

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

Revue internationale de didactique des mathématiques

Rédacteurs en chef : ALAIN KUZNIAK & FRANÇOIS PLUVINAGE

IREM de Strasbourg
Université de Strasbourg

Volume 17

2012

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
ISSN 0987 - 7576

Rédacteurs en chef

ALAIN KUZNIAK
Université Paris-Diderot
Laboratoire de Didactique André Revuz
Site Chevaleret
Case 7018
75205 Paris Cdx 13
kuzniak@math.jussieu.fr

FRANÇOIS PLUVINAGE
IREM de Strasbourg
7 Rue René Descartes
67084 Strasbourg
francois.pluvinage@math.unistra.fr

Comité de rédaction

ALAIN BRONNER – Montpellier
VIVIANE DURAND-GUERRIER – Montpellier
RAYMOND DUVAL – Lille
CÉCILE DE HOSSON – Paris
ATHANASIOS GAGATSIS – Chypre
FERNANDO HITT – Canada
CATHERINE HOUEMENT – Rouen
MICHALIS KOURKOULOS – Crète

MARIA ALESSANDRA MARIOTTI – Italie
ASUMAN OKTAÇ – Mexique
LUIS RADFORD – Canada
JEAN-CLAUDE RÉGNIER – Lyon
ÉRIC RODITI – Paris
MAGUY SCHNEIDER – Belgique
CARL WINSLOW – Danemark
MONCEF ZAKI – Maroc

Responsable de publication

PHILIPPE NUSS – Directeur de l'IREM de Strasbourg

Secrétariat d'édition

ALEXANDRA CARMINATI – IREM de Strasbourg

Éditeur

IREM de Strasbourg
Université de Strasbourg
7, rue René Descartes
F - 67084 Strasbourg CEDEX
Tel. +33 (0)3 68 85 01 30

Fax. +33 (0)3 68 85 01 65
Bibliothèque : +33 (0)3 68 85 01 61
<http://irem.u-strasbg.fr>
irem@math.u-strasbg.fr

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
VOLUME 17 – 2012

SOMMAIRE

ÉDITORIAL	7
Nicolas GAUVRIT (France) <i>Gènes et mathématiques : La génétique peut-elle présenter un intérêt pour la didactique ?</i>	9
Eric MOUNIER (France) <i>Des modèles pour les numérations orales indoeuropéennes à usage didactique. Application à la numération parlée en France</i>	27
David BLOCK, Kostas NIKOLANTONAKIS & Laurent VIVIER (Mexique, Grèce, France) <i>Registres et praxis numérique en fin de première année de primaire dans trois pays</i>	59
Patrick GIBEL et Mhammed ENNASSEF (France) <i>Analyse en théorie des situations didactiques d'une séquence visant à évaluer et à renforcer la compréhension du système décimal</i>	87
José Carlos Cortés ZAVALA et Ma de Lourdes GUERRERO MAGANA (Mexique) <i>Programas de cómputo interactivos para crear ambientes tecnológicos para el aprendizaje de las matemáticas</i>	117
Carlos Armando CUEVAS VALLEJO, Magally MARTÍNEZ REYES & François PLUVINAGE (Mexique, France) <i>Promoviendo el pensamiento funcional en la enseñanza del cálculo. Un experimento con el uso de tecnologías digitales y sus resultados</i>	137
Athanassios RAFTOPOULOS et Demetris PORTIDES (Chypre) <i>Le concept de fonction et sa projection spatiale</i>	169
INSTRUCTIONS POUR LES AUTEURS	195

EDITORIAL

Ce dix-septième numéro des Annales de Didactique et de Sciences cognitives s'est tout naturellement structuré autour de deux grandes thématiques : la compréhension de la numération décimale par des jeunes élèves et le concept de fonction en relation avec la pensée fonctionnelle. De manière surprenante, la question de la compréhension et de l'enseignement de la numération reste encore aujourd'hui un sujet de recherches en didactique tant élèves et professeurs sont confrontés à de nombreuses difficultés en ce domaine. L'article de Mounier fait une mise au point utile sur les divers modèles de numération orale utilisés dans le monde indo-européen, il établit aussi un pont entre ces modèles et la question précise de l'apprentissage de la numération orale en France. Les deux autres articles s'appuient sur des théories didactiques différentes, pour analyser la mobilisation des connaissances des élèves en train de résoudre des problèmes de numération. Gibel et Enassef rendent compte des stratégies d'élèves confrontés à un problème de dénombrement. Pour ce faire, ils appuient leur description sur la Théorie des Situations Didactiques en précisant la notion clé de situation qui va leur permettre à la fois de développer une séance d'apprentissage et d'analyser les procédures des élèves. Pour leur part, Block, Nikolantonakis et Vivier font apparaître des différences significatives dans les performances d'élèves mexicains, grecs et français résolvant divers problèmes numériques. En utilisant des éléments de Théorie Anthropologique du Didactique et la notion de registre introduite par Duval, ils expliquent ces différences à partir des tâches scolaires les plus pratiquées par les élèves dans les différents pays, tâches qui n'utilisent pas nécessairement les mêmes registres de représentation sémiotique.

Le deuxième bloc d'articles s'intéresse à la notion de fonction. Deux articles, qui résultent d'expérimentations conduites au Mexique, décrivent des ingénieries didactiques susceptibles d'aider les étudiants à surmonter les difficultés inhérentes à la pensée fonctionnelle. Des logiciels y sont utilisés de manière décisive. Cuevas, Martínez et Pluvinaud proposent un processus de formation qui sollicite notamment la modélisation de situations « réelles » et l'usage du logiciel didactique CalcVisual de travail sur les polynômes. Quant à Cortes et Guerrero, ils abordent des problèmes de dérivées grâce à un environnement informatique qui favorise les interactions entre élèves et professeur. L'apport de Raftopoulos et Portalides, présenté dans un troisième article de ce bloc concernant les fonctions, est plus théorique et utilise des concepts des sciences cognitives pour expliquer l'étroite dépendance qui existe entre relation spatiale et notion de fonction qui ne peut pas être uniquement résumée à son expression algébrique.

Ce numéro s'ouvre par un article plus général : Gauvrit apporte une synthèse concise d'un ensemble de données sur la question de l'apport éventuel de la génétique à la compréhension de certaines difficultés des élèves en mathématiques. Les Annales restent ainsi ouvertes à toutes les contributions argumentées qui permettent de penser l'évolution de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques en contexte scolaire.

Le lecteur attentif aura remarqué une évolution du Comité de rédaction des Annales. Ce comité compte quelques nouveaux venus que nous saluons bien cordialement. Guy Noël (Belgique) s'en est retiré à sa demande, et nous tenons en cette occasion à le remercier chaleureusement pour sa contribution à la revue ; c'est en particulier à Guy Noël que nous devons le volume 11 des Annales et son supplément issus du colloque de Mons, lequel a donné lieu à la production d'articles extrêmement appréciés.

Alain KUZNIAK & François PLUVINAGE

NICOLAS GAUVRIT

GÈNES ET MATHÉMATIQUES : LA GÉNÉTIQUE PEUT-ELLE PRÉSENTER UN INTÉRÊT POUR LA DIDACTIQUE ?

Abstract. Genes and mathematics: Educational studies in mathematics and the genetics of mathematical difficulties. We review a series of recent genetic accounts of mathematical difficulties or disabilities, and briefly discuss possible theoretical interests of these experimental findings for future research in the field of mathematical education.

Résumé. Nous passons en revue et synthétisons un ensemble de résultats récents en génétique qui aborde la question des difficultés mathématiques des élèves, et discutons l'intérêt théorique que ces résultats pourraient présenter pour la didactique des mathématiques.

Mots-clés. Difficultés mathématiques, didactique, génétique, cognition mathématique.

Introduction

Un pourcentage important d'élèves du primaire et du secondaire présente des difficultés scolaires en mathématiques dans un ou plusieurs domaines. L'INSEE¹ estimait en 2006 le pourcentage de personnes « faibles en mathématiques » à 27% de la population française (Micheaux & Murat, 2006). Ces difficultés sont suffisamment répandues pour avoir débordé le cadre de la didactique : plusieurs disciplines comme la psychologie, les neurosciences ou la sociologie tentent de comprendre les raisons de ces difficultés.

Contrairement à l'approche didactique, qui « déconstruit » les objets mathématiques en lien avec leur enseignement, ces différentes disciplines ont tendance à voir « les difficultés mathématiques » comme une problématique homogène, et une fraction seulement des études de psychologie ou de neurosciences distinguent un *domaine* mathématique particulier – comme le calcul (Dehaene, 2003), la géométrie (Voss & Paller, 2010) ou la résolution de problèmes (Ogawa, Yamazaki, Ueno, Cheng, & Iriki, 2010) – et très exceptionnellement une tâche ou un type de tâches particulier, comme on l'a fait en neurosciences en distinguant, à l'intérieur des compétences élémentaires en calcul, ce qui relève de l'estimation des grandeurs dans une approche spatiale et ce qui relève de l'application de règles de calcul dans une approche symbolique (e.g. Dehaene, Piazza, Pinel, & Cohen, 2003).

¹ L'*Institut National de la Statistique et des Etudes Economiques* est un organisme public français. Il publie régulièrement des données statistiques concernant le pays.

Malgré cela, la psychologie cognitive ou les neurosciences ont été considérées comme des sources d'inspiration ou de compléments théoriques par les didacticiens des mathématiques, et leur apport est reconnu (Duval, 1996 ; Brun, 1994) ou tout au moins discuté (Kelly, 2011).

En ce qui concerne la génétique, il semble en revanche que ses apports potentiels à la réflexion didactique n'aient guère été étudiés. Bien que l'éloignement des deux disciplines soit évident et puisse conduire à supposer que la génétique ne pourra jamais être d'aucun secours pour la didactique, il nous semblait important d'aborder cette question.

Dans cet article, nous présenterons d'abord les divers types de difficultés mathématiques abordées par les chercheurs de psychologie, neurosciences et génétique ainsi que quelques outils d'évaluation ; puis les résultats principaux de la génétique, les controverses et débats qui agitent le monde de la génétique en rapport avec la question des difficultés mathématiques des élèves. Enfin, nous discuterons de l'intérêt possible de ces résultats pour la didactique des mathématiques... et de leurs limites.

1. De la « faiblesse » au trouble du calcul

Pour ce qui concerne la définition des troubles des apprentissages et les catégories de difficultés rencontrées par les élèves, la génétique est en accord avec la psychologie et les neurosciences. Dans ces disciplines, et pour ce qui nous concerne dans les études portant sur les aspects génétiques des difficultés mathématiques, les expériences portent selon le cas sur des sujets tout-venants (recherche des corrélations entre le niveau mathématique et d'autres variables) ; sur des sujets présentant un niveau mathématique faible ; ou sur des cas ou des groupes considérés comme pathologiques. Il existe une gradation entre le sujet normal et troublé, conduisant à plusieurs catégories d'élèves, et à des études parfois difficiles à comparer parce qu'elles ne portent pas sur les mêmes « difficultés ».

1.1. Niveau de sévérité

On peut d'abord classer les populations étudiées en fonction du degré de difficulté mathématique rencontrée. Un certain nombre de recherches se focalisent sur des enfants non-problématiques selon les enseignants mais « faibles en mathématiques » (*low achievers*). La population concernée est généralement définie par ce qu'elle obtient un score de mathématiques inférieur à un score critique modeste, souvent de l'ordre du 40^{ème} percentile, mais dont la définition exacte varie d'une étude à l'autre (Geary, 2004).

Les élèves présentant des « difficultés mathématiques » (*mathematical difficulties* ou *mathematical disabilities*) sont généralement définis par un critère du même type, mais un peu plus sévère. Par exemple, celui-ci pourra être de se trouver sous

le 20 ou 25^{ème} percentile pour un score standardisé de mathématiques (Geary, 2004).

Les élèves faibles ou en difficultés ne sont pas considérés comme troublés (ou souffrant d'une pathologie). Dans le domaine de la pathologie, deux notions proches et souvent confondues dans la littérature sont utilisées : celles de *dyscalculie* et de *trouble du calcul*.

Une dyscalculie est définie par une faiblesse *spécifique* en *calcul*. Autrement dit, l'enfant dyscalculique a une intelligence normale, et ne souffre pas de difficultés d'apprentissages généralisées – mais les comorbidités sont fréquentes – pour une synthèse, voir INSERM (2007). On considère généralement les termes *dyscalculie* et *trouble du calcul* comme synonymes.

Le *trouble du calcul* est pourtant défini dans le manuel diagnostic des troubles mentaux DSM-IV (APA, 2004, p. 54) comme un trouble spécifique invalidant des apprentissages *mathématiques*, que n'expliquent pas d'autres atteintes plus générales (e.g. retard mental). Cette définition rejoint l'*échec électif en mathématiques* décrit par Brousseau (1980). On remarquera que selon le DSM-IV, qui est la référence diagnostique des psychologues scientifiques, le trouble du *calcul* est donc défini par le niveau *mathématique*, ce qui ne manquera pas de surprendre les didacticiens, d'autant que les troubles du langage sont eux décomposés en troubles liés à la réception, troubles liés à l'expression, troubles phonologiques, bégaiement etc.

Dans la pratique, les auteurs utilisent des méthodes variables pour sélectionner les échantillons, tant en ce qui concerne la mesure du niveau mathématique (ou en calcul) que sur le respect d'un critère de divergence entre le niveau général et le niveau en mathématiques.

L'incohérence des critères pratiques utilisés par les auteurs aboutit à des estimations hétérogènes de la prévalence de la dyscalculie. Des prévalences de 10,9% (Ostad, 1999), 6,5% (Gross-Tsur, Manor, & Shalev, 1996), ou 3,6% (Lewis, Hitch, & Walker, 1994) ont été rapportées. Quant à Fischer (2007), il aboutit, avec une définition plus rigoureuse excluant notamment les troubles génériques des apprentissages, à une prévalence de l'ordre de 1%.

1.2. Décomposition des compétences et spécificité

Une approche didactique des difficultés mathématiques conduit souvent à classer ces difficultés soit en fonction du domaine mathématique touché (géométrie, numération, etc.), soit en fonction de la fonction cognitive sous-jacente (pour la géométrie, on peut imaginer un trouble de la perception visuelle ou de l'organisation spatiale par exemple).

Dans la plupart des études de psychologie, neurosciences ou génétique portant sur les difficultés mathématiques, cette classification n'est pas abordée, et l'on envisage seulement la possibilité d'une difficulté mathématique générique.

Néanmoins, avec l'avancé des recherches sur le sujet, les particularisations sont de plus en plus fréquentes, surtout là où les résultats sont nombreux. C'est le cas de la dyscalculie au sens propre (trouble de *calcul*), qui est désormais couramment décomposée en plusieurs classes selon la fonction cognitive touchée, et il n'est pas rare de trouver des études portant spécifiquement sur *un type* de dyscalculie, par exemple dans les études de cas (Roux, 2009). Plus généralement, les études de cas cliniques, qui décrivent dans le détail le comportement d'un individu particulier, permettent de bien distinguer les fonctions mathématiques touchées et préservées.

En dehors des études de cas et des domaines où, la recherche avançant, on distingue des catégories un peu finement, une classification grossière ressort. Il existe en effet de nombreux travaux de neuropsychologie cités par les didacticiens, portant spécifiquement soit sur le raisonnement et la résolution de problèmes (Soto-Andrade, 2006), soit la géométrie (Duval, 2005), soit le calcul (Roditi, 2005).

Même si on peut déplorer l'absence de classification objective fine et validée des difficultés mathématiques, on voit donc que la neuropsychologie admet une catégorisation des difficultés mathématiques, fondée non sur des éléments mathématiques, mais sur des fonctions cognitives sous-jacentes (perception, langage, raisonnement). Ces grandes catégories sont reprises par l'approche génétique de la cognition mathématique.

1.3. Mesures des performances mathématiques

Les expériences qui nécessitent de rassembler un échantillon d'élèves faibles, en difficulté, ou dyscalculiques, passent par l'administration de tests mathématiques aboutissant à des scores plus ou moins standardisés.

Une partie des études utilise comme indice de compétences mathématiques les résultats scolaires en mathématiques, ce qui pose évidemment un certain nombre de problèmes. La docimologie de Piéron dont l'un des buts était d'étudier la manière dont les enseignants évaluent les élèves a largement montré le caractère imparfait des « notes » et leur dépendance vis-à-vis de critères sociaux et psychologiques de l'évaluateur, même en mathématiques – la situation est pire dans les matières littéraires (de Landsheere, 1992). Une note faible en mathématiques peut certes provenir d'un mauvais « niveau » mathématique, mais aussi d'un conflit entre la vision mathématique d'un élève et d'un enseignant, ou encore, bien évidemment, d'un élément de la situation de classe que précisément la didactique étudie et dont elle montre l'importance.

D'autres études utilisent des tests de compétences mathématiques étalonnés, comme le Zareki-R (Von Aster & Shalev, 2007) par exemple. En psychologie scolaire, les deux tests les plus connus sont probablement l'UDN-II (Meljac & Lemmel, 1999) et le TEDI-Math (Grégoire, Van Nieuwenhoven, & Noel, 2002).

Le premier est fondé sur une approche piagétienne des apprentissages et permet de distinguer plusieurs grands domaines : logique, conservation, utilisation du nombre, raisonnement spatial, compréhension des opérations. Ces 5 classes correspondent à 5 épreuves distinctes et, bien qu'elles ne se fondent pas sur une analyse didactique des situations mathématiques courantes, paraissent compatibles avec une approche didactique.

Le second, TEDI-Math, s'est construit en référence aux récents développements de la neuropsychologie de la numérosité notamment, et permet de distinguer la voie symbolique et la voie spatiale de la perception des grandeurs, ainsi que de tester séparément les 5 principes de Gelman et Gallistel (1978) concernant le dénombrement.

Dans les deux cas, le spectre des compétences « mathématiques » abordées est limité par rapport à ce que la didactique pourrait souhaiter. L'accent est toujours mis sur le nombre, au sens le plus élémentaire, avec une approche presque naïve de la numération. Les opérations sont elles aussi abordées selon une modalité insuffisante pour le didacticien, où la pluralité des manières de voir le même objet n'est pas même envisagée. L'addition n'est par exemple comprise que comme un ajout. Néanmoins, les catégories qui se dessinent à l'intérieur de ce spectre réduit est compatible avec une vue didactique et devrait permettre l'échange entre les deux disciplines.

Signalons aussi qu'il existe depuis quelques années un test standardisé dédié au dépistage de la dyscalculie, le Dyscalculia Screener (Butterworth, 2003).

2. La question de l'héritabilité

C'est dans ce cadre conceptuel, et au moyen du type d'outils que nous venons de décrire, qu'un courant de recherche pluridisciplinaire s'organisant autour de la psychologie a cherché à déterminer les causes des difficultés mathématiques des élèves. Parmi les disciplines engagées dans ces travaux, la génétique a d'abord été convoquée pour trancher la question de l'inné et de l'acquis.

Un ensemble important de résultats suggestifs amènent à considérer qu'une part des variations du niveau mathématique est d'origine génétique. L'étude de certaines maladies génétiques montre par exemple des profils de troubles mathématiques caractéristiques. Les méthodes classiques de calcul d'héritabilité (agrégation familiale, méthode des jumeaux) confirment ces résultats, même si on

peut interroger certaines hypothèses de base et, plus encore, la variabilité des estimations rapportées.

2.1. Maladies génétiques et difficultés mathématiques

Un ensemble de maladies génétiques s'accompagnent de troubles psychologiques divers, dont des difficultés électives en mathématiques pour certaines, avec même parfois des profils de compétences caractéristiques, comme dans le cas de la phénylcétonurie, une maladie génétique du métabolisme associée à des troubles de l'attention et des fonctions exécutives, dégradant les performances dans les tâches de résolution de problèmes complexes (Antshel, 2010).

Les anomalies chromosomiques « X » sont fréquemment liées à divers troubles cognitifs, mais semblent toucher plus spécifiquement les habiletés mathématiques. C'est le cas pour le syndrome du X fragile (Murphy, 2009), mais aussi la monosomie X – ou syndrome de Turner (Butterworth, Granà, Piazza, Girelli, Price, & Skuse, 1999). Des patients souffrant du syndrome de Turner sont par exemple plus lents dans les tâches de dénombrement de points (Butterworth, 1999), même lorsqu'il n'y a que deux points et que le dénombrement peut se faire d'une seule fixation oculaire (Bruandet, Molko, Cohen, & Dehaene, 2004). On a montré que la cognition mathématique pouvait être particulièrement affectée par le syndrome de Klinefelter, dû à une trisomie X (Butterworth, 2008).

Il semble aussi que le syndrome de Williams-Beuren, causé par une microdélétion² dans le locus 7q11.23³, soit associé à des anomalies de la cognition mathématique, indépendamment de l'âge mental, du QI et du niveau de langue. Les patients concernés ont des résultats significativement plus faibles sur un ensemble de tâches arithmétiques simples, comme des comparaisons de nombres (deux nombres écrits en chiffres apparaissant à l'écran, les sujets doivent dire lequel est le plus grand), sériation (les sujets doivent ranger des nombres par ordre croissant), additions de petits nombres (typiquement compris entre 0 et 9) que des patients appariés souffrant d'un trouble autistique (Paterson, Girelli, Butterworth, & Karmiloff-Smith, 2006).

On a associé de même un trouble du « raisonnement abstrait » en mathématique au syndrome vélocardiofacial ou maladie de DiGeorge (Shprintzen, 2000). Cette maladie génétique résulte d'une microdélétion au locus 22q11. Certains auteurs ont avancé que le lien entre la délétion et le trouble du raisonnement passait par des anomalies structurelles des lobes pariétaux, notamment une dysymétrie entre les deux lobes (Eliez, Schmitt, White, & Reiss, 2000). Une étude plus récente utilisant

² Absence d'une petite partie (moins de 5 Mb) de chromosome.

³ Un *locus* est une partie de chromosome. Le numéro précédant la lettre *q* est le numéro du chromosome concerné (ici 7).

l'imagerie fonctionnelle montre que pour les patients vélocardiofaciaux, une suractivation du gyrus supramarginal gauche apparaît dans les tâches arithmétiques requérant un raisonnement complexe (Eliez, Blasey, Menon, White, Schmitt, & Reiss, 2001). Les auteurs suggèrent que cette sur-activation est une conséquence d'un défaut structurel du lobe pariétal gauche, provenant elle-même de la délétion.

De Smedt et ses collègues (2006) ont étudié 14 enfants de 6 à 10 ans et les ont comparés à des élèves normaux appariés pour l'âge, le QI et le sexe. Les épreuves utilisées étaient les suivantes : (1) lecture et écriture de nombres à un ou deux chiffres (2) comparaison de nombres à un chiffre apparaissant (en chiffre) sur un écran (3) « comptage », une épreuve qui regroupe des tâches de dénombrement, de comptage à l'endroit, à l'envers, et de n en n (4) calcul mental sur des nombres de 1 ou 2 chiffres (5) résolution de problèmes additifs ou soustractifs. Cette dernière épreuve contient des problèmes simples, comme « Anne et Marie ont 11€ à elles deux. Anne a 4€. Combien a Marie ? », et des problèmes contenant des informations inutiles (on ajoute par exemple « Pierre a 3€ » dans un énoncé du type précédent). Seule la dernière épreuve, supposée faire intervenir un raisonnement abstrait, montre une différence entre les enfants DiGeorge et le groupe contrôle, ce qui contraste avec les résultats trouvés dans le cas du syndrome de Williams-Beuren.

Ces divers tableaux cliniques montrent qu'une maladie génétique peut avoir un effet sur les apprentissages mathématiques. Mais là n'est pas le plus important : les configurations de ces situations cliniques sont diverses et permettent de dissocier certaines fonctions qui sont de premier intérêt pour la didactique. Les troubles du raisonnement sont par exemple saillants dans la maladie de DiGeorges alors que les opérations élémentaires sur les petits nombres sont relativement préservées. Au contraire, les patients Williams-Beuren semblent plus handicapés dans les petits calculs qu'ils ne le sont (et ils le sont) en raisonnement. Cette *double dissociation*⁴ permet de conclure que raisonnement abstrait et calculs élémentaires reposent sur des bases fonctionnellement différentes et légitiment « cognitivement » un classement des problèmes (du point de vue) de l'élève qui séparerait raisonnement et calcul, donnant des indices sur la structure des connaissances.

Ces divers éléments ne prouvent en revanche en aucune façon que les variations normales dans les compétences mathématiques soient d'origine génétique. Une maladie génétique peut toucher une fonction sans que cette fonction soit sous la dépendance des gènes en dehors des cas pathologiques. Pour mesurer la part des

⁴ La situation que nous décrivons est utilisée en neuropsychologie pour montrer que deux fonctions mentales ou cérébrales sont distinctes ; c'est la *méthode de double dissociation*.

compétences mathématiques attribuable aux gènes ou « héritabilité »⁵ il faut se référer à des études de génétique d'un autre ordre.

2.2. Estimation de l'héritabilité dans le modèle ACE⁶

La comorbidité fréquente des différents troubles des apprentissages et les études anciennes montrant l'héritabilité importante des troubles de l'apprentissage de la lecture (Scerri & Schulte-Körne, 2009) ont conduit certains auteurs à reprendre et tester l'hypothèse de Kosci (1974) d'une origine génétique de la dyscalculie et des difficultés mathématiques.

On a pu montrer une certaine agrégation familiale des cas de dyscalculie : la probabilité d'être dyscalculique est près de 10 fois supérieure à la normale si l'on a un frère ou une sœur dyscalculique (Shalev, et al., 2001).

Les recherches utilisant la méthode des jumeaux (où l'on compare des jumeaux monozygotes et dizygotes) tentent pour la plupart de quantifier la part génétique des variations normales ou pathologiques des compétences mathématiques dans le cadre du modèle ACE qui sépare parmi les causes explicatives l'environnement partagé, l'environnement non-partagé, et les causes génétiques (Loehlin & Nichols, 1976).

Certains travaux de ce type se sont concentrés sur les variations normales des compétences mathématiques (Wadsworth, DeFries, Fulker, & Plomin, 1995), et arrivent à la conclusion d'une héritabilité partielle significative du niveau mathématique. La « part de variation » attribuable aux gènes, mesurée par l'héritabilité h^2 , varie considérablement d'une étude à l'autre. Dans un article de synthèse, Olivier et ses collègues (2004) montrent que l'héritabilité des compétences ou difficultés mathématiques rapportée varie de 0,20 à 0,90...

Alarcon et ses collègues (Alarcon, DeFries, Gillis Light, & Pennington, 1997) ont par exemple conduit une des premières recherches expérimentales sur les facteurs génétiques des difficultés mathématiques. Ils ont sélectionné des paires de jumeaux monozygotes et dizygotes dont l'un au moins présente des difficultés mathématiques, ici définies par un QI supérieur à 90 associé à un niveau mathématique inférieur de 1,5 écart type au moins à la moyenne. Ils estiment l'héritabilité à $h^2 = 0,38$ (il s'agit d'une moyenne sur les différents types de difficultés mathématiques considérées).

⁵ L'héritabilité h^2 mesure la part de variation de la variable dépendante (ici le score mathématique) que l'on peut attribuer aux gènes (Falconer & MacKay, 1996).

⁶ Le modèle ACE décompose les sources de variations (de performance mathématique par exemple) en trois sources : gènes Additifs, environnement Commun (ou partagé par la fratrie), Environnement unique (non-partagé).

2.3. Remarques sur l'héritabilité des compétences mathématiques

Il ne fait plus de doute aujourd'hui que des facteurs génétiques influencent les compétences mathématiques du sujet normal, et jouent un rôle dans l'apparition de troubles des apprentissages mathématiques. Il reste que la quantification précise de la part héritable n'est pas encore faite.

Le modèle de base qui sous-tend fréquemment ces études est également discutable à plusieurs égards (Schonemann, 1997). La décomposition ACE suppose en effet par exemple que les trois facteurs environnement non-partagé, environnement commun et génétique sont indépendants et couvrent l'ensemble du spectre. Or, rien n'indique que la ressemblance moins grande des jumeaux dizygotes ne conduit pas les parents à avoir une attitude plus discriminante pour ces jumeaux. Dans le modèle ACE, on suppose qu'entre une paire de jumeaux monozygotes et une paire de jumeaux dizygotes, la seule différence se situe au niveau génétique. Les paires de jumeaux ont une « part » d'environnement commun et partagé indépendante de la zygocité. Or, si l'hypothèse d'une plus grande différenciation parentale était vérifiée, le partage ACE n'est plus valable, et une partie des variations est attribuée à tort aux gènes. Partant, l'héritabilité est surestimée.

Un autre problème peut-être plus important encore réside dans la négligence des corrélations et interactions entre les causes génétiques et environnementales, dont on peut toutefois espérer qu'elles seront abordées par les chercheurs dans un avenir proche, compte tenu de l'essor des études épigénétiques dans d'autres domaines.

3. La recherche des gènes

Au-delà de la vérification de l'existence d'une influence génétique sur les difficultés mathématiques, un ensemble de recherches tentent de déterminer quels sont les gènes, ou du moins les *loci*, impliqués dans ces influences. La méthode des QTL (*quantitative trait loci*) permettant de lier loci et caractères quantifiables continus est particulièrement adaptée à ce type de recherches.

3.1. L'hypothèse des gènes généralistes

Les compétences mathématiques, celles concernant la lecture, et l'intelligence générale *g*, sont fortement liées chez les tout-venants (Hecht, Torgesen, Wagner, & Rashotte, 2001). Suite à cette observation, des auteurs ont cherché dans quelle mesure la part de variation dans les compétences mathématiques attribuable aux gènes était, elle-même, à la fois une explication des variations en mathématiques, en lecture et en intelligence générale. Un ensemble de résultats convergent vers l'idée qu'environ deux tiers des variations de compétences mathématiques explicables par les gènes sont constitués d'influences génétiques affectant également la lecture et le facteur *g* (Kovas, Harlaar, Petrill, & Plomin, 2006).

Une hypothèse naturelle en découle, celle dite des « gènes généralistes » (*generalist genes hypothesis*) selon laquelle il existe un ensemble de gènes impliqués simultanément dans le niveau mathématique en général, et même dans les différents troubles des apprentissages scolaires (Kovas & Plomin, 2006) – pour une critique, voir Ramus & Fisher (2009). Aussi la recherche de gènes impliqués dans les compétences mathématiques s’est-elle surtout orientée vers la détermination de ces « gènes généralistes ». Les variations alléliques de ces gènes⁷ pourraient avoir un effet sur des caractéristiques cognitives générales comme la vitesse de traitement, la mémoire à court terme, ou la capacité attentionnelle dont on sait qu’elles sont liées aux compétences mathématiques.

Dans le cadre de l’hypothèse des gènes généralistes, certaines études abordent au moins indirectement la question de la légitimité d’étudier les influences génétiques dans le cadre du modèle ACE classique. Kovas, Petrill et Plomin (2007) ont par exemple étudié cinq domaines mathématiques (applications des mathématiques, compréhension du nombre, calculs et connaissances, interprétation mathématique, processus non numériques) chez des jumeaux monozygotes et dizygotes de 10 ans. Aucune différence n’est constatée entre les cinq domaines mathématiques considérés. En revanche, il apparaît de manière surprenante que la corrélation entre les performances des jumeaux ne dépend pas significativement du fait que les enfants soit ou non dans la même classe et avec le même enseignant. Lorsque les jumeaux sont dans des classes différentes, ces corrélations sont de 0,57 (monozygotes) et 0,37 (dizygotes). Lorsqu’ils sont dans la même classe, ces corrélations sont respectivement de 0,58 et 0,38. Les auteurs en concluent que l’enseignant et la situation de classe agissent différemment sur des enfants différents, fussent-ils jumeaux. Ceci remet en cause l’hypothèse que, dans le cas de jumeaux partageant la même classe et le même enseignant, l’enseignement doit être classé dans l’environnement partagé...

3.2. Recherche de gènes

Deux publications récentes rapportent un ensemble de SNP (*single nucleotide polymorphism*)⁸ susceptibles de faire partie des gènes « généralistes », et d’avoir un effet sur les apprentissages mathématiques. (Docherty, et al., 2010 ; Docherty, Kovas, Petrill, & Plomin, 2010).

Docherty, Kovas, Petrill, et Plomin (2010) ont par exemple mesuré les compétences mathématiques de 4927 enfants à plusieurs reprises (7, 9, 10 et 12 ans). Une étude génétique portant sur 43 SNP potentiellement impliqués dans les apprentissages a également été menée. 10 de ces SNP ont ensuite été étudiés

⁷ On appelle *allèle* les différentes formes possibles d’un même gène.

⁸ On appelle ainsi une variation génétique portant sur un unique nucléotide.

individuellement. Les résultats confirment pour ces 10 SNP une influence générale sur les apprentissages et fonctions cognitives, avec de légères variations selon les SNP. Parmi les gènes identifiés on trouve le GRIK1, qui code pour un récepteur au glutamate impliqué dans la plasticité cérébrale (Bortolotto, et al., 1999), ou encore le DNAH5, qui a été démontré vital pour le bon développement cérébral (Ibanez-Tallon, et al., 2004).

Les auteurs admettent que, comme souvent dans ce genre d'étude, les effets sont faibles⁹. Il est probable qu'un grand nombre de gènes en interaction jouent un rôle dans les capacités et difficultés d'apprentissage, et l'on ne peut pas espérer trouver « le » gène de l'intelligence mathématique.

Même si une grande partie de l'influence génétique n'affecte pas spécifiquement les mathématiques, il reste qu'on estime qu'un tiers de la variabilité des habiletés mathématiques attribuable aux gènes ne peut s'expliquer que par des facteurs génétiques non partagés avec les autres fonctions cognitives (Kovas, Harlaar, Petrill, & Plomin, 2006). Aucune publication à notre connaissance n'identifie des gènes impliqués dans des habiletés mathématiques *spécifiques*.

3.3. Remarques sur les gènes généralistes (ou non)

L'identification des gènes jouant un rôle dans les apprentissages mathématiques n'a commencé que récemment, et l'on peut espérer dans l'avenir avoir accès à des résultats plus importants en termes d'effet. L'avancé de la science dans le domaine est longue, et seule une infime partie des possibilités a été explorée pour le moment. Le projet *ALLEN brain atlas*¹⁰ mis en place par le *ALLEN institute for brain science* est régulièrement mis à jour, et recense les gènes qui s'expriment dans le cerveau. Selon l'institut ALLEN, 82% des 25 000 gènes humains sont concernés.

L'implication de gènes dont les effets sont en partie connus, comme le GRIK1 ou le DNAH5 est une piste pour explorer les fonctions cognitives sous-jacentes aux compétences mathématiques, et pourrait ainsi – à l'avenir – faciliter l'étude de la structure des compétences mathématiques.

Discussion conclusive

Dans la littérature internationale concernant l'éducation mathématique, la génétique est désormais considérée comme un élément dont il faut tenir compte, même si les implications pratiques sont évidemment extrêmement limitées. Butterworth et Laurillard (2010) l'expriment en disant que la génétique *informe* le

⁹ Les parts de variations expliquées dépassent très rarement 1%. Dans cette étude, l'ensemble des 43 gènes expliquent 0,53% des variations seulement.

¹⁰ Disponible à l'adresse <http://www.brain-map.org/>

didacticien. Sans donner de réponses pratiques directes aux questions didactiques, elle pourrait ainsi fournir un cadre et des indications sur ce qui est possible ou non en termes d'interventions didactiques.

Plus précisément, la génétique permet dans certains cas d'identifier les fonctions cognitives ou de montrer la dissociation de telles fonctions en lien avec les apprentissages mathématiques. Les fonctions cognitives sous-jacentes ont un intérêt pour le didacticien : même si les catégories didactiques ne sont pas les catégories cognitives, les premières doivent prendre en compte les dernières. Un cas désormais classique où la distinction des fonctions cognitives a été investie par la didactique est celui de la perception des nombres. Des travaux de neurosciences ont permis d'identifier une *double* voie de la perception des nombres (une voie symbolique et une voie spatiale approximative), que la didactique a intégrée dans son cadre.

L'idée *a priori* que la génétique ne peut rien apporter à la didactique est, en dehors de l'éloignement réel des problématiques, en partie fondée sur des erreurs concernant la génétique, et notamment l'idée que ce qui est génétique est fixe, insensible aux actions didactiques. Or tel n'est pas le cas, d'une part parce que les influences génétiques s'expriment souvent en interaction avec l'environnement, et d'autres part parce que les influences génétiques, si elles ne sont pas contournables, peuvent conduire à développer des programmes palliatifs.

On a par exemple identifié, au-delà de différences d'intelligence générale d'origine génétique, des variations portant spécifiquement sur la vitesse de traitement (Geus, Wright, Martin, & Boomsma, 2001), ou encore les compétences spatiales ou la mémoire chez des adultes (McClearn, et al., 1997). Ces catégories (mémoire, vitesse de traitement) qui ont une légitimité neuropsychologique et même génétique, forment une base de réflexion pour penser une organisation didactique différenciée.

Un trouble spatial, dont on a vu la réalité génétique, peut être la cause de difficultés numériques chez les enfants. Meljac (2007) cite le cas d'un enfant de primaire qui, éprouvant des difficultés en mathématiques, s'est avéré souffrir d'un tel trouble spatial. L'enfant a pu surmonter en partie ses difficultés en traduisant les problèmes concrets en une version abstraite, autrement dit en privilégiant la voie symbolique, selon l'auteur. Par exemple, un problème additif présenté sous forme imagée peut être traduit en une opération formelle, alors que les enseignants préconisent souvent l'utilisation de schémas et procédures concrètes. Meljac suppose que la multiplication des schémas et images dans les manuels scolaires peut avoir, pour ce type d'enfants, un effet inverse à celui escompté.

Malgré les intérêts que nous venons de mentionner, il reste évident que la génétique n'a pas d'autre vocation à court terme, dans le champ didactique, que

d'étayer une base théorique. On n'envisage pas qu'elle pourrait dicter les pratiques enseignantes dans le détail, et encore moins *remplacer* l'analyse didactique. Au-delà de la limite liée à la différence entre les approches, on a vu que la taille des effets génétiques liés à tel ou tel groupe de gènes particuliers est toujours infime. Les effets génétiques sont en interaction entre eux, et en interaction avec le milieu, ce qui complique encore les choses.

Dans des disciplines comme la médecine ou la psychopathologie, l'étude des interactions gènes-environnement a permis depuis quelques décennies de mieux comprendre l'influence complexe des gènes « en situation ». Les thèmes concernés vont du cancer à la dépression nerveuse, en passant par les maladies neuro-dégénératives ou le trouble bipolaire (e.g. Moffitt, Caspi et Rutter, 2006). On peut imaginer que des études de ce type seront amenées à se développer dans un avenir proche, et permettront d'éclairer l'influence des gènes en ce qui concerne l'éducation mathématiques, en intégrant l'interaction avec le milieu.

L'approche génétique de la cognition mathématique apparaît donc comme une source d'information limitée et théorique, mais néanmoins précieuse pour le didacticien, un domaine où une « veille scientifique » pourrait s'avérer utile à l'avenir, spécialement si des tentatives de quantification de l'interaction gène-environnement sont menées.

Bibliographie

- ALARCON, M., DEFRIES, J. C., GILLIS LIGHT, J., & PENNINGTON, B. F. (1997). A twin study of mathematics disability. *Journal of Learning Disabilities*, **30.6**, 617-624.
- ANTSHEL, K. (2010). ADHD, learning, and academic performance in phenylketonuria. *Molecular Genetics and Metabolism*, **99**, S52–S58.
- APA. (2004). *Mini DSM-IV-TR. Critères diagnostiques*. Paris: Masson.
- BORTOLOTO, Z., CLARKE, V., DELANY, C., PARRY, M., SMOLDERS, I., VIGNES, M., ET AL. (1999). Kainate receptors are involved in synaptic plasticity. *Nature*, **402**, 297-301.
- BROUSSEAU, G. (1980). Les échecs électifs dans l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. *Revue de Laryngologie Otologie Rhinologie*, **101.3-4**, 107-131.
- BRUANDET, M., MOLKO, N., COHEN, L., & DEHAENE, S. (2004). A cognitive characterization of dyscalculia in Turner syndrome. *Neuropsychologia*, **42**, 288-298.
- BRUN, J. (1994). Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques. Dans (Eds. Artigue et alii.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- BUTTERWORTH, B. (1999). *The Mathematical Brain*. London: Macmillan.
- BUTTERWORTH, B. (2003). *Dyscalculia Screener*. London: nferNelson Publishing Company.
- BUTTERWORTH, B. (2008). *State-of-science review : SR-D4*. London: The Government Office for Science.
- BUTTERWORTH, B., & LAURILLARD, D. (2010). Low numeracy and dyscalculia: identification and intervention. *ZDM Mathematics Education*, **42**, 527–539.
- BUTTERWORTH, B., GRANÀ, A., PIAZZA, M., GIRELLI, L., PRICE, C., & SKUSE, D. (1999). Language and the origins of number skills: karyotypic differences in Turner's syndrome. *Brain & Language*, **69**, 486-488.
- DE LANDSHEERE, G. (1992). *Evaluation continue et examens. Précis de docimologie*. (7ème ed.). Bruxelles: Labor.

- DE SMEDT, B., SWILLEN, A., DEVRIENDT, K., FRYNS, J.P., VERSCHAFFEL, L., GHESQUIERE, P. (2006). Mathematical disabilities in young primary school children with velo-cardio-facial syndrome. *Genetic Counseling*, **17**, 259–280.
- DEHAENE, S. (2003). *La bosse des maths*. Paris: Odile Jacob.
- DEHAENE, S., PIAZZA, M., PINEL, P., & COHEN, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, **20**, 487-506.
- DOCHERTY, S., DAVIS, O., KOVAS, Y., MEABURN, E., DALE, P., PETRILL, S., ET AL. (2010). A genome-wide association study identifies multiple loci associated with mathematics ability and disability. *Genes, Brain and Behavior*, **9.2**, 234-247.
- DOCHERTY, S., KOVAS, Y., PETRILL, S., & PLOMIN, R. (2010). Generalist genes analysis of DNA markers associated with mathematical ability and disability reveals shared influence across ages and abilities. *BMC genetics*, **11**, 61-70.
- DUVAL, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, **16.3**, 349-380.
- DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, **10**, 5-53.
- ELIEZ, S., BLASEY, C. M., MENON, V., WHITE, C., SCHMITT, J. E., & REISS, A. L. (2001). Functional brain imaging study of mathematical reasoning abilities in velocardiofacial syndrome (del22q11.2). *Genetics in Medicine*, **3.1**, 49-55.
- ELIEZ, S., SCHMITT, J., WHITE, C., & REISS, A. (2000). Children and adolescents with velocardiofacial syndrome: A volumetric MRI study. *American Journal of Psychiatry*, **157**, 409-415.
- FALCONER, D., & MACKAY, T. (1996). *Introduction to Quantitative Genetics*, 4th Ed. Harlow: Longmans Green.
- FISCHER, J.-P. (2007). Combien y a-t-il d'élèves dyscalculiques ? *ANAE. Approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant*, **93**, 141-148.
- GEARY, D. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, **37.1**, 4-15.
- GELMAN, R., & GALLISTEL, C. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge: Harvard University Press.
- GEUS, E., WRIGHT, M., MARTIN, N., & BOOMSMA, D. (2001). Genetics of brain function and cognition. *Behavior Genetics*, **31.6**, 489-495.

- GRÉGOIRE, J., VAN NIEUWENHOVEN, C., & NOEL, M.-P. (2002). L'évaluation des dyscalculies avec la batterie TEDI-MATH. *Glossa*, **82**, 52-65.
- GROSS-TSUR, V., MANOR, O., & SHALEV, R. (1996). Developmental dyscalculia: Prevalence and demographic features. *Developmental Medicine & Child Neurology*, **38.1**, 25-33.
- HECHT, S., TORGESEN, J., WAGNER, R., & RASHOTTE, C. (2001). The relations between phonological processing abilities and emerging individual differences in mathematical skills: A longitudinal study from second to fifth grades. *Journal of Experimental Child Psychology*, **79**, 192-227.
- IBANEZ-TALLON, I., PAGENSTECHE, A., FLIEGAUF, M., OLBRICH, H., KISPert, A., KETELSEN, U., ET AL. (2004). Dysfunction of axonemal dynein heavy chain Mdnah5 inhibits ependymal flow and reveals a novel mechanism for hydrocephalus formation. *Human Molecular Genetics*, **13**, 2133-2141.
- INSERM. (2007). *Expertise collective : Dyslexie, dysorthographe, dyscalculie, bilan des données scientifiques*. Paris: Les Editions de l'INSERM.
- KELLY, A. (2011). Can cognitive neuroscience ground a science of learning? *Educational philosophy and theory*, **43.1**, 17-23.
- KOSC, L. (1974). Developmental dyscalculia. *Journal of Learning Disabilities*, **7**, 46-59.
- KOVAS, Y., PETRILL, S.A. & PLOMIN, R. (2007). The origins of diverse domains of mathematics: Generalist genes but specialist environments, **99.1**, 128-139.
- KOVAS, Y., & PLOMIN, R. (2006). Generalist Genes: Implications for Cognitive Sciences. *Trends in Cognitive Sciences*, **10.5**, 198-203.
- KOVAS, Y., HARLAAR, N., PETRILL, S., & PLOMIN, R. (2006). 'Generalist genes' and mathematics in 7-year-old twins. *Intelligence*, **35**, 473-489.
- LEWIS, C., HITCH, G., & WALKER, P. (1994). The prevalence of specific arithmetic difficulties and specific reading difficulties in 9- and 10-year-old boys and girls. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, **35**, 283-292.
- LOEHLIN, J., & NICHOLS, R. (1976). *Heredity, environment, and personality: A study of 850 sets of twins*. Austin: University of Texas Press.
- MCCLEARN, G., JOHANSSON, B., BERG, S., PEDERSON, N., AHERN, F., PETRILL, A., ET AL. (1997). Substantial genetic influence on cognitive abilities in twins 80 or more years old. *Science*, **276**, 1560-1563.

- MELJAC, C. (2007). Les troubles du calcul et leur remédiation. Dans (Eds Ionescu, & Blanchet), *Psychologie du développement et de l'éducation* (pp. 309-326). Paris: PUF.
- MELJAC, C., & LEMMEL, G. (1999). De l'UDN 80 à l'UDN II : questions de méthode. *European review of applied psychology*, **49.4**, 287-294.
- MICHEAUX, S., & MURAT, F. (2006). Les compétences à l'écrit, en calcul et en compréhension orale selon l'âge. *Données sociales - La société française*, 195-202.
- MOFFITT, T.E., CASPI, A., & RUTTER, M. (2006). Mesured gene-environment interactions in psychopathology. *Perspective on Psychological Science*, **1.1**, 5-27.
- MURPHY, M. (2009). A review of mathematical learning disabilities in children with fragile X syndrome. *Developmental disabilities research review*, **15.1**, 21-27.
- OGAWA, A., YAMAZAKI, Y., UENO, K., CHENG, K., & IRIKI, A. (2010). Neural correlates of species-typical illogical cognitive bias in human inference. *Journal of Cognitive Neuroscience*, **22.9**, 2120-2130.
- OLIVER, B., HARLAAR, N., HAYIOU-THOMAS, M., KOVAS, Y., WALKER, S., & S.A., P. (2004). A twin study of teacher-reported mathematics performance and low performance in 7-year-olds. *Journal of Educational Psychology*, **96.3**, 504-517.
- OSTAD, S. (1999). Developmental progression of subtraction studies: a comparison of mathematically normal and mathematically disabled children. *European Journal of Special Needs Education*, **14.1**, 21-36.
- PATERSON, S., GIRELLI, L., BUTTERWORTH, B., & KARMILOFF-SMITH, A. (2006). Are numerical impairments syndrome specific? Evidence from Williams syndrome and Down's syndrome. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, **47.2**, 190-204.
- RAMUS, F., & FISHER, E. (2009). Genetics of language. Dans (Ed. Gazzaniga), *The Cognitive Neurosciences IV* (pp. 855-871). Cambridge: MIT Press.
- RODITI, E. (2005). L'éducation face aux théories de la construction du nombre chez l'enfant. *Spirale*, **36**, 37-52.
- ROUX, M.-O. (2009). À propos de la dyscalculie spatiale : une contribution clinique. *La Psychiatrie de l'Enfant*, **52.2**, 495-505.
- SCERRI, T., & SCHULTE-KÖRNE, G. (2009). Genetics of developmental dyslexia. *European Child and Adolescent Psychiatry*, **19.3**, 179-197.
- SCHONEMANN, P. (1997). Models and muddles of heritability. *Genetica*, **99**, 97-108.

SHALEV, R. S., MANOR, O., BATSHEVA, K., AYALI, M., BADICHI, N., FRIEDLANDER, Y., ET AL. (2001). Developmental dyscalculia is a familial learning disability. *Journal of Learning Disabilities*, **34.1**, 59-65.

SHPRINTZEN, R. (2000). Velo-Cardio-Facial syndrome: A distinctive behavioral phenotype. *Mental Retardation and Developmental Disabilities Research Reviews*, **6**, 142-147.

SOTO-ANDRADE, J. (2006). Un monde dans un grain de sable : Métaphores et analogies dans l'apprentissage des mathématiques. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, **11**, 123-147.

VON ASTER, M., & SHALEV, R. (2007). Number development and developmental dyscalculia. *Developmental Medicine and Child Neurology*, **49.11**, 868-873.

VOSS, J., & PALLER, K. (2010). Real-time neural signals of perceptual priming with unfamiliar geometric shapes. *Journal of Neuroscience*, **30**, 9181-9188.

WADSWORTH, S., DEFRIES, J., FULKER, D., & PLOMIN, R. (1995). Cognitive ability and academic achievement in the Colorado Adoption Project: A multivariate genetic analysis of parent-offspring and sibling data. *Behavior Genetics*, **25**, 1-15.

NICOLAS GAUVRIT
LDAR, Paris VII
ngauvrit@orange.fr

ERIC MOUNIER

DES MODÈLES POUR LES NUMÉRATIONS ORALES INDO-
EUROPÉENNES A USAGE DIDACTIQUE
APPLICATION À LA NUMÉRATION PARLÉE EN FRANCE

Abstract. Models for oral Indo-European numbering with an educational purpose, application to spoken numeration in France

Young pupils often perceive the notion of number when using oral numeration. It allows solving various problems such as counting a collection of objects. Learning and considering increasing size of numbers generate an evolution of the methods in use. The syntax of particular numbering provides specific resources. There are similarities between Indo-European oral numerations but also differences in the perception of the logic of their syntax. It is possible to find arithmetic or ordinal principles. By offering a priori models, this article aims to provide an analytical framework to take into account certain characteristics of the constitution of the signs that make up an oral Indo-European numbering. We indicate the place of analysis in earlier finding, explain the link to learning, present the methodology and finally present obtained results: proposals of theoretical models for the mathematical principles of an Indo-European numbering and then their use in interpreting the numeration in France. Its purpose is to provide elements for educational studies on both learning and teaching numbers.

Résumé. Les jeunes élèves découvrent souvent la notion de nombre en utilisant une numération orale. Elle permet de résoudre des problèmes divers comme des dénombrements de collection d'objets. Les procédures employées évoluent au gré des apprentissages et des nombres en jeu. Elles sont susceptibles d'utiliser des ressources propres à la syntaxe de telle ou telle numération. Il existe des ressemblances entre les numérations orales indo-européennes mais aussi des perceptions différentes de la logique de leur syntaxe. Il est possible d'y trouver des principes arithmétiques ou ordinaux. En proposant des modèles *a priori*, cet article a pour but de fournir un cadre d'analyse pour prendre en compte certaines caractéristiques de la constitution des signes qui composent une numération orale indo-européenne. L'article indique la place de l'analyse dans les résultats antérieurs, expose le lien avec l'apprentissage, présente la méthodologie et donne les résultats obtenus : des propositions de modèles théoriques pour les principes mathématiques d'une numération indo-européenne puis leur utilisation pour interpréter la numération parlée en France. Sa finalité est de fournir des éléments pour mener des études didactiques sur le nombre concernant à la fois l'apprentissage et l'enseignement.

Mots-clés. Numération, signes, interprétation, nombre, modèles, modélisation.

Introduction

Dans cet article, une numération est un système de signes qui permet de désigner les nombres entiers naturels. Nous précisons cette définition au fur et à mesure de

l'article. Cependant, nous n'utilisons jamais l'expression « la » numération car une numération est pour nous toujours un système particulier de signes. Il en existe de nombreuses, elles peuvent être orales (auxquelles correspondent des mots d'une langue) ou écrites. Avec l'intention d'étudier celle parlée en France, nous nous centrons sur les numérations orales indo-européennes qui composent une famille ayant des origines communes (Guitel, 1975, Ifrah, 1994). Des apports complémentaires peuvent être consultés dans la thèse « *Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes* » (Mounier, 2010), dont nous reformulons ici certains résultats.

Cet article traite des relations entre les mathématiques et des systèmes de numération orale. Certains moyens théoriques nous semblaient manquer pour cette étude. En nous référant à des analyses antérieures et en précisant la notion de modélisation, nous définissons trois modèles théoriques de numération susceptibles de pallier ce manque : le premier ordinal, le deuxième arithmétique additif, le dernier arithmétique multiplicatif. Nous souhaitons montrer qu'il est difficile de trancher *a priori* entre des principes ordinaux et/ou arithmétiques. Ce résultat aide à comprendre comment les numérations peuvent être utilisées par les élèves. Ces liens entre les résultats de notre étude et l'apprentissage ou/et l'enseignement ne sont pas traités dans l'article, ils sont cependant évoqués dans une discussion précédant la conclusion.

Dans un premier paragraphe nous replaçons l'étude parmi les travaux antérieurs et faisons le lien avec l'apprentissage puis nous y exposons la méthodologie générale et les outils théoriques qui ont permis d'étudier les questions. Ce sont des modèles *a priori* de principes mathématiques de numération qui sont présentés dans le deuxième paragraphe. Ils permettent de trouver une logique *a posteriori* à la syntaxe des numérations indo-européennes. Le troisième paragraphe est une analyse de la numération parlée en France à l'aide de ces modèles ainsi que d'une discussion sur les raisons et la nature des différents choix menant aux modélisations exposées. La conclusion et la discussion qui la précède portent principalement sur les intérêts didactiques d'une telle étude et ses prolongements possibles.

Pour étayer notre propos, nous allons nous référer à plusieurs numérations : il s'agit des numérations orales en français (de France, de Belgique et de Suisse), en anglais, en allemand et en thaïlandais. Elles sont décrites en annexe. Dans l'article, les nombres sont parfois indiqués par leur écriture chiffrée. C'est essentiellement pour des raisons de lisibilité.

1. Une étude à usage didactique

Pourquoi et comment étudier les signes d'une numération orale ?

1.1. Le lien avec les élèves

Donnons en exemple la tâche consistant à indiquer le cardinal d'une collection d'objets manipulables par sa désignation orale dans la numération parlée en France. Plusieurs procédures peuvent être utilisées par les élèves. En voici trois qui mènent à une réponse exacte (nous prenons l'exemple de « quarante-deux » objets à dénombrer) :

- un comptage de un en un, « un, deux, trois, ..., trente-neuf, quarante, quarante-et-un, quarante-deux »,
- une prise en compte du nombre de dizaines (chacune obtenue à l'aide d'un comptage de un en un, « un, deux, ..., dix ») par « dix, vingt, trente, quarante », puis le comptage des unités restantes « quarante-et-un, quarante-deux »,
- une prise en compte du nombre de dizaines (obtenues à l'aide d'un comptage) par « un, deux, trois, quatre » et un comptage d'unités restantes « un, deux ».

En se centrant uniquement sur certains aspects du système de numération, et en particulier au-delà des connaissances liées à l'énumération et à l'emploi de la comptine numérique, Briand (1999), Bideaud, Lehalle et Vilette (2004), la deuxième procédure semble utiliser une double structuration de la comptine numérique, celle des dizaines (les mots, « dix », « vingt », « trente », « quarante ».), celle des unités (les mots, « un », « deux »). La première procédure semble prendre en compte une structuration simple de la comptine, dans le sens où les mots sont énoncés au fur et à mesure des objets considérés (un à un), sans que des relations entre ces mots ne semblent employées. Cette structuration simple est aussi utilisée dans les autres procédures pour obtenir des dizaines. La troisième permet de considérer le nombre de dizaines à l'aide de la comptine numérique déjà utilisée pour les unités. « Quatre (dizaines) » est ensuite à relier au mot « quarante ». Ainsi, des procédures relatives à des tâches (ici de dénombrement) peuvent être analysées au regard des mots (et des actions) qui sont employées simultanément. Le système de numération utilisé favorise l'emploi de certaines d'entre elles. Par exemple, en thaïlandais, la dernière procédure demande moins d'étapes qu'en français, puisqu'à « quarante-deux » correspond « sii sip seeaung », littéralement « quatre dix deux ». Nous faisons en outre l'hypothèse, usuelle en didactique des mathématiques, que l'activité des élèves en résolution de problème sous-tend l'utilisation de propriétés mathématiques. Nous pensons en particulier aux notions de concepts-en-acte et de théorèmes-en-acte développées par Vergnaud (1991). Ainsi, une procédure utilisée couramment par un élève, qu'il sait pouvoir mobiliser dans certaines tâches et dont il va pouvoir appréhender la limite dans d'autres (comme par exemple compter de un en un pour de grandes collections), peut être analysée à l'aune de propriétés mathématiques utilisées en acte. Un système de numération rend plus ou moins accessibles certaines procédures.

Comprendre sa logique de constitution permet ainsi de faire une analyse *a priori* des propriétés en actes envisageables.

C'est la logique de la syntaxe des numérations orales que nous étudions. Nous plaçons notre travail dans la lignée de ce qu'indique Artigue (1991) sur les liens entre épistémologie et didactique. De manière plus précise, nous considérons qu'une numération ne fait pas que désigner un nombre mais la « façon » dont elle le désigne, le système que constitue une numération, met en exergue des propriétés différentes du nombre. Ce point de vue est congruent avec celui de la sémiotique peircéenne que nous développons par la suite. C'est donc à partir d'une étude de la logique des signes de la numération parlée en France que nous voulons faire le lien avec les mathématiques, afin d'aider à comprendre la conceptualisation du nombre.

1.2. La place de l'étude dans les recherches antérieures

Depuis longtemps les recherches s'intéressant à l'enseignement étudient le système de numération oral enseigné aux élèves de tel ou tel pays. Pour la langue française ou anglaise, citons Bednarz et Janvier (1982), De Blois (1996), Fuson et al. (1997), Fischer (1990), Brissiaud (2001), ou encore Chambris (2008). Bideaud, Lehalle et Vilette (2004) font une synthèse plus générale sur l'approche du nombre par les enfants, synthèse qui aborde les liens entre nombre et numération orale. Cette dernière est utilisée en tant que comptine numérique pour les « petits » nombres, ceux fréquentés par des jeunes enfants. Signalons du côté historique Guitel (1975) et Ifrah (1994) qui catégorisent les numérations orales en analysant *a posteriori* leur structure et indiquent leur genèse. Certains de ces auteurs, et en particulier ces derniers, mettent en exergue une structure arithmétique sous-jacente pour rendre compte de la constitution des noms des nombres : « quarante-deux » vu comme « quarante plus deux » ou « quatre fois dix plus deux ». La structure ordinale est essentiellement envisagée pour les premiers nombres, en référence à la comptine numérique, déjà constitutive des premières numérations utilisées par les hommes. Cependant, à notre connaissance, il n'existe pas d'étude permettant de comprendre dans un même cadre ces différents aspects de la numération. Par exemple, la numération parlée en France est le plus souvent catégorisée comme ordinale pour les premiers nombres puis arithmétique ensuite. Pour certains nombres, cette distinction n'est cependant pas évidente. On peut penser aux noms des nombres de 11 à 16 en français onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, ou même plus spécifiquement à ceux de 11 et 12 dans beaucoup de pays, qui se disent successivement en français, anglais, allemand et thaïlandais onze/eleven/elf/sip-et (« sip » pour 10, mais « et » ne signifie pas 1) et douze/twelve/zwölf/sip seeaung (seeaung signifie 2). Y retrouve-t-on « dix plus un », « dix plus deux » ? On peut encore citer d'autres noms de nombres comme « vingt-et-un » en français ou « yii-siip-et » en thaïlandais : en quoi peut-on y reconnaître « vingt plus un » plutôt que « deux fois dix plus un » ou encore « un après vingt » ? Répondre à ce type de

question est un des objectifs poursuivis. Dans l'étude qui suit, certains aspects ont déjà été abordés dans les recherches antérieures, mais elles le sont ici dans un cadre nouveau. Les notions développées permettent en particulier de considérer d'un œil différent la deuxième procédure indiquée dans le paragraphe précédent : « quarante-deux » pouvant être analysé comme « deux après quarante » et non comme « quarante plus deux ».

Comme nous exposons une étude qui peut être un préalable à des recherches didactiques, son objet n'est pas de répondre directement à la question sur le rapport entre procédures, nombre(s) et numération(s), mais son objectif est d'y contribuer. Ainsi, nous considérons que cette analyse peut aider à la compréhension de l'apprentissage et de l'enseignement, spécifiquement via l'étude du rôle que peuvent jouer les problèmes mettant en jeu les quantités, même si ceux-ci ne sont pas étudiés ici. Le lecteur peut néanmoins avoir à l'esprit des problèmes de dénombrement de collections (manipulables ou figurées) et de comparaison de cardinaux, ils ont effectivement motivé la recherche.

1.3. Problématique, choix théoriques et méthodologie

1.3.1. Des questions posées par la formation du nom des nombres

Le procédé de concaténation consiste à accoler plusieurs noms de nombres pour en former un nouveau. Dans certaines numérations, en particulier les numérations indo-européennes, certains noms de nombres se retrouvent dans d'autres (cf. annexe). Ces différentes formations permettent d'envisager des relations entre certains nombres. En français, « vingt » est concaténé avec « un », « deux », ..., « neuf » pour former « vingt-et-un », « vingt-deux », etc., et on retrouve cette suite concaténée aussi à d'autres noms comme « trente », « quarante ». Le cas est similaire en anglais ou en allemand, alors qu'en thaïlandais apparaît une autre régularité avec des concaténations manifestes pour 30, 40, ..., 90, « saam sip », « sii sip » ..., « gaao sip ». Ainsi, une numération engage à structurer les nombres entiers, à « comprendre » le nombre. La logique mathématique de la syntaxe n'est cependant pas donnée *a priori*. En effet, la numération ne s'est pas constituée à partir de principes mathématiques. Nous reprenons l'assertion de Crump (1990) selon laquelle certains principes mathématiques ont rendu possibles les numérations (c'est-à-dire opérationnelles), mais ils ont été éprouvés et utilisés d'une manière pragmatique, expérimentale et culturelle. Par exemple, la décomposition dite polynomiale du nombre (c'est-à-dire selon les puissances de dix) n'a pas servi de fondement pour constituer une numération indo-européenne, ce qui ne veut pas dire que cette décomposition ne puisse être un candidat pour rendre compte de la logique de la formation des noms des nombres. **Il s'agit donc de rendre compte de la logique de la syntaxe, *a posteriori*** à l'aide de ce que nous nommons les principes mathématiques. Quel est le lien entre ces principes et les noms des nombres d'une numération ?

Plusieurs questions se posent. Tout d'abord, la décomposition dite polynomiale n'est pas le seul principe envisageable, d'ailleurs une numération n'est pas nécessairement analysable à l'aune d'un seul principe. En effet, deux grandes catégories se dégagent des recherches antérieures : des principes d'essence arithmétique et des principes d'essence ordinale. Pourquoi choisir les uns, pourquoi les autres ? En outre, comme il est possible d'envisager des principes différents pour un même champ numérique, quelle est la variabilité suivant le champ numérique ? Il s'agit aussi d'aborder la « distance » entre des principes et les signes d'une numération, par exemple celle entre la décomposition $4 \times 10 + 2$ et l'expression en français « quarante-deux », puisqu'il est possible d'envisager d'autres noms de nombre à partir de $4 \times 10 + 2$, comme « deux-quarante » ou encore « quatre-dix-deux ». On rencontre d'ailleurs ce type de choix en allemand « zwei und vierzig » et en thaïlandais « sii sip seeaung » (littéralement : quatre dix deux).

1.3.2. Les emprunts sémiotiques

Nous considérons les numérations orales dans leur aspect « système sémiotique » comme un langage qui permet d'apprendre sur le nombre, en apprenant ce langage. C'est pourquoi nous utilisons l'expression « numération parlée ». Ceci nous permet de prendre en compte une logique à travers l'étude des signes qui la composent et de l'envisager sans postuler *a priori* une structure mathématique sous-jacente. Du côté sémiotique, il est nécessaire de définir le signe. Ce terme « signe » a été utilisé jusqu'à présent dans un sens courant, de ce qui est à entendre (une expression orale). Ces « signes » sont reliés aux nombres entiers. Il y a donc à distinguer la matérialité du signe et ce qu'il désigne, ici le nombre. En outre, ces signes ne sont pas indépendants les uns des autres. Les règles qui permettent de rendre compte de l'organisation de ces signes constituent la syntaxe, mais pour que l'ensemble des signes fasse une numération, ces règles ne sont pas indépendantes de la nature des « objets » qu'ils désignent, les nombres. Ainsi trois aspects du signe se dégagent : la matérialité du signe, le nombre qu'il désigne, les règles syntaxiques qui permettent à un ensemble de signes d'être une numération. Cependant, la définition mathématique du nombre est plurielle (l'axiomatique de Peano, la théorie des ensembles) et « large » (y entend-on aussi une structure arithmétique et un ordre ?). Qui plus est, la distinction entre nombre et numération (orale ou écrite) n'est pas une évidence, même au niveau des mathématiciens, l'avènement tardif de ces définitions l'atteste. Ces arguments, ajoutés à l'hypothèse que la connaissance du nombre se développe (entre autre) via la manipulation des « signes », expliquent en quoi la sémiotique de Peirce est un cadre adapté pour mener l'analyse.

Peirce (1906) envisage en effet un signe comme une triade : un representamen (écrit ou oral) qui dénote un objet grâce à un interprétant. Dans l'étude menée, nous considérons que l'objet dénoté est le nombre, les representamens étant l'aspect matériel du signe, les sons désignant les nombres en français (qui sont transcrits en

mots), et l'interprétant étant à chercher du côté de la logique de la syntaxe du système de numération. Ici nous entendons la syntaxe comme des règles linguistiques qui rendent compte de certaines régularités (ou non) dans la formation des representamens et qui permettent de relier les representamens aux nombres qu'ils dénotent. Le jeu de relations dans la triade est un moyen d'accéder à des informations sur l'objet « nombre », tel qu'il est donné à voir par les signes. La définition mathématique du nombre n'est donc pas ici un *a priori*, mais elle permet de comprendre ce qui est éclairé ou non par les signes. Nous n'avons pas fait appel à la complexité de la sémiotique de Peirce, mais reste sous-jacent le fait que l'objet est déterminé par les sémioses qui se développent à son propos (Conne 2008), c'est-à-dire, pour nous, le flux des relations entre les interprétants et les representamens et celui des relations avec les autres signes.

1.3.3. Plan d'étude

Nous nommons modèle de principes mathématiques (d'une numération), une structure d'essence mathématique qui peut rendre compte de la logique de la syntaxe d'une numération. Par exemple, en français, la logique de composition des noms des nombres « vingt » à « vingt-neuf », par concaténation des mots « un », ..., « neuf », avec le « vingt » peut être trouvée dans la décomposition additive mettant en exergue le nombre désigné par « vingt ». On retrouve cette possibilité en anglais, allemand et thaïlandais. Comme nous l'avons déjà signalé, cette logique n'est pas la seule envisageable (on peut penser à des principes arithmétiques multiplicatifs comme la décomposition dite polynomiale en base dix, ou encore à des principes ordinaux), un de nos objectifs est d'en considérer un large éventail.

Nous élaborons tout d'abord des modèles de principes mathématiques en reconsidérant les travaux antérieurs. Puis nous utilisons ces derniers pour proposer des modélisations de la numération parlée en France. Il s'agit non seulement d'adopter des modèles mais aussi de discuter de leur pertinence pour rendre compte de la logique de la syntaxe. Les résultats de ce travail sont qualifiés d'interprétation pour signaler les emprunts à la sémiotique de Peirce, mais aussi pour montrer qu'ils ont été obtenus par une méthode spécifique à notre recherche.

2. Des modèles de principes mathématiques pour les numérations orales indo-européennes

2.1. Quels modèles ?

2.1.1. Les critères retenus

Nous avons indiqué que ces modèles de principes mathématiques (pour les numérations orales) servent à rendre compte *a posteriori* de la logique de leur syntaxe. Nous les définissons dans le cadre de ce travail, mais, par ailleurs, de nombreuses études ont déjà été menées. Deux questions méthodologiques se

posent. Où chercher (l'idée de) ces modèles ? Quels critères retenir pour leur définition ? Un de nos premiers critères porte sur la potentialité des modèles à analyser les numérations indo-européennes. En outre, nous avons déjà mis en évidence que plusieurs principes mathématiques candidats (arithmétiques, ordinaux) semblent plus ou moins adaptés (en première analyse) selon le champ numérique. Les modèles retenus doivent rendre compte de la complexité interne via la possibilité de tester la pertinence de plusieurs modèles différents pour une même numération (indo-européenne) selon les nombres en jeu. Le dernier critère concerne la potentialité des principes à être des principes d'une numération. Tout d'abord, du fait qu'elle est attestée pour les numérations indo-européennes, nous incluons dans le modèle la règle linguistique de concaténation. Par exemple, à partir d'une décomposition additive du nombre x en $a+b$, le nom du nombre peut être obtenu par concaténation (des representamens), l'un pour désigner le nombre a , l'autre b . En adoptant la convention qu'un representamen d'un nombre n est signalé par l'italique n , on obtient donc « $a\ b$ » ou « $b\ a$ » comme representamen de x . Par ailleurs, il ne suffit pas de postuler des principes généraux pour obtenir des principes candidats à un modèle de numération. Par exemple, tout nombre peut se décomposer de manière additive, mais quelle décomposition retenir ? Par exemple, $a+b=c+d$ mène à quatre representamens différents de cette somme, « ab » ou « ba », mais aussi « cd » ou « dc », la numération serait alors redondante. Nous retenons pour nos modèles de principes mathématiques le fait qu'une numération établit une bijection entre un ensemble de representamens et celui des entiers naturels non nuls. Elle doit donc être non-redondante (deux representamens différents ne peuvent désigner un même nombre), mais aussi non ambiguë (un même representamen ne peut désigner deux nombres différents) et exhaustive (tous les nombres entiers peuvent y être désignés, *a minima* tous les nombres entiers inférieurs à une certaine borne). Le travail présenté considère l'ensemble de ces contraintes afin de délimiter des modèles théoriques de principes pouvant rendre compte de la logique de la syntaxe des numérations orales indo-européennes.

2.1.2. Des modèles à la modélisation

Les modèles peuvent servir à modéliser différentes numérations orales qui sont constituées de différents representamens. La mise en signes désigne le passage des principes mathématiques aux representamens. Pour qu'il soit un outil d'analyse pertinent pour une numération orale indo-européenne, nous incluons une partie de la mise en signes dans le modèle, la concaténation. Pour modéliser une numération existante, un premier type de choix concerne les paramètres à fixer dans les modèles. Ils constituent la première partie de l'interprétant, comme par exemple, dans un modèle arithmétique additif, considérer que dix est un appui additif ou non. Un deuxième type de choix pour la mise en signes concerne les representamens : les mots propres à une langue (les mots « quarante » ou « deux »

en français ; les mots « vierzig » ou « zwei » en allemand) et l'ordre des mots dans les différentes formations des noms (« quarante-deux » en français ; « zwei und vierzig » en allemand). Ces choix constituent ce que nous avons nommé la deuxième partie de l'interprétant.

2.1.3. Les modèles de numération issus des travaux de Cauty

Nous avons choisi d'élaborer des modèles à partir des travaux de Cauty (1984, 1986, 1988) concernant les numérations orales. A partir de considérations linguistiques, il y distingue en effet, avec un certain niveau de généralité, les deux grands types de numérations orales que l'on rencontre dans la littérature, les numérations « ordinales » et les numérations « arithmétiques ». Nous les reprenons avec la terminologie qui nous est propre. Le premier permet de saisir les nombres grâce à des propriétés de la structure d'ordre des entiers naturels et ne fait pas appel aux opérations arithmétiques. Le principe de construction de ces numérations consiste à établir une suite ordonnée de representamens qui vont servir comme representamens de la suite des nombres entiers. Le second, le type arithmétique, permet de rendre compte de l'existence des composés arithmétiques par addition, multiplication ou élévation à une puissance. Cauty a constitué ses modèles généraux à partir de l'analyse de numérations existantes et de travaux antérieurs. Pour autant, une numération est qualifiée d'ordinaire ou d'arithmétique lorsqu'on la modélise ainsi, et ce travail se fait *a posteriori* : aucune numération n'a été construite à partir de principes mathématiques tels qu'ils sont exposés dans les modèles. Ainsi, les expressions « numération ordinaire » et « numération arithmétique » désignent des types de modèle obtenus à l'aide d'une méthodologie propre à Cauty.

Dans ce qui suit, nous présentons les trois modèles de principes mathématiques élaborés : un ordinal dans le sous-paragraphe 2.2, deux arithmétiques dans les deux sous-paragraphe 2.3.1 et 2.3.2. Ces modèles sont utilisés dans le paragraphe 3 pour analyser la numération parlée en France. . Rappelons que dans ces définitions l'italique *n* indique le representamen d'un nombre *n*.

2.2. Le modèle de numération ordinaire

Pour définir une numération ordinaire, Cauty introduit la notion de repérant et de comptine. Cette dernière est : « *une liste (conventionnelle ou idiosyncrasique, parlée, écrite ou mimée) ayant la propriété que tous les items de la liste apparaissent dans un ordre strict et immuable* ». En le traduisant dans notre cadre théorique, un repérant est alors un type de representamen qui sert à interpréter une numération dans une vision ordinaire. Il ne peut être défini indépendamment d'un autre type de representamen, les comptants. Une suite de comptants est une suite de representamens qui sert comme comptine pour désigner les nombres entre deux repérants. En français, cela pourrait être les representamens des 9 premiers

nombres, « un », « deux », ..., « huit », « neuf ». Cela pourrait être leurs homologues en anglais, allemand ou thaïlandais. Le principe général d'une numération ordinale avec repérants est de permettre à la numération de rendre compte de la succession des nombres entre deux repérants, ceci grâce aux comptants. Ainsi, deux repérants ne désignent pas deux nombres successifs, ils sont des éléments d'une graduation non unitaire. Par exemple les français « vingt » et « trente », les anglais « twenty » et « thirty », les allemands « zwanzig » et « dreizig », les thaïlandais « yii-sip » et « saam sip » pourraient être considérés comme repérants. En effet, le premier peut indiquer un nombre atteint après les comptants en français « un » à « dix-neuf », ou deux fois « un » à « neuf » si on considère « dix » comme un repérant. Ils n'ont pas de lien explicite avec leur prédécesseur et par exemple « vingt-quatre » (« twenty four »/ « vier und zwanzig », « yii-sip sii ») peut être compris comme le quatrième après vingt. Le cas des representamens des nombres de 11 à 16 en français met en évidence le type d'analyse et les choix à faire pour qualifier une numération d'ordinale. En outre Cauty indique que deux principes peuvent être convoqués pour désigner un nombre à partir d'un repérant : un principe de postériorité, « neuf après le repérant vingt », ou un principe d'antériorité, « un avant le repérant trente ». Ce dernier ne semble pas adapté à la syntaxe des quatre numérations que nous avons prises en exemple, cependant notons que le latin « undetriginta » qui désigne 29, pourrait se comprendre comme « un » avant « triginta », en français « un » avant « trente ».

Nous présentons maintenant le modèle sous sa forme épurée. Nous avons décidé de présenter un seul modèle ordinal, celui avec repérants car il semble un candidat pertinent pour modéliser les numérations indo-européennes. Le modèle sans repérant peut y être inclus, en considérant que la suite des representamens est composée uniquement de comptants. Par ailleurs nous présentons un modèle incluant un principe de postériorité, « neuf après vingt » plutôt que « un avant trente ». Le modèle avec principe d'antériorité peut se concevoir sans difficulté. Il reste toujours possible d'envisager un modèle mixte, qui serait par exemple plus pertinent pour modéliser la numération parlée en latin.

Modèle de principes d'une numération ordinale (avec repérants)

Considérons la numération parlée en France. Parmi d'autres possibles, on pourrait envisager le choix de la suite de repérants, « vingt », « trente », « quarante » et « cinquante », avec pour première suite de comptants, les representamens « un », « deux », ... « dix-huit », « dix-neuf », puis, entre chaque couple de repérants, les comptants « un », « deux », ..., « neuf ». Cette suite pourrait être celle des A_n dans la définition qui suit.

Soit la suite (A_n) , n entier strictement positif, de representamens nommés repérants qui désignent une suite strictement croissante de nombres entiers naturels A_n , telle que $A_1 > 1$ et $A_{n+1} - A_n > 1$.

A chaque A_n on associe une suite finie de representamens $s_j(n)$, $j > 0$, nommés comptants. Pour tout n strictement positif, la concaténation $A_n s_j(n)$ (ou bien la concaténation $s_j(n) A_n$) peut désigner le $j^{\text{ième}}$ successeur de A_n .

En outre, on définit une suite de representamens $s_j(0)$, $0 < j < A_1$ dont les termes désignent les entiers naturels de 1 à $A_1 - 1$.

En reprenant l'exemple précédent, on aurait « vingt » pour A_1 le premier repérant, « trente » pour A_2 , « quarante » pour A_3 , « cinquante » pour A_4 . Et $s_j(0)$ serait la suite des representamens « un », « deux », ... « dix-huit », « dix-neuf », puis, de manière spécifique à cet exemple, pour $0 < n < 5$, $s_j(n)$ serait la même suite de comptants « un », « deux », ... « neuf ».

Ces règles permettent de définir un système non redondant, deux representamens différents ne pouvant désigner le même nombre. Cependant, pour une numération exhaustive et non ambiguë, on impose deux autres règles.

Pour que la numération soit exhaustive, il ne faut pas de « trous » entre deux repérants, d'où :

(a) Pour tout $n > 0$, la suite de comptants $s_j(n)$ permet de désigner tous les entiers de l'intervalle $[[1 ; A_{n+1} - A_n - 1]]$.

Pour une numération non ambiguë, un representamen ne doit désigner qu'un seul nombre, d'où :

(b) Les representamens A_n des nombres A_n ainsi que les representamens $s_j(0)$ sont distincts deux à deux (et définis de manière conventionnelle), c'est aussi le cas, pour tout n positif, des representamens $s_j(n)$.

Nous ajoutons une troisième règle dans le choix des comptants.

(c) Les comptants relatifs à un repérant sont des representamens introduits avant celui-ci, c'est-à-dire que, pour tout $n > 0$, $s_j(n) < A_n$. En outre ces comptants sont constitués d'une suite finie de representamens qui désignent des nombres qui se succèdent (immédiatement) dans l'ensemble des entiers naturels. Par exemple, cela ne peut être une suite aléatoire comme « trois », « douze », ...

Cette dernière règle n'est pas nécessaire *a priori*. Cependant, les numérations que nous avons rencontrées, semblent la suivre : les concaténations avec un repérant mettent toujours en jeu un representamen déjà rencontré avant ce repérant, et leur

ordre reprend celui des nombres qu'ils désignent. Par exemple, lorsque « quarante » est introduit, la concaténation « quarante (et) un » reprend « un » déjà rencontré (on n'introduit pas un autre representamen), puis les comptants suivants sont dans l'ordre « deux », « trois », etc., jusqu'au prochain repérant. Il existe des exceptions, comme le « et » thaïlandais (et non « neung ») qui est présent après chaque dizaine, à l'inverse de la règle constatée pour les noms suivants.

Cet ensemble, l'encadré et les trois règles, constitue les principes qui définissent notre modèle de numération ordinale avec repérants (et principe de postériorité).

La remarque suivante permet de mieux se rendre compte de la variété des numérations que le modèle peut engendrer (et donc son potentiel modélisant).

(α) Pour tout $n > 0$, $A_{n+1} - A_n \leq A_n$, c'est-à-dire que $A_{n+1} \leq 2 A_n$

Cette inégalité est une conséquence des principes d'une numération ordinale avec repérants telle que nous les avons envisagés, en particulier avec la règle (c). Il s'agit en effet d'introduire au fur et à mesure de nouveaux representamens, les repérants, alors que les comptants sont à chercher dans les representamens qui ont déjà été introduits. La suite de comptants entre deux repérants a donc été rencontrée avant l'introduction du premier de ces deux repérants. Par exemple, après « cinquante », on peut utiliser *a maxima* la suite de tous les representamens définis avant l'introduction de « cinquante ». Le prochain repérant désigne donc un nombre inférieur ou égal au double du nombre désigné par « cinquante ». Ce choix maximal n'est cependant pas une obligation. L'inégalité (α) indique qu'il n'est pas possible de choisir n'importe quelle suite de nombre pour définir les repérants.

Cependant cette contrainte, associée au fait que $A_1 > 1$ et que $A_{n+1} - A_n > 1$ (par définition deux repérants ne peuvent désigner des nombres successifs), est la seule à fixer quant aux nombres désignés par des repérants.

2.3. Les deux modèles de numérations arithmétiques

Le principe ordinal est lié intrinsèquement à l'élaboration d'une liste d'items qui peut constituer un instrument de comptage. *A contrario*, le principe cardinal est lié à la construction de la numération selon un développement arithmétique du nombre. Nous reprenons les concepts de Cauty en les formulant dans le cadre théorique adopté. Un nombrant est un representamen désignant un nombre qui n'est pas un composé arithmétique manifeste (concaténation) et qui sert à interpréter une numération dans une vision arithmétique. Il existe deux sortes de nombrants : les appuis additifs et les appuis multiplicatifs, c'est ce qui va donner deux modèles différents.

2.3.1. Modèle de principes d'une numération arithmétique additive

Un nombre d'appui additif est un nombre n dont le representamen est un nombrant qui est concaténable à d'autres representamens (que nous nommons ses appuyants additifs). Les résultats de ces concaténations « additives » sont des representamens désignant un ou tous les nombres de la suite des successeurs de n . Par exemple en français, le nombre désigné par « dix » peut être interprété comme un nombre d'appui additif avec trois appuyants additifs « sept », « huit », « neuf » car « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf » peuvent être compris comme désignant des sommes dont le premier terme est dix et le second un nombre inférieur à dix. En anglais et en allemand les representamens des 9 premiers nombres peuvent être considérés comme des appuyants additifs du nombre d'appui 20, les representamens des nombres de 21 à 29 étant facilement analysables comme des concaténations du representamen de 20 et de ces 9 representamens. Le cas de « yii-sip-et », le « 21 » thaïlandais, dans lequel on ne retrouve pas la concaténation « yii-sip(20)/neung(1) » met en évidence le degré d'analyse et les choix à faire pour modéliser une numération.

Les principes d'une numération arithmétique avec appuis additifs sont formellement identiques aux précédents, nous les commentons par la suite :

Soit la suite (A_n) , n entier strictement positif, une suite croissante d'entiers naturels désignés par des representamens nommés appuis additifs A_n , telle que

$$A_1 > 1 \text{ et } A_{n+1} - A_n > 1.$$

A chaque A_n on associe une suite d'entiers non nuls $(s_j(n))$ $j > 0$, croissante et finie désignés par des representamens nommés appuyants additifs $s_j(n)$.

Pour $n > 0$, la concaténation $A_n s_j(n)$ (ou $s_j(n) A_n$) peut désigner le nombre $A_n + s_j(n)$.

En outre, on définit une suite de representamens $s_j(0)$, $0 < j < A_1$ dont les termes désignent les entiers naturels de 1 à $A_1 - 1$.

Ces règles permettent de définir un système non redondant. Pour une numération exhaustive et non ambiguë, on impose deux autres règles :

(a) Pour tout $n > 0$, la suite $s_j(n)$ décrit tous les entiers de l'intervalle $[1 ; A_{n+1} - A_n - 1]$.

(b) Les representamens A_n des nombres A_n sont distincts deux à deux (et définis de manière conventionnelle), c'est aussi le cas, pour tout n positif, des representamens $s_j(n)$.

La concaténation indique une addition. Ainsi, « quarante (et) un » désigne la somme entre le nombre désigné par « quarante » et celui par « un ». Pour ne pas omettre le nombre « 41 » (exhaustivité), l'appui additif utilisé après « quarante » ne peut que désigner le nombre 1. Nous avons donc la règle suivante :

(c) Les appuyants relatifs à un nombre d'appui additif sont des representamens introduits avant le representamen de celui-ci, c'est-à-dire que pour tout $n > 0$, $s_j(n) < A_n$. En outre ces appuyants sont constitués d'une suite finie de representamens qui désignent les premiers entiers naturels de manière exhaustive jusqu'à une certaine borne, arbitraire et spécifique à un appui additif.

Cet ensemble, l'encadré et les trois règles, constitue les principes qui définissent notre modèle de numération arithmétique additif. Une remarque permet ici aussi de rendre compte du nombre important de possibilités :

(α) Pour tout $n > 0$, $A_{n+1} - A_n \leq A_n$, c'est-à-dire que $A_{n+1} \leq 2 A_n$

Ce modèle est différent du premier dans la façon dont sont engendrés les appuis par rapport aux repérants. Dans le modèle ordinal, un repérant étant fixé, le suivant est introduit après l'énumération de comptants. Dans le modèle arithmétique additif, un nombre d'appui additif étant fixé, en lui ajoutant un certain nombre on peut directement obtenir celui qui lui est immédiatement supérieur. Par exemple, le nombre désigné par « cinquante » est conçu comme le nombre désigné par « quarante » plus 10. L'ajout d'un même nombre pour passer d'un nombre d'appui additif au suivant est un processus que l'on peut envisager pour toutes des numérations indo-européennes, par exemple, en français ajouter 10 pour obtenir (certains) des nombres d'appuis jusqu'à 100, puis ajouter 100 pour ceux entre 100 et 1000. Cette façon de générer les nombres d'appuis additifs par ajout réitéré d'un même nombre est mise en relief par Mounier (2010) à l'aide d'une présentation différente du modèle arithmétique additif. La présentation du modèle additif donnée dans le présent article fait apparaître ses similitudes avec le modèle ordinal, alors que celle de la thèse met en exergue celles avec le modèle multiplicatif qui suit, puisqu'un ajout réitéré d'un même nombre renvoie à une multiplication.

2.3.2. Modèle de principes d'une numération arithmétique multiplicative

Un nombre d'appui multiplicatif m est un nombre d'appui additif dont le representamen est de plus concaténable à des éléments des representamens des premiers entiers. Le résultat de la concaténation doit être un representamen désignant un des multiples de m . Par exemple, en français, le nombre désigné par

« cent » est interprétable en tant que nombre d'appui multiplicatif, puisque « deux cents » désigne un multiple du nombre désigné par « cent » ; il est aussi nombre d'appui additif (par exemple dans « cent quarante »). En anglais et en allemand, on pourrait avoir « one hundred » et « hundert » ; « one thousand » et « tausend » ; « one million » et « million » ; en français « cent », « mille », « million » ou même « vingt » ; enfin en thaïlandais « sip » (10), « reeauy » (100), « pan » (1000), « meeun » (10000). La possibilité de prendre « dix » comme appui multiplicatif en français est discutée dans le chapitre consacré à l'étude de la numération parlée dans cette langue (un parallèle peut se faire avec le « ten » anglais et le « zehn » allemand).

Soit (M_n) , $n > 0$, une suite strictement croissante de nombres entiers naturels désignés par des representamens nommés appuis multiplicatifs et telle que $M_1 > 1$. A chacun, on associe la suite croissante finie des nombres entiers naturels non nuls $(p_i(n))$, $i > 0$, désignés par des representamens que l'on nomme appuyants multiplicatifs ainsi que la suite croissante finie $(s_j(n))$, $j > 0$, des entiers non nuls désignés par des representamens que l'on nomme appuyants additifs $(s_j(n))$, de sorte que pour tout $n > 0$ la concaténation $p_i(n) M_n s_j(n)$ (ou bien la concaténation $s_j(n) M_n p_i(n)$) puisse désigner le nombre $p_i(n) \times M_n + s_j(n)$.

En outre, on définit une suite de representamens $s_j(0)$, $0 < j < M_1$ dont les termes désignent les entiers naturels de 1 à $M_1 - 1$.

Ainsi en prenant l'exemple thaïlandais ci-dessus on aurait M_1 désigné par « sip » (10), M_2 par « reeauy » (100), M_3 par « pan » (1000), M_4 par « meeun » (10000), alors qu'en français, on pourrait avoir M_1 désigné par « cent », M_2 par « mille », M_3 par « million », M_4 par « milliard ». Dans ce dernier cas, les appuyants multiplicatifs de « mille », « million » et « milliard » sont les 999 representamens « un » à « neuf cent quatre-vingt-dix-neuf », leurs appuyants additifs aussi, tandis que dans l'exemple de la numération thaïlandaise les appuyants multiplicatifs de « pan » (1000) et « meeun » (10000) sont les 9 representamens « neung » à « gaao », tandis que leurs appuyants additifs sont respectivement les 999 representamens « neung » à « gaao reeauy gaao sip gaao » et les 9999 representamens « neung » à « gaao pan gaao reeauy gaao sip gaao ». Ce principe seul n'assure pas une non ambiguïté et une exhaustivité au système. Dans la définition que nous adoptons, les appuis et appuyants doivent vérifier deux règles supplémentaires.

En reprenant les deux exemples précédents, les nombres qui suivent 1000 vont être mis en signes via une somme. Le premier terme est un nombre parmi 1000, 2×1000 , etc. Le deuxième terme (désigné par un appuyant additif de 1000) doit prendre nécessairement toutes les valeurs entre 1 et 999, sinon la numération ne serait pas exhaustive. D'où :

(a) Pour tout n , les nombres $p_i(n)$ sont en nombre fini et sont rangés selon une progression arithmétique de raison 1 à partir de 1. De plus, la suite $s_j(n)$ des appuyants additifs désigne tous les nombres strictement inférieurs à M_n .

Par ailleurs, afin d'éviter les ambiguïtés (un representamen ne doit désigner qu'un seul nombre), on impose la règle suivante :

(b) Les representamens M_n des nombres M_n sont distincts deux à deux (et définis de manière conventionnelle), c'est aussi le cas, pour tout n positif, des representamens $s_j(n)$.

Toujours en se référant aux exemples thaïlandais et français, les nombres d'appuis additifs qui vont servir après le nombre d'appui multiplicatif 1000 sont obtenus par produit de chacun des nombres d'appui multiplicatif $p_i(n)$ avec 1000 : en thaïlandais 2×1000 , 3×1000 , etc. jusqu'à 9×1000 ; en français 2×1000 , 3×1000 , etc. jusqu'à 999×1000 . Nous considérons ce dernier choix des $p_i(n)$ comme maximal, sinon cela obligerait à prendre pour désigner les appuyants multiplicatifs des representamens non introduits avant le nombre d'appui multiplicatif (ici 1000) auquel ils se réfèrent. On a donc une troisième règle :

(c) $p(n)$, le maximum de la suite $(p_i(n))$, est tel que $p(n) < M_n$.

Cet ensemble, l'encadré et les trois règles, constitue les principes qui définissent notre modèle de numération arithmétique avec appuis multiplicatifs.

D'après ce qui précède, $p(n)$ est tel que $M_{n+1} = (p(n)+1) \times M_n$. Dans l'exemple, le prochain nombre d'appui multiplicatif thaïlandais après 1000 est 10000, en français, c'est 1 000 000. Ce dernier est le choix maximal. On obtient alors la propriété suivante.

(α) Le choix maximal des M_n correspond à $M_{n+1} = M_n \times M_n$. On a donc la suite $M_n = M_1^{2^{n-1}}$

Ceci permet ici aussi de rendre compte du nombre important de possibilités, mais aussi de la différence avec la décomposition dite polynomiale. En effet, cette dernière correspond à un choix de M_n vérifiant l'égalité $M_n = M_1^n$ (si $M_1 = 10$, on obtient la décomposition suivant les puissances de 10 relative à la base 10).

3. Des modélisations de la numération parlée en France : vers différentes interprétations

Ce paragraphe expose des choix dans l'analyse syntaxique qui permettent d'analyser la numération parlée en France à partir de chacun de ces modèles. On y discute de la pertinence de prendre tel ou tel modèle pour éclairer *a posteriori* sa syntaxe. C'est pourquoi nous parlons à chaque fois d'une interprétation de cette dernière, et non de modélisation, ce qui permet en outre de rappeler les emprunts peircéens. Tout d'abord nous décrivons la numération parlée en France.

3.1. Les nombres dont les mots français sont les representamens

3.1.1. Précisions méthodologiques

Nous considérons les mots de la numération parlée en France qui servent à désigner les nombres entiers. Pour les noms des grands nombres, deux échelles sont en vigueur, l'échelle courte et l'échelle longue (Guitel, 1975). En français, avec les mots mille, million, milliard, billion c'est l'échelle longue qui est adoptée. Dans les pays anglo-saxons qui utilisent l'échelle courte, le mot billion remplace milliard, et c'est le mot trillion qui est utilisé pour billion (mille milliards).

L'objet de ce paragraphe est de décrire la numération parlée en France, c'est-à-dire de relier chaque representamen au nombre qu'il désigne. Elle est décrite sans l'aide de la numération écrite chiffrée, à l'inverse par exemple de la méthode de Numa Bocage (1997) et dans une moindre mesure de celles de Cauty (1986), Guitel (1975) et Ifrah (1994). En effet, les descriptions de ces auteurs engagent une réorganisation de la numération qui peut induire d'emblée des principes arithmétiques pour éclairer la logique de la syntaxe, ceux liés à la numération écrite chiffrée de position en base 10. La description que nous donnons prend en compte certaines régularités à travers trois règles linguistiques : la concaténation, l'introduction de mots nouveaux et l'ordre dans les mots composants les concaténations. Ce dernier est notifié par le tactème d'ordre qui permet par exemple de choisir entre « quarante/deux » ou « deux/quarante », les deux choix étant *a priori* possibles. Les concaténations prises en compte sont les concaténations manifestes, comme celle de « quarante » et « deux » dans « quarante-deux ». Sachant que la morphologie est l'étude de la composition d'un representamen qui n'est manifestement pas un composé de plusieurs representamens, il est par exemple nécessaire de faire une analyse morphologique de « seize » pour y voir « six » et « dix ». Une telle analyse permettrait aussi de considérer « quatre » dans « quarante », mais rien ne prouve que ce dernier est nécessairement la concaténation de « quatre » et « dix ». Ainsi nous ne faisons pas une analyse morphologique des representamens. Par ailleurs, la question se pose de l'ordre des representamens à considérer dans le processus de description. Dans la numération écrite chiffrée de position, une fois définis les dix chiffres (c'est-à-dire

chacun étant relié au nombre qu'il dénote) et établis des principes de base dix, il est possible de donner du sens à toute suite de chiffres. Ce n'est pas le cas ici. En effet, pour définir les representamens des nombres de plus en plus grands, il est nécessaire d'introduire des representamens nouveaux qui doivent être devenus le nom de nombre (il s'agit par exemple des representamens « cent », « vingt » et « huit » dans le representamen « cent vingt-huit »). Par ailleurs, toute concaténation n'est pas signifiante (à la différence des suites de chiffres). Le processus de description que nous avons adopté prend en compte ces spécificités, c'est pourquoi il suit l'ordre des nombres entiers naturels eux-mêmes. Ce choix est cohérent avec le fait d'introduire des mots nouveaux au fur et à mesure de l'accroissement du champ numérique. En outre, il s'impose au moins pour les dix premiers representamens. Finalement il permet une description en convoquant uniquement les trois règles linguistiques évoquées, sans faire référence à une autre numération (écrite par exemple). Cette méthodologie ouvre les possibles pour chercher *a posteriori* des modèles mathématiques rendant compte d'une logique syntaxique.

3.1.2. Description

Nous parlons du nom d'un nombre lorsque dans le processus de description le representamen a été associé au nombre qu'il dénote. Dans ce processus nous donnons tout d'abord les éléments lexicaux qui vont devenir des noms de nombre, mais qui interviennent en outre par concaténation dans les noms des autres nombres : c'est le vocabulaire terminal de la numération. Pour les nombres inférieurs à une certaine borne, il s'agit de : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize », ainsi que « vingt », « trente », « quarante », « cinquante », « soixante », « cent », « mille », « million », « milliard ». Le mot « zéro » n'y figure pas car il n'est pas utilisé ensuite dans les concaténations. Les nombres de base sont les nombres que ces mots/representamens désignent. Les autres nombres sont désignés soit par un de ces mots, soit une concaténation utilisant ces mots : c'est ainsi que s'effectue le passage des representamens aux noms. Le mot de liaison « et » est parfois aussi utilisé dans une concaténation. Voici le processus pour les nombres de un à cent, la description pour les nombres jusqu'à mille milliards est indiquée dans la thèse (Mounier, 2010) :

- Pour les premiers nombres : un mot est associé à chaque nombre donnant ainsi le nom du nombre, les mots sont différents deux à deux, ce sont dans l'ordre : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf », « dix », « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize ».
- Pour les trois nombres qui suivent, le nom du nombre est obtenu par concaténation. Il est composé du mot « dix » suivi respectivement des mots « sept », « huit », « neuf », ce qui donne « dix-sept », « dix-huit », « dix-neuf ».

- Pour le suivant, un mot nouveau est employé, « vingt ». Puis pour les neuf nombres qui suivent, un processus identique à celui de la dénomination des nombres dix-sept, dix-huit, dix-neuf est utilisé. Deux mots sont juxtaposés. Le premier est toujours le mot « vingt », ensuite sont accolés successivement pour désigner chacun des neuf nombres suivant vingt, les mots désignant les neuf premiers nombres : « un », « deux », « trois », « quatre », « cinq », « six », « sept », « huit », « neuf ». Le premier nombre après vingt est particulier : on intercale le mot « et » entre « vingt » et « un ». Ce qui donne finalement « vingt-et-un », « vingt-deux », « vingt-trois », « vingt-quatre », « vingt-cinq », « vingt-six », « vingt-sept », « vingt-huit », « vingt-neuf ».

- Ensuite, le principe est identique au précédent, en introduisant successivement les mots nouveaux « trente », « quarante », « cinquante », jusqu'à obtenir « cinquante-neuf ».

- Pour le nombre suivant un mot nouveau est employé, « soixante ». Pour les dix-neuf nombres suivant le processus est identique à celui de la dénomination des nombres vingt-et-un, vingt-deux, ..., vingt-neuf. Le premier mot est toujours le mot « soixante », ensuite sont accolés successivement pour désigner des nombres suivants, les mots désignant les dix-neuf premiers nombres : « un », « deux », ..., « dix-huit », « dix-neuf ». Pour le premier nombre après « soixante », on intercale le mot « et » entre « soixante » et « un ».

- Pour le nombre suivant le representamen « quatre-vingts » est employé, concaténation de deux representamens déjà introduits. Pour les dix-neuf nombres suivants le processus est identique à celui de la dénomination des nombres précédents. Le premier mot est toujours le mot « quatre-vingts » mais pour le premier nombre après « quatre-vingts », on n'intercale pas le mot « et » entre « quatre-vingts » et « un ».

D'autres numérations francophones sont différentes à partir de « soixante ». Elles utilisent un mot particulier pour désigner « soixante-dix », le mot « septante » et reprennent un processus identique à celui décrit au moment de l'introduction de « vingt ». La même remarque est à faire pour « quatre-vingts » « octante » « huitante » et « quatre-vingt-dix » « nonante ».

Le processus continue avec l'introduction successive des mots, « cent », « mille », « million », « milliard », etc.

3.2. Des interprétations de la numération parlée en France

Précisions méthodologiques

Deux types de choix sont à faire : fixer les paramètres en jeu dans les modèles (c'est la première partie de l'interprétant) et compléter la mise en signes ébauchée par le modèle (c'est la deuxième partie de l'interprétant). Pour fixer les paramètres qui sont en jeu dans la définition de chacun des modèles nous allons devoir

considérer certains representamens comme repérant ou nombrant, ce qui détermine précisément une modélisation ordinale ou arithmétique de la numération. Elle se fait grâce à une étude syntaxique et morphologique. L'étude syntaxique de la numération parlée en France entreprise ici est « *une étude de la formation des expressions numériques composées dans une rationalité arithmétique ou ordinale par concaténation de nombrants ou de repérants* », Cauty (1986). La morphologie permet d'analyser les nombrants et les repérants à un niveau inférieur. Elle sert par exemple quand il s'agit de considérer si le representamen « onze » est un nombrant/repérant ou s'il a un lien ou non avec « dix ». Pour fixer les paramètres en jeu dans les modèles, l'analyse peut prendre en compte :

- les concaténations manifestes :
 - o Pour les nombres inférieurs à cent, il s'agit par exemple de quarante/deux dans « quarante-deux »
 - o Pour les nombres supérieurs à cent, il s'agit par exemple de dix/mille/quarante/trois dans « dix mille quarante-trois »,
- les formations qui ne sont pas des concaténations manifestes, rencontrées pour les noms des nombres inférieurs à cent et reprises ensuite, par exemple :
 - o « deux » dans « vingt »,
 - o « trois » dans « trente », « quatre » dans « quarante », etc.
 - o « dix » dans « onze », « douze », « treize », « quatorze », « quinze », « seize »,
- des cas « isolés » dont on considère la concaténation ou non, spécifiques à la numération parlée en France au regard d'autres numérations francophones (Belgique, Suisse) :
 - o « soixante-dix », « quatre-vingts », « quatre-vingt-dix », respectivement en belge ou suisse « septante », « huitante » ou « octante », « nonante ».

Ceci permet une multitude de choix. Nous n'en présentons que deux pour chaque type de modèle. Le premier est essentiellement basé sur une prise en compte des concaténations manifestes. Le deuxième permet d'éclairer certaines questions soulevées par ce premier, il engage alors le plus souvent une analyse syntaxique et morphologique plus poussée. La présentation a pour but de permettre au lecteur de voir l'intérêt de tel ou tel modèle. Tout n'y est pas dit, car toutes les interprétations envisageables (selon le degré d'analyse) ne sont pas proposées.

3.2.1. La numération parlée en France comme numération ordinale avec repérants

La première partie de l'interprétant : le choix des repérants et comptants

Les nombres que nous allons considérer sont les nombres inférieurs à mille. Il est cependant possible de considérer ensuite les representamens « deux mille », « trois

mille », etc., comme des repérants. La différence entre les deux choix concerne les nombre inférieurs à cent.

1^{er} choix

La suite des representamens $s_f(0)$ est « un », « deux », ..., « dix-huit », « dix-neuf ».

« vingt » est le premier repérant A_1 , A_2 est « trente », A_3 est « quarante », A_4 est « cinquante », A_5 est « soixante », A_6 est « quatre-vingts », puis, on a « cent », « deux cents », ..., « huit cents », « neuf cents », « mille ».

2^e choix (entre parenthèse les noms en français de Belgique ou de Suisse)

La suite des representamens $s_f(0)$ est « un », « deux », ..., « huit », « neuf »

On choisit ensuite « dix » pour A_1 le premier repérant, « vingt » pour A_2 , etc., « soixante » pour A_6 , « soixante-dix » (« septante ») pour A_7 , « quatre-vingts » (« octante », « huitante ») pour A_8 , « quatre-vingt-dix » (« nonante ») pour A_9 , puis, « cent », « deux cents », ..., « huit cents », « neuf cents », « mille ».

Discussion sur les choix

Le representamen « quatre-vingts » nous semble pouvoir être analysé comme un repérant, bien que sa formation ne soit pas de même nature que les autres repérants, nous y reviendrons. Les deux choix diffèrent du fait de considérer « dix », « soixante-dix », « quatre-vingts » et « quatre-vingt-dix » comme des repérants ou non. En outre dans le deuxième, les representamens « un » à « neuf » sont les comptants du repérant « dix ». Un autre choix aurait été de prendre la suite « sept », « huit », « neuf », puisque les concaténations « dix/un », ..., « dix/six » ne sont pas manifestes. Une remarque similaire est à faire avec les repérants « soixante-dix » et « quatre-vingt-dix », les concaténations avec la suite « onze », ..., « dix-neuf » n'étant pas manifestes non plus, puisque « dix » n'apparaît plus. Ce choix est cependant intéressant à étudier pour mettre en évidence la différence entre la numération parlée en France et celles parlées en Suisse et Belgique. Il permet d'émettre une hypothèse, celle du chevauchement de deux numérations adoptant des choix différents dans les comptants. Imaginons qu'on utilise les comptants de « un » à « dix-neuf » entre deux repérants. On pourrait alors avoir la suite des repérants suivants : « vingt », « deux-vingts », « trois-vingts », « quatre-vingts », etc. jusqu'à « dix-neuf-vingt », si on utilise le processus de manière maximale pour numéroter les repérants. Or, « quatre-vingts » se trouve aussi dans la numération parlée en France et désigne le même nombre que dans la suite précédente. C'est cet élément qui rend mathématiquement possible une hypothèse de chevauchement de deux numérations : une utilisant 19 comptants, l'autre 9.

Cette hypothèse est renforcée du fait des emplois attestés de formes anciennes comme « quinze-vingts » qui reste dans le nom d'un hôpital comportant à l'origine 300 lits. Elle a déjà été formulée par des auteurs comme Ifrah (1994).

Par ailleurs, lorsqu'on prend le plus grand A_n possible à chaque fois, on obtient l'égalité $A_{n+1} = 2 A_n$, qui mène à la suite géométrique $A_n = 2^{n-1} A_1$. Le premier repérant est arbitraire. Aucune analyse syntaxique de la numération parlée en France ne nous a permis d'envisager la progression « maximale » pour les repérants. Cependant, des éclairages liés aux choix des representamens disponibles successivement peuvent être avancés pour rendre compte du deuxième choix. Il s'agit d'une alternance de principes de maximalité forte et faible pour le choix des repérants et comptants. La maximalité « faible » concerne les repérants. Elle consiste à utiliser l'intégralité des representamens $s_j(0)$ (d'où le mot maximalité) dont le nombre est arbitraire (c'est 9 dans le deuxième choix) pour numéroter les repérants successifs (jusqu'à mille). On épuise une première fois cette suite, d'où l'introduction du representamen « cent », puis une nouvelle fois, d'où l'introduction du representamen « mille ». Il aurait été possible d'envisager à partir de « cent » l'utilisation de la suite des 99 representamens déjà définis auparavant, le mot « faible » indique le choix de la « plus petite » (ou la première) suite de comptants pour numéroter les repérants successifs. La maximalité forte, quant à elle, traduit le fait d'utiliser tous les comptants disponibles entre chaque type de repérants : « un » à « neuf » entre deux repérants avant « cent » (ce sont ceux disponibles avant « dix »), « un » à « quatre-vingt-dix-neuf » pour les repérants avant mille (ce sont ceux disponibles avant « cent »). Avec ces principes de maximalité, nous retrouvons donc les principes de base dix dans une vision ordinale. Pour les nombres inférieurs à cent, ces considérations linguistiques permettent d'éclairer de manière plus convaincante les choix faits dans la numération parlée en français de Suisse et de Belgique. Elles permettent aussi d'interpréter une numération comme celle parlée en Thaïlande, qui peut être qualifiée ainsi de régulière, même pour les nombres supérieurs à mille. En France, un plus grand nombre d'irrégularités est à noter, c'est ce qui mène en particulier à considérer le premier choix. Remarquons finalement que les dates sont parfois signifiées en français par une expression comme « douze cents » au lieu de « mille deux cents ». La suite des premiers representamens de « un » à « neuf » pour numéroter les repérants n'est donc pas toujours la règle.

La deuxième partie de l'interprétant : la suite de la mise en signes

Conformément à la définition d'un modèle de principes mathématiques d'une numération ordinale, dans les choix que nous avons exposés (qui résultent d'une analyse syntaxique et morphologique plus ou moins poussée), les repérants et la suite des representamens $s_j(0)$ sont distincts deux à deux deux et, pour tout n

positif, il en est de même pour chaque suite de representamens $s_i(n)$. Leur expression est conventionnelle si on n'entreprend pas une analyse morphologique, mis à part le cas de « quatre-vingts ». Même si on prend en compte « quatre » dans « quarante », le procédé d'introduction de representamens nouveaux peut être compris comme une numérotation des repérants dans une logique ordinale.

Par ailleurs, il s'agit ici de revenir sur la place des comptants par rapport à un repérant dans la formation des noms. A l'inverse de la numération en allemand, le tactème d'ordre adopté consiste à indiquer dans les concaténations manifestes le comptant après le repérant. Cependant, les representamens des nombres entre onze et seize pourraient être analysés comme la manifestation d'un choix différent en y voyant les representamens « un », ..., « six » notifiés avant celui de « dix ». Pour comprendre ces choix, tout en nous restreignant aux nombres inférieurs à cent, nous considérons une interprétation ordinale de la numération latine dont la numération parlée en France est issue. Une analyse morphologique peut mener à envisager une altération ou évolution du latin dans laquelle l'idée de dix est indiquée en second, par exemple « onze » venant de la concaténation latine « un/decim », « un/dix ». Dans une interprétation ordinale, on peut formuler alors l'hypothèse que le suffixe « ze » indique que le dernier repérant passé est « dix », sans nécessairement faire référence à une concaténation ancienne. Si ceci renforce la « pertinence » d'une interprétation ordinale de la numération, cela n'explique pas l'inversion repérant/comptant à partir de « dix-sept ». Cependant, plusieurs remarques peuvent être faites. D'abord, le fait de désigner les nombres après vingt en énonçant en premier le repérant permet de mettre en avant ce repérant. Cette information devient primordiale pour indiquer l'ordre de grandeur des nombres ou bien pour se souvenir du dernier repérant quand il va s'agir par exemple de compter en énonçant les mots de la comptine. Cet argument reste cependant discutable au regard du choix fait en allemand. Mais, on peut faire une seconde remarque. En latin, « dix-sept » se dit « decem et septem », dix-huit se dit « decem et octo », dix-neuf se dit « decem et novem », alors que seize se dit sexdecim (Noel, 1833, indique aussi septemdecem pour dix-sept, Goelzer, 1966, indique quant à lui uniquement septemdecem). Comme en français, de onze à seize la racine latine fait donc apparaître dix (decem) après les representamens latin des nombres de un à six (voire sept). La même irrégularité est donc à noter, ce qui ne l'explique pas, mais en fournit une origine. Un dernier argument étymologique va dans le sens d'une interprétation ordinale. En effet, le latin utilise aussi « duodeviginti » pour « dix-huit » et « undeviginti » pour « dix-neuf ». Certains representamens y sont donc interprétables dans une numération ordinale avec principe d'antériorité, c'est-à-dire que « duodeviginti » est analysable comme deux (duo) avant (de) vingt (viginti). Plus précisément, « de » renvoie à « à cause de » ou encore « provenant de », « avant la fin de », « relativement à » (Goelzer,

1966). A ce propos le « et » français peut s'interpréter comme « après » (et non forcément comme « + ») : le « et » latin a aussi cette acception.

3.2.2. La numération parlée en France comme numération arithmétique additive

La première partie de l'interprétant : le choix des repérants et comptants

Les éléments retenus dans l'analyse syntaxique et morphologique sont identiques aux précédents. Ils permettent cette fois-ci une interprétation en termes de numération arithmétique. Par exemple « cent », « deux-cents », etc., peuvent être considérés comme issus de l'adjonction réitérée de cent à partir de cent. Le nombre désigné par « trois cents » est ainsi conçu comme le nombre désigné par « deux cent » auquel on a ajouté le nombre désigné par « cent ». On examine ici deux choix principaux utiles à la discussion qui suit.

1^{er} choix

La suite de representamens $s_j(0)$ est « un », « deux », ..., « dix-huit », « dix-neuf ». Les nombres inférieurs à vingt peuvent constituer la première « vingtaine », vingtaine qui peut se retrouver à partir de soixante. On obtient « vingt » pour A_1 le premier appui additif, « trente » pour A_2 , « quarante » pour A_3 , « cinquante » pour A_4 , « soixante » pour A_5 , « quatre-vingts » pour A_6 , puis, « cent », « deux cents », ..., « huit cents », « neuf cents », « mille ».

2^e choix (entre parenthèse les noms en français de Belgique ou de Suisse)

Il s'agit du choix le plus « régulier »

La suite de representamens $s_j(0)$ est « un », « deux », ..., « huit », « neuf ».

On choisit ensuite « dix » pour A_1 le premier appui additif, « vingt » pour A_2 , etc., « soixante » pour A_6 , « soixante-dix » (« septante ») pour A_7 , « quatre-vingts » (« octante », « huitante ») pour A_8 , « quatre-vingt-dix » (« nonante ») pour A_9 , puis, « cent », « deux cents », ..., « huit cents », « neuf cents », « mille ».

Discussion sur les choix

Formellement, les modélisations ordinale et arithmétique additive sont proches. En effet, il est possible de faire les mêmes choix de representamens pour les caractériser, ce qui s'entend déjà dans la définition des deux modèles. Cependant, leur fonction change : appui additif pour l'un et repérant pour l'autre, appuyant additif pour l'un et comptant pour l'autre. Ainsi, pour un modèle additif, un representamen tel que « quarante-deux » est relié au nombre ((trente plus dix) plus deux), tandis que dans le modèle ordinal il désigne le nombre en tant que « successeur de » : par exemple, les repérants de « un » à « dix-neuf » ont été utilisés comme suite d'items pour atteindre le repérant « vingt », puis les comptants

de « un » à « neuf » pour atteindre successivement les repérants « trente » et « quarante » puis ils ont été à nouveau utilisés pour atteindre le comptant « deux » (« un », « deux »).

Le choix du premier nombre d'appui additif est mathématiquement arbitraire. Par contre il contraint les suivants puisque son successeur immédiat est inférieur ou égal à son double. Ici aussi, l'analyse de la numération parlée en France pour la modéliser ne permet pas d'envisager le choix optimal. En les transposant dans une perspective arithmétique, les principes de maximalité évoqués précédemment peuvent éclairer le 2^e choix. On met l'accent sur le fait de privilégier la réitération d'un ajout d'un même nombre à partir d'un appui additif, comme cela a déjà été indiqué. Les principes de base (dix) peuvent ainsi être en jeu.

La deuxième partie de l'interprétant : la suite de la mise en signes

Les remarques faites à propos de la numération ordinale avec repérants peuvent être adaptées. Cependant, en ce qui concerne les éclairages provenant de la numération latine, il nous semble moins pertinent d'interpréter les latins « duodeviginti » et « undeviginti » dans une perspective additive, comme (deux (duo) moins (de) vingt (vingiti)) car « de » ne fait pas référence à une soustraction.

3.2.3. La numération parlée en France comme numération arithmétique multiplicative

La première partie de l'interprétant : le choix des appuis et appuyants

Dans un des deux choix présentés ci-après, « dix » est considéré comme désignant un nombre d'appui multiplicatif, dans l'autre non.

1^{er} choix : M_1 désigné par « cent », M_2 par « mille », M_3 par « million », M_4 par « milliard ».

2^e choix : M_1 désigné par « dix », M_2 par « cent », M_3 par « mille », M_4 par « million » et M_5 par « milliard ».

Discussion sur les choix

A la différence du deuxième, le premier choix est basé sur le fait de ne pas analyser « soixante-dix », « quatre-vingts » et « quatre-vingt-dix » comme (sept fois dix), (huit fois dix) et (neuf fois dix), ni même « cinquante » comme (cinq fois dix) ou « treize » comme ((une fois) dix plus trois). Ce premier choix met en évidence une régularité des nombres au-delà de mille, puisque la suite des appuis multiplicatifs est géométrique de raison mille. Cependant, nous n'avons pas trouvé d'explication mathématique du passage de cent à mille, sauf à considérer une analyse morphologique plus fine des nombres inférieurs à cent, c'est ce qui a conduit au deuxième choix. En effet, dans celui-ci, on peut reconnaître pour les nombres

inférieurs à mille des nombres d'appuis multiplicatifs ordonnés selon une suite géométrique de raison dix et de premier terme dix, ce qui conduit à voir une logique dans la succession dix, cent, mille, celle de la base dix. Au-delà de mille, la logique diffère quant au nombre choisi pour la base, puisque c'est mille, mais pas quant au fait de retrouver le principe de base. Une autre possibilité que nous n'avons pas indiquée ici est de considérer « mille » comme le premier appui multiplicatif. On retrouve alors des principes de base mille pour toute la numération, mais cela oblige à ne pas prendre en compte des concaténations manifestes pour les nombres inférieurs à cent. Par ailleurs, si M_1 est choisi (de manière arbitraire), le choix optimum pour la suite des appuis multiplicatifs est la suite $M_n = M_1^{2^{n-1}}$, ce qui n'est pas le cas en français, ni dans aucune des numérations indo-européennes si on se réfère à Ifrah (1994). Certaines contraintes de mise en signes peuvent cependant donner un éclairage, c'est ce que nous abordons dans ce qui suit.

La deuxième partie de l'interprétant : la suite de la mise en signes

Au-delà de l'étude des relations mathématiques entre les appuis, la mise en signes des principes mathématiques comporte certaines particularités qui sont des solutions linguistiques propres à la numération parlée en français, dont certaines plus spécifiques au français de France. Nous ne revenons pas sur celles qui ont déjà été évoquées.

De manière spécifique au modèle multiplicatif, la mise en jeu des deux opérations, la multiplication et l'addition, oblige à indiquer des priorités. Par exemple dans « trois cent vingt mille », considérer que cent est du même niveau que mille peut conduire à interpréter ce nombre en tant que $(\text{trois} \times \text{cent}) + (\text{vingt} \times \text{mille})$, ce qui est erroné. La segmentation est un moyen de hiérarchiser les appuis multiplicatifs. Par exemples dans le premier choix, « cinq cent quatre-vingt-un mille trois cent vingt-trois » est décomposé en $[(\text{cinq} \times \textit{cent}) + (\text{quatre-vingt-un})] \times \textbf{mille} + (\text{trois} \times \textit{cent}) + (\text{vingt-trois})$. En italique et gras sont indiqués les nombres-segments qui sont réemployés dans un des segments des mille, million, etc., ces derniers (en gras) désignant alors des nombres-segments qualifiés de principaux. Ainsi *cent* en gras et italique indique qu'il est utilisé comme nombre-segment secondaire dans le segment des mille ou million ou milliard. L'interprétation « base mille » est à mettre en parallèle avec une mise en signes comportant les segmentations principales délimitées par les mots-segments principaux mille, million, milliard, etc. Ces mots-segments sont sur le même niveau. Si on considère un seul sous-niveau de segmentation (1^{er} choix), le seul appui multiplicatif est cent. On ne tient alors pas compte de la morphologie des nombres inférieurs à cent. Si on utilise deux sous-niveaux de segmentation (2^e choix), on considère deux nombres d'appuis multiplicatifs, dix et cent : « trois cent vingt-trois » est décomposé en

(trois $\times$ *cent*) + (deux $\times$ *dix*) + trois). Dans ce cas on retrouve des principes de base dix. Le repérage de l'un ou l'autre niveau de segmentation est nécessaire à la compréhension de la numération et aucun autre indicateur linguistique ne semble permettre de le signifier dans l'énonciation, mise à part une hiérarchie des segmentations avec le repérage des différents types de mots segments. Le nombre de niveaux de segmentation peut être alors mis en parallèle avec le choix des appuis multiplicatifs, et c'est ainsi qu'indirectement il est possible de retrouver les principes de base (dix, mille).

L'ordre d'énonciation des différents segments est quant à lui *a priori* arbitraire, puisqu'il s'agit d'indiquer une addition et que cette dernière est commutative. Le choix fait dans la numération parlée en France, quel que soit le niveau de segmentation considéré, est d'énoncer les segments par ordre décroissant des nombres d'appuis auxquels ils se réfèrent : milliard, million, mille, (cent), (dix). Il n'est pas cohérent avec le sens de construction des désignations des nombres, des plus petits aux plus grands, mais il permet d'indiquer en premier une information sur l'ordre de grandeur du nombre.

Une fois reconnue la segmentation, le tactème d'ordre concerne la concaténation des appuis multiplicatifs et de ses appuyants additifs et multiplicatifs. Fixer un tactème d'ordre permet en pratique de rendre la numération non ambiguë : différencier « cent deux » de « deux cents ». Il est cependant difficile de justifier ici le choix de l'un ou l'autre. Nous constatons que dans notre numération parlée nous énonçons l'appuyant multiplicatif avant l'appui, et l'appuyant additif après (exception faite des nombres de onze à seize si on considère l'appui multiplicatif « dix »). Parallèlement, nous constatons qu'en français les noms des nombres sont aussi adjectifs numéraux, sauf million et milliard qui sont des noms, et la règle est qu'ils précèdent le nom. Ainsi, « deux cents » pourrait se comprendre en considérant « cent » comme un nom (synonyme de centaine) et donc donnerait deux centaines, ce qui est effectivement le nombre désigné en français. Dans « cent deux », « cent » peut être l'adjectif et « deux » le nom (cent « deuzaines »), mais l'usage des petits nombres comme adjectifs numéraux est plus fréquent.

4. Discussion sur les résultats obtenus : des pistes pour leur portée didactique

Pour alimenter les questions futures et relier notre travail à l'activité des élèves, considérons à nouveau la tâche d'obtention du cardinal d'une collection dont trois procédures ont été évoquées au début de cet article. Le comptage de un en un, « un, deux, ..., trente-neuf, quarante, quarante-et-un, quarante-deux » est à rapprocher d'une interprétation ordinale sans repérant. Le comptage de paquets de dix puis d'unités restantes « dix, vingt, trente, quarante, quarante-et-un, quarante-deux » est à rapprocher d'une interprétation ordinale avec repérants ou arithmétique additive. Le comptage du nombre de dizaines « un, deux, trois, quatre » puis d'unités restantes « un, deux » est à rapprocher d'une interprétation arithmétique

multiplicative. Dans ce dernier cas, la mise en signes comporte plus d'étapes, puisqu'il faut traduire « quatre dizaines » par « quarante ». En outre, ce n'est pas l'interprétation qui nous a semblé la plus pertinente pour ce champ numérique. Les stratégies pourraient être ainsi analysées *a priori* à l'aide des interprétations qui ont été exposées ici. Les procédures observées chez les élèves pourraient être étudiées parallèlement, avec des questions spécifiques. Certaines tâches favorisent-elles l'utilisation de tel type de procédure relié à tel élément d'une interprétation ? Peut-on dégager des profils d'élèves selon l'utilisation préférentielle de propriétés afférentes à telle interprétation ? Nous pourrions dire que : « la numération a été utilisée (par cette personne pour cet exercice) dans une interprétation ordinale (ou additive ou multiplicative) ». C'est ainsi que nous pourrions définir la notion d'interprétation, cette fois-ci au niveau d'un sujet.

Si les modèles que nous avons donnés peuvent être utilisés pour entreprendre une analyse didactique du travail des élèves confrontés à certains problèmes numériques, la méthodologie reste à construire. Le recours à la notion de théorème-en-acte de la théorie des champs conceptuels (Vergnaud 1991) nous semble une possibilité féconde. Ils permettent de faire le lien entre d'une part les procédures et d'autre part les interprétations de la numération envisageables à partir des modèles. Concrètement, les actes et les paroles, voire les discours *a posteriori* de l'élève résolvant un problème, sont des indicateurs essentiels à relever pour une telle entreprise. Cependant, ils nous semblent insuffisants pour inférer les théorèmes-en-acte puisque dans ces derniers les règles d'action utilisées ne sont pas nécessairement explicites. Au moins deux autres indicateurs sont à prendre en compte : la nature des problèmes posés aux élèves (les classes de problème, Vergnaud 1991) et les connaissances qu'ils peuvent mobiliser pour les résoudre.

De futures analyses peuvent en particulier s'attacher à étudier les interprétations en jeu pour un élève qui utilise essentiellement la numération parlée en langue maternelle comme signifiant du nombre. D'après les programmes scolaires, ce type d'élève est susceptible d'être majoritaire dans certains niveaux d'enseignement institutionnel : en France il pourrait s'agir *a minima* des élèves de l'école maternelle (enfants âgés de 3 à 6 ans). Beaucoup d'éléments concourent au fait que les propriétés et théorèmes en acte utilisés puissent renvoyer à une interprétation ordinale, notamment l'utilisation de la comptine numérique comme compteur pour dénombrer une collection. Ces considérations concernent plus particulièrement les « petits » nombres (en France, jusqu'à 20, voire 30, c'est-à-dire le champ numérique dont l'étude est prescrite pour les classes maternelles). Au-delà, la question se pose de savoir en quoi la structure de la numération favorise une utilisation (en-acte) de propriétés arithmétiques (addition, multiplication). L'étude que nous avons menée nous permet de fournir des outils pour une telle recherche. Pour des nombres allant (au moins) jusqu'à cent, les élèves peuvent *a priori* utiliser

des ressources du système de numération en résonnance aussi bien avec son interprétation ordinale qu'avec celles arithmétiques. Ainsi, nous pensons avoir montré qu'il est possible de comprendre la structure de la numération, même « régulière » telle la numération parlée en Thaïlande, sans utiliser des principes arithmétiques. Notre étude permet ainsi de reconsidérer l'apprentissage et l'enseignement concernant le système de numération écrit de position ainsi que les problèmes relevant de la structure additive ou multiplicative (au sens de Vergnaud 1991). En effet, l'emploi de la numération parlée qui peut les accompagner est susceptible de renvoyer (durablement) l'élève à des principes ordinaux, puisque ces derniers peuvent fournir une explication rationnelle de la constitution de cette numération parlée. Or, ce sont des principes arithmétiques qui interviennent dans l'apprentissage des notions susdites.

Conclusion

Les modèles proposés permettent d'interpréter les numérations orales indo-européennes, c'est à dire de rendre compte *a posteriori* de leur syntaxe mais aussi de discuter des choix nécessaires à une modélisation. Ils ne sont cependant pas à considérer indépendamment de la méthodologie utilisée pour leur élaboration. Ils n'ont pas vertu à être une référence définitive et ils peuvent être discutés.

Avec ces modèles, la modélisation d'une numération dépend du niveau d'analyse de la constitution des representamens. Les interprétations proposées pour la numération parlée en France ont pour but d'engager une réflexion sur ses fondements rationnels. Nous avons fourni des critères et des arguments qui permettent d'évaluer la « pertinence » d'une interprétation. Nous pensons avoir mis en perspective les interprétations arithmétiques « base mille » ou « base dix » couramment évoquées pour comprendre la numération. La base mille nous semble avoir une certaine pertinence pour les nombres au-delà de mille. Les nombres inférieurs à cent sont plus aisément interprétables à l'aide de principes arithmétiques additifs ou ordinaux avec repérants : l'analyse de la numération latine donnant un argument supplémentaire en faveur de ces derniers. Ainsi, pour la numération parlée en France, l'interprétation ordinale est une alternative tout aussi fondée que les interprétations arithmétiques. En outre, quel que soit le modèle choisi pour analyser la numération parlée en France, la base dix peut s'inviter dans certaines interprétations. Elle peut apparaître en effet comme consécutive de choix parmi d'autres, concernant les paramètres initiaux à fixer (appuis ou repérants) et la mise en signes (maximalité faible et forte pour un modèle ordinal, répétition d'un nombre à ajouter pour le modèle additif et segmentation pour le modèle multiplicatif). Il n'est pas exclu que cela soit aussi le cas pour les autres numérations indo-européennes, y compris les numérations parlées « régulières » de type thaïlandais.

Quant au lien avec l'objet nombre, notre méthodologie ne permet d'en ébaucher que quelques aspects. Il paraît pertinent de poursuivre la recherche, par exemple en exploitant les ressources que permet une étude sémiotique peircéenne à usage didactique, comme l'envisage Conne (2008). D'une manière générale, les éléments présentés dans cet article sont pour nous des outils pour étudier l'activité des élèves, pour mener des recherches sur leurs conceptions et sur la conceptualisation. Ceci laisse donc envisager des prolongements proprement didactiques qui ne préjugent pas des cadres théoriques et des méthodologies qui peuvent y être employés.

Bibliographie

ARTIGUE M. (1991), Epistémologie et didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **10.2/3**.

BEDNARZ N. & JANVIER B. (1982), The understanding of numeration in primary school, *Educational Studies in Mathematics* **13**, 33-57.

BIDEAUD J., LEHALLE H. & VILETTE B. (2004) *La conquête du nombre et ses chemins chez l'enfant*, Presses universitaires du Septentrion, Paris.

BRIAND J. (1999), Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques. Etude et réalisation d'une situation d'enseignement de l'énumération dans le domaine pré-numérique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **19.1**, 41-75.

BRISSIAUD R. (2001), Enseigner une comptine numérique « à l'asiatique » au CP : pourquoi et comment ?, in *actes du XXVIIIème colloque inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres*, Tours.

CAUTY A. (1984, 1986, 1988), Taxinomie, syntaxe et économie des numérations parlées, *Amérindia* **9** et **11**, Sémantique de la mise en signes du nombre : une vision ordinale, *Amérindia* **13**,

Disponible sur : <http://celia.cnrs.fr/Fr/Amerindia.htm>

CHAMBRIS C. (2008), Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels. Thèse de Doctorat, LDAR Université Paris.Diderot, Paris.

Disponible sur : <http://tel.archives-ouvertes.fr/>

CONNÉ F. (2008), Coupes sémiotiques, dans *Le film de la Classe. Etude sémiotique et enjeux didactiques*, (Jean-Pierre Sautot éd.), 105-142, Lambert-Lucas, Limoges.

CRUMP T. (1990) *The Anthropology of Numbers*, Cambridge University Press.
Compte rendu de CAVEING M., (1994) *L'Homme* Vol. 34, n° 130, pp. 155-158.

DE BLOIS L. (1996), Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **16.1**, 71-127.

FISCHER J-P. (1990), Pourquoi les élèves asiatiques surclassent-ils les américains (en maths) ?, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **3**, 103-141, IREM de Strasbourg.

FUSON K., WEARNE D., HIEBERT J., MURRAY H., HUMAN P., OLIVIER A., CARPENTER T., & FENNEMA E. (1997), Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction, *Journal for Research in Mathematics Education* **28.2**, 130-162.

GUITEL G. (1975), Histoire comparée des numérations écrites, « *Nouvelle bibliothèque scientifique* », Flammarion, Paris.

IFRAH G. (1994), Histoire universelle des chiffres, Robert Laffont, Paris.

MOUNIER E. (2010), Une analyse de l'enseignement de la numération au CP. Vers de nouvelles pistes, Thèse de Doctorat, LDAR Université Paris.Diderot, Paris. Disponible sur : <http://tel.archives-ouvertes.fr/>

NUMA BOCAGE L. (1997), Etude de la médiation dans l'enseignement de la numération, Thèse de doctorat. Université René Descartes, Paris.

PEIRCE C.S (1906), Prolégomènes à une apologie du pragmatisme, *The Monist* **16**. Traduction française de Michel Balat. Disponible sur : <http://www.balat.fr/>

VERGNAUD G. (1991), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **10.2/3**.

Dictionnaires

GOELZER H. (1966), Dictionnaire Français Latin et Latin Français, Garnier-Flammarion, Paris.

NOEL, F (1833), Dictionnaire latin français. Disponible sur : <http://books.google.fr/>

ERIC MOUNIER
25, rue de Sambre et Meuse
75010 Paris
ericmounier@noos.fr

Annexe

Ecriture décimale	Français	Anglais	Allemand	Thaï
1	un	one	ein	neung
2	deux	two	zwei	seeaung
3	trois	three	drei	saam
4	quatre	four	vier	sii
5	cinq	five	funf	haa
6	six	six	sechs	hok
7	sept	seven	sieben	djet
8	huit	eight	acht	bpèèt
9	neuf	nine	neun	gaa
10	dix	ten	zehn	sip
11	onze	eleven	elf	sip-et
12	douze	twelve	zwölf	sip seeaung
13	treize	thirteen	dreizehn	sip saam
14	quatorze	fourteen	vierzehn	sip sii
15	quinze	fifteen	funfzehn	sip haa
16	seize	sixteen	sechzehn	sip hok
17	dix-sept	seventeen	siebzehn	sip djet
18	dix-huit	eighteen	achtzehn	sip bpèèt
19	dix-neuf	nineteen	neunzehn	sip gaa
20	vingt	twenty	zwanzig	yii-sip
21	vingt-et-un	twenty-one	ein und zwanzig	yii-sip-et
22	vingt-deux	twenty-two	zwei und zwanzig	yii-sip seeaung
...				
30	trente	thirty	dreizig	saam sip
31	trente- et-un	thirty-one	ein und dreizig	saam sip-et
40	quarante	forty	vierzig	sii sip
70	soixante-dix septante*	seventy	siebzig	djet sip
80	quatre-vingts octante* huitante*	eighty	achtzig	bpèèt sip
90	quatre-vingt-dix nonante*	ninety	neunzig	gaa sip
100	cent	one hundred	hundert	reeauy
1000	mille	one thousand	tausend	pan
10000	dix mille	ten thousand	zehn tausend	meeun

* En français de Suisse ou Belgique

DAVID BLOCK, KOSTAS NIKOLANTONAKIS & LAURENT VIVIER

REGISTRES ET PRAXIS NUMÉRIQUE EN FIN DE PREMIÈRE ANNÉE DE PRIMAIRE DANS TROIS PAYS

Abstract. Registers and numerical praxis at the end of first grade in three countries

Through numerical problems given to pupils of three different countries, we show the importance of representation registers and types of tasks for the mathematical activity. Besides some differences, sometimes marked, between the three nations, we identify combined influences of the register of the statement and the type of tasks. We distinguish two cases according to the link of the type of tasks with the institution.

Résumé. À travers des problèmes numériques posés à des élèves de trois pays différents, nous mettons en évidence l'importance des registres de représentation et des types de tâches sur l'activité mathématique. Outre des différences parfois marquées entre les trois pays, nous identifions des influences conjointes du registre de l'énoncé et du type de tâches en distinguant deux cas selon le rapport de ce dernier avec l'institution.

Mots-clés. Praxéologie, registre de représentation, nombre entier, étude internationale, grade 1.

Introduction

Dans cet article, nous étudions quelle influence sur les démarches de résolution peuvent avoir les représentations sémiotiques utilisées dans l'énoncé d'une tâche. Dans cette perspective, nous avons proposé (mai et juin 2010) un test à environ 200 élèves de 6/7 ans contenant 5 types de tâches numériques (effectuer des comparaisons, effectuer chacune des quatre opérations arithmétiques) et en faisant systématiquement varier le type de représentation des nombres : numérique-chiffré ou graphique. L'étude s'appuie ainsi sur les registres de représentation (Duval, 1993) et les praxis, types de tâches et techniques (Chevallard, 1999). Ce type d'analyse a déjà été utilisée dans des études sur la numération de position en base quelconque pour les futurs professeurs du premier degré en France et en Grèce (Nikolantonakis & Vivier, 2009, 2010).

Après une partie où nous exposons le cadre d'analyse, qui consiste en une prise en compte des registres de représentation dans les praxis numériques, le test et une analyse *a priori* des dix problèmes posés, nous présentons nos résultats. Cette section d'analyse commence par une description générale avec notamment différents profils nationaux. Notre objectif était d'établir un lien entre l'activité de l'élève et le système sémiotique en jeu dans l'énoncé pour certains types de tâches. Or, il est apparu un paramètre essentiel sur la nature du type de tâches étudié, selon qu'il est travaillé au cours de l'année scolaire ou non. Nos analyses se focalisent

donc sur ce point et mettent en évidence un rôle différent, selon le type de tâches considéré, des registres de représentation.

1. Cadre de l'étude

1.1. Description globale du test et de l'expérimentation

Nous considérons dans cet article les 5 types de tâches (Chevallard, 1999) suivants, qui ont été proposés dans un contexte de résolution de problème relatif au nombre cardinal et dont les énoncés en français figurent en Annexe 2 :

- T^1 : comparer deux nombres ;
- T^2 : déterminer la différence de deux nombres ;
- T^3 : déterminer la somme de deux nombres ;
- T^4 : déterminer le produit de deux nombres ;
- T^5 : déterminer le quotient d'un nombre par un autre.

Ce sont les cinq types de tâches numériques de base, que nous restreignons, pour notre étude en première année de primaire, aux *petits* entiers naturels. Le choix des types de tâches est donc mathématique mais il a également une fonction didactique essentielle pour notre propos, car nous proposons des types de tâches devant être acquises en fin de première année de primaire (T^1 et T^3), des types de tâches en cours d'apprentissage (T^2) et des types de tâches normalement pas, ou très peu, travaillés à ce niveau (T^4 et T^5). Ainsi, nous étudions des types de tâches qui sont diversement influencés par l'enseignement scolaire.

Afin d'étudier l'influence des représentations sémiotiques sur les activités des élèves, nous avons proposé aux élèves de l'étude ces cinq types de tâches énoncés dans deux systèmes sémiotiques différents. Nous considérons donc les deux systèmes sémiotiques de représentation (Duval, 1995) des nombres suivants :

- R_A : le registre numérique des écritures chiffrées ;
- R_B : le registre graphique de représentation des quantités discrètes.

Dans la suite, pour simplifier le texte, les expressions « traitement numérique » et « procédure numérique » font explicitement référence au registre R_A .

Le choix de R_A est évidemment lié à son importance sociale et curriculaire. R_B a été choisi de sorte que les représentations soient connues des élèves, suffisamment éloignées de R_A (en particulier les collections ne sont pas organisées par paquets) et qu'il permette un choix de conversion (ici nous en avons au moins deux : l'énumération 1 à 1 ou le groupement par paquet de dix).

Si R_A est bien un registre de représentation des nombres, précisons que R_B n'est pas un registre de représentation au sens strict de Duval (1993). En effet, les traitements possibles sur les éléments figuratifs sont externes à R_B car il n'y a pas de transformation interne. Cela aurait été le cas si l'on avait considéré une représentation matérielle des unités. Par exemple, pour comparer les deux collections de billes dans T_B^1 avec des billes matérielles, on pourrait réorganiser les collections en utilisant des sous-collections des billes blanches et noires de même cardinal ou bien mettre de côté simultanément une bille blanche et une bille noire jusqu'à épuisement d'une collection. Avec R_B cela est impossible et il faut alors simuler ces traitements¹ avec des traces externes² : entourer des *ronds* pour faire des paquets ou bien cocher simultanément un *rond* blanc et un *rond* noir jusqu'à épuisement d'une collection. En outre, le choix de représenter les nombres par des unités graphiques ressemblant aux matériels évoqués (billes, animaux, bonbons, ...) déroge également aux canons des registres de représentation mais ce choix, conscient, permet une meilleure compréhension de la consigne pour des enfants de cet âge. Malgré l'abus de terminologie, nous utiliserons parfois le terme de *registre* pour désigner R_B car ce qui nous importe est : 1) la possibilité de représentation que permet un système sémiotique, 2) les possibles conversions entre systèmes sémiotiques et 3) les traitements – qu'ils soient internes ou externes.

Le test propose de faire une étude croisée systématique de ces deux groupes : d'abord les types de tâches T^1 à T^5 énoncés dans le registre R_A puis les mêmes types de tâches énoncés dans le système R_B . L'objectif est de proposer des couples de problèmes qui ne diffèrent que par le registre de l'énoncé. En particulier les nombres en jeu et les contextes sont identiques, sauf³ pour T^4 . Bien entendu, le changement de registre de l'énoncé peut modifier le type de tâches, comme par exemple pour T_A^3 et T_B^3 ou pour T_A^4 et T_B^4 . Nous conservons toutefois ce codage pour les problèmes posés tout en sachant, pour ces deux couples, qu'il ne s'agit pas des mêmes types de tâches. Nous étudions alors les stratégies et procédures que les

¹ On peut aussi penser à donner les unités dessinées avec un crayon de papier. Ainsi, en gommant et en redessinant, on peut avoir les mêmes traitements qu'avec le registre matériel, internes donc. Toutefois, il ne paraît pas raisonnable de donner cette gestion des unités à des enfants de 6 ans.

² Précisons également que les traitements sur un registre matériel sont alors aussi, en quelque sorte, externes (il n'y a que peu de différences entre un trait de crayon entourant des unités graphiques et le fait de bouger des éléments matériels représentant les unités).

³ Les dessins utilisés dans les tâches posées dans le registre graphique, ne sont pas « décoratifs », ils sont porteurs d'informations numériques. Dans le cas des tâches posées dans le registre numérique, ce sont les contextes, et non pas les données numériques, qui sont représentés par des dessins dont la fonction n'est pas uniquement décorative (Elia et al. 2007), puisqu'ils facilitent la compréhension du contexte pour de jeunes enfants. Deux exceptions seront signalées dans l'analyse *a priori*.

élèves développent tout en pointant le registre dans lequel le type de tâches est effectué. Par exemple, pour T_B^1 , il peut y avoir un traitement (externe) dans R_B ou bien une conversion dans R_A puis un traitement dans R_A .

Nous ne prenons pas en compte deux registres intermédiaires qui jouent pourtant un rôle important dans cette étude : le registre verbal (notamment dans une énumération) et le registre des doigts de la main (pour un comptage par exemple). Nous avons observé effectivement leur utilisation par de nombreux enfants. Mais leurs utilisations ne laissent aucune trace et il aurait fallu opter pour d'autres méthodes, s'appuyant par exemple sur des entretiens filmés. Nous avons fait un autre choix expérimental en favorisant le nombre d'élèves afin de produire une étude statistique.

Le premier test est donné dans le registre R_A et le test dans R_B est donné une semaine plus tard pour que les enfants oublient les réponses, procédures, etc. Ils se sont déroulés à peu près en même temps dans les trois pays et ont concerné environ 213 élèves de la toute fin de la première année de l'école élémentaire. Finalement, 192 élèves ont réalisé l'ensemble du test dont la répartition est donnée dans la table 1. Une présentation de chaque problème a été faite et les réponses aux différentes questions des enfants étaient formulées pour ne pas orienter leur travail. On trouvera en section 1.4 le test proposé aux enfants dans la version française.

Nationalité	FR	GR	MX	Total
Nombre	61	45	86	192
Pourcentage	32%	23%	45%	100%

Tableau 1 : répartition des élèves par nationalité

1.2. Cadre d'analyse

Nous exposons dans cette section la manière dont nous prenons en compte les registres de représentation (Duval, 1993) dans les praxis (Chevallard, 1999) que nous utilisons dans notre étude (voir également Nikolantonakis & Vivier 2009, 2011).

En Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), c'est autour des *types de tâches* que s'élabore le travail en mathématiques (Chevallard, 1999). Dans notre étude, les élèves disposent d'au moins une *technique* τ pour effectuer un type de tâches T . Le bloc $[T, \tau]$ est nommé bloc des savoir-faire ou *praxis*. La production et la justification d'une technique nécessitent un regard théorique que Chevallard nomme une *technologie*. Cette dernière est un élément du bloc des savoirs, ou *logos*, que nous n'abordons pas dans cet article et qui fera l'objet d'une étude ultérieure. Praxis et logos forment une *praxéologie*.

Duval (1993, 1995, 2006) regroupe les signes utilisés dans le travail mathématique en registres de représentation sémiotique. Il distingue les *traitements*, une transformation sémiotique qui reste à l'intérieur d'un même registre de représentation R, et les *conversions*, une transformation sémiotique dont le résultat est exprimé dans un autre registre. Duval insiste particulièrement sur la différence cognitive entre ces deux transformations sémiotiques.

Le sémiotique en TAD est bien pris en compte à travers la notion d'*ostensif* (Bosch & Chevallard, 1999). Mais les ostensifs en TAD, même s'ils donnent lieu entre eux à une multiplicité d'interactions, ne sont pas constitués en système sémiotique. En particulier, cette notion ne prétend pas rendre compte de la dépendance d'une technique aux systèmes sémiotiques sur lesquels elle repose. Car précisément, la notion de *valence instrumentale* est attachée à un ostensif et non au système sémiotique en jeu, même si elle est travaillée à l'intérieur de praxéologies et dans le cadre de complexes d'ostensifs. Cela a-t-il du sens de parler de la valence instrumentale d'un chiffre ? Bien entendu non, car c'est le système d'écriture des nombres, en base dix par exemple, qui est alors à considérer. Malgré l'intérêt de cette notion d'ostensif, elle ne peut rendre compte de certaines situations et notamment de celles qui nous intéressent ici. Par exemple, pour la recherche de la parité d'un nombre, la technique qui porte sur les chiffres est totalement différente selon que l'on soit en base paire (le nombre est de la même parité que son chiffre des unités) ou impaire (le nombre est de la même parité que la somme de ses chiffres). C'est pourquoi nous avons opté pour une prise en compte du sémiotique par les registres de représentation. Nos objectifs sont ambitieux et sont de deux ordres :

- comprendre le rôle que peuvent avoir des registres de représentation dans une organisation mathématique – car il nous apparaît naturel d'introduire la notion de registre sémiotique au sein même des organisations mathématiques ;
- enrichir la présence du cognitif au sein de la TAD.

En TAD, un type de tâches n'est pas toujours énoncé en faisant référence aux registres de représentation utilisés. Or, une tâche est toujours exprimée à l'aide de registres sémiotiques et ces derniers peuvent, comme nous le constaterons, influencer l'activité mathématique⁴. Ainsi, nous indexons les types de tâches et techniques par le(s) registre(s) dans le(s)quel(s) ils sont exprimés. Un type de tâches T relatif au registre R est noté T_R . Bien entendu, il est tout à fait possible de considérer des types de tâches exprimés avec deux registres ou plus comme on peut

⁴ L'existence d'effets divers des types de représentations (description verbale, iconique, à travers de schémas, etc.) sur la performance des élèves en résolution de problèmes a été identifiée auparavant dans plusieurs recherches, comme par exemple (Elia, Gagatsis & Demetriou, 2007).

le constater avec la tâche *comparer* $\frac{2}{3}$ et $0,6$. Nous ne considérons ici que les types de tâches exprimés dans un seul registre (en revanche, les procédures de résolution peuvent utiliser plusieurs registres).

Afin de prendre en compte les registres de représentations en TAD, nous distinguons, en nous restreignant au cadre numérique (cf. la section suivante pour une justification de cette restriction) :

- une technique τ_R qui n'utilise qu'un seul registre mathématique R ;
- une technique $\tau_{R \rightarrow R'}$ qui correspond à une conversion d'un registre R vers un registre R' .

Il faut ici distinguer deux types de techniques que nous notons τ_R . Ce peut être évidemment un traitement proprement dit (Duval, 1993), c'est-à-dire une transformation sémiotique interne à un registre R , ou bien un autre type de technique qui fournit une réponse externe au registre R . Donnons un exemple de ce deuxième type : pour déterminer la parité d'un nombre écrit en base a , il n'y a pas forcément de transformation (si a est pair) et surtout le résultat n'est pas exprimé dans le registre initial – il ne s'agit donc pas d'un traitement au sens strict de Duval.

De même, s'il est clair qu'une technique mathématique ne se fait pas toujours de manière interne à un registre, notre cadre d'analyse permet de décomposer une technique mathématique comme une succession de techniques d'un des deux types précédents. Prenons l'exemple suivant issu de (Nikolantonakis & Vivier, 2011) sur la numération en base : pour trouver le successeur de $(66)_{sept}$, on peut :

- effectuer un traitement (ou technique) en base sept pour trouver $(100)_{sept}$.
- convertir $(66)_{sept}$ en base dix puis déterminer le successeur codé en base dix qui est 49 (et éventuellement reconverter en base sept).

Nous appelons une praxis $[T_R; \tau_R]$ relative à un registre R une R -praxis. Prenons par exemple le problème T_A^I (cf. Annexe 2). On dispose au niveau considéré de la technique τ_A qui consiste à comparer successivement les chiffres de gauche à droite des deux nombres. On dispose donc d'une R_A -praxis. Pour le problème T_B^I (cf. Annexe 2) plusieurs résolutions sont possibles :

- faire une conversion $R_B \rightarrow R_A$ ($\tau_{B \rightarrow A}$) pour obtenir les cardinaux des deux collections en écriture chiffrée puis utiliser τ_A (notons que $\tau_{B \rightarrow A}$ et τ_A sont deux techniques bien rodées à ce niveau d'enseignement comme nous le constaterons) ;
- faire un traitement dans R_B (insistons : ces traitements sont en fait externes, cf. section 1.1).

À travers cette distinction des techniques, nous voulons conserver une partie de l'activité cognitive de l'élève révélée par Duval afin de préciser les rapports personnels aux savoirs. Précisons que nous n'avons pas la prétention d'articuler les cadres de Chevallard et de Duval. Il s'agit plus modestement d'une prise en compte des registres sémiotiques au sein d'une praxis en se restreignant au cadre numérique (cf. section suivante). Outre une meilleure description praxéologique, ce travail théorique fournit, comme dans cette étude, des résultats qui ne semblent pas facilement détectables par d'autres moyens expérimentaux.

1.3. Restriction nécessaire au cadre numérique

L'objectif de cette reformulation des traitements et conversions dans le langage des praxéologies est de conserver leur différence cognitive tout en les considérant au sein d'une organisation mathématique que donne la TAD. Cette distinction des techniques permet une conciliation des deux cadres sur le point crucial des conversions. Bosch & Chevallard (1999, p. 117) commentent ainsi le cadre de Duval : « Or, dans ce qui est présenté comme un changement de registre qui ne dépendrait que du fonctionnement cognitif du sujet, nous voyons, quant à nous, la mise en œuvre d'une technique mathématique [...] ». Il nous semble que, dans un processus de changement de registre, pour bien rendre compte du phénomène, la technique mathématique en jeu et le fonctionnement cognitif du sujet sont tous deux à prendre en compte.

Néanmoins, afin que la reformulation que nous proposons soit didactiquement consistante, plusieurs précautions sont à prendre car assimiler sans précaution une conversion à une technique serait une négation de la distance cognitive irréductible entre conversion et traitement. Ce n'est certes pas notre objectif. Tout au contraire, nous voulons conserver une partie de cette distance dans le cadre de la TAD.

Tout d'abord, la distinction entre traitement et conversion est maintenue et, à la suite de Duval, nous insistons sur le caractère fondamentalement différent des deux types de techniques que nous notons de manière générique τ_R et $\tau_{R \rightarrow R'}$. Mais cela ne suffit pas car il faut également que ce que nous appelons une *technique de conversion* soit consistante du point de vue didactique. C'est ce que nous explicitons ci-dessous.

Dans toute conversion on trouve une partie algorithmique (ou algorithmisable) qui correspond au travail mathématique proprement dit et qui constitue la partie tangible de la conversion (par les traces écrites notamment). Mais il ne serait être question de réduire une conversion à un travail algorithmique. En particulier, lors d'une conversion, il apparaît toujours le choix du sujet de faire une conversion dans un registre qui est initialement totalement absent. Parfois, le choix d'une conversion parmi un panel de conversions est nécessaire ce qui peut alors entraîner des interférences entre les différentes conversions possibles. Une conversion étant

choisie, des éléments arbitraires sont souvent à la charge du sujet qui peuvent considérablement influencer, voire bloquer, la partie algorithmique notamment par une sensibilité importante aux variables didactiques. Enfin, de nombreuses autres variables cognitives sont à prendre en compte lors d'une conversion comme les problèmes de congruence ou l'univocité des représentations.

Prenons un exemple. Considérons la conversion entre les deux représentations suivantes d'une droite (non *verticale* pour simplifier) : son tracé dans un repère (registre graphique avec repère, noté R) et une équation du type $y=ax+b$ (registre de représentation fonctionnelle des droites, noté R') :

- Pour $R \rightarrow R'$. On peut choisir deux points arbitraires sur la droite, lire leurs coordonnées puis appliquer des formules ou résoudre un système d'inconnues a et b . On peut également déterminer b par l'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées, mais cela peut se révéler impossible à effectuer selon le graphique considéré, et a par un calcul de pente en mesurant un triangle rectangle. Le repère (y compris la position de la droite) constitue une variable cognitive de première importance (unités sur les axes, graduations des axes, présence ou non d'une grille, angle entre les axes, orientations des axes, noms des axes) qui peut considérablement influencer l'activité cognitive du sujet.
- Pour $R' \rightarrow R$. On peut choisir deux valeurs de x et calculer les valeurs de y correspondantes puis placer les points sur le graphique et tracer la droite. On peut également placer un point (le point de coordonnées $(0,b)$ par exemple) et utiliser le vecteur directeur $(1,a)$. Il est à noter qu'il faut également choisir un graphique avec une échelle pour chacun des deux axes. La nature et l'ordre de grandeurs des nombres a et b constituent des variables cognitives de première importance.

C'est cette partie algorithmique que nous dénommons *technique de conversion*. En particulier, et il s'agit ici d'une restriction importante et incontournable, on ne peut raisonnablement considérer une *technique de conversion* $\tau_{R \rightarrow R'}$ que lorsque le passage de R à R' peut être décrit de manière algorithmique ou tout du moins lorsque les variables cognitives de la situation n'ont que peu d'influence sur le déroulement de l'algorithme. Or, Duval (1995, page 42) précise que l'on ne peut pas toujours définir les règles de conversion ce qui limite la portée de notre proposition. Par exemple, la citation de Bosch et Chevallard (1999) que nous reprenons ci-dessus est relative à une expérimentation de Lemonidis (1990, p. 115) sur une conversion du registre figuratif vers le registre de l'écriture symbolique. Sur un segment d'extrémité A et partagé en dix segments égaux figure un point B (à cinq graduations de A) et un point C (à huit graduations de A) et l'on demande de compléter les trois relations suivantes entre longueurs orientées (l'orientation du segment n'est pas précisée) $AB = \dots BC$, $CB = \dots AB$ et $AC = \dots CB$.

Bien que la tâche de conversion demandée soit totalement algorithmisable, la partie algorithmique ne rend pas compte fidèlement de la conversion. Outre les résultats expérimentaux de Lemonidis (1990), on peut en particulier avancer les objections suivantes :

- la variation de nombreuses unités significantes dans le registre figuratif ne correspond pas à des variations dans le registre symbolique – ce qui est vrai pour la conversion inverse ;
- la conversion demande de repérer l'objet à convertir alors que celui-ci n'est pas explicitement visible dans le registre figuratif.

C'est pourquoi nous nous restreignons au cadre numérique car, généralement, une conversion entre deux registres de représentation des nombres peut être décrite par un algorithme. Ce dernier rend fidèlement compte de la conversion en particulier parce qu'en général on ne retrouve pas les deux objections précédentes. En tout état de cause, la possibilité que nous soulevons dépend fortement des registres en jeu et il est nécessaire, pour chaque étude, de discuter de ce point.

Pour notre étude, la conversion de R_B vers R_A n'est pas purement algorithmique car il y a un choix de l'ordre des unités comptabilisées dans une énumération ou des paquets de dix à former. Nous faisons l'hypothèse que cela n'influence pas le déroulement de l'algorithme (cette hypothèse est largement confirmée pour la population étudiée par les taux de réussite à T_B^1).

Il est clair que, dans notre cadre d'analyse, du caractère cognitif spécifique d'une conversion nous ne conservons qu'une partie qui contient notamment le choix conscient d'un sujet de faire cette conversion. C'est ainsi que parfois la différence cognitive entre une conversion et un traitement peut s'effacer totalement car seule la composante algorithmique, qui est une technique au sens de la TAD, est du ressort du sujet, soit parce que l'on demande explicitement au sujet de faire cette conversion, soit parce qu'elle correspond à une technique qui a été travaillée dans l'institution pour effectuer un certain type de tâches (cf. Nikolantonakis et Vivier, 2010 pour un exemple avec les bases de numération pour l'écriture des entiers).

1.4. Analyses *a priori*

Nous présentons ici une analyse *a priori*⁵ des dix tâches proposées aux élèves et les principaux critères de codage.

Les trois premières tâches impliquent des connaissances enseignées dès la première année de l'école (comparaison, soustraction et addition), dans les trois pays, et

⁵ Certaines procédures peu représentatives ne sont pas exposées ici.

donc vis-à-vis desquelles les enfants disposaient probablement d'au moins une technique enseignée.

En revanche, les tâches 4 et 5 impliquent des connaissances (multiplication et division) qui, en principe, ne sont pas enseignées à ce niveau. Ainsi, pour ces deux tâches, les enfants ne disposaient probablement pas d'une technique enseignée mais, comme nous le verrons, ils pouvaient mettre en œuvre d'autres types de raisonnement pour résoudre les problèmes posés.

Les problèmes impliquent une seule opération. Nous explicitons ci-dessous les variables numériques et les relations entre les données qui furent considérées. Nous montrerons aussi les procédures et stratégies envisagées. Nous utilisons les indicateurs suivants traités dans l'analyse statistique comme des variables binaires :

nr : pas de réponse au problème posé ;

ok : bonne réponse (avec pour certaines questions une tolérance, signalée par la suite dans l'analyse a priori des questions concernées) ;

conv : présence d'une conversion de registre ;

tRa : traitement dans R_A ;

tRb : traitement dans R_B ;

repR : réponse dans le registre de l'énoncé ;

sign : utilisation d'un signe opératoire (+, −, × ou :).

Avant d'entrer dans le détail de chaque tâche, nous explicitons certains choix globaux dans les images proposées aux enfants.

1.4.1. Les fonctions des représentations

Les images utilisées dans les tâches représentent tantôt des éléments du contexte (enfants, animaux, billes, etc.) tantôt des données numériques. Dans le registre graphique, les données numériques ne sont fournies que par le moyen des images, elles jouent un rôle de représentation *informationnelle* (Elia et.al., 2007).

Dans ce même registre graphique, certains éléments du contexte ne sont représentés que par les images et ont donc aussi une fonction informationnelle, par exemple, le fait qu'il y a deux enfants, dans T^1_B , ou les types d'animaux dans T^3_B . Or la plupart des éléments du contexte sont doublement représentés : à travers l'image et dans le texte (registre verbal). Par exemple les billes dans T^1_B , les

bonbons et les deux enfants dans T^2_B , les trois amis dans T^5_A . Ces images ont donc une fonction différente, appelée *représentationnelle* (Op. cit.)⁶.

Dans le cas des tâches posées dans le registre numérique R_A , ce sont les contextes, et non les données numériques, qui sont représentés par des images. Dans ce cas aussi, la plupart des éléments du contexte sont doublement représentés (dans l'image et dans le texte, par exemple les billes dans T^1_A) et quelques-uns ne sont représentés que par l'image (par exemple, les deux enfants de T^1_A ou les deux types d'animaux dans T^3_A).

Encore deux exceptions doivent-être signalées :

- la tâche T^4_A , dans laquelle l'énoncé fait référence à un arrangement rectangulaire de 7×4 , est la seule où l'énoncé est purement verbal, sans dessin explicitant le contexte. Nous avons considéré qu'une représentation même partielle de l'arrangement rectangulaire deviendrait une aide importante en orientant fortement vers une procédure graphique.
- la tâche T^5_A , impliquant un partage en parts égales, est la seule parmi les tâches numériques où une des données (le diviseur) est doublement représentée, de façon numérique dans le texte et aussi graphique à travers le dessin des trois enfants. Nous avons considéré que le problème était suffisamment difficile avec le dividende exprimé uniquement de façon numérique. La représentation graphique du diviseur (les 3 enfants) a-t-elle pu favoriser les procédures graphiques ? Il est bien entendu possible que cela puisse renforcer le choix d'une stratégie graphique, mais nous faisons l'hypothèse que cette influence est faible étant donné que la donnée la plus pénible à représenter graphiquement est le dividende, celle des 24 gâteaux.

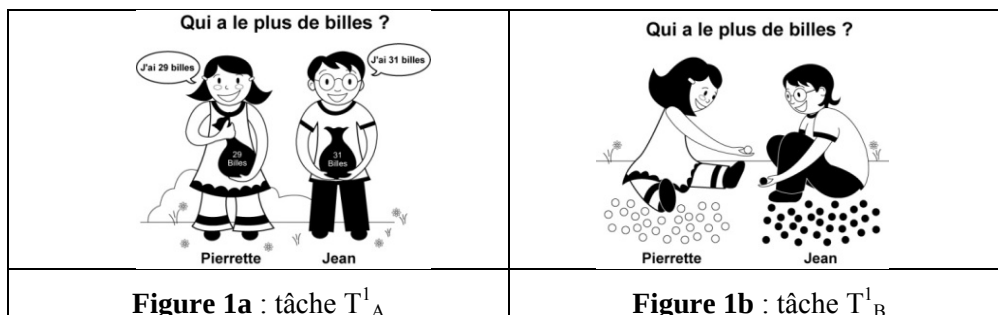
1.4.2. T^1 : la comparaison $29 < 31$

T^1_A . Les nombres ont deux chiffres et une différence petite entre eux, on peut donc s'attendre à une reconnaissance immédiate du nombre le plus grand (nr=0 ; ok=1).

T^1_B . Les cardinaux des collections ne sont pas comparables par perception visuelle et les billes sont en désordre, ce qui favorise une stratégie d'énumération. La procédure probable est le dénombrement de chaque collection et la comparaison

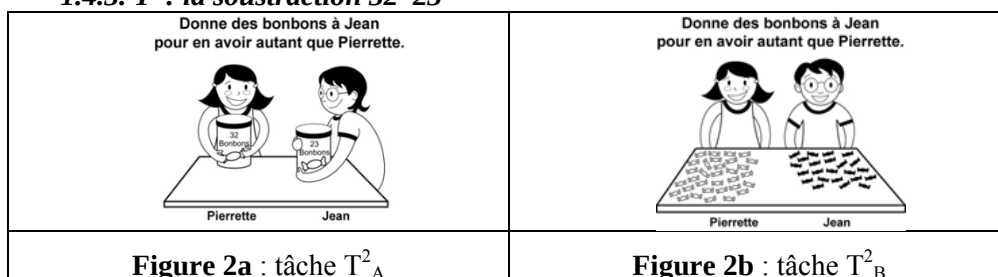
⁶ La fonction représentationnelle consiste à représenter une partie ou toute l'information du problème (déjà donné dans le texte). Ce type de représentation, à la différence des représentations informationnelles, est dispensable. Elia et al. (2007) distinguent, en plus de ces deux types, la fonction décorative qui n'apporte pas d'information sur le contenu du problème (comme les fleurs en T^1 ou le banc en T^5_A). Cette classification est une adaptation de celle de Carney & Levin (2002).

des nombres, ce qui implique une conversion ($\text{conv}=1$), et un traitement numérique ($\text{tRa}=1$). On s'attend à des erreurs de numération.



Des procédures graphiques ($\text{tRb}=1$) sont aussi possibles : comparaison par perception visuelle des collections ou une correspondance 1 à 1, bien que cette dernière soit peu probable car bien moins économique que la procédure par conversion dans R_A .

1.4.3. T^2 : la soustraction 32–23



Il s'agit d'un problème de soustraction du genre rapport entre mesures, troisième catégorie de la classification de Vergnaud (1982, 1991). Pour l'attribution du code ok, on applique, dans les deux tâches, une tolérance de ± 1 .

T_A^2 . Les nombres ont deux chiffres, les mêmes (2 et 3) ce qui pourrait mener à les considérer égaux ; la différence (9) peut être contrôlée avec les doigts. La soustraction avec l'algorithme a une complication : le chiffre des unités du grand nombre est plus petit que celui du petit nombre, il y a donc une retenue.

Le traitement le plus probable est numérique ($\text{tRa}=1$, $\text{tRb}=0$) par exemple par sur-comptage du petit nombre au grand nombre. Ce comptage peut s'effectuer à l'aide des doigts (le nombre de doigts levés étant le résultat cherché), sans laisser aucune trace, ou bien en dessinant les bonbons au fur et à mesure du sur-comptage ($\text{conv}=1$), ou encore en écrivant les nombres 24, 25...32. Dans ce cas, pour donner la réponse, il faut compter les bonbons ou énumérer les nombres et écrire le

nombre trouvé ($repR=1$). Or, il est possible de laisser comme réponse les bonbons dessinés ($repR=0$) ou la liste des nombres écrits ($repR=1$).

La procédure graphique est peu probable car elle est laborieuse : dessiner les bonbons ($conv=1$), les mettre en correspondance et donner comme réponse les bonbons non associés.

La tâche peut être interprétée aussi comme s'il s'agissait d'enlever des bonbons à la fille pour en donner au garçon. Dans ce cas la tâche devient plus complexe. Plusieurs procédures numériques sont possibles (trouver la différence, 9, et donner au garçon 4 ou 5 bonbons ; s'approcher peu à peu en enlevant chaque fois un bonbon à la fille et en le donnant au garçon). Les procédures graphiques sont à nouveau coûteuses : dessiner les collections puis faire passer quelques bonbons d'une collection à l'autre. Cette interprétation sera considérée correcte.

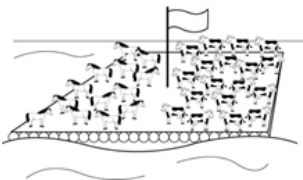
Une autre interprétation erronée possible consiste à écrire « 32 » ou bien dessiner 32 bonbons pour Jean ($nr=1$).

T_B². On peut déterminer visuellement quelle collection est la plus grande (ceci est précisé dans la consigne), mais on ne peut pas déterminer visuellement la différence. La tâche implique donc une soustraction.

Cette fois le traitement numérique ($tRa=1$, $tRb=0$) n'est plus tellement avantageux vis-à-vis d'un traitement dans R_B . Il implique de dénombrer chaque collection ($conv=1$), éventuellement écrire les nombres (au moins un d'eux comme mémoire) puis faire la soustraction.

Le traitement graphique ($tRb=1$) ne consiste qu'à faire une correspondance 1 à 1, ou par petits groupes. Une fois épuisée une collection, les bonbons de l'autre qui n'ont pas de couple, indiquent le résultat. Il faut encore compter ces éléments et écrire le nombre ($conv=1$) soit dessiner une collection équivalente.

1.4.4. **T³ : la somme 13+18**

Combien y a-t-il d'animaux sur ce bateau ? 	Combien y a-t-il d'animaux sur ce radeau ? 
Figure 3a : tâche T_A³	Figure 3b : tâche T_B³

Il s'agit d'un problème additif de composition, première catégorie de la classification de Vergnaud (1982, 1991), la somme correspond à une classe (animaux) qui en contient deux autres (moutons et chèvres ou chevaux et vaches).

T³_A. Les cardinaux des collections sont des nombres de deux chiffres entre 10 et 20. La somme fait apparaître une retenue.

La somme peut être faite par calcul mental ou bien en posant l'addition écrite (les élèves des trois pays ont déjà commencé à étudier l'algorithme). Dans les deux cas nous avons un traitement numérique ($tRa=1$, $tRb=0$). On peut s'attendre à des oublis de la retenue si l'algorithme est utilisé.

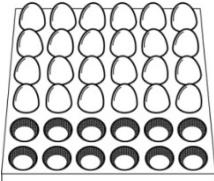
Il est aussi probable que certains élèves représentent graphiquement les deux nombres ($conv=1$) pour compter la collection totale ($tRa=0$), ou au moins une des deux pour appuyer le comptage ($tRa=1$). Nous avons considéré une tolérance de ± 1 (sommes correctes: 30, 31 ou 32).

T³_B. Les collections sont dessinées et distinctes, les éléments de chaque sous-ensemble sont en désordre, une stratégie d'énumération est donc requise : comptage global ($tRa=0$, $conv=1$), ou bien comptage de chaque collection et somme, écrite ou par calcul mental ($tRa=1$, $conv=1$). Dans ce dernier cas il devrait y avoir au moins un nombre écrit, comme mémoire.

L'écriture des deux cardinaux, sans faire la somme sera considérée comme une absence de réponse ($nr=1$, $conv=1$).

Les dénombrements seront pris comme corrects à ± 1 ; dans le cas d'une somme effectuée, nouvelle tolérance de ± 1 (par exemple, si 12 chevaux et 18 vaches, on tolère 29, 30, 31 ; etc.).

1.4.5. T⁴ : la multiplication 7×4

Dans une classe, il y a 7 rangées de 4 tables. Combien y a-t-il d'élèves ?	Combien y a-t-il d'œufs sur cette plaque ? 
Figure 4a : tâche T⁴_A	Figure 4b : tâche T⁴_B

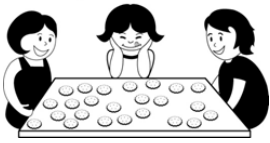
T⁴_A. Il s'agit d'un arrangement rectangulaire. Comme nous l'avons déjà dit, dans ce cas il n'y a pas de dessin.

Le traitement numérique est possible avec une addition répétée ($tRa=1$, $tRb=0$). Le problème étant nouveau pour les enfants et l'énoncé faisant référence à une distribution spatiale, il est probable que plusieurs représentent graphiquement les rangées et comptent les éléments ($tRa=0$), avec une représentation numérique du résultat ($repR=1$).

Étant donné que le registre est numérique et le problème est nouveau pour les enfants, une erreur possible consiste à faire la somme des données (indicateur supplémentaire $rep11=1$). Une tolérance de ± 1 est donnée sur la réponse lors d'un dénombrement ainsi qu'une tolérance de ± 1 sur le nombre de paquets de 4 tables.

T⁴_B. Il s'agit de dénombrer une collection dessinée et structurée en lignes et colonnes. Il n'y a pas de difficulté d'énumération, donc le dénombrement est facilité ($conv=1$). L'addition répétée est possible ($tRb=0$, $tRa=1$).

1.4.6. T⁵ : la division $24 \div 3$

3 amis se partagent 24 gâteaux en parts égales. Quelle part ont-ils chacun ? 	Les amis se partagent des gâteaux en parts égales. Quelle part ont-ils chacun ? 
Figure 5a : tâche T⁵_A	Figure 5b : tâche T⁵_B

Le problème pose un partage équitable⁷ et donne lieu à une plus grande diversité de procédures que dans les autres problèmes posés.

T⁵_A. Le diviseur est suffisamment petit pour permettre l'utilisation de l'addition répétée. Il n'y a pas de reste.

Le traitement numérique ($tRa=1$, $tRb=0$) probable est l'utilisation de la somme répétée d'un quotient approché, puis la comparaison de la somme obtenue avec le dividende (24) et ensuite, ajustement du quotient jusqu'à atteindre l'exhaustivité.

Les traitements graphiques ($conv=1$, $tRa=0$, $tRb=1$) sont moins probables puisqu'il faut dessiner la collection.

T⁵_B. La collection à partager est dessinée, les éléments sont en désordre. On peut s'attendre à ce que les procédures graphiques soient fréquentes ($tRb=1$, $tRa=0$). Les enfants peuvent faire : une subdivision approchée, par perception visuelle, probablement non équitable, de toute la collection ; trois petits groupes de même cardinalité en laissant un reste ; une distribution cyclique 1 par 1, (ou 2 par 2, 3 par 3, pour aller plus vite) tout en contrôlant le nombre total de gâteaux repartis.

Les procédures numériques restent possibles : dénombrer la collection ($conv=1$) puis utiliser la procédure décrite plus haut de la somme répétée d'un quotient

⁷ La condition d'exhaustivité n'a pas été explicitée, elle fut donnée oralement en France et en Grèce, au Mexique dans deux des trois classes.

approché avec des ajustements ($tRb=0$; $tRa=1$). Lorsque des ajustements sont faits sur la collection dessinée, on considérera que le traitement est hybride puisqu'il utilise la représentation graphique pour faire une première subdivision et pour identifier le reste ainsi que le registre R_A pour contrôler l'égalité des groupements ($tRa=1$, $tRb=1$).

Un autre traitement hybride consiste à écrire le nombre 1 sur trois gâteaux, le nombre 2 sur trois autres, etc. jusqu'à désigner tous les gâteaux. Le dernier nombre utilisé est le résultat ($tRa=1$ et $tRb=1$).

Les réponses 7, 8 et 9 sont considérées comme correctes et aussi 5 et 6 si la procédure est correcte et qu'il y a une idée du reste.

2. Influences sur l'activité mathématique

Les diagrammes que nous proposons sont des extraits du diagrammes complets afin d'en augmenter la lisibilité. Les arbres de similarité sont construits à l'aide du logiciel CHIC en considérant les nationalités comme des variables secondaires (FR, GR et MX). Nous renvoyons le lecteur à la consultation de l'ouvrage édité par Régis Gras, Jean-Claude Régnier & Fabrice Guillet (2009) pour une description de l'utilisation et des fonctionnalités du logiciel CHIC.

2.1. Structure générale

On distingue clairement dans l'arbre de similarités suivants (cf. figure 6) une structure relative aux deux registres de représentation et transversale aux types de tâches proposés : les traitements dans un des deux registres, R_A ou R_B , sont clairement séparés (on note toutefois deux exceptions : 3b-tRa et 1b-conv). On a donc effectivement accès, par notre analyse, à une partie de l'activité cognitive de l'élève lorsqu'il est confronté à un type de tâches numérique puisque l'on peut distinguer dans cet arbre de similarité les traitements et les conversions.

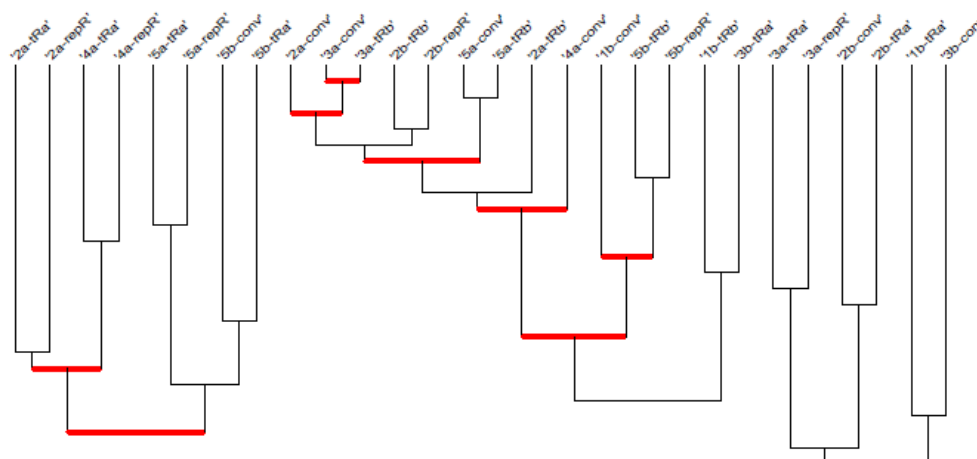


Figure 6. Arbre de similarités pour les indicateurs relatifs aux registres

Cette structure se retrouve pour chaque type de tâches : l'arbre de similarités pour chaque type de tâches montre, de manière moins marquée pour T^3 et T^5 , deux blocs distincts selon le registre de traitement, R_A ou R_B , avec également une forte similarité entre les indicateurs des signes numériques d'opération (+, −, ×, ÷).

Pour ce qui est de l'utilisation des signes, on observe (cf. annexe 1) que ceux-ci sont plus présents lorsque le registre de l'énoncé est R_A ce qui montre que, sans surprise, les signes sont plutôt reliés au registre R_A . $T^3_{A\text{-sign}}$ présente un taux (24%) largement supérieur aux autres indicateurs « sign » (cf. annexe 1). Ceci s'explique par le fait que ce type de tâches est bien travaillé au cours de cette première année d'école primaire et cette situation de réunion de collection est emblématique de la somme et du signe « + ».

2.2. Les profils nationaux

Le calcul des typicalités (en risque) des variables secondaires FR, GR et MX dans l'arbre de similarité avec les indicateurs ok, tRa, tRb et sign (cf. figure 7) montre trois profils différents pour chacun des trois pays (cf. Tableau 2) : La population française (FR) est typique d'une utilisation des signes. La population mexicaine (MX) est typique d'un traitement dans le registre graphique « tRb » – l'indice de similarité peut paraître faible, mais on retrouve cette typicalité aux nœuds 12 (indice 0,80) et 13 (indice 0,77). La population grecque (GR) est typique des nœuds 11 et 15 qui regroupent les indicateurs de traitement numérique « tRa ».

Ainsi, il semble que les élèves français ont une plus grande tendance à la formalisation par l'utilisation des signes d'opérations, les élèves mexicains utilisent plus souvent la conversion pour un traitement dans R_B (ou hybride) d'un type de

tâches, même s'il est exclusivement énoncé dans le registre R_A . À l'opposé des élèves mexicains, les élèves grecs semblent plutôt rester dans le registre R_A pour résoudre un problème posé dans R_A .

Nœud	9	11	15	16
Indice de similarité	0,95	0,85	0,61	0,45
France (FR)	0,06	0,98	0,82	0,81
Grèce (GR)	1	0,00	0,00	1
Mexique (MX)	0,72	1	0,98	0,00

Tableau 2 Typicalité des pays (indices et risques sont arrondis à 2 décimales)

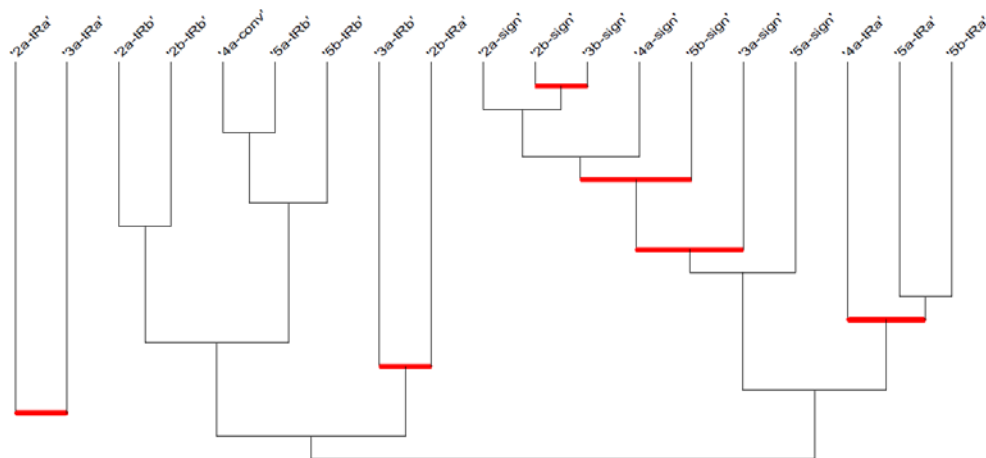


Figure 7. Arbre de similarités pour les indicateurs ok, tRa, tRb et sign

Si le profil grec se voit également sur les pourcentages (cf. annexe 1), les profils français et mexicains ne peuvent se détecter à l'aide uniquement des pourcentages même si des tendances peuvent être distinguées.

En poussant un peu plus loin l'analyse en se restreignant au registre numérique R_A , on voit que (cf. figure 8) les variables nr et sign sont similaires avec un indice au niveau 9 de 0,81 et se distingue d'un groupe ok car l'indice au niveau 11 est faible (0,09). On retrouve le fait que la population française est typique de l'utilisation des signes (au niveau 9 : risque pour FR = 0,01 ; risque pour GR = 1 ; risque pour MX = 0,70). Notons au passage que les typicalités pour le groupe ok sont plus nuancées (au niveau 10 : risque pour FR = 0,71 ; risque pour GR = 0,66 ; risque pour MX = 0,25).

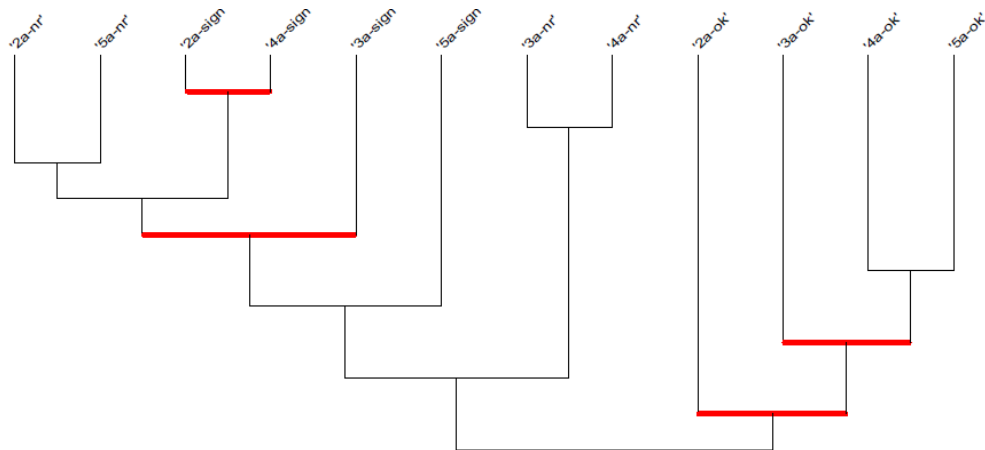


Figure 8. Arbres de similarités pour le registre R_A

Le diagramme de la figure 8 laisse penser que l'utilisation des signes opératoires gêne l'entrée dans un problème et sa résolution.

Des nuances seraient à apporter si l'on prenait en compte les classes dans les arbres de similarité. On pourrait ainsi parler de l'influence de l'enseignement reçu pendant l'année scolaire, ce qui pourrait préciser l'influence culturelle. Une étude plus approfondie sur un plus grand nombre de classes et mieux réparties dans chaque pays concerné serait nécessaire pour aller plus avant.

2.3. Le cas des types de tâches travaillés : T^1 ; T^2 ; T^3 ; T^4_B

Par delà les nationalités, on s'aperçoit que les items T^1_A , T^1_B , T^3_B et T^4_B ont un fort taux de réussite (pour T^1_A et T^4_B aucune tolérance n'est appliquée). Ce n'est pas une surprise puisque l'on dispose à ce niveau d'enseignement d'une technique de conversion : le dénombrement par comptage des éléments des collections présentées. Les taux indiquent alors que non seulement le dénombrement de collection dont le cardinal est proche de trente est maîtrisé par beaucoup d'enfants, mais qu'il en est également de même pour la comparaison de deux nombres écrits dans R_A (effectuée souvent mentalement car, pour T^1_B , les nombres sont très rarement écrits). Les types de tâches *dénombrer une collection* et *comparer deux nombres dans R_A* sont routiniers pour une très large majorité d'élèves

Nous y voyons ici des types de tâches et des techniques qui sont reconnus et travaillés dans les trois pays. Ceci est confirmé par les manuels scolaires des trois pays où ces types de tâches et techniques sont travaillés dès les premières pages. Notons que l'investissement est sans doute plus fort pour la population grecque comme semble l'indiquer les taux de réussites plus élevés pour ces 4 items (cf. annexe 1).

On note tout de même deux différences entre T^3_B d'une part et T^1_A , T^1_B et T^4_B d'autre part : il y a un plus grand taux de « nr » qui s'explique en partie par des élèves qui dénombrent les deux sous-collections sans répondre à la question et il y a un taux plus faible de « ok » qui s'explique aussi en partie par le fait que 13% d'élèves font une somme après dénombrement ce qui augmente la probabilité de faire des erreurs. Quoiqu'il en soit, il paraît clair que le fait d'avoir, pour T^3_B , deux sous-collections avec des unités graphiques différentes (vache ou cheval) modifie ce que l'on pourrait appeler la « composante cognitive » du type de tâches *dénombrer une collection*⁸.

On remarque que si T^3_A est un type de tâches bien identifié et travaillé, la réussite pour les nombres donnés dépasse à peine la moitié de l'effectif, ce qui fait une différence avec le dénombrement d'une collection. Ainsi, une grande différence de traitement des deux versions de T^3 apparaît. Pour T^3_B , seul 13% des élèves font un traitement dans R_A après un dénombrement des deux sous-collections d'animaux, les autres reconnaissent un problème simple de dénombrement par comptage (ils dénombrent simplement une collection d'animaux).

Pour les types de tâches travaillés que sont T^1_A , T^1_B , T^3_B , T^4_B et, dans une moindre mesure T^3_A , si le registre de l'énoncé modifie évidemment l'activité des élèves, il ne semble pas influencer la stratégie de résolution qui consiste à choisir R_A comme registre pour effectuer les traitements (avec donc une conversion dans le cas d'un énoncé dans R_B). Majoritairement les procédures observées sont les suivantes :

- T^1_A : technique de comparaison dans R_A ;
- T^1_B : dénombrement par énumération (technique de conversion $R_B \rightarrow R_A$) puis technique de comparaison dans R_A ;
- T^3_A : technique de somme dans R_A ;
- T^3_B et T^4_B : dénombrement par énumération (technique de conversion $R_B \rightarrow R_A$).

T^2 est également, dans une moindre mesure, un type de tâches étudié au niveau considéré. Globalement, pour T^2 , on note une très forte tendance à faire un traitement dans R_A pour résoudre ce type de tâches⁹. Comme pour les types de tâches précédemment étudiés (T^1 , T^3_A , T^3_B et T^4_B), pour ce type de tâches T^2 le registre de l'énoncé n'influence pas les stratégies des élèves (i.e. le choix du registre R_A pour effectuer les traitements).

⁸ Le fait d'avoir une collection en désordre, il s'agit d'une différence avec T^4_B , ne semble pas jouer vu la réussite à T^1_B .

⁹ On pourrait détailler selon le registre de l'énoncé : pour T^2_A , la procédure graphique est plus coûteuse, mais ce n'est plus le cas pour T^2_B (cf. section 1.4.3).

La chute de réussite, en proportion de l'effectif, de 76% pour T_A^2 à 51% pour T_B^2 s'explique bien par le fait que les élèves ont appris à faire des soustractions de ce type, mais si le registre R_B permet une meilleure compréhension de l'énoncé, il n'en reste pas moins que l'usage de la soustraction dans R_A nécessite d'abord de dénombrer les collections, avec de possibles (mais sans doute rares) erreurs, et ensuite de faire la soustraction, avec un possible oubli des nombres car beaucoup d'enfants ne notent pas les nombres obtenus alors que l'on observe des traces de comptage¹⁰.

Pour ces types de tâches travaillés et plus spécifiquement pour T^2 , tout se passe comme si le registre R_A « happait » l'activité mathématique de l'élève alors que ce n'est pas nécessairement le registre le plus efficace et le plus sûr pour résoudre le problème (cf. section 1.4.3). Notons que, si le registre R_A ne happe pas l'activité mathématique pour T_B^3 – par exemple en faisant la somme des cardinaux des deux sous-collections – c'est en fait parce que l'élève le reconnaît comme un autre type de tâches *dénombrer une collection* qui a une forte présence institutionnelle.

2.4. Types de tâches non travaillés à l'école : T_A^4 ; T^5

S'il semble que le registre de l'énoncé n'influence pas les stratégies de résolution des élèves pour les types de tâches travaillés, en revanche, l'influence est grande pour les types de tâches en marge de l'enseignement reçu. Ces types de tâches sont ici T_A^4 et T^5 .

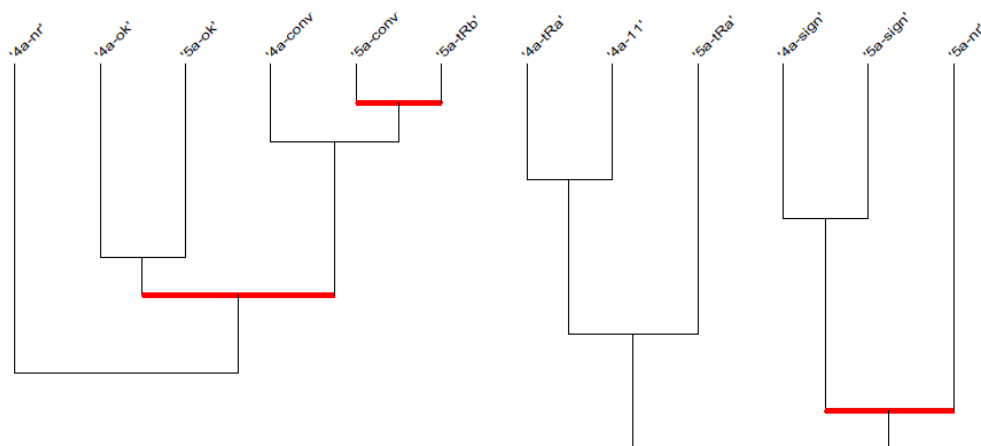


Figure 9. Arbre des similarités pour T_A^4 et T^5

¹⁰ Cette explication est également valable pour la petite différence de réussite aux items T_A^1 et T_B^1 . Mais on note alors une grande différence dans la maîtrise des techniques pour effectuer une comparaison ou une soustraction dans R_A .

T_A^4 et T^5 sont deux types de tâches qui ne sont pas, ou très peu, travaillés et pour lesquels on ne dispose pas de l'opération idoine. L'arbre des similarités pour T_A^4 et T_A^5 (cf. figure 9) montre une grande similitude des deux problèmes (exception faite de l'indicateur « nr ») :

- Les réussites sont liées au niveau 5 (indice=0,98) et se regroupent avec les conversions dans R_B pour résoudre le problème au niveau significatif 6 (indice = 0,92). Plus spécifiquement pour T_A^4 , le taux de réussite global de 45% passe à 62% pour la sous-population des élèves (effectif 76) qui ont fait une conversion à cet item. Le pourcentage de 62% pour la sous-population est significativement supérieur au pourcentage de la population totale puisque, par une approximation normale, au seuil 1% la fréquence d'un échantillon de la population totale est inférieure à 53%.
- De leur côté les traitements dans R_A – avec la réponse 11 à T_A^4 – et les indicateurs « sign » forment un groupe séparé, notamment des indicateurs de réussite.

Nous avons repéré que très souvent, pour T_B^5 , l'utilisation de R_B était rarement exclusive et que beaucoup d'élèves ont utilisé des procédures hybrides (codage $tR_A=tR_B=1$). En particulier, la stratégie qui consiste à faire une part, puis à faire deux autres parts équipotentes et enfin à rectifier ces quantités ne peut être faite que par une comparaison des nombres des trois parts, par comptage, la comparaison se faisant dans R_A (et mentalement, cf. la discussion sur T^1 en section précédente). Ceci explique sans doute le relatif bon taux de réussite à cet item T_B^5 .

La différence de réussite entre T_A^5 et T_B^5 peut s'expliquer par le fait que les procédures hybrides sont favorisées par un énoncé dans R_B . On peut en effet supposer qu'une conversion $R_B \rightarrow R_A$ n'est pas problématique et que, puisque l'on donne le problème dans R_B , la responsabilité d'utiliser R_B n'est pas à la charge de l'élève. Par ailleurs, la différence de réussite entre T_B^5 et T_B^2 semble pouvoir s'expliquer en grande partie par le fait que T_B^2 est travaillé, et donc R_A « happe » l'activité mathématique, contrairement à T_B^5 . Ainsi, un travail dans R_B semble possible pour T_B^5 et non pour T_B^2 .

Ces résultats permettent d'émettre une hypothèse sur l'importance de coordonner ces deux registres, R_A et R_B , dans les procédures de résolution pour un type de tâches non routinier.

Conclusion

À partir de cette étude internationale sur les problèmes numériques en fin de première année de l'école primaire, nous avons mis en évidence l'influence conjointe des registres de représentation et des praxis sur l'activité mathématique des élèves. Plus précisément, nous pouvons préciser une hypothèse sur l'importance du registre de représentation pour certains types de tâches.

Pour un type de tâches travaillé, on suppose qu'un élève reconnaît ce type de tâches, le registre dominant pour le traitement est R_A – et ce, même si celui-ci n'est pas le meilleur registre pour le traitement (cf. T_B^2). Il n'y a de ce fait pas de réelle influence du registre de l'énoncé sur les stratégies des élèves même si, comme nous l'avons dit, les activités changent puisque cette stratégie globale peut nécessiter une conversion selon l'énoncé.

On peut avancer deux explications :

- le coût d'une procédure graphique par rapport à une procédure numérique, surtout lorsqu'il y a un minimum de maîtrise de la R_A -praxis – ce qui est notamment le cas pour les types de tâches qui ont été travaillés ;
- lorsque l'on traite d'un type de tâches qui a été travaillé, le rôle de l'institution est justement de développer une praxis qui est, étant donné que l'institution favorise R_A , une R_A -praxis.

Pour les autres types de tâches, le registre de l'énoncé influence largement les traitements et la réussite. Car si l'énoncé se situe dans R_A , on a tendance à y rester ce qui ne favorise pas forcément la réussite. Cette tendance semble venir directement du phénomène précédent qui favorise R_A . En revanche, un énoncé dans R_B permet de mieux appréhender un type de tâches non travaillé.

Comme le signale Duval, la coordination des registres est importante. Mais il nous semble que cette importance ne s'exprime pas de la même manière selon le type de tâches :

- s'il est travaillé, l'important est de maîtriser la conversion $R_B \rightarrow R_A$ et la R_A -praxis enseignée (cf. par exemple T_A^3 où beaucoup d'élèves ne maîtrisent pas la technique de la somme) ;
- s'il n'est pas travaillé, l'important est une bonne coordination des deux registres, sans se limiter à la maîtrise des conversions, comme par exemple lors d'une procédure qui est principalement un traitement dans un des deux registres mais avec un contrôle de l'activité dans l'autre registre (cf. T_B^5).

Néanmoins, les différents points explicités sont directement liés à l'enseignement reçu que ce soit à travers des cultures différentes, comme nous l'avons mis en évidence avec les profils de chaque pays, ou plus vraisemblablement à travers des profils d'activité enseignante dans les classes, ce qui nécessite une étude plus approfondie. Globalement, il nous semble que l'enseignement se focalise un peu trop sur le registre de l'écriture chiffrée. Car si cela paraît normal pour le développement des praxis numériques (ce registre est tout de même plus puissant que le registre graphique), il n'en reste pas moins que cela entrave l'activité des élèves lorsqu'ils sont confrontés à un type de tâches nouveau car l'enseignement reçu ne permet pas d'entrer sereinement dans des problèmes plus complexes ni de choisir le(s) registre(s) pour les traitements.

Bibliographie

BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999). Sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19.1, 77-123.

CARNEY, R. L., & LEVIN, J. R. (2002). Pictorial illustrations still improve student's learning from text. *Educational psychology review*, 14 (1), 101-120.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19.2, 222-265.

DUVAL, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang, Berne.

DUVAL, R. (1993). Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactiques et de sciences cognitives*, 5, IREM de Strasbourg.

ELIA, I., GAGATIS, A., & DEMETRIOU, A. (2007). The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems. *Learning and Instruction*, 17, 658-672.

GRAS R., RÉGNIER J.-C., GUILLET F. (Eds) (2009) *Analyse Statistique Implicative. Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités*. RNTI-E-16 Toulouse: Cépaduès

LEMONIDIS, C. (1990). *Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie*. Thèse de Doctorat de l'Université de Strasbourg. IREM de Strasbourg.

NIKOLANTONAKIS, K. & VIVIER, L. (2009). La numération en base quelconque pour la formation des enseignants du premier degré en France et en Grèce. Une étude articulant registres et praxéologies, in *Chypre et France, Recherche en didactique des mathématiques*, Gagatis, A., Kuzniak, A. Deliyianni, E. & Vivier, L. éditeurs. Lefkosia, Chypre 2009.

NIKOLANTONAKIS, K. & VIVIER, L. (2011). Registres et praxis pour la numération de position en base quelconque – une étude statistique en France et en Grèce, in Régnier J.C., Gras R., Spagnolo F., Di Paola B. (Eds.) *Analyse Statistique Implicative: Objet de recherche et de formation en analyse des données, outil pour la recherche multidisciplinaire. Prolongement des débats*. P. 165-186. QRDM Quaderni di Ricerca in Didattica - GRIM ISSN on-line 1592-4424, Palerme: Université de Palerme.

Consultable : http://math.unipa.it/~grim/QRDM_20_Suppl_1.htm

VERGNAUD, G. (1982). "A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems" in: Carpenter, T., Moser, J. and Romberg, T. (eds). *Addition and subtraction: a cognitive perspective*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers, hillsdale, New Jersey, pp. 39-59.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10 (2).

Remerciements

Nous remercions les huit professeurs des écoles et leurs élèves pour leur participation et leur implication.

Nous tenons également à remercier Hélène Vivier pour la réalisation des dessins.

Les auteurs

DAVID BLOCK

CINVESTAV, Mexique
davidblock54@gmail.com

KOSTAS NIKOLANTONAKIS

Université de Macédoine Ouest, Grèce
nikolantonakis@noesis.edu.gr

LAURENT VIVIER

LDAR - Université Paris-Diderot
laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

Annexe 1 : Tables des pourcentages

Les pourcentages en gras concernent les 192 élèves qui ont fait l'ensemble du test et les pourcentages alignés à droite sont ceux relatifs à chaque pays dans cet ordre :

FR (61 élèves soit 32%) ; GR (45 élèves soit 23%) ; MX (86 élèves soit 45%)

Les pourcentages sont arrondis à l'entier le plus proche.

T1	NR	OK
A	3%	93%
FR	8%	87%
GR	0%	100%
MX	0%	93%
B	4%	88%
FR	8%	79%
GR	0%	98%
MX	2%	90%

T4	NR	OK
B	2%	88%
FR	0%	82%
GR	0%	100%
MX	5%	85%

T2	NR	OK	conv	tRa	tRb	repR	sign
A	11%	76%	18%	87%	1%	74%	8%
FR	13%	72%	11%	82%	2%	80%	13%
GR	0%	87%	0%	100%	0%	100%	0%
MX	16%	73%	33%	84%	0%	57%	9%
B	10%	51%	85%	74%	15%	38%	4%
FR	16%	48%	79%	57%	25%	28%	5%
GR	11%	47%	91%	89%	2%	0%	0%
MX	6%	55%	86%	79%	15%	65%	6%

T3	NR	OK	conv	tRa	tRb	repR	sign
A	15%	56%	7%	81%	3%	85%	24%
FR	13%	67%	11%	80%	3%	87%	31%
GR	2%	58%	0%	98%	0%	98%	4%
MX	22%	47%	7%	73%	5%	77%	29%
B	11%	70%	99%	13%			6%
FR	2%	74%	100%	20%			8%
GR	0%	89%	100%	0%			0%
MX	24%	58%	99%	15%			7%

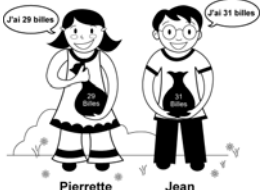
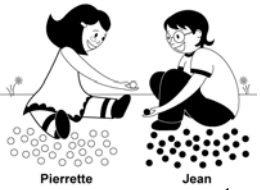
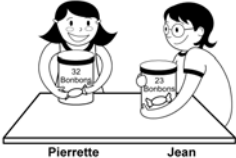
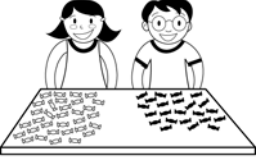
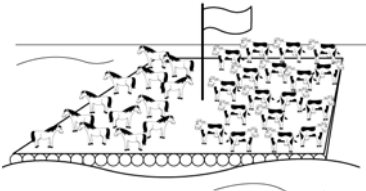
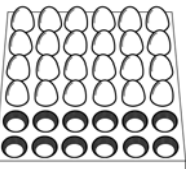
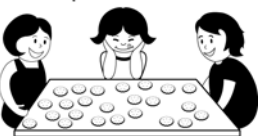
T4	NR	OK	conv	tRa	« 11 »	repR	sign
A	9%	45%	38%	59%	18%	82%	10%
FR	5%	52%	31%	70%	18%	92%	18%
GR	2%	38%	0%	98%	40%	98%	4%
MX	15%	43%	62%	33%	6%	66%	7%

T5	NR	OK	conv	tRa	tRb	repR	sign
A	8%	45%	25%	67%	22%	77%	9%
FR	11%	36%	31%	57%	23%	70%	11%
GR	0%	53%	0%	100%	0%	100%	7%
MX	10%	48%	34%	56%	34%	70%	9%
B	5%	65%	82%	48%	46%	20%	7%
FR	2%	52%	84%	39%	52%	20%	11%
GR	0%	80%	98%	98%	2%	2%	13%
MX	10%	66%	73%	28%	65%	30%	1%

Regroupement par pays du choix du registre pour le traitement et de l'indicateur « sign » (avec un regroupement de type de tâches significatifs pour plus de lisibilité)

		France	Grèce	Mexique
T ² , T ³ , T ⁴ et T ⁵ dans R _A	R _A	72,1%	98,9%	61,3%
	R _B	9,3%	0%	12,8%
	sign	18,4%	3,9%	13,7%
T ² et T ⁵ dans R _B	R _A	48,3%	93,3%	53,5%
	R _B	38,5%	2,2%	40,1%
	sign	8,2%	6,7%	3,5%

Annexe 2 : La version française des énoncés proposés aux élèves

Qui a le plus de billes ?  Pierrette Jean Figure 1a : tâche T¹_A	Qui a le plus de billes ?  Pierrette Jean Figure 1b : tâche T¹_B
Donne des bonbons à Jean pour en avoir autant que Pierrette.  Pierrette Jean Figure 2a : tâche T²_A	Donne des bonbons à Jean pour en avoir autant que Pierrette.  Pierrette Jean Figure 2b : tâche T²_B
Combien y a-t-il d'animaux sur ce bateau ?  Figure 3a : tâche T³_A	Combien y a-t-il d'animaux sur ce radeau ?  Figure 3b : tâche T³_B
Dans une classe, il y a 7 rangées de 4 tables. Combien y a-t-il d'élèves ? Figure 4a : tâche T⁴_A	Combien y a-t-il d'œufs sur cette plaque ?  Figure 4b : tâche T⁴_B
3 amis se partagent 24 gâteaux en parts égales. Quelle part ont-ils chacun ?  Figure 5a : tâche T⁵_A	Les amis se partagent des gâteaux en parts égales. Quelle part ont-ils chacun ?  Figure 5b : tâche T⁵_B

PATRICK GIBEL ET MHAMMED ENNASSEF

ANALYSE EN THÉORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES D'UNE
SÉQUENCE VISANT À ÉVALUER ET À RENFORCER LA
COMPRÉHENSION DU SYSTÈME DÉCIMAL

Abstract. Analysing within theory of didactical situations a school sequence about the comprehension of decimal number system

The purpose of this article is to analyse, within the framework of the theory of didactical situations in mathematics, a sequence aiming to evaluate and to develop children's ability to use their knowledge about the comprehension of decimal number system in a first grade class (students aged 6-7 years) in a primary school. The sequence, mainly based on a communication's game, consists in carrying out conversions of numbers from the symbolic representation to the collection of the corresponding quantity of objects and vice versa. The game allows the children to test validity and suitability of their procedure. Moreover this sequence allows the teacher to evaluate, in situation, the degree of acquisition of the different representations of number in the decimal number system.

Résumé. L'objectif de cet article est d'analyser, en Théorie des Situations Didactiques (TSD), une séquence de classe destinée à évaluer et à développer, en situation, la capacité des élèves de CP, âgés de 6-7 ans, à mettre en œuvre leurs connaissances et leurs savoirs relatifs à la compréhension du système décimal. La séquence étudiée repose principalement sur la dévolution d'un jeu de communication visant à mettre en relation, par une procédure rapide, fiable et adéquate, l'écriture chiffrée usuelle d'un nombre et la collection matérielle correspondante et vice versa. La situation de jeu permet aux élèves d'éprouver la validité et l'adéquation de leurs procédures. De plus cette séquence offre à l'enseignant la possibilité d'évaluer, en situation, l'appropriation des différentes désignations du nombre dans notre système de numération.

Mots-clés. Situation adidactique, système décimal, représentation, situation de communication, stratégies, répertoire didactique, répertoire de représentation.

Introduction

Cet article vise principalement à étudier les effets d'une séquence de classe sur les acquisitions des élèves, en termes de connaissances et de savoirs, dans le domaine de la numération décimale.

La séquence étudiée, mise en œuvre en classe de Cours Préparatoire, a pour objectif d'évaluer et de renforcer la compréhension de notre système de numération chez des élèves âgés de 6 à 7 ans. Plus précisément elle vise à permettre aux élèves de s'approprier les différentes désignations orales et écrites des nombres (entre 70

et 150) en les reliant à des collections d'objets structurées, obtenues par réalisation de groupements.

Dans l'article nous entreprenons l'étude, en Théorie des Situations Didactiques (TSD), d'une séquence de classe s'articulant principalement autour d'une situation de communication, proposée à plusieurs reprises, sous la forme d'un jeu par équipe.

Dans la première partie de cet article, nous présenterons la spécificité de cette étude et préciserons ses liens avec certaines recherches conduites récemment dans le domaine de la numération au cycle des apprentissages fondamentaux (élèves âgés de 6 à 8 ans).

Dans la deuxième partie, nous reviendrons succinctement sur la classification des situations, pour les lecteurs non familiarisés avec la TSD, et nous préciserons la notion de « répertoire didactique ». Cette dernière constitue un élément important pour l'analyse de cette séquence ; en effet nous l'utiliserons pour produire une analyse a priori détaillée des procédures dans la situation de jeu étudiée, de plus elle nous permettra d'analyser, a posteriori, l'écart entre les procédures attendues et celles effectivement produites par les élèves.

Dans la troisième partie, nous analyserons l'ingénierie mise en œuvre, en nous appuyant sur l'analyse a priori de la situation de jeu et nous expliciterons la logique de l'articulation des différentes situations.

Dans la quatrième partie, nous présenterons et analyserons les principaux résultats de l'étude. Nous prolongerons cette réflexion par une dernière partie mettant en évidence le rôle de l'activité d'entraînement qui clôt le dispositif et vise à institutionnaliser les liens entre les différentes représentations sémiotiques du nombre (Duval, 1995) : désignations orales, écritures symboliques, collection dessinée. Ces représentations produites par les élèves sont mises en relation avec la collection matérielle, elles relèvent de différents registres sémiotiques (Ibid.).

Cette étude vise à apporter des éléments de réponse aux questions suivantes :

En quoi l'ingénierie proposée permet-elle d'évaluer et de renforcer les connaissances du système décimal des élèves de C.P. ? En quoi favorise-t-elle l'accès aux connaissances et aux savoirs relatifs aux différents aspects de notre système de numération ? Pourquoi permet-elle de faire évoluer l'interprétation ou les interprétations que les élèves donnent aux différentes désignations écrites des nombres ?

Quel prolongement de la situation de jeu convient-il de mettre en œuvre afin de développer la capacité des élèves à mettre en relation les différentes désignations écrites et orales du nombre ?

1. Aspects décimal et positionnel de notre système de numération

L'acquisition des savoirs fondamentaux inhérents à la compréhension de notre système de numération nécessite une maîtrise de ses deux principaux aspects : positionnel et décimal (Serfati, 2005). La maîtrise de l'aspect positionnel correspond à la capacité de l'élève à interpréter chaque chiffre de l'écriture d'un nombre en référence au groupement correspondant (dizaine, centaine, etc.). L'aspect décimal est lié d'une part à la perception des relations entre les différents groupements (relations entre centaine et dizaine), d'autre part à la récursivité des groupements.

L'article de Tempier (2010) vise à étudier l'origine des difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage de la numération décimale au cycle des approfondissements. L'auteur précise que les difficultés concernent plus particulièrement l'aspect décimal de la numération : la difficulté à voir les groupements et leur rôle dans l'écriture chiffrée usuelle d'un nombre, à comprendre leur pertinence, mais aussi les difficultés à opérer avec ces groupements et à travailler avec deux groupements différents. Tempier présente une étude visant à établir que les contraintes institutionnelles et l'utilisation de certains manuels, parmi les plus utilisés par les enseignants du CE2 en France, ne prennent pas suffisamment en compte les difficultés des élèves énoncées précédemment. En effet les activités des manuels analysés, sont axées, principalement sur l'aspect positionnel de la numération et n'accordent que très peu de place à l'aspect décimal, pourtant essentiel à la compréhension et à l'usage de la numération et source de nombreuses difficultés référencées et analysées initialement par Janvier et Bednarz (1984).

La séquence que nous avons choisi d'analyser dans cet article présente un réel intérêt du point de vue de l'apprentissage de la numération si l'on se réfère à l'article de Tempier : elle permet en effet de travailler les aspects positionnel et décimal.

Cependant pour analyser dans le cadre de la TSD, les connaissances et les savoirs mis en œuvre par les élèves en situation d'apprentissage, il est nécessaire de pouvoir identifier, avec précision, les connaissances et les savoirs dont ils sont censés disposer ; nous allons donc être amenés à redéfinir, en partie 2, d'une part la classification des situations et TSD et d'autre part la notion de « répertoire didactique ».

2. Classification des situations et modélisation du fonctionnement des connaissances en TSD

2.1. Classification des situations en TSD

Cette section vise à proposer la définition de certains concepts fondamentaux de la TSD, concernant la classification des situations, utilisés dans le cadre de cette recherche. Pour une présentation détaillée de cette théorie nous renvoyons le lecteur à Brousseau (1997) et au site de Guy Brousseau¹.

2.1.1. Notion de situation

Nous commençons tout naturellement par définir la notion de “ situation ” : les conditions d’une utilisation particulière d’une connaissance mathématique sont considérées comme formant un système appelé “situation”.

A chaque objet de savoir mathématique, on peut associer un ensemble de situations dont la résolution nécessite la mise en œuvre de cet objet de savoir. Certaines de ces situations sont des situations d’enseignement, également appelées situations didactiques, d’autres sont des situations non didactiques.

2.1.2. Classification en TSD des différents types de situation d’enseignement: Situation didactique, situation adidactique

En TSD la notion de « situation didactique » se définit, plus précisément, de la façon suivante : c’est un ensemble de rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève (un groupe d’élèves), un certain milieu (instruments ou objets) et un système éducatif (l’enseignant) aux fins de faire approprier à ses élèves un savoir constitué ou en voie de constitution.

Brousseau (1997) explicite comme suit la notion de situation adidactique : « Une situation adidactique est un problème particulier de mathématique, que l’on peut associer à l’enseignement d’un savoir bien identifié. Ce savoir doit être le moyen privilégié de solution ; les autres savoirs et connaissances disponibles qui pourraient permettre à sa place la résolution doivent être trop coûteux à mettre en œuvre. »

Il précise : « Les situations adidactiques sont les situations d’apprentissage dans lesquelles le maître a réussi à faire disparaître sa volonté, ses interventions, en tant que renseignements déterminants de ce que l’élève va faire : ce sont celles qui fonctionnent sans l’intervention du maître au niveau des connaissances ». (Brousseau, 1997)

¹ www.guy-brousseau.com

La situation de jeu, objet de notre étude, est une situation adidactique assimilable plus particulièrement à une « situation d'action » se caractérisant ainsi : elle consiste à placer l'enfant devant une situation vérifiant les deux conditions suivantes :

(Condition 1) Elle pose à l'élève un problème dont la meilleure solution, dans les conditions proposées, est la connaissance à enseigner.

(Condition 2) Il puisse agir sur elle et qu'elle lui renvoie de l'information sur son action.

Dans le glossaire de didactique de Brousseau², le milieu et l'actant sont définis ainsi : « Dans une situation d'action, on appelle "milieu" tout ce qui agit sur l'élève ou / et ce sur quoi l'élève agit. L'actant est « ce » qui dans le modèle agit sur le milieu de façon rationnelle et économique dans le cadre des règles de la situation. En tant que modèle d'un élève ou plus généralement d'un sujet, il agit en fonction de son répertoire de connaissances. »

La notion de répertoire de connaissances utilisée par Brousseau sera reprise et développée dans la section suivante. Nous expliciterons la notion de « répertoire didactique », en effet celle-ci nous sera particulièrement utile lors de l'analyse de la séquence.

Pour étudier les connaissances des élèves relatives au système décimal, il nous apparaît pertinent de proposer aux élèves une situation adidactique, plus précisément une situation d'action, telle que les conditions qui la définissent requièrent, chez les élèves, la mobilisation de leurs connaissances pour répondre à la situation et que cette dernière lui renvoie une rétroaction lui permettant de constater la réussite ou l'échec de sa procédure.

2.2. Notion de répertoire didactique

L'ensemble des moyens, connaissances et savoirs, que le professeur met en œuvre, et ceux qu'il pense pouvoir attendre des élèves, par suite de son enseignement, constitue le répertoire didactique de la classe (Bloch et Gibel, 2011). Le répertoire didactique de la classe est identifiable à la part du répertoire mathématique que l'enseignant a choisi d'explicitier, notamment pour la validation et lors de l'institutionnalisation (Ibid.). L'expression désigne aussi l'ensemble des procédés qui vont permettre à l'élève de générer de nouvelles connaissances à partir de ses connaissances antérieures, et de nouveaux énoncés (calculs, formules, déclarations).

La fonction du répertoire didactique est de faciliter le travail et la communication dans la classe, notamment en donnant à l'élève les moyens de produire ou de retrouver, et donc de mettre en œuvre, au moment voulu, une action, une suite

² <http://daest.pagesperso-orange.fr/Pages%20perso/Brousseau.htm>

d'actions, une formulation ou une justification (Gibel, 2004). Les situations choisies par l'enseignant, lors de l'apprentissage d'une notion mathématique, déterminent très fortement la capacité de l'élève à organiser, en confrontation aux milieux proposés, ses procédures de résolution et donc son répertoire (Ibid.).

Le chercheur en didactique qui souhaite analyser le fonctionnement des connaissances des différents protagonistes peut espérer avoir accès au répertoire didactique de la classe. Sachant, bien évidemment, que le répertoire effectif d'un élève, c'est-à-dire le répertoire effectivement utilisé par l'élève lorsqu'il est confronté à une situation d'enseignement, peut différer du répertoire didactique de la classe. Nous définissons donc le répertoire didactique de l'élève comme l'ensemble des moyens, connaissances et savoirs, effectivement mobilisés par l'élève en réponse à une situation dévolue par l'enseignant.

2.3. Répertoire de représentation

Le répertoire de représentation est une composante du répertoire didactique. Il est constitué de signes, schémas, symboles, figures, il convient d'y adjoindre également les éléments langagiers (énoncés oraux et/ou écrits), permettant de nommer les objets rencontrés, de formuler les propriétés et les résultats.

L'observateur, pour effectuer une analyse didactique de la séquence objet d'étude, va devoir effectuer une analyse sémiotique des observables qui, selon lui, ont une influence significative sur le déroulement de la séquence et entrent précisément dans le cadre de sa recherche.

Le répertoire de représentations, défini par Bloch et Gibel (2011) comporte deux composantes liées à la chronogenèse (pour la première) et au milieu de la situation (pour la seconde):

- une composante liée au répertoire antérieur, c'est-à-dire les différentes représentations liées aux connaissances antérieures ;
- une autre composante, qui apparaît lorsque l'enseignant dévolue aux élèves une situation d'apprentissage : l'élève mobilise, par confrontation aux différents milieux, des connaissances de son répertoire. Cette utilisation des connaissances lui permet de manifester et de construire de nouvelles représentations liées à la situation. Cette composante relève de ce que nous appelons le *système organisateur*, que nous explicitons ci-après.

Rappelons que selon Brun (1994) les représentations sont "l'interface entre connaissances et situation", ce qui est en adéquation avec la notion de répertoire de représentations tel que nous l'avons précédemment défini.

L'identification des deux composantes ci-dessus amène donc à distinguer dans le répertoire didactique deux types d'objets : d'une part la collection d'énoncés que nous appelons *registre des énoncés*, et d'autre part ce qui permet de l'organiser et

de l'utiliser que nous désignons par *système organisateur*, tels que les a définis Gibel (2004).

Le système organisateur est ce qui permet à l'élève de retrouver ou de réactiver des énoncés déjà rencontrés dans des situations antérieures, mais aussi de générer de nouvelles formules en articulant entre eux certains énoncés, ou en les combinant entre eux afin de répondre à la situation.

Dans la modélisation du fonctionnement des connaissances, en théorie des situations, celles-ci apparaissent comme les moyens hypothétiques, pour le sujet, de prendre des décisions afin de produire des actions, des formulations ou des justifications. L'utilisation des connaissances et des savoirs par confrontation à différentes situations, didactiques et adidactiques, nous conduit à distinguer dans le répertoire didactique de l'élève plusieurs composantes : le répertoire de représentations, le répertoire de décisions et le répertoire d'actions.

2.4. Répertoire de représentation, répertoire de décision et répertoire d'action mobilisés en situation adidactique

L'ingénierie mise en œuvre, dans le cadre de cette recherche, repose sur la dévolution aux élèves d'une situation de jeu, de nature adidactique. Sa résolution nécessite, l'usage de leur répertoire de représentation. En effet ces derniers, pour répondre à la situation, devront se référer à des situations rencontrées précédemment. Ainsi, par l'usage de leur répertoire de représentation, ils décideront de la mise en œuvre d'une suite d'actions sur le milieu matériel. Cette suite d'actions, valides ou erronées, relève de l'usage de leur répertoire d'action. Le résultat obtenu conduit les élèves à modifier leur répertoire de représentation.

Le schéma ci-après permet de modéliser le fonctionnement du répertoire didactique de l'élève confronté à une situation à dimension adidactique.

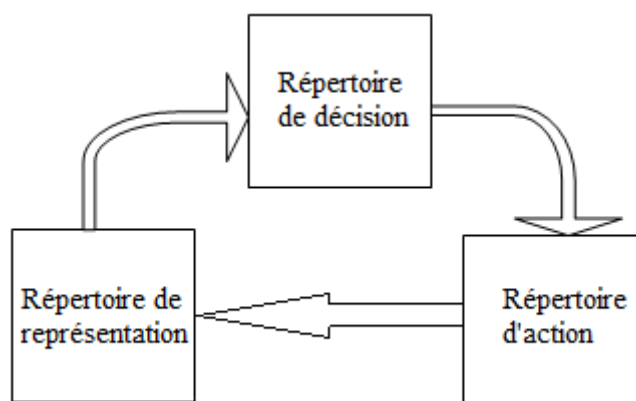


Schéma 1. Modélisation du fonctionnement du répertoire didactique

de l'élève en situation d'apprentissage

Nous nous efforcerons d'analyser, en TSD, à partir des procédures mises en œuvre par les élèves, les savoirs et les connaissances mobilisés pour répondre aux situations adidactiques, plus précisément en situation d'action et en situation de formulation. L'évolution des procédures mises en œuvre par les différentes équipes, au cours des jeux successifs, devrait constituer un indice révélateur de l'apprentissage des élèves. Le dispositif vise à analyser les procédures initiales des élèves et la manière dont elles évoluent au cours de la séquence.

3. Présentation et analyse a priori de la séquence

3.1. Présentation et enjeux didactique de la situation de jeu

Cette situation de jeu a été proposée, initialement, à des élèves de CE1, dans le cadre des recherches menées au C.O.R.E.M.³ Nous avons expérimenté cette situation de communication, dans la classe d'une enseignante de CP afin d'évaluer et de renforcer les connaissances et les savoirs de ses élèves inhérents à la compréhension et à l'usage du système décimal. Nous avons aménagé la séquence initiale de façon à l'intégrer dans la progression de l'enseignant. Nous nous sommes attachés à ne pas dénaturer la situation initiale, c'est-à-dire à conserver le caractère adidactique de la situation de jeu.

La situation de jeu offre à l'élève la possibilité de valider ou d'invalidier les décisions relatives aux choix des connaissances et des savoirs mobilisés et à leurs usages pour répondre à la situation proposée. En effet la situation va renvoyer à l'élève un feed-back lui indiquant si l'équipe (binôme émetteur, binôme récepteur) a réussi ou échoué. Par conséquent elle vise à offrir à l'élève la possibilité d'accéder aux véritables raisons de savoir. En identifiant le champ d'utilisation de la connaissance, l'élève au cours des différents jeux enrichit son répertoire de représentation en lien avec son répertoire de décision (schéma 1). L'objectif de la séquence, dans sa globalité, est de permettre à l'élève d'établir, de développer et de renforcer les liens entre les différentes désignations du nombre (écrites et/ou orales) et les collections matérielles structurées par réalisation de groupements.

Le jeu se joue par équipe, chacune d'elle étant constituée de deux binômes : un binôme émetteur, « les préparateurs », et un binôme récepteur. Les préparateurs ouvrent une enveloppe dans laquelle ils découvrent un nombre, écrit en chiffres. Ils doivent alors réaliser, à partir du matériel mis à leur disposition, la collection correspondante. Ensuite ils la portent aux récepteurs, qui doivent produire l'écriture chiffrée usuelle du nombre de haricots de la collection.

³ Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, voir le site www.guy-brousseau.com/le-corem/presentation/

L'équipe a gagné si le nombre écrit par les récepteurs est identique à celui donné initialement aux préparateurs

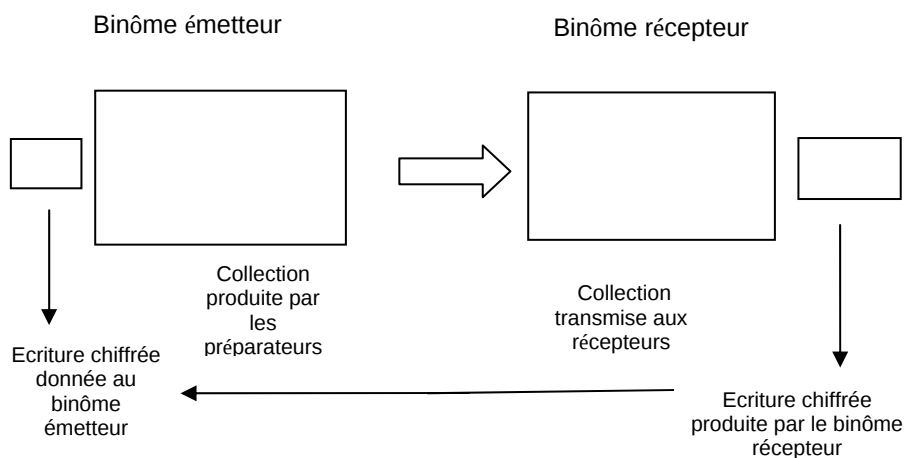
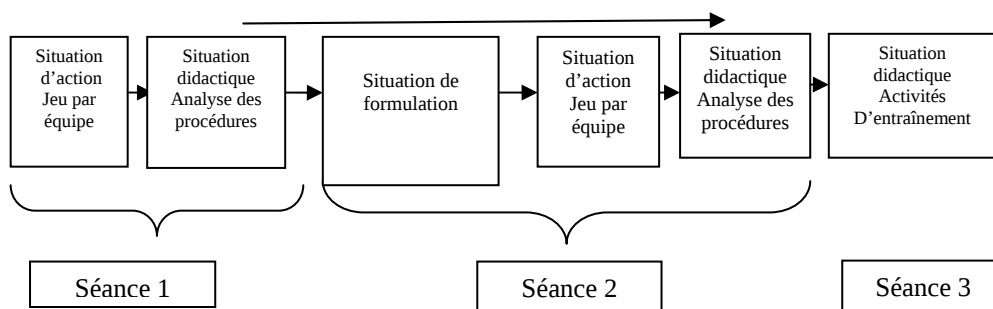


Schéma 2. La situation de jeu

3.2. Le déroulement de la séquence

Le schéma ci-dessous vise à expliciter l'articulation des différentes situations au cours des trois séances qui constituent la séquence objet de notre étude.



Schémas 3. Déroulement de la séquence : les différentes situations didactiques et adidactiques.

A l'issue de la première situation de jeu, la situation didactique est destinée à déterminer si les équipes ont réussi ou échoué, mais aussi à permettre aux émetteurs de formuler les décisions ayant motivé leurs actions, et aux récepteurs d'explicitier les principales difficultés auxquelles ils se sont heurtés.

En début de séance 2, les élèves sont mis en situation de formulation au sens de la TSD (Brousseau, 1997). Au sein de chaque équipe, les élèves formulent les stratégies utilisées et les difficultés rencontrées par chaque binôme et élaborent conjointement une procédure visant à faire gagner leur équipe. Le jeu qui suit permet aux élèves d'éprouver les stratégies formulées précédemment. La phase didactique proposée à l'issue du jeu a pour objet de déterminer les équipes gagnantes et de faire formuler les stratégies utilisées en déterminant leur validité, leur pertinence et leur fiabilité.

La séance 3 est une séance de réinvestissement des procédures mises en œuvre lors des situations de jeu et analysées lors des phases de mise en commun. Elle vise principalement à entraîner les élèves à produire, de façon fiable, efficace et rapide, les collections matérielles associées à chacune des représentations écrites au tableau par l'enseignante. L'enseignante va « jouer » sur les différentes désignations écrites du nombre (par exemple 73) en proposant soit l'écriture chiffrée usuelle, soit sa décomposition additive usuelle ($70+3$), soit sa décomposition additive associée aux groupements réalisés ($10+10+10+10+10+10+3$), soit son écriture littérale (soixante-treize), ou dans un autre registre, un dessin des groupements, les élèves vont devoir produire la collection matérielle correspondante (et vice versa). Ainsi les élèves vont s'approprier les différentes représentations du nombre en lien avec différents registres (Duval, 1996).

Le détail des phases de chacune des séances est proposé en Annexe 1.

3.3. Aménagement matériel et humain

Le milieu matériel

Le matériel est mis à disposition des élèves sur une table au centre de la classe. Il est constitué de haricots (en grands nombres), de sachets en plastique, de gobelets, de grandes boîtes (destinées à recevoir la collection réalisée par les préparateurs), de boîtes de petites dimensions et de leurs couvercles, d'enveloppes, de feuilles de différentes couleurs, de feutres, d'aimants et de feuilles blanches.

Organisation de l'espace classe

Les préparateurs et les récepteurs doivent être éloignés dans la salle de classe de façon à ce que les récepteurs ne puissent pas prendre d'informations sur le nombre écrit en chiffres donné aux préparateurs, et ne puissent pas entendre les discussions entre les préparateurs.

Modalité pédagogique

Le jeu se joue par équipe ; chaque équipe est constituée d'un binôme émetteur et d'un binôme récepteur. Lors du jeu suivant les rôles seront inversés : les émetteurs deviendront récepteurs et inversement.

3.4. Le répertoire didactique de la classe dans le domaine de la numération

L'enseignante utilise, pour élaborer et mettre en œuvre ses séquences de mathématiques, dans le domaine numérique, le livre *Ermel CP, Apprentissages Numériques*⁴. Le tableau en Annexe 2 donne un aperçu des grandes étapes de sa progression (périodes 1 à 4) et permet de mettre en lumière les choix didactiques qui sous-tendent l'élaboration du répertoire didactique de la classe.

Les élèves ont travaillé l'aspect décimal du nombre, par la confrontation à la situation des carrelages (proposée aux élèves en fin de période 3) dans le but de donner du sens à l'écriture chiffrée usuelle des nombres (entre 1 et 69) en les reliant d'une part à une collection structurée sous forme de groupements par 10 et d'éléments isolés, d'autre part à la décomposition additive associée. De plus, lors de la séquence précédente ils ont travaillé la situation « Les fourmillions » à partir d'une collection comportant entre 300 et 400 objets (cf. Annexe 3), réalisant successivement des groupements par 10, puis des groupements par 100, afin de déterminer le nombre total d'éléments de la collection. L'enseignante a établi le lien entre les différents groupements réalisés (dizaine et centaine), et entre la collection structurée (par la réalisation des groupements) et l'écriture chiffrée du nombre. Si les élèves ont travaillé à de multiples reprises l'aspect « décimal » (réalisation de groupements par 10) de notre numération, ils n'ont cependant été confrontés à la récursivité des groupements que lors de la séquence précédente.

Les élèves ont travaillé l'aspect positionnel du nombre tout au long des périodes 2, 3 et 4. L'interprétation des écritures chiffrées, sous la forme (chiffre des dizaines et chiffre des unités), s'est appuyée sur l'étude des familles de nombres en lien étroit avec le tableau des nombres⁵. Ce dernier, élaboré par les élèves, vise une approche algorithmique de la suite des nombres 0 à 99 : il permet l'accès à la logique de construction de la suite écrite des nombres.

Du point de vue des connaissances arithmétiques de la suite orale des nombres, les élèves sont censés maîtriser le comptage de 10 en 10 jusqu'à 100. En ce qui concerne le comptage de 2 en 2 et de 5 en 5, l'enseignant considère qu'au-delà de 70, cet apprentissage est, pour une partie des élèves, en cours d'acquisition.

3.5. Analyse a priori de la situation de jeu

a) *Nature de la situation*

La situation de jeu est une situation d'action au sens de TSD. Elle vise un réinvestissement des connaissances et des savoirs acquis ou du moins censés être

⁴ Ermel, *Apprentissages numériques, CP*, cycle des apprentissages fondamentaux, INRP, Hatier enseignants

⁵ Ermel, module 2, *Approche algorithmique de la suite des nombres*, p. 282.

acquis lors des séquences précédentes, c'est-à-dire figurant dans le répertoire didactique de la classe définis ci-dessus. Cependant ce qui caractérise la situation de jeu étudiée c'est le fait que les élèves vont décider, par eux-mêmes, des stratégies à adopter pour permettre à leur équipe de gagner. Autrement dit ils vont utiliser leurs répertoires de représentation et de décision pour mettre en œuvre une stratégie et ainsi prendre conscience de son adéquation ou de son inadéquation.

b) Les principales variables didactiques de la situation de jeu

Le matériel à disposition est une variable didactique. L'enseignante a souhaité que les élèves puissent disposer des matériels utilisés lors de la précédente séquence, « Les fourmillions », dont le déroulement est détaillé en Annexe 3. Cependant nous avons fait le choix d'ajouter à ces objets (gobelet, sachet) d'autres matériels (enveloppes, petites boîtes, couvercles de petites boîtes). Ainsi les élèves vont devoir décider des matériels à utiliser ainsi que des actions à effectuer.

Le nombre d'éléments de la collection influe également sur les procédures que les élèves sont susceptibles de produire pour répondre à la situation. Nous avons choisi de proposer des écritures chiffrées comprises entre 70 et 150, afin de mettre en évidence le nécessaire recours à la réalisation de groupements, et de sensibiliser les élèves à la récursivité des groupements. Le choix du nombre d'éléments de la collection est une variable permettant une différenciation des apprentissages : le choix des nombres dévolus à chacune des équipes dépend du degré d'acquisition des compétences évalué lors des séquences précédentes.

La durée laissée aux binômes émetteurs et récepteurs, pour réaliser la tâche dévolue, est aussi une variable didactique de la situation. Le temps, laissé à chacun des binômes, est réduit lors du second jeu de façon à amener les équipes à optimiser leur stratégie en ayant recours à une stratégie fiable i.e. pouvant donner lieu à une vérification, efficace (en terme de résultat) et économe en temps, basée sur la production de groupements par 10 et la récursivité des groupements.

c) Procédures de résolution envisagées

Considérons à présent les procédures que les préparateurs sont capables de mettre en œuvre compte-tenu du répertoire didactique de la classe explicité précédemment. Parmi les procédures envisagées il est nécessaire de distinguer celles qui reposent sur la production d'une collection structurée, basée sur la réalisation de groupements, ou non structurée.

Parmi celles débouchant sur la réalisation d'une collection non structurée, la plus probable est celle-ci : les élèves, après avoir oralisé l'écriture chiffrée, mettent dans la boîte les haricots un à un en effectuant le dénombrement correspondant.

Parmi les procédures conduisant à la production d'une collection structurée on peut envisager que les élèves, après avoir identifié dans l'écriture chiffrée le nombre de

paquets de dix et le nombre de haricots isolés, utilisent du matériel afin de réaliser les groupements correspondants.

Considérons à présent les procédures que les récepteurs sont susceptibles de mobiliser. A partir d'une collection non structurée transmise par les préparateurs, les élèves peuvent effectuer un dénombrement de la collection non structurée, par un comptage un à un des éléments.

A partir d'une collection structurée transmise par les préparateurs, les récepteurs effectuent un dénombrement des paquets de 10, apparents et matérialisés, et procèdent ensuite à un dénombrement des haricots isolés, puis ils effectuent un traitement des informations afin de produire l'écriture chiffrée correspondante. Une autre procédure envisageable est : le comptage de dix en dix à partir des groupements réalisés et ensuite le surcomptage des haricots isolés pour obtenir le nombre total d'éléments, les élèves ayant alors à produire l'écriture chiffrée correspondante.

d) Difficultés prévisibles

Concernant les préparateurs les principales difficultés sont liées à la lecture et à l'interprétation du nombre écrit en chiffres et à la réalisation de la collection.

Concernant les récepteurs, les principales difficultés relèvent du dénombrement de la collection et du codage de celle-ci, sous forme d'une écriture chiffrée.

On peut s'attendre, pour les récepteurs ayant opté pour un dénombrement de la collection, à des difficultés lors du passage de la désignation orale à la désignation écrite.

De plus les difficultés du dénombrement sont très souvent liées à l'énumération de la collection ; les travaux de Briand (1993) et de Margolinas et Rivière (2008) ont permis de produire une analyse très précise de l'origine de ces difficultés.

3.6. Les situations adidactiques

La situation d'action

Le jeu est assimilable à une situation d'action au sens de la T.S.D comme explicité dans la section précédente.

La situation de formulation

Les enjeux de la situation de formulation (Brousseau, 1997) sont multiples : d'une part favoriser, à l'intérieur de chaque équipe, la verbalisation des décisions prises par les préparateurs lors du jeu précédent, d'autre part permettre aux élèves de se mettre d'accord, compte-tenu des difficultés rencontrées par l'équipe, sur une stratégie adéquate pour gagner lors du prochain jeu.

Les équipiers savent que lors du prochain jeu les rôles des binômes seront inversés, ce qui contribue à les impliquer dans les interactions. Pour cela les émetteurs doivent formuler explicitement les décisions qu'ils ont prises lors du premier jeu et débattre avec les récepteurs des difficultés rencontrées par ces derniers. Ainsi les équipiers peuvent mettre en relation les décisions des préparateurs et leurs effets sur les tâches des récepteurs.

4. Analyse des principaux résultats

4.1. Présentation des résultats obtenus à l'issue du premier jeu

	Équipe 1	Équipe 2	Équipe 3	Équipe 4
Nombre donné aux préparateurs	97	88	78	148
Nombre écrit par les récepteurs	1005	90	66	49
Collection produite par les préparateurs et transmise aux récepteurs	Collection structurée 8 paquets de 10 haricots, 1 paquet de 9 haricots et 7 haricots isolés.	Collection non structurée Les haricots sont placés, en vrac, dans un gobelet.	Collection structurée 7 paquets de 8 haricots.	Collection partiellement structurée 1 boîte de 1 haricot, de 4 sachets de 10 haricots et de 8 haricots isolés
Procédure mise en œuvre par les préparateurs	Réalisation de groupements, réalisation de 8 sachets de 10 et 1 sachet de 9 haricots.	Réalisation de la collection par dénombrement un à un.	Réalisation de 7 sachets, chacun contenant 8 haricots.	Réalisation de 4 sachets de 10, 1 haricot est placé dans un couvercle de boîte, et 8 autres haricots sont placés dans un autre couvercle de boîte.

Procédures et résultats lors du premier jeu

Le tableau des résultats ci-dessus fait apparaître qu'aucune des quatre équipes n'a gagné lors de ce premier jeu. Le recours à une situation, à dimension adidactique, permet ainsi de mettre en évidence le fait que les élèves (préparateurs et récepteurs) n'ont pas réinvesti, en situation de codage-décodage, la procédure de groupements par 10 (puis par 100), induite par l'enseignante lors de la situation précédente des fourmillions. En effet trois binômes préparateurs sur quatre ont eu recours à des procédures qui ne s'appuyaient pas sur la production des groupements par 10 (et par 100 pour l'équipe 4).

L'équipe 2 a fait le choix d'un recours au dénombrement un à un pour réaliser la collection et l'équipe 3 a choisi d'effectuer des groupements par 8. Ceci tend à établir que l'interprétation de l'écriture chiffrée, découverte dans l'enveloppe, ne réfère pas nécessairement pour les élèves à la constitution de groupements par 10 (et ensuite par 100).

L'étude met en évidence que le répertoire de représentation des élèves diffère du répertoire de représentation de la classe, d'où le réel intérêt de cette situation adidactique, qui permet de mettre en lumière les interprétations des élèves relatives à l'écriture chiffrée des nombres proposés. On constate ici que les difficultés des préparateurs relèvent de l'appropriation de l'aspect décimal de notre numération.

Les préparateurs de l'équipe 4 ont eu recours à la réalisation d'une collection en partie structurée (cf. tableau). Cependant le décodage du « 1 » correspondant au chiffre des centaines (148), s'est traduit matériellement par la mise en place d'un haricot isolé placé dans un couvercle de boîte. Cette décision n'est pas en adéquation avec la réalisation produite lors de la séance des fourmillions, où la centaine était matérialisée par un gobelet contenant dix sachets de dix haricots. Le « codage » des préparateurs n'est pas partagé par les émetteurs : ces derniers réunissent le haricot isolé et les huit haricots (correspondants aux unités) parvenant ainsi à l'écriture chiffrée « 49 ». L'intérêt de l'activité est ici de mettre en évidence la nécessité d'un codage commun, basé sur l'itération des groupements, le groupement par 100 doit nécessairement être produit comme réunion de 10 groupements de 10.

4.2. Analyse des enjeux didactiques de la phase de mise en commun

Cette phase didactique (phase 5, séance 1 cf. Annexe 1) a pour objet d'amener les élèves à débattre de l'adéquation des stratégies utilisées par les émetteurs et les récepteurs. Elle vise d'une part à permettre aux préparateurs de formuler les décisions sur lesquelles reposent leurs stratégies et d'autre part à leur faire prendre conscience des effets de leurs décisions sur les possibilités de traitement de la collection qui s'offrent aux récepteurs. C'est également pour l'enseignante la possibilité de prendre conscience de la capacité des élèves à formuler les stratégies, observées en situation, et à utiliser leurs connaissances pour justifier leurs actions en référence au répertoire didactique de la classe.

Nous allons prendre comme objet d'étude deux épisodes et analyser les interactions lors du retour sur les stratégies utilisées par l'équipe 1 et par l'équipe 4.

Équipe 1 : Charlène et Séverine (préparateurs), Lola et Flavie (récepteurs)

	M : Alors d'après vous, pourquoi... Stop, là, maintenant on écoute Vous voulez rejouer, vous voulez gagner? Alors là maintenant il faut savoir pourquoi on s'est trompées.	
--	---	--

	M : Charlène, Séverine, Lola et ...Flavie.	
	Lola : Moi, moi je sais pourquoi on s'est trompées. Je sais pourquoi on s'est trompées, parce qu'en fait Charlène et Séverine, ici (désignant un paquet réalisée par les préparateurs) elles ont mis neuf et pas dix. Elles ont fait un paquet de neuf.	
	M : Elles ont fait un paquet de ?	
	Lola : neuf	
	M : neuf, alors que jusque là qu'est-ce qu'elles on fait des paquets de?	
	Lola et Flavie : des paquets de dix	
	M : des paquets de dix. Alors (s'adressant aux préparateurs) est-ce que c'était un paquet de neuf que vous vouliez faire ?	
	Charlène et Séverine : Non un paquet de dix.	
	(...)	
	M : Comment vous êtes arrivés, expliquez-nous, à écrire, mille-cinq, expliquez-nous comment vous avez fait ? Voilà ce que vous avez dans la boîte alors comment est-ce que vous avez compté ?	<i>L'enseignante dispose sur la table, à la vue de tous, les sachets réalisés par les préparateurs</i>
	Séverine : Alors d'abord on a compté, en premier on avait compté cette boîte (en désignant la boîte dans laquelle se trouve sept haricots)	
	M : Alors allez-y qu'est-ce que vous avez compté dans cette boîte ?	
	Lola : Oui. On les a comptés	
	M : Combien y en avait ?	
	Séverine : Ben, ben y avait sept (en désignant la boîte) puis en dénombrant le contenu d'un sachet huit, neuf, dix, onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, dix-sept, puis se saisissant d'un autre sachet elle poursuit le dénombrement dix-huit, dix-neuf, vingt, vingt-et-un.	
	M : Ca vous avez démarré au début comme ça et puis après comment vous avez fait ?	

	Séverine : Tu nous as dit « Eh pourquoi elles ont fait des sachets ? »	
	M : Pourquoi elles ont fait des sachets de dix, et d'après vous pourquoi elles ont fait des sachets de dix ?	
	Flavie et Lola : ben pour qu'on compte de dix en dix	
	M : Pour qu'on compte dix en dix	

Les préparateurs (Charlène et Séverine) ont choisi de structurer leur collection en effectuant des sachets de 10, excepté l'un d'eux qui ne comporte que neuf éléments compte-tenu d'une erreur de dénombrement.

Les récepteurs, Lola et Flavie, indiquent qu'elles se sont tout d'abord lancées dans un dénombrement un à un (de la collection structurée) en commençant par compter les haricots isolés puis ont continué leur dénombrement en comptant les haricots présents dans un premier sachet et ainsi de suite.

L'enseignante a observé, en situation, la difficulté de ces deux élèves à effectuer un traitement adéquat des informations inhérentes à la collection structurée. Elle a choisi, afin de réactiver les connaissances de leur répertoire de représentation, de questionner les récepteurs sur les raisons qui, selon elles, ont pu conduire les préparateurs à réaliser des sachets. Cette décision de questionner les récepteurs rompt, certes, momentanément l'adidacticité de la situation, mais elle vise à relancer la phase d'action en amenant les récepteurs à réactiver leur système organisateur en se référant aux situations antérieures (au cours desquelles elles ont produit ou utilisé des groupements).

La réponse de Flavie et Lola à la question de l'enseignante (Pourquoi selon vous ont-elles fait des paquets de 10 ?) montre qu'elles ont perçu l'adéquation de l'usage de la suite arithmétique de 10 pour réaliser le dénombrement.

	M : Vas-y tu les mets quand tu les as comptés	<i>L'enseignante tend à Lola la boîte afin qu'elle dépose au fur et à mesure les sachets après les avoir comptés.</i>
	Lola : Dix, vingt, trente, quarante, cinquante	<i>Lola dépose les sachets tour à tour dans la boîte</i>
	M : Hop, hop, hop attends	<i>L'enseignante enlève le sachet de neuf haricots que Lola tient dans sa main (elle l'identifie aisément car il comporte une pastille verte)</i>

	Lola et Flavie: Parce que là y en a neuf !	
	M : Dix, vingt, trente, quarante (dénombrant les haricots dans les sachets), vas-y, y en a quarante !	
	Lola : Cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingt	<i>Lola dépose dans la boîte les sachets correspondants en oralisant la suite des nombres.</i>
	Lola : (puis se saisissant du sachet de neuf avec la pastille verte)	
	M : Eh alors là ?	
	Flavie : et là normalement c'était quatre-vingt-dix !	<i>Séverine se saisit alors du sachet comportant la pastille verte.</i>
	M : Et normalement c'était quatre-vingt-dix. Eh, est-ce que là elles pouvaient compter quatre-vingt-dix ?	
	Séverine et Lola : Non	
	M : Qu'est-ce que vous avez fait ?	
	Lola : Et alors on a fait comme ça, quatre-vingt-dix, quatre-vingt-onze, quatre-vingt-douze, quatre-vingt-treize, quatre-vingt-quatorze, quatre-vingt-quinze, quatre-vingt-seize, quatre-vingt-dix-sept, quatre-vingt-dix huit...et après on a compté ça (en désignant les sept haricots)	

L'enseignante prend ici véritablement la mesure de la difficulté de ses élèves, récepteurs de la collection, à effectuer le dénombrement. La mise en œuvre du surcomptage, s'appuyant sur la récitation de la comptine dans un domaine numérique complexe, est en cours d'apprentissage. L'enseignante intervient pour que Lola effectue de nouveau le dénombrement de la collection. Elle va l'aider en remettant au fur et à mesure le matériel dans la boîte et dans la récitation de la suite des nombres afin de stabiliser la comptine et de rendre plus aisé le principe d'adéquation.

	M : Mais attend, pourquoi quatre-vingt-dix, (l'enseignante remettant au fur et à mesure les sachets dans la boîte) dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, soixante-dix, quatre-vingts on est à quatre-	
--	--	--

	vingts là, alors après qu'est-ce qui vient après quatre-vingts ? Non là si on compte un par un, qu'est-ce qui vient et (désignant tour à tour chaque haricot du sachet de neuf haricots) quatre-vingt- <i>un</i> ⁶ , quatre-vingt- <i>deux</i> , quatre-vingt- <i>trois</i> , quatre-vingt- <i>quatre</i> , quatre-vingt- <i>cinq</i> , quatre-vingt- <i>six</i> , quatre-vingt- <i>sept</i> , quatre-vingt- <i>huit</i> , quatre-vingt- <i>neuf</i> ; Donc là on est à quatre-vingt-neuf	
	Lola : Donc après on n'avait pas les neuf, avant on croyait que c'était dix alors on a pris quatre-vingt-dix	
	M : Eh, donc alors ...imaginons que vous ayez compté ça comme si y en avait dix, quatre-vingt-dix alors après	
	Lola : Quatre-vingt-onze, quatre-vingt-douze, quatre-vingt-treize, quatre-vingt-quatorze, quatre-vingt-quinze, quatre-vingt-seize, quatre-vingt-dix-sept	
	M : Quatre-vingt-dix-sept, donc vous auriez dû écrire quatre-vingt-dix-sept et alors pourquoi vous avez écrit mille-cinq ? D'où ça vient ce mille-cinq	
	Séverine : Cent cinq on dit (à voix basse)	

L'enseignante connaît pertinemment l'origine de l'erreur d'écriture : les élèves ont voulu écrire « 105 », mais ne maîtrisant pas le codage ils ont effectué une concaténation des nombres « 100 » et « 5 ». Elle souhaiterait que les élèves formulent explicitement cette difficulté. La déclaration de Séverine a été formulée à voix basse, elle n'est pas audible par l'enseignante.

	Un élève : Maîtresse	
	M : Chut, tu as une idée toi ? Et alors pourquoi vous avez écrit mille-cinq alors que là elles viennent de compter quatre-vingt-dix-sept. Et d'abord (en désignant le groupement de neuf) si là il y en a neuf est-ce qu'il y a quatre-vingt-dix-sept ? Il y en a combien ?	
	Séverine : Quatre-vingt heu...Quatre-vingt-seize	
	M : Quatre-vingt-seize. D'accord, et oui vous avez préparé, il y en a quatre-vingt-seize Donc (s'adressant à Séverine et Lola) vous vous êtes trompées, ceux qui ont préparé la collection pourquoi elles se sont trompées ?	
	Séverine parce que elles, on a oublié un haricot dans un sachet	

⁶ Les mots-nombres en italique sont prononcés par les élèves.

	M : Elles, elles se sont trompées parce qu'elles ont oublié un haricot dans un sachet, et celles qui ont compté pourquoi elles se sont trompées ? Comment elles sont arrivées à ça ? Eh bien elles savent pas	
	Lola : je m'en rappelle plus	
	M : Elle s'en rappelle plus	

L'enseignante a réussi à mettre en lumière l'origine de l'erreur commise par les préparateurs, cependant elle n'a pas réussi à faire formuler aux récepteurs les raisons pour lesquelles elles ont produit un codage erroné. Cette interaction a cependant contribué à réactiver et à renforcer l'activité de dénombrement de la collection structurée.

Equipe 3 : Préparateurs (Jérémy et Malik)

	M : Ici équipe 3, alors soixante-dix-huit dans l'enveloppe et combien ?	
	Un élève : Soixante six	
	M : Mais qu'est-ce qui s'est passé ?	
	Un élève : Mais en fait parce qu'au début j'avais compté de dix en dix, et puis à un moment Tomy il compte un sachet, il y en avait que huit, et puis après dans un autre sachet, il y en avait que huit...	
	M : Eh alors est-ce que c'était le cas, est-ce qu'il y en avait que huit dans tous les sachets ?	
	Le même élève : Oui	
	M : Oui, dans chaque sachet, il y en avait huit ? Voyons, on y va, on compte ensemble	
	Les élèves : Un, deux trois, quatre, cinq, six, sept, huit	<i>Les élèves dénombrent les haricots contenus dans un premier sachet qu'elle tient dans sa main ; elle montre chaque haricot afin que les élèves les dénombrent.</i>
	M : Là ça marche. Et là (en se saisissant d'un autre sachet)	
	M : Ca marche, donc Jérémy et Malik vous avez mis huit haricots dans chaque sachet	
	Jérémy et Malik : Oui	
	M : Et pourquoi huit ?	

	Jérémy et Malik : Parce que pour arriver à 78 on a fait sept fois huit.	
	M : Sept fois huit, tu sais que ça fait 78...et tu ne sais pas ! Et tu sais pas.	

Les préparateurs explicitent leur choix de produire sept groupements de huit, cependant l'inadéquation de ce choix est mis en lumière par la rétroaction (l'équipe a perdu), de plus l'enseignante indique que la connaissance sur laquelle ils se sont appuyés n'est pas valide, elle ne figure pas dans le répertoire didactique de la classe.

	M (s'adressant au récepteurs) : Et est-ce que ça a été facile pour vous de compter ?	
	Les récepteurs : Non,	
	M : Pourquoi ?	
	Les récepteurs : Parce qu'on sait pas compter de huit en huit.	
	M : Parce qu'on ne sait pas compter de huit en huit mais par contre on sait compter...	
	Les élèves : De dix en dix et de deux en deux	
	M : Bien, alors est-ce que c'était facile pour eux de...?	
	Les élèves : Non	

Les récepteurs formulent explicitement la difficulté rencontrée : ils ne savent pas compter de huit en huit, d'où leur difficulté pour traiter la collection ainsi produite. C'est l'occasion pour l'enseignante de revenir sur les connaissances arithmétiques de leur répertoire didactique. Ces dernières leur permettent d'effectuer un comptage de dix en dix. Les élèves sont donc contraints à effectuer un dénombrement, un à un rendu plus difficile par les groupements réalisés.

4.3. La situation de communication : enjeux didactiques et effets sur les stratégies des équipes

Les stratégies des quatre équipes se sont révélées infructueuses, il est donc nécessaire d'en examiner les raisons et le choix d'une analyse, « interne » à chacune des équipes, est particulièrement judicieux ; d'autant plus que l'enseignante a clairement indiqué que lors du deuxième jeu, les récepteurs disposeraient d'une durée raccourcie pour effectuer le travail de codage de la collection. La modification de la valeur de cette variable didactique va contraindre chacune des équipes à examiner les décisions que les préparateurs peuvent prendre pour rendre la tâche des récepteurs plus simple, plus rapide mais aussi plus fiable.

Dans l'équipe 1, les élèves ont décidé de noter au dos de leur ardoise le nombre écrit en chiffres donné aux préparateurs de façon à permettre d'en effectuer une nouvelle lecture, si nécessaire, au cours de la réalisation de la collection. La production des groupements par 10 devra être faite « en vérifiant plusieurs fois » ; les élèves de ce groupe discutent ensuite des procédures permettant de coder la collection à partir des groupements réalisés en reprenant les nombres proposés lors du jeu précédent qui sont affichés au tableau, et en verbalisant pour chacun d'eux la stratégie qui leur paraît être la plus efficace pour réussir à gagner.

4.4. Les résultats et les stratégies lors du second jeu

Le tableau suivant présente les résultats obtenus lors du second jeu proposé par l'enseignante. Cette dernière a modifié une variable didactique : la durée laissée aux récepteurs pour produire l'écriture chiffrée de la collection qui leur a été transmise.

	Équipe 1	Équipe 2	Équipe 3	Équipe 4
Nombre donné aux préparateurs	79	94	87	126
Nombre écrit par les récepteurs	79	94	90	106
Collection produite par les préparateurs	Collection structurée 7 sachets de 10 haricots et 9 haricots isolés	Collection Structurée 9 sachets de 10 et 4 haricots isolés	Collection Structurée 9 sachets de 10	Collection structurée 1 gobelet contenant 10 sachets de 10 haricots, 2 sachets de 10 et de 6 haricots isolés
Procédure mise en œuvre par les préparateurs	Réalisation d'une collection structurée par la production de groupements par 10	Réalisation d'une collection structurée par la production de groupements par 10	Réalisation d'une collection structurée par la production de groupements par 10	Réalisation d'une collection structurée par la production des groupements par 10 et par 100 (10 sachets de 10)

Procédures et résultats lors de second jeu

Lors du second jeu, l'ensemble des préparateurs ont fait le choix de produire une collection structurée par la réalisation de groupements par 10 (et ensuite par 100 pour l'équipe 4, sous la forme d'un gobelet contenant dix sachets de dix haricots). On constate que trois binômes préparateurs sur quatre ont produit une collection valide (en adéquation avec l'écriture chiffrée proposée).

Lors de ce second jeu, l'observation des procédures a mis en évidence que le traitement de l'information contenue dans l'écriture chiffrée (nombre de dizaines, nombre d'unités) a été effectué par les équipes 1, 2 et 4 sans que les préparateurs aient recours à la désignation orale du nombre écrit. Cette stratégie a permis une suite d'actions fiables, efficaces et simultanées des préparateurs de ces équipes. Le contrôle de la validité de la collection réalisée a été effectué dans trois équipes sur quatre. Cette stratégie permet de travailler conjointement l'aspect positionnel et l'aspect décimal de notre numération. Les préparateurs de l'équipe 3 ont eu recours à la désignation orale du nombre écrit en chiffre et son « oralisation » erronée les a conduits à réaliser neuf paquets de 10. La stratégie de réalisation de groupements par 10, formulée par chaque équipe lors de la situation de formulation, a été mise en œuvre permettant ainsi à trois équipes sur quatre de réussir à produire la collection adéquate.

Les récepteurs de l'équipe 4 ont eu des difficultés pour coder la collection produite par les préparateurs : ils ont choisi de « défaire » le groupement de 100 et effectué un comptage de 10 en 10, à partir des sachets. Ils ont obtenu la désignation orale correspondante, sans se tromper, mais n'ont cependant pas réussi à produire l'écriture chiffrée correspondante. La phase de mise en commun a contribué à mettre en évidence, à partir de la collection matérielle réalisée par l'équipe 4, le lien entre les différentes décompositions du nombre en regard des groupements correspondants permettant ainsi de différencier le nombre de dizaines et le chiffre de dizaine dans l'écriture du nombre 126. Ce travail a permis aux élèves de travailler sur la récursivité des groupements, et ainsi de favoriser la compréhension de l'aspect décimal de notre système de numération.

4.5. Évolution des stratégies et apprentissages

Ces deux premières séances ont permis à l'enseignante de prendre conscience du répertoire de représentation des élèves plus précisément de leur interprétation de l'écriture chiffrée usuelle des nombres proposés; mais aussi de prendre conscience des difficultés des récepteurs relatives au traitement des collections. Les phases de mise en commun ont été, pour l'enseignante, l'occasion de revenir sur les procédures observées en phase d'action, afin de renforcer certains apprentissages fondamentaux et notamment la capacité des élèves à structurer une collection et à organiser le dénombrement d'une collection structurée.

L'évolution des stratégies, durant les deux jeux, est un indicateur essentiel des apprentissages des élèves. Lors du premier jeu, seules deux équipes sur quatre, ont eu recours à la production de groupements, pour réaliser la collection correspondant à l'écriture chiffrée or dans le second jeu, toutes les équipes ont produit une collection structurée. Dans le premier jeu l'ensemble des élèves ont choisi de mettre en œuvre une stratégie s'appuyant sur la désignation orale des

nombres dévolus aux préparateurs ; cependant dans le second jeu trois équipes sur quatre ont opté pour un traitement adéquat de l'écriture chiffrée, s'appuyant sur le nombre de groupements correspondant aux unités, dizaines (et centaines). Ces deux premières séances ont permis aux élèves de renforcer les différentes composantes de leur répertoire didactique (représentation, décision, action, formulation) mais aussi d'accéder aux critères de validité et de pertinence de leurs procédures.

5. Intérêt de la situation de réinvestissement dans la construction du répertoire de représentation

Les deux premières séances, par la mise en œuvre d'une ingénierie alternant situation adidactique et situation didactique, ont contribué à permettre à l'élève de prendre conscience de l'équivalence entre représentation matérielle structurée (groupements apparents traduisant la récursivité des groupements) et écriture chiffrée (usuelle) associée. La situation de jeu a permis aux élèves de percevoir les raisons pour lesquelles la stratégie, basée sur la réalisation des groupements correspondants, est à la fois valide, fiable et rapide.

En classe de C.P. l'élève doit parvenir à percevoir le lien entre les différentes représentations d'un nombre l'écriture chiffrée (écriture usuelle), la décomposition additive usuelle, l'écriture additive associée aux groupements, l'écriture littérale, le dessin de la collection faisant apparaître les groupements par 10. C'est la raison pour laquelle nous avons fait le choix de proposer une situation didactique qui vise à établir le lien entre ses différentes représentations en s'appuyant sur la stratégie construite au cours des différentes parties du jeu.

L'enseignante propose aux élèves, réunis en binômes, une représentation sémiotique du nombre (écriture usuelle, écriture additive, décomposition additive usuelle ou décomposition additive associée aux groupements) et leur demande de réaliser la collection matérielle associée. Pour cela ils vont, à tour de rôle, aller chercher les groupements (sachets de 10, haricots isolés), de façon à produire la collection correspondante. Lors de la mise en commun, ils doivent justifier les choix qui les ont conduits à produire la collection. Ensuite l'enseignante propose dans un premier temps (et demande aux élèves dans un second temps) de produire la schématisation des groupements et leur demande ensuite de déterminer les représentations mathématiques équivalentes en lien avec les différents registres (Duval, 1996). Elle effectue alors une institutionnalisation des écritures et des schématisations correspondantes pour chacune des écritures dévolues aux élèves de façon à faciliter, chez ses élèves, l'élaboration de leur répertoire de représentation.

Conclusion

Cette recherche a permis de mettre en évidence l'intérêt et la nécessité d'un dispositif incluant des situations à dimension adidactique (situation d'action et situation de formulation) pour évaluer et renforcer la capacité des élèves à

mobiliser leur répertoire didactique en situation, c'est-à-dire lorsque les conditions qui définissent la situation rendent nécessaire l'usage des connaissances et des savoirs.

L'observation des binômes, en situation adidactique, a fourni à l'enseignante de précieux renseignements concernant l'appropriation du domaine de validité des connaissances et très précisément, la manière dont les élèves mettent en œuvre leurs connaissances ainsi que les principales difficultés auxquelles ils sont confrontés.

La phase didactique de formulation des stratégies joue un rôle essentiel : elle permet aux élèves d'explicitier, en réponse aux questions de l'enseignante, les décisions qui sous-tendent leurs actions et de justifier l'adéquation et la validité de leurs procédures. Les élèves ont ainsi la possibilité de mesurer les effets de leurs décisions sur la tâche que les récepteurs doivent accomplir pour permettre la réussite de leur équipe. Cette alternance de situation adidactique et didactique est une condition nécessaire à l'apprentissage, elle apparaît comme un élément incontournable lors de l'élaboration de l'ingénierie. Mais c'est également pour l'enseignante la possibilité de réactiver, en situation didactique, certaines connaissances du répertoire didactique de la classe et ainsi de faire percevoir aux élèves l'origine de leurs erreurs qui ont conduit l'équipe à échouer. Sa tâche consiste aussi à observer, au cours des jeux successifs, l'évolution des stratégies des élèves, indicateur essentiel en termes d'apprentissage.

Les deux premières séances ont conduit les élèves à établir un lien entre la collection matérielle et l'écriture chiffrée, mettant ainsi en évidence le sens de l'écriture chiffrée usuelle ; ceci contribue à renforcer la compréhension du système décimal. La séance trois, a une double fonction : celle de permettre aux élèves d'exercer leurs procédures afin de produire, à partir d'une représentation du nombre, la collection correspondante. Elle a également pour fonction d'institutionnaliser les équivalences entre les différentes représentations du nombre : désignations orales, écrites, collection matérielle, collection dessinée.

Cette connaissance des différentes représentations du nombre, en lien avec les différents registres correspondants (Duval, 2006), est nécessaire pour permettre aux élèves d'accéder au domaine de validité de chacune d'elles. Les élèves perçoivent ainsi les raisons pour lesquelles chaque représentation est adéquate (Gagatsis A., Deliyianni, Elia I. et Panaoura A., 2011) pour répondre à des situations de dénombrement, de calcul mental ou posé, ou de résolution de problèmes d'arithmétique. Cette prise de conscience des différentes représentations du nombre et des contextes d'utilisation s'avérera essentielle pour les apprentissages ultérieurs, plus particulièrement ceux qui relèvent de la mise en œuvre des opérations arithmétiques.

Bibliographie

- BEDNARZ N., JANVIER B. (1984) La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage, *Grand N*, 33, 5-31, IREM Grenoble.
- BLOCH I., GIBEL P. (2011) Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuve dans une situation d'enseignement de la notion de limite, *Recherches en Didactique des mathématiques*, la Pensée Sauvage, 31-2, Grenoble : La Pensée Sauvage.
- BRIAND J. (1993), *L'énumération dans le mesurage des collections*, Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, Bordeaux.
- BROUSSEAU G. (2004), Les représentations : étude en théorie des situations, *Revue des Sciences de l'Education*, 30-2.
- BROUSSEAU G. (1997), *Théorie des situations didactique*, *Recherches en didactique des mathématiques*, Edition la pensée sauvage édition.
- BRUN J. (1994) Évolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, 67-83, Grenoble: La Pensée Sauvage.
- DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang.
- DUVAL R. (2006), A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics, *Educational Studies in Mathematics* Vol. 61 n°1, pp. 103-131, Springer.
- GAGATSIS A., DELIYIANNI E. ; ELIA I. ET PANAOURA A., (2011) Explorer la flexibilité : le cas du domaine numérique, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 25-43, IREM de Strasbourg.
- GIBEL P. (2004) Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnement dans la relation didactique en classe de mathématiques, Doctorat de l'Université de Bordeaux 2.
- GIBEL P. (2006) Raisonnement et argumentation : Analyse des différentes formes et fonctions des raisonnements des élèves en situation de débat à l'école primaire. In Bednarz N., Mary C. (Eds.) *Actes du colloque EMF 2006* (Cédérom). Sherbrooke : Éditions du CRP
- MARGOLINAS C. & RIVIERE O. (2008) Les dessous du numérique, *Actes du XXXV^e Colloque COPIRELEM*, Bordeaux
- SERFATI M. (2005), *La révolution symbolique : la constitution de l'écriture symbolique mathématique*, Éditions Petra, Paris

TEMPIER F. (2010) Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2, *Grand N*, 86, 59-90, IREM Grenoble.

PATRICK GIBEL

Patrick.Gibel@iufm.u-bordeaux4.fr

M'HAMMED ENNASSEF

Mhammed.Ennassef@iufm.u-bordeaux4.fr

Annexe 1 : Le déroulement de la séquence

La séquence produite par l'enseignante comporte 3 séances

Séance 1

Phase 1 : Phase de dévolution du jeu. Phase didactique.

Phase 2 : Phase d'action pour les préparateurs. Phase adidactique.

Phase 3 : Transmission de la collection dans la boîte.

Phase 4 : Phase d'action pour les récepteurs. Phase adidactique.

Phase 5 : Phase de validation. Phase didactique.

Confrontation des écritures chiffrées, désignation des équipes gagnantes.

Phase 6 : Phase de formulation des stratégies. Phase didactique.

Séance 2

Phase 1 : Phase de rappel ayant pour objet un retour sur la situation proposée.

Phase didactique

Phase 2 : Phase de formulation. Phase de communication interne à chaque équipe.

Phase adidactique

Phase 3 : Phase de jeu (les émetteurs de la séance 1 deviennent récepteurs et inversement). Phase d'action pour les préparateurs. Phase adidactique

Phase 4 : Transmission de la collection dans la boîte.

Phase 5 : Phase d'action pour les récepteurs. Phase adidactique

Phase 6 : Phase de validation. Phase didactique

Phase 7 : Phase de validation didactique Analyse des procédures mises en œuvre.

Phase didactique

Séance 3

Réinvestissement Activités d'entraînement. Phase didactique

L'objectif est de travailler, à partir du matériel utilisé, notamment les groupements par 10 (sachets produits par les élèves lors de la situation de jeu), les équivalences entre les différentes désignations écrites d'un nombre dans le système décimal (écriture chiffrée, décomposition additive usuelle, écriture additive associée aux groupements), son écriture littérale, un dessin de la collection faisant apparaître les groupements par 10 et par 100. Il s'agit pour les élèves de percevoir les liens entre les désignations écrites, les désignations orales, et la réalisation des groupements par 10 et par 100.

Annexe 2

	Période 1 septembre-octobre	Période 2 novembre-décembre	Période 3 De janvier à avril	Période 4 De mai à juillet
Les nombres pour mémoriser	Stratégies pour le dénombrement Situation fondamentale ordinale	Situation fondamentale ordinale	Situation fondamentale cardinale	
Les nombres pour apprendre à chercher		Lecture d'image	Situation de recherche	Résolution de problèmes
Les nombres pour anticiper et calculer	Situations visant la mise en œuvre de stratégies de calculs additifs et soustractifs : Surcomptage, recomptage	Introduction des écritures additives Comparaison d'écritures additives : cibles	Calculs additifs : arbre de calculs Situation fondamentale du calcul additif et soustractif	Techniques d'additions Procédures soustractives Algorithme usuel Entraînement au calcul posé
Connaître les nombres	<u>Etude globale</u> : Construction et utilisation de la bande numérique. Réalisation de collections (sachets) associées à la bande numérique. (matérialisée) <u>Etude locale</u> Etude des nombres de 1 à 10	<u>Etude locale</u> Etude des nombres de 1 à 10 (décompositions additives) Etude détaillée des nombres de 10 à 20. Etude détaillée des nombres de 20 à 30 <u>Etude globale</u> : approche algorithmique Château des nombres	<u>Etude globale</u> Construction du tableau des nombres de 1 à 100. Situation des Carrelages. <u>Etude locale</u> Etude détaillée, par familles, des nombres de 30 à 69. Suites arithmétiques (de 2 en 2, de 10 en 10)	<u>Etude locale</u> Les nombres de 70 à 100 <u>Etude globale</u> Les fourmillions Jeu de communication : codage et décodage

Annexe 3

Séquence les fourmillions

adaptée par l'enseignante

Finalité de la séquence Dénombrer un grand nombre d'objets (entre 300 et 400 haricots), par une méthode qui soit à la fois fiable, rapide, efficace et produire l'écriture chiffrée du nombre d'éléments de la collection.

Objectifs de la séquence

- Rencontrer une grande collection d'objets.
- Utiliser les groupements par 10 pour organiser le dénombrement d'une grande collection.
- Construire les relations entre 10, 100, 1000.
- Découvrir la récursivité des groupements.
- Vivre une situation de référence qui donne du sens à la lecture des nombres à 3 chiffres

Compétence générale : Déterminer la valeur de chacun des chiffres

Matériel : collection de haricots, sachets, gobelets

Modalité : travail en groupes

Les différentes phases du déroulement :

Phase 1 : Présentation de la situation. Recueil des propositions de procédures pour dénombrer la collection.

Phase 2 : Répartition de la collection entre les différents groupes.

Phase 3 : Réalisation des groupements de 10 haricots (sachet).

Phase 4 : Mise en commun des résultats.

Phase 5 : Réalisation des groupements de 10 sachets (10 sachets sont placés dans un gobelet). Identification de ce nouveau groupement comme une « centaine ».

Phase 6 : Mise en commun des résultats obtenus.

Phase 7 : Effectuer le lien entre la collection structurée et l'écriture chiffrée correspondante.

Phase 8 : Phase d'institutionnalisation

JOSÉ CARLOS CORTÉS ZAVALA & M^A DE LOURDES GUERRERO MAGAÑA

**PROGRAMAS DE CÓMPUTO INTERACTIVOS PARA CREAR
AMBIENTES TECNOLÓGICOS PARA EL APRENDIZAJE DE LAS
MATEMÁTICAS¹**

Abstract. Interactive software to create technological environments for mathematics learning This article deals with a research work related to the use of technology for Mathematics teaching and learning. In this one, some current educative aspects and tendencies converge, such as: the use of software, the use of several internet platforms, educative software design and development, and the use of calculators and computers. We study the mentioned tendencies from the point of view of teachers (with educational perspectives) and also from the point of view of the learning of mathematics (cognitive issues), through the creation and use of Interactive Technological Environments for the Learning of Mathematics (ATIAM). Also, we include research results linked with design and construction of software for the learning of mathematics in ATIAM's environments.

Résumé. Programmes informatiques interactifs pour créer des environnements technologiques d'apprentissage des mathématiques Ce travail expose une ligne de recherche orientée vers l'utilisation de la technologie informatique pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Dans notre recherche convergent des aspects et des tendances éducatives actuelles, comme: l'utilisation de logiciels, l'utilisation de diverses plates-formes d'Internet, la conception et le développement de logiciels éducatifs et l'utilisation de calculatrices et ordinateurs. Nous étudions ces aspects des points de vue didactique et cognitif, l'enseignement par des professeurs et les apprentissages, en nous appuyant sur la création et l'expérimentation d'Environnements Technologiques Interactifs pour l'Apprentissage des Mathématiques (ATIAM).

Mots-clés. TICE, environnement interactif d'apprentissage, différences, dérivées.

Resumen. Este trabajo presenta una línea de investigación orientada a utilizar la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En esta investigación convergen aspectos y tendencias educativas actuales, tales como: el uso de software, el uso de diversas plataformas de Internet, el diseño y desarrollo de software educativo y el uso de calculadoras y computadoras. Estudiamos por una parte los aspectos didácticos relacionados con el punto de vista del profesor y por otra parte los aspectos cognitivos del aprendizaje de las matemáticas, con la creación y el uso de Ambientes Tecnológicos Interactivos para el Aprendizaje de las Matemáticas (ATIAM). Los resultados de la búsqueda se presentan en relación con el diseño y construcción de software para el aprendizaje y la experimentación realizada en ATIAM.

Palabras clave. Tecnología, ambientes de aprendizaje, diferencias, derivada.

¹ Artículo realizado dentro del proyecto de creación de la red académica "Uso de tecnología para el aprendizaje de las matemáticas" apoyado por PROMEP.

Introducción

En este artículo se presenta un ejemplo del trabajo realizado en la línea de investigación sobre el uso de tecnología computacional para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En ésta convergen varios aspectos y tendencias educativas actuales, tales como: el uso de programas de cómputo, el uso de diversas plataformas de Internet, el diseño y desarrollo de programas de cómputo educativo y la utilización de calculadoras y computadoras, entre otros, desde la perspectiva de los profesores (didáctica y enseñanza) y desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas (aspectos cognitivos).

El uso de la tecnología en el aula de matemáticas modifica las relaciones entre los diversos actores que interactúan en ella; es en este sentido, que hemos definido un Ambiente Tecnológico Interactivo para el Aprendizaje de las Matemáticas (ATIAM) como: *“aquel que se genera en el espacio o entorno donde los actores de los procesos de enseñanza y de aprendizaje (profesor y alumno) y el objeto de conocimiento, interactúan de forma organizada a través de una metodología que incluye actividades de aprendizaje con el uso de tecnología”* (Cortés, Núñez, 2007).

La investigación realizada alrededor de los ATIAM (Cortes, Núñez 2007; Núñez, Cortes 2008; Núñez 2008), ha mostrado que estos ambientes tecnológicos tienen potencial para favorecer, en los estudiantes, el desarrollo de habilidades para la construcción de procesos de aprendizaje y de conceptos matemáticos. Para la creación de un ATIAM es preciso contar con: 1) una propuesta teórica de enseñanza y/o aprendizaje; 2) actividades que faciliten y estimulen la construcción de aprendizajes; y, 3) una metodología de enseñanza acorde con los puntos anteriores (Núñez, Cortés 2008). Así mismo, puede involucrar el desarrollo de programas de cómputo educativo; es precisamente en este último sentido en el que será dirigido el presente artículo. Esto es, se detallarán características significativas que permiten elaborar programas de cómputo que se incorporan en el desarrollo de ATIAM's, y se mostrará un ejemplo, del tipo de programas de cómputo al que hacemos referencia.

1. Características fundamentales para el diseño de programas de cómputo educativo

La inclusión de la tecnología computacional en el proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas requiere del uso de programas de cómputo especializado. Sin embargo, la mayoría de las veces solamente se dispone de paquetes de cómputo diseñados por empresas, que resultan ser muy genéricos en la enseñanza, aún cuando hayan sido diseñados con propósitos educativos.

Un diseño efectivo de programas de cómputo educativo debe estar basado en modelos de aprendizaje (Clements and Battista, 2000) que puedan ser articulados

en ATIAM's. Además, su implementación debe estar libre de errores computacionales y contar con objetivos para proponer estrategias para promover en los estudiantes la construcción de conceptos matemáticos.

Por tal motivo, el desarrollo de programas de cómputo efectivos para la enseñanza y el aprendizaje debe considerar gran cantidad de variables, tanto de carácter educativo como de tipo computacional; así mismo, debe someterse a diferentes fases de evaluación, tanto en términos de su funcionamiento como del sentido educativo específico para el que fueron diseñados.

La etapa de diseño del programa de cómputo debe considerar mínimamente las características que se describen en los siguientes apartados.

1.1. Selección de un tema

Ésta es una característica fundamental para el diseño, ya que posibilita utilizar la tecnología como una herramienta de apoyo para intentar resolver un problema de aprendizaje específico. Dependiendo de la dificultad relativa al aprendizaje de un concepto, proceso o idea matemática, podemos definir el tipo de tecnología a utilizar considerando también los recursos tanto académicos como económicos con los que cuenta el profesor.

1.1.1 Elaboración de una estrategia de aprendizaje para abordar el tema

Es necesario considerar aspectos teóricos para elaborar una estrategia de aprendizaje que pueda dirigir la actividad educativa; se deben tomar en cuenta fundamentos teóricos de enseñanza y de aprendizaje para las actividades que se van a proponer. En particular, en el ejemplo que se muestra en los siguientes apartados, hemos utilizado la teoría de representaciones semióticas, propuesta por Duval (1988, 1993 y 1995), ya que en el programa de cómputo se promueve el tratamiento y la conversión entre representaciones. Así mismo queremos hacer que las variables visuales presentes en diferentes representaciones, se manifiesten como elementos importantes para el aprendizaje, ya que estas variables visuales usualmente quedan implícitas para el estudiante, causando dificultades. Por ejemplo, cuando se utiliza el registro semiótico numérico en el programa de cómputo "Funciones y Derivadas", se construyen tablas de cuatro salidas $(x, f(x), \Delta x, \Delta f(x))$ en las que se hacen visibles simultáneamente la variable independiente, la variable dependiente y sus incrementos respectivos.

1.1.2. La programación

Consiste en la implementación de la propuesta en un lenguaje de programación. Es necesario elaborar una interface de comunicación y control del programa para con el usuario, y codificar, en algún lenguaje, las estrategias para abordar el tema. En particular hemos trabajado con Visual Basic y Java, ya que son lenguajes que incorporan un ambiente gráfico de fácil y rápido manejo; además, éstos combinan

la programación estructurada con la orientada a objetos, dando la posibilidad de implementar módulos reutilizables para la construcción de distintos programas de cómputo.

1.2. Prueba del programa de cómputo educativo

Una vez que se tiene un primer prototipo, se debe realizar:

1. Una prueba técnica para determinar su buen funcionamiento.
2. Comprobar que el programa de cómputo cumpla los objetivos didácticos para los que se diseñó, a través de una evaluación técnica que contemple:
 - la ausencia de errores de programación;
 - que la actividad que se propone se entienda con claridad;
 - que permita al usuario navegar en él sin dificultad;
 - que permita la introducción sencilla de respuestas.
3. Una evaluación del programa de cómputo desde un punto de vista educativo, valorando los objetivos didácticos para los que fue creado. Normalmente se realizan experimentaciones piloto basadas en los sustentos teóricos, la estrategia que se está implementando y el manejo del programa de cómputo. Estas experimentaciones se plantean a diferentes niveles: primeramente con pequeños grupos y posteriormente con grupos de estudiantes y profesores en ambientes naturales.

1.3. Documentación

Una característica fundamental que permita que el programa de cómputo sea utilizado por una población mayor, es la descripción del funcionamiento del programa a través de un manual, y de las actividades que pueden ser utilizadas en combinación con el programa. Éstas servirán de guía hacia los aprendizajes que se quieren favorecer y deberán incluir los objetivos para los que fueron creados.

2. Ejemplo: Acercamientos numéricos para el entendimiento del concepto de derivada como función

2.1. Selección del tema

Diversos investigadores señalan la importancia de introducir el concepto de derivada a través del uso de razones de cambio. Basado en esta idea, se diseñó y desarrolló el programa de cómputo denominado “*Fun_Der*” en el que se incorporaron actividades que resaltan aspectos relacionados con diferencias, incrementos y razones de incrementos a través de ideas visuales. Hughes (1990) ha observado que muchos estudiantes pueden calcular algebraicamente las derivadas

de diversas funciones, pero no son capaces de determinar, en una gráfica, el signo de la derivada. Además, la autora nota que pocas veces se utiliza un acercamiento numérico para enseñar este concepto. Confrey (1993) indica que la presencia de tablas numéricas puede iluminar la relación funcional de los valores contenidos en ellas y la presentación algebraica. Por su parte, Scher (1993) menciona que “la noción de razón de cambio debe ser accesible para todos los estudiantes”.

Sabemos, con base en diversos estudios, que el concepto de derivada es tratado con métodos predominantemente algebraicos que ocultan información relevante para su aprendizaje. Para contrarrestar esta tendencia, propuestas como la de Duval (1988,1993 y1995), Confrey (1993), Scher (1993), Mejía (1997), Hitt (2002), Pluvinae (2005), Cortés et al. (2005), Hitt y Cortes (2009) mencionan la importancia del manejo gráfico y numérico, como representaciones de objetos matemáticos, cada uno de ellos, presentando distinta información, además de permitir ciertas actividades cognitivas.

Cuando se usa un solo tipo de representación, se corre el riesgo (Duval, 1988) de confundir al objeto con la representación, y puede generar una construcción muy pobre y parcial del concepto matemático en cuestión; es por ello que se propone el uso de múltiples representaciones, para promover una estructura cognitiva específica (articulación entre representaciones). Por ejemplo, si tenemos una función dada por $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, su gráfica y su tabla están representadas en la Figura 1.

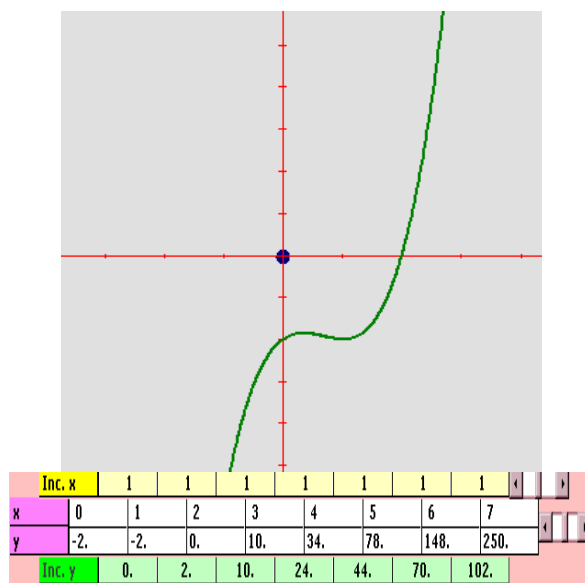


Figura 1. Representación gráfica y tabular de una función

A partir de éstas podemos hacernos las siguientes preguntas:

- ¿En cuál de ellas nos basaríamos para afirmar que la función tiene dos raíces complejas?
- ¿Cuál de ellas permite una mejor visualización de los intervalos en que la función es decreciente y creciente?
- ¿Cuál de ellas nos permite predecir el valor de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$?
- ¿En cuál podemos visualizar rápidamente que $f'(2) > 0$?
- ¿Cuál de ellas nos permite decir con exactitud el valor de la ordenada al origen?
- ¿Cuál de ellas nos permite decir con exactitud el valor de la raíz?
- ¿Cuál de ellas nos permite calcular secantes con exactitud?

Para contestar algunas de estas preguntas, el análisis de las diferentes variables visuales y unidades significativas en el sentido de Duval, para las diferentes representaciones puede ser fundamental; ésta se puede adquirir a través del trabajo en cada representación. Es también en este sentido que Duval menciona la necesidad de realizar tratamientos en cada representación y conversiones entre representaciones para formar una articulación entre representaciones y así construir el concepto matemático.

2.2. Elaboración de una estrategia de aprendizaje para abordar el tema

Para intentar solucionar la problemática planteada, se desarrolló el programa de cómputo “Funciones y Derivadas” (Fun_Der) (Cortés 2002). La propuesta se ubica dentro de la teoría de sistemas semióticos de representación², por lo que deberá promover la detección de las unidades significativas en el sentido de Duval, permitir la manipulación de diferentes representaciones y tareas que promuevan los tratamientos y las conversiones de representaciones. A continuación mostramos algunas de las ideas contenidas en el programa de cómputo Fun_Der.

2.2.1. Tratamiento numérico

Se propone un acercamiento numérico al concepto de derivada a través de la razón de cambio, introduciendo primero progresiones aritméticas para motivar al estudiante a desarrollar estrategias manipulando incrementos para resolver algunos ejercicios. El proponer un acercamiento discreto al concepto de derivada, permite que el estudiante trabaje con elementos conocidos que para él son concretos.

² Ver Duval (1988, 1993 y 1995).

2.2.2. Progresiones aritméticas para introducir la noción de “Diferencia”

El tema de *Progresiones aritméticas* se aborda en cuatro niveles (Figura 2), con el objetivo de iniciar un acercamiento numérico al concepto de Razón de Cambio. Como puede observarse en la figura 2, los niveles están relacionados con la dificultad de reconocimiento de elementos en las progresiones, debido a que en cada nivel se presenta la posición de manera diferente (para una mayor descripción al respecto, véase Cortés et al, 2005).

Nivel I	posición	1	2	3	4	5	6	7	8
	valor	28	30	32					

Nivel II	posición	1	11	21	31	41	51	61	71
	valor	8	28	48					

Nivel III	posición	1	14	33	48	64	77	88	94
	valor		-1	38	95				

Nivel IV	posición	1	19	33	44	60	72	85	93
	valor		15			56			

Figura 2. Diferentes niveles de progresiones aritméticas

2.2.3. Incrementos de variables

En el tema de *Incrementos* el objetivo es introducir una notación (ver Figura 3) proponiendo un acercamiento gráfico (Cortés, 2010) con cuatro niveles relacionados con la dificultad con que se han expresado las progresiones.

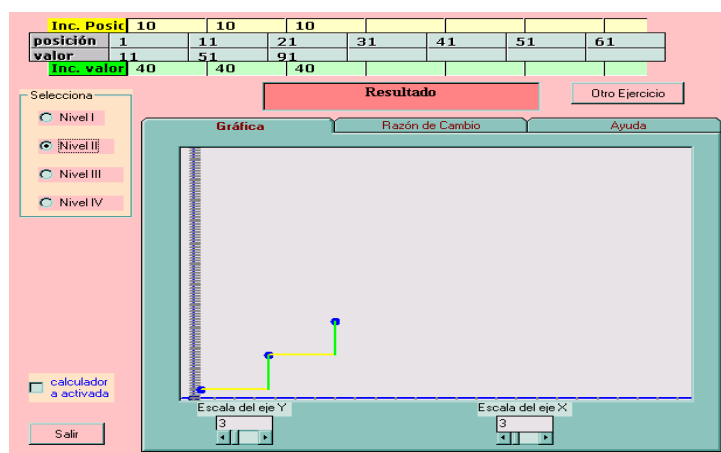


Figura 3. Acercamiento gráfico a la noción de incremento

2.2.4. Razón de cambio

Este acercamiento discreto a la *Razón de cambio* permite

introducir la noción de pendiente como razón de incrementos (Cortés, 2005), dando un significado gráfico a la razón de cambio (Cortés, 2006). Éste también se aborda como cociente de

incrementos, obteniéndose una representación funcional genérica; por ejemplo, para

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

-los parámetros se generan aleatoriamente- (Figura 4) se presenta la tabla de valores con sus respectivos incrementos, y se pide se llene la tabla *Razón de Cambio*. Para los valores correctos que se introducen en la misma tabla se refleja su correspondiente en la gráfica (Figura 5).

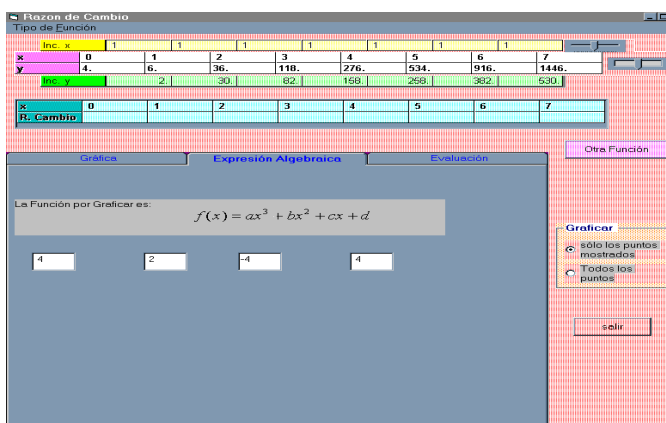


Figura 4. Una función cúbica aleatoria

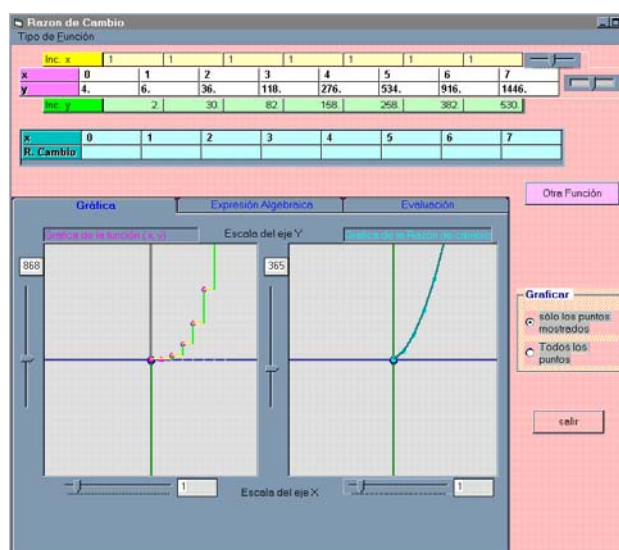


Figura 5. Gráficas de la función y de la razón de cambio

2.2.5. Tratamiento gráfico

El tratamiento gráfico que proponemos en torno al concepto de derivada, es aquel en el que se usa la recta secante como modelo de aproximación a la recta tangente. Al respecto, Wenzelburguer (1993) menciona: “Normalmente se usa el problema de la tangente geométrica como motivación para introducir la derivada. Este método tiene muchas desventajas porque no es fácil de entender que el límite de la pendiente de una familia de secantes es la pendiente de la tangente a la cual se

llama derivada. Además, no se ve una conexión inmediata entre una tangente geométrica que es un fenómeno estático y el dinamismo de una derivada”.

Nuestra propuesta intenta resolver este problema de aprendizaje; es decir, consideramos que un tratamiento gráfico de la secante, de la tangente, de la función razón de cambio y de la función derivada, servirá para sobrepasar este obstáculo cognitivo.

Primeramente introducimos gráficas de funciones de la forma general, por ejemplo una función polinomial (Figura 6), en la cual tenemos parámetros manipulables (Figura 7).

Podemos seleccionar trazar una línea secante (Figura 8) o una línea tangente (Figura 9) o la gráfica de la función razón de cambio (Figura 10) o la gráfica de la derivada (Figura 11) obteniendo, de acuerdo a la selección, la tabla correspondiente (Figura 12).

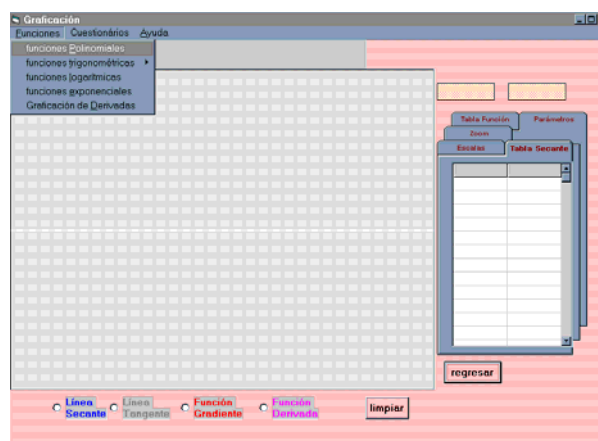


Figura 6. Selección de funciones

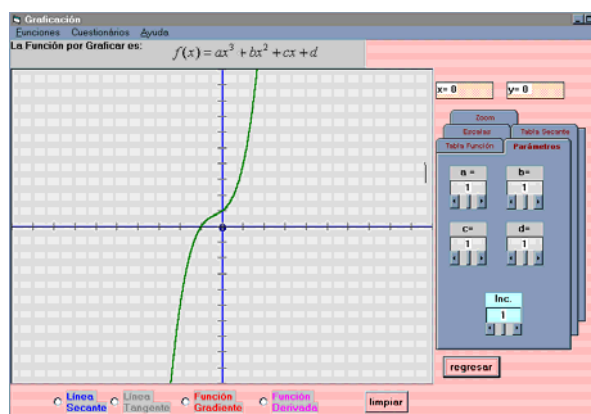


Figura 7. Selección de parámetros

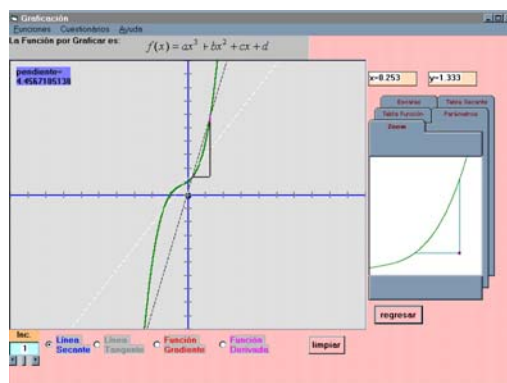


Figura 8. Línea secante

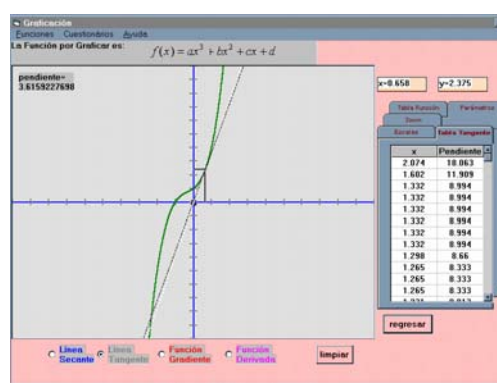


Figura 9. Línea tangente

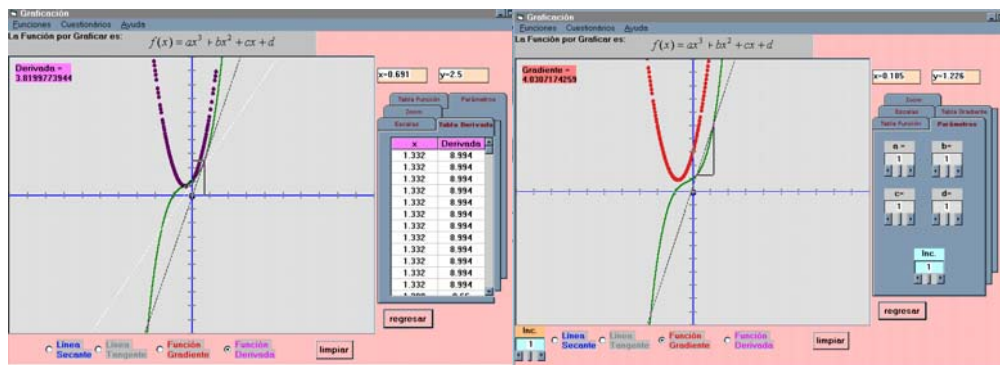


Figura 10. Función razón de cambio

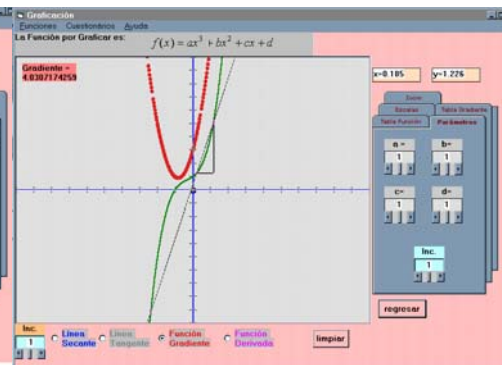


Figura 11. Función derivada

A través del uso de estas actividades se pretende que el estudiante comprenda: a) la noción de incremento; b) razón de cambio; c) las relaciones entre la secante, la razón de cambio, la tangente y el *incremento de x*; y, d) la relación gráfica entre las pendientes de la secante y la derivada.

2.3. Codificación del programa de cómputo

Este sistema fue implementado en el lenguaje Visual Basic, por requerir predominantemente un ambiente de programación para el fácil manejo de gráficos y tablas de datos. Así mismo, fue posible reutilizar el módulo de análisis sintáctico previamente diseñado, para el manejo de expresiones simbólicas generales requeridas en la definición de funciones.

Tabla Función		Parámetros	
Zoom		Tabla Tangente	
Escala		Pendiente	
x			
2.074	18.063		
1.602	11.909		
1.332	8.994		
1.332	8.994		
1.332	8.994		
1.332	8.994		
1.332	8.994		
1.332	8.994		
1.298	8.66		
1.265	8.333		
1.265	8.333		
1.265	8.333		
1.231	8.012		

Figura 12. Representación numérica

2.4. Prueba del programa de cómputo

A continuación se exponen algunos de los resultados obtenidos en un estudio piloto, realizado con el propósito de evaluar los objetivos de aprendizaje para los que se diseñó el programa de cómputo.

La experimentación se practicó con cinco estudiantes de bachillerato durante doce horas, repartidas en cuatro sesiones. Como se mencionó en el apartado anterior, este tipo de experimentación con pequeños grupos, es fundamental para indagar sobre el entendimiento de los estudiantes acerca de los conceptos que se están tratando de favorecer. La experimentación se realizó en una sala equipada con dos cámaras de video con las que se registró el trabajo en equipo de los estudiantes (dos equipos con dos estudiantes y uno de uno) usando cada grupo una computadora y el programa de cómputo instalado.

En la primera sesión se dio una instrucción sobre la navegación en el paquete para que los estudiantes utilizaran libremente los contenidos del programa de cómputo. El instructor se desempeñó como observador que podía contestar preguntas cuando le eran requeridas, o para cuestionar a los estudiantes para que guiarles hacia una estrategia correcta. Los estudiantes podían comunicar libremente sus ideas o sus estrategias de solución. Las interacciones fueron videograbadas.

Primeramente se trabajó con las progresiones aritméticas. El programa genera, en forma semi-aleatoria, una tabla en la cual se alternan espacios vacíos, siendo la tarea del usuario el llenarlos (Figura 2); el programa de cómputo realiza la evaluación del dato introducido y muestra si es correcto o incorrecto.

2.4.1. Observaciones generales

Los integrantes de los equipos no tuvieron ningún problema en la navegación con el programa de cómputo y entendieron rápidamente la tarea por desarrollar. Tuvieron algunos conflictos para encontrar la estrategia adecuada, pero al final lo lograron.

2.5.1. Análisis de la experimentación en relación con los contenidos presentados

Dentro del desarrollo de la presente experimentación se detectó que la idea de incremento no es comprendida fácilmente por los estudiantes, lo cual dificulta el aprendizaje de la razón de cambio y del concepto de derivada. Por esta razón, el análisis se centró en explicar, con base en las videograbaciones, si las ideas de incremento y razón de cambio fueron entendidas. Asimismo, éste fue un primer contacto para vislumbrar la posibilidad de que un acercamiento por medio de la función razón de cambio permita a los estudiantes transitar al concepto de derivada.

En la primera tarea del programa, se presenta a los estudiantes una introducción sobre las progresiones aritméticas y los cuatro niveles de ejercicios. Los cinco estudiantes entendieron bien la introducción y la tarea a desarrollar. Los niveles I y II no presentaron ningún problema, pero los niveles III y IV fueron muy difíciles para los estudiantes. Sólo un equipo encontró una estrategia para resolver lo requerido en el nivel III.

A continuación se describe un episodio de lo sucedido cuando los estudiantes trabajaron con el nivel III de progresiones. A los alumnos se les dificultó encontrar una manera general para dar solución a este tipo de progresiones, ya que estas no se resuelven con la misma estrategia que se aplica en los niveles I y II, debido a que las posiciones en el nivel III no eran consecutivas ni sus diferencias constantes.

En el siguiente diálogo un equipo trabaja con un ejercicio de progresiones nivel III, y descubren por medio de tanteos que hay una cantidad que al ser multiplicada por

la diferencia de posiciones y sumándole el último valor, pueden encontrar el valor que necesitan. Cuando el equipo contiguo se percató de ello, las cuestiona sobre cómo lo están haciendo. La progresión que resuelven en ese momento es la siguiente, el número en cursiva es el que ellos calcularon.

POSICIÓN	1	14	28	35	49	66	81	98
VALOR	12	64	120	<i>148</i>				

Dialogo No. 1.

Rubí : ...o sea la diferencia entre veintiocho y treinta y cinco la multiplicamos por cuatro... la multiplicamos por cuatro, sí, ¿o así la dejo?

Selene : Siete por cuatro, veintiocho.

Rubí : ¿Cuánto? Siete por cuatro, veintiocho.

Selene : Más ciento veinte.

Realizan las operaciones correspondientes e introducen el valor que les proporcionó, en la pantalla aparece la ventana de CORRECTO.

En eso, una de las integrantes de otro equipo interviene al ver que ya obtuvieron un resultado correcto.

Silvia : ¿Cómo le hacen?

Rubí : Chivis, eso es secreto Chivis.

Silvia : ¿Podemos comparar?

Selene : Sí, si podemos comparar. A ver ... vemos las diferencias. Aquí en este caso es de cuatro (se refiere al número por el cual multiplica), puede ser por tres o por dos.

Rubí : ¿Si entendiste?

Silvia : No.

Rubí : La diferencia de éste (señala el 1) a éste (señala el 14) aparece por cuatro, en nuestro caso son ... ¿cuánto?

Selene : Cincuenta y dos.

Rubí : Si, es que lo vamos haciendo, con dos y no dio, con tres y no dio, y por cuatro sí. Son cincuenta y dos mas doce, sesenta y cuatro ... y la diferencia de éste (señala el 28) a éste (señala el 35) por dos, mas éste (señala el 120) ... por cuatro perdón ... mas este (señala de nuevo el 120) y nos da ... bueno a nosotros nos dio.

Podemos observar en el diálogo anterior que en los equipos de trabajo cada integrante asume un rol de acuerdo a su personalidad y bagaje cognitivo. Rubí al principio acata lo que le dice Selene que haga, pero posteriormente ella no sólo entiende la estrategia de solución, sino además explica a otro equipo cómo deben hacerlo. Selene no manipula la computadora, ha jugado el rol de elemento activo

desde un punto de vista cognitivo, ya que ella es quién descubrió que hay un “número” (razón de cambio) con el cual puede resolver las progresiones, pero además formula la manera para calcular el valor que se le pide.

Posteriormente se generó una discusión para aterrizar la estrategia de solución de las progresiones del nivel III. El equipo de Selene fue el primero que descubrió por medio de tanteos la existencia de “un número” que les apoyaba para encontrar el valor de cualquier posición en la progresión. El diálogo que se presenta a continuación se suscitó con el profesor y el equipo al resolver la siguiente progresión (los números que están en letra cursiva son los que ya tenían calculados).

POSICIÓN	1	13	30	42	47	52	67	72
VALOR	12	60	128	<i>176</i>	<i>196</i>	<i>216</i>	<i>276</i>	<i>296</i>

Dialogo No. 2:

Rubí : Son quince por cuatro, sesenta ... más doscientos diez y seis ... doscientos setenta y seis.

Profesor : A ver, ¿cómo lo están haciendo? Platíquenme.

Selene : Sacamos la diferencia de esto (señala dos posiciones, 30 y 42), lo multiplicamos por cuatro, y le sumamos esto (señala el último valor de la progresión, 128) ... y ya nos sale.

Profesor : Multiplicamos por cuatro, mmm ... ¿de dónde sacas cuatro? ¿por qué cuatro?

Selene : Igual, estábamos multiplicando por uno, por dos, ... , por seis.

Profesor : A ver, hagan otro ejercicio.

Se quedan trabajando con otro ejercicio y lo resuelven de la misma manera que lo han venido haciendo, obtienen por tanteos el valor de la razón de cambio.

La explicación que Selene proporciona al profesor es más coherente y expresada con más confianza que la que proporcionó anteriormente, ya que no pudo explicar a otro equipo cómo lo había hecho (aún cuando ella descubrió “el número” e ideó la manera de solucionar las progresiones). Por lo anterior se puede pensar que la discusión y la autorreflexión que se llevó a cabo al final de la sesión anterior, además del tiempo de incubación del concepto, le dio la seguridad y confianza para explicar de esa forma al profesor.

El equipo de Silvia cuestionó al equipo de Selene para saber cómo encontraban “ese número”. Lo que les sirvió de base para empezar hacer cálculos con los datos que tenían, descubriendo así la fórmula de la razón de cambio. El diálogo que se presenta a continuación se llevó a cabo entre el profesor y el equipo de Silvia, cuando estuvieron trabajando con el nivel III de progresiones. Ella le explicó cómo encontró el “número” que le sirvió para la resolución de los ejercicios. La

progresión en la resolución es la siguiente, y los números en cursiva son los que el equipo encontró.

POSICIÓN	1	11	19	32	46	52	61	73
VALOR	-5	25	49	88	<i>130</i>			

Dialogo No. 3

- Profesor :* A ver, ¿cómo sacaste ese número? (se refiere a la razón de cambio)
- Silvia :* Yo lo saqué ... uno es de uno a once y es diez, el otro ... y el otro es de menos cinco a veinticinco, son ...
- Bertha :* Son treinta.
- Silvia :* ... y lo dividimos ...
- Bertha :* Es tres.
- Profesor :* Ha, ok; y entonces ¿qué valor te da?
- Silvia :* Tres.
- Profesor :* Ha, ok. Te dio tres, ya encontraste un valor ... y ¿cómo lo utilizas para determinar ochenta y ocho? A ver.
- Silvia :* Veo cuánto hay de aquí, aquí (señala el diecinueve y el treinta y dos), lo multiplicamos por tres y ya sumamos cuarenta y nueve ... y nos da.
- Profesor :* A ver, hagan otro salteado.
- Silvia :* ¿Ese ya lo dejamos aquí?
- Profesor :* A ver complétalo.
El equipo se pone a trabajar para terminar la progresión.

Sin la interacción que se suscitó entre los equipos hubiera sido más difícil el aprendizaje individual o se hubiera requerido la inversión de más tiempo, para que los estudiantes realizaran completamente la construcción del concepto de razón de cambio. Ello muestra la importancia que tiene el aprendizaje en colaboración.

En el proceso de autorreflexión de esa misma sesión, el profesor les pide a los alumnos que plasmen en una fórmula el procedimiento que realizan para encontrar los valores de la progresión. Silvia lo plantea de la siguiente manera (Figura 13).

Silvia E. Lozano Morillo. Equipo: ⑥
 Sesión: 2
 15102106

En esta sesión pude ver ya bien la diferencia que hay entre cada nivel, y tamb. vi como el nivel 3 fue un poco difícil de resolver pero que este era el necesario para poder resolver rápida y fácilmente todos los ejercicios. Pude encontrar una fórmula que yo utilicé para resolver el resto de los ejercicios donde mi fórmula era la sig.

Δx	a	b	c
Δy	c	d	e

$\Delta x \rightarrow b - a$ 1º paso $\phi = \frac{d - c}{b - a}$
 $\Delta y \rightarrow d - c$ 2º paso $f = (e - b)(\phi) + d$

posición	1	6	10
valor	-3	22	7

$\phi = \frac{22 - (-3)}{6 - 1} = \frac{25}{5} = 5$
 $\therefore f = (10 - 6)(5) + 22 = 4(5) + 22 = 20 + 22 = 42$

y con esto se me facilitó y ya se me dio la resolución de los demás ejercicios, entonces vi que en el nivel I era un valor constante y por lo tanto la mayoría eran sumas, en el nivel II = eran valores constantes pero las diferencias de estos, en el nivel III ¡teníamos que tomar en cuenta ambas diferencias de valor y posición y así relacionar-

Figura 13

Silvia se percató de que el nivel III de progresiones es clave para poder resolver cualquier ejercicio. Además, ella encuentra la fórmula que le solicita el profesor en una nomenclatura muy acorde a su manejo de símbolos. Se puede observar que en el tabulador en lugar de escribir "x" y "y" escribió los incrementos (por error) y más abajo los define como diferencias de números.

El diálogo que se presenta a continuación es la explicación que Silvia proporciona a sus compañeros, de cómo encontró la razón de cambio.

Dialogo No. 4:

Profesor : A ver Silvia, haznos un favor, explica lo que les estás diciendo a tus compañeros... explica para todos... si hay un ejercicio ahí (en la computadora), comenta lo que les estás comentando a ellos.

Silvia : Bueno, no creo que me entiendan.

Profesor : Yo te entendí hasta acá.

Silvia : Que... porque yo no se (inaudible, lo voy a seguir revisando)

Profesor : Por eso, tu hazles un ejercicio, ahí lo estás viendo con tus compañeros... eso que les dijiste, pero a todos... que hay ahí y como se resuelve.

- Silvia pasa al pizarrón a explicar.*
- Silvia :* *En el nivel dos, casi siempre nos fijábamos en los valores de abajo (señala la progresión) y no tomábamos en cuenta los de acá arriba (señala las posiciones de la progresión). Entonces ya ahora vemos la diferencia, del uno al dos hay uno y del cuatro al seis hay dos... dos entre uno son dos (se escuchan algunas risas por lo obvio de la operación) y luego ya aquí... ya la diferencia del cuatro al diez son seis, se multiplica por el dos... por dos, y luego ya se le suma el diez...*
- Profesor :* *Eran seis, la diferencia entre cuatro.*
- Silvia :* *Seis por dos, doce... Serían aquí 22..., sí.*
- Selene :* *A ver, haz otro.*
- Profesor :* *A ver, haz uno salteado por favor.*

Silvia explica cómo encuentra la “constante” que descubrió para dos situaciones importantes. Primero, la interacción que tuvo con el equipo de Selene, con la cual tuvo el conocimiento de la necesidad de calcular el “número”. Segundo, por medio del trabajo en equipo y por ensayo y error, ella observó que el cociente de diferencias de valores entre posiciones le proporcionaba ese “número”.

Discusión

La tecnología es parte de nuestra vida cotidiana; particularmente, en el aula está modificando la forma en que se enseña y se aprende. No hay duda de que las herramientas tecnológicas están jugando un papel significativo en el aprendizaje de las matemáticas, sobre todo en aquellas áreas del conocimiento en las que la representación visual y procesos de visualización matemática son mecanismos fundamentales para el entendimiento y construcción de conceptos.

Hemos mostrado en este trabajo la importancia de las actividades de exploración y planteamiento de conjeturas, proporcionando un ejemplo del trabajo experimental en el aula de matemáticas en un ambiente tecnológico.

La experiencia realizada en un medio interactivo, como lo aquí mostrado, es más productiva si la tecnología se combina además con una estrategia metodológica adecuada que en nuestro caso fue ACODESA (Hitt, 2007; Hitt-Cortés, 2009), la aplicación de un software didáctico como es FUNCIONES Y DERIVADAS y la implementación de actividades y problemas que desarrollen en el alumno la capacidad de analizar, razonar, explicar y justificar.

El profesor tiene un papel de cuestionador y guía; y además el de propiciar que se generen las interacciones adecuadas entre los involucrados, para la construcción de conceptos

La tecnología, como herramienta de apoyo al aprendizaje, permite que estas experiencias aporten al estudiante evidencias, que les llevan a proponer conjeturas. Dichas evidencias también pueden ayudar a buscar formas de justificación.

Desde un punto de vista socio-cultural, las actividades con uso de software permiten generar un ambiente de trabajo interactivo y dinámico, que enfatiza la participación activa del estudiante y una mayor responsabilidad hacia su propio aprendizaje. En este sentido, el uso de tecnología en el salón de clase, nos brinda oportunidades para cambiar el ambiente tradicional del aula, a uno en el que sea posible favorecer procesos de pensamiento y habilidades como la reflexión, la comunicación y el debate científico; rasgos deseables en la formación de los estudiantes que son generados por los ATIAM.

Es importante aclarar que en este artículo abordamos sólo una de las tendencias inicialmente mencionadas: la relacionada con el desarrollo de programa de cómputo, en artículos posteriores serán abordadas otras tendencias.

Bibliografía

CLEMENTS D., BATTISTA, M. (2000). Designing effective software. En: Anthony E. Kelly y Richard A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, 761-776. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

CONFREY, J.(1993) *A constructivist research programme towards the reform of mathematics educations*. Introduction to symposium for the Annual Meeting of American Education Research Association, April, 1993.

CORTÉS C. (2002) *Desarrollo de software para la enseñanza del cálculo diferencial*. Tesis de doctorado. Cinvestav-ipn, México, 2002.

CORTÉS C. (2005). The Rate of Change From the Numeric Point of View. *Proceedings of XXVII PME-NA*. EUA. 2005.

CORTÉS et all. (2005) Software para la enseñanza de la derivada. En: *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. ISBN: 970-703-313-4. Editorial Morevallado. México.

CORTES C. (2006). La razón de cambio (cociente de incrementos) desde el punto de vista gráfico y numérico. *Revista UNION* Diciembre de 2006, Número 8, páginas 3 – 10. ISSN: 1815-0640. España. 2006

CORTÉS, C. y NÚÑEZ, E. (2007) Ambientes tecnológicos interactivos para el aprendizaje de las matemáticas. *Memorias del IX Congreso Nacional de Investigación Educativa*. México 2007.

CORTES, C. (2010) Graficando los incrementos de las variables como apoyo a la construcción del concepto de función. *Investigaciones y Propuestas 2010. Colección Uso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas*.

ISBN 978-607-424-132-7. Ed. AMIUTEM

DUVAL, R. (1988) Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. *Anales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1, 235-253. Traducción: Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros. En *Antología en Educación Matemática* (Editor E. Sánchez). Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

DUVAL, R. (1991) Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (3), 233-261.

DUVAL, R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives* 5(1993), 37-65. Traducción: Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo

del pensamiento. En *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Editor F. Hitt). Grupo Editorial Iberoamérica.

DUVAL, R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang, Suisse.

DUVAL, R. (2000) Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 20/2, 135-170.

HITT, F. (2002) *Funciones en contexto*. Editorial Pearson Educación. México.

HITT, F. (2007). Utilisation de la calculatrice symbolique dans un environnement d'apprentissage coopératif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. *Environnements Informatisés et Ressources Numériques pour l'apprentissage Conception et usages, regards croisés*. Francia : Hermes Science.

HITT, F. y CORTÉS, C. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación e internet*. Vol 10. Costa Rica.

HUGHES, D. (1990) Visualization and Calculus Reform. In *Visualization in Teaching and Learning Mathematics: A Project (MAA notes #19)*. Walter Zimmerman and Steven Cunningham, eds. Washington DC: Mathematical Association of America, 1-8.

MEJÍA, H. (1997) Geometría Analítica, Gráficas y Tablas. *Octavo seminario nacional de calculadoras y computadoras en educación matemática* Universidad de Sonora, 315-322.

NÚÑEZ, E. y CORTÉS, C. (2008) Propuesta de una metodología de enseñanza usando ambientes tecnológicos interactivos. En: *Investigaciones y propuestas sobre el uso de la tecnología en educación matemática*. Vol. 1. Editorial AMIUTEM.

NÚÑEZ, E. (2008). *Ambientes Tecnológicos Interactivos para el Aprendizaje de las Matemáticas*. Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Morelos.

NATIONAL COUNCIL OF THEACHERS OF MATHEMATICS (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.

PLUVINAGE, F. (2005) Reflexiones sobre la recta numérica al servicio del cálculo. En: *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza*. Editorial Morevallado. México.

SCHER, D. (1993) Students' Conceptions of the Derivative across Multiple Representations. *Mathematics in College* (Fall): 3-17.

WENZELBURGUER, E. (1993) *Cálculo Diferencial*. Ed. Iberoamérica México.1993.

JOSÉ CARLOS CORTÉS ZAVALA

jcortes@umich.mx

MARÍA DE LOURDES GUERRERO MAGAÑA

gmagana@umich.mx

Facultad de Físico Matemáticas
Universidad Michoacana, Morelia (Michoacán), México

**CARLOS ARMANDO CUEVAS VALLEJO, MAGALLY MARTÍNEZ
REYES & FRANÇOIS PLUVINAGE**

**PROMOVRIENDO EL PENSAMIENTO FUNCIONAL EN LA
ENSEÑANZA DEL CÁLCULO: UN EXPERIMENTO CON EL USO DE
TECNOLOGÍAS DIGITALES Y SUS RESULTADOS**

Abstract. Promoting functional thinking in teaching calculus: An experiment with the use of digital technology and its results. This article presents a teaching experience in a first calculus course at college level, founded on the idea of promoting functional thinking to understand the basic concepts of calculus. The experiment was conducted with freshmen, given the serious deficiencies in algebraic and functional concepts. We apply a methodological approach using digital technologies in two types of activities, which are reproducible: Introducing concepts through interactive educational scenarios (IES), which simulate real situations proposed to students, and using the tutorial system CalcVisual. In this experiment, unlike remedial courses, functional thinking is not seen as a prerequisite but as a proper object of the course. Analyzing the results, we note in particular a significant reduction in initial prerequisite deficiencies and progress in functional thinking.

Résumé. Promouvoir la pensée fonctionnelle dans l'enseignement de l'analyse : une expérimentation avec usage des technologies informatiques et ses résultats. Cet article présente une expérience d'enseignement dans un premier cours d'analyse à l'université, fondée sur l'idée de promouvoir une pensée fonctionnelle pour comprendre les notions de base de l'analyse. L'expérience a été menée avec des étudiants de première année, au vu de graves lacunes initiales dans les concepts algébriques et fonctionnels. Nous appliquons une approche méthodologique utilisant les technologies numériques dans deux types d'activités qui sont reproductibles : l'introduction de concepts à travers des scénarios éducatifs interactifs (SEI) qui simulent des situations réelles traitées, et l'utilisation du système tutoriel CalcVisual. Dans cette expérience, à la différence de cours de rattrapage, la pensée fonctionnelle n'est pas considérée comme un préalable, mais comme un objectif de la formation. Dans l'analyse des résultats, nous notons en particulier une réduction significative des manques initiaux de prérequis et des progrès dans la pensée fonctionnelle.

Mots-clés. Calcul différentiel, Pensée fonctionnelle, Simulation, Système tutoriel.

Resumen. Este artículo presenta una experiencia de enseñanza para un primer curso de cálculo diferencial en la universidad, fundamentada en la idea de promover un pensamiento funcional para la comprensión de los conceptos del cálculo. La experiencia fue realizada con estudiantes de primer ingreso, al detectar graves deficiencias en conceptos algebraicos y funcionales. Aplicamos una propuesta didáctica utilizando las tecnologías digitales en dos tipos de actividades reproducibles: introducción de conceptos mediante escenarios didácticos interactivos computacionales (EDIC), que simulan situaciones reales dirigidas, y el uso del sistema tutorial CalcVisual. En esta experiencia, a diferencia de los cursos remediales, el pensamiento funcional no se contempla como un prerequisite sino como un

objeto propio del curso. Analizando los resultados obtenidos, observamos en particular una reducción notable de las deficiencias de prerequisites iniciales y un avance en el pensamiento funcional.

Palabras clave. Cálculo diferencial, pensamiento funcional, simulaciones, sistema tutorial.

1. Introducción: Problemas de formación matemática al inicio del nivel superior en las carreras de ingeniería

La matemática resulta ser una materia indispensable en la formación profesional a nivel superior en carreras del área tecnológica, y también en las áreas económico administrativas. Si se analizan los campos laborales de los egresados de carreras en estas áreas tanto en finanzas como en cómputo, los problemas de optimización y los problemas de previsión son vitales. Por lo que en todas estas carreras, no cabe duda de que se debe enseñar el cálculo. Trabajos como los de Kent & Noss (2002) y Dorier (2010) precisan por qué y cómo el cálculo tiene un sitio en el quehacer profesional de diversas ramas de la vida laboral. Por otro lado, desde un punto de vista más general, algo imprescindible en la formación profesional de un número cada vez mayor de ramas es el empleo de la tecnología, en particular de los programas de computación. El manejo de manipuladores simbólicos, hojas de cálculo, graficadores o procesadores de texto es un requisito de un sinnúmero de actividades profesionales. En el caso de las matemáticas, el cómputo sirve de apoyo a la exploración de conceptos matemáticos, su visualización y la experimentación con las mismas (e. g. Monzoy 2002). Sin embargo, los desarrollos de material didáctico no siempre se presentan acompañados de su implementación en el aula y su validación; por ello, una propuesta que logre equilibrar ambos aspectos será de suma importancia para la comunidad de matemática educativa.

En nuestro caso, en el Centro Universitario Valle de Chalco, entidad desconcentrada de la Universidad Autónoma del Estado de México (UAEMex), desde hace 10 años se lleva un proyecto para mejorar los resultados en la enseñanza y aprendizaje del primer curso de cálculo, conjuntamente con investigaciones del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN) (e. g. Martínez 2005; Cuevas, Moreno & Pluvillage 2005). Diversos son los factores por los cuales esta universidad ha tenido poco éxito con sus alumnos de nuevo ingreso en los cursos de cálculo, aunque lamentablemente es un resultado frecuente en gran parte de las universidades en México. Las deficiencias más notables observadas son: graves carencias de prerequisites algebraicos, programas de estudio obsoletos, uso inadecuado de la tecnología, etc. (véanse ANUIES 2006 y el sitio en línea de ANUIES <<http://www.anuies.mx/>>). Una conclusión importante en estos estudios es la necesidad de manejar conceptos de pre-cálculo para una adecuada comprensión del cálculo a nivel superior. Pero eso no significa la necesidad de cursos remediales. La experiencia que presentamos se desarrolló a

lo largo de un semestre universitario donde obtuvimos una promoción en la comprensión de los conceptos del cálculo y un considerable avance a solventar las deficiencias de pre-cálculo detectadas. Sin embargo, en este artículo sólo presentaremos el avance logrado en una mejor comprensión del concepto de función real de variable real, mediante la aplicación de experiencias didácticas mediadas por las tecnologías digitales. Destacamos este avance por dos razones: una es por considerarlo imprescindible para abordar los diversos conceptos del cálculo, y una segunda es porque dar cuenta de todos los resultados generaría un documento más extenso de lo recomendable para un artículo. Uno de los principales factores para lograr la adquisición del concepto de función real fue la promoción, al inicio del curso, de un pensamiento que caracterizamos como funcional y cuya descripción presentaremos más adelante.

Un elemento a considerar en esta experiencia es que los alumnos poseen una formación académica sumamente heterogénea, dado que provienen de planes de estudio diferentes y con un manejo de competencias diferentes. Incluso pueden haber cursado o no un curso de cálculo en el nivel medio superior. Otro importante elemento es el factor económico, puesto que gran parte de los estudiantes tienen la necesidad de conseguir un trabajo ajeno a sus estudios, dado que la situación económica de la región donde se aplicó la experiencia es precaria, lo que obliga en su mayoría a concentrar estudiantes de medio tiempo en la institución. Bajo estas premisas, el reto fue ¿Como estructurar un curso de cálculo que permita a un alumno de primer año universitario adquirir las competencias necesarias de acuerdo a lo que establece el plan de estudios?

Antecedentes

Al ser las funciones el modelo matemático por excelencia de casi cualquier ciencia, el cálculo diferencial e integral constituye materia obligada en los planes de estudio de las carreras de ingeniería, ciencias e incluso en carreras del área de ciencias sociales. Frente a las dificultades observadas y señaladas por investigadores desde hace varios años, diversos intentos se realizaron en muchos países para mejorar los resultados de la enseñanza del cálculo. Por ejemplo, se llevó a cabo durante los años noventa en los Estados Unidos una reforma del curso llamado *Calculus 101*, pero el análisis de los efectos no reveló resultados convincentes (Darken, Wynegar & Kuhn, 2000). El primer año del nivel superior se considera en muchos sistemas de formación un año propedéutico, debido a las graves carencias académicas observadas, y consecuentemente con frecuencia se proponen cursos remediales, es decir cursos dirigidos a estudiantes que presentan deficiencias sobre los prerrequisitos del cálculo. Se supone que al cursarlos permitirán estudiar la materia exitosamente. Sin embargo, este supuesto presenta la paradoja de que en los cursos remediales se repite el mismo discurso escolar que no había sido exitoso en términos de aprendizaje (e.g. Hardy & Sierpiska, 2012), en un tiempo más breve.

En consecuencia y debido al hecho de que las mismas causas producen los mismos efectos, por lo general la eficacia de los cursos remediales resulta muy limitada (e.g. Calcagno & Long, 2008).

En el caso específico de México, otro de los problemas detectados proviene de la vinculación entre los programas y los libros de texto, sea que los programas de estudio se apegan a textos usuales de cálculo (Leithold, 1994; Steward, 2010; Swokowsky, 1988) o que los textos se desarrollan apegados a estos programas de estudio. Esto conlleva al problema que los programas de estudio de cálculo no han sufrido cambios importantes en al menos 30 años y consecuentemente no han permeado, en los mismos, las múltiples investigaciones que recomiendan una enseñanza a base de problemas y el estudio de casos realísticos. Por esta razón, la mayoría de los libros de textos, continúan mostrando la tradicional organización de contenidos del cálculo diferencial, es decir: números reales, funciones (reales de una variable real), límites (de sucesiones y de funciones), derivada, aplicaciones de la derivada. Este orden de presentación, que por lo esencial es inverso al desarrollo histórico del cálculo (Grabiner, 1983), no facilita la postura del docente aislado que busca proporcionar a sus estudiantes una formación más eficiente, pero obligado a usar un libro con esta organización. Por esta razón, nos avocamos a elaborar para un primer curso de cálculo diferencial un material didáctico que se pueda aplicar de manera autónoma, en vez de usar un libro de texto. El contenido conceptual global de nuestro curso es igual de lo tradicional, pero su organización es diferente: se estudian funciones particulares (en el inicio del curso se estudian polinomios) dentro de un marco de modelación y simulación, se consideran sus funciones derivadas a partir de una aproximación de tipo $f(x+h) - f(x) = hP_f(h)$ (véase Andreu & Riestra, 2007, p. 177), antes de estudiar los conceptos generales de función real de variable real, la derivada y los teoremas de derivación, y los números reales. Inspirándonos en el espectro de representaciones de Tall (1997, Figura 4 p. 295), proponemos en nuestra presentación:

- actividades guiadas con escenarios virtuales que proponen proyectos de acción concreta,
- actividades autónomas en grupos, con CalcVisual (software tutorial didáctico)
- tareas para el trabajo personal o en grupos de dos o tres.

Ya habíamos puesto parcialmente a prueba tal material didáctico en experimentos previos sobre proyectos de acción concretos, publicados en artículos anteriores (Cuevas & Pluvinage, 2003, y Cuevas, Moreno y Pluvinage, 2005). Nos quedaba por desarrollar y analizar un experimento más extenso, y este es el propósito en el presente artículo.

Nuestra tesis cognitiva: existencia de un estrato funcional

Según Imaz & Moreno (2010), las dos ideas fundamentales del cálculo son la variación y la acumulación. En el estudio que presentamos aquí, sólo aparece la

variación, pero acompañada de la idea fundamental de que el tratamiento de variaciones ya introduce algo nuevo con respecto al álgebra conocida de los estudiantes. En efecto el álgebra la ven como la resolución de ecuaciones o sistemas. En el estudio de variaciones se introducen operaciones que usan diferentes valores de una variable, lo que difiere de la resolución de ecuaciones o sistemas estudiados por los estudiantes a nivel medio superior. Nuestra tesis del punto de vista cognitivo es que el manejo de álgebra no es suficiente: La introducción de los conceptos del cálculo supone la adquisición de una nueva forma de pensamiento y de un lenguaje, que introducen novedades con respecto al álgebra. Se puede acertar que, para aprender cálculo, el estudiante debe entrar en un nuevo *estrato* distinto del estrato algebraico: el *estrato funcional* (Adjiage & Pluinage, 2008, y Adjiage & Pluinage, 2012). Por ejemplo, para adquirir el *procept* de función (Gray & Tall, 1994) que combina *proceso* y *concepto*, el estudiante debe aprender un lenguaje específico, en el que se expresan operaciones como la composición o la inversión de funciones. Podemos darnos cuenta de que la lectura usual en la lengua hablada de las expresiones $a(b+c)$ y de $f(x+y)$ es diferente: “ a [multiplicado] por b más c ” en el primer caso, “ f de x más y ” en el segundo caso.

Otro ejemplo sencillo puede ilustrar la diferencia de lenguaje entre el estrato funcional y el álgebra: Para obtener la ecuación de la recta que pasa por dos puntos del plano cartesiano, sean $M_1(x_1, y_1)$ y $M_2(x_2, y_2)$, uno puede referirse a un *pensamiento algebraico*. Este le conduce a escribir el sistema de dos ecuaciones con las dos incógnitas a y b :

$$\begin{aligned}y_1 &= ax_1 + b \\ y_2 &= ax_2 + b\end{aligned}$$

Luego elimina b al restar la segunda ecuación de la primera y calcula a , de donde obtiene b . Pero en un *pensamiento funcional*, introducirá un punto variable $M(x, y)$

y considerará que la razón de cambio $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se aplica tanto a la pareja M_1 y M como a

la pareja M_1 y M_2 . Así obtendrá directamente la ecuación: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Un contraste entre tratamientos algebraicos y funcionales hasta se presenta con software y no sólo en el pensamiento de estudiantes. En Adjiage & Pluinage (2012, § 4.4) se enseña el ejemplo de la resolución con DERIVE de la ecuación $x\sqrt{x^2 - 1} = 0$. El comando $\text{SOLVE}(x \cdot \sqrt{x^2 - 1}, x, \text{Real})$, que se introduce para resolver esta ecuación en el campo de los números reales, proporciona tres soluciones que son -1, 0 y 1, a pesar de que la raíz cuadrada no tiene sentido en $x = 0$. En este caso, hace falta considerar el dominio de la función, además del

resultado algebraico general de que un producto es nulo cuando uno de sus factores es nulo.

Son estos tipos de consideraciones (aspecto “pensamiento”) y procedimientos (aspecto “expresión”) que queremos favorecer durante el curso de cálculo y que, en nuestra hipótesis de trabajo, son más importantes que los conocimientos considerados en varios estudios como los prerrequisitos del cálculo.

Marco teórico de la experimentación desde un enfoque socio-epistemológico

El cálculo diferencial e integral es un estudio de las funciones, por ende la enseñanza del mismo tiene como propósito mostrar propiedades importantes de las funciones. Varios artículos reportan la enorme complejidad del concepto de función (Slavit, 1997; Bloch, 2003; Pluvinae & Cuevas, 2006). Las funciones, al modelar desde su aparición diversos fenómenos físicos y sociales, tienen que ver con el estudio de ciencias ajenas a la matemática misma, por lo que su desarrollo a partir de nociones vagas e inexactas ha sido gradual (Monna, 1973), e incluso Kleiner (1989) afirma que éste continúa en evolución. El concepto de función se ha ido reformulando en el tiempo (Rüting, 1984), lo cual ha provocado hasta agrias discusiones entre matemáticos ilustres. Dos son las más notables que se conocen como “la controversia de la cuerda vibrante” y la “controversia alrededor de 1900” (Monna, 1973; Youschkevitch, 1976; Kleiner, 1989). En consecuencia, además de la tesis sobre la necesidad de “entrar” en un nuevo estrato de pensamiento y expresión, presentada en el párrafo anterior, consideramos importantes actividades de modelación y de simulación en las que los fenómenos que acabamos de mencionar tengan un lugar en el quehacer estudiantil.

Por otra parte, visualizar a las nuevas tecnologías como parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es algo incuestionable, puesto que los cambios que las tecnologías producen en la enseñanza de la matemática son tanto en forma como en el contenido (Drijvers 2003; Niss 2003; Stroup 2002; Thurston 1994). Dentro de las recomendaciones del NCTM de USA, expresadas en la página Internet titulada *The Technology Principle*, se encuentra:

Technology is essential in teaching and learning mathematics; it influences the mathematics that is taught and enhances students' learning... Students can learn more mathematics more deeply with the appropriate and responsible use of technology. They can make and test conjectures. They can work at higher levels of generalization or abstraction ... Students with physical challenges can become much more engaged in mathematics using special technologies. Technology cannot replace the mathematics teacher, nor can it be used as a replacement for basic understandings and intuitions. The teacher must make prudent decisions about when and how to use technology and should ensure that the technology is enhancing students' mathematical thinking (NCTM 2011).

El empleo de las nuevas tecnologías es una opción que facilita la aplicación de propuestas didácticas, por ejemplo: conversión entre diversos registros de representación semiótica, actividades para introducir los conceptos matemáticos mediante simulaciones con un acercamiento al desarrollo histórico de los mismos, apoyo experimental a estudios matemáticos, etc. Sin embargo, cabe advertir que sin un cuidadoso diseño didáctico, tomando en cuenta el proceso de génesis instrumental, el empleo de las nuevas tecnologías puede traer más inconvenientes que ventajas; además se trata de aprender una matemática cuyos resultados sean pensados independientemente de las herramientas y superar una visión ingenua de la tecnología como remedio a las dificultades de la enseñanza (Artigue 2002).

En efecto, el impresionante desarrollo tecnológico con el advenimiento de programas de cómputo con capacidad de manipulación simbólica, de graficación y simulación pone en duda muchas de las prácticas docentes en los cursos de matemáticas (Artigue 2002; Ruthven & Hennessy 2002). Así por ejemplo, dentro del software con distribución comercial y distribución libre, es posible realizar muchas de las tareas usuales de un primer curso de cálculo como derivar e integrar, numérica y simbólicamente (Asiala et al. 1997; Simmt 1997). Esto cuestiona el rol del alumno cuando se limita a realizar la parte operativa del curso y genera conductas negativas y de desconcierto por parte del docente que, en muchos casos, no considera las herramientas computacionales como un recurso positivo, y hasta prohíbe el uso de calculadoras y computadoras en sus cursos.

En paralelo a este uso dubitativo de la tecnología que se refleja en los estándares del NCTM, y que resume Artigue (2002), se ha desarrollado una corriente de investigación, en los últimos años, en donde se hace una reflexión crítica alrededor de la utilidad que representan las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas y el cambio de roles (Lagrange 2005). Esta problemática conduce a un primer cuestionamiento didáctico: ¿Cómo introducir la tecnología, de manera que promueva una mejor comprensión de los conceptos matemáticos en el estudiante, sin desestimar su destreza operativa?

En nuestro experimento, proponemos usar las nuevas tecnologías en un primer curso de cálculo diferencial, para introducir el pensamiento funcional bajo los siguientes principios:

- Establecer la relación funcional mediante el planteamiento de un proyecto de acción concreto (Aebli, 1995).
- Instrumentar actividades para promover la comprensión de los conceptos básicos, bajo los principios didácticos enunciados en Cuevas-Pluvinage (2003).

Para realizar lo anterior, hemos utilizado fundamentalmente dos tipos de programas computacionales. El primero es un escenario didáctico interactivo virtual, con el cual, mediante la simulación de un fenómeno natural, se introduce un concepto matemático. De esta forma el concepto resulta ser una necesidad para resolver

problemas. El segundo tipo de programa es el sistema CalcVisual (Cuevas y Mejía, 2003), un sistema tutorial completamente interactivo, con el que el profesor puede compartir el desarrollo del curso, al definir lo que los estudiantes pudieran realizar en forma independiente del profesor.

2. *Panorama de la experimentación*

El experimento consta de tres etapas. En una primera etapa se aplica un cuestionario diagnóstico (pre-test) a todos los alumnos que cursan la materia de Cálculo Diferencial e Integral, es decir los alumnos de nuevo ingreso de las carreras de Informática Administrativa (LIA) e Ingeniería en Computación (ICO) del Centro Universitario UAEM Valle de Chalco, aproximadamente 150 alumnos. En una segunda etapa se establece el nivel de inicio del curso y se trabajan Escenarios Didácticos Interactivos Computacionales (EDIC) para explorar los conceptos de variable y relación funcional. Finalmente, en la tercera etapa se utiliza el software CalcVisual para trabajar con polinomios que modelan problemas reales. Enseguida se describen a detalle cada una de las etapas.

Los grupos de primer año están constituidos de 30 a 45 personas provenientes de diversas opciones de bachillerato (técnico y general de la zona), donde sólo el 30% de la carrera de LIA e ICO tomó un curso de cálculo previamente. En entrevistas realizadas, detectamos que cada grupo era heterogéneo, ya que se encontraban personas que han llevado un estudio continuo desde secundaria, y otros que han dejado de estudiar cierto tiempo y retoman su preparación profesional. De la misma manera están en un sector los alumnos que trabajan y estudian, mientras que otro sector corresponde sólo a estudiantes de tiempo completo. En las entrevistas, detectamos que la dedicación fuera del aula para la materia de cálculo diferencial e integral es variable, con un máximo de dos horas al día.

Una consecuencia de esta problemática es que el manejo, por parte de los alumnos, de los contenidos propios de la materia es difuso. Para identificar posibles deficiencias en prerrequisitos del cálculo diferencial hemos elaborado el pre-test presentado en el Anexo 1. El instrumento ha sufrido modificaciones después de cada aplicación, con la intención de que refleje deficiencias que puedan obstaculizar el aprendizaje de los conceptos del cálculo.

En el pre-test, no pretendemos cubrir todos los prerrequisitos para un curso de cálculo que aparecen en los programas de estudio oficiales. Por ejemplo, el test no contiene temas de geometría o de trigonometría, tampoco propone considerar co-variaciones. Lo que nos importa es el nivel de competencia de los alumnos en los prerrequisitos en el sentido de los *estratos de competencia* que hemos señalado: Aritmética (suma y resta de números enteros y sobre todo fraccionarios), álgebra (suma de fracciones con incógnitas, solución de ecuaciones de primero y segundo grado), funciones (evaluación numérica y literal, raíces y dominio), entre otras. Los

resultados de la aplicación (véase § 4) muestran una clara deficiencia en estos prerrequisitos: Ausencia del manejo elemental de operaciones básicas de aritmética con números reales, adquisición dudosa de los fundamentos de álgebra, imprecisión para definir y evaluar funciones, y el común desconocimiento de la parte operativa de los conceptos propios de cálculo como raíces. La evaluación se realiza en red en la sala de cómputo haciendo uso del pre-test en línea, y los resultados se depositan en una base de datos expresamente creada para un procesamiento más rápido de la información, en especial para la comparación con los resultados finales. El test de opción múltiple presenta las opciones de respuesta acordes a los errores que los estudiantes cometen de manera frecuente y que ha sido documentado a lo largo de los últimos años. Cuenta además con una opción adicional para darles libertad de encontrar otra solución a las preguntas, y en algunos casos es esta opción la correcta.

El entorno de aprendizaje

Posterior al test se desarrolla el curso de cálculo mediante el uso del escenario didáctico interactivo computacional, que consta de: Applets, cuestionarios, ejercicios, practicas, etc. La elaboración de este material digital correspondió a la experiencia de un grupo de investigadores del Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav, para dar respuesta a la necesidad de cubrir los prerrequisitos sin detrimento de los contenidos del curso de cálculo diferencial y enfocarse a explorar los conceptos propios del cálculo.

Para introducir el concepto de función el escenario proporciona un acercamiento con la modelación de una situación real, el manejo de poleas (Figura 1), a través de tres modelos: 1) Polea introductoria que busca que el alumno delimite los conceptos de variable, variable independiente, variable dependiente y parámetro; 2) Polea simple, donde se establece una relación funcional lineal, y los estudiantes inician en el manejo de tablas, evaluaciones numéricas de la función y su gráfica; 3) Polea compuesta, que establece una relación funcional cuadrática, y los estudiantes exploran los conceptos de dominio, rango, raíces y aplican lo trabajado en la polea anterior. Al igual que el pre-test, el escenario didáctico virtual ha sufrido cambios a lo largo de cada experimentación, con la idea de facilitar la comprensión de la situación estudiada (por ejemplo no se veían burrito y cubo en las primeras representaciones de polea) y de aumentar el control de los estudiantes sobre los resultados (introducción por ejemplo de los valores numéricos al lado de representaciones gráficas).

Así finalmente el concepto de función estudiado por el alumno va más allá de su definición algebraica tradicional y se evita en cierta forma que los prerrequisitos sean un obstáculo para iniciar el estudio de los conceptos propios del cálculo. Los materiales son elaborados en diversos lenguajes de programación (Java, Flash, Cabri, Geogebra, etc.) y puestos en un servidor local para su uso y seguimiento.

Enseguida se continúa con los contenidos clásicos del temario de cálculo diferencial mediante la incorporación de CalcVisual y un Applet de Globo. Este último permite presentar una situación real que busca que los estudiantes la tratan utilizando como herramientas el curso de cálculo diferencial. En cuanto a CalcVisual (véase la figura 2), este sistema permite abordar los conceptos de raíces, signo, paridad, límites, derivada, puntos críticos y demás, mediante sesiones tutoriales.

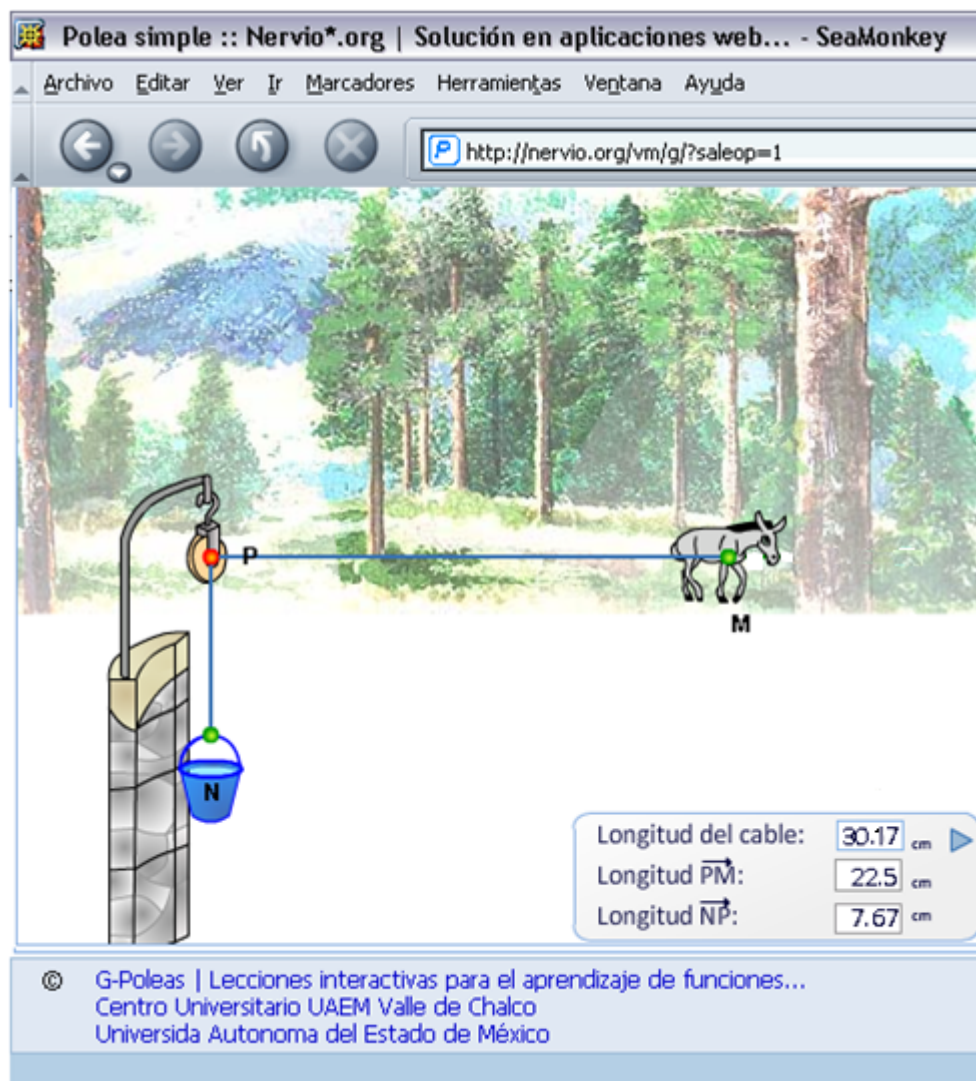


Figura 1. Simulación (aun no perfecta) del funcionamiento de una polea

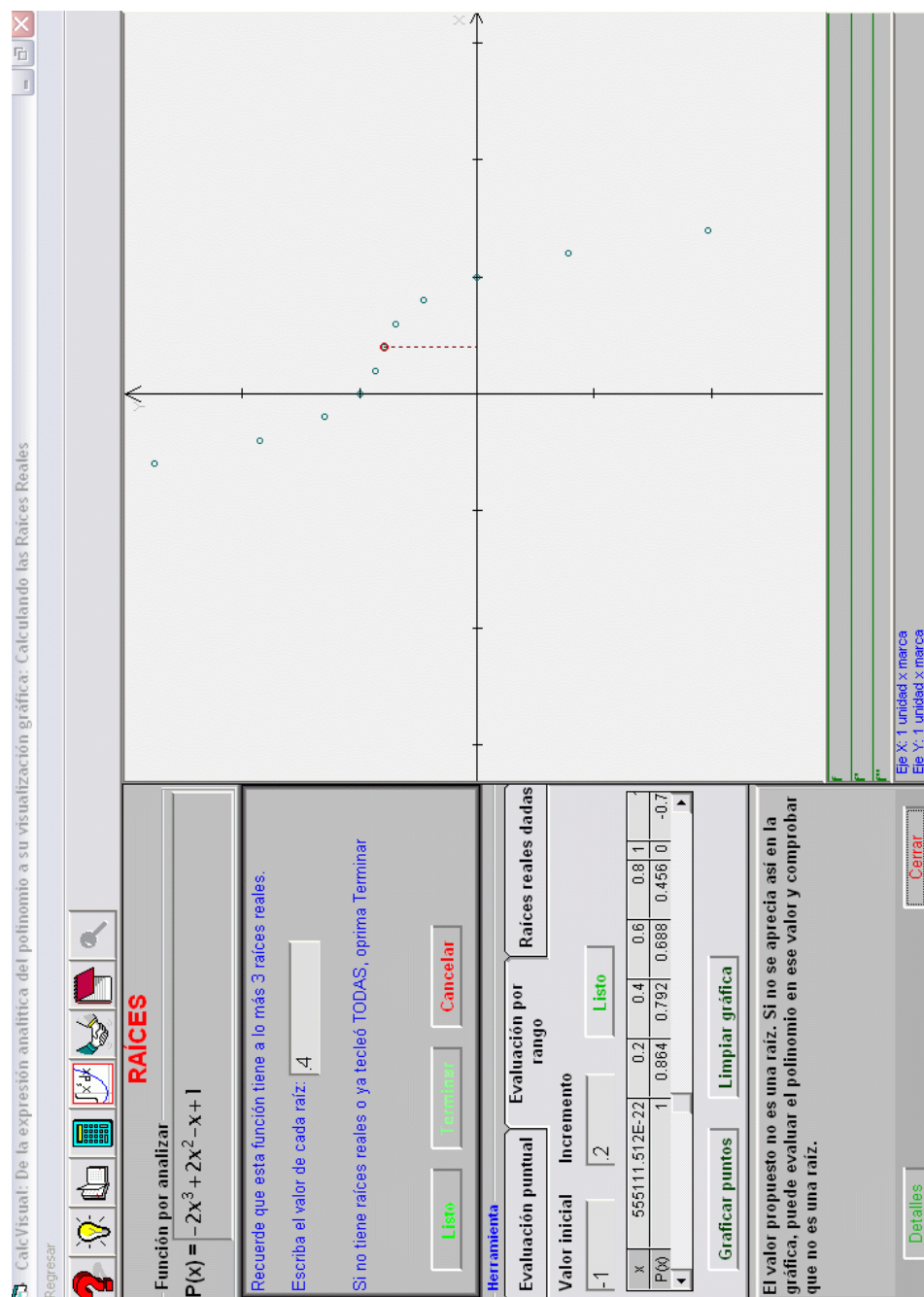


Figura 2. Una interfaz de CalcVisual

Cada concepto (raíces, variaciones, puntos críticos,...) se ilustra en CalcVisual con el objetivo de aportar elementos para analizar y construir la gráfica de un polinomio. El sistema funciona como un ayudante del profesor, que ejercita con los alumnos, en presencia o ausencia del profesor, indicando los errores y aciertos del estudiante. Además CalcVisual genera aleatoriamente una gran variedad de ejercicios. Este sistema viene acompañado de un libro (Cuevas & Mejía, 2003) que sirve de guía para su uso y propone ejercicios de retroalimentación para el usuario.

Cohabitación de enseñanza experimental y evaluación tradicional

La manera de evaluar el curso debía respetar los lineamientos oficiales que son:

- dos exámenes parciales,
- registro de tareas (ejercicios e investigaciones),
- prácticas en software (en nuestro caso CalcVisual),
- problemas de aplicación (relacionados con la especialidad de los estudiantes).

Para evaluar el nivel de avance del alumno hemos propuesto un primer examen parcial que cubre ciertos aspectos del concepto de función. Esto permite correlacionar (véase tabla 1) las limitantes en prerrequisitos, detectas en el pre-test, con el tema de función mediante una correspondencia en el manejo de las habilidades operativas de conceptos en ambos instrumentos (pre-test y el segundo examen). El segundo examen parcial cubre la parte medular del curso, abarcando los conceptos importantes del cálculo en su aplicación para funciones algebraicas; además al término del curso se aplica nuevamente el pre-test diagnóstico para observar hasta que punto se pueden superar las dificultades iniciales sin que ellas sean el propósito de una enseñanza específica (véase tabla 2).

El lector se puede dar cuenta de que las pruebas que presentamos en los anexos 1 y 2 tienen un carácter muy tradicional. En aplicaciones ulteriores, se podrán reemplazar estas pruebas por otras, más relacionadas con la enseñanza propuesta, pero en este experimento que se puede considerar como piloto, intentamos mostrar que la adquisición de lo operativo no necesariamente resulta de la repetición de pruebas similares. En efecto la enseñanza aplicada no es la tradicional. El registro de tareas permite que los alumnos ejerciten con los problemas presentados en el libro y algunos otros que deja el profesor. Las prácticas se realizan con el apoyo de CalcVisual. Finalmente los problemas de aplicación se presentan al introducir un concepto, y nos después de su definición como es el caso en la forma tradicional de enseñanza. La clase de cálculo comprende cuatro horas por semana, de ellas dos son en laboratorio de cómputo para el trabajo con los escenarios didácticos y el sistema, y dos en un salón de clase con implementos usuales (pizarrón y posibilidad de proyectar desde una computadora). Hay un profesor responsable del curso, lo que garantiza la coordinación de todas las actividades.

Los problemas de aplicación para LIA, son de corte administrativo (v. gr. problemas de costo e ingreso), y para ICO son de ingeniería y física (v. gr.

Cálculos de superficies y volúmenes máximos, velocidades, etc.). Monitoreando el uso de estos modelos matemáticos se logra un curso con mayor profundidad, al estudiar problemas que van un poco más allá del programa oficial, y se retoma la motivación al estudio del cálculo en el contexto de cada carrera. Así, se trata de dar al curso de cálculo sentido para los alumnos, al contextualizarlo con problemas de su realidad profesional. De esta forma, los conceptos del cálculo diferencial cobran sentido a través de la necesidad de resolver problemas, evitando la memorización o el cálculo operativo de manera exclusiva.

Más adelante, vemos que la correlación entre los errores que los alumnos presentan en el pre-test al inicio del curso de cálculo diferencial y en el postest muestra avances significativos. Es decir, las omisiones que los alumnos presentaban al inicio del curso se han visto disminuidas en especial para suma y resta de números enteros y fraccionarios, manejo de fracciones con incógnitas, solución de ecuaciones de primero y segundo grado, pero primordialmente el tema de función: evaluación numérica y manejo de literales, caracterización de raíces y obtención del dominio de la misma; mejorando así su desempeño en estos conceptos.

Algo similar sucede en la evaluación del curso. El primer examen parcial plantea preguntas del tema de funciones ya manejadas en el inicio del curso de cálculo, mismas que se pueden relacionar con las deficiencias mostradas en el pre-test correspondientes al tema de función. Las preguntas de este examen requieren de interpretación, por lo que no sólo se evalúa la parte operativa. Los resultados observados mostraron que se lograron avances significativos. Por su parte la evaluación en el segundo examen parcial permite analizar otros aspectos como el manejo de los conceptos propios del cálculo: raíces, signo, derivada, máximos y mínimos, límites, etc., identificando avances pero también deficiencias en el tratamiento de algunos conceptos (v.g. límites) para los cuales es necesario el diseño de otros materiales de apoyo, que se puede hacer bajo la misma concepción. En nuestro experimento sí se pudo observar un avance global en términos de calificación e índices de reprobación generales y un avance puntual por concepto, sin modificar la estructura y los contenidos de la evaluación tradicional de un curso de cálculo diferencial estándar.

Condiciones para una replica

La forma de llevar a cabo la planeación de este curso como experiencia en el Centro Universitario UAEM Valle de Chalco, puede ser replicada bajo las siguientes condiciones: Para un curso de cuatro o cinco sesiones a la semana, asignar dos sesiones al laboratorio de cómputo con CalcVisual, registrar a los alumnos en el sistema en línea del pre-test para su correcto seguimiento, organizar sesiones de trabajo con los escenarios didácticos interactivos computacionales y planear la retroalimentación con discusiones grupales en sesiones presenciales en el salón bajo las condiciones tradicionales. A diferencia de la experimentación que

presentamos aquí y que tenía el objetivo de mostrar posibles mejoras en la evaluación usual, en una replica se podrían introducir otras pruebas de evaluación.

3. La población y los contenidos de las pruebas aplicadas

Aunque hemos desarrollado experiencias desde el 2006, en este artículo sólo reportaremos los resultados obtenidos durante el año 2009 dentro del grupo de ICO de primer año en la UAEMex, de 40 estudiantes. Para profundizar en casos individuales posibles dificultades materiales que pueden explicar ciertos resultados, entrevistamos a algunos de los estudiantes (no relatamos aquí estas entrevistas). Por ejemplo uno nos declaró: *“Tengo 5 años sin estudiar; al inicio entro a la UAEMex, y estudio tres semestres. Dejé la UAEMex y trabajo desde hace años como fotógrafo; no pude contestar porque no sabía o no me acordaba”*, y otro: *“Trabajo en electrónica y me cuesta tiempo trabajar, de 5 a 8 todos los días y sábados”*.

El primer test diagnóstico se aplicó al inicio del semestre y un examen parcial se aplicó luego de un mes de curso. Al final del curso se aplicó la prueba de fin del semestre, y se aplicó de nuevo el test diagnóstico para observar los progresos específicos de los estudiantes. Es lo único que cambia con respecto a la evaluación usual, y el test no se toma en cuenta para la calificación final. Conforme lo declaramos en el § 2, para la evaluación aplicada a la población observada, se usaron los criterios de los años anteriores al experimento: A final del curso, se espera que los estudiantes puedan aplicar el cálculo al estudio de las funciones algebraicas. El anexo 3 presenta la prueba de fin de semestre, en la que el uso de la tecnología se recomienda, pero no abastece respuestas automáticas.

En el experimento hecho en años anteriores con grupos de la misma universidad, se habían aplicado pruebas iguales, sólo que el test se había aplicado una única vez como test diagnóstico. Aunque, en este artículo, no reportamos los resultados de aquellos grupos, cabe señalar que las condiciones de éxito observadas fueron similares a las del grupo de 2009.

Análisis de las preguntas de evaluación planteadas

En el anexo se encuentran las pruebas individuales aplicadas a los estudiantes. El cuestionario inicial o pre-test de carácter diagnóstico y el examen parcial fueron exámenes individuales de duraciones respectivas 2 horas (máximo) y 1 hora con uso de la computación, mientras los cuestionarios sobre las poleas se aplicaron a grupos generalmente compuestos de dos estudiantes (binomios). Investigaciones de la fase exploratoria del proyecto habían mostrado que los tratamientos que suponen cierta habilidad en el manejo de variables pueden constituir un obstáculo en estudiantes de recién ingreso al nivel superior. Y se había constatado en el pre-test exploratorio, que, con respecto al manejo de variables, muchos estudiantes sólo

saben sustituir valores numéricos. Incluimos también el manejo de la proporcionalidad en el campo numérico, porque habíamos observado todavía dificultades en una parte de la población de este nivel. Esta observación nos condujo a distinguir tres categorías de preguntas en los instrumentos de medición:

- La categoría NUM, que contiene preguntas numéricas. Por ejemplo, sumar dos fracciones
- La categoría ALG, que contiene preguntas con cálculo algebraico de respuesta numérica. Por ejemplo, resolver una ecuación dada
- La categoría FUN, que contiene preguntas con una variable en la respuesta. Por ejemplo, dado la expresión $f(x) = -x^2 + 2x$, determinar $f(x+1)$.

Esta organización es una forma sencilla que, a *grosso modo*, corresponde a la propuesta, ya comentada, de Adjiage & Pluinage (2008 y 2012) de dividir el tratamiento de las matemáticas en: estrato de la aritmética elemental (las cuatro operaciones), estrato racional (fracciones y proporciones), estrato algebraico (escritura y resolución de ecuaciones) y estrato funcional (uso de variables y parámetros en funciones reales, composición de funciones).

Test diagnóstico

La repartición de las 20 preguntas del pre-test en términos de categorías de contenido es:

Cinco preguntas en la categoría NUM: 1, 2, 4, 5, 7 (las tres últimas presentan fracciones)

Diez preguntas en la categoría ALG: 3, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14a, 14b, 15a

Cinco preguntas que pertenecen a la categoría FUN: 13, 14c, 14d, 15b, 15c

Examen parcial.

La composición del examen parcial en términos de categorías de contenido es:

Dos preguntas en la categoría NUM: 1b, 1c (coordenadas)

Cinco preguntas en la categoría ALG: 2, 4, 6a, 6b, 7a

Seis preguntas que pertenecen a la categoría FUN: 1a, 3a, 3b, 5, 7b, 8

4. Resultados globales del pre-test y del examen parcial

De los 40 estudiantes del grupo observado, 38 presentaron el pre-test y el examen parcial. Se mostrarán los resultados de estos estudiantes.

Los resultados más significativos, en el curso de cálculo, son los que corresponden a preguntas en las que aparecen variables. De ahí que las preguntas de las categorías ALG y FUN fueran mayoritarias: Hay 15 preguntas de estas categorías en el pre-test y 11 en el examen parcial. En base a los resultados, determinamos cuatro subgrupos en la población tanto en el pre-test como en el examen parcial.

- El grupo 1 lo constituyen los estudiantes que proporcionan una respuesta correcta a la mayoría de las preguntas. Esto es, 8 o más éxitos en el pre-test, y 6 o más éxitos en el examen parcial.
- En el grupo 2 ubicamos a los estudiantes que obtienen entre el 30% y el 50% de éxitos. Es decir, entre 5 y 7 éxitos en el pre-test, y entre 4 y 5 éxitos en el examen parcial.
- El grupo 3 lo forman los estudiantes que obtienen entre el 20% y el 30% de éxitos, lo que corresponde en el pre-test a 3 o 4 éxitos y en el examen parcial a 3 éxitos.
- En el grupo 4 están los estudiantes que obtienen menos del 20% de éxitos. Esto es 2 éxitos o menos tanto en el pre-test como en el examen parcial.

A partir de los resultados obtenidos en las dos pruebas se obtiene la tabla 1 de contingencia. Por ejemplo, leemos en dicha tabla, que 7 estudiantes pertenecen al grupo 2 del pre-test y alcanzan el grupo 1 del examen parcial, pero que 6 estudiantes del mismo grupo del pre-test caen en el grupo 4 del examen parcial. Esta caída no significa que sus conocimientos disminuyeron, dado que las preguntas no son las mismas, sino que su situación con respecto a los requisitos empeoró.

Pretest \ Parcial	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3	Grupo 4	Total
Grupo 1	3	1	0	0	4
Grupo 2	7	0	3	6	16
Grupo 3	3	5	1	3	12
Grupo 4	1	2	1	2	6
Total	14	8	5	11	38

Tabla 1. Contingencia de datos

La consideración de las márgenes de la tabla nos muestra una situación inicial poca exitosa, con sólo 4 estudiantes en el grupo 1 en el pre-test. Hay un incremento evidente en el examen parcial, puesto que el mismo grupo 1 cuenta con 14 estudiantes.

La comparación de los resultados del pre-test y del examen parcial conduce a la hipótesis nula de independencia de las filas y de las columnas. El p-valor del Chi-cuadrado que resulta de la tabla de contingencia es 0.213. Como este valor es superior al nivel de significación $\alpha = 0.05$, no se puede rechazar la hipótesis nula H_0 . Este es un primer resultado interesante desde el punto de vista educativo, porque subraya el hecho de que en el experimento se compensaron carencias iniciales: un estudiante con poca habilidad inicial en el manejo de variables tiene

sin embargo la posibilidad de obtener resultados correctos. Por lo tanto no podemos acertar que la mejoría se atribuya a la sola propuesta de enseñanza.

5. Comparación de las dos aplicaciones del test ¿Se redujeron las deficiencias iniciales?

En la tabla 2 se muestran los resultados de las dos aplicaciones del test, obtenidos por los 26 estudiantes que respondieron a la totalidad de las pruebas. A cada estudiante le asociamos su índice de éxito en las tres categorías mencionadas, es decir la proporción de preguntas de la categoría que resolvió de manera correcta. Se observa en la parte superior de la tabla el fuerte aumento del índice de éxito, y subrayamos que el mayor aumento es el del estrato funcional: .3 de FUN1 a FUN2. Eso es una media, pero el aumento se advierte también individuo por individuo: En la parte inferior de la tabla se registran los números de estudiantes cuyos resultados de la segunda aplicación del test fueron superiores, iguales o inferiores a los de la primera aplicación. El resultado general es un avance evidente.

La conclusión que proponemos es que la propuesta didáctica experimentada puede producir la compensación deseada de posibles deficiencias, sin necesidad de cursos remediales. Una hipótesis verosímil para aclarar este efecto observado es que la práctica regular de actividades controladas, en particular con la ayuda de los recursos computacionales que se usaron en nuestro experimento de enseñanza, proporciona un número suficiente de oportunidades de corregir concepciones erróneas para producir efectos de aprendizaje con respecto a los prerrequisitos del curso de cálculo.

Categoría	NUM1	NUM2	ALG1	ALG2	FUN1	FUN2
Media del índice de éxito	.56	.79	.34	.53	.29	.59

Categoría		NUM	ALG	FUN
Número de estudiantes cuyo segundo resultado es:	Mayor	17	21	19
	Igual	8	3	5
	Menor	1	2	2

Tabla 2 – Resultados, por categorías, de las dos aplicaciones del test

Pruebas y calificación final

De los 40 estudiantes del grupo, 32 obtuvieron un resultado final exitoso (Tabla 3). Es esta proporción de éxito del 8/10 un resultado muy importante en sí mismo, cuando se compara con los resultados tradicionales de la materia que recordamos

en la introducción. Además una observación sobresaliente es que, en el grupo observado, todo estudiante que entregó la totalidad de las pruebas salió aprobado. En otras palabras, los estudiantes que fracasaron estuvieron ausentes durante algunas de las pruebas.

	Aprobado	Reprobado
Todas las pruebas presentadas	26	0
Falta una prueba o varias	6	8

Tabla 3 – Presencia y resultado final del curso

Debido a los resultados obtenidos, no tendría sentido analizar la relación entre el éxito final y los niveles que resultan del test diagnóstico. Pero lo que se puede considerar es el nivel final de la calificación, de simplemente regular a excelente: ¿Hay una relación del nivel de éxito final con los resultados del test diagnóstico? Esta pregunta se añade a la pregunta inicial sobre la posible reducción de deficiencias iniciales observadas en el pre-test y se puede estudiar mediante el método de análisis de discriminante que presentamos a continuación.

Análisis discriminante

Para estudiar las preguntas planteadas, una herramienta útil es el análisis discriminante, en la que los grupos formados de una partición de la población se relacionan con valores de variables cuantitativas. En nuestro caso, tres grupos equilibrados se destacan de forma natural a partir de las calificaciones de fin del curso oficialmente registradas, establecidas en una escala de 0 a 10:

- REG, grupo “regular” que corresponde a niveles de calificación de 6 a 7
- BUE, grupo “bueno” que corresponde al nivel de calificación 8
- SUP, grupo “superior” que corresponde a niveles de calificación de 9 a 10

Cabe señalar que la puntuación de 8 en México tiene un valor específico: Por ejemplo, en varias instituciones se considera como la calificación que permite al estudiante conseguir una beca de estudio.

Los 26 estudiantes considerados en el análisis discriminante por dar lugar a resultados completos, se distribuyen de la manera siguiente: 9 en el grupo REG, 9 en el grupo BUE, y 8 en el grupo SUP.

Las variables cuantitativas consideradas en el análisis fueron los porcentajes de éxito con respecto a las categorías del test definidas arriba (NUM = preguntas numéricas, ALG = preguntas con variables dando lugar a un resultado numérico, FUN = preguntas dando lugar a resultado variable) y la calificación del examen parcial (PARC). Debido a que el pretest se aplicó dos veces, distinguiremos el resultado de cada aplicación por los números 1 para el resultado inicial y 2 para el segundo resultado. De esta forma, se establecieron siete variables cuantitativas para el análisis: NUM1, ALG1, FUN1, NUM2, ALG2, FUN2, PARC.

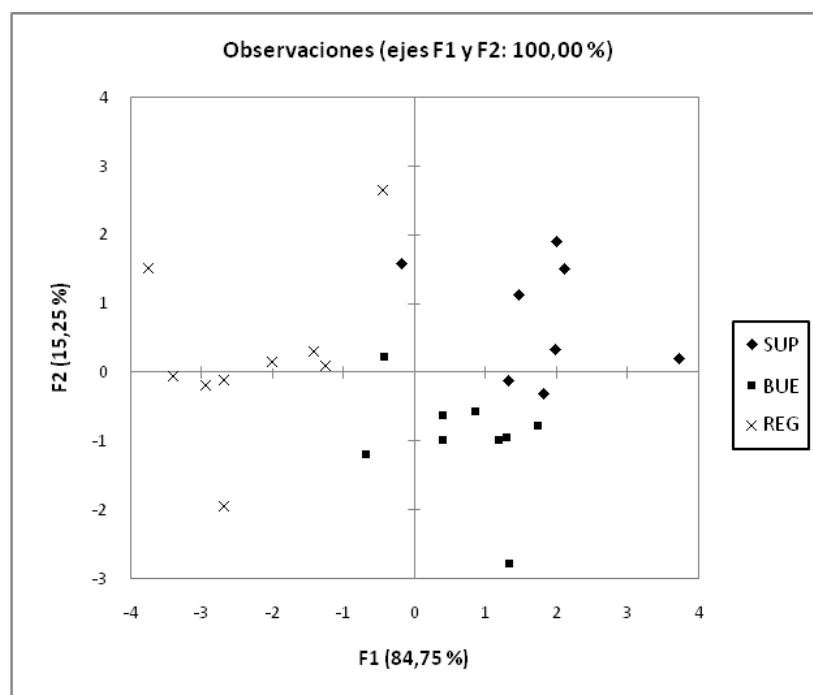


Figura 3. Localización de los individuos en el plano de los factores

	F1	F2
NUM1	0,749	-0,328
NUM2	0,185	0,758
ALG1	0,782	0,169
ALG2	0,301	0,376
FUN1	0,553	-0,096
FUN2	0,621	0,512
PARC	0,752	0,277

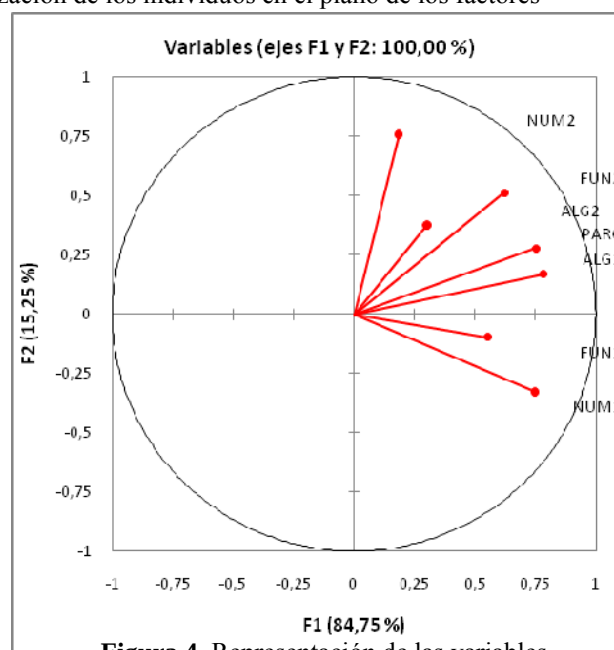
 Tabla 4
 Correlaciones
 Variables/Factores


Figura 4. Representación de las variables

El resultado del análisis discriminante es contundente por su pertinencia y coherencia. A continuación presentamos los rasgos principales:

- Los datos registrados de los tests y del examen parcial permiten localizar correctamente a casi todos los estudiantes en los tres grupos. Sólo 2 de los 24 estudiantes no son puestos a sus lugares correctos (*Omar* que obtuvo una calificación final de 10 es anexado al grupo BUE en vez de SUP, *Yoban* que obtuvo una calificación final de 7 es anexado al grupo SUP en vez de REG), todos los demás son anexados por el análisis a sus grupos reales. Esto significa que las pruebas aplicadas antes del examen final autorizan una predicción fiable para el nivel final obtenido por un alumno del curso.
- El primer factor del análisis (85% de la discriminación) ya ordena bastante bien los individuos según los grupos, desde los individuos del grupo REG que tienen una primera coordenada negativa, pasando por los del grupo BUE que ocupan una posición intermedia, hasta los de SUP del lado positivo. El segundo factor (15% de la discriminación) precisa la distinción entre los grupos BUE y SUP (figura 3). En seguida vamos a estudiar las variables subyacentes al fenómeno.

En efecto, las correlaciones entre las variables y los factores (tabla 4 y figura 3) son de gran interés. Las variables de mayor correlación con el primer factor son dos iniciales: los elementos más básicos del test diagnóstico (NUM1 y ALG1), y dos de desarrollo: el nivel del parcial (PARC), lo que era esperado, y el nivel alcanzado en la segunda aplicación del test para los tratamientos de variables (FUN2). Eso significa que el alcance del nivel superior por un estudiante en la calificación final depende de lo más básico del test diagnóstico y de lo más avanzado de la segunda aplicación del test. En otras palabras, esta última observación significa que el mejor éxito corresponde a la adquisición de los tratamientos de variables en el universo de las funciones, es decir el estrato funcional.

El hecho de que las variables más básicas en la segunda aplicación del test (NUM2 y ALG2) tienen poca relación con el nivel de éxito final, ilustra la disminución de las deficiencias iniciales en la población estudiantil observada: A final del curso impartido, las posibles dificultades se sitúan más allá de los prerrequisitos.

6. Conclusiones del experimento y perspectivas

Uno de los problemas más graves de la educación superior es el nivel académico del aspirante a cada ciclo escolar, debido a que en general se observan graves deficiencias en los prerrequisitos en matemáticas. Ante este problema, las instituciones recurrentemente proponen cursos remediales. En general, el resultado de estos cursos ha sido poco alentador o no rinde los resultados esperados. Esto no debería resultar extraño, dado que se comete el error de enseñar los temas de matemáticas de manera semejante a como fueron enseñados y en un tiempo muy reducido. Nuestra tarea consistió, desde el inicio, en mostrar que mediante

actividades cuidadosamente diseñadas dentro de un marco didáctico preciso, vecino de la RME (Real Mathematics Education) que se ha experimentado en el Instituto Freudenthal, orientado principalmente hacia la expresión y con el apoyo didáctico de la tecnología, se podría solventar las deficiencias con las que un alumno inicia un curso de matemáticas a nivel superior.

Este artículo muestra esta posibilidad. En efecto, las deficiencias iniciales detectadas se redujeron de manera significativa en la población experimental. Además, todos los estudiantes de esta población que estuvieron regularmente presentes durante el transcurso del cuatrimestre aprobaron el curso de cálculo. Sólo en el nivel de éxito final alcanzado se reflejan las posibles deficiencias iniciales.

Ahora queda por investigar en varios centros el carácter de réplica del experimento. Al lado de la experiencia presentada en este artículo se ha generado un Seminario Nacional que agrupa en la actualidad ocho Universidades de México por medio de videoconferencia, para el estudio de la enseñanza del cálculo, que culmina cada año con un Encuentro Nacional e Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo en México. Estos eventos pueden, en particular, contribuir a extender el presente estudio en esta dirección.

Este artículo no tenía como objeto estudiar el nivel de adquisición de los conceptos propios del cálculo: De los resultados de los estudiantes presentados sólo se observa que cumplen con los requisitos de la evaluación usual. Así entonces un objetivo de la investigación que queda por profundizar es el tema de la comprensión conceptual del cálculo. ¿En las condiciones descritas, cuáles son los conceptos y los métodos de tratamiento que los estudiantes adquieren y hasta qué nivel? Para responder a esta pregunta, proponemos diseñar y experimentar en el futuro actividades didácticas, con la creación de escenarios interactivos para cada uno de los conceptos asociados y elaborar los respectivos instrumentos de medición y evaluación.

Bibliografía

ADJAGE R. & PLUVINAGE, F. (2008), A numerical landscape (chapter). In Calvin L. Petroselli (Eds), *Science Education Issues and Developments* (pp. 5-57), New-York: Nova Publishers

ADJAGE R. & PLUVINAGE, F. (2012), Strates de compétences en mathématiques. *Repères IREM*, vol. 88

AEBLI, H. (1995). *12 formas básicas de enseñar*, NARCEA, España.

AMIT, M & VINNER, S. (1990) Some Misconceptions in Calculus - Anecdotes or the Tip of an Iceberg? *Proceedings Fourteenth PME Conference* Vol. I, pp.3-10, 1990, México: PME

ANDREU IBARRA, M. E. & RUESTRA VELÁZQUEZ, J. (2007) Et si nous en restions a Euler et Lagrange ? *Annales de didactique et sciences cognitives*, Vol. 12, pp. 165-187

ANUIES (2006) *Consolidación y avance de la educación superior en México. Elementos de diagnóstico y propuestas*. ANUIES, Documentos institucionales, México.

<http://www.anui.es.mx/result.php?cx=000208596329648011506%3Azfp6xmgnhrm&cof=FORID%3A10&ie=UTF-8&q=indices+reprobacion+nivel+superior>

ARTIGUE, M. (2002) Learning Mathematics in a CAS Environment: The genesis of a reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual work, *International Journal of Computer for Mathematics Learning*, Vol. 7, No. 3, pp. 245 - 274.

ASIALA, M., COTTRILL, J., SCHWINGENDORFF, K. & DUBINSKY, E. (1997). The development of students, graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 16, No.4, pp. 339 – 431

BLOCH, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics* 52: 3–28. 2003 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

CALCAGNO, J. C. & LONG, B. T. (2008). *The Impact of Postsecondary Remediation Using a Regression Discontinuity Approach: Addressing Endogenous Sorting and Noncompliance*. National Center for Postsecondary Education, USA

Retrieved from

http://www.postsecondaryresearch.org/i/a/document/8162_CalcagnoLongRevised.pdf

CUEVAS, C. A. & MEJÍA, H. R. (2003). *Cálculo visual* (Libro de texto incluyendo un disco compacto con el software CalcVisual), Oxford University Press, México

CUEVAS, C. & PLUVINAGE, F. (2003). Les projets d'action pratique, éléments d'une ingénierie d'enseignement des mathématiques, *Annales de didactique et sciences cognitives*. Vol. 8, pp. 273-293

CUEVAS, A., MORENO, S. & PLUVINAGE F. (2005). Una Experiencia De Enseñanza Del Objeto Función. *Annales de didactique et sciences cognitives*, Vol. 10, pp. 177-208.

DARKEN, B., WYNEGAR, R. & KUHN, S. (2000). Evaluating Calculus Reform: A Review and a Longitudinal Study, in Dubinsky, E., Schoenfeld, A. H. & Kaput, J. (Eds.). *CBMS Issues in Mathematics Education*. Vol. 8. pp. 16-40. American Mathematical Society.

DORIER, J. L. (2010). Mathematics in its relation to other disciplines: Some examples related to economics and physics, *El Cálculo y su Enseñanza*, Vol.2, Cinvestav-IPN, México. At http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/

DRIJVERS, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment*. Doctoral Dissertation. At: www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/6319.pdf

GRABINER, J. V. (1983). The Changing Concept of Change: the Derivative from Fermat to Weierstrass, *Mathematics Magazine*, 56(4), pp. 195–206.

GRAY, E. & TALL, D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, *The Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 115–141

HARDY, N. & SIERPINSKA, A. (2012). Mathematical organization of some French and English algebra textbooks used in remedial courses in colleges and universities in North America, in *Formation à la recherche en didactique des mathématiques*, Hitt, F. et Cortes C. (eds.), Loze-Dion, Longueuil (Québec), Canada, p. 239.

The paper can be viewed online at:

https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=explorer&chrome=true&srcid=0BzPon7xqQGcCYmU0ZmVjYjktMDgxOS00NjhLTKzODctOWNjOTU5ZTYxNTg3&hl=en_US

ÍMAZ JAHNKE, C. & MORENO ARMELLA, L. (2010). *La Génesis y la Enseñanza del Cálculo*, Editorial Trillas, México

KENT, P. & NOSS, R. (2002) The mathematical components of engineering expertise (The relationship between doing and understanding mathematics), *Proceedings of the IEE Second Annual Symposium on Engineering Education (Professional Engineering Scenarios 2)*, 39/1-39/7, London UK

KLEINER, I. (1989) Evolution of the Function Concept: A brief survey. *The college Mathematics Journal*, 20(4), pp. 282-300.

LAGRANGE, J.B. (2005). Transposing Computer Tools from the Mathematical

Sciences into Teaching, Some possible obstacles, in: Guin D., Ruthven K. & Trouche L. (eds.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators, Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument*, Chap. 5, pp. 67-82, Springer Netherlands.

LEITHOLD, L. (1998). *El Calculo*. 7 edición Editorial Oxford University Press.

Martínez Reyes, M. (2005). *Diseño de un prototipo de entorno computacional para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas para un curso de cálculo diferencial a nivel superior*. Tesis doctoral. Cinvestav-IPN, México, D. F.

MONNA, A. F. (1973). *Functional analysis in historical perspective*, Wiley, USA

MONZOY, J. A. (2002). *Una situación real como registro de representación en un entorno computacional. Un sustento cognitivo para promover la comprensión conceptual*. Tesis de Doctorado, Cinvestav-IPN, México.

NCTM (2011) *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics. Consultado en línea el 8 de julio de 2012 en <http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=26809>

NISS M. (2003) Mathematical Competencies and the Learning Mathematics: The Danish Kom Projects. *Mediterranean Conference on Mathematical Education*. The Hellenic Mathematics Society, Athenas, Greece

PLUVINAGE, F. & CUEVAS, C. A. (2006). Un acercamiento didáctico a la noción de función, in Eugenio Filloy (ed.) *Matemática Educativa, treinta años: Una mirada fugaz, una mirada externa y comprensiva, una mirada actual*. Editorial Santillana,. México. pp. 141-167

RUTHVEN, K. & HENNESSY S. (2002) A Practitioner Model of the Use of Computer-Based Tools and Resources to Support Mathematics Teaching and Learning, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 49, pp. 47-88

RÜTING, D. 1984. Some definitions of the Concept of Function from J. Bernoulli to N. Bourbaki. *The Mathematical Intelligencer*. 6 (4)

SIMMT, E. (1997) Graphics calculators in High School Mathematics. *Journal of Computer in Mathematics and Science Teaching*, Vol. 16 No. 2/3, pp. 269-289

SKEMP, R. (1976) Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, Vol. 77, pp. 20-26

SLAVIT, D. 1997. An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics* 33, 259-281. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

STEWART, J. (2010) *Cálculo de una variable. Conceptos y contextos*. Cenage Learning. México.

STROUP, W.M. (2002) Understanding Qualitative Calculus: A structural synthesis of learning research. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, Vol. 7, pp. 167-215.

SWOKOWSKY, E. W. (1988). *Cálculo con geometría analítica*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

TALL, D. (1997) Functions and Calculus, in: Bishop, A. J. et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325), Kluwer, Netherlands.

THURSTON, W. (1994) On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 30 No.2, pp. 161-177

YOUSCHKEVITCH, A. P. The *Concept of Function up to the Middle of the 19th Century*. Arch. Hist. Ex. Sci. 16 (1976) pp. 37-85

Los autores agradecen a los revisores sus observaciones precisas, que les permitieron mejorar las versiones iniciales del artículo.

Carlos Armando CUEVAS VALLEJO,
DME-CINVESTAV-IPN, ccuevas@cinvestav.mx

Magally MARTÍNEZ REYES,
UAEMex, mmreyes@cinvestav.mx

François PLUVINAGE,
DME-CINVESTAV-IPN e IREM Strasbourg, pluvin@math.unistra.fr

ANEXO 1 PRETEST (resuelto)

Esta evaluación es confidencial y no tiene significación o peso negativo para la calificación del estudiante en el curso. Sólo proporciona información para investigar a qué nivel se debería de iniciar las materias de Matemáticas. Por su importancia es necesario que se responda con honestidad puesto que puede alterar el diseño del curso.

Marque con una X en el cuadrado correspondiente en la opción que creas correcta y deja en blanco si se desconoce la respuesta.

Nombre: _____ Carrera y grupo:

1. Calcular $\frac{3}{4} + \frac{5}{7}$

- ☐ 8/11; ☐ 21/20; ☐ 15/28; ☒ 41/28; ☐ Otra solución

2. Calcular $\frac{3}{4} - \frac{5}{6}$

- ☐ 2/24; ☒ -1/12; ☐ -1; ☐ 38/24; ☐ Otra solución

3. Calcular $\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n}$

- ☐ 0; ☐ $\frac{1}{n(n-1)}$; ☐ $-\frac{1}{2}$; ☐ $\frac{2n-1}{2n(n-1)}$; ☒ Otra solución

4. ¿Cuál es el mayor de los siguientes números?

- ☒ 3.5; ☐ 1.6; ☐ -8.9; ☐ 0.546 ☐ -987

5. Calcular $3(5-8)^2 + 3[2(4+2)-5(2-6)]$

- ☐ 29; ☐ 43; ☐ 83; ☐ 32; ☒ Otra solución

6. Reducir los siguientes términos $2a(a-2b)^2 + 5b[2a(b+a)-b(2a-b)]$

- ☐ $5a^2+56ab+55b^2$; ☐ $2a^3+2a^2b+8ab^2-5b^3$; ☐ $-150b^3+98ab^2-2a^2b+6a^2$;
☐ $150b^3+68ab^2-21a^2b+6a$; ☒ Otra solución

7. Un vendedor expende artículos a comisión recibiendo 3 pesos por cada artículo vendido. El vendedor trabaja de lunes a viernes. Paga diariamente 5 pesos para que le permitan vender en el mercado y 6 pesos de transporte.

¿Cuántos artículos debe vender en una semana para que, restando sus gastos, le queden 35 pesos por cada día de trabajo?

- ☐ 100; ☐ 30; ☐ 150; ☐ 90; ☒ Otra solución

8. Marque la respuesta que sea la solución de la desigualdad $-30x + 4 \leq 0$:

- ☐ $x = \frac{2}{15}$; ☒ $x \geq \frac{2}{15}$; ☐ $(-\infty, \infty)$; ☐ $x \leq \frac{2}{15}$; ☐ Otra solución

9. Resolver $2x^2 - 3x - 2 = 0$

- ☐ $x_1 = -2$ y $x_2 = \frac{2}{3}$; ☐ $x_1 = 2$ y $x_2 = -\frac{2}{3}$; ☒ $x_1 = 2$ y $x_2 = \frac{-1}{2}$;
☐ $x_1 = -2$ y $x_2 = -\frac{2}{3}$; ☐ Otra solución

10. Considere $P(x) = x^3 - x$. Todas las raíces de esta función son:

- ☐ 0 y 1; ☐ 1 y 2; ☐ 1 y -1; ☐ -1 y 0; ☒ Otra solución

11. Resuelva el siguiente sistema:

$$x - 2y = 1$$

$$x + y = 4$$

- ☐ $x = -1, y = -1$; ☐ $x = 1, y = 3$; ☐ $x = 7, y = -3$; ☒ $x = 3, y = 1$;
☐ Otra solución

12. Resuelva el siguiente sistema:

$$x - 2y = 1$$

$$x + y = \lambda$$

- ☐ $x = \frac{2\lambda - 1}{3}, y = \frac{\lambda + 1}{3}$; ☒ $x = \frac{2\lambda + 1}{3}, y = \frac{\lambda - 1}{3}$; ☐ $x = 3 - 2\lambda, y = -\lambda + 1$;
☐ $x = 3 + 2\lambda, y = \lambda - 1$; ☐ Otra solución

13 En la ecuación $x = 1 + \frac{1}{y}$, despeja y en función de x.

- ☐ $y = 1 + \frac{1}{x}$; ☒ $y = \frac{1}{x - 1}$; ☐ $y = 1 + \frac{1}{x + 1}$; ☐ $y = \frac{x + 1}{x}$; ☐ Otra solución

14. Sea la expresión $y = 2 - \frac{1}{x}$; marque con una x en el cuadro correspondiente a la propiedad que se cumple.

$x = 0, y = 2$ ☒ Falso ☐ Verdadero

$x = 1, y = 1$ ☐ Falso ☒ Verdadero

$y = \frac{1}{2-x}$ ☒ Falso ☐ Verdadero

$x = 2 - \frac{1}{y}$ ☒ Falso ☐ Verdadero

15. Dada la función real $f(x) = x^2 + 1$

15.1 $f(-1) =$

☐ 0; ☒ 2; ☐ -1; ☐ 1; ☐ Otra solución

15.2 $f(x+1) =$

☐ $x+2$; ☐ x^2+2 ; ☐ x^2+x+1 ☒ x^2+2x+2 ; ☐ Otra solución

15.3 ¿Cuál es el rango?

☐ $x = -1$; ☒ $(1, \infty)$; ☐ $(-\infty, \infty)$; ☐ $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; ☐ Otra solución

ANEXO 2 EXAMEN PARCIAL (con las respuestas en cursivas)

Alumno _____ Carrera ICO-I

Nota importante: *Se requiere anexar, en hojas aparte, el procedimiento y justificación de cada respuesta. Si sólo se escribe la solución se considerará inválida o errónea.*

1. La tabla de abajo corresponde a una función lineal.

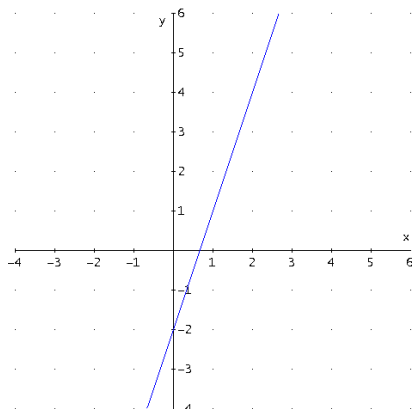
F(x)	-5	-2	1	4		
x	-1	0	1	2		

a) Determina la función lineal

$$F(x) = 3x - 2$$

b) Completa la tabla

F(x)	-5	-2	1	4	7	10
x	-1	0	1	2	3	4

c) Traza su gráfica

2. Usa Calcvvisual para determinar las raíces reales del polinomio siguiente:

$$P(x) = 2x^5 + x^4 - 18x^3 - 9x^2$$

$$x_1 = -3, x_2 = -0.5, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 3$$

3. Propone dos polinomios que tengan al menos las raíces reales siguientes: -2, 0, 0, 3 y 5.

$$P(x) = (x+2)x^2(x-3)(x-5) = x^5 - 6x^4 - x^3 + 30x^2$$

$$\text{y, por ejemplo, } Q(x) = (x+2)(x-2)x^2(x-3)(x-5) = x^6 - 8x^5 + 11x^4 + 32x^3 - 60x^2$$

4. Determina los intervalos en los que la siguiente función es positiva y en los que es negativa: $H(x) = -2x^3 + 16x^2 + 24x - 126$

x	$-\infty$	-3	$2.459\dots$	$8.541\dots$	∞
$H(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

5. Da un ejemplo de un polinomio con raíces en 0, -2 y 5 y que además sea negativo en $(-\infty, -2)$, positivo en $(-2, 0)$, positivo en $(0, 5)$ y negativo en $(5, \infty)$.

$$P(x) = -(x+2)x^2(x-5) = -x^4 + 3x^3 + 10x^2$$

6. Determina el dominio de las funciones reales:

a) $G(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$

$$D_G = (-\infty, -3] \cup [2, \infty)$$

b) $M(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 3}$

$$D_M = \mathbb{R}$$

7. Dada la función $f(x) = 2x^2 + x + 4$

a). Evalúa la función en

x	-1	0	1/2	2/3	2	3
$f(x)$						

x	-1	0	1/2	2/3	2	3
$f(x)$	5	4	5	$50/9 = 5.555\dots$	14	25

b). Demuestra que $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 4x + 1 + 2h$

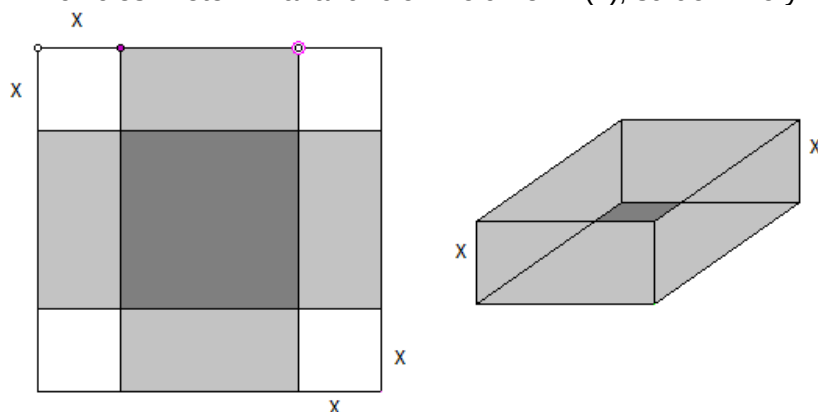
8. La temperatura de congelación del agua es 0°C (ó 32°F). La temperatura de ebullición es 100°C (ó 212°F). Utilice esta información para encontrar una relación lineal entre la temperatura en $^\circ\text{F}$ y la temperatura en $^\circ\text{C}$. ¿Qué incremento de temperatura en $^\circ\text{F}$ corresponde a un incremento de temperatura de 1°C ?

$$f: C^\circ \rightarrow F^\circ; f(x) = \frac{212-32}{100-0}x + 32 = \frac{180}{100}x + 32 = 1.8x + 32.$$

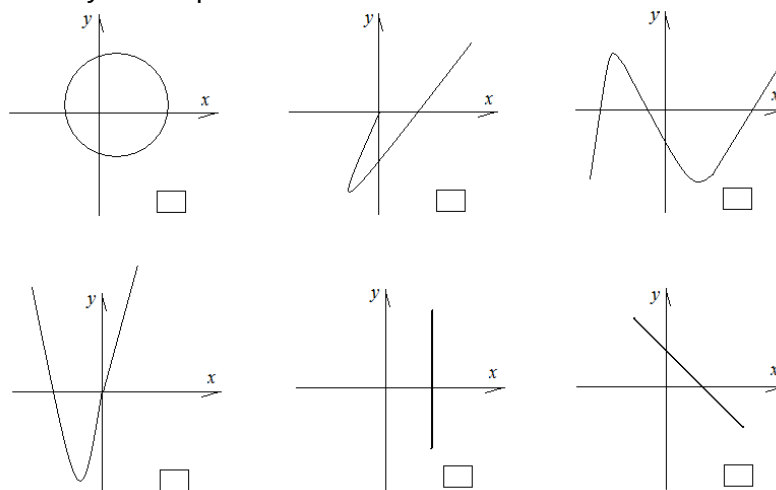
ANEXO 3 EXAMEN FINAL DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Nota Importante: **Se requiere anexar, en hojas aparte, el procedimiento y justificación de cada respuesta. Si sólo se escribe la solución se considerará inválida o errónea.**

- Se desea recortar cuadrados de lado x en las esquinas de una hoja cuadrada de longitud 13 cm para construir una cajita de chicles. Determina la función Volumen $V(x)$, su dominio y rango.



- En las siguientes gráficas determina cuál es función y cual no, escribiendo en el cuadrado, una S para reconocerla como gráfica de función y una N para el caso de no ser función.



- Si $f(x) = -3x^2 + 2x - 2$

a) Evalúa $f(x)$ en $x = -4$; $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$

b) Determina $f(x+h) - f(x) =$

4. A partir de la siguiente tabla de valores de una función lineal determina la expresión de la misma:

F(x)	1	2	0	-1
x	0	-1	1	2

F(x) = _____

5. Se tienen las siguientes raíces reales: $r_1 = -3$; $r_2 = -1$; $r_3 = 0$ y $r_4 = 3$. Determina y escribe un polinomio que tenga al menos estas raíces reales. Puedes utilizar CalcVisual.
6. Se tiene el siguiente signo de un polinomio $P(x)$. Negativo en el intervalo $(-\infty, -2)$; positivo en $(-2, 2)$; negativo en $(2, 3)$ y positivo en $(3, +\infty)$. Determina el polinomio $P(x)$. Puedes utilizar CalcVisual.
7. Para la función racional:

$$P(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$$

Usa CalcVisual para determinar lo siguiente:

- II.a. El dominio
- II.b. Las raíces reales
- II.c. El signo
- II.d. Extensión y asíntotas
- II.e. Calcula la derivada
- II.f. Puntos críticos
- II.g. Monotonía

Abstract. The Concept of Function and its Spatial Grounding

It has been argued that understanding ‘function’ qua abstract mathematical entity requires (a) that different aspects of this entity be understood as referring to the same mathematical entity (for example that the spatial representation of a function (whether it be a graph or a geometrical figure) and its algebraic form denote the same function, (b) that the abstract algebraic representation be grounded on the more tangible and observable spatial representation (observable in that the spatial representation lays out the relations expressed by the algebraic form in space rendering them available to the senses), which provides an initial concrete meaning to the function, and (c) that functions be not reduced to their spatial representational forms, since that gives rise to various misconceptions. In this paper, we address these ingredients of a proper understanding of the ‘function’ with a view to provide a theoretical framework concerning the relation between numbers and space that will allow the assessment of the different trends in the discussion regarding the interplay of algebraic and spatial representations of functions in understanding the concept ‘function’. In the first section we argue that grounding basic abstract mathematical entities such as natural numbers in spatial configurations is necessary for any adequate understanding of these entities. We adduce two main reasons for this claim. The first, from developmental psychology, concerns the notion of number as it is initially formed. The second concerns the way infants and animals represent numbers as magnitudes, with spatial properties. Our main thesis is that numbers are grounded in space, and we call this phenomenon “the spatial intuition of numbers”.

Résumé. Il a été avancé en didactique des mathématiques qu’une compréhension adéquate du concept de fonction comme entité abstraite exige (a) que différents aspects de cette entité soient compris comme se référant à la même entité mathématique (par exemple que la représentation spatiale d’une fonction (un graphe ou une figure géométrique) et sa représentation algébrique déterminent la même fonction, (b) que la représentation algébrique abstraite soit fondée sur la représentation spatiale, plus tangible et observable (observable dans le sens où la représentation spatiale étale dans l’espace les relations exprimées par la forme algébrique, les rendant accessibles pour les sens), ce qui offre un sens initial concret à la fonction, et (c) que les fonctions ne soient pas réduites à leurs formes représentationnelles géométriques, étant donné que cela soulève diverses idées fausses. Dans cette étude, nous envisageons ces éléments d’une compréhension correcte de la notion de « fonction » à partir d’un cadre théorique de la relation entre les nombres et l’espace ; ce cadre nous offrira la possibilité de discuter des différents aspects concernant les interactions entre les représentations algébriques et spatiales des fonctions. En première partie, nous démontrons que transposer des entités mathématiques abstraites basiques telles que les nombres naturels dans des configurations spatiales est nécessaire pour une compréhension correcte de ces entités. Nous présentons deux raisons principales à l’appui de cette affirmation. La première, venant de la psychologie développementale, concerne la notion de nombre telle qu’elle est formée initialement. La deuxième concerne la manière dont les jeunes enfants et les animaux se représentent les nombres comme des grandeurs,

c'est-à-dire comme des entités spatiales. Notre principale thèse est que les nombres sont projetés dans l'espace, phénomène qui peut être appelé « l'intuition spatiale des nombres ».

Mots-clés. Fondements, Nombres, Représentations Spatiales, Représentations Algébriques

1. Introduction

Il a été avancé en didactique des mathématiques qu'une compréhension adéquate du concept de fonction demande une capacité pour passer d'une forme de représentation algébrique d'une fonction donnée à une forme de représentation géométrique et vice-versa (voir Elia et al. 2007; Monoyiou et Gagatsis 2009, pour une discussion à ce sujet et plus de références). La compréhension correcte d'une fonction est ainsi fondée sur la capacité à traiter des informations concernant cette fonction à la fois à l'intérieur d'un même système de représentation (qu'il soit algébrique ou géométrique) mais aussi à travers plusieurs systèmes de représentation. Cette dernière capacité est celle de convertir des informations d'un système de représentation à un autre, autrement dit de coordonner l'information entre les deux systèmes de représentations. Il est par ailleurs établi dans les publications sur le sujet que les élèves rencontrent des difficultés en présence d'informations qui demandent une coordination de systèmes de représentation.

La raison mise en avant pour justifier ces difficultés est que ce n'est que lorsque les élèves ont maîtrisé la capacité de convertir et de coordonner des informations entre des systèmes de représentation qu'ils peuvent efficacement et systématiquement résoudre des problèmes difficiles incluant des fonctions (Monoyiou et Gagatsis 2009), ce qui est l'indice le plus fiable de la maîtrise du concept de « fonction ». Une autre explication, qui nous semble équivalente, est que les élèves réussissent à surmonter ces difficultés une fois qu'ils sont parvenus à la maîtrise du *procept de fonction* au sens de Gray & Tall (1994), laquelle permet de se saisir des fonctions à la fois comme des objets complets que l'on peut connaître et comme des processus avec lesquels on peut opérer. Comprendre une « fonction » *en tant qu'*entité mathématique abstraite demande donc (a) que différents aspects de cette entité soient compris comme se référant au même être mathématique (par exemple que la représentation géométrique d'une fonction et sa représentation algébrique déterminent la même fonction), (b) que la représentation algébrique abstraite soit fondée sur la représentation géométrique, plus tangible et observable (observable dans le sens où la représentation géométrique étale dans l'espace les relations exprimées par la forme algébrique, les rendant accessibles pour les sens), ce qui offre un sens initial concret à la fonction, et (c) que les fonctions ne soient pas réduites à leurs formes représentationnelles géométriques, étant donné que cela soulève diverses fausses idées (par exemple que chaque courbe est une fonction et que chaque fonction est une courbe).

Dans cette étude, nous envisageons ces éléments d'une compréhension correcte de la notion de « fonction » à partir d'un cadre théorique de relation entre les nombres et l'espace, qui offrira la possibilité de discuter des différents aspects concernant les interactions entre les représentations algébriques et spatiales des fonctions, dans le cadre de la compréhension du concept de « fonction ». Plus précisément, nous souhaitons examiner le rôle des représentations spatiales dans l'acquisition du concept de fonction, à la lumière de notre connaissance du rôle fondateur que les représentations spatiales tiennent dans notre savoir et nos compétences numériques.

En première partie, nous démontrons que transposer des entités mathématiques abstraites basiques telles que les nombres naturels dans des configurations spatiales est nécessaire pour une compréhension correcte de ces entités. Nous présentons deux raisons principales à l'appui de cette affirmation. La première, venant de la psychologie développementale, concerne la notion de nombre telle qu'elle est initialement formée. La deuxième concerne la manière dont les jeunes enfants et les animaux se représentent les nombres comme des grandeurs, c'est-à-dire comme des entités spatiales. Notre principale thèse est que les nombres sont projetés dans l'espace, ce qui peut être appelé « l'intuition spatiale des nombres ». Nous faisons référence au modèle de triade de Dehaene (1995; 1997) d'une compréhension des nombres et nous l'utilisons pour montrer comment les représentations perceptuelles spatiales, les symboles et la connaissance conceptuelle convergent afin de fournir une compréhension adéquate des nombres.

Si les nombres en tant que symboles sont fondés sur des configurations spatiales, alors la forme que chaque genre de représentation endosse naturellement est importante dans la compréhension des relations entre les représentations des nombres à travers des symboles et les représentations des nombres à travers des configurations spatiales, et donc importante aussi dans la compréhension des transformations d'un système de représentation à un autre. Il est bien établi que la compréhension des figures géométriques repose sur les capacités spatiales qu'une personne possède (Duval 1995; Fischbein 1993; Kalogirou et al. 2009). Ainsi, les représentations géométriques sont principalement des représentations spatiales. Les représentations spatiales sont des représentations analogiques, qui sont significativement différentes des représentations symboliques comme les formules algébriques. Dans la deuxième partie, nous démontrons qu'en raison de leur nature différente, les représentations analogiques permettent des transformations différentes de celles permises par les représentations symboliques. Dans la troisième partie, nous montrons comment cela explique pourquoi il est difficile pour les élèves de coordonner des processus dans les deux systèmes de représentation. Nous montrons aussi pourquoi une compréhension adéquate des fonctions demande une capacité à coordonner des informations entre ces deux systèmes de représentation. Notre principale thèse est que cette capacité, en

fondant la représentation algébrique sur une représentation spatiale plus tangible, permet aux élèves de comprendre à la fois que la représentation algébrique et la représentation spatiale se réfèrent à la même entité « fonction » et aussi que les propriétés dans l'un des systèmes de représentation correspondent aux propriétés dans l'autre système. En rendant possible la vision des fonctions à la fois comme des objets et des processus, cette coordination permet aussi aux étudiants de les constituer comme des *procepts*. Cependant, nous affirmons aussi que la nature analogique des représentations géométriques impose de sévères restrictions aux manipulations et processus autorisés sur elles. En conclusion, nous montrons ainsi que du fait des limitations imposées par la nature des représentations analogiques, si les élèves ne dépassent pas la tendance à réduire les fonctions à une certaine forme géométrique ou une autre et s'ils n'arrivent pas à réaliser que les fonctions peuvent aller bien au-delà de leur projection initiale, ils ne peuvent pas acquérir une compréhension profonde du concept de « fonction ».

Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous voudrions clarifier quelques points concernant les différentes manières de représenter une fonction. DeMarois et Tall (1996) emploient le terme de *facettes* ou d'*aspects* pour référer aux différentes manières de penser à propos d'un être mathématique tel une fonction. En ce qui concerne la fonction, il y a trois facettes ou aspects. Un aspect numérique pour lequel la fonction est représentée par des tables, un aspect symbolique pour lequel la fonction est représentée par des équations et un aspect géométrique ou visuel, pour lequel la fonction est représentée par des graphes. Notons que pour ces chercheurs, l'aspect géométrique et les représentations graphiques de fonctions se combinent. D'un autre côté Duval (2002) distingue entre différents registres ou formes de représentation, à savoir les écritures numériques, les figures géométriques, les notations algébriques, les représentations graphiques et le langage naturel, qui désignent différents aspects de représentations sémiotiques de fonctions. S'il y a certaines différences entre représentations géométriques et représentations graphiques, les unes et les autres partagent la même caractéristique fondamentale d'être des représentations spatiales. Dans cet article nous parlerons en général des représentations spatiales et nous avançons que nos propos s'appliquent aussi bien aux graphes qu'aux figures géométriques. En effet, ce qui nous intéresse est d'explorer comment la notion de fonction peut devenir concrète et apparaître comme un objet bâti sur sa représentation spatiale, que celle-ci soit un graphe ou une figure géométrique. Cela ne nous empêche pas de reconnaître pleinement que les deux types de représentations permettent des approches différentes des problèmes mettant en jeu des fonctions. Lorsque nous discutons spécifiquement de représentations géométriques, nous ne nous intéressons qu'à leur dimension spatiale.

2. La projection des nombres dans l'espace

Dans la théorie de Piaget, les actions sont la source élémentaire de chaque type de connaissance. Ainsi, les actions sur les éléments de la réalité constituent la source des opérations mentales et de la connaissance sur les nombres. Ce point est, d'une manière ou d'une autre, toujours intégré dans les théories du développement cognitif. Piaget considérait les nombres comme une synthèse de la logique des classes et de la logique des relations. Ainsi, il soutenait que dans les nombres on pouvait voir à la fois les actions de classification (actions qui manipulent la similitude des choses) et les actions de sériation (actions qui manipulent les différences des choses). Les actions émanant de la classification, quand elles se recoupent, conduisent au concept du nombre cardinal. Les actions émanant de la sériation, quand elles se recoupent, conduisent au concept de nombre ordinal (l'un vient après l'autre car ils diffèrent en quelque chose). Au final, vers l'âge de sept ans, quand la structure des opérations concrètes est établie, les deux aspects des nombres se rejoignent afin que l'enfant comprenne les relations entre nombre cardinal et nombre ordinal.

Selon une théorie plus récente (Demetriou et a., 1993), tous les éléments de la réalité peuvent potentiellement subir des transformations quantitatives. Les choses s'assemblent ou se séparent et donc elles s'accroissent, diminuent, se divisent, se multiplient dans l'espace ou dans le temps pour beaucoup de raisons différentes. Certains de ces aspects de la réalité sont de valeur adaptive et beaucoup d'organismes vivants sont sensibles aux variations quantitatives de leur environnement qui sont importantes pour leur espèce. A un autre niveau d'organisation, ce système implique des capacités et des savoir-faire de détermination quantitative, par exemple, compter, pointer, ajouter et retirer, partager. L'internalisation des savoir-faire dans des actions mentales coordonnées mène aux quatre opérations arithmétiques basiques, lesquelles fournissent une compréhension des fonctions quantitatives basiques de l'augmentation, de la baisse, de la redistribution, etc. La capacité à conceptualiser des dimensions telles que hauteur, masse, volume, sont d'autres exemples du savoir-faire et des opérations exigés pour faire apparaître des relations entre des dimensions différentes, par exemple la relation entre les changements de volume et de masse dans la nature. Ces processus constituent la base des pensées mathématiques complexes, comme le raisonnement proportionnel. De plus, des nombres proviennent de l'intersection de fonctions d'une quantité spécifique dans les systèmes perceptuels, systèmes qui évoluent pour être capables de saisir les aspects quantitatifs de la réalité, à partir d'actions effectuées sur des choses afin de manipuler leur multiplicité.

Ainsi, les théories développementales acceptent que la notion de nombre naturel émerge de la coordination et de l'internalisation subséquente de nos actions sur les

objets de notre environnement. Les psychologues ne sont pas les seuls chercheurs à mettre l'accent sur le rôle des interactions avec notre environnement à la base de notre concept de nombre. Parmi les didacticiens des mathématiques, plusieurs partagent cette vision. Gray & Tall (1994) s'accordent avec Piaget pour dire que les nombres se construisent quand l'attention se fixe sur les actions sur les objets; l'arithmétique élémentaire reste une façon d'effectuer ou de représenter une action. A la fin, des actions sur des objets deviennent des entités conceptuelles intériorisées ou des objets de pensée. Les processus de transformation ont été appelés « intériorisation » (Beth & Piaget 1996), « encapsulation » (Dubinsky 1991) ou « réification » (Sfard 1991). Dans toutes ces théories, un thème est commun : les actions répétées deviennent des processus qui sont finalement encapsulés dans des objets qui s'intègrent dans un schème mental (théorie APOS : Action-Process-Object-Schema). (Harel & Dubinsky 1992; Sfard 1991). Par conséquent, la perception des objets originaux joue un rôle important dans la construction du concept de nombre, puisqu'elle agit en tant que point de départ du processus d'action finalement mental qui conduit à la construction de la conception du nombre comme une construction ou un objet mental.

Tall et al. (2001) avancent que l'on développe des concepts d'une abstraction élevée en partant d'actions simples sur l'environnement. On perçoit des choses, on agit sur elles et on réfléchit sur ces actions pour construire des théories. De la perception on s'élève à la géométrie qui étudie forme et espace. L'action sur des objets qui se fonde sur leur perception conduit au comptage et à la mesure, puis aux symboles et enfin aux mathématiques symbolique et à l'algèbre. Compter commence avec des objets perçus dans le monde extérieur. « L'arithmétique débute par le comptage d'objets réels et les propriétés numériques qui en résultent sont toutes expérimentées directement par le sujet. » (Traduit de Tall et al. 2001, p. 18) En fait, on a aussi déclaré que « les différentes perceptions de ces objets, qu'elles soient mentales ou sensorielles, sont au cœur de différents styles cognitifs, qui conduisent à des succès ou des échecs en arithmétique élémentaire. » (Traduit de Gray et al. 1997, p. 117)

Il en résulte que la perception joue un rôle de pivot dans l'activation des processus qui vont finalement déboucher sur le concept de nombre. La raison en est que la perception de l'environnement est une condition nécessaire pour nos interactions dynamiques avec les objets qui s'y trouvent, ce qui est, comme nous l'avons vu, le point de départ de la construction du savoir mathématique. En d'autres termes, vu que nos interactions les plus fondamentales avec l'environnement sont guidées avant tout par nos représentations perceptives du monde environnant, il s'ensuit que l'histoire développementale souligne le rôle fondamental des représentations perceptives à la mise en place des fondations sur lesquelles les nombres pourront finalement se construire. Les représentations perceptives sont avant tout des

perceptions d'objets et de leurs propriétés ainsi que des relations dans l'espace et le temps. Puisque les représentations perceptives sont des représentations analogiques, il s'ensuit que le type de représentation le plus fondamental s'avère être celui des représentations analogiques. Les représentations analogiques sont des représentations spatiales, et ainsi représenter les nombres au niveau initial implique de les représenter dans l'espace, c'est-à-dire en tant que grandeurs, puisque les grandeurs ont des dimensions.

Comment un organisme pourrait-il implémenter ce type de représentation analogique des grands nombres, ou, dit autrement, comment un organisme pourrait-il construire un système analogique pour les grands nombres ? Pour répondre à cette question, Meck et Church (1983) ont proposé le modèle dit de « pacemaker-accumulateur » et ils ont présenté des preuves psychologiques pour le soutenir. Dans ce modèle, le nombre est représenté par une grandeur physique qui est la fonction des entités énumérées. Dans un tel système analogique, l'animal ou l'enfant n'a pas à apprendre quel nombre est représenté par quel niveau donné de l'accumulateur, car c'est un mécanisme analogique dans lequel son état est une fonction linéaire directe du nombre. Selon le modèle accumulateur, le système nerveux possède l'équivalent d'un générateur d'impulsion qui génère une activité à un rythme constant. Chaque fois que l'entité est rencontrée dans une séquence, le pacemaker envoie un signal. Cette activité est mesurée de telle manière que lorsque les flux d'énergie passent à travers l'accumulateur, celui-ci enregistre la quantité entrante (voir figure 1). L'amplitude de la grandeur dans l'accumulateur à la fin de la séquence de comptage est proportionnelle au nombre d'entités dans la séquence et sert ainsi de représentation analogique à la valeur arithmétique d'une séquence.

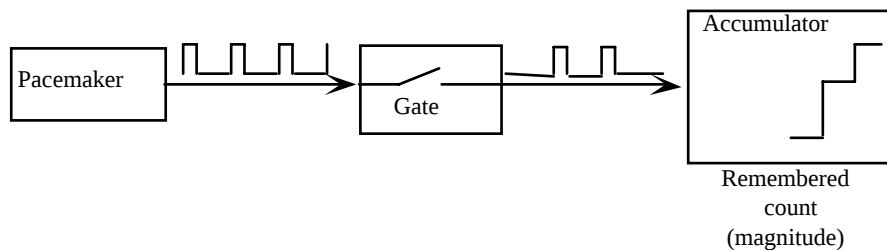


Figure 1 : Le modèle *accumulateur* de Meck et Church. Chaque fois que le pacemaker envoie un signal, la porte (gate) s'ouvre et le laisse passer, incrémentant la grandeur dans l'accumulateur.

Meck et Church affirment aussi que le même mécanisme est utilisé pour représenter la durée, la grandeur dans l'accumulateur étant cette fois proportionnelle à la durée temporelle d'un intervalle. Le fait que les mêmes grandeurs estimées par les mêmes mécanismes servent dans certaines occasions à représenter une quantité arithmétique et dans d'autres occasions à représenter une

durée a conduit à une série d'expérimentations pour confirmer que les représentations animales des nombres sont bien des grandeurs (Meck et Church 1983 ; Meck, Church et Gibbon 1985).

Une large gamme d'études expérimentales supplémentaires (Bialystok 1992; Gallistel 1990; Gallistel et Gelman 1992) ont présenté des preuves que les animaux et les très jeunes enfants utilisent un système analogique pour représenter les quantités arithmétiques, ce qui signifie que les enfants et animaux utilisent des grandeurs pour représenter les quantités arithmétiques, et non des symboles arbitraires. Le système analogique de Meck et Church est appelé un système de calcul *préverbal*, puisqu'il met l'accent sur la manière dont les animaux et les jeunes enfants peuvent compter et accomplir des calculs élémentaires arithmétiques avant le début d'un système symbolique.

Des avancées dans le domaine de la neuropsychologie sur des sujets souffrant de diverses formes d'acalculie ont apporté un soutien supplémentaire à cette théorie. Dehaene et Cohen (1997) suggèrent qu'il y a deux chemins neurologiques distincts qui traitent différemment la connaissance arithmétique, bien que dans la plupart des cas ces deux chemins soient actifs et interagissent pendant les opérations arithmétiques. Une route, impliquant les zones pariétales inférieures, se charge du traitement quantitatif des nombres. L'autre route, impliquant le lobe gauche-latéral corticostriatal, se charge de la mémorisation par cœur verbale arithmétique. Pour expliquer les structures détaillées des symptômes et les résultats expérimentaux, Dehaene et Cohen (1995) ont proposé le « modèle du triple code » d'une architecture anatomique et cognitive de l'arithmétique. Selon ce modèle, il y a trois types de représentations des nombres:

- Par un code visuel dans lequel les nombres sont représentés en tant que séries identifiées de chiffres. La forme visuelle est favorisée par les zones bilatérales inférieures ventrales occipito-temporales.
- Par une quantité analogique ou un code de grandeur, favorisé par la zone bilatérale inférieure pariétale. Dans ce code, les nombres sont représentés en tant que distributions de l'activation sur une ligne arithmétique orientée. Ce code est impliqué dans la connaissance sémantique des quantités (proximité, relation d'infériorité ou de supériorité, par exemple). Dans ce code, les nombres sont représentés dans une forme analogique telle que des configurations dans l'espace.
- Par un code verbal, localisé dans le cortex perisylvien de l'hémisphère gauche, dans lequel les nombres sont représentés en tant que séquences de mots.

Le code verbal fournit un symbole verbal au nombre, auquel s'ajoute le symbole visuel du premier code. A la fois la forme visuelle et la forme verbale constituent des symboles qui représentent des nombres et fonctionnent en tant que véhicule

représentationnel des nombres dans le cerveau. Leur signification initiale consiste dans la représentation impliquée dans le deuxième code analogique, qui, ainsi, fonctionne à la fois en tant que définition initiale des nombres et en tant que conception initiale des nombres ; ce qui est en fait un concept figuré puisqu'il lie le nombre à une configuration spatiale exprimant une grandeur. En temps utile, le concept de nombre est enrichi par la relation de chaque nombre avec chaque autre nombre dans la structure de l'arithmétique et de l'algèbre et, ainsi, il acquiert un contenu qui excède la signification spatiale initiale du nombre.

Le deuxième code implique des jugements sur les relations quantitatives, dans lesquelles les nombres sont représentés en tant que grandeurs. Quand les opérations mathématiques sont exécutées, ces quantités subissent des manipulations sémantiques significatives, et la quantité résultante est transférée au réseau neuronal linguistique approprié pour trouver une appellation. Ceci suggère l'existence d'un réseau neuronal dans lequel les nombres sont représentés de manière analogique en tant que grandeurs, et non en tant que symboles distincts. Pour résoudre correctement des problèmes arithmétiques élémentaires, ces trois systèmes doivent coopérer afin que le sujet puisse correctement répondre à la question exprimée dans le problème. Ainsi, l'apprentissage réussi de l'arithmétique nécessite que ces trois codes travaillent en coordination.

Gallistel et Gelman (1992) nomment le système analogique d'appréhension des nombres un système de comptage *préverbal*, pour souligner que les animaux et les jeunes enfants peuvent compter et effectuer des calculs arithmétiques élémentaires avant l'avènement de tout système de symboles. Ils emploient aussi l'expression « représentation analogique des numérosités », ce qui laisse à penser qu'ils croient en la *représentation* des numérosités par ces grandeurs, comme le font les symboles, même si c'est d'une manière analogique et non pas chiffrée. Si l'arithmétique est fondée sur la représentation analogique des grandeurs, on doit s'attendre à ce qu'une partie des structures inférentielles du système fondateur préconceptuel se transporte dans le nouveau système. Cela veut dire qu'au moins dans les premières étapes de l'acquisition du système symbolique, l'enfant devrait utiliser le système analogique pour structurer le nouveau domaine. Et Gallistel et Gelman (1992) montrent qu'il en est bien ainsi. L'enfant assimile le système verbal du raisonnement arithmétique en obtenant de manière analogique les résultats approchés des opérations de l'arithmétique. Ce faisant, il projette les nombres verbaux en des grandeurs non verbales, effectue des opérations arithmétiques non verbales avec ces grandeurs et ensuite revient de son résultat aux nombres verbaux.

Soulignons en préalable que l'accumulateur est censé fournir en termes de grandeurs l'analogie des numérosités des ensembles d'objets rencontrés dans l'environnement. C'est-à-dire qu'il fournit des estimations de numérosités en termes de grandeurs. L'accumulateur permet également des comparaisons

numériques. Quand on en arrive à des ensembles avec de plus grands nombres d'éléments, il y a unanimité (Gallistel et Gelman 2000; Nieder et al. 2002; Whalen et al 1999) pour considérer que tous les êtres humains et beaucoup d'animaux utilisent une procédure de comptage mise en œuvre dans un accumulateur. Néanmoins, quand une tâche mathématique met en jeu des nombres qui dépassent de manière évidente la capacité d'appréhension immédiate disons de petits enfants, l'accumulateur se met en marche et les quantités numériques sont comparées selon les statistiques de la droite numérique (droite graduée) (Gallistel et Gelman 2000; Feigenson et al. 2004; Nieder et al. 2002). Ce système représente des grandeurs qui ont une certaine variabilité scalaire ; cela signifie que les signaux qui encodent ces grandeurs sont sujets à du bruit, changent d'un essai à l'autre, avec une distribution de la largeur du signal qui croît en proportion de sa moyenne. Ce dernier point indique que l'accumulateur n'est pas nécessairement censé fournir des analogues de nombres précis et, par conséquent, que les grandeurs ne peuvent en général pas être considérées comme des représentations analogues de nombres précis. Enfin, le fonctionnement de l'accumulateur n'est pas conditionné par la seule modalité visuelle, mais permet le comptage grâce à toutes les entrées sensorielles.

L'accumulateur est un mécanisme analogique dans lequel chaque état (la grandeur) est une fonction linéaire directe du nombre. La grandeur n'est pas quelque chose d'arbitraire en ce qui concerne le nombre qui se présente comme son symbole. L'accumulateur fait le lien entre l'expérience d'une séquence et la variable physique dans l'organisme. Il n'est pas une construction abstraite dont le lien avec la cardinalité d'un ensemble de séquence, par exemple, devrait être établi indépendamment par un certain type de correspondance. La représentation analogique, à cause de l'isomorphisme entre les opérations physiques appliquées à la grandeur représentée et aux opérations arithmétiques, fournit le lien immédiat, le point de contact, entre l'esprit et le monde, projetant ainsi l'arithmétique dans le monde. En ce sens, le système analogique fournit le contenu qui projette dans l'espace les représentations symboliques des nombres qui seront établies plus tard pendant le développement. Cependant, le nouveau système symbolique représentationnel, qui est projeté dans le système analogique présymbolique, n'est pas du même type, puisque le système symbolique réclame le développement d'une pensée symbolique abstraite. Comme le notent Carey (1995) et Gallistel et Gelman (1992), l'acquisition d'un système de langage numérique symbolique constitue un fort changement conceptuel, étant donné que ce langage impose de gérer un nouveau système représentationnel.

3. Représentations analogiques vs représentations symboliques

Les représentations perceptives sont iconiques et ne peuvent pas se recombinaison, tandis que les représentations conceptuelles sont discursives et peuvent être recombinaison de la bonne manière. La raison en est que les représentations

iconiques n'ont pas de décomposition canonique, et donc, même si elles ont des parties interprétables, elles n'ont pas de parties constituantes car elles sont homogènes. Plus spécifiquement, les représentations discursives ont une décomposition canonique car elles sont constituées de parties distinctes. En clair, une représentation est compositionnelle si sa structure syntaxique est déterminée par la structure syntaxique de ses parties et des caractéristiques syntaxiques qui sont utilisées dans sa composition. Avoir une structure syntaxique signifie que certaines parties de la représentation sont constituantes et d'autres parties ne le sont pas. « F », par exemple, est un constituant de la représentation « F(a) » mais « F » n'est pas un constituant. En ce sens, les structures discursives ne sont pas homogènes. Les représentations iconiques, d'un autre côté, satisfont le *principe de représentation fidèle*, qui veut que si P est une image de X, les parties de P sont des images des parties de X. Les structures iconiques sont donc homogènes. Mais alors toutes les parties d'une image sont parmi ses « constituants ». Ainsi, une icône est compositionnelle car elle se découpe, c'est-à-dire que peu importe comment l'image est découpée, une nouvelle image de quelque chose en résulte. Dans un tel système, il n'y a pas grand sens à stipuler l'existence de constituants. Pour apprécier la différence, il faut considérer que n'importe quelle partie d'une image d'un océan est une image d'une partie d'un océan : or il n'est pas vrai que toute partie de la représentation discursive F(a) soit une représentation discursive d'une partie de F(a). Ainsi, les représentations perceptives comme les images sont structurellement différentes des représentations discursives.

Une représentation discursive est compositionnelle si son contenu sémantique est aussi déterminé par le contenu sémantique de ses parties et, ainsi, la discussion précédente à propos des entités syntaxiques peut être recadrée en termes d'entités sémantiques. C'est le résultat de l'opinion selon laquelle la syntaxe égale la sémantique en ce qu'il y a une claire correspondance individuelle entre ses constituants syntactiques et sémantiques. C'est la thèse de la transparence sémantique. Clark (1989, p. 2) définit comme sémantiquement transparent les systèmes dans lesquels il existe une projection claire entre les états qui sont informatiquement transformés à un niveau algorithmique de description et ceux qui sont sémantiquement interprétables en tant que morceaux de phrases au niveau du calcul. Les systèmes classiques qui postulent de manière syntaxique des représentations structurées, et dont les opérations de calcul s'appliquent à de telles représentations, constituent des systèmes sémantiquement transparents. En effet, les états qui sont transformés par calcul sont de manière syntaxique des représentations structurées qui sont habilement projetées en morceaux de phrases sémantiquement interprétables en vertu de leur structure syntaxique ; les faits syntaxiques sont directement traduits en faits sémantiques.

L'homogénéité des représentations iconiques implique que les relations géométriques dans le monde sont imitées par les relations géométriques dans les représentations analogiques. De plus, les relations causales dans le monde sont imitées par les relations causales dans la représentation, puisque les représentations des effets secondaires d'un changement sont des effets secondaires de la représentation de ce changement. Dans les représentations analogiques, tout est prêt et disponible et, ainsi, quand certains aspects ou d'autres changent, tout le reste est mis à jour automatiquement (Haugeland 1987, 91).

Dans les systèmes analogiques, qui n'ont pas de constituants, la signification des représentations complexes n'est pas déterminée par la signification de ses parties mais par la manière dont ils dépeignent la situation qu'ils représentent, c'est-à-dire par le fait qu'ils reflètent sa structure géométrique et causale. Dans les systèmes symboliques discursifs, la signification provient de la combinaison du sens des symboles. C'est pourquoi, dans les représentations analogiques, il existe un isomorphisme entre les opérations dans le monde représentant et les transformations dans le monde représenté. Une représentation analogique possède une structure non-arbitraire inhérente, qui gouverne la façon dont elle opère, et les relations entre les aspects de la représentation analogique ne sont pas arbitraires mais sont déterminées par la structure de l'aspect du monde représenté. En conséquence, les transformations dans le monde représenté sont projetées en opérations dans le système représentant. Un exemple de système représentationnel analogique pourrait clarifier cette présentation. Pensez aux motifs à l'encre qui constituent les chiffres « 1 », « 2 », et ainsi de suite, par lesquels on discerne les nombres 1, 2, etc. Les opérations physiques appliquées à ces motifs, les symboles, ne sont pas isomorphes aux opérations arithmétiques, c'est-à-dire aux opérations du système symbolisé. Ainsi, tandis que l'opération arithmétique $1 + 2$ produit 3, aucune manipulation physique des motifs dessinés « 1 » et « 2 » ne produit de motif « 3 ». La même chose vaut pour n'importe quel système digital qui manipule des représentations symboliques. Considérez maintenant des systèmes, comme des histogrammes, qui utilisent des grandeurs (hauteurs de colonnes) pour représenter des quantités numériques. Les opérations sur ces histogrammes sont isomorphes au système arithmétique, dans la mesure où les additions de nombres correspondent à des additions de colonnes de l'histogramme. Pour obtenir l'opération $1 + 2 = 3$, il suffit d'ajouter la colonne pour 1 à la colonne pour 2, en la plaçant au-dessus. Les systèmes qui utilisent des grandeurs à des fins représentationnelles sont appelés systèmes analogiques et exécutent des calculs analogiques.

Pour clore ces considérations, commentons la suggestion (Seron et al. 1992) que la nature des images de quantités directement représentées par des dispositions de points ou par d'autres choses telles que l'alignement d'objets peut être considérée comme analogique. Il est clair d'après la discussion ci-dessus que des dispositions

de points ou des alignements d'objets rassemblent certaines des caractéristiques de représentations analogiques. Des opérations physiques sur des dispositions de points telles que l'addition par exemple, correspondent à des opérations sur les nombres représentés. Toutefois, les dispositions de points ou d'objets ne satisfont pas au critère d'homogénéité des représentations analogiques tel qu'il est apparu dans la discussion ci-dessus. Puisque ce type de représentation est clairement situé entre les représentations analogiques et les représentations symboliques, on pourrait l'appeler représentation semi-analogique, ou représentation hybride, dans le sens où elle combine des caractéristiques analogiques et symboliques.

4. Comprendre le concept de « fonction »

Nous avons montré le rôle nécessaire des représentations spatiales analogiques pour indiquer en quel sens les nombres sont initialement compris et utilisés. Nous avons dit qu'à un certain moment, les élèves apprennent le langage algébrique des nombres en tant que symboles. Comme pour toutes les entités mathématiques, les fonctions devraient acquérir leur signification initiale en étant projetées dans une représentation spatiale qui est, bien sûr, la forme géométrique de la fonction. Cela signifie qu'en introduisant des fonctions dans la classe, il faut mettre l'accent sur leur représentation géométrique aussi bien que sur la construction d'un schéma géométrique à partir de leur description algébrique. La représentation géométrique permet la perception de la fonction en tant qu'objet, que ligne par exemple, et, en plus, elle permet la perception de la fonction comme un tout (Monoyiou et Gagatsis 2009). La représentation algébrique, en contraste, est spécifique (Monoyiou et Gagatsis 2009) en ce que la fonction est construite en donnant à chaque fois une valeur à x et en calculant la valeur correspondante de y . Cela conduit à perdre de vue la fonction en tant qu'objet global et substitue à la forme géométrique une matrice de valeurs reliées entre elles.

De la même façon, Vandebrouck (2010) souligne que la vision graphique des fonctions permet la conception des fonctions comme des objets alors que la conception algébrique est ponctuelle et associe aux fonctions une conception processus. Cependant Vandebrouck, (2010, p. 3) commence son texte en affirmant que la représentation algébrique et la représentation géométrique des fonctions peuvent toutes les deux servir de soutien au point de vue global et au point de vue point par point des fonctions. La représentation algébrique pourrait en particulier prendre en charge à la fois le point de vue ponctuel, car lire « pour tout x dans le domaine de la fonction, $f(x) = \dots$ » sous-tend une vision point par point universelle des fonctions, alors qu'utilisée sans les « pour tout x », elle sous-tend une vision globale de la fonction pour calculer, par exemple, la première dérivée de f .

Vandebrouck (2010, p. 2), dans la ligne du schème Action-Processus-Objet discuté plus haut, introduit la distinction entre le niveau de processus et le niveau d'objet liés aux fonctions. Le premier est chargé de signifier les processus dans lesquels les

fonctions sont utilisées comme moyen pour une fin, et le dernier est chargé de signifier le statut « ontologique » d'une fonction. Au niveau du processus, une fonction permet la correspondance entre les valeurs des deux tables (la table des y et la table des x de la fonction $y = f(x)$), ce qui correspond à la représentation numérique des fonctions. D'autres chercheurs, toutefois, pensent que la représentation numérique convient mieux à la compréhension d'une fonction au niveau de l'action (voir Cuoco 1994 and Gray et al. 1997). Le niveau processus permet aussi la construction de tableaux de variation, ce qui correspond à la représentation symbolique. Il permet également de calculer les dérivées d'une fonction, ainsi que de construire la courbe représentative de la fonction dans le plan cartésien. Pour ce faire, il n'y a pas besoin d'une vue d'ensemble de la fonction, c'est-à-dire d'une idée de ce que à quoi la fonction ressemble globalement. En d'autres mots, il est inutile de savoir que la fonction constitue un objet. Au niveau objet, la fonction est présentée comme un objet global, qu'il s'agisse d'une figure géométrique (représentation géométrique) ou une formule (représentation algébrique). Les deux représentations, cependant, ne sont pas équivalentes dans leur capacité à présenter le caractère objet de la fonction. Voici pourquoi.

Nous pensons que le point de vue global et le point de vue ponctuel sont naturellement liés au niveau objet et au niveau processus ou action. Les notions globales de monotonie ou de symétrie sont directement visibles sur la figure géométrique, mais pas dans la représentation algébrique : on doit les déduire, à partir de la formule exprimant la fonction, par des manipulations algébriques. La représentation géométrique porte ainsi les propriétés de parité et de monotonie en son sein, tandis que la représentation algébrique ne le permet pas. Le caractère global d'une fonction est donc mieux présent dans la représentation géométrique que dans la représentation algébrique. Il s'ensuit que, dans la mesure où les objets sont caractérisés par toutes leurs propriétés, la représentation géométrique, qui est une représentation spatiale, présente une fonction comme un objet mieux que la représentation algébrique.

Une autre façon de voir ce phénomène est de rechercher laquelle des deux représentations suivantes est plus naturellement interprétée comme un objet : $y = x$ ou bien une représentation spatiale. La raison pour laquelle nous pensons tous à la seconde, mais pas à la première représentation, est que les configurations spatiales sont rencontrées dans la nature (comme des formes ou des surfaces), tandis que la droite $y = x$ est une construction artificielle. Elle n'a du sens et donc ne peut être interprétée comme un objet abstrait que par ceux qui savent lire la langue. En d'autres termes, nos intuitions dictent que la configuration spatiale et non la formule est un objet.

Comme nous l'affirmons ici, les résultats ci-dessus sont des conséquences du fait que les configurations spatiales sont des représentations analogiques, tandis que les

formules sont des représentations symboliques (dans notre sens du terme). Par conséquent, de manière arbitraire, des propriétés ne sont accessibles que par ceux qui possèdent le vocabulaire pertinent. Nous avons affirmé que la représentation spatiale est mieux adaptée que la représentation algébrique pour présenter une fonction comme un objet. Nous avons également dit que la configuration spatiale porte ses propriétés en elle-même tandis que la formule ne les affiche pas. Ceci implique que la configuration spatiale est un meilleur représentant de la globalité d'une fonction, plus qu'un représentant de son point de vue ponctuel. En fait, on peut se demander si, compte tenu du fait que la formule exprimant une fonction est une construction arbitraire symbolique, la représentation algébrique peut tout de même appuyer la vision globale des fonctions. Bien sûr, il y a un sens en lequel la formule $y = f(x)$ favorise une vision plus globale de la fonction que des tableaux de valeurs de y et x , puisqu'un tableau est fini par définition, alors que la fonction peut prendre un nombre illimité de valeurs. Cependant, ce n'est pas le sens que nous donnons à l'expression «vision globale» d'une fonction, laquelle signifie pour nous la vision de la fonction comme un objet avec ses propriétés directement perceptibles (symétrie, monotonie, continuité, etc).

Par conséquent, en dépit de sa déclaration initiale du fait que la représentation algébrique supporte à la fois le point de vue global et le point de vue point par point de la fonction, Vandebrouck plus tard dans son texte accepte effectivement notre hypothèse. C'est-à-dire que la représentation algébrique d'une fonction ne peut pas être correctement interprétée comme la représentation d'un objet, et que la représentation algébrique ne peut pas transmettre correctement le sens dans lequel une fonction est globale. À la page 5, par exemple, il se réfère au travail de Coppé et al. (2007) et il note que le graphique d'une fonction n'est pas un instrument de réflexion (comme la représentation algébrique), mais un objet de représentation globale et complète, que l'on peut construire, achever, et correspondent aux résultats algébriques. À la page 7, il note que dans la représentation algébrique, et contrairement à la représentation géométrique, les objets de manipulation sont très formels et le contexte qui entoure la notion de fonction est manquant (dans notre article, nous faisons valoir que ce contexte est le fondement de l'espace de la fonction). Puis, à la page 8, Vandebrouck remarque "notre hypothèse est que le manque de disponibilité du point de vue ponctuel et du point de vue global des fonctions, associé à la seule présence de la représentation algébrique au détriment de la représentation graphique, empêche l'introduction des notions locales liées à des fonctions (limites, etc.)". En d'autres termes, Vandebrouck est d'accord avec nous sur le fait que la représentation algébrique (en elle-même) ne peut pas soutenir à la fois le point de vue ponctuel et le point de vue global des fonctions. Enfin, à la page 19, nous trouvons la thèse suivante "l'absence de correspondance entre le point de vue ponctuel et le point de vue global des fonctions... associés à la seule présence de la représentation algébrique et à l'absence de la représentation

géométrique, empêche l'introduction des étudiants à certains exercices d'analyse où ces points de vue sont pertinents." Ici, Vandebrouck admet donc que la représentation algébrique par elle-même ne permet pas aux étudiants de voir ou de comprendre la correspondance entre le point de vue point par point et la vision globale et qu'elle les empêche d'être en mesure de passer d'un point de vue à l'autre (c'est ce que la coordination entre les deux points de vue signifie). La représentation géométrique, d'autre part, pourrait atteindre ces objectifs. Dans notre texte, nous essayons de donner des arguments pour savoir pourquoi il en est ainsi.

En projetant la forme symbolique à partir du « schéma » géométrique ou graphe, on obtient deux choses. D'abord, les élèves sont plus conscients du fait que les deux formes expressives, la symbolique et la spatiale, se réfèrent ou concernent une seule et même chose. Ensuite, la forme algébrique abstraite correspond à quelque chose de plus tangible, une configuration dans l'espace qui peut être perçue, dans le sens où l'on peut voir la courbe qui correspond à la fonction. Comme nous l'avons dit, les courbes ont un sens intuitif empirique car elles remplacent la relation naturelle non arbitraire des grandeurs (voir plus haut l'isomorphisme entre les histogrammes qui sont constitués de lignes et de grandeurs).

Il y a plus de bénéfices à représenter les fonctions spatialement du fait de la nature des représentations analogiques. Ce type de représentation fait que toute information qui existe sous une forme implicite dans la forme algébrique de représentation devient explicite (exception faite de la complexité algébrique à partir d'un certain moment). Par exemple, si $y = x$, l'information selon laquelle cette ligne représentant la fonction partage le cadre de référence est explicite dans la représentation géométrique, mais implicite dans la représentation algébrique. De plus, si la courbe représentant la fonction bouge (ce qui signifie que la fonction change) alors les valeurs de y et x sont automatiquement mises à jour. Mais si on utilise la forme algébrique, la modification doit être effectuée manuellement, telle qu'elle (un résultat d'une propriété des systèmes analogiques est de représenter les transformations de manière directe).

Ainsi, en plus de fournir une signification intuitive à des formules abstraites (la représentation symbolique des fonctions), la représentation spatiale des fonctions facilite beaucoup d'opérations qui auraient été difficiles à réaliser algébriquement. Par exemple, considérons la fonction $y = 2x$. Supposons qu'on nous demande de trouver sa fonction symétrique par rapport à l'axe des x . Utiliser la représentation géométrique rend la tâche facile. Manipuler la fonction algébriquement pour trouver la forme algébrique de la fonction symétrique, à l'inverse, est fastidieux.

Nous avons soutenu que la représentation numérique d'une fonction (selon la classification de DeMarois et Tall) ou sa représentation dans le registre numérique (selon la terminologie de Duval), où la fonction est représentée par des tables, constitue le support d'une conception point-par-point d'une fonction et empêche de

voir une fonction dans sa globalité, comme un objet. Disons, pour nous exprimer d'une façon différente mais équivalente, que la représentation (ou l'aspect, ou la facette) numérique de fonctions est la plus naturellement adaptée au niveau de l'action dans les séquences action-processus-objet-procept des représentations de fonction, ce qui veut dire que la représentation numérique pousse à penser une fonction comme une suite d'opérations ou de manipulations isolées. De son côté, la représentation algébrique d'une fonction, autrement dit sa représentation par une équation, peut s'insérer soit dans la composante objet, soit dans la composante procept des séquences action-processus-objet-procept. En conséquence, une vision globale de la fonction peut s'appuyer sur la représentation algébrique, qui offre la perception d'une fonction comme un tout. Toutefois nous avons déclaré que les représentations algébriques, au contraire de des représentations spatiales, ne nous amènent pas immédiatement à interpréter une fonction comme objet entier.

De manière spécifique, l'argument que nous présentons ici est que la représentation spatiale d'une fonction (c'est-à-dire sa représentation soit par un graphe, soit par une figure géométrique) sert d'échaffaudage pour permettre ou faciliter à l'étudiant le passage d'une représentation point par point d'une fonction à la vue globale d'une fonction comme un objet, lequel objet peut être exprimé de manière spatiale ou algébrique. La raison est qu'une représentation spatiale de fonction la présente naturellement ou intuitivement comme un tout, de la même manière que les objets de l'environnement avec lesquels les élèves interagissent. On ne peut pas en dire autant de la représentation algébrique, puisque cette représentation n'a pas les mêmes structures de formes et de surface que les objets présentent. Par suite, il est plus facile pour l'élève de voir une fonction comme un tout depuis la perspective de l'aspect spatial ou d'une facette de la fonction plutôt que selon son aspect ou sa facette algébrique. Une fois la fonction vue comme un objet, la représentation algébrique peut d'elle-même servir de support à cette vision.

Gray et Tall (1994) introduisirent le terme de *procept* (combinaison de *pro*-cessus et *con*-cept). Ce terme souligne la nature duale des symboles mathématiques comme représentants tout à la fois d'un processus à exécuter et d'un concept à connaître. Un procept est un amalgame de trois choses : un symbole, un processus et un concept (DeMarois & Tall 1996). Le procept est le concept le plus sophistiqué d'un être mathématique et vient après que la séquence action-processus-objet a été complétée, parce qu'il nous permet de voir disons un symbole comme représentant une fonction à la fois comme un tout à connaître et un processus qui nous permet de faire quelque chose. En d'autres termes, il combine savoir et savoir-faire. L'affirmation selon laquelle l'amalgame des représentations algébrique et spatiale d'une fonction fournit une vue complète de la notion de fonction conduit à réaffirmer qu'un *procept* donne une vue complète des différentes facettes d'une fonction, en ce que la

coordination des informations algébrique et spatiale se rapportant à une fonction permet d'interpréter la fonction comme un *procept*.

On peut s'attendre à ce que la performance dans des problèmes variés mettant en jeu des fonctions dépende du niveau de compréhension du concept de fonction de la part des élèves. C'est-à-dire que plus la notion de fonction est avancée, meilleure est la compréhension de ce qu'est une fonction et de comment elle agit, et partant, plus élevés sont les scores des élèves. Puisque la compréhension des fonctions provient des séquences action-processus-objet-procept, on pourrait attendre des élèves qui voient les fonctions comme des procepts, par exemple, d'avoir de meilleures performances que les autres, qui ne comprennent pas une fonction comme un procept. De la même manière, les élèves qui voient les fonctions comme des objets devraient manifester plus de flexibilité en résolution de problèmes que les étudiants qui en sont au niveau procédural. En effet, pour des enfants qui restent à un niveau procédural, les résolutions de certains problèmes leur sont très difficiles, tandis que d'autres enfants qui opèrent à un niveau conceptuel affichent une plus grande flexibilité (Gray et al. 1997). En général, les élèves qui voient les fonctions comme des *actions* pensent à une fonction comme à une suite d'opérations ou de manipulations isolées, qu'ils emploient pour obtenir une valeur de sortie à partir d'une valeur d'entrée (Cuoco 1994). Les élèves qui pensent aux fonctions comme à des processus tendent à penser aux fonctions comme à des transformations dynamiques. Les élèves qui pensent aux fonctions comme à des objets tendent à y penser comme à des structures atomiques, qui peuvent être des entrées et des sorties de processus d'ordre supérieur. Enfin, les élèves qui ont une représentation des fonctions comme procepts peuvent utiliser les fonctions soit comme objets, soit comme processus selon le problème en cours (Cuoco 1994).

Pour des raisons qui tiennent aux capacités offertes, plus grandes pour l'algébrique (en tant que représentations symbolique) que pour le spatial (en tant que représentation analogique), et que nous discutées, nous pensons que la représentation algébrique est un meilleur candidat pour le niveau procept de compréhension que la représentation spatiale de la fonction.

Nous avons dit que les représentations symboliques sont sémantiquement transparentes et compositionnelles. Cela signifie qu'il existe une correspondance entre les propriétés syntaxiques se rapportant aux symboles en tant que médiateurs et les propriétés sémantiques se rapportant aux contenus. Cet « isomorphisme » entre les états et leurs contenus indique que les opérations permises sur les contenus doivent être reflétées sur les opérations permises sur les états qui véhiculent ces contenus. Il semble que les faits structurels concernant les contenus analogiques ou symboliques suivent les faits structurels concernant les médiateurs du contenu analogique ou symbolique, c'est-à-dire l'état cognitif mental analogique ou symbolique qui les véhicule. Appelons *représentation du médiateur* l'état

représentationnel qui véhicule le contenu et *contenu représenté* le contenu. Si le contenu symbolique peut s'agencer afin de produire des contenus complexes ou esquisser des déductions, c'est parce que leur médiateur se comporte de telle manière qu'il permet la combinaison exigée par la composition ou les diverses déductions. Supposons que les hypothèses « a est F » et « b est G » soient représentées en tant que contenus par les médiateurs représentationnels ou simplement par les représentations F(a) et G(b) respectivement. Les représentations sont de purs objets syntaxiques où les contenus sont des objets sémantiques. La capacité à ordonner ces contenus demande que l'on puisse aussi avoir les contenus « a est F » et « b est F ». Ceci implique que la capacité à avoir les représentations F(b) et G(a) présuppose que les représentations possèdent des parties qui soient recombinaisons.

Cette analyse s'appuie sur le fait que la compositionnalité de chacune des représentations et de leurs contenus est une compositionnalité « concaténative ». Un état mental complexe est constitué d'états mentaux plus simples et puisque des traitements algorithmiques appliqués aux symboles donnent des transitions cognitives, la forme symbolique d'une structure complexe contient les formes symboliques de structures plus simples. Ceci est visible par exemple quand on combine des phrases simples pour former des phrases plus complexes. Il y a des règles qui dictent quelles combinaisons sont permises et comment la phrase complexe est construite à partir de ses constituants. Cette forme de composition est appelée concaténative car les parties constituantes s'enchaînent pour former la phrase complexe et restent transparentes à l'intérieur d'elle. Les représentations de dépendance structurelle sont celles qui sont syntaxiquement structurées, c'est-à-dire, celles qui contiennent des traces de leurs parties constituantes ; les représentations compositionnelles sont seulement celles dans lesquelles tous les éléments atomiques sont explicitement préservés. C'est un fait structurel à propos des représentations. Ainsi, les représentations de contenus symboliques doivent avoir certaines propriétés structurelles spécifiques pour que leurs contenus puissent s'ordonner ou prendre place dans des relations de déductions.

Donc, pour tous les nombres, les chiffres (c'est-à-dire les symboles représentant des nombres) devraient être capables d'être manipulés. Pour ajouter 3 et 5 (nombres) il faut avoir un système symbolique qui permet l'addition de leurs médiums dénommés nombres « 3 » et « 5 », ou dit autrement, le système doit avoir des règles qui s'appliquent à ces médiums, ce que l'arithmétique nous permet de faire. C'est ce que l'isomorphisme mentionné plus haut prétend réaliser. Notons que cet isomorphisme est différent de l'isomorphisme entre les systèmes représentationnels et le monde représenté que nous avons rencontré lorsque nous avons discuté des propriétés des représentations analogiques en ce que, dans ce cas, l'isomorphisme se situe entre les opérations sur les médiateurs et les opérations sur les contenus

dans le système représentatif et non entre les opérations entre le système représentatif et les opérations à l'intérieur du monde représenté.

Savoir que « a est F », par exemple, signifie qu'il est possible de concevoir des pensées sur « a » et sur les nombres qui sont « F ». Mais alors cela veut dire qu'il est possible de concevoir qu'un autre nombre « b » est « F » et donc nous avons le contenu « b est F ». Ainsi, si on pense que « a est F » et « b est G », alors on peut aussi concevoir que « a est G » et « b est F ». De plus, on peut esquisser des déductions en utilisant des propositions mathématiques. Si, par exemple, on songe que « a est F » et « b est F » alors on peut aussi penser que « a et b sont parties de F ». Les représentations analogiques ne rencontrent pas cette contrainte. Si on voit une balle rouge et une coupe rouge, on ne voit pas une balle et une coupe qui sont rouges. La raison en est que non seulement le système perceptuel au sens strict ne crée pas de déductions mais aussi que, si on se limite à ce qui ne transparait que perceptuellement, l'expérience d'une balle rouge n'a rien en commun avec l'expérience d'une coupe rouge en ce que l'on ne discerne pas en fait des couleurs distinctes mais seulement certaines déclinaisons déterminées d'une couleur.

La capacité des représentations symboliques à combiner et à prendre part à des relations déductives implique une foule de propriétés qui sont caractéristiques des systèmes symboliques et de la cognition humaine. Parmi eux, les plus importants sont la « systématité » (si on connaît Lab alors on sait que Lba est une expression acceptable) et la productivité (on peut combiner les symboles selon les règles pour former de nouveaux symboles). Les systèmes analogiques ne possèdent pas ces propriétés, et cela pose des limitations à leurs capacités représentatives.

Les différences susmentionnées entre le système représentationnel analogique et le système représentationnel symbolique ont une implication importante. Puisque les systèmes symboliques possèdent des constituants (compositionnalité) qui sont clairement visibles (transparence) quelle que soit la représentation complexe, et puisque les processus permis sur les systèmes symboliques sont différents de ceux permis dans les systèmes analogiques (par exemple, des algorithmes peuvent être appliqués aux représentations symboliques, mais les représentations analogiques spatiales peuvent subir des transformations algébriques qui sont mieux décrites au moyen de la géométrie différentielle et de la théorie des systèmes dynamiques), il n'est pas simple de convertir des informations d'un système à un autre, ce qui explique donc les difficultés des élèves à coordonner les informations à travers les systèmes représentationnels.

Ce bref exposé frôle à peine la surface du problème de la coordination des informations à travers les systèmes. Vu les limitations de l'étude, nous nous limiterons à relever qu'à propos des représentations géométriques/analogiques, la capacité à les comprendre est liée aux capacités de visualisation spatiale, c'est-à-dire, aux capacités à visualiser la configuration, à comprendre les mouvements de

l'image, à imaginer des rotations, à manipuler et transformer l'image (McGee 1979). De plus, pour comprendre une figure géométrique, il faut être capable de déployer les quatre types de compréhension analysés par Duval (1995), qui correspondent partiellement aux capacités de McGee. La troisième compréhension de Duval, nommée « compréhension discursive », met l'accent sur le lien étroit entre l'image spatiale perçue et la connaissance discursive conceptuellement structurée, qui est essentielle pour la compréhension des interactions entre les propriétés spatiales représentées. Il met aussi l'accent sur le rôle de la connaissance symbolique linguistique dans la manipulation et l'interaction de ces propriétés dans l'utilisation de représentations internes ou externes. En d'autres termes, les processus manipulateurs qui dépendent de représentations analogiques spatiales sont partiellement mais significativement contrôlés par des représentations symboliques (la manière dont les images mentales sont toujours combinées avec des connaissances symboliques pour permettre des rotations ou d'autres manipulations). Ainsi, en plus du caractère distinctif des processus de transformation des représentations analogiques, les représentations analogiques ne suffisent pas en elles-mêmes à résoudre les problèmes des fonctions. Ceci provoque une difficulté supplémentaire pour la projection de représentations analogiques dans des représentations symboliques et, ainsi, impose un obstacle supplémentaire à la coordination des représentations géométriques et algébriques des fonctions.

Finalement, nos opinions ébranlent le point de vue de Fischbein (1993) quant aux trois catégories d'entités mentales impliquées dans la compréhension des figures géométriques (dénommées définition, image et concept figuré). La raison en est que la définition et le concept de nombre sont inextricablement liés à l'image concernée dans le deuxième code. Le concept figuré ne peut être parfaitement séparé de l'image, qui est l'information visuelle extraite de la figure géométrique, puisque ceci constitue le contenu du concept, même si le concept est « écrit » dans un vocabulaire de type langagier mental et compris ainsi, c'est un manque « amodal » de propriétés sensorielles concrètes, même s'il les exprime. De plus, même si la connaissance conceptuelle est principalement amodale, elle ne peut être séparée de l'information modale, puisqu'il est bien établi que l'activation des concepts amodaux cause automatiquement l'activation des régions du cortex sensoriel qui codent les caractéristiques modales de la propriété ou de l'objet qui appartient à la dénotation du concept. C'est ce que le modèle de Dehaene capture si bien en insistant sur le fait que la représentation modale analogique est activée quand on entend le monde/symbole d'un nombre.

Il est facile de voir que cette relation étroite entre la représentation amodale et la représentation modale inhérente à un concept explique les difficultés dans la séparation du sens conceptuel/modal de l'information visuelle/figurative que

Fischbein (1993) et Mesquita (1998) ont montrée. Mesquita, en fait, attribue les difficultés aux mêmes raisons que celles que nous soulevons dans la présente étude, c'est-à-dire, à la connexion entre les concepts et les images, sauf que pour Mesquita c'est le résultat de l'utilisation de représentations externes en géométrie, tandis que pour nous c'est le résultat du lien inextricable entre les représentations internes modales et amodales.

Conclusion

La discussion ci-dessus révèle que malgré les bénéfices des représentations analogiques dans la représentation dynamique du monde, les représentations analogiques démontrent de sévères limitations qui émanent de leur homogénéité et, ainsi, de leur non compositionnalité syntaxique, car c'est cette propriété qui leur interdit d'être compositionnelles et transparentes. Cela signifie que, malgré le rôle nécessaire de projection de la représentation géométrique des fonctions, la forme algébrique permet plutôt plus de flexibilité et de manipulabilité, sans mentionner qu'il y a des fonctions invoquant les nombres qui n'ont simplement pas de projection immédiate en une forme spatiale (par exemple, les nombres imaginaires ou irrationnels).

Ceci justifie, en didactique des mathématiques, les points de vue qui amènent à prétendre que la compréhension adéquate des fonctions exige d'une part la coordination entre la forme géométrique et la forme algébrique ainsi que la conversion de l'information d'une représentation à l'autre, mais exige d'autre part que cette coordination ne soit pas interprétée comme signifiant que les fonctions sont réduites à une représentation géométrique. En particulier, le cadre théorique que nous avons mis en jeu sur les fondements cognitifs précise les vues de Gagatsis et de ses collaborateurs sur la nécessité d'une interaction entre les représentations algébrique et géométrique pour une bonne compréhension des fonctions, ce qu'illustre aussi leur théorie de l'approche coordonnée des fonctions pour leur compréhension.

Il ouvre aussi des possibilités intéressantes à la fois pour analyser le niveau cognitif de l'espace de travail géométrique de Kuzniak (ETG), en particulier sur les relations entre la perception/visualisation, la construction et la preuve. Il aide aussi pour relier l'ETG à son extension en mathématiques où il constitue l'espace de travail mathématique (ETM). Comme Kuzniak l'observe, les représentations iconiques de la géométrie doivent être "organisées dans les registres de représentation sémiotique pour permettre un travail mathématique", ce qui est, sous une autre forme, notre affirmation selon laquelle les représentations iconographiques ne peuvent être utilisées dans les preuves que si elles sont complétées avec des représentations symboliques ou sémiotiques qui fournissent la structure nécessaire pour les preuves et pour les arguments en général. Ceci justifie l'affirmation selon laquelle une approche coordonnée est plus efficace qu'une

approche purement géométrique ou graphique dans la compréhension et l'utilisation des fonctions.

Un autre point à noter concerne l'extension des ETG aux ETM en ce que dans ce dernier le processus de visualisation et de perception est quelque peu différent de celui impliqué dans l'ancien. Ainsi, comme le note encore Kuzniak, le processus de visualisation « nécessite une réinterprétation fondamentale pour trouver sa place dans l'ETM. Il doit être associé à des schèmes et des opérations d'usage sur les signes dont rien ne prouve a priori qu'ils relèvent tous de la visualisation, même dans une conception étendue de celle-ci. » Ceci est exact en raison du fait que les objets de manipulation en mathématiques sont sensiblement différents des objets de la géométrie et, que par conséquent, le processus de visualisation en cause est un processus d'exploitation non de figures géométriques mais de schémas mathématiques. Cependant, comme nous l'avons également fait valoir, les nombres de l'analyse se fondent sur des grandeurs spatiales et les fonctions sont fondées sur des figures géométriques (ce qui, bien entendu, ne signifie pas que toutes les fonctions correspondent à des figures géométriques). Par conséquent, même si le processus de visualisation dans les ETM diffère du processus de visualisation dans les ETG, les premiers doivent impliquer de manière cruciale des éléments de ce dernier parce que c'est le seul moyen de fonder les fonctions dans l'expérience et les doter de leur sens initial.

Enfin, il est intéressant de savoir comment la distinction coordonnée/algébrique sur l'espace de travail mathématique peut-être inspirée par l'ETG ? La véritable question est, bien sûr, comment l'approche coordonnée peut être reliée aux processus prévus au niveau cognitif des ETM ou des ETG, c'est-à-dire au niveau qui relie les activités au « plan des composantes ». Rappelons que le niveau cognitif des ETM est construit autour des processus cognitifs de la visualisation ou de la perception, de la construction, de la preuve, et leur interaction au moment de la résolution de problèmes. Cependant, puisque la première de ces activités cognitives, à savoir la visualisation ou la perception, est clairement en cause en présence d'une figure géométrique, il va sans dire que la représentation des fonctions qui implique une représentation géométrique s'adapte mieux au modèle de Kuzniak. Plus précisément, la participation de la figure géométrique facilite le processus de la preuve car elle permet des manipulations de l'information dans le cadre du problème (par exemple des rotations ou des déplacements) qui ne sont pas possibles avec la représentation algébrique de fonctions.

Bibliographie

- BETH, E. W. & PIAGET, J. (1966). *Mathematical Epistemology and Psychology*. Dodrecht: Reidel.
- BIALYSTOK, E. (1992). Symbolic representations of letters and numbers, *Cognitive Development* 2, 301-316.
- CLARK, A. (1989). *Microcognition: Philosophy, Cognitive Science, and Parallel Distributed Processing*, The MIT Press, Cambridge, MA.
- CUOCO, A. A. (1994). Multiple representations of functions. In *Research Issues in Undergraduate Mathematic Learning* (Eds. J. Kaput & E. Dubinsky), 121-140, Mathematical Association of America, Washington, D.C.
- DEHAENE, S., & COHEN, L. (1995). Towards an anatomical and functional of number processing, *Mathematical Cognition* 1, 83-120.
- DEHAENE, S., & COHEN, L. (1997). Cerebral pathways for calculation: Double dissociation between verbal and quantitative knowledge of arithmetic, *Cortex* 33, 219-250.
- DeMAROIS, Ph., & TALL, D., (1996). Facets and layers of the function concept. *Proceedings of PME 20*, vol. 2, 297-304.
- DEMETRIOU, A., EFKLIDES, A., & PLATSIDOU, M. (1993). The architecture and dynamics of developing mind: Experiential structuralism as a frame for unifying cognitive developmental theories, *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 58 (5-6, Serial No. 234).
- DUBINSKY, E. (1991). Reflective abstraction. In *Advanced Mathematical Thinking* (Ed. D. O. Tall), 95-123, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht.
- DUVAL, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processes, dans *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (Eds. Sutherland & Mason), 142-157, Springer, Berlin.
- ELIA, I., PANAOURA, A., ERACLEOUS, A. & GAGATSIS, A. (2007). Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations, *International Journal of Science and Mathematics Education* 5, 533-556.
- FEIGENSON, L., DEHAENE, S., & SPELKE, L. (2004) Core systems of number. *Trends in Cognitive Science* 8. 307– 314.
- FISCHBEIN, E. (1993). The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics* 24.2, 139-162.

- GALLISTEL, C. R. (1990). *The organization of learning*, The MIT University Press, Cambridge, MA.
- GALLISTEL, C. R., & GELMAN, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation, *Cognition* **44**, 43-74.
- GALLISTEL, C. R., & GELMAN, R. (2000). Nonverbal numerical cognition: from reals to integers. *Trends in Cognitive Sciences*, **4**, 59-65.
- GRAY, E. M. & TALL, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *Journal of Research in Mathematics Education*, **26.2**, 115-141.
- GRAY, E. M., PITTA, D., & TALL, D. (1997). The nature of the object as an integral component of numerical processes. *Proceedings of PME 21*, **vol.1**, 115-130.
- Harel, G., & DUBINSKY, E. (Eds.). (1992). *The concept of function; aspects of epistemology and pedagogy*. MAA Notes No. 28.
- HAUGELAND, J. (1987). An overview of the frame problem, dans *The robot's dilemma: The frame problem in artificial intelligence* (Ed. Z. Pylyshyn), 77-95, Ablex Publishing Corporation, Norwood, New Jersey.
- KALOGIROU, P., ELIA, I., & GAGATSIS A. (2009). Spatial Ability and Geometrical Figure Understanding, dans *Cyprus and France research in mathematics education* (Eds. Gagatsis, Kuzniak, Deliyianni, & Vivier), 105-118, Nicosia: University of Cyprus, Cyprus.
- KUZNIAK, A. (2009). Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France, dans *Cyprus and France Research in Mathematics Education* (Eds. Gagatsis, Kuzniak, Deliyianni, & Vivier), 71-89, Nicosia, University of Cyprus, Cyprus.
- KUZNIAK A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **16**, 9 – 24.
- MCGEE, M. G. (1979). Human spatial abilities: Psychometric studies and environmental, genetic, hormonal, and neurological influences, *Psychological Bulletin* **86**, 889-918.
- MECK, W. H., & CHURCH, R. M. (1983). A mode control model of counting and timing processes, *Journal of Experimental Psychology* **9**, 320-334.
- MECK, W. H., CHURCH, R. M., & GIBBON, J. (1985). Temporal integration in duration and number discrimination, *Journal of Experimental Psychology: Animal Behavior Processes* **11**, 591-597.

MESQUITA, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representations in geometry, *Journal of Mathematical Behavior* **17.2**, 183-195.

MONOYIOU, A., & GAGATSI, A. (2009). A Five-dimensional model for the understanding of function, dans *Cyprus and France research in mathematics education* (Eds. Gagatsis, Kuzniak, Deliyanni, & Vivier), 223-232, Nicosia, University of Cyprus, Cyprus.

MONOYIOU, A., & GAGATSI, A. (2008). The stability of students; approaches in function problem solving: An algebraic and a coordinated approach, dans *Conference of five cities: Research in mathematics education* (Eds. Gagatsis), 3-12, Nicosia, Cyprus.

NIEDER, A., FREEDMAN, D. J., & MILLER, E. K.

(2002). Representation of the quantity of visual items in the primate prefrontal cortex. *Science*, **297**, 1708-1712.

SERON, X., PESENTI, M., NOEL, M-P., DELOCHE, G., & CORNET, J-A. (1992). Images of numbers, or "When 98 is upper left and 6 blue sky." *Cognition*, **44**, 159-196.

SFARD, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in mathematics*, **22**, 1-36.

TALL, D., GRAY, E., BIN ALI, M., DEMAROIS, PH., MCGROWEN, M., PITTA, D., PINTO, M., THOMAS, M., & YUSOF, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, **1**, 80-104.

VANDEBROUCK, F. (2010), Espaces Mathématiques de Travail en Analyse, dans *Symposium Franco-Cypriote "Mathematical Working Space"*, 157-174, Paris, France.

WHALEN, J., GALLISTEL, C. R., & GELMAN, R. (1999). Nonverbal counting in humans: the psychophysics of number representation. *Psychological Science*, **10.2**, 130-137.

ATHANASSIOS RAFTOPOULOS ET DEMETRIS PORTIDES

araftop@ucy.ac.cy

portides@ucy.ac.cy

INFORMATIONS AUX AUTEURS

Les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives sont une revue annuelle éditée par l'IREM de Strasbourg, Université Louis Pasteur. Elle a été fondée en 1988 par R. Duval et F. Pluvinage.

La revue publie des articles de recherches propres à développer et à stimuler la réflexion sur l'enseignement des mathématiques en direction de tous les types de publics : écoliers, lycéens, étudiants et adultes en formation. Les présentations de recherches concernant la formation initiale et continue des enseignants et sur l'enseignement dans des contextes socioculturels variés sont les bienvenues.

Les articles peuvent être de nature théorique en relation étroite avec une expérimentation dans le cadre d'un enseignement. Ils peuvent être aussi des comptes rendus d'une expérience d'enseignement appuyée sur un cadre théorique explicite. Les domaines théoriques de références sont issus de la didactique des mathématiques. Lorsqu'ils s'insèrent dans une problématique d'enseignement des mathématiques, les travaux peuvent aussi prendre appui sur la psychologie cognitive et sur la linguistique.

Les articles ne doivent généralement pas dépasser vingt pages mais exceptionnellement ils peuvent être plus longs et permettre ainsi à l'auteur de développer un point de vue original et émergeant dans le champ de recherche. Il est aussi possible de présenter une synthèse des recherches menées dans un domaine particulier de la didactique des mathématiques. Les articles proposés sont soumis à un arbitrage avant publication. Le cas échéant, des demandes de modifications, aménagements ou compléments des textes présentés seront adressées aux auteurs.

La langue de la revue est le français. Des articles peuvent être publiés dans d'autres langues (notamment anglais et espagnol) ; ils seront alors précédés d'une présentation analytique rédigée en français par l'auteur ou par l'équipe de rédaction.

Les articles proposés pour publication dans les *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* de l'IREM de Strasbourg peuvent être transmis sous forme de documents attachés à des messages électroniques. Il convient d'adresser ces messages à l'un des rédacteurs en chef, à l'adresse électronique indiquée ci-après.

Un modèle d'article au format des Annales se trouve sous forme de fichier *word* à l'adresse URL :

http://irem/data/publi/annales/templates/modele_annales_didactiques.doc

Après ouverture et enregistrement sous un nouveau nom, il permet d'introduire par copier-coller aux emplacements appropriés, en respectant les fontes de caractères et les tailles :

- le nom de du ou des auteurs ;
- le titre complet ;
- le titre éventuellement abrégé, figurant dans l'en-tête des pages impaires ;
- le bloc « abstract – résumé – mots clés » ;
- le texte proprement dit de l'article proposé ;
- la bibliographie sous forme normalisée (s'inspirer du modèle où apparaissent les différents cas pour la présentation des références).

Pour composer un article sans utiliser le modèle, par exemple en recourant à LaTeX, voici des précisions sur le format des pages et les caractères utilisés.

Feuille A4 portrait, avec les marges suivantes :

Haut :	3 cm
Bas :	8 cm
Gauche :	4 cm
Droite :	4 cm
Reliure :	0 cm
En tête :	2 cm
Pied de page :	7 cm

Caractères :

- Auteur(s) en première page : Arial 12 points, gras, petite capitale, Centré ;
- Titre en première page : Arial 14 points, petite capitale, Centré ;
- Abstract – Résumé – Mots clés : Times New Roman 10 points ;
- En-tête : Arial 9 points ;
- Corps de texte : Times New Roman 11 points.

Pour la pagination d'un article proposé, commencer par le numéro 1.

Adresses électroniques :

- pour des commandes de volumes `mailto:bibirem@math.u-strasbg.fr`
- pour des propositions d'articles `mailto:`

`kuzniak@math.jussieu.fr`
`francois.pluvinage@math.unistra.fr`