwei » en allemand) et l'ordre des mots dans les différentes formations des noms (« quarante-deux » en français ; « zwei und vierzig » en allemand). Ces choix constituent ce que nous avons nommé la deuxième partie de l'interprétant.

2.1.3. Les modèles de numération issus des travaux de Cauty

Nous avons choisi d'élaborer des modèles à partir des travaux de Cauty (1984, 1986, 1988) concernant les numérations orales. A partir de considérations linguistiques, il y distingue en effet, avec un certain niveau de généralité, les deux grands types de numérations orales que l'on rencontre dans la littérature, les numérations « ordinales » et les numérations « arithmétiques ». Nous les reprenons avec la terminologie qui nous est propre. Le premier permet de saisir les nombres grâce à des propriétés de la structure d'ordre des entiers naturels et ne fait pas appel aux opérations arithmétiques. Le principe de construction de ces numérations consiste à établir une suite ordonnée de representamens qui vont servir comme representamens de la suite des nombres entiers. Le second, le type arithmétique, permet de rendre compte de l'existence des composés arithmétiques par addition, multiplication ou élévation à une puissance. Cauty a constitué ses modèles généraux à partir de l'analyse de numérations existantes et de travaux antérieurs. Pour autant, une numération est qualifiée d'ordinale ou d'arithmétique lorsqu'on la modélise ainsi, et ce travail se fait *a posteriori* : aucune numération n'a été construite à partir de principes mathématiques tels qu'ils sont exposés dans les modèles. Ainsi, les expressions « numération ordinale » et « numération arithmétique » désignent des types de modèle obtenus à l'aide d'une méthodologie propre à Cauty.

Dans ce qui suit, nous présentons les trois modèles de principes mathématiques élaborés : un ordinal dans le sous-paragraphe 2.2, deux arithmétiques dans les deux sous-paragraphes 2.3.1 et 2.3.2. Ces modèles sont utilisés dans le paragraphe 3 pour analyser la numération parlée en France. . Rappelons que dans ces définitions l'italique *n* indique le representamen d'un nombre n.

2.2. Le modèle de numération ordinale

Pour définir une numération ordinale, Cauty introduit la notion de repérant et de comptine. Cette dernière est : « *une liste (conventionnelle ou idiosyncrasique, parlée, écrite ou mimée) ayant la propriété que tous les items de la liste apparaissent dans un ordre strict et immuable* ». En le traduisant dans notre cadre théorique, un repérant est alors un type de representamen qui sert à interpréter une numération dans une vision ordinale. Il ne peut être défini indépendamment d'un autre type de representamen, les comptants. Une suite de comptants est une suite de representamens qui sert comme comptine pour désigner les nombres entre deux repérants. En français, cela pourrait être les representamens des 9 premiers nombres, « un », « deux », …, « huit », « neuf ». Cela pourrait être leurs homologues en anglais, allemand ou thaïlandais. Le principe général d'une numération ordinale avec repérants est de permettre à la numération de rendre compte de la succession des nombres entre deux repérants, ceci grâce aux comptants. Ainsi, deux repérants ne désignent pas deux nombres successifs, ils sont des éléments d'une graduation non unitaire. Par exemple les français « vingt » et « trente », les anglais « twenty » et « thirty », les allemands « zwanzig » et « dreizig », les thaïlandais « yii-sip » et « saam sip » pourraient être considérés comme repérants. En effet, le premier peut indiquer un nombre atteint après les comptants en français « un » à « dix-neuf », ou deux fois « un » à « neuf » si on considère « dix » comme un repérant. Ils n'ont pas de lien explicite avec leur prédécesseur et par exemple « vingt-quatre » (« twenty four »/ « vier und zwanzig », « yii-sip sii ») peut être compris comme le quatrième après vingt. Le cas des representamens des nombres de 11 à 16 en français met en évidence le type d'analyse et les choix à faire pour qualifier une numération d'ordinale. En outre Cauty indique que deux principes peuvent être convoqués pour désigner un nombre à partir d'un repérant : un principe de postériorité, « neuf après le repérant vingt », ou un principe d'antériorité, « un avant le repérant trente ». Ce dernier ne semble pas adapté à la syntaxe des quatre numérations que nous avons prises en exemple, cependant notons que le latin « undetriginta » qui désigne 29, pourrait se comprendre comme « un » avant « triginta », en français « un » avant « trente ».

Nous présentons maintenant le modèle sous sa forme épurée. Nous avons décidé de présenter un seul modèle ordinal, celui avec repérants car il semble un candidat pertinent pour modéliser les numérations indo-européennes. Le modèle sans repérant peut y être inclus, en considérant que la suite des representamens est composée uniquement de comptants. Par ailleurs nous présentons un modèle incluant un principe de postériorité, « neuf après vingt » plutôt que « un avant trente ». Le modèle avec principe d'antériorité peut se concevoir sans difficulté. Il reste toujours possible d'envisager un modèle mixte, qui serait par exemple plus pertinent pour modéliser la numération parlée en latin.

Modèle de principes d'une numération ordinale (avec repérants)

Considérons la numération parlée en France. Parmi d'autres possibles, on pourrait envisager le choix de la suite de repérants, « vingt », « trente », « quarante » et « cinquante », avec pour première suite de comptants, les representamens « un », « deux », … « dix-huit », « dix-neuf », puis, entre chaque couple de repérants, les comptants « un », « deux », …, « neuf ». Cette suite pourrait être celle des A_n dans la définition qui suit.

Soit la suite (A_n), <u>n entier strictement positif</u>, de representamens nommés repérants qui désignent une suite strictement croissante de nombres entiers naturels A_n, telle que $A_1>1$ et $A_{n+1} - A_n>1$.
A chaque A_n on associe une suite finie de representamens $s_j(n)$, j>0, nommés comptants. Pour tout n strictement positif, la concaténation $A_n s_j(n)$ (ou bien la concaténation $s_j(n)A_n$) peut désigner le $j^{\text{ième}}$ successeur de A_n.

En outre, on définit une suite de representamens $s_j(0)$, $0<j<A_1$ dont les termes désignent les entiers naturels de 1 à $A_1 - 1$.

En reprenant l'exemple précédent, on aurait « vingt » pour A_1 le premier repérant, « trente » pour A_2, « quarante » pour A_3, « cinquante » pour A_4. Et $s_j(0)$ serait la suite des representamens « un », « deux », … « dix-huit », « dix-neuf », puis, de manière spécifique à cet exemple, pour 0<n<5, $s_j(n)$ serait la même suite de comptants « un », « deux », … « neuf ».

Ces règles permettent de définir un système non redondant, deux representamens différents ne pouvant désigner le même nombre. Cependant, pour une numération exhaustive et non ambiguë, on impose deux autres règles.
Pour que la numération soit exhaustive, il ne faut pas de « trous » entre deux repérants, d'où :
(a) Pour tout n> 0, la suite de comptants $s_j(n)$ permet de désigner tous les entiers de l'intervalle $[[1 ;\ A_{n+1} - A_n - 1]]$.

Pour une numération non ambiguë, un representamen ne doit désigner qu'un seul nombre, d'où :

(b) Les representamens A_n des nombres A_n ainsi que les representamens $s_j(0)$ sont distincts deux à deux (et définis de manière conventionnelle), c'est aussi le cas, pour tout n positif, des representamens $s_j(n)$.

Nous ajoutons une troisième règle dans le choix des comptants.
(c) Les comptants relatifs à un repérant sont des representamens introduits avant celui-ci, c'est-à-dire que, pour tout n > 0, $s_j(n)<A_n$. En outre ces comptants sont constitués d'une suite finie de representamens qui désignent des nombres qui se succèdent (immédiatement) dans l'ensemble des entiers naturels. Par exemple, cela ne peut être une suite aléatoire comme « trois », « douze », …

Cette dernière règle n'est pas nécessaire *a priori*. Cependant, les numérations que nous avons rencontrées, semblent la suivre : les concaténations avec un repérant mettent toujours en jeu un representamen déjà rencontré avant ce repérant, et leur ordre reprend celui des nombres qu'ils désignent. Par exemple, lorsque « quarante » est introduit, la concaténation « quarante (et) un » reprend « un » déjà rencontré (on n'introduit pas un autre representamen), puis les comptants suivants sont dans l'ordre « deux », « trois », etc., jusqu'au prochain repérant. Il existe des exceptions, comme le « et » thaïlandais (et non « neung ») qui est présent après chaque dizaine, à l'inverse de la règle constatée pour les noms suivants.

Cet ensemble, l'encadré et les trois règles, constitue les principes qui définissent notre modèle de numération ordinale avec repérants (et principe de postériorité).

La remarque suivante permet de mieux se rendre compte de la variété des numérations que le modèle peut engendrer (et donc son potentiel modélisant).

(α) Pour tout n> 0, $A_{n+1} - A_n \leq A_n$, c'est-à-dire que $A_{n+1} \leq 2A_n$

Cette inégalité est une conséquence des principes d'une numération ordinale avec repérants telle que nous les avons envisagés, en particulier avec la règle (c). Il s'agit en effet d'introduire au fur et à mesure de nouveaux representamens, les repérants, alors que les comptants sont à chercher dans les representamens qui ont déjà été introduits. La suite de comptants entre deux repérants a donc été rencontrée avant l'introduction du premier de ces deux repérants. Par exemple, après « cinquante », on peut utiliser *a maxima* la suite de tous les representamens définis avant l'introduction de « cinquante ». Le prochain repérant désigne donc un nombre inférieur ou égal au double du nombre désigné par « cinquante ». Ce choix maximal n'est cependant pas une obligation. L'inégalité (α) indique qu'il n'est pas possible de choisir n'importe quelle suite de nombre pour définir les repérants. Cependant cette contrainte, associée au fait que A_1>1 et que $A_{n+1} - A_n$ >1 (par définition deux repérants ne peuvent désigner des nombres successifs), est la seule à fixer quant aux nombres désignés par des repérants.

2.3. Les deux modèles de numérations arithmétiques

Le principe ordinal est lié intrinsèquement à l'élaboration d'une liste d'items qui peut constituer un instrument de comptage. *A contrario*, le principe cardinal est lié à la construction de la numération selon un développement arithmétique du nombre. Nous reprenons les concepts de Cauty en les formulant dans le cadre théorique adopté. Un nombrant est un representamen désignant un nombre qui n'est pas un composé arithmétique manifeste (concaténation) et qui sert à interpréter une numération dans une vision arithmétique. Il existe deux sortes de nombrants : les appuis additifs et les appuis multiplicatifs, c'est ce qui va donner deux modèles différents.

2.3.1. Modèle de principes d'une numération arithmétique additive

Un nombre d'appui additif est un nombre n dont le representamen est un nombrant qui est concaténable à d'autres representamens (que nous nommons ses appuyants additifs). Les résultats de ces concaténations « additives » sont des representamens désignant un ou tous les nombres de la suite des successeurs de n. Par exemple en français, le nombre désigné par « dix » peut être interprété comme un nombre d'appui additif avec trois appuyants additifs « sept », « huit », neuf » car « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf » peuvent être compris comme désignant des sommes dont le premier terme est dix et le second un nombre inférieur à dix. En anglais et en allemand les representamens des 9 premiers nombres peuvent être considérés comme des appuyants additifs du nombre d'appui 20, les representamens des nombres de 21 à 29 étant facilement analysables comme des concaténations du representamen de 20 et de ces 9 representamens. Le cas de « yii-sip-et», le « 21 » thaïlandais, dans lequel on ne retrouve pas la concaténation « yii-sip(20)/neung(1) » met en évidence le degré d'analyse et les choix à faire pour modéliser une numération.

Les principes d'une numération arithmétique avec appuis additifs sont formellement identiques aux précédents, nous les commentons par la suite :

Soit la suite (A_n), n entier strictement positif, une suite croissante d'entiers naturels désignés par des representamens nommés appuis additifs A_n, telle que

$\mathbf{A_1}$>1 et $\mathrm{A}_{n+1} - \mathrm{A}_n > 1$.

A chaque A_n on associe une suite d'entiers non nuls $(\mathrm{s}_j(\mathrm{n}))$ j>0, croissante et finie désignés par des representamens nommés appuyants additifs $s_j(n)$.

Pour n>0, la concaténation $A_n\ s_j(n)$ (ou $s_j(n)\ A_n$) peut désigner le nombre $\mathrm{A}_n + \mathrm{s}_j(\mathrm{n})$.

En outre, on définit une suite de representamens $s_j(0)$, 0<j<$\mathbf{A_1}$ dont les termes désignent les entiers naturels de 1 à $\mathbf{A_1}$ -1.

Ces règles permettent de définir un système non redondant. Pour une numération exhaustive et non ambiguë, on impose deux autres règles :

(a) Pour tout n> 0, la suite $\mathrm{s}_j(\mathrm{n})$ décrit tous les entiers de l'intervalle [1 ; $\mathrm{A}_{n+1} - \mathrm{A}_n$ -1].

(b) Les representamens A_n des nombres A_n sont distincts deux à deux (et définis de manière conventionnelle), c'est aussi le cas, pour tout n positif, des representamens $s_j(n)$.

La concaténation indique une addition. Ainsi, « quarante (et) un » désigne la somme entre le nombre désigné par « quarante » et celui par « un ». Pour ne pas omettre le nombre « 41 » (exhaustivité), l'appui additif utilisé après « quarante » ne peut que désigner le nombre 1. Nous avons donc la règle suivante :
(c) Les appuyants relatifs à un nombre d'appui additif sont des representamens introduits avant le representamen de celui-ci, c'est-à-dire que pour tout n > 0, $s_j(n) < A_n$. En outre ces appuyants sont constitués d'une suite finie de representamens qui désignent les premiers entiers naturels de manière exhaustive jusqu'à une certaine borne, arbitraire et spécifique à un appui additif.

Cet ensemble, l'encadré et les trois règles, constitue les principes qui définissent notre modèle de numération arithmétique additif. Une remarque permet ici aussi de rendre compte du nombre important de possibilités :

(α) Pour tout n> 0, $A_{n+1} - A_n \leq A_n$, c'est-à-dire que $A_{n+1} \leq 2\,A_n$

Ce modèle est différent du premier dans la façon dont sont engendrés les appuis par rapport aux repérants. Dans le modèle ordinal, un repérant étant fixé, le suivant est introduit après l'énumération de comptants. Dans le modèle arithmétique additif, un nombre d'appui additif étant fixé, en lui ajoutant un certain nombre on peut directement obtenir celui qui lui est immédiatement supérieur. Par exemple, le nombre désigné par « cinquante » est conçu comme le nombré désigné par « quarante » plus 10. L'ajout d'un même nombre pour passer d'un nombre d'appui additif au suivant est un processus que l'on peut envisager pour toutes des numérations indo-européennes, par exemple, en français ajouter 10 pour obtenir (certains) des nombres d'appuis jusqu'à 100, puis ajouter 100 pour ceux entre 100 et 1000. Cette façon de générer les nombres d'appuis additifs par ajout réitéré d'un même nombre est mise en relief par Mounier (2010) à l'aide d'une présentation différente du modèle arithmétique additif. La présentation du modèle additif donnée dans le présent article fait apparaître ses similitudes avec le modèle ordinal, alors que celle de la thèse met en exergue celles avec le modèle multiplicatif qui suit, puisqu'un ajout réitéré d'un même nombre renvoie à une multiplication.

2.3.2. Modèle de principes d'une numération arithmétique multiplicative

Un nombre d'appui multiplicatif m est un nombre d'appui additif dont le representamen est de plus concaténable à des éléments des representamens des premiers entiers. Le résultat de la concaténation doit être un representamen désignant un des multiples de m. Par exemple, en français, le nombre désigné par

« cent » est interprétable en tant que nombre d'appui multiplicatif, puisque « deux cents » désigne un multiple du nombre désigné par « cent » ; il est aussi nombre d'appui additif (par exemple dans « cent quarante »). En anglais et en allemand, on pourrait avoir « one hundred » et « hundert » ; « one thousend » et « tausend » ; « one million » et « million »; en français « cent », « mille », « million » ou même « vingt »; enfin en thaïlandais « sip » (10), « reeauy » » (100), « pan » (1000), « meeun » (10000). La possibilité de prendre « dix » comme appui multiplicatif en français est discutée dans le chapitre consacré à l'étude de la numération parlée dans cette langue (un parallèle peut se faire avec le « ten » anglais et le « zehn » allemand).

Soit (M_n), n >0, une suite strictement croissante de nombres entiers naturels désignés par des representamens nommés appuis multiplicatifs et telle que $M_1 > 1$. A chacun, on associe la suite croissante finie des nombres entiers naturels non nuls $(p_i(n))$, i>0, désignés par des representamens que l'on nomme appuyants multiplicatifs ainsi que la suite croissante finie $(s_j(n))$, j>0, des entiers non nuls désignés par des representamens que l'on nomme appuyants additifs $(s_j(n))$, de sorte que pour tout n>0 la concaténation $p_i(n)\ M_n\ s_j(n)$ (ou bien la concaténation $s_j(n)\ M_n\ p_i(n)$) puisse désigner le nombre $p_i(n) \times M_n + s_j(n)$.

En outre, on définit une suite de representamens $s_j(0)$, 0<j< M_1 dont les termes désignent les entiers naturels de 1 à M_1-1.

Ainsi en prenant l'exemple thaïlandais ci-dessus on aurait M_1 désigné par « sip » (10), M_2 par « reeauy » (100), M_3 par « pan » (1000), M_4 par « meeun » (10000), alors qu'en français, on pourrait avoir M_1 désigné par « cent », M_2 par « mille », M_3 par « million », M_4 par « milliard ». Dans ce dernier cas, les appuyants multiplicatifs de « mille », « million » et « milliard » sont les 999 representamens « un » à « neuf cent quatre-vingt-dix-neuf », leurs appuyants additifs aussi, tandis que dans l'exemple de la numération thaïlandaise les appuyants multiplicatifs de « pan » (1000) et « meeun » (10000) sont les 9 representamens « neung » à « gaao », tandis que leurs appuyants additifs sont respectivement les 999 representamens « neung » à « gaao reeauy gaao sip gaao » et les 9999 representamens « neung » à « gaao pan gaao reeauy gaao sip gaao ». Ce principe seul n'assure pas une non ambiguïté et une exhaustivité au système. Dans la définition que nous adoptons, les appuis et appuyants doivent vérifier deux règles supplémentaires.

En reprenant les deux exemples précédents, les nombres qui suivent 1000 vont être mis en signes via une somme. Le premier terme est un nombre parmi 1000, 2x1000, etc. Le deuxième terme (désigné par un appuyant additif de 1000) doit prendre nécessairement toutes les valeurs entre 1 et 999, sinon la numération ne serait pas exhaustive. D'où :

(a) Pour tout n, les nombres $p_i(n)$ sont en nombre fini et sont rangés selon une progression arithmétique de raison 1 à partir de 1. De plus, la suite $s_j(n)$ des appuyants aditifs désigne tous les nombres strictement inférieurs à M_n.

Par ailleurs, afin d'éviter les ambiguïtés (un representamen ne doit désigner qu'un seul nombre), on impose la règle suivante :

(b) Les representamens M_n des nombres M_n sont distincts deux à deux (et définis de manière conventionnelle), c'est aussi le cas, pour tout n positif, des representamens $s_j(n)$.

Toujours en se référant aux exemples thaïlandais et français, les nombres d'appuis additifs qui vont servir après le nombre d'appui multiplicatif 1000 sont obtenus par produit de chacun des nombres d'appui multiplicatif $p_i(n)$ avec 1000 : en thaïlandais 2×1000, 3×1000, etc. jusqu'à 9×1000 ; en français 2×1000, 3×1000, etc. jusqu'à 999×1000. Nous considérons ce dernier choix des $p_i(n)$ comme maximal, sinon cela obligerait à prendre pour désigner les appuyants multiplicatifs des representamens non introduits avant le nombre d'appui multiplicatif (ici 1000) auquel ils se réfèrent. On a donc une troisième règle :

(c) p(n), le maximum de la suite ($p_i(n)$), est tel que $p(n) < M_n$.

Cet ensemble, l'encadré et les trois règles, constitue les principes qui définissent notre modèle de numération arithmétique avec appuis multiplicatifs.

D'après ce qui précède, p(n) est tel que $M_{n+1} = (p(n)+1) \times M_n$. Dans l'exemple, le prochain nombre d'appui multiplicatif thaïlandais après 1000 est 10000, en français, c'est 1 000 000. Ce dernier est le choix maximal. On obtient alors la propriété suivante.

(α) Le choix maximal des M_n correspond à $M_{n+1} = M_n \times M_n$. On a donc la suite

$M_n = M_1^{2^{n-1}}$

Ceci permet ici aussi de rendre compte du nombre important de possibilités, mais aussi de la différence avec la décomposition dite polynomiale. En effet, cette dernière correspond à un choix de M_n vérifiant l'égalité $M_n = M_1^n$ (si $M_1 = 10$, on obtient la décomposition suivant les puissances de 10 relative à la base 10).

3. Des modélisations de la numération parlée en France : vers différentes interprétations

Ce paragraphe expose des choix dans l'analyse syntaxique qui permettent d'analyser la numération parlée en France à partir de chacun de ces modèles. On y discute de la pertinence de prendre tel ou tel modèle pour éclairer *a posteriori* sa syntaxe. C'est pourquoi nous parlons à chaque fois d'une interprétation de cette dernière, et non de modélisation, ce qui permet en outre de rappeler les emprunts peircéens. Tout d'abord nous décrivons la numération parlée en France.

3.1. Les nombres dont les mots français sont les representamens

3.1.1. Précisions méthodologiques

Nous considérons les mots de la numération parlée en France qui servent à désigner les nombres entiers. Pour les noms des grands nombres, deux échelles sont en vigueur, l'échelle courte et l'échelle longue (Guitel, 1975). En français, avec les mots mille, million, milliard, billion c'est l'échelle longue qui est adoptée. Dans les pays anglo-saxons qui utilisent l'échelle courte, le mot billion remplace milliard, et c'est le mot trillion qui est utilisé pour billion (mille milliards).

L'objet de ce paragraphe est de décrire la numération parlée en France, c'est-à-dire de relier chaque representamen au nombre qu'il désigne. Elle est décrite sans l'aide de la numération écrite chiffrée, à l'inverse par exemple de la méthode de Numa Bocage (1997) et dans une moindre mesure de celles de Cauty (1986), Guitel (1975) et Ifrah (1994). En effet, les descriptions de ces auteurs engagent une réorganisation de la numération qui peut induire d'emblée des principes arithmétiques pour éclairer la logique de la syntaxe, ceux liés à la numération écrite chiffrée de position en base 10. La description que nous donnons prend en compte certaines régularités à travers trois règles linguistiques : la concaténation, l'introduction de mots nouveaux et l'ordre dans les mots composants les concaténations. Ce dernier est notifié par le tactème d'ordre qui permet par exemple de choisir entre « quarante/deux » ou « deux/quarante », les deux choix étant *a priori* possibles. Les concaténations prises en compte sont les concaténations manifestes, comme celle de « quarante » et « deux » dans « quarante-deux ». Sachant que la morphologie est l'étude de la composition d'un representamen qui n'est manifestement pas un composé de plusieurs representamens, il est par exemple nécessaire de faire une analyse morphologique de « seize » pour y voir « six » et « dix ». Une telle analyse permettrait aussi de considérer « quatre » dans « quarante », mais rien ne prouve que ce dernier est nécessairement la concaténation de « quatre » et « dix ». Ainsi nous ne faisons pas une analyse morphologique des representamens. Par ailleurs, la question se pose de l'ordre des representamens à considérer dans le processus de description. Dans la numération écrite chiffrée de position, une fois définis les dix chiffres (c'est-à-dire chacun étant relié au nombre qu'il dénote) et établis des principes de base dix, il est possible de donner du sens à toute suite de chiffres. Ce n'est pas le cas ici. En effet, pour définir les representamens des nombres de plus en plus grands, il est nécessaire d'introduire des representamens nouveaux qui doivent être devenus le nom de nombre (il s'agit par exemple des representamens « cent », « vingt » et « huit » dans le representamen « cent vingt-huit »). Par ailleurs, toute concaténation n'est pas signifiante (à la différence des suites de chiffres). Le processus de description que nous avons adopté prend en compte ces spécificités, c'est pourquoi il suit l'ordre des nombres entiers naturels eux-mêmes. Ce choix est cohérent avec le fait d'introduire des mots nouveaux au fur et à mesure de l'accroissement du champ numérique. En outre, il s'impose au moins pour les dix premiers representamens. Finalement il permet une description en convoquant uniquement les trois règles linguistiques évoquées, sans faire référence à une autre numération (écrite par exemple). Cette méthodologie ouvre les possibles pour chercher *a posteriori* des modèles mathématiques rendant compte d'une logique syntaxique.

3.1.2. Description

Nous parlons du <u>nom d'un nombre</u> lorsque dans le processus de description le representamen a été associé au nombre qu'il dénote. Dans ce processus nous donnons tout d'abord les éléments lexicaux qui vont devenir des noms de nombre, mais qui interviennent en outre par concaténation dans les noms des autres nombres : c'est <u>le vocabulaire terminal de la numération</u>. Pour les nombres inférieurs à une certaine borne, il s'agit de : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », ainsi que « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », « cent », « mille », « million », « milliard ». Le mot « zéro » n'y figure pas car il n'est pas utilisé ensuite dans les concaténations. Les nombres de base sont les nombres que ces mots/representamens désignent. Les autres nombres sont désignés soit par un de ces mots, soit une concaténation utilisant ces mots : c'est ainsi que s'effectue le passage des representamens aux noms. Le mot de liaison « et » est parfois aussi utilisé dans une concaténation. Voici le processus pour les nombres de un à cent, la description pour les nombres jusqu'à mille milliards est indiquée dans la thèse (Mounier, 2010) :

- Pour les premiers nombres : un mot est associé à chaque nombre donnant ainsi le nom du nombre, les mots sont différents deux à deux, ce sont dans l'ordre : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize ».
- Pour les trois nombres qui suivent, le nom du nombre est obtenu par concaténation. Il est composé du mot « dix » suivi respectivement des mots « sept », « huit », « neuf », ce qui donne « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf ».

- Pour le suivant, un mot nouveau est employé, « vingt ». Puis pour les neuf nombres qui suivent, un processus identique à celui de la dénomination des nombres dix-sept, dix-huit, dix-neuf est utilisé. Deux mots sont juxtaposés. Le premier est toujours le mot « vingt », ensuite sont accolés successivement pour désigner chacun des neuf nombres suivant vingt, les mots désignant les neuf premiers nombres : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf ». Le premier nombre après vingt est particulier : on intercale le mot « et » entre « vingt » et « un ». Ce qui donne finalement « vingt-et-un », « vingt-deux », « vingt-trois », « vingt-quatre », « vingt-cinq », « vingt-six », « vingt-sept », « vingt-huit », « vingt-neuf ».
- Ensuite, le principe est identique au précédent, en introduisant successivement les mots nouveaux « trente », « quarante », « cinquante », jusqu'à obtenir « cinquante-neuf ».
- Pour le nombre suivant un mot nouveau est employé, « soixante ». Pour les dix-neuf nombres suivant le processus est identique à celui de la dénomination des nombres vingt-et-un, vingt-deux, …, vingt-neuf. Le premier mot est toujours le mot « soixante », ensuite sont accolés successivement pour désigner des nombres suivants, les mots désignant les dix-neuf premiers nombres : « un », « deux », …, « dix-huit », « dix-neuf ». Pour le premier nombre après « soixante », on intercale le mot « et » entre « soixante » et « un ».
- Pour le nombre suivant le representamen « quatre-vingts » est employé, concaténation de deux representamens déjà introduits. Pour les dix-neuf nombres suivants le processus est identique à celui de la dénomination des nombres précédents. Le premier mot est toujours le mot « quatre-vingts » mais pour le premier nombre après « quatre-vingts », on n'intercale pas le mot « et » entre « quatre-vingts » et « un ».

D'autres numérations francophones sont différentes à partir de « soixante ». Elles utilisent un mot particulier pour désigner « soixante-dix », le mot « septante » et reprennent un processus identique à celui décrit au moment de l'introduction de « vingt ». La même remarque est à faire pour « quatre-vingts » « octante » « huitante » et « quatre-vingt-dix » « nonante ».

Le processus continue avec l'introduction successive des mots, « cent », « mille », « million », « milliard », etc.

3.2. Des interprétations de la numération parlée en France

Précisions méthodologiques

Deux types de choix sont à faire : fixer les paramètres en jeu dans les modèles (c'est la première partie de l'interprétant) et compléter la mise en signes ébauchée par le modèle (c'est la deuxième partie de l'interprétant). Pour fixer les paramètres qui sont en jeu dans la définition de chacun des modèles nous allons devoir considérer certains representamens comme repérant ou nombrant, ce qui détermine précisément une modélisation ordinale ou arithmétique de la numération. Elle se fait grâce à une étude syntaxique et morphologique. L'étude syntaxique de la numération parlée en France entreprise ici est « *une étude de la formation des expressions numériques composées dans une rationalité arithmétique ou ordinale par concaténation de nombrants ou de repérants* », Cauty (1986). La morphologie permet d'analyser les nombrants et les repérants à un niveau inférieur. Elle sert par exemple quand il s'agit de considérer si le representamen « onze » est un nombrant/repérant ou s'il a un lien ou non avec « dix ». Pour fixer les paramètres en jeu dans les modèles, l'analyse peut prendre en compte :

- les concaténations manifestes :
  - Pour les nombres inférieurs à cent, il s'agit par exemple de quarante/deux dans « quarante-deux »
  - Pour les nombres supérieurs à cent, il s'agit par exemple de dix/mille/quarante/trois dans « dix mille quarante-trois »,
- les formations qui ne sont pas des concaténations manifestes, rencontrées pour les noms des nombres inférieurs à cent et reprises ensuite, par exemple :
  - « deux » dans « vingt »,
  - « trois » dans « trente », « quatre » dans « quarante », etc.
  - « dix » dans « onze », « douze », « treize », quatorze », « quinze », « seize »,
- des cas « isolés » dont on considère la concaténation ou non, spécifiques à la numération parlée en France au regard d'autres numérations francophones (Belgique, Suisse) :
  - « soixante-dix », « quatre-vingts », « quatre-vingt-dix », respectivement en belge ou suisse « septante », « huitante » ou « octante », « nonante ».

Ceci permet une multitude de choix. Nous n'en présentons que deux pour chaque type de modèle. Le premier est essentiellement basé sur une prise en compte des concaténations manifestes. Le deuxième permet d'éclairer certaines questions soulevées par ce premier, il engage alors le plus souvent une analyse syntaxique et morphologique plus poussée. La présentation a pour but de permettre au lecteur de voir l'intérêt de tel ou tel modèle. Tout n'y est pas dit, car toutes les interprétations envisageables (selon le degré d'analyse) ne sont pas proposées.

3.2.1. La numération parlée en France comme numération ordinale avec repérants

La première partie de l'interprétant : le choix des repérants et comptants

Les nombres que nous allons considérer sont les nombres inférieurs à mille. Il est cependant possible de considérer ensuite les representamens « deux mille », « trois mille », etc., comme des repérants. La différence entre les deux choix concerne les nombre inférieurs à cent.

1er choix

La suite des representamens $s_f(0)$ est « un », « deux », …, « dix-huit », « dix-neuf ».

« vingt » est le premier repérant A_1, A_2 est « trente », A_3 est « quarante », A_4 est « cinquante », A_5 est « soixante », A_6 est « quatre-vingts », puis, on a « cent », « deux cents », …, « huit cents », « neuf cents », « mille ».

2e choix (entre parenthèse les noms en français de Belgique ou de Suisse)

La suite des representamens $s_f(U)$ est « un », « deux, …, « huit », « neuf »

On choisit ensuite « dix » pour A_1 le premier repérant, « vingt » pour A_2, etc., « soixante » pour A_6, « soixante-dix » (« septante ») pour A_7, « quatre-vingts » (« octante », « huitante ») pour A_8, « quatre-vingt-dix » (« nonante ») pour A_9, puis, « cent », « deux cents », …, « huit cents », « neuf cents », « mille ».

Discussion sur les choix

Le representamen « quatre-vingts » nous semble pouvoir être analysé comme un repérant, bien que sa formation ne soit pas de même nature que les autres repérants, nous y reviendrons. Les deux choix diffèrent du fait de considérer « dix », « soixante-dix », « quatre-vingts » et « quatre-vingt-dix » comme des repérants ou non. En outre dans le deuxième, les representamens « un » à « neuf » sont les comptants du repérant « dix ». Un autre choix aurait été de prendre la suite « sept », « huit », « neuf », puisque les concaténations « dix/un », …, « dix/six » ne sont pas manifestes. Une remarque similaire est à faire avec les repérants « soixante-dix » et « quatre-vingt-dix », les concaténations avec la suite « onze », …, « dix-neuf » n'étant pas manifestes non plus, puisque « dix » n'apparaît plus. Ce choix est cependant intéressant à étudier pour mettre en évidence la différence entre la numération parlée en France et celles parlées en Suisse et Belgique. Il permet d'émettre une hypothèse, celle du chevauchement de deux numérations adoptant des choix différents dans les comptants. Imaginons qu'on utilise les comptants de « un » à « dix-neuf » entre deux repérants. On pourrait alors avoir la suite des repérants suivants : « vingt », « deux-vingts », « trois-vingts », « quatre-vingts », etc. jusqu'à « dix-neuf-vingt », si on utilise le processus de manière maximale pour numéroter les repérants. Or, « quatre-vingts » se trouve aussi dans la numération parlée en France et désigne le même nombre que dans la suite précédente. C'est cet élément qui rend mathématiquement possible une hypothèse de chevauchement de deux numérations : une utilisant 19 comptants, l'autre 9.

Cette hypothèse est renforcée du fait des emplois attestés de formes anciennes comme « quinze-vingts » qui reste dans le nom d'un hôpital comportant à l'origine 300 lits. Elle a déjà été formulée par des auteurs comme Ifrah (1994).

Par ailleurs, lorsqu'on prend le plus grand A_n possible à chaque fois, on obtient l'égalité $A_{n+1} = 2A_n$, qui mène à la suite géométrique $A_n = 2^{n-1}A_1$. Le premier repérant est arbitraire. Aucune analyse syntaxique de la numération parlée en France ne nous a permis d'envisager la progression « maximale » pour les repérants. Cependant, des éclairages liés aux choix des representamens disponibles successivement peuvent être avancés pour rendre compte du deuxième choix. Il s'agit d'une alternance de principes de maximalité forte et faible pour le choix des repérants et comptants. La maximalité « faible » concerne les repérants. Elle consiste à utiliser l'intégralité des representamens $s_j(0)$ (d'où le mot maximalité) dont le nombre est arbitraire (c'est 9 dans le deuxième choix) pour numéroter les repérants successifs (jusqu'à mille). On épuise une première fois cette suite, d'où l'introduction du representamen « cent », puis une nouvelle fois, d'où l'introduction du representamen « mille ». Il aurait été possible d'envisager à partir de « cent » l'utilisation de la suite des 99 representamens déjà définis auparavant, le mot « faible » indique le choix de la « plus petite » (ou la première) suite de comptants pour numéroter les repérants successifs. La maximalité forte, quant à elle, traduit le fait d'utiliser tous les comptants disponibles entre chaque type de repérants : « un » à « neuf » entre deux repérants avant « cent » (ce sont ceux disponibles avant « dix »), « un » à « quatre-vingt-dix-neuf » pour les repérants avant mille (ce sont ceux disponibles avant « cent »). Avec ces principes de maximalité, nous retrouvons donc les principes de base dix dans une vision ordinale. Pour les nombres inférieurs à cent, ces considérations linguistiques permettent d'éclairer de manière plus convaincante les choix faits dans la numération parlée en français de Suisse et de Belgique. Elles permettent aussi d'interpréter une numération comme celle parlée en Thaïlande, qui peut être qualifiée ainsi de <u>régulière</u>, même pour les nombres supérieurs à mille. En France, un plus grand nombre d'irrégularités est à noter, c'est ce qui mène en particulier à considérer le premier choix. Remarquons finalement que les dates sont parfois signifiées en français par une expression comme « douze cents » au lieu de « mille deux cents ». La suite des premiers representamens de « un » à « neuf » pour numéroter les repérants n'est donc pas toujours la règle.

<u>La deuxième partie de l'interprétant : la suite de la mise en signes</u>

Conformément à la définition d'un modèle de principes mathématiques d'une numération ordinale, dans les choix que nous avons exposés (qui résultent d'une analyse syntaxique et morphologique plus ou moins poussée), les repérants et la suite des representamens sj(0) sont distincts deux à deux deux et, pour tout n positif, il en est de même pour chaque suite de representamens $s_1(n)$. Leur expression est conventionnelle si on n'entreprend pas une analyse morphologique, mis à part le cas de « quatre-vingts ». Même si on prend en compte « quatre » dans « quarante », le procédé d'introduction de representamens nouveaux peut être compris comme une numérotation des repérants dans une logique ordinale.

Par ailleurs, il s'agit ici de revenir sur la place des comptants par rapport à un repérant dans la formation des noms. A l'inverse de la numération en allemand, le tactème d'ordre adopté consiste à indiquer dans les concaténations manifestes le comptant après le repérant. Cependant, les representamens des nombres entre onze et seize pourraient être analysés comme la manifestation d'un choix différent en y voyant les representamens « un », ..., « six » notifiés avant celui de « dix ». Pour comprendre ces choix, tout en nous restreignant aux nombres inférieurs à cent, nous considérons une interprétation ordinale de la numération latine dont la numération parlée en France est issue. Une analyse morphologique peut mener à envisager une altération ou évolution du latin dans laquelle l'idée de dix est indiquée en second, par exemple « onze » venant de la concaténation latine « un/decim », « un/dix ». Dans une interprétation ordinale, on peut formuler alors l'hypothèse que le suffixe « ze » indique que le dernier repérant passé est « dix », sans nécessairement faire référence à une concaténation ancienne. Si ceci renforce la « pertinence » d'une interprétation ordinale de la numération, cela n'explique pas l'inversion repérant/comptant à partir de « dix-sept ». Cependant, plusieurs remarques peuvent être faites. D'abord, le fait de désigner les nombres après vingt en énonçant en premier le repérant permet de mettre en avant ce repérant. Cette information devient primordiale pour indiquer l'ordre de grandeur des nombres ou bien pour se souvenir du dernier repérant quand il va s'agir par exemple de compter en énonçant les mots de la comptine. Cet argument reste cependant discutable au regard du choix fait en allemand. Mais, on peut faire une seconde remarque. En latin, « dix-sept » se dit « decem et septem », dix-huit se dit « decem et octo », dix-neuf se dit « decem et novem », alors que seize se dit sexdecim (Noel, 1833, indique aussi septemdecem pour dix-sept, Goelzer, 1966, indique quant à lui uniquement septemdecem). Comme en français, de onze à seize la racine latine fait donc apparaître dix (decem) après les representamens latin des nombres de un à six (voire sept). La même irrégularité est donc à noter, ce qui ne l'explique pas, mais en fournit une origine. Un dernier argument étymologique va dans le sens d'une interprétation ordinale. En effet, le latin utilise aussi « duodeviginti » pour « dix-huit » et « undeviginti » pour « dix-neuf ». Certains representamens y sont donc interprétables dans une numération ordinale avec principe d'antériorité, c'est-à-dire que « duodevinginti » est analysable comme deux (duo) avant (de) vingt (vingiti). Plus précisément, « de » renvoie à « à cause de » ou encore « provenant de », « avant la fin de », « relativement à » (Goelzer, 1966). A ce propos le « et » français peut s'interpréter comme « après » (et non forcément comme « + ») : le « et » latin a aussi cette acception.

3.2.2. La numération parlée en France comme numération arithmétique additive

La première partie de l'interprétant : le choix des repérants et comptants

Les éléments retenus dans l'analyse syntaxique et morphologique sont identiques aux précédents. Ils permettent cette fois-ci une interprétation en termes de numération arithmétique. Par exemple « cent », « deux-cents », etc., peuvent être considérés comme issus de l'adjonction réitérée de cent à partir de cent. Le nombre désigné par « trois cents » est ainsi conçu comme le nombre désigné par « deux cent » auquel on a ajouté le nombre désigné par « cent ». On examine ici deux choix principaux utiles à la discussion qui suit.

1^er^ choix

La suite de representamens $s_j(0)$ est « un », « deux », …, « dix-huit », « dix-neuf ». Les nombres inférieurs à vingt peuvent constituer la première « vingtaine », vingtaine qui peut se retrouver à partir de soixante. On obtient « vingt » pour A_1 le premier appui additif, « trente » pour A_2, « quarante » pour A_3, « cinquante » pour A_4, « soixante » pour A_5, « quatre-vingts » pour A_6, puis, « cent », « deux cents », …, « huit cents », « neuf cents », « mille ».

2^e^ choix (entre parenthèse les noms en français de Belgique ou de Suisse)

Il s'agit du choix le plus « régulier »

La suite de representamens $s_j(0)$ est « un », « deux », …, « huit », « neuf ».

On choisit ensuite « dix » pour A_1 le premier appui additif, « vingt » pour A_2, etc., « soixante » pour A_6, « soixante-dix » (« septante ») pour A_7, « quatre-vingts » (« octante », « huitante ») pour A_8, « quatre-vingt-dix » (« nonante ») pour A_9, puis, « cent », « deux cents », …, « huit cents », « neuf cents », « mille ».

Discussion sur les choix

Formellement, les modélisations ordinale et arithmétique additive sont proches. En effet, il est possible de faire les mêmes choix de representamens pour les caractériser, ce qui s'entend déjà dans la définition des deux modèles. Cependant, leur fonction change : appui additif pour l'un et repérant pour l'autre, appuyant additif pour l'un et comptant pour l'autre. Ainsi, pour un modèle additif, un representamen tel que « quarante-deux » est relié au nombre ((trente plus dix) plus deux), tandis que dans le modèle ordinal il désigne le nombre en tant que « successeur de » : par exemple, les repérants de « un » à « dix-neuf » ont été utilisés comme suite d'items pour atteindre le repérant « vingt », puis les comptants de « un » à « neuf » pour atteindre successivement les repérants « trente » et « quarante » puis ils ont été à nouveau utilisés pour atteindre le comptant « deux » (« un », « deux »).

Le choix du premier nombre d'appui additif est mathématiquement arbitraire. Par contre il contraint les suivants puisque son successeur immédiat est inférieur ou égal à son double. Ici aussi, l'analyse de la numération parlée en France pour la modéliser ne permet pas d'envisager le choix optimal. En les transposant dans une perspective arithmétique, les principes de maximalité évoqués précédemment peuvent éclairer le 2e choix. On met l'accent sur le fait de privilégier la réitération d'un ajout d'un même nombre à partir d'un appui additif, comme cela a déjà été indiqué. Les principes de base (dix) peuvent ainsi être en jeu.

La deuxième partie de l'interprétant : la suite de la mise en signes
Les remarques faites à propos de la numération ordinale avec repérants peuvent être adaptées. Cependant, en ce qui concerne les éclairages provenant de la numération latine, il nous semble moins pertinent d'interpréter les latins « duodeviginti » et « undeviginti » dans une perspective additive, comme (deux (duo) moins (de) vingt (vingiti)) car « de » ne fait pas référence à une soustraction.

3.2.3. La numération parlée en France comme numération arithmétique multiplicative

La première partie de l'interprétant : le choix des appuis et appuyants

Dans un des deux choix présentés ci-après, « dix » est considéré comme désignant un nombre d'appui multiplicatif, dans l'autre non.

1er choix : M_1 désigné par « cent », M_2 par « mille », M_3 par « million », M_4 par « milliard ».

2e choix : M_1 désigné par « dix », M_2 par « cent », M_3 par « mille », M_4 par « million » et M_5 par « milliard ».

Discussion sur les choix
A la différence du deuxième, le premier choix est basé sur le fait de ne pas analyser « soixante-dix », « quatre-vingts » et « quatre-vingt-dix » comme (sept fois dix), (huit fois dix) et (neuf fois dix), ni même « cinquante » comme (cinq fois dix) ou « treize » comme ((une fois) dix plus trois). Ce premier choix met en évidence une régularité des nombres au-delà de mille, puisque la suite des appuis multiplicatifs est géométrique de raison mille. Cependant, nous n'avons pas trouvé d'explication mathématique du passage de cent à mille, sauf à considérer une analyse morphologique plus fine des nombres inférieurs à cent, c'est ce qui a conduit au deuxième choix. En effet, dans celui-ci, on peut reconnaître pour les nombres

inférieurs à mille des nombres d'appuis multiplicatifs ordonnés selon une suite géométrique de raison dix et de premier terme dix, ce qui conduit à voir une logique dans la succession dix, cent, mille, celle de la base dix. Au-delà de mille, la logique diffère quant au nombre choisi pour la base, puisque c'est mille, mais pas quant au fait de retrouver le principe de base. Une autre possibilité que nous n'avons pas indiquée ici est de considérer « mille » comme le premier appui multiplicatif. On retrouve alors des principes de base mille pour toute la numération, mais cela oblige à ne pas prendre en compte des concaténations manifestes pour les nombres inférieurs à cent. Par ailleurs, si M_1 est choisi (de manière arbitraire), le choix optimum pour la suite des appuis multiplicatifs est la suite $M_n = M_1^{2^{n-1}}$, ce qui n'est pas le cas en français, ni dans aucune des numérations indo-européennes si on se réfère à Ifrah (1994). Certaines contraintes de mise en signes peuvent cependant donner un éclairage, c'est ce que nous abordons dans ce qui suit.

<u>La deuxième partie de l'interprétant : la suite de la mise en signes</u>

Au-delà de l'étude des relations mathématiques entre les appuis, la mise en signes des principes mathématiques comporte certaines particularités qui sont des solutions linguistiques propres à la numération parlée en français, dont certaines plus spécifiques au français de France. Nous ne revenons pas sur celles qui ont déjà été évoquées.

De manière spécifique au modèle multiplicatif, la mise en jeu des deux opérations, la multiplication et l'addition, oblige à indiquer des priorités. Par exemple dans « trois cent vingt mille », considérer que cent est du même niveau que mille peut conduire à interpréter ce nombre en tant que (trois × cent) + (vingt × mille), ce qui est erroné. La segmentation est un moyen de hiérarchiser les appuis multiplicatifs. Par exemples dans le premier choix, « cinq cent quatre-vingt-un mille trois cent vingt-trois » est décomposé en [(cinq × ***cent***) + (quatre-vingt-un)] × **mille** + (trois × ***cent***) + (vingt-trois). En italique et gras sont indiqués les nombres-segments qui sont réemployés dans un des segments des mille, million, etc., ces derniers (en gras) désignant alors des <u>nombres-segments</u> qualifiés de <u>principaux</u>. Ainsi ***cent*** en gras et italique indique qu'il est utilisé comme nombre-segment secondaire dans le segment des mille ou million ou milliard. L'interprétation « base mille » est à mettre en parallèle avec une mise en signes comportant les segmentations principales délimitées par les mots-segments principaux mille, million, milliard, etc. Ces mots-segments sont sur le même niveau. Si on considère un seul sous-niveau de segmentation (1er choix), le seul appui multiplicatif est cent. On ne tient alors pas compte de la morphologie des nombres inférieurs à cent. Si on utilise deux sous-niveaux de segmentation (2e choix), on considère deux nombres d'appuis multiplicatifs, dix et cent : « trois cent vingt-trois » est décomposé en (trois$\times$ ***cent***) + (deux$\times$ *dix*) + trois). Dans ce cas on retrouve des principes de base dix. Le repérage de l'un ou l'autre niveau de segmentation est nécessaire à la compréhension de la numération et aucun autre indicateur linguistique ne semble permettre de le signifier dans l'énonciation, mise à part une hiérarchie des segmentations avec le repérage des différents types de mots segments. Le nombre de niveaux de segmentation peut être alors mis en parallèle avec le choix des appuis multiplicatifs, et c'est ainsi qu'indirectement il est possible de retrouver les principes de base (dix, mille).

L'ordre d'énonciation des différents segments est quant à lui *a priori* arbitraire, puisqu'il s'agit d'indiquer une addition et que cette dernière est commutative. Le choix fait dans la numération parlée en France, quel que soit le niveau de segmentation considéré, est d'énoncer les segments par ordre décroissant des nombres d'appuis auxquels ils se réfèrent : milliard, million, mille, (cent), (dix). Il n'est pas cohérent avec le sens de construction des désignations des nombres, des plus petits aux plus grands, mais il permet d'indiquer en premier une information sur l'ordre de grandeur du nombre.

Une fois reconnue la segmentation, le tactème d'ordre concerne la concaténation des appuis multiplicatifs et de ses appuyants additifs et multiplicatifs. Fixer un tactème d'ordre permet en pratique de rendre la numération non ambiguë : différencier « cent deux » de « deux cents ». Il est cependant difficile de justifier ici le choix de l'un ou l'autre. Nous constatons que dans notre numération parlée nous énonçons l'appuyant multiplicatif avant l'appui, et l'appuyant additif après (exception faite des nombres de onze à seize si on considère l'appui multiplicatif « dix »). Parallèlement, nous constatons qu'en français les noms des nombres sont aussi adjectifs numéraux, sauf million et milliard qui sont des noms, et la règle est qu'ils précèdent le nom. Ainsi, « deux cents » pourrait se comprendre en considérant « cent » comme un nom (synonyme de centaine) et donc donnerait deux centaines, ce qui est effectivement le nombre désigné en français. Dans « cent deux », « cent » peut être l'adjectif et « deux » le nom (cent « deuzaines »), mais l'usage des petits nombres comme adjectifs numéraux est plus fréquent.

4. Discussion sur les résultats obtenus : des pistes pour leur portée didactique

Pour alimenter les questions futures et relier notre travail à l'activité des élèves, considérons à nouveau la tâche d'obtention du cardinal d'une collection dont trois procédures ont été évoquées au début de cet article. Le comptage de un en un, « un, deux, …, trente-neuf, quarante, quarante-et-un, quarante-deux » est à rapprocher d'une interprétation ordinale sans reprérant. Le comptage de paquets de dix puis d'unités restantes « dix, vingt, trente, quarante, quarante-et-un, quarante-deux » est à rapprocher d'une interprétation ordinale avec repérants ou arithmétique additive. Le comptage du nombre de dizaines « un, deux, trois, quatre » puis d'unités restantes « un, deux » est à rapprocher d'une interprétation arithmétique multiplicative. Dans ce dernier cas, la mise en signes comporte plus d'étapes, puisqu'il faut traduire « quatre dizaines » par « quarante ». En outre, ce n'est pas l'interprétation qui nous a semblé la plus pertinente pour ce champ numérique. Les stratégies pourraient être ainsi analysées *a priori* à l'aide des interprétations qui ont été exposées ici. Les procédures observées chez les élèves pourraient être étudiées parallèlement, avec des questions spécifiques. Certaines tâches favorisent-elles l'utilisation de tel type de procédure relié à tel élément d'une interprétation ? Peut-on dégager des profils d'élèves selon l'utilisation préférentielle de propriétés afférentes à telle interprétation ? Nous pourrions dire que : « la numération a été utilisée (par cette personne pour cet exercice) dans une interprétation ordinale (ou additive ou multiplicative) ». C'est ainsi que nous pourrions définir la notion d'interprétation, cette fois-ci au niveau d'un sujet.

Si les modèles que nous avons donnés peuvent être utilisés pour entreprendre une analyse didactique du travail des élèves confrontés à certains problèmes numériques, la méthodologie reste à construire. Le recours à la notion de théorème-en-acte de la théorie des champs conceptuels (Vergnaud 1991) nous semble une possibilité féconde. Ils permettent de faire le lien entre d'une part les procédures et d'autre part les interprétations de la numération envisageables à partir des modèles. Concrètement, les actes et les paroles, voire les discours *a posteriori* de l'élève résolvant un problème, sont des indicateurs essentiels à relever pour une telle entreprise. Cependant, ils nous semblent insuffisants pour inférer les théorèmes-en-acte puisque dans ces derniers les règles d'action utilisées ne sont pas nécessairement explicites. Au moins deux autres indicateurs sont à prendre en compte : la nature des problèmes posés aux élèves (les classes de problème, Vergnaud 1991) et les connaissances qu'ils peuvent mobiliser pour les résoudre.

De futures analyses peuvent en particulier s'attacher à étudier les interprétations en jeu pour un élève qui utilise essentiellement la numération parlée en langue maternelle comme signifiant du nombre. D'après les programmes scolaires, ce type d'élève est susceptible d'être majoritaire dans certains niveaux d'enseignement institutionnel : en France il pourrait s'agir *a minima* des élèves de l'école maternelle (enfants âgés de 3 à 6 ans). Beaucoup d'éléments concourent au fait que les propriétés et théorèmes en acte utilisés puissent renvoyer à une interprétation ordinale, notamment l'utilisation de la comptine numérique comme compteur pour dénombrer une collection. Ces considérations concernent plus particulièrement les « petits » nombres (en France, jusqu'à 20, voire 30, c'est-à-dire le champ numérique dont l'étude est prescrite pour les classes maternelles). Au-delà, la question se pose de savoir en quoi la structure de la numération favorise une utilisation (en-acte) de propriétés arithmétiques (addition, multiplication). L'étude que nous avons menée nous permet de fournir des outils pour une telle recherche. Pour des nombres allant (au moins) jusqu'à cent, les élèves peuvent *a priori* utiliser des ressources du système de numération en résonnance aussi bien avec son interprétation ordinale qu'avec celles arithmétiques. Ainsi, nous pensons avoir montré qu'il est possible de comprendre la structure de la numération, même « régulière » telle la numération parlée en Thaïlande, sans utiliser des principes arithmétiques. Notre étude permet ainsi de reconsidérer l'apprentissage et l'enseignement concernant le système de numération écrit de position ainsi que les problèmes relevant de la structure additive ou multiplicative (au sens de Vergnaud 1991). En effet, l'emploi de la numération parlée qui peut les accompagner est susceptible de renvoyer (durablement) l'élève à des principes ordinaux, puisque ces derniers peuvent fournir une explication rationnelle de la constitution de cette numération parlée. Or, ce sont des principes arithmétiques qui interviennent dans l'apprentissage des notions susdites.

Conclusion

Les modèles proposés permettent d'interpréter les numérations orales indo-européennes, c'est à dire de rendre compte *a posteriori* de leur syntaxe mais aussi de discuter des choix nécessaires à une modélisation. Ils ne sont cependant pas à considérer indépendamment de la méthodologie utilisée pour leur élaboration. Ils n'ont pas vertu à être une référence définitive et ils peuvent être discutés.

Avec ces modèles, la modélisation d'une numération dépend du niveau d'analyse de la constitution des representamens. Les interprétations proposées pour la numération parlée en France ont pour but d'engager une réflexion sur ses fondements rationnels. Nous avons fourni des critères et des arguments qui permettent d'évaluer la « pertinence » d'une interprétation. Nous pensons avoir mis en perspective les interprétations arithmétiques « base mille » ou « base dix » couramment évoquées pour comprendre la numération. La base mille nous semble avoir une certaine pertinence pour les nombres au-delà de mille. Les nombres inférieurs à cent sont plus aisément interprétables à l'aide de principes arithmétiques additifs ou ordinaux avec repérants : l'analyse de la numération latine donnant un argument supplémentaire en faveur de ces derniers. Ainsi, pour la numération parlée en France, l'interprétation ordinale est une alternative tout aussi fondée que les interprétations arithmétiques. En outre, quel que soit le modèle choisi pour analyser la numération parlée en France, la base dix peut s'inviter dans certaines interprétations. Elle peut apparaître en effet comme consécutive de choix parmi d'autres, concernant les paramètres initiaux à fixer (appuis ou repérants) et la mise en signes (maximalité faible et forte pour un modèle ordinal, réitération d'un nombre à ajouter pour le modèle additif et segmentation pour le modèle multiplicatif). Il n'est pas exclu que cela soit aussi le cas pour les autres numérations indo-européennes, y compris les numérations parlées « régulières » de type thaïlandais.

Quant au lien avec l'objet nombre, notre méthodologie ne permet d'en ébaucher que quelques aspects. Il paraît pertinent de poursuivre la recherche, par exemple en exploitant les ressources que permet une étude sémiotique peircéenne à usage didactique, comme l'envisage Conne (2008). D'une manière générale, les éléments présentés dans cet article sont pour nous des outils pour étudier l'activité des élèves, pour mener des recherches sur leurs conceptions et sur la conceptualisation. Ceci laisse donc envisager des prolongements proprement didactiques qui ne préjugent pas des cadres théoriques et des méthodologies qui peuvent y être employés.

Bibliographie

ARTIGUE M. (1991), Epistémologie et didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **10.2/3**.

BEDNARZ N. & JANVIER B. (1982), The understanding of numeration in primary school, *Educational Studies in Mathematics* **13**, 33-57.

BIDEAUD J., LEHALLE H. & VILETTE B. (2004) *La conquête du nombre et ses chemins chez l'enfant*, Presses universitaires du Septentrion, Paris.

BRIAND J. (1999), Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. Etude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **19.1**, 41-75.

BRISSIAUD R. (2001), Enseigner une comptine numérique « à l'asiatique » au CP : pourquoi et comment ?, in *actes du XXVIIIème colloque inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres*, Tours.

CAUTY A. (1984, 1986, 1988), Taxinomie, syntaxe et économie des numérations parlées, *Amérindia* **9** et **11**, Sémantique de la mise en signes du nombre : une vision ordinale, *Amérindia* **13**,
Disponible sur : http://celia.cnrs.fr/Fr/Amerindia.htm

CHAMBRIS C. (2008), Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels. Thèse de Doctorat, LDAR Université Paris.Diderot, Paris.
Disponible sur : http://tel.archives-ouvertes.fr/

CONNE F. (2008), Coupes sémiotiques, dans *Le film de la Classe. Etude sémiotique et enjeux didactiques*, (Jean-Pierre Sautot éd.), 105-142, Lambert-Lucas, Limoges.

CRUMP T. (1990) *The Anthropology of Numbers*, Cambridge University Press. Compte rendu de CAVEING M., (1994) *L'Homme* Vol. 34, n° 130, pp. 155-158.

DE BLOIS L. (1996), Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **16.1**, 71-127.

FISCHER J-P. (1990), Pourquoi les élèves asiatiques surclassent-ils les américains (en maths) ?, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **3**, 103-141, IREM de Strasbourg.

FUSON K., WEARNE D., HIEBERT J., MURRAY H., HUMAN P., OLIVIER A., CARPENTER T., & FENNEMA E. (1997), Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction, *Journal for Research in Mathematics Education* **28.2**, 130-162.

GUITEL G. (1975), Histoire comparée des numérations écrites, « *Nouvelle bibliothèque scientifique* », Flammarion, Paris.

IFRAH G. (1994), Histoire universelle des chiffres, Robert Laffont, Paris.

MOUNIER E. (2010), Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes, Thèse de Doctorat, LDAR Université Paris.Diderot, Paris. Disponible sur : http://tel.archives-ouvertes.fr/

NUMA BOCAGE L. (1997), Etude de la médiation dans l'enseignement de la numération, Thèse de doctorat. Université René Descartes, Paris.

PEIRCE C.S (1906), Prolégomènes à une apologie du pragmaticisme, *The Monist* **16**. Traduction française de Michel Balat.
Disponible sur : http://www.balat.fr/

VERGNAUD G. (1991), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **10.2/3**.

Dictionnaires

GOELZER H. (1966), Dictionnaire Français Latin et Latin Français, Garnier-Flammarion, Paris.

NOEL, F (1833), Dictionnaire latin français.
Disponible sur : http://books.google.fr/

ERIC MOUNIER
25, rue de Sambre et Meuse
75010 Paris
ericmounier@noos.fr

Annexe

Ecriture décimale	Français	Anglais	Allemand	Thaï
1	un	one	ein	neung
2	deux	two	zwei	seeaung
3	trois	three	drei	saam
4	quatre	four	vier	sii
5	cinq	five	funf	haa
6	six	six	sechs	hok
7	sept	seven	sieben	djet
8	huit	eight	acht	bpèèt
9	neuf	nine	neun	gaao
10	dix	ten	zehn	sip
11	onze	eleven	elf	sip-et
12	douze	twelve	zwölf	sip seeaung
13	treize	thirteen	dreizehn	sip saam
14	quatorze	fourteen	vierzehn	sip sii
15	quinze	fifteen	funfzehn	sip haa
16	seize	sixteen	sechzehn	sip hok
17	dix-sept	seventeen	siebzehn	sip djet
18	dix-huit	eighteen	achtzehn	sip bpèèt
19	dix-neuf	nineteen	neunzehn	sip gaoo
20	vingt	twenty	zwanzig	yii-sip
21	vingt-et-un	twenty-one	ein und zwanzig	yii-sip-et
22	vingt-deux	twenty-two	zwei und zwanzig	yii-sip seeaung
…				
30	trente	thirty	dreizig	saam sip
31	trente- et-un	thirty-one	ein und dreizig	saam sip-et
40	quarante	forty	vierzig	sii sip
70	soixante-dix septante*	seventy	siebzig	djet sip
80	quatre-vingts octante* huitante*	eighty	achtzig	bpèèt sip
90	quatre-vingt-dix nonante*	ninety	neunzig	gaao sip
100	cent	one hundred	hundert	reeauy
1000	mille	one thousend	tausend	pan
10000	dix mille	ten thousend	zehn tausend	meeun

*** En français de Suisse ou Belgique**