ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

Revue internationale de didactique des mathématiques

Rédacteurs en chef : ALAIN KUZNIAK & FRANÇOIS PLUVINAGE

IREM de Strasbourg
Université de Strasbourg

Volume 16 **2011**

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
ISSN 0987 - 7576

Éditeur

IREM de Strasbourg
Université de Strasbourg
7, rue René Descartes
F - 67084 Strasbourg CEDEX
Tel. +33 (0)3 68 85 01 30
Fax. +33 (0)3 68 85 01 65
Bibliothèque : +33 (0)3 68 85 01 61
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
VOLUME 16 – 2011

SOMMAIRE

ÉDITORIAL

Ce volume des Annales de Didactique et de Sciences Cognitives est consacré pour l'essentiel à des articles rédigés à la suite du symposium franco-chypriote de 2010, organisé conjointement par le laboratoire de didactique André Revuz de l'Université Paris Diderot et l'Université de Chypre. Ce symposium a aussi bénéficié de contributions de chercheurs de pays autres que ceux des organisateurs. Ainsi, Canada, Espagne et Suisse y ont été représentés. Précisons que le présent volume n'est pas un volume d'actes du symposium : il s'agit bel et bien d'articles, pour lesquels les arbitrages ont été aussi rigoureux que de coutume dans les Annales. Au passage, j'en profite pour remercier très chaleureusement les relecteurs, dont la contribution est essentielle pour la qualité de la revue. La quasi-totalité des observations reçues relève non seulement d'un regard critique, ce qui est normal, mais aussi d'un esprit constructif, attentif à repérer en quoi un article proposé constitue un apport et peut être, si besoin est, davantage mis en valeur par son ou ses auteurs. Certains des textes issus du symposium sont d'ailleurs encore en travail et pourront en conséquence être publiés dans le prochain volume des Annales.

Exceptionnellement, cet éditorial n'est signé que par un seul des co-directeurs scientifiques de la revue, pour une raison évidente : le symposium franco-chypriote a été très fortement orienté par les idées d'Alain Kuzniak, auteur par ailleurs d'un article de ce volume et co-auteur d'un second. En effet, une question abondamment envisagée lors du symposium a été celle de prendre en compte des espaces de travail mathématique généralisant les espaces de travail géométrique (ETG en abrégé) qu'il décrit. Il eut ainsi été difficile à Alain Kuzniak lui-même d'attester que le contenu du présent volume ne le doit en rien à une complaisance particulière à son égard, mais seulement à la fécondité des points de vue qu'il présente et des recherches qu'il conduit ou dirige, depuis un certain nombre d'années maintenant. Je suis convaincu qu'aussi bien l'observateur d'une classe avec son professeur et ses élèves que le formateur d'enseignants peuvent gagner à entrer dans la manière de voir le travail mathématique qu'il propose. C'est ce qui compte.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 16, p. 7 – 8.

Dans le sens d'une extension des espaces de travail mathématique, une réflexion qu'il convient de mener porte sur la flexibilité, consistant pour un individu à modifier son attitude mentale, ses stratégies et ses représentations afin de s'ajuster aux besoins d'une situation donnée. Une telle réflexion est présentée dans le deuxième article de ce volume, qui s'appuie sur les travaux conduits par le groupe impulsé par Athanasios Gagatsis et dont la portée est générale même si les exemples cités concernent plutôt l'enseignement du premier degré.

On verra à la lecture de ce volume que les thèmes abordés avec le regard proposé touchent les contenus de niveaux d'apprentissage qui vont, comme le proclame une expression connue, *de la maternelle à l'université*. C'est, sinon une preuve, du moins un argument fort en faveur de la richesse du regard sur les espaces de travail.

François PLUVINAGE

ALAIN KUZNIAK

L'ESPACE DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE ET SES GÉNÈSES

Abstract. The Mathematical Work Space and its Geneses. In the paper, the notion of mathematical work space is based on some characteristics brought out by previous studies on geometrical work. The mathematical work space is structured on two fundamental levels: the epistemological level in relationship to mathematical contents and the cognitive level linked to visualization, construction and proof processes. To articulate both levels and come into mathematical work three main geneses are considered: a semiotic genesis, an instrumental genesis and a discursive genesis conveying reasoning.

Résumé. Dans cet article, la notion d'espace de travail mathématique est introduite à partir de certaines caractéristiques que les études sur le travail géométrique ont permis de dégager. Deux niveaux fondamentaux structurent l'espace de travail mathématique : un niveau épistémologique qui s'attache au contenu mathématique et un niveau cognitif relié aux processus de visualisation, de construction et de preuve. Pour articuler ces deux niveaux et permettre la réalisation du travail mathématique, trois genèses principales sont retenues : une genèse sémiotique, une genèse instrumentale et enfin une genèse discursive supportant le raisonnement.

Mots-clés. Travail mathématique, genèse instrumentale, genèse sémiotique, genèse discursive, paradigmes.

Introduction

La rénovation de l'enseignement des mathématiques initiée à partir des années 70 en réaction à la fois à la réforme des mathématiques modernes et à l'enseignement classique, a mis l'activité de l'élève au cœur des préoccupations du système d'enseignement. N'étant plus seulement destiné à absorber des connaissances mais invité à les construire et à les organiser, l'élève acquérait d'un seul coup un statut proche du chercheur permettant à juste titre de le qualifier de mathématicien en herbe. Dans le même temps, une réflexion plus approfondie sur la nature de l'apprentissage conduisait également à reconsidérer le travail de l'élève.

L'insistance sur l'activité de l'élève a mis en relief deux aspects à la fois complémentaires et très différents du travail de l'élève. D'une part, il s'agit de considérer son travail d'apprenant dans le cadre scolaire avec des professeurs, des devoirs, des évaluations en contexte social. D'autre part, il importe de s'assurer qu'un travail de nature mathématique est effectivement produit par l'élève. Dans cet article, nous nous attacherons essentiellement à ce deuxième point et notre contribution visera à préciser la notion d'Espace de Travail Mathématique (ETM) dans la continuité de nos recherches sur le travail géométrique.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 16, p. 9 – 24.

Nous commencerons par déterminer ce que nous entendons par travail mathématique puis nous reviendrons ensuite sur certains éléments caractéristiques des Espaces de Travail Géométrique en envisageant leur possible extension dans le cadre plus général d'un Espace de Travail Mathématique. Il s'agit d'une première contribution exploratoire complétée notamment sur les domaines autres que géométrique par certaines des contributions de cet ouvrage.

1. Le travail mathématique dans une perspective didactique

1.1. L'activité du mathématicien comme modèle pour le travail mathématique

C'est un des apports majeurs de la philosophie et de l'histoire des mathématiques que de ne plus considérer les mathématiques comme une science intemporelle et déconnectée de la société qui a permis leur développement. L'introduction par Reichenbach (1938) des contextes de découverte et de justification a mis en évidence deux facettes du travail du mathématicien. Le premier contexte précise les conditions qui permettent la découverte et l'élaboration des concepts à partir de la résolution des problèmes. Le second s'attache à la façon dont un résultat est présenté, défendu et justifié dans la communauté qui entoure le chercheur. Pour Reichenbach, le contexte de découverte ne relève pas à proprement parler du pur domaine scientifique et il insiste sur une approche de nature psychologique dans la filiation d'essais sur l'invention comme celui d'Hadamard (1908). Cependant à la suite des travaux menés, entre autres, par Lakatos et Kuhn, on peut aussi enrichir ce contexte de découverte, en l'envisageant de manière plus sociologique comme un contexte destiné à favoriser le travail des mathématiciens, *ces êtres humains qui font avancer la compréhension humaine des mathématiques* (Thurston, 1995, p. 29).

De manière plus précise, Giaquinto (2005) distingue plusieurs phases dans l'activité globale du mathématicien : la découverte, l'explication, la justification et les applications. Dans chacune de ces phases, il repère des moments qui permettent de passer de l'élaboration du savoir mathématique à sa diffusion la plus large dans la communauté des mathématiciens et au-delà de toucher professeurs et étudiants. Il insiste aussi sur la nécessité pour un chercheur de s'approprier les découvertes des autres chercheurs. Dans la conception classique de l'enseignement, l'élève est essentiellement concerné par le travail d'appropriation mais ce n'est plus le cas si l'on souhaite le rendre plus actif dans la construction de son savoir.

1.2. L'œuvre mathématique et son style

Définir les mathématiques à partir de l'activité des mathématiciens oblige à porter le regard sur les résultats de ce travail pour mieux comprendre la nature et les contenus des mathématiques. Pour cela, il faudra, comme le suggère Granger (1963), étudier l'œuvre, fruit du travail élaboré par les mathématiciens. Cette œuvre est une mise en forme de concepts abstraits qui nécessite une codification du discours. Granger appelle *style* la manière particulière de présenter la connaissance rationnelle en la soumettant à des normes codifiées qui donnent aux objets un sens déterminé. Ces normes contribuent à fixer l'orientation du travail sur la résolution des problèmes. Elles permettent d'exclure certaines pratiques en limitant les possibilités d'interprétation et donc d'exploration du lecteur ou de l'étudiant. Ainsi, la notion de style que nous utilisons, n'est pas désincarnée et uniquement rhétorique. Elle doit cependant être clairement distinguée de celle de style de pensée introduite par Fleck ou Crombie (Hacking, 2002-2003) dans le cadre d'études plus générales sur la pensée scientifique. Pour ces auteurs, le style mathématique apparaît comme un style scientifique particulier que Hacking précise grâce à la notion de style de raisonnement scientifique avec l'idée de style géométrique et de style combinatoire. Le style mathématique se différencie ainsi d'autres styles scientifiques comme le style expérimental du laboratoire. De fait, nous verrons plus loin (1.4.) que la notion de paradigme nous évite la référence aux styles de pensée.

Les objets et les résultats produits par le travail mathématique se répartissent en domaines qui structurent la recherche en mathématiques et permettent de rendre compte de la diversité de l'activité mathématicienne.

1.3. Domaines mathématiques

La différenciation des domaines mathématiques est liée à la nature des objets étudiés mais plus fondamentalement il est aussi nécessaire de connaître les fondements épistémologiques de ces différences. Pour répondre à cette question dans le cas de la géométrie (Kuzniak, 2006), nous avons retenu l'idée de problème épistémologique développé par Desanti (1975). Ces problèmes sont définis comme des problèmes surgissant à l'intérieur des sciences et qui ne peuvent être résolus à l'intérieur du système formé par ces mêmes sciences. En s'appuyant sur ses travaux sur les fondements de l'analyse, Desanti distingue ensuite plusieurs niveaux de problèmes. Ces niveaux dépendent de leur relation plus ou moins étroite à l'objet même de la théorie. Dans le cas de la géométrie élémentaire considérée comme la science de l'espace, le premier problème à envisager est justement celui de la relation de la géométrie avec l'espace. Un autre type de problèmes plus abstraits, de deuxième niveau, porte sur la nature des objets et des relations entre les constituants du modèle mathématique, sur son optimisation, sur sa cohérence formelle. Dans une perspective didactique sur la géométrie, ces deux types de problèmes renvoient à une mise en place de la géométrie enseignée vue soit comme le modèle de l'espace, soit comme un exemple de système déductif complet.

Pour nous en tenir aux thèmes les plus travaillés en didactique des mathématiques, en plus de la géométrie apparaissent un certain nombre de domaines : arithmétique, algèbre, analyse, probabilités et statistiques. Chacun de ces domaines sera relié à des thèmes non mathématiques comme le dénombrement, la symbolisation, la généralisation, la variation, le hasard, la décision. Cette liste n'épuise pas le sujet mais elle montre déjà la complexité et l'hétérogénéité des objets en jeu lorsqu'on se préoccupe du travail mathématique en général.

1.4. L'approche par paradigmes

Les domaines mathématiques se constituent par l'agrégation et l'organisation des connaissances et, comme le signale Brousseau (2002), cette organisation ne correspondra pas nécessairement à celle qui, ensuite, sera mise en œuvre dans l’enseignement. Un domaine mathématique va faire l'objet de différentes interprétations lorsqu'il sera l'objet d'une transposition didactique pour être enseigné et ces interprétations dépendront aussi des institutions scolaires. Le cas de la géométrie montre bien qu'il n'est pas possible d'utiliser de manière univoque le terme de géométrie tant ce mot revêt des significations différentes qui dépendent à la fois de l'évolution des mathématiques et des institutions scolaires. Pour prendre en compte cette diversité de points de vue, nous avons introduit dans le champ de la didactique de la géométrie une approche par les paradigmes.

L’idée de paradigme géométrique s’inspire de la notion de paradigme introduite par Kuhn (1962) dans son ouvrage sur la structure des révolutions scientifiques. Un paradigme désignera pour nous l’ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. L'accès au paradigme se fera par la rencontre des œuvres des mathématiciens et donc de leur style et passera par la résolution d'un certain nombre de problèmes caractéristiques que Kuhn qualifie d'exemplaires.

1.5. Travail mathématique et résolution de problèmes

La résolution des problèmes occupe une place essentielle dans le travail des mathématiciens et aussi dans l'enseignement des mathématiques. Par les problèmes, les élèves et les étudiants vont mettre en œuvre des savoirs et des techniques dépendants du paradigme retenu. Il est essentiel d'observer les tâches demandées qui permettent à la fois de décrire le travail d'un point de vue mathématique mais aussi d'un point de vue didactique.

La notion de tâche s'est imposée en didactique des mathématiques et on peut l'envisager à travers deux approches, selon nous complémentaires : celle des praxéologies (Bosch & Chevallard, 1999) et celle de la double approche, ergonomique et didactique (Robert, 2008). Dans le premier cas, une étude fine des types de tâches avec leur cortège de techniques et de savoirs théoriques, permet de dégager la structuration du domaine mathématique. La deuxième s'intéresse davantage à l'écart entre ce qui est attendu de l'élève et ce qu'il réalise effectivement, elle nécessite une observation des pratiques géométriques et mathématiques proposées dans le cadre scolaire et dans des cadres professionnel et quotidien si l'on tient à s'attacher à l'usage des mathématiques dans la société.

2. La notion d'espace de travail dans le cadre de la didactique de la géométrie

Pour avancer vers la notion générale d'Espace de Travail Mathématique, nous allons nous appuyer sur nos recherches en didactique de la géométrie qui nous ont conduits à introduire les Espaces de Travail Géométrique (ETG). Nous avons appelé *espace de travail géométrique,* un environnement organisé pour permettre le travail des personnes résolvant des problèmes géométriques. Ces individus pourront être suivant les cas un expert idéal (le mathématicien professionnel) ou bien un étudiant ou un élève. Les problèmes ne font pas partie de l'espace de travail mais ils en sont la raison d'être et aussi l'activateur. Ils en sont la raison d'être car l'ETG doit être un moyen pour traiter et résoudre les problèmes. Ils en sont aussi un activateur car ils vont permettre la structuration tant institutionnelle que personnelle de l'ETG tel que nous le concevons.

Les architectes définissent les espaces de travail comme des lieux à construire pour que l'utilisateur puisse y exercer au mieux son travail (Lautier, 1999). Pour aider à la conception d'un espace de travail, Lautier propose de le penser suivant trois grands axes : un dispositif matériel, une organisation laissée à la charge du concepteur de l'espace et enfin une représentation qui prend en compte la façon dont les utilisateurs intègrent cet espace. Il n'est naturellement pas question de reprendre sans modifications cette structuration orientée vers le travail productif, mais il nous semble nécessaire de bien avoir à l'esprit ces différentes dimensions, certaines étant matérielles et d'autres à la fois mentales et intellectuelles.

2.1. Le niveau des composantes et sa genèse épistémologique

Pour définir l'espace de travail géométrique, nous avons introduit trois composantes caractéristiques de l'activité géométrique dans sa dimension purement mathématique. Ces trois composantes en interaction dans un contexte donné sont les suivantes :

- un espace réel et local comme support matériel avec un ensemble d'objets concrets et tangibles ;
- un ensemble d'artefacts tels que des instruments de dessin ou des logiciels ;
- un système théorique de référence basé sur des définitions et des propriétés.

Ces composantes ne sont pas juxtaposées, elles doivent être organisées avec un but déterminé ; qui va dépendre du domaine mathématique dans sa dimension épistémologique ; d'où l'appellation de plan épistémologique que nous sommes enclins à donner à ce premier niveau. Dans notre cadre théorique, la notion de paradigmes oriente et structure l'organisation de ce premier niveau. Le paradigme de référence permet d'interpréter les contenus des composantes qui en retour par leurs fonctions différentes participent à la spécificité des différents paradigmes. Le fait pour une communauté d'individus de s'accorder sur un paradigme donné pour formuler des problèmes et organiser leurs solutions en privilégiant certains outils ou certaines manières de pensée, ce fait débouche sur ce que nous conviendrons d'appeler l'ETG de référence. Pour connaître cet ETG, il faudra dégager ces manières de faire et de voir en décrivant notamment le style du travail géométrique avec ses règles de discours, de traitement et de présentation. Il faudra aussi expliciter le cadre théorique mathématique qui fonde cette référence. Ce cadre est de plus en plus caché dans l'enseignement actuel notamment du fait de l'apparition des logiciels mais aussi à la suite de la perte de vigilance épistémologique que la communauté mathématique savante n'assure plus.

2.2. Le niveau cognitif

La géométrie enseignée n'est pas un corpus désincarné de propriétés et d'objets réduits à des signifiants manipulables par des systèmes formels, elle est d'abord et principalement une activité humaine. Ainsi, il est essentiel de comprendre comment des communautés d'individus mais aussi des individus particuliers utilisent et s'approprient les connaissances géométriques dans leur pratique de la discipline. Cela nous a conduit à introduire un deuxième niveau centré sur l'articulation cognitive des composantes de l'ETG.

L'ouverture sur le champ cognitif que nous proposons, va se faire en étroite relation avec le niveau épistémologique et les composantes que nous avons introduites. Pour ce faire, nous avons pu nous appuyer sur les travaux de Gonseth (1945-1952) et de Duval (1995). De Duval, nous avons adapté l'idée de trois processus cognitifs impliqués dans l'activité géométrique.

- Un processus de visualisation en relation avec la représentation de l'espace et le support matériel ;
- un processus de construction déterminé par les instruments utilisés (règles, compas, *etc*.) et les configurations géométriques ;
- un processus discursif qui produit des argumentations et des preuves.

Nous devons à Gonseth l'idée de concevoir la géométrie comme une synthèse entre différents modes de connaissance de l'espace sur lesquels le sujet pourra s'appuyer à un moment donné : l'intuition, l'expérience et la déduction (Houdement & Kuzniak, 1999).

L'espace réel sera plus particulièrement lié à la visualisation par l'intuition, les artefacts à la construction par l'expérience, le modèle théorique à la notion de preuve par la déduction. Cela nous conduit à une première organisation que nous schématiserons ainsi.

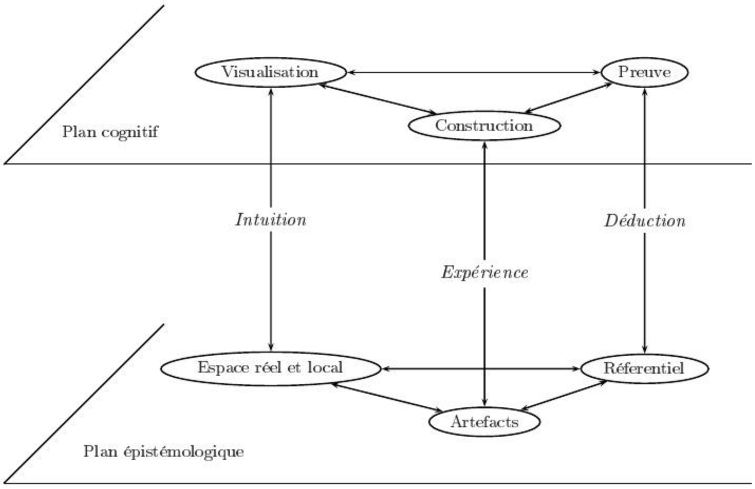


Figure 1 : L'espace de travail géométrique.

3. Décrire et construire l'Espace de Travail Géométrique

3.1. Différents niveaux d'ETG

Dans une institution scolaire donnée, la résolution d'un problème géométrique suppose qu'un ETG que nous qualifierons d'idoine, a pu être organisé pour permettre à un élève de s'engager dans la résolution du problème. Cet ETG idoine doit nécessairement remplir deux conditions, d'une part, il doit permettre de travailler dans le paradigme géométrique correspondant à la problématique visée, d'autre part, il est bien construit dans le sens où ses différentes composantes sont organisées de manière valide. Son utilisateur-concepteur est un expert idéal qui joue ici un rôle semblable à celui de l'architecte qui conçoit un espace de travail pour des utilisateurs potentiels futurs. Lorsque le problème est posé, non plus à un expert idéal, mais à un individu réel (l'élève, l'étudiant ou le professeur), le traitement du problème va s'effectuer dans ce que nous avons appelé un ETG personnel. Le travail mathématique dans un cadre scolaire peut être décrit grâce à ces trois niveaux d'ETG. La géométrie visée par l'institution est décrite dans les ETG de référence. Ces derniers doivent être aménagés en ETG idoine pour permettre une mise en place effective dans les classes où chaque élève travaille dans son ETG personnel.

3.2. Les différentes genèses de l'espace de travail géométrique personnel

3.2.1. Un double point de vue sur les genèses

L'appropriation du travail géométrique se fait graduellement et passe par la mise en place progressive d'un ETG. La genèse globale de l'ETG suppose un ensemble de genèses qui ne sont pas indépendantes et sont en relation avec les composantes de l'espace de travail géométrique ou certains des processus cognitifs indispensables à son fonctionnement. L'activation et le contrôle de ces genèses peut être conçu au niveau des enseignants (niveau idoine) ou en amont (niveau de référence). Nous allons examiner des entrées possibles dans le travail géométrique en précisant à chaque fois les genèses qu'elles mettent en jeu.

3.2.2. L'entrée perceptive ou la question de la visualisation : genèse figurale

La question de la visualisation est revenue récemment au premier plan des préoccupations en mathématique et en didactique après ce qu'il faut bien appeler une longue période d'ostracisme et d'élimination pour cause de suspicion. En effet, au XIX^{e} siècle, les cas exceptionnels qui avaient été jusqu'alors négligés, devinrent des objets d'études et de contre-exemples pour la mise en place de théories générales. Cette apparition des monstres dans l'horizon mathématique a conduit à remettre en cause la trop grande évidence apportée par les images notamment dans le cas de l'analyse. Dès le début du XX^{e}, une remise en perspective du rôle des images s'est opérée dans certains domaines mathématiques et, par exemple, des courbes ont pu être introduites pour comprendre de manière géométrique certains théorèmes en apparence étrange comme le fait qu'une fonction pouvait être partout continue et n'être dérivable en aucun point. Aujourd'hui, grâce aux outils informatiques et vidéos, la notion de preuve peut s'articuler assez rapidement à la visualisation et il est des approches didactiques qui insistent sur la mise en œuvre de ce type de preuves par l'image basées sur des éléments visuels sans aucun commentaire (Casselman, 2000).

Dans la géométrie enseignée à l'école obligatoire, les figures sont les supports visuels privilégiés du travail géométrique ce qui nous a conduit, de manière un peu restrictive, à introduire la genèse figurale dans le cadre des ETG pour décrire le processus sémiotique qui est associé à la pensée visuelle et qui s'opère en géométrie.

3.2.3. L'entrée expérimentale et la place des artefacts : genèse instrumentale

Le regard porté sur les instruments traditionnels de construction et de mesure dépend du paradigme en jeu et classiquement ces instruments permettaient essentiellement de vérifier ou d'illustrer les propriétés des objets étudiés. L'arrivée des outils informatiques a complètement renouvelé la question de la place des instruments dans l'activité mathématique en facilitant leur emploi et offrant la possibilité de réaliser des preuves dynamiques. Cet aspect est lié à la question de la preuve évoquée dans le paragraphe précédant mais s'y ajoute une dimension procédurale qui accroît encore plus la force de la preuve par des images animées quand le seul recours à la perception statique était insuffisant pour convaincre. Ainsi des petits films montrent des découpages pour effectuer des preuves du théorème de Pythagore ou permettent des réalisations d'expériences très complexes sans l'outil informatique comme le retournement d'une sphère. Cette mise en œuvre dynamique crée un « discours » explicatif complémentaire du seul texte écrit longtemps privilégié, au moins dans la tradition occidentale.
La genèse instrumentale repose sur des outils dont l'usage n'est pas transparent et immédiat. Il nécessite un certain nombre de processus qui ont pu être décrit dans l'approche instrumentale (Artigue, 2002)

3.2.4. L'entrée probatoire ou la question de l'inférence et du langage : genèse discursive du raisonnement

Le processus de géométrisation qui associe des formes géométriques aux concepts mathématiques est au cœur de l'acte de compréhension des mathématiques (Thom, 1995) et nous avons vu la force de certaines images ou de certaines expériences pour acquérir ou renforcer la certitude sur la validité d'un résultat annoncé. Cependant, comment s'assurer qu'un étudiant a compris la logique d'une preuve lorsque celle-ci n'est pas exprimée avec des mots et repose sur des recompositions d'images qui peuvent n'être que des illusions ? Un discours d'explicitation est nécessaire et il devient indispensable pour argumenter et pour convaincre autrui. L'articulation entre visualisation et raisonnement suppose la création d'espaces de travail géométrique où le raisonnement s'appuie de manière explicite sur des diagrammes en une sorte de raisonnement diagrammatique où image et discours s'appuieraient l'un sur l'autre (Miller, 2007).

Naturellement, la nature et l'importance des formulations écrites diffèrent d'un paradigme à l'autre et dans les approches les plus axiomatiques, il est possible d'affirmer qu'un objet mathématique n'existe que dans et par sa définition. Cela n'est bien sûr pas aussi net dans l'approche empiriste où les objets mathématiques se constituent à partir d'une fréquentation de quelques objets plus ou moins prototypiques.

3.2.5. Quelle synthèse géométrique ?

Des modes d'approche différents du travail géométrique vont exister en fonction des genèses privilégiées et ils pourront induire des synthèses géométriques différentes en relation avec les paradigmes géométriques mais aussi avec les choix didactiques des professeurs et les compétences des d'élèves. Un de nos thèmes de recherches est de décrire et de caractériser les différents ETG que produisent ces entrées dans la géométrie. Duval (2005) a proposé une approche métaphorique qui rejoint nos préoccupations en utilisant des approches qu'il identifie comme celles du botaniste, de l'arpenteur, du constructeur et de l'inventeur-bricoleur.

En nous appuyant sur notre cadre théorique, (Chacon & Kuzniak, 2010) nous avons aussi décrit des parcours d'étudiants dans le cadre d'un enseignement utilisant les logiciels. Ces parcours peuvent être visualisés grâce au diagramme suivant qui résume notre conception évolutive et génétique de l'ETG.

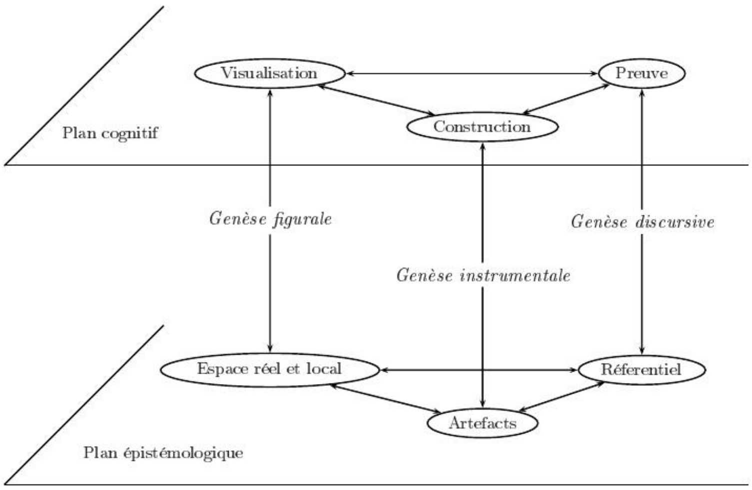


Figure 2 : Une approche génétique de l'ETG.

4. Fondements de l'Espace de Travail Mathématique

4.1. Niveaux épistémologique et cognitif

Les recherches engagées dans d'autres domaines mathématiques et présentées, pour certaines d'entre elles, dans cet ouvrage incitent à une réflexion sur ce que pourrait être un Espace de Travail Mathématique sans toute fois le déterminer de manière figée. Dans cette partie, je donnerai des éléments sur la transposition au travail mathématique général de la structure particulière retenue pour les ETG.

Tout d'abord, la définition même des ETG est très liée aux particularités de la géométrie. Certains éléments de l'ETG qui se rapportent à l'espace et à la figure ne semblent pas pouvoir se généraliser aux autres domaines comme les probabilités ou l'analyse où les enjeux majeurs portent soit sur le hasard ou la décision soit sur la variation, la continuité ou l'infini. Aussi, il faut bien comprendre que la proposition de structuration de l'ETM qui va suivre passe obligatoirement par une instanciation dans un domaine mathématique déterminé. Autrement dit, plus que la notion générale d'ETM, toute étude didactique suppose la description d'un Espace de Travail pour le domaine abordé. Le cadre des ETM se présente comme une coquille méthodologique sur laquelle il sera possible de s'appuyer pour développer de nouveaux Espaces de Travail spécifiques.

De notre étude des ETG, nous retenons l'idée d'articuler dans l'espace de travail deux niveaux, l'un de nature épistémologique en rapport étroit avec les contenus mathématiques du domaine étudié et l'autre de nature cognitive. Le travail mathématique est le résultat d'un processus progressif de genèse qui va permettre une articulation interne aux niveaux épistémologique et cognitif ainsi que l'articulation de ces deux niveaux.

4.2. La composante sémiotique

Si les artefacts et le référentiel théorique restent deux composantes de base de tout plan épistémologique associé à un domaine mathématique particulier, la composante liée à l'espace et aux configurations géométriques doit être modifiée. Dans le cas des ETG, cette composante est étroitement liée à la forme visible et concrète des objets propres de la géométrie. Pour étendre cette composante à d'autres domaines mathématiques et en accord avec une conception des mathématiques fondées sur des représentations sémiotiques, nous pensons pertinent d'introduire une notion de signe ou representamen au sens de Peirce. Rappelons (Eco, 2006) que le representamen ou signe est une chose qui représente une autre chose : son objet. L'intérêt de l'idée de representamen est qu'il peut être relié à l'objet sous des formes plus ou moins abstraites : icônes, indices et symboles.
Un signe renvoie à son objet de façon iconique lorsqu'il évoque son objet en vertu de sa ressemblance mais aussi du fait que ses propriétés intrinsèques correspondent d'une certaine façon aux propriétés de l'objet (Eco, p. 63). Il renvoie à son objet de manière indicielle lorsqu'il entretient un rapport physique avec l'objet qu'il représente comme un coup frappé à la porte est l'indice d'une visite ou le symptôme d'une maladie est l'indice de cette maladie. Un signe est un symbole lorsqu'il renvoie à son objet en vertu de règles. Ces dernières peuvent avoir été formulées *a priori*, par convention, ou s'être constituée *a posteriori*, par fréquentation et habitude culturelle.

Les mathématiques sont généralement concernées par le niveau symbolique mais dans l'apprentissage et dans une conception empirique des mathématiques, certains signes peuvent avoir une signification de type iconique ou indicielle. C'est, par exemple, le cas des figures en géométrie ou des dés en probabilités. D'autre part, ces signes vont se constituer en registres de représentation sémiotique pour permettre un travail qu'on pourra qualifier de mathématique. Dans ce processus, les signes peuvent acquérir des significations différentes en fonction du niveau de leur utilisateur comme dans le cas des formules algébriques qui synthétisent les relations entre objets et prennent un sens iconique pour l'utilisateur expert. Ces différents niveaux de relations avec l'objet renvoient à des distinctions sur les paradigmes utilisés : empirique, protoaxiomatique ou formel axiomatique.

4.3. Un point de vue génétique sur le travail mathématique

Pour décrire le niveau cognitif de l'ETM, nous retiendrons un processus cognitif en rapport avec l'importance que nous accordons aux signes et aux représentations dans la constitution du travail mathématique. Si nous pouvons clairement conserver les notions de preuve et de construction, le processus de visualisation nécessite une ré-interprétation fondamentale pour trouver sa place dans l'ETM. Il doit être associé à des schèmes et des opérations d'usage sur les signes dont rien ne prouve *a priori* qu'ils relèvent tous de la visualisation même dans une conception étendue de celle-ci.

Dans une première approche de la question, nous proposons le diagramme suivant pour décrire notre conception de l'ETM.

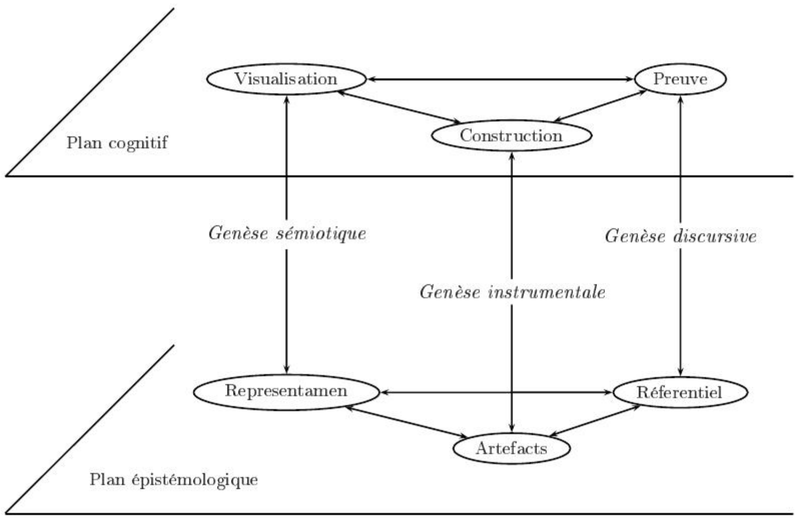


Figure 3 : L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses.

Nous avons introduit l'idée d'une genèse sémiotique associée aux représentations des objets mathématiques. Nous conservons le terme de visualisation qui devra être étroitement associé à l'intuition et aux schèmes opératoires sur les signes et les représentations.

Conclusion : vers une étude des Espaces de Travail Mathématique

Notre présentation de la notion d'Espace de Travail Mathématique (ETM) à partir de différentes genèses visait à mieux le définir et aussi à en préciser la portée exacte dans le champ de la didactique des mathématiques.

Une première genèse, interne à nos travaux en didactique, concerne le passage de la notion initiale d'ETG circonscrite à la géométrie à celle plus générale d'ETM. Autour de la notion centrale de travail, l'ETG articule les notions de travail géométrique et d'espace de travail. D'un côté, la première s'attache aux spécificités induites sur le travail par les contenus et la seconde définit la structure d'accueil qui permet ce travail particulier. Grâce à l'espace de travail, il est possible d'introduire trois regards sur le travail mathématique qui porteront sur le dispositif matériel avec ses constituants, l'organisation de cet espace par ses concepteurs et les représentations que s'en font les utilisateurs.

Les genèses épistémologique et cognitive vont structurer l'ETM en deux niveaux et aider à comprendre le jeu existant au sein de l'ETM.

- La genèse épistémologique permet de structurer l'organisation mathématique de l'ETM en lui donnant un sens que dans le cas de la géométrie les paradigmes géométriques aident à définir ;
- la genèse cognitive structure l'espace de travail quand il est donné à utiliser par un individu générique ou particulier. Là encore, l'exemple de la géométrie attire l'attention sur certains processus cognitifs comme la visualisation, la construction et le raisonnement discursif qui ont déjà montré leur importance dans le cadre des ETG.

Comment alors articuler de manière opératoire les deux niveaux épistémologiques et cognitifs afin de réaliser le travail mathématique attendu ? Il nous apparaît possible d'introduire trois genèses fondamentales étroitement liées au cadre théorique développé.

- Une genèse instrumentale qui permet de rendre opératoire les artefacts dans le processus constructif ;
- une genèse sémiotique basée sur les registres de représentation sémiotiques qui assure aux objets tangibles de l'ETM leur statut d'objets mathématiques opératoires ;

– une genèse discursive de la preuve qui va donner un sens aux propriétés pour les mettre au service du raisonnement mathématique.

L'approfondissement de la structure des ETM passe par des études ponctuelles du type de celles que nous avons réalisées en géométrie. Cette étude systématique des ETM devrait pouvoir s'appuyer sur différents outils qui ont été utilisés dans le cadre des ETG. Ces outils doivent notamment permettre :

– la description et la différenciation des ETM en tant que ETM de référence, idoine ou personnel ;
– la description des enjeux épistémologiques et didactiques propres à chaque domaine mathématique en relation avec une approche par paradigmes ;
– la description et le développement des différentes genèses à l'œuvre dans l'élaboration du travail mathématique ;
– la prise en compte de l'influence du contexte social et des interactions sur la constitution et l'évolution des ETM.

Bibliographie

ARTIGUE, M. (2002), Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **7(3)**, 245–274.

BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999), La sensibilité de l'activité scientifique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19/1**, 77–125.

BROUSSEAU, G. (2002), Cadres, jeux de cadres et théories des situations. *Actes de la journée Douady,* 73–82, Irem. Université Paris-Diderot.

CASSELMAN, B. (2000), Pictures and Proof, *Notices of the AMS*, **Nov 2000**, 1257-1266.

CHACON, I. & KUZNIAK, A. (2010), Les Espaces de Travail géométrique en contextes de connaissances technologiques et professionnelles, *Communication soumise au Symposium Franco-Chypriote de didactique,* Paris.

DESANTI, J.T. (1975), Qu'est ce qu'un problème épistémologique ? *La philosophie silencieuse*, 110–132, Le Seuil, Paris.

DOUADY, R. (1986), Jeux de cadre et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7/2**, 5–31.

DUVAL, R. (1995), Why to teach geometry, *Icmi Studies on Geometry*, Catania.

DUVAL, R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 5–54.

ECO, U. (1988), *Le signe. Introduction à un concept et à son histoire,* Labor, Bruxelles.

GIAQUINTO, M. (2005), Mathematical activity in *Visualization, Explanation and Reasoning styles in Mathematics*, 75–87, Springer.

GRANGER, G.G. (1963), *Essai d'une philosophie du style*, Paris, Armand Colin rééd. Odile Jacob, 1987.

GONSETH, F. (1945-1955), La géométrie et le problème de l'espace, Éditions du Griffon, Lausanne.

HACKING, I. (2002/2003), Des styles de raisonnements scientifiques. Résumés des cours. http://www.college-de-france.fr/media/ins_pro/UPL35835_ihackingres0203.pdf.

HADAMARD, J. (1908), *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, rééd Paris, Gabay 2007.

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (1999), Sur un cadre conceptuel inspiré de Gonseth et destiné à étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres, *Educational Studies in Mathematics*, **40/3**, 283–312.

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **11**, 175–193.

KUZNIAK, A. (2006), Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, ***6*(2)**, 167–188.

KUZNIAK, A. (2010), Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **15**.

LAUTIER, F. (1999), *Ergotopiques, Sur les espaces des lieux de travail*, Toulouse : Edition Octarès.

MILLER, N. (2007), *Euclid and his Twentieth Century Rivals: Diagrams in the Logic of Euclidean Geometry*, Stanford: CLSI Publications.

REICHENBACH, H. (1938), *Experience and Prediction*, Chicago: University of Chicago Press.

ROBERT, A. (2008), La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques, in *Vandebrouck (ed). La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouse : Octares.

THURSTON, W. P. (1995), On Proof and Progress in Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, **15(1)**, 29–35.

Alain KUZNIAK
Laboratoire de Didactique André Revuz
Université Paris-Diderot
Paris, France
kuzniak@math.jussieu.fr

ATHANASIOS GAGATSIS, ELENI DELIYIANNI,
ILIADA ELIA & ARETI PANAOURA

EXPLORER LA FLEXIBILITÉ : LE CAS DU DOMAINE NUMÉRIQUE

Abstract. Exploring Flexibility: The case of the numerical domain. Many studies investigate and discuss flexibility in mathematics learning. However researchers use the concept starting from different theoretical backgrounds and examine different dimensions leading to different results. The present paper studies the theoretical definitions stated for flexibility which are based on the mental operations, the strategies and the representations. The notion of experimental-operational flexibility is also pointed out. Research results regarding strategy flexibility and representational flexibility in mathematics learning are presented. Didactical implications are discussed and suggestions for further research are introduced.

Résumé. Beaucoup d'études de didactique des mathématiques analysent et discutent la flexibilité. Cependant, les chercheurs utilisent cette notion à partir de différentes conceptions théoriques et examinent divers aspects de la flexibilité menant à des résultats différents. La présente étude analyse les définitions théoriques de la flexibilité qui sont fondées sur les opérations mentales, les stratégies et les représentations. Est aussi mise en lumière la flexibilité expérimentale-opérationnelle. On présente les résultats de recherches en didactique des mathématiques sur la flexibilité stratégique et sur la flexibilité représentationnelle dans le domaine numérique et la résolution de problème à l'école primaire et au début du secondaire. Des implications didactiques sont discutées et des suggestions en vue de futures recherche sont proposées.

Mots-clés. Flexibilité cognitive, flexibilité stratégique, flexibilité représentationnelle.

---

1. Les Définitions théoriques de la flexibilité

1.1. Définitions fondées sur les opérations mentales

Selon le psychologue Demetriou (2004), la flexibilité renvoie à la quantité de variations qui peuvent être introduites par une personne dans les concepts et opérations mentales qu'elle possède déjà. La réussite et le développement de la compréhension, de l'apprentissage, du raisonnement et de la résolution de problèmes constituent pour une large part un facteur d'augmentation de la flexibilité (Demetriou, 2004). Krems (1995) définit la flexibilité cognitive comme la capacité d'une personne à ajuster la résolution du problème à la modification de la tâche. De même, Chevalier et Blaye (2008) considèrent que la flexibilité cognitive constitue la capacité de changer de posture mentale en réponse aux changements pertinents des signaux environnementaux.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 16, p. 25 — 43.

1.2. Définitions fondées sur des stratégies

Dans le cas de la résolution des problèmes à l'école primaire, Elia, van den Heuvel-Panhuizen et Kolovou (2009) proposent une définition opérationnelle de la flexibilité qui inclut différents changements de stratégies.

En particulier, ils associent la flexibilité stratégique au fait de changer de stratégie pendant la résolution d'un problème - flexibilité stratégique intra-tâche, ou entre les problèmes - flexibilité stratégique inter tâches. Il est intéressant de remarquer que, dans cette définition, ils ne relient pas la flexibilité stratégique avec la pertinence des stratégies de résolution du problème, assez proche quant à elle de la notion d'adaptation.

En fait, pour certains chercheurs, les notions de «flexibilité» et d'« adaptation» sont synonymes. D'autres chercheurs distinguent entre une utilisation flexible de stratégies, ce qui signifie que les individus font preuve de flexibilité dans le choix entre différentes stratégies mais ne sélectionnent pas nécessairement la stratégie la plus appropriée, et l'utilisation adaptative de stratégies, qui, de plus, inclut le choix de la stratégie la plus opportune (Heinze, Start et Verschaffel, 2009). Quoi qu'il en soit, Heinze et al (2009) indiquent que peuvent être considérées comme beaucoup plus critiquables les questions théoriques fondamentales suivantes : Quand une stratégie devrait-elle être considérée comme appropriée ? Selon quel critère pertinent ? Récemment, Verschaffel, Luwel, Torbeyns et Van Dooren (2009), pour préciser un choix stratégique flexible ou adaptatif, la définissent comme : «la sélection et l'usage conscient ou inconscient du choix stratégique de la solution la plus appropriée à un problème ou objet mathématique donné, pour un individu et dans un contexte donné » (p. 343). Ils incluent donc des critères individuels, contextuels et d'action dans la définition de la flexibilité et de l'adaptation (Heinze et *al.*, 2009).

1.3. Définitions fondées sur les représentations

La capacité à identifier et à représenter le même concept dans différentes représentations et la flexibilité dans le passage d'une représentation à une autre permettent aux étudiants de percevoir la richesse des relations en jeu et de développer une compréhension approfondie du concept (Even, 1998). De faibles liens ou même le manque complet de liens entre différents types de conversions – avec des représentations de départ différentes – du même concept mathématique sont la principale caractéristique de ce compartimentage des représentations. Ils indiquent que les apprenants ne construisent pas la signification complète du concept et n'ont pas saisi la réelle ampleur de ses applications. Ce comportement peut aussi éclairer les perceptions des élèves, pour qui différentes représentations du même concept constituent des objets mathématiques distincts et autonomes et non simplement des manières différentes d'exprimer la signification d'un concept particulier. En d'autres mots, les étudiants confondent « l'objet » ou le concept avec sa représentation sémiotique (Duval, 2002; Elia & Gagatsis, 2008). Ces difficultés cognitives révèlent des déficiences dans la flexibilité représentationnelle, révélatrices d'une compréhension mathématique fragmentaire. Ainsi, cet enseignement peut être accompli via un « décompartimentage » (Duval, 2002).

Récemment, Deliyianni, Elia, Gagatsis et Panaoura (2011) ont suggéré le terme de flexibilité multi-représentationnelle. En particulier, ils considèrent la flexibilité multi-représentationnelle comme la capacité de changer de posture mentale en réponse aux altérations (reconnaissance, traitement, conversion) de la représentation du même objet mathématique. En d'autres termes, Deliyianni et al. (2011) assument que la flexibilité multi-représentationnelle se réfère à un changement entre différents systèmes de représentation d'un concept ou à la reconnaissance de ce concept (flexibilité inter-représentationnelle) aussi bien qu'à la manipulation du concept via de multiples représentations (flexibilité intra-représentationnelle).

1.4. Flexibilité expérimentale-opérationnelle

D'un point de vue statistique fondé sur l'idée que la flexibilité se réfère au dé-compartimentage, on pourra montrer la flexibilité par l'association de variables ou classes de variables distinctes. Ces variables pourraient correspondent à des conceptualisations mathématiques différentes ou à des stratégies de résolution de problèmes différentes, ou encore à différentes représentations, différents processus cognitifs liés au même concept, ayant entre eux une forte relation statistique (corrélation, implication, similitude). Autrement dit, la flexibilité expérimentale-opérationnelle est un phénomène opposé au compartimentage expérimental-opérationnel tel que décrit par Elia et Gagatsis (2008).

2. Recherches concernant la flexibilité dans le domaine numérique à l'école primaire et au début de secondaire

2.1. Exemples d'études concernant la flexibilité stratégique

2.1.1. Saut ou compensation ? La flexibilité stratégique dans le domaine des nombres jusqu'à 100 (Torbeyns, De Smedt, Ghesquiere, & Verschaffel, 2009)

Les caractéristiques individuelles en tant que facteur influençant l'utilisation flexible de stratégies sont un domaine de recherches étudié par Torbeyns et *al.* (2009). Plus particulièrement, leur étude analyse l'utilisation flexible de stratégies mentales de calcul chez les élèves de l'école primaire à propos des additions et soustractions de nombres entre 20 et 100. Soixante élèves de CE2 de trois niveaux différents en mathématiques ont résolu individuellement une série d'additions et de soustractions à deux chiffres dans des environnements avec choix et sans choix. Dans l'environnement avec choix, les enfants pouvaient choisir entre la stratégie de compensation (56 + 29 = ? ; 56 + 30 = 86, 86 - 1 = 85) et la stratégie de saut (56 + 29 = ? ; 56 + 20 = 76, 76 + 9 = 85) pour chaque item. Dans l'environnement sans choix, les enfants avaient à résoudre chaque item soit avec la stratégie de compensation, soit avec la stratégie de saut.

Les résultats de Torbeyns et *al.* (2009) montrent que les enfants, quel que soit leur niveau, ont spontanément appliqué à la fois la stratégie de compensation et celle de saut pour résoudre les opérations avec choix. De plus, ils ont tous exécuté la stratégie de compensation de manière également précise, mais plus rapidement que la stratégie de saut dans l'environnement sans choix. Enfin, dans les choix stratégiques des enfants, il n'apparaît pas de flexibilité en fonction des caractéristiques de la tâche, par exemple lorsqu'il s'agissait d'addition ou de soustraction comportant un entier dont le chiffre des unités est 8 ou 9. Toutefois, les enfants ont pris en considération d'autres caractéristiques de la tâche pendant le processus de choix de la stratégie, c'est-à-dire l'opération du problème. Ils ont appliqué la stratégie de compensation plus fréquemment sur les soustractions que les additions. Les données pertinentes de l'environnement sans choix indiquent que c'était un choix stratégique adaptatif pour ces enfants : ils ont exécuté la stratégie de compensation plus pertinemment que la stratégie de saut sur les soustractions, mais pas sur les additions. Ce dernier résultat peut être dû à leurs difficultés avec le regroupement dans des soustractions telles que 64 – 29. Attendu que la stratégie de saut exige d'eux qu'ils dépassent la dizaine dans la dernière étape du processus de résolution (44 - 9 = __), ils n'ont qu'à compter à rebours pour la dizaine et ajouter 1 à la dernière étape de la stratégie de compensation (34 + 1 = __). De plus, ce qui est étonnant, les élèves n'ont jamais pris en compte les caractéristiques de la performance de leur stratégie individuelle pendant le processus du choix de leur stratégie. Seuls les enfants les plus avancés ont tendu vers une adaptation de leurs choix stratégiques à leur niveau d'exactitude (mais cette corrélation reste sous le seuil de signification statistique). Cela peut être expliqué en prenant en compte le fait que les professeurs qui ont participé à l'étude ont commencé leurs enseignements dans le domaine des additions et soustractions à deux chiffres en se focalisant fortement sur la stratégie séquentielle standard (stratégie linéaire), et n'ont apporté des enseignements explicites sur la variation de stratégie qu'après de nombreux mois de pratiques intensives de la stratégie séquentielle. Ce fort accent mis sur la stratégie séquentielle standard pendant les premiers mois de l'enseignement n'a probablement pas stimulé le développement des outils conceptuels, procéduraux et la motivation pouvant amener l'enfant à une application flexible des diverses stratégies.

2.1.2. L'exploration de l'utilisation des stratégies et la flexibilité stratégique dans la résolution de problèmes complexes par les élèves de l'école primaire avancés en mathématiques (Elia et al., 2009)

L'étude d'Elia et *al.* (2009) analyse l'usage des stratégies et la flexibilité stratégique, ainsi que leurs relations avec la performance dans la résolution de problèmes non habituels. Dans ce contexte, les chercheurs ont proposé et analysé deux types de flexibilité stratégique, c'est à dire la flexibilité inter-tâches (changement de stratégies d'un problème à l'autre) et la flexibilité intra-tâche (changement de stratégies dans les problèmes). Les données ont été collectées via trois problèmes non habituels à partir d'élèves hollandais de CM1 (âgés de 9 à 10 ans) ayant de très bons résultats en mathématiques. Les trois tâches étaient :

1. Angela a 15 ans maintenant et Johan 3. Dans combien d'années Angela sera-t-elle deux fois plus vieille que Johan ? (« problème de l'âge »).
2. Liam a des jetons d'une valeur de 5 et 10 uniquement. Au total, elle a 18 jetons. La valeur totale de ces jetons est de 150. Combien de jetons d'une valeur de 5 Liam possède-t-elle ? (« problème de la monnaie »).
3. Dans un quizz, vous gagnez 2 points par réponse correcte. Si vous ne répondez pas à une question ou si votre réponse est fausse, vous perdez 1 point. Le quizz contient 10 questions. Tina a obtenu 8 points au total. A combien de questions Tina a-t-elle répondu correctement ? (« problème du quizz »).

Un certain nombre de stratégies heuristiques peuvent être appliquées dans la résolution de ces problèmes : essai-et-erreur, dénombrement systématique, calcul de l'extrême, preuve ou test, partage en deux du nombre de jetons ou de la valeur (dans le problème de la monnaie uniquement).

Les résultats ont montré que les élèves n'ont que rarement appliqué les stratégies heuristiques dans la résolution des problèmes. Parmi ces stratégies, celle de l'« essai-et-erreur » s'est révélée avoir le plus grand potentiel d'obtention de succès. Les deux types de flexibilité n'étaient souvent pas visibles dans le comportement stratégique des élèves. Cependant, d'un côté, les élèves qui ont montré une flexibilité stratégique inter-tâches ont été plus couronnés de succès que ceux qui ont persévéré dans la même stratégie ; de l'autre côté, contrairement aux attentes des chercheurs, la flexibilité stratégique intra-tâche n'a pas soutenu les élèves dans la recherche de la réponse correcte. Cela provient de la construction d'une représentation mentale incomplète du problème par les élèves.

2.2. Exemples d'études concernant la flexibilité représentationnelle

2.2.1. Un modèle structurel pour la compréhension des nombres décimaux au primaire et au secondaire (Deliyianni, Elia, Panaoura, & Gagatsis, 2009)

Deliyianni et *al.* (2009) ont testé si la flexibilité dans des représentations multiples et la capacité à résoudre un problème ont un effet sur la compréhension des additions de nombre décimaux. Pour cela, ils ont analysé la structure factorielle des résultats obtenus auprès des élèves du primaire et du secondaire grâce à la CFA (Confirmatory Factor Analysis - Analyse Factorielle Confirmatoire). Une population de 1701 élèves du primaire grec (CM2 et 6^{e}) et du secondaire (5^{e} et 4^{e}) âgés de 10 à 14 ans a participé à cette étude. Le test, qui a été établi de manière à examiner les hypothèses de l'étude, consiste en 19 multi-représentations et 4 tâches de résolution de problèmes. Plus particulièrement, le test inclut :

1. Des tâches de reconnaissance dans lesquelles on demandait aux élèves d'identifier l'addition d'un et/ou de deux nombres décimaux sur une droite (ligne) arithmétique (ReLt1, RELh4, ReLth7), des diagrammes de zone rectangulaires (ReRt2, ReRh5, ReRth8) et circulaires (ReCh3, ReCth6).
2. Des tâches symboliques de traitement d'addition dans lesquelles la somme atteint le centième ou le millième (TrSt9, TrSh10, TrSth11, TrSh12, TrSt13).
3. Des tâches de conversion d'une représentation symbolique en une représentation en diagramme (CoSLth14, CoSRh15, CoSCt16) et inversement (CoRSh17, CoLSth18, CoCSt19), dans lesquelles la somme atteint le centième ou le millième.
4. Des problèmes d'addition de nombres décimaux dans des diagrammes (PrD20).
5. Des problèmes d'addition verbale de nombres décimaux accompagnés par une représentation auxiliaire par diagramme (PrD21).
6. Des problèmes d'addition verbale de nombres décimaux (PrV22).
7. Des tâches de justification de solutions de problème présentés verbalement et liés à l'addition de nombres décimaux (PrV23).

La codification de toutes les variables ci-dessus est basée sur la terminologie anglaise, qui dans les plusieurs cas coïncide avec les mots équivalents français. Cette codification est basée sur :

a) le type de transformation des représentations : reconnaissance (Re), traitement (Tr), conversion (Co) ;
b) le type de représentation : symbolique (S), diagramme (D), verbale (V) ;
c) le type de diagramme : rectangle (R), ligne (L), cercle (C) ;

d) le type de chiffres décimaux de nombres qui interviennent aux tâches : dixième-tenth (t) et centième-hundredths (h) ;

e) le numéro de la tâche (1, 2, 3, *etc*.).

Ainsi, par exemple : ReCh3 est la tâche 3 de reconnaissance d'addition de centièmes dans le diagramme de cercle.

Les résultats ont apporté des éléments importants sur le rôle essentiel que jouent la flexibilité multi-représentationnelle et la capacité à résoudre des problèmes pour la compréhension de l'addition de nombres décimaux par les élèves du primaire et du secondaire. Les résultats valorisent la capacité de reconnaître une addition de nombres décimaux, de manipuler symboliquement des additions de nombres décimaux et d'opérer de manière flexible une conversion d'une représentation d'une addition de nombres décimaux en une autre. D'ailleurs, il s'avère que la valeur des chiffres joue dans l'exécution des tâches de reconnaissance d'une addition de nombres décimaux. Toutefois, l'emploi de la notation décimale de position n'a pas d'incidence sur la capacité des élèves à faire un calcul numérique de somme de décimaux, car des processus algorithmiques sont automatisés à l'âge des élèves concernés ici. De plus, la capacité à convertir une équation présentée par un diagramme en équation symbolique apparaît comme un aspect de la performance distinct de la capacité à convertir une équation mettant en jeu une addition de nombres décimaux en une représentation par diagramme. Cela suggère que différents types de représentations affectent de manière différentielle le processus de résolution, parce que les élèves activent des processus mentaux différents quand ils sont confrontés à des tâches. En fait, les résultats ont révélé que la flexibilité multi-représentationnelle constitue une construction multi-facette dans laquelle les transformations représentationnelles interagissent avec les modes de représentation et le concept de système décimal positionnel.

La figure 1 présente les résultats du modèle élaboré, où les données apparaissent raisonnablement bien représentées [$x^2(201) = 380,61$, CFI=0,98, RMSEA=0,02]. Le modèle de troisième ordre, qui est jugé approprié pour l'interprétation de la compréhension d'addition de nombres décimaux, comporte sept facteurs de premier ordre, deux facteurs de second ordre et un facteur de troisième ordre.

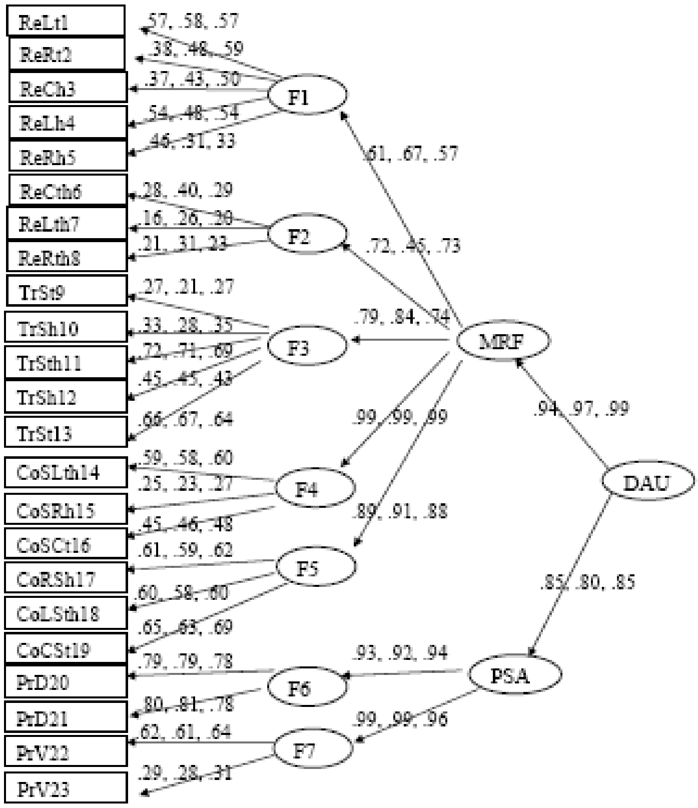


Figure 1 : Le modèle de CFA de compréhension de l'addition de nombres décimaux.

Indications pour la lecture de la figure 1 :

1) Les premier, deuxième et troisième coefficients de chaque facteur représentent l'application du modèle respectivement dans la population complète, dans la sous-population des élèves du primaire et dans la sous-population des élèves du secondaire.
2) Les erreurs de variables sont omises.
3) Par régression, les deux facteurs de second ordre qui correspondent à la flexibilité multi-représentationnelle (MRF : Multiple-Representation Flexibility) et à la capacité de résolution de problèmes (PSA : Problem Solving Ability) sont regroupés en un facteur de troisième ordre qui représente la compréhension de la notion d’addition des nombres décimaux (DAU : Decimal Addition Understanding). Le facteur de premier ordre F1 se réfère aux tâches de reconnaissance dans lesquelles les termes de la somme ont les mêmes nombres

de chiffres, tandis que le facteur F2 de premier ordre réfère aux tâches de reconnaissance dans lesquelles les termes de la somme ont des nombres de chiffres différents. Le facteur F3 de premier ordre réfère aux tâches de traitement de l'addition des nombres décimaux, que les termes de la somme aient ou non les mêmes nombres de chiffres. Les tâches de conversion dans lesquelles la formation initiale est l'équation des nombres décimaux et la représentation cible est la représentation schématique constituent le facteur F4 de premier ordre. Le facteur de premier ordre F5 fait référence aux tâches de conversion des nombres décimaux d'une représentation schématique en une représentation symbolique. Les deux autres facteurs de premier ordre, F6 et F7, se regroupent sur un facteur de second ordre qui représente la capacité de résolution de problèmes. Le facteur de premier ordre F6 se compose des problèmes accompagnés d'un schéma, alors que le facteur F7 est constitué des problèmes verbaux.

2.2.2. Étude des profils de flexibilité représentationnelle des élèves du primaire et du secondaire sur les nombres décimaux (Gagatsis, Deliyianni, Elia, & Panaoura, 2010)

En prolongeant l'étude de Deliyianni et *al.* (2009), l'étude de Gagatsis et *al.* (2010) analyse une hiérarchie (classement croissant) de la flexibilité représentationnelle des additions de nombres décimaux par l'identification et le classement des profils de raisonnement des élèves et de leurs caractéristiques. Afin de classer les profils de réponse des élèves par rapport à la flexibilité représentationnelle dans les additions de nombres décimaux, on a appliqué la méthode de Ward de classification hiérarchique en classes. Quatre classes, correspondant à quatre niveaux hiérarchiques de flexibilité, ont été identifiées.

Plus particulièrement, les élèves de la Classe 1 (Premier Niveau de Représentation) atteignent de faibles performances dans les tâches de conversion d'une représentation symbolique en une représentation en diagramme et des performances moyennes dans les tâches de reconnaissance et de traitement. Cependant, ils échouent aux tâches de conversion d'une représentation en diagramme en une représentation symbolique. Leur performance dans les tâches de résolution de problème, elle aussi, est faible. Les étudiants de la Classe 2 (Niveau Symbolique) diffèrent des élèves de l'Ensemble 1 en ce qu'ils montrent de faibles performances dans les conversions d'une représentation en diagramme en une représentation symbolique. Les élèves de la Classe 3 (Niveau Transitionnel de Multi-Représentation) atteignent des performances moyennes dans les tâches de reconnaissance, de conversion et de résolution de problème. Cependant, ils atteignent de hautes performances dans les tâches de traitement. Enfin, l'appartenance à la Classe 4 (Niveau Multi-Représentationnel) implique de hauts succès dans toutes les tâches. Les élèves concernés manifestent de la flexibilité dans les tâches de conversion et démontrent un haut niveau de performance dans les tâches de résolution de problème.

Le tableau 1 présente les scores moyens et écarts types dans la flexibilité multi-représentationnelle et les dimensions de la capacité à résoudre des problèmes selon les classe (Gagatsis et *al.*, 2010).

Type de tâche	Classe 1		Classe 2		Classe 3		Classe 4	
	Score moyen	Écart-type	Score moyen	Écart-type	Score moyen	Écart-type	Score moyen	Écart-type
Reconnaissance, pour une somme dont les termes comprennent des dixièmes, ou des centièmes	0,51	0,27	0,58	0,26	0,68	0,24	0,82	0,20
Reconnaissance, pour une somme dont les termes comprennent respectivement des dixièmes et des centièmes	0,39	0,34	0,41	0,33	0,44	0,36	0,54	0,37
Traitement	0,65	0,30	0,73	0,24	0,84	0,21	0,95	0,13
Conversion d'équation en schéma	0,17	0,17	0,46	0,21	0,65	0,22	0,93	0,14
Conversion de schéma en équation	0,04	0,11	0,21	0,21	0,50	0,24	0,90	0,15
Problèmes accompagnés d'un schéma	0,27	0,39	0,40	0,44	0,63	0,43	0,87	0,29
Problèmes verbaux	0,22	0,25	0,32	0,27	0,41	0,27	0,51	0,25

Tableau 1 : Scores moyens et écarts types dans la flexibilité multi-représentationnelle et dimensions de la capacité à résoudre des problèmes.

Le test du chi-deux révèle que l'éducation primaire et secondaire développe la flexibilité représentationnelle. Toutefois, le classement des élèves en niveau hiérarchique est le même au primaire et au secondaire et indique qu'il n'évolue pas d'un degré de l'enseignement au degré suivant.

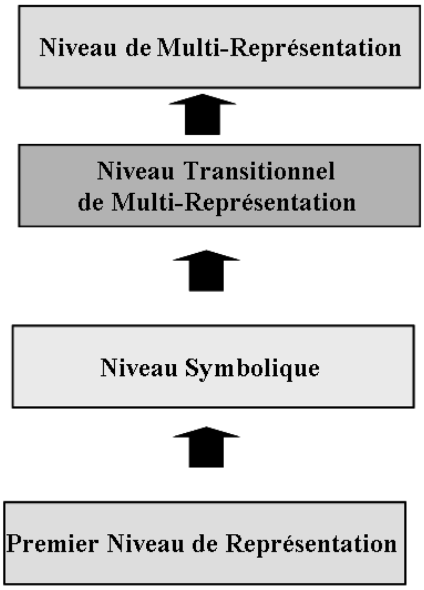


Figure 2 : Les niveaux hiérarchiques de flexibilité dans l'addition des nombres décimaux.

Gagatsis et *al.* (2010) comparent leurs résultats avec les résultats correspondants fournis par Gagatsis, Deliyianni, Elia, Monoyiou et Panaoura (2009). En particulier, Gagatsis et *al.* (2009) ont récemment analysé la nature évolutive de la flexibilité représentationnelle dans les additions de fractions, en déterminant quatre niveaux hiérarchiques dans le raisonnement des élèves et en identifiant leurs caractéristiques. Les résultats de la recherche dans le domaine des nombres décimaux (Figure 2) sont généralement en accord avec les profils des réponses des élèves relativement à la flexibilité représentationnelle dans le domaine des additions de fractions (Figure 3). Toutefois, le Niveau de Représentation Multi-Représentationnel dans les additions de fractions est divisé en deux classes, le «Symbolique» et «En diagramme», fondé sur le comportement des élèves dans la tâche de conversion. Les élèves des deux classes ont atteint des performances moyennes dans la reconnaissance et la résolution de problème et de bons résultats dans les tâches de traitement. D'un côté, les élèves de la classe «Symbolique» ont eu de faibles résultats dans les tâches de conversion d'un diagramme à une équation, tandis qu'ils ont eu des résultats moyens dans les tâches de conversion d'une équation à un diagramme. De l'autre côté, les élèves de la classe « En diagramme » affichent une faible performance dans les tâches de conversion d'une équation à un diagramme et des performances moyennes dans les tâches de conversion d'un diagramme à une équation. Ainsi, la classe « Symbolique » dans les additions de fractions semble correspondre au Niveau Symbolique dans les additions de nombres décimaux.

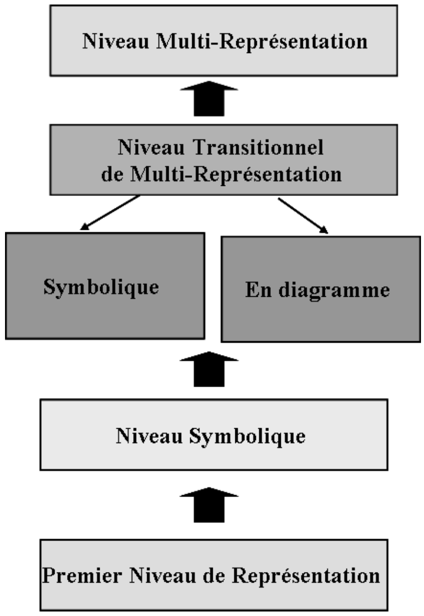


Figure 3 : Les niveaux hiérarchiques de la flexibilité dans l'addition des fractions.

2.2.3. Conceptualiser, rechercher et stimuler la flexibilité représentationnelle dans la résolution de problèmes mathématiques et dans l'enseignement : une analyse critique (Nistal, Van Dooren, Clarebout, & Verschaffel, 2009)

Nistal et *al.* (2009) font une analyse critique de la littérature concernant les choix flexibles représentationnels dans la didactique des mathématiques. Ils soutiennent que, alors que la flexibilité dans la sélection d'une représentation pour achever une tâche mathématique a été traditionnellement comprise comme le choix de la ou des représentations qui correspondent aux caractéristiques de la tâche à résoudre, les éléments de fait suggèrent qu'elle inclut aussi la capacité de prendre en compte les caractéristiques des sujets interagissant avec les représentations, ainsi que le contexte dans lequel une telle interaction prend place. Les caractéristiques des sujets sont a) la connaissance antérieure conceptuelle et procédurale sur les représentations, b) la connaissance abstraite conditionnelle sur les représentations, c) la connaissance spécifique au domaine et d) la préférence représentationnelle et des facteurs affectifs, tandis que les caractéristiques liées au contexte sont a) l'environnement qui fournit un guide actif dans la sélection représentationnelle et b) l'environnement qui encourage une comparaison active et une évaluation des représentations.

Conclusion

Cet article a considéré les définitions théoriques de la flexibilité qui sont fondées sur les opérations mentales, les stratégies et les représentations. Une caractéristique commune à toutes ces définitions est que la flexibilité se réfère au comportement qui consiste à modifier son attitude mentale, ses stratégies et ses représentations afin de s'ajuster aux besoins d'une situation donnée. En résolution de problème, la flexibilité permet des développements et apporte succès et compréhension. La flexibilité expérimentale-opérationnelle a notamment été l'un des sujets du présent article.

Flexibilité stratégique concernant des opérations

La compréhension mathématique implique principalement une flexibilité stratégique et représentationnelle. L'étude qui est décrite dans cet article offre à la fois des implications pratiques et des idées pour de futures recherches afin de mettre en lumière la notion de flexibilité. En particulier, les résultats de Torbeyns et *al.* (2009) plaident pour qu'une plus grande attention didactique soit donnée à la stratégie compensatoire. Toutefois, ces chercheurs indiquent que des recherches futures sont nécessaires pour retrouver et affiner leurs résultats, avant que de fortes recommandations éducatives puissent être faites. Un certain nombre de chercheurs (par ex. Torbeyns et *al.*, 2009 ; Klein, Beishuizen, & Treffers, 1998) mettent aussi en avant le fait que les élèves qui, dès le début de l'enseignement, sont sensibilisés à la flexibilité, à appliquer diverses stratégies, choisissent entre différents stratégies lorsqu'ils ont à recourir à des sommes. A l'inverse, les élèves qui ont d'abord appris un type donné de stratégie sur toutes les sommes et n'ont qu'ensuite reçu un enseignement d'application flexible de diverses stratégies pour effectuer des sommes, ne sont pas capables de mettre de tels choix en œuvre. Toutefois, des études récentes dans le domaine des équations linéaires et des estimations de calcul (par ex. Rittle-Johnson, Star, & Durkin, 2009) ont révélé que la comparaison de multiples méthodes ou stratégies de résolution n'est bénéfique pour les enfants qu'avec la connaissance préalable d'une des stratégies à comparer. Ces études suggèrent que les enfants avec une connaissance antérieure faible ou nulle pourraient davantage tirer profit d'une approche didactique du type suivant : en premier lieu familiarisation avec une des méthodes à apprendre, puis présentation d'autres stratégies, et enfin analyse et comparaison de l'efficacité des différentes stratégies. De futures études sont nécessaires afin de tester et valider l'effectivité des différentes approches didactiques pour promouvoir la variété stratégique et la flexibilité dans le domaine des nombres de 20 à 100, en prenant en compte la connaissance antérieure des élèves dans ce domaine (Torbeyns et *al.*, 2009).

Flexibilité stratégique concernant la résolution des problèmes non habituels

Quant à l'enseignement de la résolution de problèmes non habituels à l'école primaire, Elia et *al.* (2009) suggèrent que, lors de la résolution de différents problèmes non habituels, même de structure similaire, il pourrait être utile et efficace pour les élèves de cet âge d'utiliser des stratégies multiples. Ainsi, ils recommandent que les professeurs puissent fournir un support aux élèves pour qu'ils sachent maitriser des compétences de logique et organiser les informations fournies dans un problème complexe, avant de les presser à prendre une décision sur les stratégies de résolution du problème. Cependant, Elia et *al.* (2009) soulignent le fait que de plus amples recherches sont nécessaires, afin de trouver les méthodes didactiques pour développer la flexibilité inter-tâches stratégique dans les problèmes complexes et pour explorer l'impact de ces types d'instruction sur les performances en résolution de problème. Les chercheurs indiquent aussi qu'il pourrait être intéressant pour de futures études d'examiner si le schéma entre les stratégiques heuristiques et le succès dans la résolution de problèmes change quand les élèves reçoivent un enseignement systématique portant sur la stratégie de résolution de problèmes complexes. Une problématique finale demandant de plus amples discussions réside dans la question : Comment mesurer l'utilisation de stratégie et la flexibilité chez les élèves ? Dans l'étude d'Elia et *al.* (2009), l'accent a été mis sur ce qui était visible dans les brouillons des tests des élèves. Le raisonnement intérieur de l'élève n'a pas été analysé. Dans de futures études, des techniques plus qualitatives pourraient être utilisées pour collecter les données sur les processus cognitifs des élèves, spécialement dans le cas de stratégies alternatives en résolution d'un problème ou de plusieurs (intra, inter) (Elia et *al.*, 2009).

Flexibilité représentationnelle concernant le domaine numérique : des niveaux hiérarchiques

Quant à la flexibilité représentationnelle, le développement des capacités de reconnaissance de l'addition d'un et/ou de deux nombres numériques dans diverses représentations en diagramme, des capacités de manipulation symbolique de l'addition d'un et/ou plusieurs nombres numériques, de la capacité à convertir un et/ou deux nombres numériques d'une représentation en diagramme à une représentation symbolique et réciproquement peut contribuer au développement d'une flexibilité multi-représentationnelle, qui est de première importance dans la compréhension du concept de somme de nombres (Deliyianni et al., 2009). D'ailleurs, Deliyianni et al. (2009) font remarquer qu'il est important de développer les processus cognitifs correspondants à la fois dans l'éducation primaire et l'éducation secondaire, afin d'aménager aux élèves de l'école primaire une transition plus souple au secondaire.

Allant plus loin, les résultats de l'étude de Gagatsis et al. (2010) distinguent quatre niveaux hiérarchiques distincts de flexibilité représentationnelle. Les niveaux ont un profil clair puisque chacun d'eux correspond à des réponses caractéristiques différentes. Tandis que le contraste le plus saillant est situé entre le Premier Niveau de Représentation et le Niveau Multi-Représentationnel, on peut semble-t-il relever une augmentation régulière et systématique de la sophistication d'un niveau à un autre. Ces résultats peuvent avoir une utilisation pratique, car ils peuvent faciliter l'organisation progressive des activités d'enseignement des nombres décimaux par degré de difficulté, ce qui peut offrir un soutien aux élèves de capacités diverses. Même si de légères différences peuvent être relevées entre les hiérarchies de croissance des fractions (Deliyianni et al., 2011) et des nombres décimaux, les résultats de Gagatsis et al (2010) révèlent un potentiel de développement d'une hiérarchie croissante intégrée de la flexibilité représentationnelle dans le domaine des nombres rationnels, ce qui pourrait être l'objet de recherches futures. Gagatsis et al. (2010) soulignent le besoin de recherches plus poussées sur les implications en didactique de ce sujet. Plus particulièrement, ils suggèrent qu'il pourrait être intéressant et utile d'examiner les effets de programmes d'intervention qui prennent en compte les quatre niveaux hiérarchiques. Des recherches plus avancées sont aussi nécessaires pour examiner l'application de ces niveaux dans d'autres concepts et niveaux d'âge, avant de pouvoir avancer une définition opérationnelle de la flexibilité représentationnelle (Gagatsis et al., 2010). Nistal et al. (2009) relèvent aussi la faiblesse de la recherche traditionnelle sur la flexibilité représentationnelle, par ex. le fait qu'elle se focalise presque exclusivement sur l'importance de l'adéquation de la représentation à la tâche à résoudre, alors que les caractéristiques du sujet et spécialement du contexte sont rarement envisagées ou étudiées.

Flexibilité et Espace de Travail Mathématique

Comment introduire la notion de flexibilité dans une définition de l'Espace de Travail Mathématique (ETM) sur un modèle inspiré de l'Espace de Travail Géométrique (Houdement et Kuzniak, 2003 ; Kuzniak, 2009) ?

D'après le cadre général du symposium franco-chypriote, le travail mathématique vise à l'élaboration et la mise en relation d'un certain nombre d'objets constitutifs du domaine mathématique. L'accès à ces objets s'appuie sur un ensemble de processus, de genèses, d'artefacts et de représentations sémiotiques. Pour clarifier le rôle de la flexibilité au sein de ces différentes composantes et de leurs relations, afin de mieux comprendre le travail mathématique, il faut adapter des questions fondamentales du symposium en se référant à cette notion :

- quelle est la contribution de la flexibilité au soutien de la dynamique qui permet d'animer le travail mathématique entre les objets, les artefacts, les aspects sémiotiques et les aspects théoriques ?

– Dans quelle mesure peut-on préciser le rôle de la flexibilité dans chacun des termes de l'ordre : sémiotique, instrumental, épistémologique, institutionnel ?

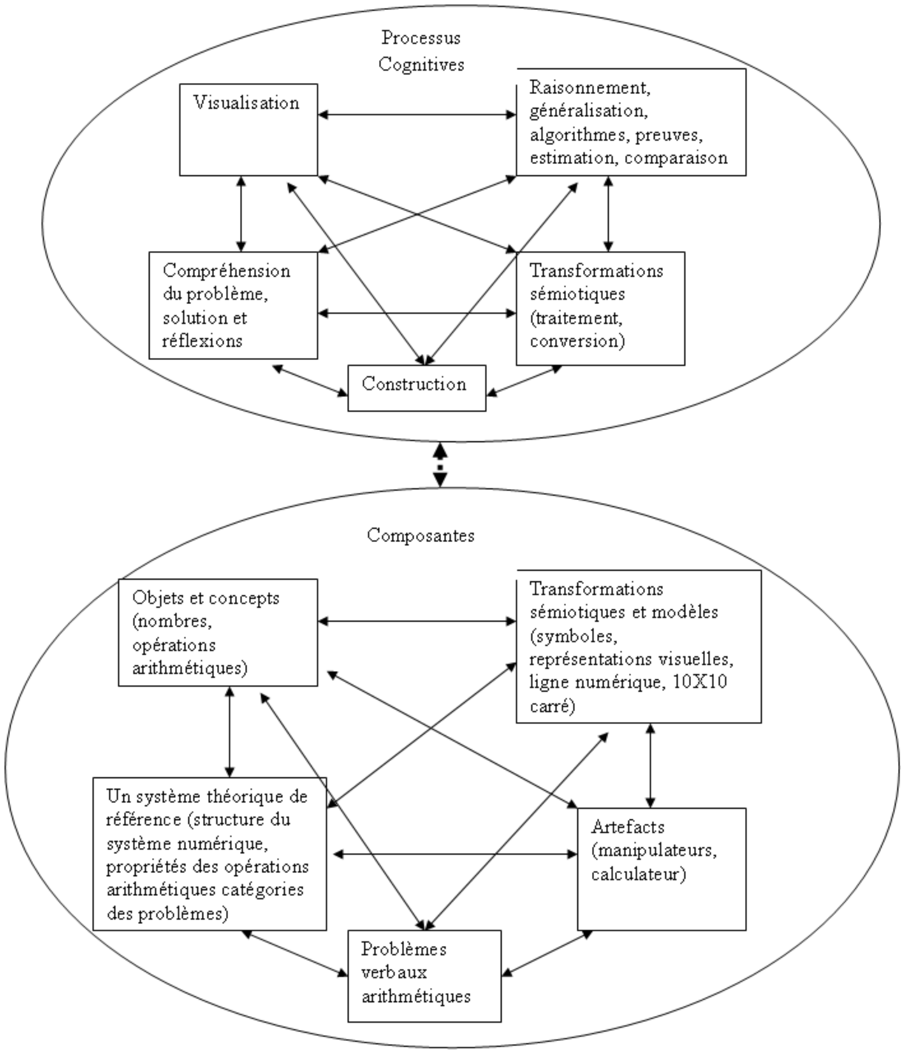


Figure 4 : Une ébauche d'« Espace de Travail Arithmétique ».

Par conséquent, il semble que la recherche qui s'intéresse à la notion de flexibilité offre un certain nombre d'idées utiles et pratiques pour préciser l'Espace de Travail Mathématique (ETM) et par conséquent pour améliorer l'enseignement. Pour cette raison, la figure 4 propose une ébauche d'« Espace de Travail Arithmétique ».

Pour autant, de plus amples recherches sont nécessaires afin de couvrir le spectre entier de cette notion et par conséquent son rôle dans la validation du modèle présenté dans cet article.

Bibliographie

CHEVALIER, N. & BLAYE, A. (2008), Cognitive flexibility in preschoolers: The role of representation activation and maintenance, *Developmental Science*, **11.3**, 339–353.

DELIYIANNI, E., ELIA I., PANAOURA, A. & GAGATSIS, A. (2009), A Structural model for the understanding of decimal numbers in primary and secondary education, in *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Eds. Tzekaki, Kaldrimidou & Sakonidis), **2**, 401–408, Thessaloniki, Greece, PME.

DELIYIANNI, E., ELIA, I., GAGATSIS, A. & PANAOURA, A. (2010), submitted for publication), A Structural Model of Representational Aspects of Fraction-Addition Understanding Related to Multiple-Representation Flexibility and Problem Solving in Primary and Secondary Education, *Educational Studies in Mathematics*.

DEMETRIOU, A. (2004), Mind intelligence and development: A cognitive, differential, and developmental theory of intelligence, In *Developmental change: Theories, models and measurement* (Eds. Demetriou & Raftopoulos), 21–73, Cambridge, UK, Cambridge University Press.

DUVAL, R. (2002), The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, **1.2**, 1–16.

ELIA, I. & GAGATSIS, A. (2008), A comparison between the hierarchical clustering of variables, implicative statistical analysis and confirmatory factor analysis, In *Studies in computational intelligence 127: Statistical implicative analysis* (Eds. Gras, Suzuki, Guillet & Spagnolo), 131–163, Heidelberg: Springer.

ELIA, I., VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. & KOLOVOU, A. (2009), Exploring strategy use and strategy flexibility in non-routine problem solving by primary school high achievers in mathematics, *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, **41.5**, 605–618.

EVEN, R. (1998), Factors involved in linking representations of functions, *The Journal of Mathematical Behavior*, **17.1**, 105–121.

GAGATSIS, A., DELIYIANNI, E., ELIA, I., MONOYIOU, A. & PANAOURA, A. (2009), Considering flexibility from a developmental perspective: The case of multiple representations in fractions, In *Symposium for presentation at the EARLI 2009*, Conference, Amsterdam, Holland.

GAGATSIS, A., DELIYIANNI, E., ELIA, I. & PANAOURA, A. (2010), Tracing primary and secondary school students representational flexibility profiles in decimals, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, **9.1**, 211–222.

HEINZE, A., STAR J.R. & VERSCHAFFEL, L. (2009), Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education, *ZDM—The International Journal of Mathematics Education*, **41.5**, 535–540.

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (2003), Elementary geometry split into different geometrical paradigms, In *Proceedings of CERME 3* (Ed. M. Mariotti), Bellaria, Italy. Retrieved from: http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG7/TG7_Houdement_cerme3.pdf.

KUZNIAK, A. (2009), Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France, In *Cyprus and France Research in Mathematics Education* (Eds. Gagatsis, Kuzniak, Deliyianni & Vivier), 71–89, Nicosia, University of Cyprus.

KLEIN, A.S., BEISHUIZEN, M. & TREFFERS, A. (1998), The empty number line in Dutch second grades: Realistic versus gradual program design, *Journal for Research in Mathematics Education*, **29**, 443–464.

KREMS, J.F. (1995), Cognitive flexibility and complex problem solving. In *Complex problem solving: The European perspective* (Eds. Frensch & Funke), 201–218. Hillsdale, NJ:Lawrence Erlbaum Associates.

NISTAL, A., VAN DOOREN, W., CLAREBOUT, G., ELEN, J. & VERSCHAFFEL, L. (2009), Conceptualising, investigating, and stimulating representational flexibility in mathematical problem-solving and learning: A critical review, *ZDM—The International Journal of Mathematics Education*, **41.5**, 627–636.

RITTLE-JOHNSON, B., STAR, J. & DURKIN, K. (2009), The importance of prior knowledge when comparing examples: Influences on conceptual and procedural knowledge of equation solving, *Journal of Educational Psychology*, **101.4**, 836–852.

TORBEYNS, J., DE SMEDT, B., GHESQUIERE, P. & VERSCHAFFEL, L. (2009), Jump or compensate? Strategy flexibility in the number domain up to 100, *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, **41.5**, 581–590.

VERSCHAFFEL, L., LUWEL, K., TORBEYNS, J. & VAN DOOREN, W. (2009), Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education, *European Journal of Psychology of Education*, **24.3**, 335–359.

Auteur à contacter :
Athanasios GAGATSIS
University of Cyprus
gagatsis@ucy.ac.cy

ILIADA ELIA

LE RÔLE DE LA DROITE GRADUÉE DANS LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ADDITIFS

Abstract. The role of number line in the solution of additive problems. This study investigates the effects of the number line on students' solution of additive change problems. We organized an experimental program focusing on the use of the number line in coordination with other representations in additive problem solving and compared its outcomes with the results of the regular mathematical curriculum. The experimental group consisted of 356 students, while the control group included 776 students in Grades 1, 2 and 3 of primary school. The data were collected using change problems of various structures in two types of representation, verbal description and verbal description with number line. Confirmatory Factor Analysis showed that the type of representation had an effect on the solution of additive problems of a complex structure, but not in the solution of simple problems. The experimental group students of Grades 1 and 2 performed better than the control group students in all types of problems irrespectively of the representation. The use of the number line was a complex but an efficient way of solving a number of additive problems. It supported problem solving for representing either the situation or the solution of the problem.

Résumé. Cette étude cherche à explorer les effets de la droite graduée sur la résolution de problèmes additifs de type transformation d'états. Nous avons organisé un programme expérimental se concentrant sur l'usage de la droite graduée en relation avec d'autres représentations dans la résolution des problèmes additifs et nous avons comparé ses résultats avec ceux du programme ordinaire en mathématiques. Le groupe expérimental était composé de 356 élèves, alors que le groupe de contrôle comprenait 776 élèves : des CP, CE1 et CE2. Les données s'appuient sur des problèmes de transformation sous deux formes de représentation, la description verbale et la description verbale accompagnée d'une droite graduée. L'Analyse Factorielle Confirmatoire a prouvé que le type de représentation a un effet sur la résolution des problèmes additifs de structure complexe, mais non sur la résolution de problèmes simples. Les élèves du groupe expérimental ont mieux réussi en CP et en CE1 que les élèves du groupe de contrôle dans tous les types de problèmes, indépendamment de la représentation. L'utilisation de la droite graduée a été un moyen complexe mais efficace de résoudre un certain nombre de problèmes additifs. Elle a aidé à la résolution des problèmes pour représenter la situation ou la solution du problème.

Mots-clés. Droite graduée, problèmes additifs de type transformation, représentations sémiotiques, Espace de Travail Arithmétique.

Introduction

Les difficultés des élèves à résoudre des problèmes arithmétiques verbaux ont été beaucoup étudiées (ex. : Nesher & Hershkovitz, 1991) depuis les débuts du

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 16, p. 45 – 66.

20ème siècle ; cependant elles continuent d'apparaître dans les résolutions (Verschaffel & De Corte, 1993 ; Coquin-Viennot & Moreau, 2007). La cause de ce phénomène réside en grande partie dans la complexité de la structure des problèmes arithmétiques et spécifiquement dans la variation de la place de l'inconnue (Adetula, 1989 ; Elia, 2009). Dans la présente étude, nous nous focaliserons sur une catégorie de problèmes additifs : les problèmes de changement d'états en une étape (mesure-transformation-mesure), qui décrivent une transformation ou un changement (une augmentation ou une diminution) entre état initial et état final. Varier l'inconnue et la relation en jeu dans le problème génère différentes situations. Ainsi, les problèmes additifs étudiés découlent de six situations (Pa, Pb, Pc, Na, Nb, Nc), selon que le problème décrit une transformation positive ou négative et selon la place de l'inconnue. L'inconnue peut être une des trois quantités (état initial –a, transformation –b, ou état final –c) (Nesher, Greeno & Riley, 1982). Vergnaud (1986) distingue deux types de représentation du problème : la représentation de la situation du problème qui est la transformation telle que décrite dans le texte et la représentation de la solution du problème ou de la procédure amenant à la solution, qui est l'opération nécessaire entre les nombres du problème pour obtenir une réponse numérique. Dans les problèmes avec une inconnue en « c », les deux types de représentation du problème sont les mêmes (ex : problème Pc : $8 + 6 = X$), tandis que dans les autres cas, il n'y a pas de congruence entre les représentations de la situation du problème (ex : problème Na : $X - 6 = 8$) et la représentation de la solution du problème (ex : problème Na : $8 + 6 = X$).

En mathématique élémentaire, la droite graduée est un modèle largement utilisé pour la compréhension de la notion de nombre et l'apprentissage des opérations et spécifiquement de l'addition et la soustraction de base sur les nombres entiers (Harries, Barmby & Suggate, 2008). Gagatsis, Shiakalli et Panaoura (2003) considèrent que la droite graduée doit être vue comme un modèle géométrique, ce qui implique un échange continu entre les représentations géométriques et arithmétiques. Précisons, comme le fait Raftopoulos (2002), que nous entendons ici par *droite graduée* une droite munie d'une origine, laquelle correspond à la valeur 0, et de graduations régulièrement espacées pour représenter les nombres entiers.

Malgré l'usage très répandu de la droite graduée en tant qu'aide aux opérations sur les nombres, des doutes sur son utilité ont été soulevés (Hart, 1981). Ernest (1985) maintient que cela peut entrainer une disparité entre la compréhension de l'addition de nombres entiers par les élèves et leur compréhension de la droite graduée, modèle de l'opération. La présence simultanée de la conceptualisation géométrique et arithmétique des nombres peut limiter l'effectivité de la droite graduée et ainsi gêner la performance des élèves dans des tâches arithmétiques (Gagatsis et *al.*, 2003).

Des études antérieures s'étaient focalisées sur l'usage de la droite graduée en tant qu'outil de calcul. Suivant la distinction théorique de Vergnaud entre les deux types de représentation d'un problème, une supposition de base de notre étude est que la droite graduée peut avoir une double fonction dans la résolution d'un problème : elle peut servir non seulement comme une aide aux opérations numériques correspondant à la procédure de résolution, mais aussi en tant que système sémiotique de représentation d'une structure mathématique de la situation du problème.

Notre étude cherche à explorer les effets de la droite graduée sur la solution donnée par les élèves aux problèmes additifs de diverses structures mathématiques et à examiner si ces effets varient avec l'âge et le type d'enseignement. Spécifiquement, nous avons développé et organisé sur trois niveaux scolaires différents un programme expérimental se centrant sur l'usage de la droite graduée en coordination avec d'autres représentations dans la résolution de problèmes additifs et nous avons comparé ces résultats avec ceux du programme ordinaire en mathématiques.

Cette étude peut contribuer à la définition et la description, tout d'abord, de l'Espace de Travail Mathématique (ETM) (Kuzniak, 2010) dans le domaine de l'arithmétique, c'est-à-dire l'Espace de Travail Arithmétique (ETA), et, plus particulièrement, de la résolution de problèmes additifs, qui est un contenu majeur de l'enseignement des mathématiques dans les premiers niveaux de l'école élémentaire. Si on s'appuie sur le cadre théorique de l'Espace de Travail Géométrique (ETG) et spécifiquement des différents types d'ETG (Kuzniak, 2009), il est important de souligner que cette étude se focalise sur les ETA personnels des élèves, ce qui est révélé par leurs performances et leurs processus dans la résolution des problèmes arithmétiques examinés ici.

1. Problématiques de la recherche

Cette étude cherche à répondre à plusieurs problématiques divisées en deux catégories. La première catégorie de problématiques concerne le processus sous-jacent à la solution du problème additif donnée par l'élève, avec ou sans la droite graduée et quelle que soit la performance de l'élève. La structure sous-jacente dans la solution d'un problème additif avec ou sans droite graduée est censée refléter l'interaction entre la position de l'inconnue et le type de représentation. Plus particulièrement, étant donné que les élèves ont une bonne compréhension des problèmes additifs à structure simple, il est attendu que (1) avec l'état final inconnu, ils résolvent le problème sous les deux types de représentations, forme verbale et forme verbale avec droite graduée, ou en déclenchant des processus similaires, (2) avec soit l'état initial inconnu, soit la transformation inconnue, les deux types de représentations apparaissent distinctement dans la résolution, car le type de représentation est présumé créer une différence entre les solutions apportées par les élèves aux problèmes à structure complexe (Elia, Gagatsis & Demetriou, 2007).

Comme indiqué plus haut, la droite graduée par sa nature est beaucoup plus difficile que le registre numérique dans les tâches d'addition et soustraction (Gagatsis et *al.*, 2003). Donc, le deuxième groupe de problématiques se focalise sur l'usage et l'efficacité de la droite graduée dans la résolution de problèmes additifs. Plus précisément, nous examinons si l'usage de la droite graduée peut contribuer à la résolution des problèmes additifs, de quelles manières la contribution de la droite graduée se manifeste dans les solutions des élèves et les facteurs qui peuvent influer sur cette contribution.

1.1. Structure et performance

Jusqu'à quel point la performance des élèves dans la résolution de problèmes additifs à forme verbale accompagnée ou non de la droite graduée reflète-t-il la structure du processus décrit ci-dessus ? Est-ce qu'il y a variation de la structure suivant l'âge de l'élève ? Est-ce qu'il y a variation de la structure entre d'une part les élèves qui ont suivi un cours sur l'usage de la droite graduée dans la résolution de problèmes additifs, tels que par exemple des groupes expérimentaux, et d'autre part des élèves qui ont suivi le programme ordinaire en mathématiques (ci-après nommé groupe de contrôle) ?

Jusqu'à quel point les élèves sont ils capables de résoudre correctement différents types de problèmes additifs ? Est-ce que les performances dans la résolution des problèmes varient entre les élèves du groupe expérimental et ceux du groupe de contrôle ?

1.2. Utilisation et efficacité de la droite graduée

- L'usage de la droite graduée aide-t-il les élèves à résoudre des problèmes additifs ?
- De quelles manières la droite graduée peut-elle aider les élèves à résoudre des problèmes additifs ?
- Les différentes manières par lesquelles la droite graduée peut faciliter la résolution des problèmes additifs ont-elles la même efficacité pour les différents groupes d'âge, pour les groupes qui ont reçu différents types d'enseignement et pour les différents types de problèmes ?

2. Méthodologie

Les trois niveaux de l'école primaire qui sont examinés dans notre étude sont les suivants : a) première année (les élèves de 6-7 ans) qui correspond à la désignation CP du système éducatif français, b) deuxième année (les élèves de 7-8 ans) qui correspond au CE1 et c) troisième année (les élèves de 8-9 ans) qui correspond au CE2. Les désignations CP, CE1 et CE2 sont utilisées dans le présent document.

Un total de 1134 élèves de l'école primaire (599 garçons et 535 filles) provenant d'écoles urbaines et rurales de Chypre a participé à l'étude. L'échantillon comprenait des élèves répartis sur trois niveaux (CP : 387, CE1 : 370 et CE2 : 377). Le groupe de contrôle comprenait 778 élèves (CP : 275, CE1 : 251 et CE2 : 252). Le groupe expérimental comprenait 356 élèves (CP : 112, CE1 : 119 et CE2 : 125).

Le but du programme expérimental était l'introduction de la droite graduée comme une représentation auxiliaire pour la résolution de différents types de problèmes additifs. L'accent était mis sur la fonction de la droite graduée en tant que représentation de la situation du problème plutôt qu'en tant que procédure de résolution du problème. L'introduction de ce type de représentation s'est faite en deux étapes. La première étape de l'enseignement comprenait l'étude des six types de problèmes et de quatre formes de représentation pour une meilleure présentation des problèmes et pour faciliter leur compréhension et leur résolution. Les représentations ont été graduellement introduites en trois phases : d'abord, des objets matériels, ensuite la droite graduée et enfin une description verbale écrite et une expression symbolique, c'est-à-dire la/les formule/s numérique/s. Par exemple, pour un problème de transformation positive inconnue, deux formules ont été évoquées : $7 + X = 15$, et $15-7 = X$ en dernière phase. Evidemment, la description orale des problèmes a été utilisée depuis le début de l'enseignement et a accompagné toutes les autres représentations. Dans les deuxième et troisième phases, les relations entre les représentations déjà utilisées étaient discutées. Pendant la première étape de l'enseignement, tous les élèves ont participé au passage d'une phase représentative à l'autre. Chaque phase représentative a concerné les six types de problèmes. La séquence des problèmes dans chaque phase était progressive, liée au niveau de difficulté de leur structure (Adetula, 1989) et des connaissances antérieures des enfants.

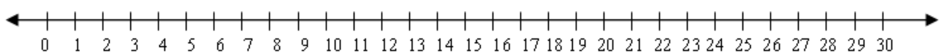
Dans une deuxième étape, quelques activités ont été proposées, centrées sur l'interprétation de la droite graduée et sa correspondance avec les représentations verbale et symbolique des problèmes additifs. Une activité présentait plusieurs énoncés et demandait de reconnaître celui qui correspond à une droite graduée donnée (voir le diagramme 1 de l'annexe comme exemple de cette activité). Des justifications des choix et des expressions symboliques étaient demandées. Une autre activité comprenait des tâches de reconnaissance, parmi plusieurs droites graduées, de celle correspondant à un énoncé de problème donné. Des justifications des choix et des expressions symboliques étaient aussi demandées. Il y a également eu des tâches dans lesquelles une droite graduée était représentée, qui permettait aux élèves de trouver certaines données numériques manquantes dans un énoncé de problème (voir le diagramme 2 de l’annexe comme exemple de cette activité). Finalement, les élèves ont été engagés dans des activités d’élaboration de problèmes verbaux qui devaient correspondre à des modèles donnés de droite graduée.

Les élèves de groupe de contrôle ont suivi le programme d'études ordinaire de mathématiques de leur niveau. Dans les manuels de mathématiques de tous les niveaux, les problèmes de transformation sont donnés sous forme verbale et principalement avec l’état final inconnu. La droite graduée est employée dans le CP mais seulement comme outil de calcul, c'est-à-dire pour résoudre des additions et des soustractions. Dans le CE1 la droite graduée est rarement utilisée ; quand elle l’est, c’est comme outil de calcul, comme au CP. Au CE2 la droite graduée n’est plus du tout utilisée.

Après l’intervention, les élèves du groupe expérimental et les élèves du groupe contrôle ont subi un test. Le test présentait les six types de problèmes additifs (Pc, Nc, Pb, Nb, Pa, Na) avec une variation sur la modalité de présentation : énoncé seul (Type V) ou énoncé avec une droite graduée (Type L). Toutes les opérations d'addition et de soustraction pour la solution des problèmes ont été limitées à la valeur 20 et ont exigé un saut de dizaine. Donc les variables utilisées dans les problèmes pour évaluer les performances des élèves étaient les suivants : a) le type de problème concernant la valeur de la transformation en tant que donnée (positive ou négative) et la position de la donnée manquante (a, b ou c) et b) la représentation du problème.

Deux tâches incluses dans le test impliquant la même situation mathématique, c'est-à-dire une transformation positive avec l’inconnue dans la transformation, et correspondant à deux différents types de représentation (VPb, LPb) sont données comme exemples ci-dessous.

(1) J’avais 7 euros avant mon anniversaire. J’ai reçu de l’argent supplémentaire à mon anniversaire. Maintenant, j’ai 16 euros. Combien d’argent ai-je reçu lors de mon anniversaire ? (Problème avec droite graduée-LPb)



(2) Hier, Jean avait 9 stylos dans sa trousse. Aujourd’hui il a acheté quelques stylos en plus et maintenant il en a 13 en tout. Combien de stylos a-t-il achetés ? (problème uniquement verbal-VPb).

Il convient de noter que dans le test, pour les problèmes avec la droite graduée, les élèves n'ont pas été obligés d'employer la droite graduée, mais il a été dit qu'ils pouvaient le faire s'ils croyaient qu'elle pourrait les aider dans leurs solutions.

3. Résultats

3.1. Structure de la résolution des problèmes et performance

L'analyse factorielle confirmatoire a été utilisée pour explorer l'organisation structurelle des différentes dimensions analysées ici. Un logiciel de modélisation d'équation structurelle, nommé MPlus, a été utilisé pour cette analyse (Muthén & Muthén, 2004). La solidité théorique et la véracité d'un modèle peuvent être déterminées en utilisant les mesures suivantes du test de validité de l'ajustement : X , CFI (Index opportun de comparaison) et RMSEA (Racine du carré moyen des erreurs approximatives) (Bentler, 1990). Pour que le modèle reste valide, les valeurs de ces trois indices doivent se situer dans un intervalle adéquat : la valeur observée de X /df doit être inférieure[1] à 2.5, les valeurs de CFI doivent être supérieures à .9 et les valeurs RMSEA être inférieures à .06.

Le modèle proposé (voir Figure 1) implique trois facteurs de premier ordre et un facteur de deuxième ordre pour lequel tous les facteurs de premier ordre ont régressé. Les deux facteurs de premier ordre représentent les deux types de représentations proposées dans les problèmes avec l'inconnue sur l'état initial ou la transformation (ex : représentation verbale – Vab et description verbale accompagnée d'une droite graduée – Lab). L'autre facteur de premier ordre représente les problèmes avec l'inconnue sur l'état final sous les représentations, texte et texte avec droite graduée (Inc. c).

Le facteur de deuxième ordre représente la compétence mathématique générale sous-jacente à la solution de ces problèmes (CoSoPr). L'ajustement de ce modèle était bon [X (84) = 142.51 ; CFI = .98 ; RMSEA = .042]. On en déduit que le type de représentation, c'est-à-dire la description verbale et la description verbale avec droite graduée, a un effet sur la résolution de problèmes complexes additifs, mais non sur la résolution de problèmes simples.

Pour tester les différences possibles entre les trois groupes d'âges ainsi qu'entre le groupe expérimental et le groupe de contrôle dans la structure décrite ci-dessus, deux analyses inter-groupes ont été faites, où le modèle de plus grand ordre a été classé séparément pour chaque âge et chaque groupe d'enseignement, respectivement. L'ajustement du modèle était acceptable dans les deux cas,

[1] Dans cet article, la notation des nombres utilise le point décimal, tel qu'employé dans les logiciels d'analyse statistique utilisés.

indiquant que la même structure tient pour les trois catégories d'âges [X (168) = 377.10 ; CFI = .95 ; RMSEA = .057], aussi bien que pour les groupes contrôle et expérimental [X (107) = 318.31 ; CFI=.96 ; RMSEA = .059].

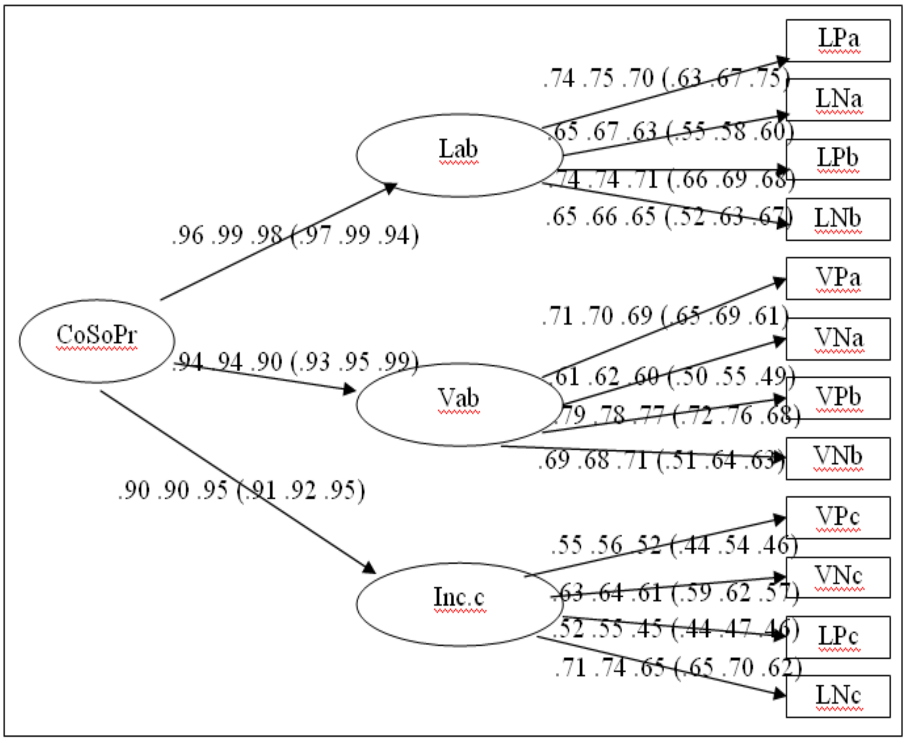


Figure 1 : Le modèle de l'analyse factorielle confirmatoire prenant en compte la performance pour l'échantillon total, le groupe contrôle et le groupe expérimental, ainsi que les niveaux de classe CP, CE1, CE2.

Notes :

a) Le premier, deuxième et troisième coefficient de chaque facteur représente l'application du modèle sur la performance de l'échantillon total, des élèves du groupe contrôle et du groupe expérimental respectivement. Par exemple, le chargement (loading) du problème LPa sur le facteur Lab est .74 pour l'échantillon total, .75 pour le groupe contrôle et .70 pour le groupe expérimental.

b) Le premier, deuxième et troisième coefficient de chaque facteur entre parenthèses représente l'application du modèle sur la performance des élèves de niveau CP, CE1 et CE2 respectivement. Par exemple, le chargement (loading) du problème LPa sur le facteur Lab est .63 pour CP, .67 pour CE1 et .75 pour CE2.

Le tableau 1 montre le pourcentage de réussite des élèves dans les divers problèmes par âge et par mode d'enseignement. La performance des élèves dans la résolution des problèmes semble augmenter avec l'âge. L'augmentation entre les élèves de CP et ceux de CE1 est plus importante que celle entre les élèves de CE1 et ceux de CE2.

		Groupe de contrôle			Groupe expérimental		
		6-7 ans	7-8 ans	8-9 ans	6-7 ans	7-8 ans	8-9 ans
Type de problème	VPa	27	64	79	44	82	78
	VNa	31	71	83	46	80	83
	VPb	30	73	83	40	82	83
	VNb	40	77	86	53	86	88
	VPc	70	90	94	77	92	94
	VNc	58	77	90	59	90	90
	LPa	30	67	85*	36	81	78
	LNa	30	70	80	35	70	72
	LPb	25	62*	71*	36	73	74
	LNb	39	70	80	47	79	78*
	LPc	69	88	94	68	90	94
	LNc	46*	81	91	60	81	86
	Effectifs	*275*	*251*	*252*	*112*	*119*	*125*

Tableau 1 : Pourcentages de succès des élèves dans chaque problème, par âge et par mode d'enseignement.

** La différence entre les scores au problème accompagné de la droite et au problème verbal équivalent est statistiquement significative (p<.01)*

Plusieurs comparaisons peuvent être faites parmi les 72 scores (6 groupes d'élèves × 12 problèmes). On en présente trois qui répondent à nos questions de recherche.

Première comparaison

Une comparaison des scores de réussite entre les problèmes verbaux et les problèmes à l'aide de la droite graduée montre une équivalence des scores. Parmi les 36 comparaisons possibles (6 groupes d'élèves × 6 types des problèmes du Tableau 1) la majorité des différences (31) ne sont pas statistiquement significatives. Dans quatre des différences significatives, la résolution de problèmes à l'aide de la droite graduée apparaît plus difficile que la résolution de problèmes verbaux. Cela est surtout perceptible parmi les élèves du groupe de contrôle, sans doute parce que l'utilisation de la droite graduée dans la résolution de problème additif n'est pas très connue de ces élèves.

Deuxième comparaison

La deuxième comparaison concerne les scores des élèves du groupe de contrôle et du groupe expérimental. Au CP et au CE1, les élèves du groupe expérimental ont eu plus de succès dans la résolution des différents types de problème (avec ou sans la droite graduée) que les élèves du groupe de contrôle, ce qui indique l'effet positif du programme expérimental sur leur capacité à résoudre des problèmes. La différence de succès entre groupe expérimental et groupe contrôle était manifeste dans les problèmes avec l'inconnue sur l'état initial et sur la transformation. Au CE2, toutefois, le groupe expérimental et le groupe contrôle ont obtenu des niveaux similaires de performance. Autrement dit l'intervention didactique a comme résultat une amélioration de scores de réussites à tous les problèmes et pas seulement aux problèmes accompagnés par la droite graduée.

Troisième comparaison

La troisième comparaison concerne les scores aux problèmes suivant la place de l'inconnue (a, b, c). Le succès des élèves aux problèmes avec l'inconnue sur l'état final était plus élevé que leur succès aux problèmes avec l'inconnue sur l'état initial ou sur la transformation. La différence entre le succès des élèves dans les problèmes où l'inconnue porte sur l'état initial et sur la transformation et les problèmes où l'inconnue porte sur l'état final devient plus faible au CE1 et CE2, de même que dans le groupe expérimental. La différence entre les scores aux problèmes suivant la place de l'inconnue ressort aussi du modèle de structure globale du phénomène : on voit qu'on a deux facteurs (Vab et Lab) (c'est-à-dire que la représentation joue un rôle quand la question est sur a ou b) et un facteur (Inc.c) (c'est-à-dire que la représentation n'a aucune influence sur la réussite du problème quand la question est sur c).

3.2. Utilisation et efficacité de la droite graduée dans la résolution de problèmes

En ce qui concerne la question de savoir si l'utilisation de la droite graduée facilite les élèves de résoudre des problèmes additifs, le tableau 2 donne quelques informations intéressantes. Il montre l'efficacité de la droite graduée dans la solution de six problèmes différents. Tout d'abord, on peut dire qu'environ 30% des élèves ont utilisé la droite graduée correctement dans la solution de cinq des six problèmes. Dans le problème LNa, une plus faible proportion d'élèves (18%) a utilisé la droite graduée de façon appropriée. En ce qui concerne la réussite des élèves et l'utilisation de la droite graduée, le test *t* d'échantillons indépendants (independent samples t-test) a montré que les élèves qui ont utilisé correctement la droite graduée dans les problèmes LPc, LNc et LNa étaient significativement plus efficaces que les élèves qui n'ont pas utilisé la droite graduée ou qui ont utilisé la droite incorrectement. Dans les trois autres problèmes, bien que les élèves qui ont utilisé de façon appropriée la droite graduée aient présenté des performances supérieures aux élèves qui ne l'ont pas utilisée, cette différence de réussite n'est pas statistiquement significative. Par conséquent, la droite graduée, dans les problèmes avec l'inconnue sur «c» et le problème avec une transformation négative ayant l'inconnue sur «a», s'est révélée être une aide supplémentaire importante à la procédure de résolution des problèmes des élèves.

Problème	Usage de la droite graduée	*f* (%)	Réussite moyenne (SD)	t (df)	p
LPc	Aucun usage ou usage incorrect	797 (70%)	.81 (.39)	-4.06 (810.64)	<0.001
	Usage correct	337 (30%)	.90 (.30)		
LNc	Aucun usage ou usage incorrect	774 (68%)	.70 (.46)	-3.50 (785.53)	.001
	Usage correct	360 (32%)	.79 (.41)		
LPb	Aucun usage ou usage incorrect	790 (70%)	.53 (.50)	-2.28 (661.26)	.023
	Usage correct	343 (30%)	.60 (.49)		
LNb	Aucun usage ou usage incorrect	773 (68%)	.63 (.48)	-1.51 (722.39)	.131
	Usage correct	361 (32%)	.67 (.47)		
LPa	Aucun usage ou usage incorrect	796 (70%)	.61 (.49)	-1.03 (644.78)	.304
	Usage correct	338 (30%)	.64 (.48)		
LNa	Aucun usage ou usage incorrect	927 (82%)	.55 (.50)	-6.00 (341.29)	<.001
	Usage correct	207 (18%)	.76 (.43)		

Tableau 2 : Usage de la droite graduée et réussite moyenne dans chaque problème.

Pour examiner la manière dont la droite graduée a contribué à la résolution des problèmes, nous avons analysé la manière dont les élèves qui ont correctement résolu les problèmes ont utilisé la droite graduée. Deux usages différents de la droite numérique ont été identifiés : d'un côté, représenter la procédure de résolution du problème qui correspond à l'opération ou aux relations entre les nombres en jeu dans l'opération ; de l'autre, représenter la situation mathématique du problème. Ces deux manières d'utiliser la droite graduée ont été inférées de l'observation des flèches que les élèves ont placées sur la droite graduée. Par exemple, dans le problème LPb (voir la Méthodologie), les élèves qui ont utilisé la droite graduée pour représenter la structure mathématique de la situation du problème, ont construit la flèche qui apparaît dans la Figure 2a. Dans le même problème, la flèche qui apparaît dans la Figure 2b montre une représentation commune produite par les élèves qui ont utilisé la droite graduée comme aide au traitement numérique correspondant au procédé de solution.

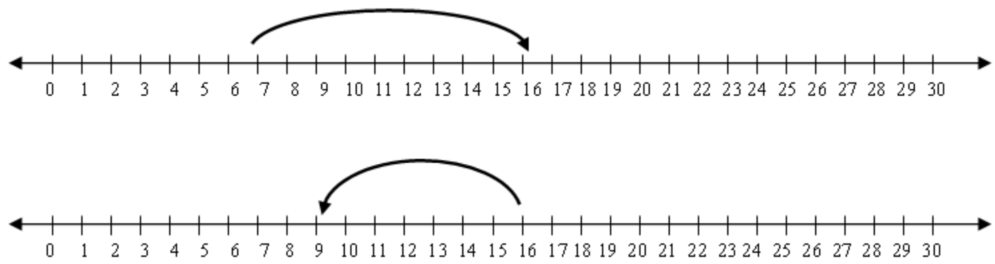


Figure 2 : Les flèches qui correspondent à l'utilisation de la droite graduée comme a) représentation de la situation et b) de la solution du problème (LPb).

Les différentes utilisations de la droite graduée choisies par les élèves ayant résolu correctement le problème en utilisant la droite graduée dans leur solution, selon le niveau, le groupe et pour chaque problème, sont présentées dans le tableau 3.

L'efficacité de chaque type d'usage de la droite graduée variait suivant la structure mathématique du problème.

Dans les problèmes avec une transformation positive dont l'inconnue portait sur la transformation (LPb) la majorité (plus de 80%) des élèves ayant réussi le problème, de chaque âge et de chaque groupe d'enseignement, ont utilisé la droite graduée pour représenter la situation du problème. Une préférence plus faible mais toujours importante (48-73%) de ce type d'usage de la droite graduée apparait dans la résolution de problèmes avec une transformation négative et l'inconnue sur la transformation (LNb).

Dans les problèmes avec transformation positive et inconnue sur l'état initial (LPa), les élèves de CP et CE1 ont utilisé la droite graduée pour représenter la situation du problème à un degré moindre (42-77%) que dans les problèmes avec inconnue sur la transformation. Les élèves de CE2 étaient plus enclins (69-85%) à utiliser la droite graduée différemment, c'est-à-dire comme une représentation du calcul nécessaire pour la résolution du problème.

De manière similaire au problème LPa, dans les problèmes à transformation négative et inconnue sur l'état initial (LNa) 50-69% des élèves ont utilisé la droite graduée pour représenter la situation du problème. Il est intéressant de noter qu'un fort pourcentage d'élèves du CE2 du groupe contrôle (92.3%) a utilisé la droite graduée pour mettre en œuvre des opérations arithmétiques nécessaires à la résolution du problème.

Type de problème	Age	LPb		LNb		LPa		LNa	
		Rep. Sit.	Rep. Sol.	Rep. Sit.	Rep. Sol.	Rep. Sit.	Rep. Sol.	Rep. Sit.	Rep. Sol.
Groupe de contrôle	6-7 ans	89.7	10.3	53.7	46.3	53.7	46.3	52.5	47.5
	N	*39*		*54*		*41*		*40*	
	7-8 ans	95.2	4.8	72.7	27.3	77.3	22.7	68.8	31.3
	N	*21*		*22*		*22*		*16*	
	8-9 ans	85.7	14.3	58.3	41.7	15.4	84.6	7.7	92.3
	N	*21*		*24*		*26*		*13*	
Groupe expérim.	6-7 ans	100	0	69.7	30.3	64	36	60	40
	N	*25*		*33*		*25*		*25*	
	7-8 ans	81	19	48	52	42	58	50	50
	N	*42*		*50*		*50*		*30*	
	8-9 ans	93.1	6.9	68.3	31.7	30.8	69.2	54.5	45.5
	N	*58*		*60*		*52*		*33*	

Rep. Sit. : représentation de la situation, Rep. Sol. : représentation de la solution

Tableau 3 : Pourcentages par groupes d'élèves ayant résolu correctement un problème pour chaque type d'utilisation de la droite graduée.

En résumé, l'apport de la droite graduée en tant que représentation de la situation du problème était plus grand dans la résolution de problèmes avec l'inconnue sur la transformation que dans la résolution de problèmes avec l'inconnue sur l'état initial. L'apport de la droite graduée dans la représentation de la solution du problème était plus important dans les problèmes avec l'inconnue sur l'état initial que dans la résolution de problèmes avec l'inconnue sur la transformation.

En ce qui concerne la relation entre l'âge et l'usage de la droite graduée, dans le groupe contrôle, l'usage correct le plus fort de la droite graduée en tant que représentation de la situation du problème est l'apanage des élèves de CE1, tandis que l'usage correct le plus fort de la droite graduée en tant que représentation de l'opération numérique du problème est l'apanage des élèves de CE2. Dans le groupe expérimental, la droite graduée est plus largement utilisée comme une représentation de la situation du problème par les élèves de CP, alors qu'elle est plus largement utilisée comme une représentation de la résolution du problème par les élèves de CE1.

Considérant l'usage de la droite graduée en fonction du mode d'enseignement, au CP et au CE2 le groupe expérimental a montré une plus grande préférence que le groupe contrôle pour l'utilisation de la droite graduée en tant que représentation de la situation du problème. Au CE1, le groupe expérimental a affiché une plus grande préférence que le groupe de contrôle pour l'utilisation de la droite graduée comme une représentation de la résolution du problème. Pour résumer, il est évident que, pour les élèves ayant résolu correctement un problème, l'emploi de la droite graduée en tant que représentation de la solution du problème ou de la situation du problème varie avec l'âge et l'enseignement.

Plus que tout, la façon dont les élèves ont utilisé la droite graduée n'a pas eu de conséquences sur leur performance. Une exception : le test du "Chi carré" a montré que le type d'usage de la droite graduée dans la résolution de problème à transformation négative avec l'inconnue sur la transformation (LNb) et de problème à transformation positive avec l'inconnue sur l'état initial (LPa), par les élèves de CE2 et de CP respectivement du groupe expérimental, a différencié les performances des élèves.

Plus spécialement, chez les élèves de CE2 du groupe expérimental, parmi ceux qui ont utilisé la droite graduée pour représenter la situation du problème (LNb), une part significativement plus importante ($x^2=4.16$, df=1, $p<0.05$) des élèves a donné une réponse correcte (85.4%, n=48) par rapport à la proportion d'élèves correspondante (65.5%, n=29) qui ont utilisé la droite graduée pour représenter l'opération arithmétique du problème. Chez les élèves de CP du groupe expérimental, parmi ceux qui ont utilisé la droite graduée pour représenter la situation du problème (LPa), une part significativement plus importante ($x^2=4.94$, df=1, $p<0.05$) des élèves a réussi (59.3%, n=27) par rapport à ceux (30%, n=30) qui ont utilisé la droite graduée pour représenter l'opération arithmétique du problème.

4. Discussion

Cette étude cherchait à donner un aperçu du rôle de la droite graduée dans la résolution de problèmes additifs, en explorant la manière dont ce modèle influence sur la performance des élèves dans la résolution des problèmes de diverses structures. Il s'agissait aussi d'identifier la manière dont les élèves utilisent la droite graduée dans le contexte particulier de la résolution de problème et d'analyser les effets d'un programme expérimental centré sur l'introduction et l'usage de la droite graduée dans la résolution de problème additifs au CP, CE1 et CE2.

Le modèle de structure globale du phénomène suggère que les élèves ont utilisé, d'un coté, des processus similaires pour résoudre les problèmes avec l'inconnue sur l'état final. D'un autre coté, pour résoudre les problèmes plus compliqués avec l'inconnue sur l'état initial ou sur la transformation, les élèves ont utilisé des processus qui diffèrent suivant le type de représentation, texte et texte avec droite graduée. Ce résultat a mis en lumière les effets différentiels des deux types de représentations de l'énoncé de départ, la description verbale et la description verbale avec droite graduée, dans la résolution de problèmes complexes, mais non dans la résolution de problèmes simples. Ainsi, l'usage par les élèves des diverses représentations et en particulier de la description verbale et de la droite graduée peut considérablement contribuer à l'apprentissage de la solution des problèmes de transformation avec l'inconnue sur l'état initial ou la transformation, mais n'affecte pas nécessairement l'apprentissage de la solution des problèmes ayant la quantité inconnue sur l'état final.

Une conclusion importante qu'on peut tirer de cette étude est la plus grande efficacité d'un enseignement explicite des problèmes de transformation au CP et CE1. En effet, les élèves du groupe expérimental de CP et CE1 ont réussi mieux dans la résolution de divers types de problèmes avec ou sans droite graduée que les élèves du groupe contrôle, ce qui montre les effets positifs du programme expérimental sur leur capacité générale à résoudre des problèmes. L'apport du programme expérimental a été plus important dans la résolution de problèmes ayant l'inconnue sur l'état initial et la transformation, respectivement. Ces résultats suggèrent qu'un jeu entre des représentations différentes (matériel, verbal, symbolique et droite graduée) avec un accent sur la fonction de modélisation de la droite graduée pour représenter la situation d'un problème de transformation - ce qui est mis en lumière par le programme expérimental -, offre un soutien non seulement dans la capacité des élèves à utiliser la droite graduée dans ce contexte, mais aussi dans leur capacité à construire des représentations mentales appropriées pour ces problèmes complexes et donc dans la compréhension de ces structures mathématiques par les élèves, indépendamment de la représentation des problèmes. Ce ne fut pas le cas des élèves de CE2, pour lesquels la performance dans la résolution de problèmes additifs était déjà élevée, ce qui indique qu'à ce stade du développement la plupart des élèves n'ont plus besoin de représentations auxiliaires, telle que la droite graduée, pour la compréhension ou la résolution de problèmes additifs utilisés ici.

Les scores des élèves sur les problèmes d'addition avec la droite graduée ont été essentiellement équivalents, et dans certains cas plus faibles, par rapport à leurs performances sur les problèmes verbaux. Ce résultat pourrait s'expliquer par le fait que la grande majorité des élèves de l'échantillon entier (environ 70% ou plus) a évité d'utiliser la droite graduée (le problème avec la droite graduée a donc été traité alors comme un problème verbal) ou a utilisé la droite graduée de façon inappropriée dans la résolution (ce qui conduit à des erreurs). Une interprétation qui peut être donnée pour ces réactions des élèves face aux problèmes avec la droite graduée est que la droite a exercé un rôle assez complexe dans la résolution des problèmes. Cela peut avoir été causé par les difficultés de conversion d'une description verbale en une description imposée sous forme de droite graduée. Ces difficultés de conversion peuvent provenir de deux déficiences. La première concernerait la compréhension du modèle, à cause probablement d'une représentation duale du nombre sur la droite graduée, en tant que vecteur et en tant que point (représentation géométrique), ou en tant que différence entre les nombres des deux points (représentation arithmétique) (Gagatsis et *al.*, 2003). Le fait que la représentation du texte de problèmes complexes avec droite graduée n'est pas nécessairement en conformité avec la représentation mentale que les élèves ont déjà construit pour ces problèmes peut être une deuxième interprétation de leurs difficultés face aux problèmes avec droite graduée.

Malgré la complexité de la droite graduée, les élèves ayant utilisé la droite correctement ont eu des résultats meilleurs ou équivalents à des élèves qui n'ont pas utilisé la droite graduée ou l'ont utilisée de façon inappropriée dans les problèmes de diverses structures. Donc, l'utilisation correcte de la droite graduée a été un moyen efficace de résoudre certains problèmes additifs. Ce résultat indique que le degré d'efficacité de l'utilisation de la droite graduée dans la solution des problèmes additifs peut varier selon la structure du problème. Cependant dans cette étude, l'utilisation de la droite graduée par les élèves a été examinée dans la solution d'un seul problème pour chaque structure différente. Cela ne nous permet pas de tirer des conclusions légitimes et générales sur les types de structures de problèmes qui peuvent être soutenus par l'utilisation de la droite graduée et dans quelle mesure. Ainsi, pour tirer des conclusions plus robustes et fournir des interprétations valables pour l'efficacité de l'utilisation de la droite graduée, une recherche plus approfondie est nécessaire. Une telle recherche pourrait examiner les performances et les processus des élèves dans un plus grand nombre de problèmes additifs avec la droite graduée pour chaque structure, à la fois quantitativement et qualitativement.

L'analyse dans cette étude des processus de résolution des problèmes par les élèves a vérifié la déclaration de Vergnaud (1986) selon laquelle deux types de représentations liées à un problème de transformation peuvent être distingués : la représentation de la situation du problème, en d'autres termes, la transformation telle que décrite dans le texte, et la représentation de la solution du problème ou de la procédure de résolution, en d'autres termes, de l'opération entre les nombres du problème ou des relations entre les nombres en jeu dans l'opération. Les deux types de représentations du problème à transformation ont été identifiés dans la façon dont les élèves ont utilisé la droite graduée dans la résolution des problèmes. Cela suggère que quand la fonction de modélisation de la droite graduée dans le contexte de problèmes à transformation aide le processus de résolution du problème, c'est sans doute de deux manières : tout d'abord, les élèves qui exécutent une conversion de la situation du problème en passant de la description verbale à une représentation graphique de type droite graduée se concentrent sur la structure mathématique du problème plutôt que sur son contexte (Duval, 2003) et représentent sur la droite graduée non seulement l'ordre de grandeur entre deux quantités données mais aussi la position de ces quantités et la place de la quantité manquante. Cela peut être accompli en dessinant un vecteur ou une flèche qui représente la transformation et pour lesquels les points de départ et d'arrivée représentent les états initial et final respectivement. Deuxièmement, les élèves qui utilisent la droite graduée pour visualiser l'opération numérique qui correspond à la solution du problème ont déjà modélisé la transformation de ce problème et construit une représentation mentale de la situation du problème, ou dit autrement, du rôle de chacune des informations du problème. Ainsi, la droite graduée est utilisée comme une aide mentale pour le processus numérique de la résolution du problème. Cela peut être accompli en dessinant un vecteur ou une flèche dont l'ampleur spécifique et la direction représentent la quantité connue qui est ajoutée ou soustraite d'une autre quantité connue, qui est le point de départ de la flèche. Cette flèche se termine en un autre point de la droite graduée qui correspond au montant manquant. Ainsi, on peut être affirmer que la fonction de modélisation de la droite graduée peut faciliter deux étapes distinctes du processus de résolution du problème : d'un coté, la modélisation de la structure mathématique donnée dans le problème et de l'autre l'exécution de l'opération arithmétique du problème et les relations entre les nombres en jeu dans l'opération pour trouver la réponse numérique. Il faut noter que la manière dont les élèves utilisent la droite graduée ne modifie pas leur succès dans la plupart des problèmes, ce qui montre que les élèves utilisent la droite graduée de la manière qui convient le mieux pour eux et alors les deux manières d'utiliser la droite graduée peuvent être bénéfiques dans le processus de résolution du problème par l'élève.

L'ampleur avec laquelle chaque fonction de modélisation (chaque type d'utilisation) de la droite graduée a apporté un soutien à la résolution correcte du problème a varié avec la structure mathématique du problème et particulièrement de la place de l'inconnue. Représenter la structure de la situation mathématique du problème a été employé plus largement dans les problèmes avec l'inconnue sur la transformation, que dans les problèmes avec l'inconnue sur l'état initial. Une explication possible est que la flèche que les élèves construisent sur la droite graduée pour représenter la transformation de la situation mathématique des problèmes avec l'inconnue dans la transformation a probablement aidé les élèves à visualiser la quantité inconnue de cette modification. Représenter l'opération numérique de la solution du problème a été trouvé plus fréquemment dans la solution des problèmes avec l'inconnue sur l'état initial que dans les problèmes avec l'inconnue sur la transformation. Dans les problèmes avec l'inconnue sur l'état initial le décor initial n'a pu être représenté (Briars & Larkin, 1984), et ainsi la modélisation de l'action décrite par le problème a pu rendre la résolution du problème plus difficile. Par conséquent, il apparaît que renverser l'action ou la transformation de ces problèmes, en commençant par l'état final sur la droite graduée, était plus efficace et compréhensible pour les élèves.

L'ampleur avec laquelle les élèves ont utilisé correctement la droite graduée dans chaque cas a varié selon l'enseignement et l'âge. Le groupe expérimental d'élèves de CP et CE2 a utilisé plus efficacement la droite graduée en tant que modèle de la situation du problème, comparé au groupe contrôle. Cela peut être expliqué par l'accent donné dans le programme expérimental à la fonction de modélisation de la droite graduée pour représenter la structure mathématique de la situation du problème. Toutefois, le groupe expérimental d'élèves du CE1 a utilisé plus correctement la droite graduée comme une aide mentale du processus numérique de la résolution du problème, comparé au groupe contrôle. Bien que cette conclusion nécessite de plus amples analyses, il peut être affirmé que les élèves de CE1 qui ont reçu l'intervention ont développé une plus grande flexibilité en utilisant la droite graduée dans les problèmes de transformation et ainsi ont pu sélectionner la fonction de modélisation de la droite graduée qui a le mieux servi leurs besoins.

Conclusion

Cette étude a montré que malgré la complexité de la droite graduée, la droite peut être un modèle puissant pour l'enseignement et l'apprentissage de problèmes de transformation dans les premières classes de l'école élémentaire, à condition qu'elle soit systématiquement liée à d'autres représentations (matérielle, verballe et symbolique) et que ses différentes fonctions de modélisation dans les diverses structures mathématiques des problèmes de transformation soient introduites et discutées. Il pourrait être théoriquement intéressant et utile en pratique pour des futures recherches d'examiner si la droite graduée peut faciliter la résolution de diverses catégories de problèmes additifs, même plus complexes, auprès des élèves d'âges examinés ici, mais aussi auprès d'élèves plus âgés.

Cependant, cette étude a également prouvé que la droite graduée n'aide pas toujours à résoudre des problèmes de transformation. Ainsi, il serait de grand intérêt d'explorer les causes de ce phénomène. Par exemple, une exploration du style cognitif des élèves et des représentations mentales spontanées qu'ils construisent pour les diverses problèmes de transformation sans droite graduée par rapport à leur emploi de la droite graduée en résolvant des problèmes équivalents avec une droite graduée pourrait apporter un éclairage sur cette question.

Mais, quelle est la contribution de cette étude à la définition de l'ETA ? Cette étude a apporté des informations spécifiques sur une partie des composants de l'ETA et de leur réseau, d'un point de vue cognitif.

Nos résultats soutiennent l'introduction de Kuzniak (2010) des représentations sémiotiques comme composante de base de l'ETM. En particulier, la structure sous-jacente dans la solution des problèmes additifs vérifiée ici et les performances des élèves dans divers types de problèmes ont apporté un éclairage sur les relations entre les représentations sémiotiques des modèles, c'est-à-dire la description verbale et la droite graduée et les structures relationnelles d'une catégorie spécifique de problèmes arithmétiques, c'est-à-dire les problèmes de transformation. En d'autres termes, la preuve a été apportée des effets significatifs du type de représentation sémiotique en résolvant des problèmes de transformation d'une structure complexe dans les premiers niveaux de l'école primaire.

Par ailleurs, les résultats de cette étude ont montré que la droite graduée peut aider les élèves (principalement les CP et les CE1) à construire une image spatiale-visuelle de la structure relationnelle d'un problème de transformation ou le processus numérique nécessaire à l'obtention d'une réponse. D'un côté, la construction de la représentation visuelle de la structure du problème est le résultat de la conversion d'une description verbale à une représentation graphique sur la droite graduée. La construction de cette représentation visuelle est un processus qui peut aider les élèves à mieux comprendre la structure mathématique du problème. D'un autre côté, la construction d'une représentation visuelle d'une opération numérique peut être assurée via la conversion d'une opération sous forme symbolique à une représentation graphique sur la droite graduée et le traitement dans le modèle de la droite graduée, c'est-à-dire, via l'utilisation de la droite graduée pour exécuter le calcul. La construction de cette représentation visuelle est aussi un processus qui peut aider les élèves à apporter une résolution correcte.

Cette étude a examiné la nature de l'ETA dans les premiers niveaux de l'école primaire dans le domaine des problèmes additifs en se concentrant sur l'ETA personnel des élèves. Dans de futures recherches, il pourrait être important pour la construction de l'ETA d'examiner ses caractéristiques dans le domaine particulier de la perspective de l'ETA qui concerne l'enseignant, aussi bien que l'ETA de référence ou idoine (Kuzniak, 2009) dans l'enseignement de problèmes additifs. L'influence de ces types d'ETA sur l'ETA personnel de l'élève pourrait être aussi analysée dans des futures recherches. De telles études pourraient apporter des informations de valeur quant aux propriétés des divers paradigmes sur l'enseignement de l'arithmétique.

Bibliographie

ADETULA L. (1989), Solutions of simple word problems by Nigerian children: Language and schooling factors, *Journal for Research in Mathematics Education*, **20**, 489–497.

BENTLER P.M. (1990), Comparative fit indexes in structural models. *Psychological Bulletin*, **107**, 301–345.

BRIARS D.J. & LARKIN J.H. (1984), An integrated model of skill in solving elementary word problems, *Cognition and Instruction*, **1**, 245–296.

COQUIN-VIENNOT, D. & MOREAU, S. (2007), Arithmetic problems at school: When there is an apparent contradiction between the situation model and the problem model, *British Journal of Educational Psychology*, **77**, 69–80.

DUVAL, R. (2003), Décrire, visualiser ou raisonner : quels «apprentissages premiers» de l'activité mathématique ?, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **8**, 13–62.

ELIA, I. (2009), L'utilisation d'images dans la resolution de problemes additifs : quel type d'image et quel rôle ?, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **14**, 5–29.

ELIA I. GAGATSIS A. & DEMETRIOU A. (2007), The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems, *Learning and Instruction*, **17**, 658–672.

ERNEST, P. (1985), The number line as a teaching aid, *Educational Studies in Mathematics*, **16**, 411–424.

GAGATSIS, A. SHIAKALLI, M. & PANAOURA, A. (2003), La droite graduée comme modèle géométrique de l'addition et de la soustraction des nombres entiers, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **8**, 95–112.

HARRIES, T. BARMBY, P. & SUGGATE, J. (2008), What's in a picture? Understanding and representation in early mathematics, In *Teaching and Learning Early Number* (Ed. I. Thompson), 160–175, Open University Press, Berkshire, U.K.

HART, K.M. (ED.) (1981), *Children's understanding of mathematics*, John Murray, London.

KUZNIAK, A. (2009), Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France, dans *Recherche en Didactique des Mathématiques*, (Eds. A. Gagatsis, A. Kuzniak, E. Deliyianni & L. Vivier), 71–89, University of Cyprus, Lefkosia.

KUZNIAK, A. (2010), *Communication soumise au Symposium Franco-Chypriote de didactique.*

MUTHÉN, L. K. & MUTHÉN, B.O. (2004), *Mplus User's Guide,* (3rd ed.), Muthén & Muthén, Los Angeles, CA.

NESHER, P. GREENO, J.G. & RILEY, M.S. (1982), The development of semantic categories for addition and subtraction, *Educational Studies in Mathematics*, **13**, 373–394.

NESHER, P. & HERSHKOVITZ, S. (1991), Two-steps problems-research findings, In *Proc. 15th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (*Ed.* F. Furinghetti), **3**, 65–71, PME, Assisi, Italy.

RAFTOPOULOS, A. (2002), The spatial intuition of number and the number line, *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, **1(2)**, 17–36.

VERGNAUD, G. (1986), Psychologie du développement cognitive et didactique des mathematiques : un exemple : les structures additives, *Revue Grand N*, **38**.

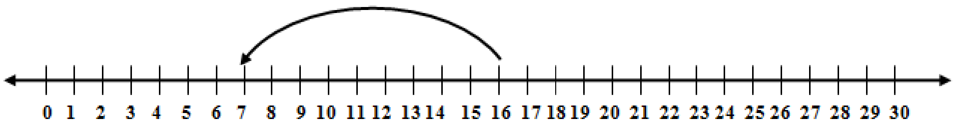
VERSCHAFFEL, L. & DE CORTE, E. (1993), A decade of research on word problem solving in Leuven: theoretical, methodological and practical outcomes, *Educational Psychology Review*, **5**, 239–256.

Iliada ELIA
Département d'Éducation,
Université de Chypre,
P.O. Box. 20537,
Lefkosia, Chypre
elia.iliada@ucy.ac.cy

Annexe

Exemples de tâches proposées aux élèves du groupe expérimental

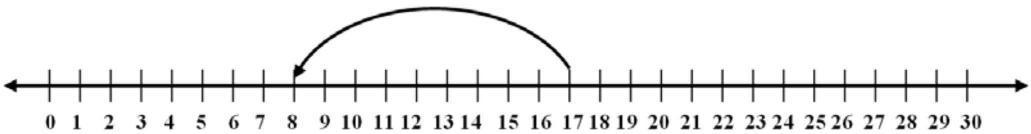
1. Lequel des trois énoncés ci-dessous correspond à la droite graduée ?



1. Un petit livre a 16 pages. J'ai lu 9 pages. Combien de pages me restent à lire ?
2. Un petit livre a 16 pages. J'ai lu 7 pages. Combien de pages me restent à lire ?
3. J'ai lu 9 pages d'un petit livre et 16 pages me restent à lire. Combien le livre comporte-t-il de pages ?

2. Quelque chose manque dans l'énoncé du problème suivant. Trouvez-le à partir de la droite graduée.

J'ai acheté une gomme pour ... centimes. Maintenant, j'ai 8 centimes. Combien d'argent avais-je avant d'acheter la gomme?



CATHERINE HOUDEMENT

CONNAISSANCES CACHÉES EN RÉSOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES ORDINAIRES À L'ÉCOLE

Abstract. Hidden knowledge in usual verbal problem solving at primary school. This paper contributes to determine student's knowledge involved in arithmetic word problem solving, that are ignored by mathematics education research but discriminate reinvestment problems solving students : among these skills the use of a modeling approach (models are the arithmetic operations), different types of controls and the qualification. This paper shows how rich is a clinical approach after the solving session to discover ignored knowledge and feeds current (study of semiotic tools) and upcoming researches (controls and qualification) in relation to flexibility.

Résumé. Cet article participe à la détermination de connaissances que les élèves posséderaient ou qu'ils devraient posséder pour résoudre des problèmes arithmétiques verbaux. L'étude se centre sur les connaissances qui contribuent aux différences entre réussites d'élèves sur des problèmes de réinvestissement et qui sont peu connues des recherches en didactique des mathématiques. Parmi ces connaissances se trouvent l'utilisation d'une démarche de modélisation, divers types de contrôles et ce que nous appelons la qualification. Cet article prouve la potentialité d'une approche clinique sous forme d'entretien après la séance et alimente des pistes de recherche déjà initialisées (outils sémiotiques efficaces) ou à venir (jeu de contrôles et qualification) liées à l'apprentissage d'une certaine flexibilité.

Mots-clés. Résolution de problèmes, problèmes arithmétiques, schémas de problèmes, qualification, connaissances cachées, registres sémiotiques, modélisation, démarche expérimentale, flexibilité.

Introduction

Epistémologiquement faire des mathématiques est indissociable de la résolution de problèmes. Concernant l'enseignement des mathématiques, en particulier à l'école primaire (niveaux 1° à 5°, *id est* CP à CM2), l'hypothèse actuelle communément partagée est la suivante : les problèmes sont à la fois la source et la finalité des connaissances mathématiques. Ceci signifie : pour apprendre des mathématiques, il faut résoudre des problèmes ; mais pour résoudre des problèmes, il faut des connaissances mathématiques. Nous sortirons de ce cercle vicieux en considérant dans notre étude des problèmes à résoudre pour lesquels les élèves ont a priori « déjà les connaissances », c'est-à-dire des problèmes de réinvestissement.

Notre souci est de mieux appréhender les connaissances auxquelles les élèves font appel ou qu'ils mettent en œuvre, de leur propre initiative, pour traiter des

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 16, p. 67 – 96.

problèmes ordinaires, plus spécifiquement les problèmes arithmétiques verbaux[1]. Bien entendu les recherches contemporaines sur les problèmes arithmétiques verbaux abondent (par ex. Nesher & Hershkovitz, 1991 ; Verschaffel & De Corte, 1993 ; Coquin-Viennot & Moreau S., 2007, …). Un grand nombre de recherches se centre sur l'étude de l'efficacité de l'enseignement d'outils sémiotiques (par exemple la droite numérique, voire la droite « des entiers », cf. Elia dans ce numéro) pour la réussite aux problèmes. Ce n'est pas dans ce cadre que nous nous plaçons : nous inscrivons cette recherche, dont nous voulons souligner le caractère exploratoire, dans la volonté de débusquer des connaissances ignorées, au sens des enjeux cachés d'apprentissage (Castela, 2008). Ces connaissances ignorées seraient nécessaires à la réussite (ici la résolution correcte des problèmes verbaux arithmétiques), mais elles ne seraient repérées ni par les études didactiques, ni par les institutions d'enseignement, au sens où l'enseignement effectif de ces connaissances ne serait pas expressément conseillé, que ce soit dans les programmes ou les ressources pédagogiques. Parmi ces connaissances, certaines seraient utilisées par les résolveurs experts de façon non consciente, elles auraient été auto-construites ou apprises « par hasard » (à l'occasion d'une remarque anodine d'un professeur,…) ; dans tous les cas, leur absence poserait problème aux élèves qui en sont démunis.

Cet article se propose d'installer cette problématique dans le cadre de la didactique française, de valider l'hypothèse de l'existence de telles connaissances en les exhibant, et d'ouvrir de nouvelles perspectives de recherche qui prendraient comme objets d'étude la possibilité et la pertinence d'un enseignement de ces connaissances. Il cherche à montrer en quoi cette étude interroge la notion de flexibilité cognitive (Clément, 2009) et questionne la difficulté de son enseignement.

1. Une première insertion théorique

L'étude des connaissances en jeu mises en jeu par les élèves dans la résolution de problèmes verbaux arithmétiques d'école primaire n'est pas si courante : en didactique, les travaux liés aux problèmes ordinaires portent plutôt sur le secondaire (Coppé, 1995) et/ou proposent plutôt une analyse a priori de problèmes (par exemple Robert, 1998).

Les problèmes arithmétiques verbaux usuels en primaire ont cette particularité de problématiser une réalité, évoquée par l'énoncé, pour obtenir une réponse mettant en jeu des mathématiques.

[1] Problèmes numériques, résolubles avec une (ou plusieurs) des quatre opérations usuelles, et dont l'énoncé est un texte, plutôt écrit.

Nous distinguons deux versants du passage du réel (présent ou évoqué – Houdement, 1999) au traitement mathématique : la *mathématisation* (Freudenthal, 1971) et la *modélisation* par des connaissances mathématiques. La *mathématisation* est une première étape d'apprentissage, elle consiste à acquérir des connaissances mathématiques à partir de la résolution de problèmes issus du réel par la transformation de modèles implicites d'action (Brousseau, 1978 ; Vergnaud, 1990). La *modélisation* est plutôt l'inférence, puis l'opérationnalisation de mathématiques pour résoudre un problème issu du réel. Nous considérons que la résolution de problèmes **d'application ou de réinvestissement** ne relève pas tant de la *mathématisation* que de la *modélisation.*

Prenons l'exemple de la recherche du nombre de tulipes dans un massif à partir de ces quatre énoncés :

a) un massif de fleurs formé de 60 tulipes rouges et de 15 tulipes noires ;
b) un massif de 60 rangées, toutes de 15 tulipes ;
c) un massif de 60 fleurs, composé de tulipes et de 15 jonquilles ;
d) 60 tulipes disposées en 15 massifs tous identiques.

Les énoncés évoquent le même contexte, présentent la même structure syntaxique (similarité de lecture-compréhension), posent la même question (combien de tulipes dans UN massif ?), mettent en jeu les mêmes nombres (15 et 60) et pourtant ils relèvent d'opérations arithmétiques différentes. Comment savons-nous, nous experts, différencier les traitements ? Notre intérêt, déjà ancien, pour la résolution de problèmes (Houdement, 1999, 2003, 2009 ; Coppé & Houdement, 2002 ; Artigue & Houdement, 2007) nous a conduit à nous intéresser aux travaux de psychologues cognitifs qui se sont penchés spécifiquement sur les mathématiques, en particulier J. Julo et G. Vergnaud dont nous examinerons les réponses dans le paragraphe suivant.

Il est déjà intéressant de constater l'embarras que nous avons à expliquer, après coup, nos choix. Julo (1995, p. 86) l'avait fort bien pointé :
« *La vraie compréhension n'a pas de mémoire. Dès que nous avons compris quelque chose, nous oublions comment nous sommes parvenus à cette compréhension ou plus exactement nous interprétons la démarche qui nous a conduits à l'état actuel de notre compréhension à la lumière de ce nouvel état*.»[2]

[2] Notons qu'un des soucis de l'enseignement réside d'ailleurs dans la pertinence de la réinterprétation d'une réussite : établir une connexion entre les connaissances mathématiques à institutionnaliser et les stratégies des élèves mises en œuvre.

1.1. Le regard de cognitivistes sur les mathématiques

Julo (1995, 2002) suppose l'existence en mémoire d'objets mentaux structurés par le sujet, les schémas de problèmes, à fonction assimilatrice, qui permettent au sujet de mobiliser dans de nouveaux problèmes des connaissances acquises lors de la résolution réussie d'anciens problèmes. La nature exacte des schémas et leur organisation en mémoire est encore floue, mais il est admis que le sujet les forme à partir des problèmes qu'il rencontre, des représentations qu'il construit et des analogies qu'il perçoit. Julo distingue trois structures de schémas (Julo, 2002, p. 36) :

- les schémas de type « cas » : des problèmes de référence qui deviendraient prototypiques, tels différents cas de la bibliothèque du joueur d'échecs ;
- les schémas de type « regroupement », suivant un regroupement personnel, non nécessairement logique, mais pouvant être partagé entre individus (par exemple le contexte des recettes et des dépenses, où les réussites des élèves sont souvent plus nombreuses) ;
- les schémas de « catégorie plus abstraite », autour d'un même outil de modélisation (par exemple la droite arithmétique), une même procédure de résolution (par exemple la règle de trois) ou une certaine structure.

Des exemples de telles structures nous sont fournis par Vergnaud (1990) avec la théorie des champs conceptuels. Un concept prend du sens à partir d'une grande variété de situations, et pour l'élève la conceptualisation consiste à élaborer les moyens intellectuels de traiter des situations de plus en plus complexes. Cette conceptualisation passe par la mise en œuvre par l'élève de connaissances implicites dans l'action et la proposition par le médiateur de formes symboliques ad hoc (langage, écritures arithmétiques) propres à pointer des ressemblances dans le traitement des situations. Un champ conceptuel est ainsi un ensemble des situations dont la résolution met en jeu une grande variété de procédures, liés à des concepts très proches. Vergnaud fait en particulier l'hypothèse que les compétences des élèves résolvant des problèmes numériques élémentaires ne reposent pas tant sur leur maîtrise des algorithmes opératoires que sur la conceptualisation de relations liées à des types de raisonnements. Ce qui l'amène, d'une part, à regrouper les problèmes numériques ternaires selon deux champs conceptuels : les structures additives, autour de l'addition et de la soustraction et les structures multiplicatives autour de la multiplication, de la division et de la proportionnalité ; d'autre part à proposer à l'intérieur de chaque champ des niveaux de complexité a priori, appuyés ou confortés par des études statistiques de résultats d'élèves.

Les schémas de problèmes résulteraient de la création de relations (de nature logique ou autre) entre des problèmes, construites par le sujet, dans une approche ergonomique personnelle. Ces schémas se constitueraient **dans** l'activité de résolution de problèmes. Nous faisons nôtre cette hypothèse de Julo : certains élèves mettraient en œuvre de façon plus ou moins spontanée une structuration des problèmes résolus qui leur permettrait d'augmenter leur champ de problèmes résolubles, contrairement à d'autres élèves. Ce peut être coiffé par la flexibilité cognitive, envisagée comme capacité « à déplacer volontairement le foyer attentionnel d'une catégorie de stimuli à une autre, ou d'un processus cognitif à un autre » (Clément, 2009, p. 112).

1.2. Travail privé, travail public

Dans la mesure où nous souhaitons débusquer des connaissances ignorées, il nous faut « remonter » jusqu'à la composante privée du travail de l'élève, celle qui apparaît peu sur les traces publiques. Nous devons donc analyser d'une part les problèmes rédigés, mais aussi les brouillons des élèves. Mais nous savons, par expérience, que ces lieux d'écriture a priori privée sont diversement investis selon le contrat de classe : certains enseignants corrigent aussi les brouillons (ce qui enlève leur part privée), d'autres font utiliser l'ardoise (effaçable, ce qui rend le recueil des traces heuristiques impossible). C'est pourquoi l'étude des seuls brouillons ne nous suffit pas. Il nous faut trouver un moyen d'accès, autant que faire se peut, à la pensée individuelle en amont de l'écriture, celle qui déclenche un passage à l'écrit, sur la route de la solution.

Nous nous intéressons aussi au passage du *résultat* (souvent calculé) à la *réponse* (Margolinas, 1993, p. 208) et au fait de considérer le problème comme terminé. A partir de quand, de quoi l'élève reconnaît il le résultat de son calcul comme réponse à la question posée ? En effet certains élèves font des calculs et obtiennent des résultats sans savoir si ces résultats donnent la réponse.

2. Méthodologie

La question générale est la suivante : quelles idées, dans le temps court de la résolution d'un problème numérique viennent ou ne viennent pas à l'esprit de l'élève, provoquant ainsi une avancée vers la réponse ou au contraire un blocage ? Cette question est très générale mais elle traduit bien la recherche : se laisser surprendre par les idées des élèves, « *s'intéresser vraiment à ce que fait l'élève, à ce qu'il produit, à ses mathématiques* » (Conne, 1999, p. 53)

Pour avoir accès à la composante privée de l'élève, nous aurions pu demander, pendant la résolution aux élèves, de raconter leur recherche, mais il est connu que la formulation verbale n'est pas toujours possible et transforme le rapport à la tâche ; nous aurions pu chercher à recueillir des échanges entre deux élèves résolvant ensemble avec la présence d'un enregistreur, mais il est connu que la coopération transforme la réflexion. Or nous souhaitions « attraper la singularité ». Nous avons donc choisi, pour saisir la singularité, des entretiens individuels de type explicitation (Vermersch, 1994) méthodologiquement intéressants pour relever des « connaissances cachées » (Sackur & *al*. 1997 ; Castela, 2008). L'entretien (enregistrement audio) a eu lieu sur le temps de classe, mais hors de la salle de classe et loin du groupe classe, dans la semaine qui a suivi le moment où l'élève a résolu individuellement les problèmes dans la séance collective prévue pour cela.

Les problèmes ont été choisis par l'enseignant, dans le cadre de sa progression usuelle avec la commande du chercheur de problèmes arithmétiques ordinaires de réinvestissement. Le lecteur pourra être surpris de ce degré de généralité, nous n'avons pas resserré sur un champ conceptuel. Mais notre grande confiance dans les enseignants de notre étude nous faisait attendre des problèmes vus par l'enseignant comme susceptibles de réussites et nous voulions surprendre les connaissances des élèves qui différenciaient les réussites. Notre analyse après-coup des problèmes a confirmé que les problèmes relevaient de connaissances que les enseignants avaient déclaré faire travailler et apprendre et que les réussites étaient différentes selon les élèves.

Les élèves interviewés ont été choisis par le professeur avec la commande du chercheur d'élèves « bons » et « moins bons » en mathématiques. Cette différence n'a pas été pointée dans les analyses. Lors de l'entretien, l'élève avait sous les yeux la copie rendue (éventuellement corrigée) et son éventuel brouillon. Nous avons étudié onze protocoles écrits d'élèves de deux classes différentes de cycle 3 (grades 3°, 4° et 5°), en les mettant en relation avec copie et brouillon. En faisant des croisements entre des pensées de plusieurs élèves, nous avons ainsi dégagé des invariants (études croisées) ; nous avons aussi constaté des redondances dans la pensée d'un élève particulier (monographies).

Notre problématique peut donc se raffiner en : quelles connaissances, concernant la résolution de problèmes arithmétiques verbaux de réinvestissement, suffisamment partagées (par des élèves différents ou un même élève dans plusieurs problèmes), surprenantes au sens où peu connues en didactique des mathématiques ou mal repérées dans le programmes, …, outillent certains élèves ou semblent faire défaut à d'autres ?

3. Typologie des inférences et contrôles

Le lecteur aura saisi l'ouverture a priori de la question à l'étude. Pour organiser la présentation des interprétations issues de l'analyse des données, nous présentons ci-dessous une typologie, établie au fil d'analyses *a priori*[3], des inférences et des contrôles utilisables par les élèves dans la résolution de problèmes de réinvestissement. Ce développement participe au cadrage théorique de notre recherche.

La convocation d'une connaissance est fortement liée à celle du contrôle de sa pertinence dans le problème : contrôle ou *vérification*, au sens de Coppé (1995), « *argument avancé ou action mise en œuvre par l'élève pour limiter l'incertitude sur le résultat (….). Une vérification a pour conséquence soit d'accroître la vraisemblance et éventuellement acquérir la certitude du résultat, soit d'engendrer un doute plus grand et éventuellement déboucher sur une phase de rectification*. » (Coppé, 1995, p. 30). C'est l'idée d'un véritable processus de contrôle au sens de Margolinas (1993, p. 213) pour anticiper la validation, que nous exprimerons par l'expression inférences et contrôles. Ce rôle des contrôles a aussi été souligné par Burgermeister et Coray (2008) pour des élèves plus âgés résolvant des problèmes de réalité évoquée.

Quelle idée de l'action à mener ont les élèves ? Quel contrôle les élèves peuvent ils avoir à exercer sur le résultat de leur action ? Si leur action consiste à se lancer dans un calcul lié au choix d'une opération, la transformation du résultat en réponse passerait par un contrôle du nombre résultat. Nous proposons ici une typologie des inférences ou des contrôles (Houdement, 2006) en jouant sur leur nature : pragmatique, sémantique, syntaxique.

Nature sémantique : c'est l'interprétation de la situation du problème (Vergnaud, 1986 ; Coquin-Viennot & Moreau, 2007), interprétation liée à la représentation que l'élève se fait du problème (au sens de Julo, 1995) qui déclenche des associations de type : 'partager c'est diviser' ; 'fois c'est multiplier'.

A priori ce type d'interprétation se place souvent en amont du choix d'une opération, d'un calcul ; les trois autres raisonnements se situent davantage après qu'un calcul ait été mené à terme.

Nature pragmatique : c'est la connaissance de la réalité évoquée par le texte du problème (notamment l'ordre de grandeur des résultats) qui régule le résultat et éventuellement convainc l'élève de commencer un autre calcul.

Nature syntaxique : c'est l'analyse des relations entre les objets mathématiques (ici les nombres) qui permet d'avancer : seuls les nombres sont conservés (les mesures en jeu sans référence aux grandeurs qu'elles mesurent, par exemple 12, et non 12 euros ou 12 tables). Le contrôle s'exerce alors sur les écritures mathématiques, indépendamment de la signification que ces écritures ont par

[3] Il ne s'agit pas d'analyse *préalable*, mais bien d'une analyse *a priori (*Artigue, 1988) qui envisage des « possibles » dans les pensées des élèves.

rapport au texte du problème ou des grandeurs en jeu. Cette décontextualisation est souvent très utile pour l'obtention d'un résultat ; par contre elle peut se révéler problématique pour l'obtention de la réponse.

La qualification

En précisant la nature des inférences et des contrôles, nous essayons de prendre compte les deux plans d'étude liés à un problème verbal arithmétique : plan de la réalité et plan des mathématiques. Comment penser l'articulation ? Elle est d'abord liée à une sorte de syntaxe sur les grandeurs (que les physiciens nomment les équations aux dimensions), dont la version minimale est d'associer un nombre et une unité (12 euros). Nous appellerons cela *qualification faible*. Plus généralement qualifier revient à savoir dire (savoir se dire) quelle grandeur « contextualisée » est associée au nombre étudié, que ce nombre soit donné par l'énoncé ou issu d'un calcul. Nous distinguons la *qualification faible* de la *qualification* (complète).

Un exemple pour illustrer

Considérons le texte suivant : « Un commerçant dans l'habillement passe une commande de 2350 euros pour un lot de 130 chemisiers pour 1600 euros et 25 pulls. Il souhaite un bénéfice de 30% minimum à la vente. Quels seront les prix minimum de vente d'un chemisier, d'un pull ?

Supposons qu'un élève trouve le résultat 12 par le calcul de 1 600 divisé par 130. S'il se donne la peine de vérifier la pertinence de 12 comme quotient de 1 600 par 130, nous parlerons d'un contrôle syntaxique. S'il sait dire qu'il a trouvé « le prix d'achat d'un chemisier » nous dirons qu'il sait qualifier le quotient. S'il sait seulement dire que ce nombre correspond à des euros, nous parlerons d'une qualification faible. S'il réfléchit au fait que 12 euros est un prix « raisonnable » pour un chemisier, il effectuera un contrôle pragmatique.

Remarquons qu'un contrôle n'assure pas toujours la bonne réponse (ou la réponse optimale) : si le calcul choisi par l'élève, 1 600 divisé par 130, est correct, la réponse optimale est 12,31 euros. Un contrôle pragmatique peut faire obstacle à la réponse (12 euros, prix jugé trop faible pour un chemisier), toujours liée à une réalité évoquée.

Les paragraphes qui suivent présentent donc des connaissances, liées à la résolution de problèmes arithmétiques verbaux de réinvestissement, qui outillent certains élèves ou semblent faire défaut à d'autres. Le premier s'intéresse aux connaissances qui déclenchent et contrôlent l'idée de telle opération. Le suivant questionne la place de la qualification. Enfin le dernier interroge la disponibilité de connaissances sémiotiques liées aux écritures mathématiques.

4. Choisir un modèle ? Tester un modèle ?

4.1. Des stratégies pour inférer un modèle

Dans les problèmes arithmétiques rencontrés par les élèves de cette étude, les modèles à inférer sont essentiellement des opérations.

Les élèves repèrent souvent le « bon » champ conceptuel, c'est-à-dire qu'ils infèrent une des deux opérations du champ conceptuel dont relève le problème. Nous interprétons cela comme une utilisation d'inférences sémantiques pour déclencher un calcul ou des calculs. Ces inférences sont souvent « intériorisées », naturalisées, elles ne sont pas explicitables lors de l'entretien. Le lecteur pourrait se dire que cette absence d'explicitation relève d'un manque de mots pour le dire, nous préférons suivre l'hypothèse de Julo (voir plus haut) : « la vraie compréhension n'a pas de mémoire ... »

Voyons les réponses de Victor (5°), Clémence (5°) et Marie (5°) lors d'un questionnement général sur les problèmes :

> ***C.H. :*** Comment tu sais pour un problème que c'est moins / plus / fois ?
> ***Victor :*** Bah, quand j'ai la question je sais moins / plus / fois.
>
> ***C.H. :*** Et comment tu sais tout de suite l'opération que tu peux faire ?/ Qu'est-ce qui se passe quand tu sais tout de suite l'opération que tu peux faire ?
> ***Clémence :*** Bah quand je lis l'énoncé ça me vient comme ça / Quand je le lis.
>
> ***C.H. :*** Et comment tu sais que dans ce problème là il va y avoir une multiplication / ou une division.
> ***Marie :*** Bah / parce que quand / bah / enfin / je sais pas trop / je lis tout / et après je vois si je dois faire une multiplication ou /

Ces élèves perçoivent la relation entre énoncé et opération comme une évidence : tout se passe comme s'ils récupéraient en mémoire[4] un résultat, comme un adulte qui répond automatiquement 5 pour 17 moins 12. Les déclarations des élèves confortent les hypothèses de Julo sur l'existence en mémoire de schémas de problèmes, schémas qui seraient activés par des éléments de l'énoncé. Nous avons constaté que les éléments de l'énoncé qui jouent le rôle d'indices pour les élèves sont variables selon les connaissances des élèves.

Nous avons pointé différentes inférences de nature sémantique.
Deborah (cf. annexe 2, lignes 61 à 68), ayant à trouver le poids d'une table connaissant la masse (300 kg) de 25 tables, utilise la relation connue entre partage et division :

---

[4] Les psychologues cognitifs distinguent deux types de stratégies en calcul mental : celles correspondant à des récupérations et celles correspondant à des reconstructions ; cf. par exemple Thévenot & al (2010).

C.H. : Pourquoi tu penses que c'est l'opération qui va te permettre de trouver le résultat ?
Deborah : Bah, parce qu'on peut faire une multiplication / 300 multiplié par 25, c'est pas possible / C'est beaucoup trop / Ni une soustraction / Donc je pense faire une division / Et aussi parce qu'il faut partager / Il faut / Oui, faut partager[5].

Remarquons ici qu'il n'est pas simple de décider s'il s'agit d'une inférence ou d'un contrôle. Il faudrait avoir accès à la chronologie du raisonnement au moment de la résolution ; or cette temporalité n'est pas nécessairement restituée dans l'entretien. Mais cela n'est pas très important : nous nous attachons surtout à la nature « des inférences et des contrôles », qui se jouent dans une dialectique perceptible dans les entretiens.

En ce qui concerne Deborah, la connaissance « partager c'est diviser » intervient à deux moments de son raisonnement : intériorisée au début (lignes 45 à 48),

C.H. : Est-ce qu'avec ces deux phrases là : 25 tables et 300 kg on peut trouver le poids d'une table ?
Deborah** [hésitante] **: Oui / Enfin…
C.H. : Si tu as besoin d'un papier…
Deborah :** [en regardant C.H.]**: Je vais faire 300 divisé par 25.

puis explicitée dans la conclusion (ligne 68, fin de l'extrait plus haut).

Pour des élèves, certains indices (mots du texte ou actions du contexte) déclenchent des schèmes d'action mathématique (plus, moins / partager c'est diviser). A contrario, quand le problème ne donne plus d'indice (compréhensible par l'élève) sur des connaissances à convoquer pour sa résolution, certains élèves s'inquiètent et doutent de leurs compétences à résoudre.

4.2. Des jeux de contrôles sur le modèle pressenti

Un contrôle pragmatique des modèles pressentis[6] joue un rôle dans les décisions des élèves. Nicolas 3° (cf. annexe 1) déclare prendre en compte l'ordre de grandeur du résultat pour produire une réponse.

C.H. : D'accord. Et comment tu sais que tu dois choisir plus ou multiplier ?
Nicolas : J'essaie comme ça.
C.H. : T'essaie comme ça ? Et comment tu sais si ça va ou si ça va pas ?
Nicolas : Bah, quand je vois que le nombre est trop grand ou trop petit ou que ça me paraît un peu trop.

[5] Pour une meilleure lisibilité, les passages qui illustrent particulièrement le propos seront soulignés par nous.
[6] Dans l'entretien nous les encourageons à retrouver (par essai d'introspection selon la technique Vermersch) comment ils sont arrivés à telle idée.

Revenons sur Deborah 5° (cf. annexe 2, lignes 45 à 54) : elle doute de son calcul (résultat) car devant la valeur calculée du poids d'une table, elle s'interroge sur la possibilité d'un tel poids pour une table.

C.H. : Est-ce qu'avec ces deux phrases là : 25 tables et 300 kg on peut trouver le poids d'une table ?
Deborah** [hésitante] **: Oui / Enfin …
C.H. : Si tu as besoin d'un papier …
Deborah** [en regardant C.H.] **: Je vais faire 300 divisé par 25.
C.H. : Tu fais ce que tu penses / Je sais pas moi / Le papier c'est ton brouillon ?
Deborah** [elle pose la division 300 par 25] **: On trouve 12.
C.H. : Alors qu'est-ce que c'est 12 ?
Deborah : Le poids d'une table.
C.H. : Es tu sure de ça ?
Deborah : Non, ça m'étonnerait.
C.H. : Pourquoi ça t'étonnerait ?
Deborah : <u>Bah c'est beaucoup / C'est pas assez je veux dire</u>.

Mais un peu plus loin (lignes 61 à 68), elle nous montre qu'elle contrôle l'opération pressentie (la division) par rapport à deux autres (multiplication, soustraction) par l'ordre de grandeur supposé de la réponse attendue.

C.H. : Avec ce renseignement là, 25 tables 300 kg, t'as fait quelque chose, est ce que tu as confiance dans ce que tu as fait ou tu doutes un petit peu ?
Deborah : Bah, je doute un petit peu.
C.H. : Tu doutes un peu parce que tu trouves que c'est pas assez 12 pour une table ? Est ce que tu doutes de l'opération que tu as faite ?
Deborah : Bah, no… non.
C.H. : Tu penses que c'est l'opération qui va te permettre de trouver le résultat ?
Deborah : Oui je pense.
C.H. : Pourquoi tu penses que c'est l'opération qui va te permettre de trouver le résultat ?
Deborah : <u>Bah, parce qu'on peut faire une multiplication / 300 multiplié par 25, c'est pas possible / C'est beaucoup trop</u> / Ni une soustraction / Donc je pense faire une division / Et aussi parce qu'il faut partager / Il faut / Oui, faut partager.

Deborah infère (à juste titre) une division, doute de sa stratégie après calcul du résultat et la réaffirme après avoir croisé deux types de contrôle : pragmatique (souligné ci-dessus) et sémantique (la dernière ligne ci-dessus).

Ainsi les contrôles sémantiques sont aussi utilisés. Citons encore Ludivine (cf. annexe 1).

C.H. : On a besoin de 3 œufs pour une brioche et on fait 8000 brioches.
Ludivine : C'est un partage.
C.H. : C'est un partage ? Tu fais un dessin si tu veux.
Ludivine : Oui, il faut que je fasse 3 œufs pour une brioche, *etc,…*

C.H. : Bon ça va faire combien d'œufs 3 œufs pour une brioche, combien pour 8 000 ?
Ludivine : Je sais pas // C'est une multiplication.
C.H. : C'est un partage ou une multiplication ?
Ludivine *[silence, puis lentement]* ***:*** Si on fait une division, on va peut-être trouver moins / que si on fait une multiplication on va trouver plus.
C.H. : Alors ?
Ludivine : Bah, une multiplication.

L'argument de vérification croise de nouveau contrôle pragmatique et sémantique : il faut plus d'œufs que de brioches, cet ordre sera conservé si le nombre de brioches augmente, ce que permet le modèle multiplication (de nombres entiers !).

4.3. Stratégies de choix de modèle

Notre étude a montré que l'inférence du calcul jugé le plus adapté semble s'être fait de diverses façons : soit de façon intériorisée (selon l'idée du schéma opérationnel de Julo) ; soit par interprétation réfléchie d'éléments de l'énoncé[7]. Une technique est apparue chez certains élèves : ils essaient plusieurs opérations (voire toutes), c'est-à-dire qu'ils font tous les calculs, puis mettent en œuvre des contrôles pragmatiques et sémantiques pour valider la « bonne » opération, en retravaillant les liens sémantiques connus (partager c'est diviser, …, tel schéma c'est telle opération), en comparant le résultat obtenu à l'ordre de grandeur de la réponse qu'ils infèrent de ce qu'ils savent de la réalité (contrôle pragmatique)…

Nous avions repéré, par expérience, cette technique chez certains élèves moyens ou faibles, mais nous n'avions pas imaginé qu'elle pouvait s'optimiser pour devenir un outil intégré de bons élèves. Finalement les élèves pratiquent une démarche expérimentale mentale : ils calculent grâce à différents modèles arithmétiques (les opérations) et réfutent les modèles en fonction de l'acceptabilité de la réponse, eu égard à des vérifications pragmatiques et/ou sémantiques.[8] Les jeux de contrôle jouent un rôle essentiel dans ce processus.

5. Savoir qualifier

L'intérêt de cette connaissance, savoir qualifier, est visible dans deux monographies, celles de Nicolas 3° et de Corentin 4° dans la même classe.

[7] Nos recherches sur d'autres élèves ont montré que le choix de l'opération pouvait aussi résulter de l'interprétation de l'environnement du problème : titre de la leçon du jour, *etc*.
[8] Il se peut aussi qu'un « effet maître » influe sur le traitement des problèmes par les élèves.

5.1. Nicolas ou le défaut de « qualification »

L'étude du protocole de Nicolas nous montre comment, à des fins calculatoires, il se libère des grandeurs pour avancer plus rapidement (cf. annexe 3) dans le monde numérique. Mais cette abstraction le coupe de la réalité du problème résumé ci-dessous.

> Adulte 6€ et enfant 4€ par séance. Séance de l'après-midi, 50 adultes et des enfants. Séance du soir, 15 adultes et 20 enfants. Recette de la journée 542€. Combien y avait-il d'enfants à la séance de l'après-midi ?

Dans un premier temps, Nicolas, après une suite de calculs justes posés en colonne sur son brouillon, recopiés sur la feuille réponse, a proposé la réponse 72 [qui correspond au prix payé par les enfants de l'après midi]. L'entretien est l'occasion de revenir sur cette résolution, en l'aidant à se remémorer puis à remonter le raisonnement qui se conclut par 72 (lignes 62 à 70).

> ***Nicolas :*** Bah là, j'ai essayé de faire : parce que un adulte c'est 6 € et un seul enfant 4 € / Un adulte c'est 6 € donc j'ai fait 15 fois 6 **= 90.** Ensuite il y avait 20 enfants à la séance, comme c'était 4€ j'ai fait 20 fois 4 = 80. Euh. Il y avait 50 adultes donc j'ai fait 50 fois 6 = 300 et là, il demandait combien il y a d'enfants à cette séance. Donc j'ai additionné ces 3 là et j'ai trouvé 542. J'ai trouvé la recette de la journée. J'ai trouvé 72 enfants.
> ***C.H. :*** J'ai vu que tu n'avais pas mis de phrase réponse, là je vois 150 enfants.
> ***Nicolas :*** Ah là ! Je me suis trompé, j'ai écrit 150 au lieu de 72 enfants.
> ***C.H. :*** Alors là quand tu … / Est-ce que ... / Quand tu calcules cela, qu'est-ce que tu calcules ? / Ça correspond à quoi le nombre 90 que tu cherches ?
> ***Nicolas*** *[silence]*
> ***C.H. :*** Le nombre 90 que tu as trouvé là, si tu pouvais me donner une petite phrase qui va avec ce nombre là.
> ***Nicolas*** *[silence]*
> ***C.H. :*** Tu ne vois pas … Donc quand tu as fait le calcul, tu avais envie de faire ce calcul là, mais tu vois pas à quoi correspond 90 ?
> ***Nicolas :*** Non.

L'entretien se poursuit avec des qualifications qui restent faibles (lignes 71 à 76).

> ***C.H. :*** Et ce calcul là, est-ce que tu vois à quoi il correspond ?
> ***Nicolas :*** A 4 fois 20.
> ***C.H. :*** Mais qu'est ce que tu as calculé par rapport au problème ?
> ***Nicolas :*** Bah 4 € et 20 enfants.
> ***C.H. :*** Et finalement quand tu fais 4 € et 20 enfants qu'est- ce que tu obtiens à la fin ?
> ***Nicolas :*** 80 €.

En encore (lignes 77 à 82).

> ***C.H. :*** Donc tu obtiens un prix, le prix … qu'ont payé les enfants / Et là quand tu fais 50 fois 6 ?
> ***Nicolas :*** Euh … Bah, c'était les 50 adultes multipliés par les 6 € de la séance.

C.H. : Donc ça correspond à quoi ?
Nicolas : Les 50 adultes.
C.H. : Donc les 300 ce sont des adultes ou des euros ?
Nicolas *[hésitation]* ***:*** Des euros.
C.H. : Des euros ? C'est le prix que payent les adultes ? Donc là tu as le prix que payent les enfants ? Là, le prix que payent les adultes ? Et finalement le 90 ?
Nicolas : C'est les 15 adultes plus les 6 €.

Le lecteur remarquera ci-dessus que CH injecte dans les échanges des qualifications (soulignées), que Nicolas ne reprend pas.

L'entretien se poursuit (lignes 83 à 88) vers une « vraie » qualification : mais elle était fournie par le texte.

C.H. : C'est 15 adultes qui payent 6 €, donc quand tu additionnes tout ça, ton 90, ton 80 et ton 300, tu additionnes des nombres. Mais c'est des nombres qui représentent quoi ?
Nicolas : Les euros.
C.H. : D'accord. Donc là le dernier, le 542, c'est quoi ?
Nicolas : Bah, la recette de la journée.

Dans cette dernière partie citée (lignes 89 à 99) Nicolas réaffirme, de façon cohérente, ce qu'il a cru lors de l'écriture de sa réponse sur la copie. Puis il nous donne à voir comment il réussit à entrer dans une qualification faible, puis complète.

C.H. : Des euros. Et finalement le 72 c'est quoi ?
Nicolas : Les enfants qu'il y avait à trouver. Les enfants qui restaient à la séance de l'après-midi.
C.H. : Comment tu sais que c'est le nombre d'enfants ?
Nicolas *[silence] :* Bah …
C.H. : Là, regarde on a des euros, là on a des euros, là on cherche ce qui faut pour aller de 470 à …
Nicolas : Ça y est, j'ai trouvé : 470 plus 72 ça fait 542. Donc 72 c'est le nombre
C.H. : D'enfants ?
Nicolas : Non. 472 c'est un nombre d'euros, 542 c'est un nombre d'euros. Donc 72 qui est là …
C.H. : C'est aussi ?
Nicolas : Des euros.
C.H. : C'est les euros qui correspondent à quoi ?
Nicolas : Au prix qu'ont payé les enfants.

Nicolas travaille sur un plan uniquement syntaxique, il se révèle incapable de qualifier seul, ne peut que faiblement qualifier les nombres calculés. Quand la question se complexifie, avec des étapes intermédiaires, Nicolas perd le fil du problème. Il montre son manque d'entraînement à la qualification, puis son succès quant à la qualification. Cette qualification ne termine pas le problème pour lui car il se trouve confronté à une opération qui n'est pas directe (voir annexe 3, lignes 100 à 119).

Nicolas nous a montré au cours de l'entretien sa non-conscience de l'importance de la qualification, faible ou complète. Ce faisant, il se coupe progressivement de la réalité en s'enfermant dans le modèle numérique, sans possibilité de contrôle sur les calculs effectués (un « calcul aveugle » cité par Sackur & *al.*, 2007).

5.2. Corentin ou la rencontre avec la qualification

Corentin, par contre, nous révèle l'importance qu'a pour lui, dans la résolution de problèmes, la qualification, qu'il semble avoir apprise de façon autonome. Il mentionne le souvenir vivace (cf. annexe 4a) d'un jour où il « *s'était embrouillé* » car il « *avait mélangé le nombre de T-shirts et les euros* ». Nous analysons cela comme un épisode biographique (Mercier, 1995), moment de l'espace-temps douloureux, qui lui a permis un apprentissage, celui de l'importance de la qualification. Cette connaissance, qualifier, est aussi explicite et visible (sur son brouillon) : elle se traduit en particulier par une légende sur les nombres de l'énoncé spécifiant leur qualification (cf. annexe 4b) dont nous reproduisons ici un extrait relativement au problème :

> Le libraire dit : « avec mes 2 255 €, si j'achète 36 livres d'art à 62 €, il me restera 13 €. » A-t-il raison ?

Entretien ligne 18	Sur son brouillon
Corentin : En fait dans ma tête quand je lis : là il y a 2 255 € ça c'est clair. Y a 36 livres, ça coûte 62 €. Après je calcule ces deux là, après ça fait le nombre d'euros que je dois payer, et après je compare les deux que j'ai : le nombre d'euros et ce que j'ai trouvé	2 255 : euros 36 : livre-darts 62 : prix des livre-darts[9]

Remarquons que Corentin possède deux connaissances d'ordres différents : il sait qualifier, il sait en plus que la qualification est un outil de résolution des problèmes.

5.3. La qualification, une connaissance ignorée, mais nécessaire

Nous avons souligné le possible impact d'un défaut de qualification sur la réussite des élèves pour de tels problèmes. Le travail de Nicolas nous convainc que la qualification participe du travail de modélisation, notamment dans les problèmes qui nécessitent plusieurs étapes, comme celui qu'avait à résoudre Nicolas. La qualification d'un résultat issu d'un calcul intermédiaire (même pertinent) est à la

[9] La façon d'orthographier de Corentin est volontairement conservée.

charge complète de l'élève. Une qualification efficace ne peut se réduire à une qualification faible.

La compétence double de qualification révèle une connaissance essentielle, actuellement invisible dans les curricula. Le travail sur les nombres *concrets* (nombre + unité) a en effet progressivement disparu des programmes du primaire depuis les années 1970 (Chambris, 2008). Cette habitude permettait de rattacher les nombres à leur grandeur contexte. Quant à l'habitude de qualifier les grandeurs dans les problèmes, elle est sans doute, selon les enseignants, diversement enseignée aux élèves. Mais elle se limiterait alors à la résolution de problèmes, ce qui pourrait se révéler un habitait trop pauvre (question d'écologie des savoirs). En tout cas cette étude révèle l'intérêt qu'il y aurait à réfléchir à l'enseignement systématique de la qualification notamment pour les problèmes verbaux arithmétiques.

6. Questions sémiotiques

Bien que de nombreux articles internationaux envisagent la pertinence de l'utilisation d'outils sémiotiques pour la résolution de problèmes verbaux ordinaires, ces questions nous semblent encore insuffisamment explorées d'autant plus qu'à notre avis, elles restent constitutives des mathématiques du primaire. Chevallard (1995) (qui utilise plutôt le mot ostensif pour signe) avait déjà pointé pour les mathématiques, deux fonctions du signe : une fonction *sémiotique* - déictique - (montrer ou garder la mémoire de) et une fonction *instrumentale* (permettre l'avancée du travail mathématique dans sa dimension matérielle). Certains élèves semblent démunis dans les changements de points de vue, oraux et écrits, sur les objets (ici les opérations) comme si les ostensifs restaient pour eux rigides, n'ayant qu'une fonction, désigner. Or l'avancée du travail mathématique est liée à la mise en relation d'ostensifs différents relatifs à un même concept. Il nous semble que Duval (2006) développe la même idée, sur le plan cognitif, en pointant le travail nécessaire sur les registres sémiotiques (qui pourraient être considérés comme des organisations d'ostensifs) : *traitement* à l'intérieur d'un registre et *conversion* d'un registre à un autre. Il précise même « *La compréhension commence avec l'articulation, pour le sujet, de deux registres de représentation sémiotique.* » (Duval, 2006, p. 84). Ce que nous avons appelé inférence et contrôle syntaxique relève du traitement sémiotique dans le registre oral ou celui des écritures arithmétiques.

Notre recherche contribue très modestement à ces questions : en effet les entretiens et les protocoles ont mis en avant une faiblesse des élèves à passer à l'écrit dans la phase heuristique. Le questionnement de l'élève (reconstruit par l'entretien) reste essentiellement oral et, dû aux limites de l'oral non spécifiquement travaillé, souvent limité à sa fonction déictique. Nous avons relevé peu ou prou de conversion vers le registre graphique ou celui des écritures arithmétiques, a fortiori le registre pré-algébrique (écritures arithmétiques à trous).

6.1. Étude des élèves

Nicolas (cf. annexe 3, lignes 100 à 119) reconnait un problème multiplicatif quand il s'agit de calculer le nombre d'enfants si chaque enfant paye 4 euros et le total de la dépense s'élève à 72 euros, mais il ne propose comme résultat que 4 fois 72. Cet oral n'est pas transformé en une autre formulation orale opérationnelle de type : 4 fois quelque chose égale 72. Nicolas semble n'avoir accès qu'à des expressions « directes ». Cette possibilité d'inverser nous semble constituer, déjà à l'oral, un critère de flexibilité. Bien entendu cette flexibilité là peut s'enseigner : il s'agit de la réciprocité des deux opérations multiplication et division.

Corentin (cf. annexe 4 c) s'est limité à des essais mentaux pour la transformation des 60 billets de 5 euros en billets de 20 euros. Il mentionne oralement la relation (*4 fois 5 ça fait 20*), mais n'en tire pas parti. Un passage à l'écrit dans le registre pré-algébrique avec 300 = ? x 20 = ? x 4 x 5 eût peut-être pu l'aider à opérationnaliser sa décomposition de 20.

Sébastien (cf. annexe 5) a bien réussi les trois premiers problèmes : sur sa copie figure une phrase-réponse correcte. Mais le 4ème problème reste sans réponse, alors que son brouillon témoigne qu'il l'a cherché. Dans le premier problème, il a traité oralement l'équation « *il en avait perdu 48 (...) et puis il m'en / il en restait 127, donc j'ai imaginé 127 plus 48* » : il montre par là qu'il sait mettre en œuvre oralement la réversibilité dans le cas additif (contrairement à Nicolas dans le cas multiplicatif). Dans le second problème (Combien a-t-il reçu de timbres à son anniversaire ? Avant il avait 573 timbres, après il en a 1260.), il a formulé l'équation oralement, par analogie avec un problème déjà résolu « *J'ai vu que dans mon fichier c'est à peu près sauf que c'est à 100. Et bah, on essaie de trouver 573 par exemple à 100 / Et pis là, j'ai cherché mais jusqu'à 1 260* », puis il a résolu par essais successifs écrits (travail de calcul), sans passage à l'écriture soustractive (travail sur l'aspect instrumental de l'écriture arithmétique).

En revanche, le dernier problème (6 voitures par carton, 1830 voitures à expédier) lui a résisté : il a reconnu un problème multiplicatif, il a su formuler l'équation orale « *J'ai essayé de faire 6 fois quelque chose* », mais comme la recherche par essais et erreurs n'a pas abouti (travail de calcul), il s'est replié sur le produit 2 fois 1830 : « *Je sais / Une idée bête / Je sais qu'il fallait trouver 1830 / Mais j'essaie quand même fois 2 fois / même si c'était plus grand.* » ? Nous interprétons ses actions comme la certitude du champ multiplicatif pour ce problème, la non-conscience de l'intérêt d'un écrit fonctionnel, dans le registre des écritures pré-algébriques, tel 6 x ? = 1830. Nous faisons l'hypothèse que cet écrit aurait permis à Sébastien une certaine flexibilité : trouver un résultat en complétant par essais une

« multiplication à trous ». L'écrit finalement produit par Sébastien (2 x 1830) reste décalé et il en est conscient « *Je sais / Une idée bête ... »,* ce qui confirme qu'il manque d'un outil adapté.

6.2. Un travail arithmétique spécifique oral, écrit

Il nous semble avoir pointé, chez certains de ces élèves, un déficit en représentation sémiotique pré-algébrique de la question.

Ce déficit est déjà visible à l'oral, ce qui révèle que les façons de dire les choses et notamment les reformulations possibles[10] d'une question sont une compétence à développer aussi chez les élèves jeunes. Cela questionne la « qualité » du discours oral « arithmétique » enseigné et spécifiquement travaillé dans les classes. On peut d'ailleurs se demander si les techniques arithmétiques, autrefois enseignées à l'oral par exemple dans les anciens manuels d'arithmétique (cf. Chiocca, 2010 qui a réédité de tels usages) ne participaient pas de ce travail sur le discours oral : elles aidaient à dire les actions et les transformations licites sur les nombres ; elles permettaient donc de ne pas limiter les signes à leur dimension déictique.

Ce déficit est certain concernant le registre écrit pré-algébrique, déjà dans sa fonction déictique. Nos études de cas l'ont montré.

Il nous semble pointer ici un pan de connaissances ignorées par l'enseignement mathématique en école primaire actuel, le travail sémiotique, constitutif des mathématiques (Duval, 2006). Un document d'accompagnement des programmes 2002 de mathématiques du primaire (MENESR, 2005, p. 18, cf. annexe 6) avait partiellement, soulevé cette question, en envisageant la systématisation et le traitement des écritures **additives** pré-algébriques. La fréquentation des additions à trous (mais pas leur transformation en soustraction) semble résister[11] dans les pratiques enseignantes et les manuels scolaires, qui explique peut-être aussi la dextérité langagière de Sébastien. A notre connaissance un seul ouvrage (Bonhême & Descaves, 2007) propose dès le cycle 2, un apprentissage sémiotique pré-algébrique plus poussé. Mais l'insertion de ce type de recommandations demande un accompagnement auprès des enseignants : en effet des outils sémiotiques donnés de façon systématique, sans construction conjointe avec les élèves et sans relation avec les situations qu'ils outillent, peuvent induire chez les élèves des automatismes privés de signification.

Les apprentissages mathématiques ont bien différents volets : l'aspect *mathématisation* où les modèles sont construits pour rendre compte de la réalité sur

[10] Robert (1998) avait relevé cette nécessité de plusieurs points de vue pour des questions de géométrie de lycée (par exemple prouver que trois points sont alignés).

[11] Mais cela nécessiterait une étude plus objective.

laquelle agissent les élèves, les modèles trouvant là une première signification ; *un travail spécifique sur le modèle* (les écritures arithmétiques pré-algébriques et les façons de les parler) pour en explorer la potentialité intrinsèque ; l'aspect *modélisation* qui rend la réalité calculable.

Conclusion

Plusieurs conclusions semblent se dégager. Nous confirmons que la méthode d'entretien individuel (plutôt de type explicitation) après résolution de problèmes arithmétiques ordinaires de réinvestissement est productive : elle nous a permis de mettre en avant des bribes de raisonnements individuels partagés par les élèves ou guides d'un élève. Le faible nombre d'élèves et de classes suivis ne limite pas la portée des résultats dans la mesure où il s'agit de débusquer des connaissances cachées dont la présence ou l'absence peuvent agir que la réussite aux problèmes.

Cette étude a permis de prouver l'existence de deux types d'ignorance : d'abord des connaissances peu (ou prou) repérées par les études de didactique, telles l'intérêt de la qualification et la pratique d'une démarche de modélisation par le test d'opérations, suivie de contrôles sémantico-pragmatiques ; enfin des questions connues (notamment sémiotiques), mais dont les développements restent faibles dans la recherche.

La qualification se révèle d'une grande importance : pour des élèves qui utilisent une démarche de test d'opérations, le fait de savoir qualifier conditionne la possibilité d'un contrôle sémantique, voire pragmatique et *in fine* le passage d'un résultat à une réponse. Comme une modélisation adaptée intègre un contrôle du modèle pressenti, la qualification fait intrinsèquement partie du jeu de la modélisation. En réalité cette connaissance se dédouble en *savoir qualifier,* une connaissance proto-mathématique (Chevallard, 1985, 52–56) et *savoir que qualifier peut permettre d'avancer vers une solution,* une connaissance métacognitive.

Cette étude a soulevé la question de l'utilisation spontanée d'outils sémiotiques dans lesquels se placent déjà des reformulations orales. Nous soulevons l'hypothèse, grâce à Nicolas, Sébastien et Corentin, de la nécessité, pour résoudre un problème, de formulations orales ou écrites d'écritures pré-algébriques (6 x ? = 1830 écrit et parlé). La dialectique entre oral et écrit est très sensible dans les résolutions étudiées et milite pour l'apprentissage de conversions entre oral et écrit : Sébastien sait poser le problème « *J'ai essayé de faire 6 fois quelque chose* », mais cette formulation n'est ni convertie en écriture arithmétique, ni traitée dans le registre oral, ce qui le laisse démuni.

Cette recherche soulève d'autres questions. Quel enseignement pour ces connaissances ? Suffit il par exemple, pour améliorer les réussites des élèves aux résolutions de problèmes, de rendre sensibles les enseignants à la qualification comme un passage obligé de la résolution de problèmes ? Il y a peu de chance que ce soit si simple. L'introduction d'un élément isolé prend le risque d'une rigidification de son enseignement et d'une coupure avec ce qui le fonde. Dans cette recherche la qualification apparaît comme un invariant de la résolution de problèmes verbaux arithmétiques, mais il faudrait questionner le lien avec une problématique plus générale : la prise en compte des relations entre nombres et grandeurs dans les organisations mathématiques (Chambris, 2008).

Concernant le travail sur les écritures pré-algébriques, s'il semble utile de travailler stricto sensu les conversions entre oral et écrit et le traitement interne relativement au registre des écritures pré-algébriques (modélisées par $x+a=b$ et $a.x=b$), se pose la question du sens de ce travail s'il est déconnecté des problèmes que ces écritures outillent. Publier sans précaution dans la noosphère l'utilité de ce travail risque d'en faire trop précocement un objet d'enseignement et de créer un glissement métadidactique, certains enseignants réduisant l'activité mathématique à ces jeux d'écritures. Est en jeu une fois encore la compréhension du subtil équilibre entre calcul et raisonnement (Artigue, 2004) que nécessite l'activité mathématique.

Cette étude enrichit les questions d'apprentissage d'une flexibilité cognitive dans la résolution de problèmes ordinaires, si celle-ci est envisagée comme « capacité à envisager plusieurs points de vue sur un même objet, c'est-à-dire à envisager plusieurs moyens pour atteindre un même but » (Clément, 2009, p. 126). Toutefois, elle laisse en suspens celles de son enseignement.

Bibliographie

ARTIGUE, M. (1988), Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **9.3**, 281–308.

ARTIGUE, M. (2004), L'enseignement du calcul aujourd'hui : problèmes défis perspectives, *Repères-IREM*, **54**, 23–39.

ARTIGUE, M., HOUDEMENT, C. (2007), Problem solving in France: didactic and curricular perspectives, *Zentralblatt der Didaktik der Mathematik*, **39**, 365–382.

BONHÊME, B. & DESCAVES, A. (2007), *Activités numériques et résolution de problèmes au cycle*, **2**, Hachette Éducation.

BURGERMEISTER, P.F. & CORAY, M. (2008), Processus de contrôle en résolution de problèmes dans le cadre de la proportionnalité des grandeurs : une analyse descriptive, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **28.1**, 63–106.

CASTELA, C. (2008 dir.), Contribution à une approche didactique des implicites scolaires : la problématique des enjeux ignorés d'apprentissage, *Les Cahiers de l'IUFM*, **7**, Université de Rouen.

CHAMBRIS, C. (2008), *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire*, Thèse de l'Université Denis Diderot, Paris 7.

CHEVALLARD, Y. (1985), *La transposition didactique*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1995), Les outils sémiotiques du travail mathématique, *Petit x*, **42,** 33–57.

CHIOCCA, M. (2010), *Calcul sans retenue*, Toulouse : Éditions Cépaduès.

CLÉMENT, E. (2009), *La résolution de problème : à la découverte de la flexibilité cognitive*, Paris : Armand Colin.

CONNE, F. (1999), Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne. In G.Lemoyne & F.Conne (eds) *Le Cognitif en Didactique des Mathématiques*, Presses Universitaires de Montréal, 31–69.

COPPÉ, S. (1995), Types de connaissances mises en œuvre par les élèves dans la détermination de la composante publique de son travail, *Différents types de savoirs et leur articulation*, Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions, 129–144.

COPPÉ, S. & HOUDEMENT, C. (2002), Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire, *Grand N*, **69**, 53–63.

COQUIN-VIENNOT, D. & MOREAU, S. (2007), Arithmetic problems at school: When there is an apparent contradiction between the situation model and the problem model, *British Journal of Educational Psychology*, **77**, 69–80.

DUVAL, R. (2006), Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques, *Actes du 32ème colloque sur la Formation des Maîtres,* IREM de Strasbourg, 67–89.

ELIA, I. (2011), Le rôle de la droite arithmétique dans la résolution de problèmes additifs, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **16**.

FREUDENTHAL, H. (1971), Geometry between the devil and the deep sea, *Educational Studies in Mathematics*, **3**, 413–435.

HOUDEMENT, C. (1999), Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes. *Grand N*, **63**, 59–76.

HOUDEMENT, C. (2003), La résolution de problèmes en question, *Grand N*, **71**, 7–23.

HOUDEMENT, C. (2006), Trouver ou ne pas trouver : ce qui peut faire des différences dans la résolution de problèmes arithmétiques ordinaires, *Cahier DIDIREM*, **54**, IREM Paris 7.

HOUDEMENT, C. (2009), Une place pour les problèmes pour chercher, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **14**, 31–59.

JULO, J. (1995), *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, Presses Universitaires de Rennes.

JULO, J. (2002), Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, **69**, 31–52.

MARGOLINAS, C. (1993), *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

MENESR (2005), Résolution de problèmes et apprentissage, In *Documents d'accompagnement des programmes. Mathématiques Ecole Primaire*, Scéren-CNDP, 15–19.

MERCIER, A. (1998), La participation des élèves à l'enseignement, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **18.3**, 279–310.

NESHER, P., GREENO, J.G. & RILEY, M.S. (1982), The development of semantic categories for addition and subtraction, *Educational Studies in Mathematics*, **13**, 373–394.

ROBERT, A. (1998), Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **18.2**, 139–190.

SACKUR, M. & *al.* (1997), Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ?, *Repères-IREM*, **28**, 37–68.

THÉVENOT, C., CASTEL, C., FANGET, M., FAYOL, M. (2010), Mental Subtraction in High- and Lower Skilled Arithmetic Problem Solvers. *Journal of Experimental Psychology, Learning, Memory and Cognition*, **36/ 5**, 1242–1255.

VERGNAUD, G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **10.2/3**, 133–170.

VERMERSCH, P. (1994), *L'entretien d'explicitation,* Paris : ESF.

VERSCHAFFEL, L. & DE CORTE, E. (1993), A decade of research on word problem solving in Leuven: theoretical, methodological and practical outcomes, *Educational Psychology Review*, **5**, 239–256.

VERSCHAFFEL, L., GREER, B. & DE CORTE, E. (2000), *Making sense of word problems,* Lisse (Netherlands): Swets & Zeitlinger Publishers.

CATHERINE HOUDEMENT
LDAR, Universités Paris Diderot et Rouen
IUFM, BP 18, 76131 Mont-Saint-Aignan Cedex
catherine.houdement@univ-rouen.fr

Annexe 1

Nicolas 3° au sujet du problème :

> Maurane adore faire des colliers. Elle dispose pour cela de nombreuses perles, toutes de la même taille, mais de couleurs différentes, rangées dans un coffret. Elle en a des vertes, des oranges, des dorées et des bleues. Maurane les a toutes comptées plusieurs fois et nous donne les renseignements suivants. « Le coffret contient 414 perles. Il y en a 78 dorées. J'ai autant de perles orange que de perles vertes que de perles bleues. » Combien Maurane a de perles de chaque couleur ?

C.H. : D'accord / Je vais te poser une autre question quand tu décides de faire un problème, tu vas directement vers 414-78 ou tu fais quelque chose avant ?
Nicolas : Je fais quelque chose avant quand même / J'essaie de faire des plus, des multiplications.
C.H. : D'accord. Et comment tu sais que tu dois choisir plus ou multiplier ?
Nicolas : J'essaie comme ça.
C.H. : T'essaie comme ça ? Et comment tu sais si ça va ou si ça va pas ?
Nicolas : Bah, quand je vois que le nombre est trop grand ou trop petit ou que ça me paraît un peu trop.

Ludivine 5° reste perplexe, dans l'entretien, sur le nombre d'œufs pour 8 000 brioches s'il faut 3 œufs pour une brioche, à l'occasion du problème :

> Une pâtisserie industrielle produit 8 000 brioches par jour. Il faut commander la farine et les œufs pour un mois. Pour une brioche, il faut 250 g. de farine et trois œufs. La farine est livrée par un camion transportant 80 sacs. Chaque sac pèse 25 kg. Les œufs sont livrés par camionnettes de 12 plateaux. Chaque plateau contient 1 000 œufs. Combien de camions de farine et de camionnettes d'œufs faut-il commander pour un mois ?

Elle pense à une division, évolue vers une multiplication (grâce à un dessin). Son incertitude peut certes être mise sur le compte de l'élargissement du champ numérique. Quand il lui est demandé de trancher, elle donne cet argument en faveur de la multiplication, lignes 103-112 :

C.H. : On a besoin de 3 œufs pour une brioche et on fait 8000 brioches.
Ludivine : C'est un partage.
C.H. : C'est un partage ? Tu fais un dessin si tu veux.
Ludivine : Oui, il faut que je fasse 3 œufs pour une brioche *etc.*
C.H. : Bon ça va faire combien d'œufs 3 œufs pour une brioche, combien pour 8 000 ?
Ludivine : Je sais pas // C'est une multiplication.
C.H. : C'est un partage ou une multiplication ?
Ludivine *[silence, puis lentement] :* Si on fait une division, on va peut-être trouver moins / que si on fait une multiplication on va trouver plus.
C.H. : Alors ?
Ludivine : Bah, une multiplication.

Annexe 2

Deborah 5° au sujet du problème :

> Une entreprise expédie trois chargements de 300 kg chacun pour équiper en mobilier une école. Le premier chargement contient 15 tables et 30 chaises. Le second contient 25 tables. Le troisième contient 10 tables, 20 chaises, 5 armoires.
> Combien pèsent une chaise, une armoire, une table ?

Lignes 45 à 58 :

C.H. : Est-ce qu'avec ces deux phrases là : 25 tables et 300 kg on peut trouver le poids d'une table ?
Deborah *[hésitante]* ***:*** Oui / Enfin…
C.H. : Si tu as besoin d'un papier…
Deborah *[en regardant C.H.]* ***:*** Je vais faire 300 divisé par 25.
C.H. : Tu fais ce que tu penses / Je sais pas moi / Le papier c'est ton brouillon ?
Deborah *[elle pose la division 300 par 25]* ***:*** On trouve 12.
C.H. : Alors qu'est-ce que c'est 12 ?
Deborah : Le poids d'une table.
C.H. : Es tu sûre de ça ?
Deborah : Non, ça m'étonnerait.
C.H. : Pourquoi ça t'étonnerait ?
Deborah : Bah c'est beaucoup / C'est pas assez je veux dire.
C.H. : Comment tu pourrais en être sure que c'est 12 ou pas 12 ?
Deborah : Euh …

Lignes 61 à 68 :

C.H. : Avec ce renseignement là, 25 tables 300 kg, t'as fait quelque chose, est ce que tu as confiance dans ce que tu as fait ou tu doutes un petit peu ?
Deborah : Bah, je doute un petit peu.
C.H. : Tu doutes un peu parce que tu trouves que c'est pas assez 12 pour une table ? Est ce que tu doutes de l'opération que tu as faite ?
Deborah : Bah, no… non.
C.H. : Tu penses que c'est l'opération qui va te permettre de trouver le résultat ?
Deborah : Oui je pense.
C.H. : Pourquoi tu penses que c'est l'opération qui va te permettre de trouver le résultat ?
Deborah : Bah, parce qu'on peut faire une multiplication / 300 multiplié par 25, c'est pas possible / C'est beaucoup trop / Ni une soustraction / Donc je pense faire une division / Et aussi parce qu'il faut partager / Il faut / Oui, faut partager.

Annexe 3

Nicolas 3° sur le problème :

> Au cinéma « royal ciné » un adulte paye 6€ par séance et un enfant paye 4€ par séance. A la séance de l'après-midi, il y avait 50 adultes et des enfants. A la séance du soir, il y avait 15 adultes et 20 enfants. La recette de la journée est 542€. Combien y avait-il d'enfants à la séance de l'après-midi ?

Lignes 62 à 99 dans le corps du texte.

Lignes 100 à 119 :

C.H. : Au prix qu'ont payé les enfants / d'accord / tu as trouvé là le prix qu'ont payé les enfants / est ce que tu as fini le problème quand tu as trouvé le prix qu'ont payé les enfants.
Nicolas : Non.
C.H. : Est ce que tu vois ce qu'il y aurait encore à faire après.
Nicolas (silence).
C.H. : Les enfants ont payé 72 euros / on demande de trouver le nombre d'enfants dans la séance de l'après midi.
Nicolas Ah je fais 4 fois 72 [*rappel pour le lecteur : un enfant paye 4 euros*].
C.H. : Alors est ce que tu fais 4 fois 72 / on trouve 72 euros / et qu'est ce qu'on sait d'autre.
Nicolas : Qu'un seul enfant ça paye 4€.
C.H. : Alors écris le pour t'en souvenir / alors on sait qu'il y a 72 euros et qu'un enfant paye 4€ et nous on cherche le nombre d'enfants.
Nicolas : On fait.
C.H. : Fais pas forcément le calcul.
Nicolas : On fait 72 fois 4.
C.H. : Pourquoi tu fais 72 fois 4 / pourquoi tu fais cela.
Nicolas : Sais pas.
C.H. : Alors essaie jusqu'au bout / et on va voir si tu es content avec 72 fois 4.
Nicolas : (*il calcule et trouve 288*) Ça fait 288.
C.H. : Alors ça voudrait dire qu'il y a 288 enfants.
Nicolas : Non.
C.H. : Alors.
Nicolas : (*silence très long*).
(…)

Annexe 4

Corentin 4° révèle dans l'entretien et montre (dans son brouillon) l'importance qu'il accorde à la qualification dans la résolution de problèmes.

a) Lignes 9 à 14 : il cite comme souvenir d'un problème très difficile ….

C.H. : Alors est ce que tu te souviens de problèmes très très difficiles qui t'embêtaient / pas forcément dans l'évaluation / mais
Corentin oui (*réponse qui fuse*).
C.H. : oui ?
Corentin : Je pense pas que c'était dans cette école là. C'était quand j'étais un peu plus petit, c'étaient des pièces, enfin des euros et puis un T-shirt coûtait des euros, et je m'étais embrouillé.
C.H. : Et comment ça se fait que tu t'étais embrouillé ?
Corentin : En fait j'avais mélangé le nombre de T-shirts et les euros.

b) Cet apprentissage de la qualification est visible dans les détails qu'il nous donne sur chaque problème, confirmé par ce qu'il a noté sur son brouillon (et qui n'est pas sur la copie finale)

Pour le problème 1 :

Le libraire dit : « avec mes 2 255 €, si j'achète 36 livres d'art à 62 €, il me restera 13 €. » A-t-il raison ?

Entretien ligne 18	Sur son brouillon
Corentin : En fait dans ma tête quand je lis : là il y a 2 255 € ça c'est clair. Y a 36 livres, ça coûte 62 €. Après je calcule ces deux là, après ça fait le nombre d'euros que je dois payer, et après je compare les deux que j'ai : le nombre d'euros et ce que j'ai trouvé.	2 255 : euros 36 : livre-darts 62 : prix des livre-darts[12]

Et pour le problème 2 :

Dans sa caisse, le buraliste a mis 60 billets de 5 €. Le boucher a exactement la même somme d'argent mais en billets de 20 €.
Combien de billets possède le boucher ?

Entretien lignes 28 à 36	Sur son brouillon
Corentin : D'abord j'ai tout lu. Après j'ai regardé si c'étaient 60 billets de 5. ***C.H. :*** Hum. ***Corentin :*** Après ils me disent le boucher a le même nombre d'argent mais en billets de 20. ***Corentin :*** En fait j'ai d'abord additionné 60 billets de 5, et j'ai vu que ça faisait 300. Et j'ai dit que 20 fois quelque chose était égal à 300.	60 : nombre <u>de</u> billets 5 : nombre <u>des</u> billets [Remarque : c'est nous qui soulignons.]

[12] La façon d'orthographier de Corentin est volontairement conservée.

Corentin a intégré l'intérêt de qualifier chacun des nombres qu'il manipule. Pour raisonner, il reste très attaché au texte de départ ; s'il s'en détache, il note ce que signifient les nombres. Il contrôle l'avancée de ses essais par la conformité au sens du texte.

c) Lignes 43-48 : déficit en représentation sémiotique pré-algébrique

C.H. : Bon. A quel moment ça a été moins vite ?
Corentin : Mettre les billets de 5 en billets de 20.
C.H. : Et là, qu'est-ce qui allait moins vite, réfléchir ou calculer ?
Corentin : Réfléchir.
C.H. : Comment, à quoi tu as réfléchi à ce moment là ?
Corentin : Bah, dans ma tête j'ai fait / Je pourrais peut-être mettre 4 fois 5 ça fait 20 / Mais ça va être trop long.

Corentin identifie oralement la relation (*4 fois 5 ça fait 20*), mais n'en tire pas partie. Nous pensons que le fait d'écrire 300 = **?** x 20 = **?** x 4 x 5 aurait pu l'aider à opérationnaliser sa décomposition de 20.

Annexe 5

Sébastien 3° a bien réussi les trois premiers problèmes pour lesquels figure sur sa copie une phrase-réponse correcte. Le 4ème problème reste par contre sans réponse, mais son brouillon témoigne qu'il a cherché.

> **Pb1.** Pendant la récréation j'ai joué aux billes et j'en ai perdu 48. Il m'en reste 127. Combien de billes avais-je avant la récréation ?
>
> **Pb2.** Comme Paul collectionne les timbres, il en a reçu beaucoup pour son anniversaire. Avant son anniversaire il en avait 573, après il en a 1260. Combien Paul a-t-il reçu de timbres pour son anniversaire ?
>
> **Pb3.** Un marchand de jouets a vendu six cartons contenant huit voitures chacun. Chaque voiture coûte 5 €. Combien d'argent reçoit-il ?
>
> **Pb4.** Un fabricant de jouets met 6 voitures par carton. Il veut expédier 1 830 voitures. Combien lui faudra-il de cartons ?

Lors de l'entretien, il déclare avoir vite traité le problème 1, lignes 25 à 27 :

> ***Sébastien :*** J'ai imaginé que dans le problème il y a avait des billes et le personnage il en avait perdu 48 (…) et puis il m'en / il en restait 12, donc j'ai imaginé 127 plus 48.

Dans ce problème, Sébastien a su inverser oralement la transformation évoquée : pour remonter au début de la partie, il faut retrouver les billes perdues.

Le pb2 ne lui a pas résisté longtemps, lignes 29 à 33 :

> ***Sébastien :*** J'ai vu que dans mon fichier c'est à peu près sauf que c'est à 100 / Et bah, on essaie de trouver 573 par exemple à 100 / Et pis là, j'ai cherché mais jusqu'à 1 260 donc j'ai essayé d'imaginer et pis …

C.H. : Et comment c'est le problème dans ton fichier, où c'est … ?
Sébastien : Bah, c'est par exemple 300/320 et il faut trouver un calcul qui va jusqu'à 100.
C.H. : Et comment t'as fait pour savoir que c'était comme ça qu'il fallait faire ?
Sébastien : Parce que là, j'ai pas vraiment réfléchi donc j'ai pris une feuille de brouillon et pis j'ai écrit j'ai écrit, et pis j'ai trouvé.

Il montre donc là que, par analogie avec un problème déjà traité (sans doute la trace d'un schéma de problème), il a instancié une stratégie non immédiate certes, mais dont il est certain qu'elle mène à bon port, en effet ligne 37 :

Sébastien : Et bah, j'ai essayé tous les 500, ça a pas marché /Et c'est presque dans tout / Et pis j'ai trouvé dans les 600/620 et après je me suis dit 690 vu que c'est encore beaucoup trop petit. Mais c'était encore, c'était trois fois plus grand donc j'ai essayé moins trois / 573+687 et pis j'ai vu que ça faisait 1 260.

Son brouillon confirme qu'il a trouvé le résultat en testant différentes additions en colonnes (différents ajouts à 573 pour essayer d'atteindre 1 260).

Sébastien n'a pas écrit d'écriture arithmétique en ligne : ce qu'il nous renvoie en parole semble en parfait accord avec ce qu'il a pensé lors de la résolution, chercher le complément à 573 pour atteindre 1 260, par essais successifs : là encore le langage (sans doute intériorisé lors de la recherche effective) lui suffit pour avancer.

Sébastien nous oriente ensuite vers le problème 4 quand il s'agit de parler de problèmes « un peu moins faciles ». C'est le contraste avec les trois premiers qui nous interpelle. Sébastien nous dit successivement, lignes 43 et 56 :

Sébastien : Bah, je fais / Là c'est écrit un fabricant de jouets met 6 voitures par carton et il veut expédier 1 830 voitures. Combien lui faudra-t-il de cartons / Là j'ai pas trouvé / Parce que moi j'ai, j'ai, j'arrive pas beaucoup… / Avec 6 voitures par carton c'est bon / Mais avec 1 830 j'ai pas vraiment…
Sébastien : J'ai essayé de réfléchir et j'ai pas trouvé. J'ai essayé de faire 6 fois quelque chose mais j'ai pas trouvé.

Sébastien a bien identifié le champ conceptuel multiplicatif et sait oralement modéliser le problème : *faire 6 fois quelque chose*. Mais cette oralisation ne suffit pas à déclencher une action (certes dans le domaine multiplicatif). Il se peut que la taille du quotient à trouver (3 chiffres) l'ait empêché d'opérationnaliser son idée de départ. Il se replie alors sur une surexploitation de la multiplication. Or il sait que cette opération directe ne convient pas, à cause de l'ordre de grandeur du résultat (contrôle pragmatique), lignes 72 à 74, et pourtant il ne voit pas d'autre alternative.

C.H. : Comment te vient l'idée de faire cet essai là et pas un autre ?
Sébastien : Je sais / Une idée bête / Je sais qu'il fallait trouver 1 830 / Mais j'essaie quand même fois 2 fois / même si c'était plus grand.

> ***C.H. :*** Mais quand tu l'as fait, est-ce que tu pensais déjà que c'était une idée bête ?
> ***Sébastien :*** Oui, parce qu'il fallait trouver 1 830, alors j'ai fait 2 fois 1 830.

Il se peut qu'une écriture de type 6 x **?** = 1830 ait pu l'aider à poursuivre sa recherche et surtout à garder son fil conducteur, associée à la croyance de l'existence d'un tel nombre inconnu, comme il a pu le faire pour les calculs additifs.

Annexe 6

Extrait de MENESR (2005) *Documents d'accompagnement des programmes. Mathématiques Ecole Primaire*. Résolution de problèmes et apprentissage 15-19. Scéren-CNDP Page 19

L'appui sur les écritures symboliques

Le premier type d'expériences (à partir d'une matérialisation de la situation) permet de justifier l'équivalence alors que le deuxième type (calcul mental) permet de la faire fonctionner. Dans le prolongement de ces expériences, la mise en relation des écritures symboliques permet d'exprimer cette équivalence.

Il est possible d'utiliser des exercices utilisant des supports comme les petits tableaux ci-dessous avec des consignes du type : « *Trouve la règle et complète les cases vides* ».

<table><tr><td>10</td><td>5</td></tr><tr><td colspan="2">15</td></tr></table>

<table><tr><td>5</td><td>17</td></tr><tr><td colspan="2">22</td></tr></table>

<table><tr><td>23</td><td>18</td></tr><tr><td colspan="2">41</td></tr></table>

<table><tr><td>12</td><td>26</td></tr><tr><td colspan="2"></td></tr></table>

<table><tr><td>14</td><td></td></tr><tr><td colspan="2">23</td></tr></table>

<table><tr><td></td><td>25</td></tr><tr><td colspan="2">42</td></tr></table>

Ils peuvent être prolongés par un travail sur les écritures, comme par exemple : « *Pour chaque tableau, trouver toutes écritures additives ou soustractives avec les trois nombres* »

10+5 =15   5+17=22   etc.
5+10=15   22 - 5=17
15-5=10 22 – 17=5
15-10=5

La demande de formulations orales qualifiant le nombre à chercher dans chaque tableau aide aussi les élèves à relier entre elles différentes significations. Par exemple pour le cinquième tableau :

- quel est le nombre qui, ajouté à 14, donne 23 ?
- quel est le complément de 14 à 23 ?
- quel est le nombre différence de 23 et 14 ?
- quel est l'écart de 14 et de 23 ?

Des exercices systématiques de ce type ne peuvent suffire **seuls** ni à faire comprendre, ni à rendre fonctionnelle l'équivalence étudiée. Mais associés aux deux autres types d'expériences, ils contribuent à la construction et à la consolidation de cette équivalence.

SYLVIA COUTAT ET PHILIPPE R. RICHARD

LES FIGURES DYNAMIQUES DANS UN ESPACE DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE POUR L'APPRENTISSAGE DES PROPRIÉTES GÉOMÉTRIQUES

Abstract. Dynamic figures in a mathematical workspace for the learning of geometrical properties. Our paper aims at showing how dynamic figures are useful in the learning of the use of geometrical properties at a high school level, in continuity with the practices inherited during the primary school education. After considering the general contextual rooting of the problem situations while comparing geometrical reality with educational institution, we focus on the student-milieu system and on the connections between the reasoning and the operational dynamic figure. We then present a research framework in order to analyze a geometrical workspace dedicated towards the learning of the use of properties. The workspace is presented in what it has of generic to enhance such learning and it enables us to conclude by some theoretical remarks on the components from the suitable geometrical working space.

Résumé. Notre article vise à montrer comment les figures dynamiques sont utiles pour l'apprentissage des propriétés géométriques de l'école secondaire, en continuité avec les habitudes héritées du primaire. Après avoir considéré l'enracinement contextuel des situations-problèmes en général et mis la réalité géométrique au regard de l'institution scolaire, nous centrons notre propos sur le système sujet-milieu et sur les rapports du raisonnement à la figure dynamique opératoire. Nous situons ensuite un dispositif de recherche afin d'analyser un espace de travail géométrique idoine orienté vers l'apprentissage des propriétés. L'espace de travail est présenté en ce qu'il a de générique pour enclencher un tel apprentissage et il nous permet de conclure par quelques remarques théoriques sur les constituants de l'espace de travail géométrique.

Mots-clés. Didactique des mathématiques, géométrie dynamique, raisonnement, espaces de travail géométrique, apprentissage des propriétés géométriques.

Introduction : où se situe la géométrie dynamique ?

Sous une allure de question captieuse, la place de la géométrie dynamique n'est pourtant pas une affaire banale. S'agit-il d'une géométrie émergente, qui n'a pas encore été inventée par les mathématiciens dans leurs tenants et aboutissants, comme le furent les Géométries I, II et III retenues par Houdement et Kuzniak (2006) ? Ou, au contraire, consiste-elle en une géométrie de support sophistiquée, digne représentation de théories existantes au service de leur apprentissage ? L'éclairage apporté par ces auteurs, notamment avec les notions de paradigmes géométriques et de jeux de cadres, offre certainement un repère épistémologique privilégié, puisqu'en tant que « contenant », la géométrie dynamique serait issue

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 16, p. 97 – 126.

des géométries traditionnelles. Mais en qualité de « contenu », qui réalise une articulation entre un référentiel théorique, des objets géométriques et un milieu matériel – que Kuzniak (2006) appelle espace de travail de la géométrie –, il semble que la géométrie dynamique crée de nouveaux rapports à la géométrie traditionnelle, au point d'engendrer une géométrie nouveau genre dans son interaction avec le « contenant ». Il n'est donc pas étonnant de lui reconnaître des caractéristiques qui lui sont propres, souvent étonnantes au regard des paradigmes géométriques, mais dont les conséquences pour l'apprentissage et la formation invitent à en préciser la nature.

1. Quelques considérations liminaires

En dépit de l'invitation précédente, nous ne tenterons pas de cerner la nature de la géométrie dynamique. Nous en posons simplement l'existence de manière à constater l'effet qu'elle est susceptible d'entretenir au regard des espaces de travail géométrique. Cependant, avant même d'asseoir les éléments conceptuels de nos hypothèses de départ (section 2), nous devons introduire deux considérations quelque peu gênantes. Une première, à saveur métaphorique, qui situe sommairement la résolution de problèmes dans l'exercice de conceptualisation, et une seconde, plutôt socioculturelle, qui apporte une certaine confusion sur la nature de la géométrie de référence. Ensuite, nous plaçons la recherche dans son contexte (section 3) afin de lancer l'analyse d'un espace de travail géométrique (section 4) que nous qualifions d'idoine (section 5). Nous sommes au début de l'école secondaire (12-14 ans).

1.1. En classe de mathématiques l'élève n'est pas un musicien, mais un peintre

À une époque où l'éclatement des connaissances rejoint l'enseignement des mathématiques et des sciences, il semble naturel de chercher, pour le bon fonctionnement de la classe, une sorte d'harmonie relative aux moyens d'expression et de traitement. Ainsi, en termes de fonction sémiotique chez l'homme, Duval (1995) insiste sur l'existence de plusieurs systèmes de représentation et le besoin de coordination qu'exige l'emploi des registres, dont l'expression du raisonnement qui s'articule avec les figures géométriques (Richard, 2004a). Pour l'interprétation des conceptions de l'élève en laboratoire de sciences, Givry et Roth (2006) montrent l'importance du jeu synergique entre la parole, la gestuelle et les structures du discours pour l'explication d'un phénomène, avec ou sans instruments à l'appui. Et afin d'offrir un modèle d'analyse de l'activité de l'enseignant, Drijvers et Trouche (2008) proposent l'idée d'orchestration instrumentale pour rendre compte de l'organisation intentionnelle et systématique de plusieurs outils technologiques dans un environnement d'apprentissage déterminé. Bref, ces coordinations, synergie et orchestration sous-entendent l'idée d'un objectif local et commun : la représentation d'une même connaissance, l'explication d'un même phénomène ou le traitement au sein d'une même activité mathématique, vue ici du côté de l'enseignant.

Cependant, dès qu'on sort de cette localité, on est immédiatement confronté à un problème d'harmonie entre conceptions, que ce soit chez celles d'un même élève ou dans la proximité des conceptions d'un petit groupe. C'est d'ailleurs ce qui apparaît lorsqu'un élève résout des situations-problèmes raisonnablement différentes les unes des autres. Le caractère contextuel de chaque situation, tout comme la logique particulière inhérente à chaque processus de résolution, entravent à la fois le transfert d'un problème à l'autre ainsi que la mise en place d'une cohérence externe. Si une évolution dynamique entre conceptions ou un développement de compétences mathématiques s'engage, c'est parce que l'élève composerait une « toile » à chaque situation-problème et que cette toile n'existerait qu'au terme de la résolution. Il faudrait attendre le « vernissage » pour en dégager une cohérence d'ensemble, celle-ci demeurant fortement sujette à interprétation. C'est sans doute parce qu'il faut toujours recommencer son « œuvre » que d'une part, la dévolution des problèmes est une responsabilité si difficile à assumer pour l'enseignant et que d'autre part, à l'abord d'un nouveau problème, les élèves se demandent régulièrement : « où sont mes mathématiques lorsque j'en ai besoin ? » (Caron, 2003).

1.2. La réalité géométrique dans ses rapports à l'institution

Il est facile d'affirmer qu'au Québec, on ne fait pratiquement pas de géométrie au début du secondaire. Pourtant, dans le programme d'enseignement de l'école québécoise (MÉLS, 2006 et 2007), la géométrie apparaît comme un des trois contenus à enseigner, au même niveau que les groupements « arithmétique et algèbre » et « probabilité et statistique ». En outre, quatre pages lui sont spécifiquement consacrées : deux pages qui se structurent en concepts et processus, une autre en éléments de méthode, et une dernière qui dresse une liste d'énoncés de géométrie euclidienne. Lorsqu'on examine le programme de l'école primaire, non seulement la géométrie apparaît invariablement au premier plan, mais les « savoirs essentiels », au niveau des « figures géométriques et sens spatial » (espace, solides, figures planes, frises et dallages), se partagent avec l'estimation et le mesurage sur les longueurs, angles, surfaces, volumes, capacités, masses, temps et températures (MÉLS, 2001). Pourquoi donc une telle audace dans notre affirmation initiale ?

Une analyse sommaire des principaux manuels scolaires nous amène vers un constat troublant : les énoncés de géométrie euclidienne n'y apparaissent pas[1]. Bien

[1] Pour un survol historique sur les manuels contemporains, voir Richard (2003).

que l'élève soit censé pouvoir reconnaître ou décrire une figure à partir de ses attributs, les activités proposées sont essentiellement calculatoires, depuis les manipulations arithmétiques sur les grandeurs jusqu'à l'établissement de mesures inconnues. Il n'y a donc rien sur les constructions à la règle et au compas et il n'y a rien non plus sur la mécanique des propriétés géométriques, encore moins sur la notion de preuve :

> (…) l'évolution du traitement réservé au raisonnement déductif dans les programmes québécois des quarante dernières années a des allures de valse-hésitation entre la valorisation et la mise de côté (Caron et de Cotret, 2007).

Puisque c'est la même institution qui énonce les programmes et qui valide les manuels scolaires, on en vient à se demander quelle est la géométrie de référence qui, en principe, est antécédente à la transposition didactique de Chevallard (1992). S'agit-il précisément d'un double jeu de cadres, externe avec l'arithmétique et interne avec l'articulation entre la *géométrie naturelle* et la *géométrie axiomatique naturelle* – symbolisée par « (GI|GII) » dans Kuzniak (2006) ?

Nous croyons que toute réponse demande à elle seule l'aménagement d'une étude qui déborde largement la nôtre. Mais au delà d'un éventuel blâme scientifique, nous avons sous les yeux un panorama de référence bien réel qui est susceptible d'être similaire pour les maîtres en formation, ne serait-ce qu'à l'égard de leurs souvenirs d'élève. Pour pasticher Chevallard (1992), certaines valeurs sociales jouent manifestement un rôle noosphérique dans notre compréhension de la géométrie de référence. On peut mentionner, à titre indicatif, une certaine dominance de l'utilitariste économique ou la préférence pour les systèmes déterministes qui affectionnent particulièrement l'esprit calculatoire. Quoi qu'il en soit, il semble qu'il faille interroger davantage l'épistémologie didactique pour en comprendre les motivations institutionnelles. Dans les traditions géométriques plus assises, comme en France, où l'épistémologie didactique ne semble pas être en cause, la question référentielle risque de passer inaperçue. Malgré cela, l'écart entre « ce qui devrait être » et « ce qui en est » en est-il pour autant si ténu ? Avec l'introduction de la géométrie dynamique en classe et les possibilités expérimentales que son emploi suppose, la gestion de la distance entre la géométrie de référence épistémologique et celle de référence sociale renforce l'importance de la notion d'espace de travail géométrique tout en relativisant celle des paradigmes classiques.

2. Hypothèses

Les environnements de géométrie dynamique s'associent généralement au support logiciel, mais cette géométrie intervient d'abord dans d'autres environnements sous forme de mécanismes, de structures ou de situations diverses, comme avec les machines dites mathématiques (de l'italien « macchine matematiche »[2]), les instruments de géométrie ou les supports sur lesquels le génie et les mathématiques se rencontrent (au sens de Bryant et Sangwin, 2008). Dans notre article, nous utilisons positivement la notion de milieu en tant que concept unificateur de l'ensemble des supports qui véhiculent des connaissances mathématiques lorsque ceux-ci sont en interaction avec un sujet, que ce soit des registres de représentation sémiotique, des outils, des mises en scène ou tout autre matériel à usage didactique, depuis les documents papiers jusqu'aux médias électroniques. De plus, nous y introduisons la contribution intellectuelle de collaborateurs ou de situations (avec personnages) dont l'intention fondamentale n'est pas l'enseignement de contenu ou de méthodes mathématiques, pour autant que ce soit en réaction aux propositions de l'élève dans une perspective d'apprentissage.

2.1. Centration sur les interactions sujet-milieu

Dans sa définition originelle issue de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), la notion de milieu se révèle comme le système antagoniste de l'élève dans lequel celui-ci évolue et qui demeure spécifique de la connaissance mathématique. Les conceptions d'un élève seraient le résultat d'échanges continus avec les problèmes qu'il se pose ou les situations dans lesquelles il est placé, et au cours desquels il y aurait une adaptation, naturelle ou volontaire, de l'élève au milieu engendré par le problème ou la situation. Dans cet échange, donc dans la poursuite de l'apprentissage mathématique, les connaissances antérieures sont mobilisées pour y être modifiées, complétées ou rejetées. Si selon Douady (2005), Brousseau définit la situation didactique comme un ensemble de rapports établis entre un élève et un groupe d'élèves, un milieu (pouvant comprendre notamment des outils ou tout autre dispositif qui véhicule des connaissances mathématiques) et un système enseignant (enseignant ordinaire ou systèmes tutoriels[3]), c'est dans une intention d'amener progressivement les élèves vers l'appropriation d'un savoir constitué. Parmi ces rapports, la question de l'interaction entre l'élève et le milieu apparaît formellement en concept unitaire. Selon Margolinas (2009) :

> Brousseau va considérer l'interaction sujet-milieu comme étant la plus petite unité d'interaction cognitive. Un état d'équilibre de cette interaction définit un état de la connaissance, le déséquilibre sujet-milieu étant producteur de connaissance nouvelle (recherche d'un nouvel équilibre). (13–14).

Puisque la définition originelle du milieu demeure très générale, Margolinas (2009) en propose un modèle de structuration qui, du point de vue de l'étude du professeur, permet de décrire d'une façon fine les connaissances en jeu dans une situation didactique. Si la construction du milieu caractérise chaque connaissance

---

[2] Voir Bartolini Bussi et Maschietto (2005).
[3] Par exemple, Richard et *al.* (2011).

par les situations-problèmes qui lui sont spécifiques, c'est pour que les stratégies des élèves soient motivées par les nécessités de leurs relations avec le milieu. Selon Brousseau (1998) :

> La conception moderne de l'enseignement va donc demander au maître de provoquer chez l'élève les adaptations souhaitées, par un choix judicieux de problèmes qu'il lui propose. Ces problèmes sont choisis de façon à ce que l'élève puisse les accepter, doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. (…) L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques (…). Non seulement il le peut, mais il le doit aussi car il n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en œuvre de lui-même (…) (p. 59).

Cette idée de nécessité est importante puisqu'elle fonde spécifiquement la notion de conception sur l'interaction entre l'élève et le milieu (Balacheff et Margolinas, 2005). Et que par ailleurs, elle situe la question du développement de l'autonomie de l'élève dans l'acquisition d'une connaissance, sans pouvoir compter sur l'apport du maître ou de ses compagnons (Richard, 2004a). En revanche, elle suppose l'existence de situations parfaitement adaptées aux connaissances convoitées et elle laisse à l'élève toute la responsabilité dans la résolution des problèmes, c'est-à-dire dans l'acquisition même d'une connaissance nouvelle. Or, lorsqu'il travaille en équipe ou s'il se sert d'outils complexes qui gèrent une partie des connaissances en jeu (comme les « machines mathématiques » ou les logiciels de géométrie dynamique), l'élève reçoit forcément des réponses en même temps qu'il formule ses questions. C'est pourquoi nous proposons de souligner, dans la notion de milieu, les apports cognitifs providentiels qui proviennent aussi bien des composantes matérielles du milieu que de ses composantes intellectuelles :

- par rapport au milieu matériel : regarder la réponse dans un solutionnaire, consulter une piste de solution proposée, invoquer un oracle en géométrie dynamique ou une fonction en calcul symbolique ;
- par rapport au milieu intellectuel : apport d'arguments d'un compagnon collaborateur ou du maître qui cherche à relancer, sous une forme ou une autre, un processus de résolution bloqué.

De plus, au cours d'un débat lancé par un élève, le reste de la classe considéré comme un tout émergent (dans le sens emprunté aux systèmes complexes) fait notamment partie du milieu intellectuel par rapport à cet élève. Dans la perspective d'un milieu à la fois matériel et intellectuel, l'interaction sujet-milieu se considère alors hors des situations proprement didactiques et c'est le sujet qui souhaite faire évoluer la connaissance de son propre mouvement.

2.2. Rapport du raisonnement à la figure dynamique opératoire

La notion de raisonnement en géométrie est intimement liée aux fonctions cognitives de communication et d'objectivation du registre figural (Richard et Sierpinska, 2004) et la question de son expression se pose de façon très évidente en géométrie dynamique. Traditionnellement, le raisonnement s'exprime par le discours afin que celui-ci puisse régir ou accompagner la coordination de différents types de raisonnements ou, en général, le fonctionnement du registre figural (Duval, 2005). Toutefois, malgré un rôle prépondérant, l'expansion discursive est insuffisante pour rendre compte du raisonnement qui s'exprime dans l'action ou par l'usage de certains outils techniques.

À l'interface d'un logiciel de géométrie interactive, lorsque c'est l'usager qui décide quand et pourquoi il a besoin de sa représentation, c'est l'outil technique qui en gère le dynamisme au cours du déplacement. L'usager peut se restreindre à constater l'effet de configurations particulières, même s'il est l'auteur de la construction sous-jacente. Indépendamment du support, les représentations figurales ont l'habitude de véhiculer des raisonnements (Richard, 2004b ; Alsina et Nelsen, 2006). C'est d'ailleurs ce qui permet à tout lecteur exercé, même s'il a été étranger aux processus de représentation et de construction, d'en tirer une logique dans l'équilibre dynamique de ce qu'il a sous les yeux, voire d'en dégager de nouvelles propriétés. Lorsqu'un dessin se montre à l'interface d'un logiciel de géométrie, un usager étranger peut même agir sur l'objet pour tester les limites du dynamisme de la représentation, ce qui renouvelle la correspondance classique du raisonnement à la figure géométrique dans l'interaction sujet-milieu. En outre, puisqu'il y a des modèles mathématiques qui sous-tendent le fonctionnement de ces outils, ceux-ci ne sont pas nécessairement accessibles et leur connaissance n'est généralement ni un enjeu de faits, ni une question de principes. Cependant, leurs effets permettent au système sujet-milieu la production de raisonnements structurés et fonctionnels, alors que la responsabilité du contrôle des connaissances reste partagée au sein de ce système. Les apports providentiels du milieu deviennent donc théoriquement nécessaires pour rendre compte de l'interaction cognitive.

Si l'on retient le caractère opératoire de la figure géométrique, nous évitons toute mise en relation a priori avec un paradigme de référence. Une représentation figurale donnée créerait son propre espace de signification et pourrait même constituer une sorte d'espace de travail géométrique. D'ailleurs, cela nous rapproche de l'enjeu didactique soulevé par Kuzniak (2006) lorsqu'il affirme que l'enseignant doit « s'assurer que l'apprenant réorganise les diverses composantes de son Espace de Travail Géométrique (ETG) en un tout cohérent et opérationnel ». Par figure dynamique opératoire, nous considérons la figure qui se constitue à partir des moyens d'action ou de pensée de l'élève en interaction avec le milieu, en vue d'obtenir un résultat sémiotique, cognitif et situationnel déterminé, dans le prolongement des fonctions de la figure géométrique opératoire (au sens de Richard, 2004a). Fondée sur l'idée d'un objet-processus, la figure dynamique opératoire intègre le raisonnement à la fois comme procédure de traitement et structure de contrôle dans l'interaction sujet-milieu, rejoignant de fait la notion de conception développée dans le modèle de connaissances de Balacheff et Margolinas (2005). Dans notre approche, une même structure de contrôle peut gouverner plusieurs expressions différentes du raisonnement, à l'instar du raisonnement déductif qui contrôle la construction instrumentée d'une figure ou la lecture de propriétés invariantes dans l'animation d'une construction interactive.

3. Contexte

Notre étude s'appuie sur la combinaison de deux recherches à propos de l'enseignement du concept de propriété géométrique. Une première, qui se fonde sur la mise en œuvre d'une ingénierie didactique d'envergure dans laquelle un environnement de géométrie dynamique est au centre de la démarche (Coutat, 2006), et une seconde, beaucoup plus modeste, qui ajuste et complète quelques activités de l'ingénierie avec des tâches de contrôle dans l'environnement papier-crayon. Nous avons ciblé les propriétés de la géométrie euclidienne dont l'acquisition se laisse introduire, au cours d'expériences sur des figures dynamiques, par la relation de subordination entre les contraintes d'une « propriété-situation » et sa conclusion – nous en donnons un exemple à la section suivante. Bien qu'en arrière-plan, nous nous plaçons dans l'articulation des paradigmes géométriques GI et GII (Houdement et Kuzniak, 2006), nous profitons du fait que les environnements de géométrie dynamique offrent un support expérimental à la manière d'une « première physique ».[4] Dans la conception de notre dispositif de recherche, le passage d'un paradigme à un autre s'effectuerait non pas par rupture, mais par « évolution sans révolution » pour reprendre l'idée soulevée par Kuzniak (2006), dans l'esprit d'une continuité depuis les habitudes développées à l'école primaire. L'objectif ultime des activités est l'acquisition d'une compétence sur la structure logique des propriétés et de rendre nécessaire, chez l'élève, le lien cognitif et formel qui unit les antécédents et les conséquents de la déduction, au sens de Richard (2004a).

L'intégration des outils technologiques dans l'enseignement des mathématiques a modifié notre compréhension des rapports traditionnels entre outil, système de représentation sémiotique et connaissances. Comme nous l'avons abordé dans

[4] À ce sujet, on peut se référer à la thèse de Dahan (2005) qui compare la démarche de découverte en mathématiques à l'expérimental dans les sciences physiques, et à l'analyse de Richard, Meavilla et Fortuny (2010) qui établit un apport mutuel entre un extrait des Éléments de Géométrie de Clairaut (2006) et la géométrie dynamique.

notre cadre conceptuel, l'outil appartient au milieu avec lequel l'élève interagit et à partir duquel celui-ci développe sa pensée. L'idée d'interaction outil-élève nous amène alors vers les travaux de Rabardel (1995) avec les notions d'instruments et de genèse instrumentale. Puisqu'en bout de piste, notre perspective d'enseignement vise notamment un enrichissement du référentiel théorique des élèves, nous insistons sur deux fonctions du langage, c'est-à-dire la fonction référentielle et la fonction d'expansion discursive (Duval, 1995). La notion d'expansion discursive est étendue avec la notion d'inférence figurale (Richard, 2004b), et le raisonnement discursivo-graphique qui en découle se considère dans ses rapports de coordination au raisonnement instrumenté. Nous utilisons enfin la notion de médiation sémiotique (Vygotsky, 1978) pour relever l'idée d'intériorisation des outils technique en signes psychologiques suite à l'intervention didactique. Ainsi, la genèse instrumentale amorce le processus de médiation sémiotique qui a lui-même pour but l'appropriation, par l'élève, de la relation de subordination entre les prémisses et la conclusion d'une propriété géométrique, c'est-à-dire une évolution de son référent théorique.

Dans ce qui suit, nous tentons essentiellement de répondre à deux questions, mais nous devons d'abord apporter une précision. Nous pourrions considérer la notion d'espace de travail dans son sens strict original, c'est-à-dire celui d'un environnement. Néanmoins, parce que dans notre étude cette notion d'espace n'a de sens qu'en étant en interaction avec un sujet, élève ou expert, nous considérons également l'espace de travail qui se crée par une démarche, soit-elle en instance de réalisation[5]. Dès lors, la démarche expérimentale instrumentée que nous proposons constitue-t-elle, de part son caractère paradigmatique, un espace de travail géométrique idoine pour l'acquisition d'une propriété mathématique appliquée aux démonstrations ? Et, par voie de conséquence, dans quelle mesure l'expérience de subordination des contraintes à la conclusion rend-elle fonctionnellement signifiante la structure d'une déduction et le statut opératoire d'une propriété mathématique avec une certaine autonomie par rapport à l'outil logiciel ?

4. Analyse de l'espace de travail géométrique

Les élèves avec qui nous avons travaillé se trouvent à l'étape 12-13 ans de leur formation (cinquième en France et première secondaire au Québec). On leur a introduit la définition du parallélogramme de deux façons différentes, en fonction de leurs connaissances antérieures. C'est-à-dire, dans la première ingénierie ($\mathbf{I}_1$),

---

[5] Au moment d'écrire ces lignes, nous écoutions *Cantares* du Catalan Joan Manuel Serrat, reprenant des vers d'Antonio Machado. Un passage rappelle joliment : « caminante, no hay camino, se hace camino al andar » (traduction : « marcheur, il n'y a pas de chemin, le chemin se fait en marchant »). Dans un registre scientifique, cette idée rejoint les modèles cosmologiques du système univers ou de la lumière qui crée son propre espace-temps.

que le parallélogramme est un quadrilatère non croisé qui possède un centre de symétrie, tandis que dans la seconde ingénierie ($\mathbf{I}_2$), il s'agit également d'un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux. De leurs cours antérieurs, tous les élèves sont censés pourvoir décrire les parallélogrammes particuliers (rectangle, losange et carré). Ils savent opérer avec la symétrie centrale, la propriété des angles alternes-internes et ils sont capables de déterminer une longueur ou une aire inconnue dans des problèmes de géométrie simples.

L'espace de travail géométrique proposé se compose de quatre moments types d'une durée approximative que nous détaillons ci-après. Le premier est l'*introduction* (10 min), qui ambitionne une première familiarisation avec le nouveau contenu relatif aux propriétés-cibles, c'est-à-dire les propriétés géométriques de référence qui sous-tendent la mise en place de l'espace de travail. À l'origine, l'espace était organisé autour des propriétés caractéristiques d'une même famille de quadrilatères, depuis les parallélogrammes jusqu'aux carrés, en passant par les rectangles et les losanges. Cependant, pour des raisons de contraintes textuelles, nous cernons dans les paragraphes suivants l'exemple du parallélogramme. Celui-ci commence avec l'activité des « milieux confondus » et montre directement un usage de l'outil logiciel. L'exemple se complète par les activités « côtés parallèles » et « côtés égaux », qui renvoient respectivement à la définition classique du parallélogramme et à la réciproque de la propriété isométrique des côtés opposées. La durée entre parenthèses correspond alors à l'étude d'une famille de quadrilatères et non pas à celle d'une seule propriété.

Le deuxième moment est l'*activité instrumentée* (40 min), qui vise l'instrumentation et l'expérimentation du lien contraintes-conclusion à l'interface de Cabri II Plus. Le troisième est la *situation didactique* (20 min), dont l'objectif tend à la médiation sémiotique et à l'institutionnalisation fonctionnelle des propriétés[6]. Si les trois premiers moments se réalisent collectivement, le second offre également un espace collaboratif. Enfin, le quatrième consiste en la *résolution des exercices et problèmes* dont une partie se gère individuellement, et il s'inscrit dans le fonctionnement ordinaire du cours. Ce moment propose un réinvestissement des propriétés géométriques dans de nouvelles situations ainsi que l'institutionnalisation de propriétés émergentes, comme les corollaires des propriétés-cibles ou leurs applications inattendues.

---

[6] Ici il s'agit de mettre en valeur l'intervention enseignante, car du point de vue de la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998), on retrouve proprement des situations didactiques dans les autres moments. Lors du moment de l'activité instrumentée par exemple, ces situations s'organisent en phases d'action avec l'outil informatique ou de formulation dans les fiches des activités (cf. tableaux 1, 3 et 4).

4.1. Le moment d'introduction

Le parallélogramme a été introduit dans chaque ingénierie comme nous l'avons mentionné ci-dessus. Dans $\mathbf{I}_1$, il fallait relier les connaissances préalables sur la symétrie centrale et les propriétés traditionnelles du parallélogramme – la symétrie centrale avait été étudiée au chapitre précédent du cours. Il en est de même dans $\mathbf{I}_2$, sauf que nous avons dû tenir compte de la coexistence de deux définitions, puisque la définition à partir du parallélisme des côtés opposés avait été employée comme telle au primaire par une partie des élèves. Nous montrons au paragraphe suivant comment nous avons géré cette particularité dans l'aménagement de l'espace de travail. De façon plus technique, nous avons énoncé chaque définition oralement et par écrit à l'aide d'un dessin d'accompagnement, et nous avons directement posé quelques questions immédiates pour nous assurer de la compréhension des mots et du sens de la phrase, tout en prenant soin de ne pas accentuer la structure logique de la définition, ni son statut d'éventuelle justification dans un pas de raisonnement. C'est-à-dire que nous avons employé, au regard de la théorie des fonctions du langage de Duval (1995), la fonction référentielle de désignation d'objets et la fonction apophantique d'expression d'énoncés complets, sans y faire ressortir les fonctions d'expansion et de réflexivité discursives.

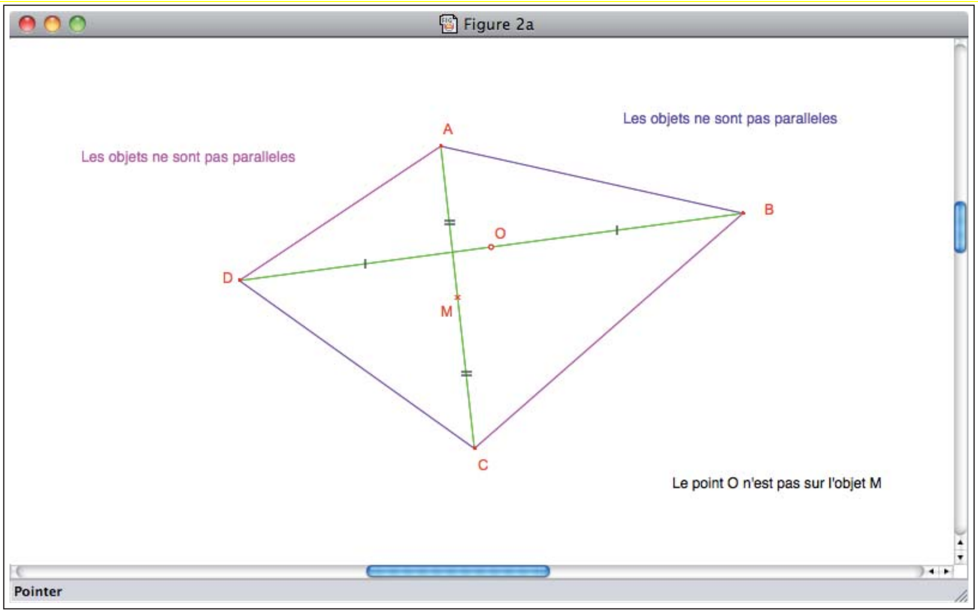
4.2. Le moment d'activité instrumentée

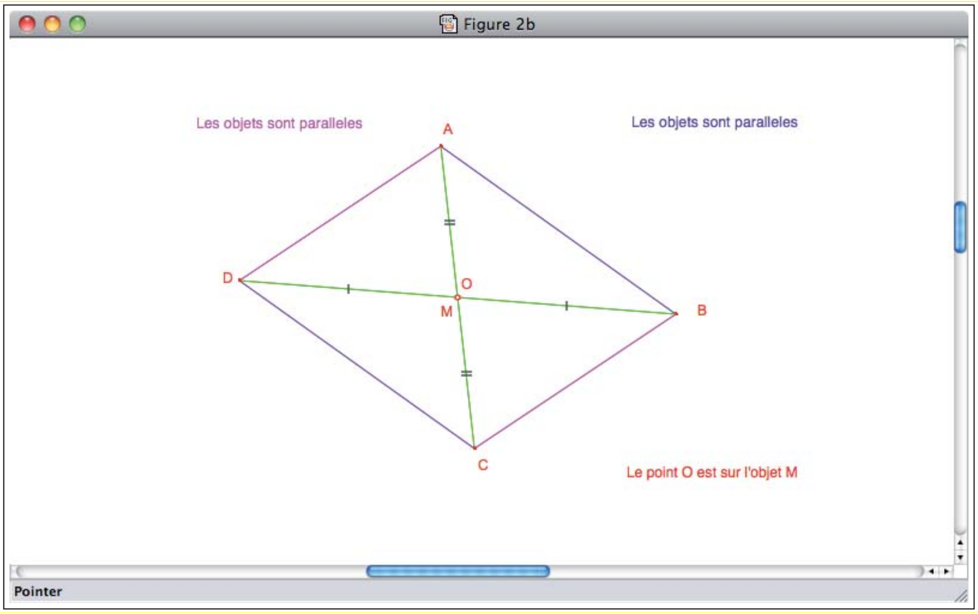
Dans le dispositif original, il y a trois activités sur le parallélogramme, chacune comportant des phases de découverte instrumentée et des phases de formulation. Au moyen de fiches contextuelles (voir l'exemple dans le tableau 1), la découverte instrumentée commence par demander le report de la situation à l'interface de l'outil logiciel. S'il faut y indiquer les parties de la figure qui doivent se déplacer, c'est en vue de répondre à une question d' « observation ». Dans cette dernière, nous avons choisi le verbe « devenir » pour qualifier la nature du quadrilatère en jeu, à l'instar de « que devient ABCD ? ». L'élève peut alors enregistrer verbalement une action consommée ou une lecture qui lui parait signifiante (cf. commentaire sur les verbes d'action au paragraphe *Le moment de situation didactique*). Quant à la formulation, elle vise à résumer les éléments de l'expérimentation qui traduisent discursivement, sous une forme personnelle, la nécessité instrumentée ou cognitive du lien entre la « construction-déplacement » et l'«observation ».

Construction Déplacement	• Construis un quadrilatère ABCD. • M est le milieu de [AC], O celui de [BD]. • Déplace le point B pour que pour que les points O et M soient confondus.
Observation	Que devient ABCD? --
Essaie de résumer en une phrase le tableau ci-dessus : ---	

Tableau 1 : Fiche de l'activité instrumentée « milieux confondus » dans **I**1.

Dans chaque activité, si nous demandons à l'élève de construire la figure en jeu, c'est pour lui permettre d'avoir un contrôle cognitif sur la cohérence du dessin, dont la reconnaissance de propriétés qui apparaissent ou qui demeurent invariantes lors du déplacement. Ainsi, dans la première activité de $\mathbf{I}_1$ (tableau 1), suite à la mise en place de la situation à l'écran et au déplacement du point B pour confondre raisonnablement les milieux, l'élève est en mesure de constater que le quadrilatère est un parallélogramme parce que celui-ci posséderait un centre de symétrie. Dans son action à l'interface du logiciel, nous nous attendons à ce que le processus de découverte procède par des allers-retours entre des configurations « milieux non confondus » et « milieux confondus », de sorte que la constatation mobilise essentiellement deux structures de contrôle au sens de Balacheff et Margolinas (2005). C'est-à-dire une première structure de type instrumenté qui induit l'idée que si ses contraintes ne sont pas satisfaites, alors la propriété-cible ne tient ni durant le déplacement (configurations dynamiques), ni à partir d'une sélection de configurations retenues (ensemble signifiant de configurations dynamiques ou statiques). Cela renforce empiriquement l'idée qui découle de la seconde structure de contrôle : lorsque les contraintes sont satisfaites, alors la propriété-cible tient déductivement selon la définition du parallélogramme. Si jamais l'élève déplaçait les sommets du parallélogramme pour s'assurer que celui-ci possède toujours un centre de symétrie, alors il serait difficile de savoir s'il expérimente pour en tester la définition ou s'il cherche à mettre en valeur le caractère quelconque de sa configuration. Néanmoins, parce que la définition du parallélogramme est connue, les instants où l'élève accepte, sous les contraintes de la situation, que le quadrilatère en jeu est un parallélogramme, relèvent d'un contrôle de type cognitif.





Figures 2a et 2b : En haut, état initial du fichier Cabri de l'activité des milieux confondus dans $\mathbf{I}_2$ et, en bas, configuration lorsque le point O est confondu avec l'objet M. Les points A, B, C et D peuvent bouger partout dans le plan, mais les points O et M dépendent des extrémités des diagonales [AC] et [BD].

Note sur la construction des figures 2a et 2b : De façon cachée, l'objet M, qui simule le milieu de [AC], est un segment dont les deux extrémités sont définies à partir de ce milieu. Cette astuce technique est nécessaire puisque l'oracle sur l'appartenance ne compare pas des objets du même ordre (point par rapport à point), mais bien selon la hiérarchie typique de la théorie des ensembles (point par rapport à un ensemble de points, dont le segment nul autorisé par le logiciel).

On peut être tenté de croire que si la coïncidence des milieux n'est instrumentalement qu'approximative, c'est-à-dire que si les pixels-milieux ne sont l'un sur l'autre que de façon visuelle, alors l'élève ne contrôlerait pas tout à fait le raisonnement véhiculé par la figure. Comme si la gestion de la représentation par l'outil constituait, en partant, un obstacle au développement d'une nécessité cognitive de la propriété-cible, dont le salut par une idéalisation de la figure ne serait dû qu'au processus de médiation sémiotique (moment de situation didactique). C'est pourquoi nous avons introduit, dans $\mathbf{I}_2$, une première activité où la situation s'installe dès l'ouverture d'un fichier Cabri II Plus (figure 2a), la première consigne dans le tableau 1 ayant été remplacée par « considère le quadrilatère ABCD du fichier Cabri ». Ce fichier affiche un quadrilatère ABCD, les milieux O et M de ses diagonales et trois oracles : deux sur le parallélisme des côtés opposés et un autre sur l'éventuelle coïncidence des milieux. Avant de donner la consigne qui mène à la superposition des milieux (« déplace le point B… » dans le tableau 1), la mise en scène est décrite discursivement de façon à rendre possible un contrôle cognitif sur une figure que l'élève n'a pas construite. En outre, nous avons marqué les diagonales de signes conventionnels pour souligner l'équidistance relative des milieux. De sorte qu'avec l'oracle sur la coïncidence des milieux, ces signes sont susceptibles de participer à l'acceptation de la conclusion dans une démarche déductive. Lorsqu'elle se réalise par les élèves, la figure 2b peut même agir comme justification dans une inférence figurale (au sens de Richard, 2004b). Si nous avons ajouté les oracles sur le parallélisme, en coloriant du même ton les côtés opposés et l'oracle correspondant, c'est pour considérer la coexistence des deux définitions du parallélogramme. Car sans ces oracles, les élèves qui voudraient invoquer le parallélisme des côtés opposés pour y reconnaître un parallélogramme seraient obligés de s'en remettre à l'apparence visuelle du dessin.

Construction Déplacement	• Construis un quadrilatère ABCD. • Déplace le point C pour que (AB) soit parallèle à (CD).
Observation ($\mathbf{I}_1$) Vérification ($\mathbf{I}_2$)	Que devient ABCD ? ($\mathbf{I}_1$) Pourquoi sais-tu que (AB) est parallèle à (CD) ? ($\mathbf{I}_2$) --
Construction	• Déplace le point C pour que (AB) soit parallèle à (CD) et que (AD) soit parallèle à (CB).
Observation	Que devient ABCD ? --
Essaie de résumer en une phrase le tableau ci-dessus : --	

Tableau 3 : Fiches de l'activité instrumentée « côtés parallèles ».

La séquence expérimentation-conjecture s'enchaîne deux fois dans les activités suivantes (tableaux 3 et 4)[7]. Nous avons employé une logique progressive qui permet, dans $\mathbf{I}_1$, de traiter inclusivement la satisfaction partielle et la satisfaction complète des contraintes, et dans $\mathbf{I}_2$, de connaître comment l'élève contrôle une partie de son jeu d'interaction dans une démarche consciente d'explicitation. Si nous nous attendons à ce que les premières séquences expérimentation-conjecture procèdent, à l'image de l'activité des « milieux confondus », par des allers-retours entre des configurations satisfaisantes et non-satisfaisantes, il est possible que l'accomplissement des contraintes « (AB) parallèle à (CD) » (tableau 3) et « AB = CD » (tableau 4) débouchent déjà sur des parallélogrammes. Ne serait-ce pour une question d'esthétisme ou simplement parce que le parallélogramme est dans l'air du temps – les élèves ont déjà participé à la première activité. Dans $\mathbf{I}_1$, on peut certes se méfier d'avoir à répondre deux fois à une même question (« que devient ABCD? »), d'autant plus qu'une seconde contrainte est ajoutée avant la reprise. Malgré tout, pour savoir si l'élève aura considéré temporairement un trapèze ou un quadrilatère isocèle, il faudrait comparer la production de ses résumés (dernières lignes) à ses observations antécédentes (deuxièmes et quatrièmes lignes).

[7] Pour éviter d'avoir à reproduire deux tableaux par ingénierie, la seconde ligne des tableaux 3 et 4 distingue la question propre à chacune (« observation » pour $\mathbf{I}_1$, « vérification » pour $\mathbf{I}_2$). De plus, la première consigne de $\mathbf{I}_2$ se lisait : « construis un quadrilatère ABCD sur des points de la grille ».

Construction Déplacement	• Construis un quadrilatère ABCD. • Mesure les longueurs AB, CD, AD puis BC. • Déplace le point C pour que AB = CD.
Observation (**I**$_1$) Vérification (**I**$_2$)	Que devient ABCD ? (**I**$_1$) Pourquoi sais-tu que AB = CD ? (**I**$_2$) ---
Construction	• Déplace le point C pour que AB = CD et que AD = CB.
Observation	Que devient ABCD ? ---
Essaie de résumer en une phrase le tableau ci-dessus : --	

Tableau 4 : Fiches de l'activité instrumentée « côtés égaux ».

Nous pouvons alors profiter de la seconde ingénierie pour vérifier, même lorsque la configuration partielle montre un parallélogramme, quelle est la structure de contrôle qui est mobilisée pour établir le parallélisme (activité « côtés parallèles ») et l'équidistance (activité « côtés égaux »). Cette démarche complémentaire est importante puisqu'à partir de ces activités, nous acceptons que la nécessité du lien contrainte-conclusion et la reconnaissance d'un parallélogramme peuvent faire appel à des structures de contrôle différentes. Contrairement à la première activité, l'élève ne peut plus invoquer la définition qui se fonde sur le centre de symétrie, c'est-à-dire qu'il devra employer une procédure qui renvoie à une autre définition. Dans l'activité des « côtés parallèles », cette procédure risque d'être essentiellement visuelle (ou vidéo-figurale, par opposition à discursivo-graphique), mais pourrait aussi bien s'instrumenter dans l'activité des « côtés égaux ». Si ces activités mettent en valeur de façon plus évidente l'autonomie de la nécessité épistémique de la propriété-cible par rapport à l'acceptation d'une conclusion qui satisfait aux contraintes, cela ne veut pas dire forcément que les procédures de l'élève mettent en jeu des structures de contrôle distinctes. Ainsi, dans **I**$_2$, ces activités posent la situation sur une grille – la consigne « construis un quadrilatère ABCD » (tableaux 3 et 4) se complétait par « sur des points de la grille ». L'élève peut donc déployer un argument à partir des nœuds de quadrillage dans une sorte de géométrie discrète, comme la vérification du parallélisme, d'abord en remarquant que les sommets du quadrilatère se déplacent sur des nœuds de quadrillage, ensuite en comparant avec ses doigts les accroissements horizontaux et verticaux des côtés opposées du quadrilatère. Un tel argument montre que l'acceptation de la conclusion n'est pas seulement due à la satisfaction des contraintes ou aux propriétés spatiales du dessin, mais aussi à une lecture sur une figure éprouvée qui se structure cognitivement dans une inférence figurale.

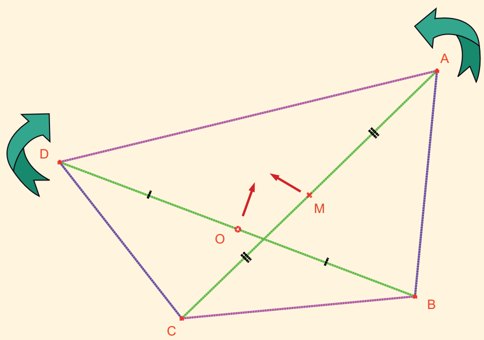
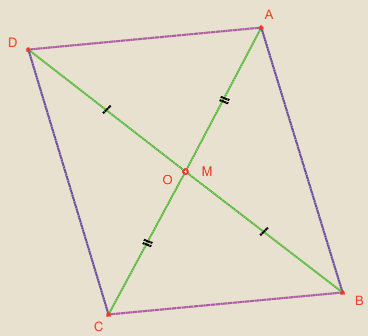
Faut-il souligner que le rôle de la grille n'est pas tout à fait le même d'une activité à l'autre. Dans la seconde activité, chez les élèves qui fonctionnent avec la définition du parallélisme des côtés opposés, l'interprétation à partir du dessin (traits opposés parallèles deux à deux) se confond à la satisfaction des contraintes ((AB) // (CD) et (AD) // (CB)). On pourrait croire qu'il y a là une sorte de tautologie, en ce sens qu'il faut employer la propriété-cible pour accepter la conclusion. Mais la satisfaction des contraintes est issue d'une action instrumentée, dont la représentation est essentiellement gérée par l'outil, tandis que l'introduction de la grille donne à l'élève un moyen de contrôle sur cette représentation. Bien plus qu'un renforcement sur le sens de la définition du parallélogramme, l'activité permet de modifier la valeur épistémique de la propriété-cible, avant même son institutionnalisation (voir paragraphe *Le moment de situation didactique*), et elle la rend cognitivement et formellement disponible pour les activités subséquentes. Au paragraphe *Le moment de résolution des exercices et problèmes*, nous réutilisons explicitement cette particularité dans la conception d'une situation-problème.

Si la compétence développée par l'usage de la grille peut se transférer dans la troisième activité, il est également possible que l'on s'en serve pour contrôler, le cas échéant, la congruence des côtés. L'égalité de Pythagore n'étant pas connue des élèves, il faudrait alors comparer la décomposition des distances horizontales et verticales des côtés opposés. Comparativement à $\mathbf{I}_1$, où la mesure selon l'outil « distance ou longueur » se laisse assimiler à un oracle sur une propriété métrique d'un côté, les points de la grille donnent moins de jeu à l'illusion de continuité dans le plan, aussi bien pour le parallélisme que pour l'équidistance. De fait, la troisième activité de $\mathbf{I}_1$ est instrumentalement plus exigeante, parce que pour former une configuration satisfaisante en déplaçant un point, les deux mesures des côtés adjacents s'ajustent en même temps. L'élève pourrait devoir anticiper la conclusion, par exemple, en effectuant simultanément un contrôle vidéo-figural sur le parallélisme des côtés opposés. Autrement dit, l'articulation entre la nécessité du lien contraintes-conclusion et la reconnaissance du parallélogramme procéderait par une coordination entre opérateurs instrumentés et opérateurs visuels, au regard d'une même structure de contrôle déductive. Le rapprochement des ingénieries constitue donc un moyen de comprendre le degré de nécessité associé à la formulation, par l'élève, de la propriété-cible en fin d'activités, tout comme la part de contrôle qui lui revient dans son processus de décision instrumentée.

4.3. Le moment de situation didactique

Ce moment débute par une mise en commun des formulations personnelles alors qu'un élève explique publiquement, à l'aide d'un vidéoprojecteur, comment il y est arrivé. S'il peut compter sur le concours de ses compagnons ou de l'enseignant, c'est parce qu'il s'agit de focaliser les compétences de toutes tendances sur une même situation. Cette phase collective constitue le préambule à une seconde, dans laquelle le jeu fondamental de l'enseignant est l'institutionnalisation, par leur formulation experte, des propriétés-cibles. Dans le tableau 5, nous reproduisons les éléments qui se rattachent à la première activité. Pour soutenir le processus de médiation sémiotique :

– les verbes d'action « construire » et « observer » précèdent intentionnellement la conjugaison des verbes d'état « avoir » et « être » dans une formulation explicitement calquée sur le modus ponens (« si [on a] …, alors [c'est] … »)[8] ;
– le dynamisme de l'environnement logiciel se transpose dans l'environnement papier-crayon avec le raisonnement discursivo-graphique.

<table>
<tr><td colspan="2">Si on construit …</td><td>Alors on observe …</td></tr>
<tr><td colspan="2">… un quadrilatère de façon à ce que
• O est le milieu de [BD] et M celui de [AC]
• O et M sont confondus

</td><td>

…ABCD est un parallélogramme</td></tr>
<tr><td>PROPRIÉTÉ</td><td colspan="2">Si un quadrilatère a ses diagonales qui ont le même milieu,
alors c'est un parallélogramme.</td></tr>
</table>

Tableau 5 : Institutionnalisation de la réciproque de la propriété des milieux d'un parallélogramme.

[8] Du point de vue de la fonction poétique du langage, si certaines formules comme «un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme» se disent mieux, elles dissimulent toutefois la structure d'implication logique pour le non-initié (Richard et Sierpinska, 2004).

Avec l'usage des oracles, le logiciel contribue malgré tout à modifier la valeur épistémique de la conclusion. Mais en cachant la rationalité dont il est issu, l'oracle ne peut être responsable d'autres apports discursifs. Toujours est-il que le dessin de droite dans le tableau 5 véhicule aussi un raisonnement et cela, qu'il soit issu de $\mathbf{I}_1$ ou de $\mathbf{I}_2$. C'est-à-dire que la lecture discursivo-graphique de la conclusion – utilisation des signes graphiques du dessin pour supporter la proposition discursive « ABCD est un parallélogramme » – est susceptible d'en modifier la valeur épistémique (figure 6). Par contre, ce dessin ne montre pas l'ordre des arguments qui le composent et cela pourrait évoquer davantage le résultat d'une figure induite, dont la représentation et la cohérence ont été gérées par le milieu, plutôt qu'une figure dûment constituée, contrôlée par le raisonnement. Afin de rendre la propriété cognitivement nécessaire et formellement fonctionnelle, l'enseignant amène donc les élèves à rapprocher la nécessité du lien contraintes-conclusion au rapport de l'interprétation discursivo-graphique et du rôle vidéo-figural des dessins. L'institutionnalisation des autres propriétés se présente de manière similaire, mais l'enseignant souligne la disponibilité de ces propriétés pour un éventuel usage et, dans $\mathbf{I}_2$, il introduit l'idée du contrôle à l'aide de la grille. Ainsi, pour démystifier l'apport de l'outil dans l'instrument, le « mouvement » de la construction vers l'observation commence par généraliser :

- l'argument des accroissements égaux ou des distances égales sur les nœuds de quadrillage à des points quelconques du plan (activités des « côtés parallèles » et des « côtés égaux ») ;
- l'argument des mesures égales selon la précision par défaut (0,01 cm près) à la précision maximale du logiciel (activité des « côtés égaux »).

C'est-à-dire que si le problème de discrétisation à l'échelle la plus fine de l'écran ou de la représentation interne n'est pas déterminant dans la structure de contrôle, c'est parce que la reconnaissance d'invariants ne peut émerger que dans les conditions ergonomiques de l'outil. À ce processus de « généralisation machine », qui se conduit par l'enseignant, s'ajoute celui de la généralisation d'un cas particulier typique de la figure quelconque. Enfin, la lecture et l'acceptation de la conclusion passent par l'introduction des propriétés de préservation des distances et de l'invariance du parallélisme dans une symétrie centrale.

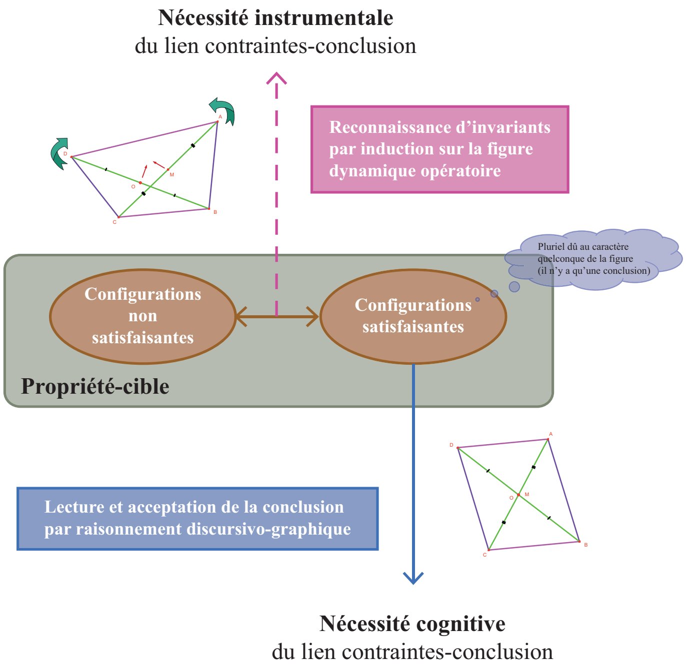


Figure 6 : Rapports du raisonnement à la nécessité du lien contraintes-conclusion.

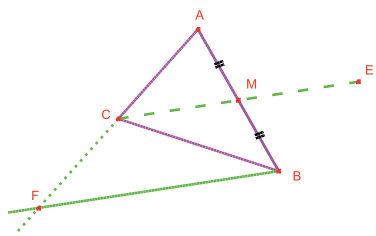
Énoncé et figure	
Dans un triangle ABC, E est le symétrique de C par rapport au milieu M de [AB]. La parallèle à (CM) passant par B coupe (AC) en F. Peut-on dire que C est le milieu de [AF]? *Répondre à cette question en plaçant de façon cohérente les morceaux du casse-tête suivant (il faut construire la conclusion à partir des hypothèses).* Tu peux utiliser les morceaux que tu veux et tu peux utiliser un même outil plus d'une fois.	

Tableau 7 : Situation-problème de contrôle.

4.4. Le moment de résolution des exercices et problèmes

Outre les aspects proprement cognitifs ou discursifs sur la signifiance et la conceptualisation, le but pédagogique ultime de nos ingénieries n'est pas la connaissance d'un système axiomatique absolu qui part des axiomes vers les propriétés, mais bien le développement de compétences géométriques à travers l'apprentissage des propriétés. Celles-ci sont considérées de façon relative les unes par rapport aux autres lors du maniement, avec un moyen d'expression ou un autre, d'implications logiques motivées, médiées et justifiées qui appartiennent à une structure de contrôle mathématique. Pour répondre plus particulièrement à la seconde question que nous posions à la fin de la section *Contexte*, nous reproduisons ici une situation-problème formulée dans l'environnement papier-crayon (tableau 7). Il s'agit de la résolution d'un problème de preuve à partir d'un casse-tête qui contient les pièces (propositions) d'un schéma de démonstration (tableau 8). Dans celui-ci, les hypothèses et la conclusion du problème sont données[9] de même que les résultats à déduire et leurs justifications. Aucune proposition n'est contextuellement fausse, mais il y a plus de résultats intermédiaires et d'outils qu'il n'en est strictement nécessaire pour former un schéma cohérent. Plusieurs solutions sont alors possibles. La forme des pièces renvoie au statut des propositions dans la démonstration ou la structure du raisonnement, et, dans le cas des outils, elle suggère notamment un sens logique qui va naturellement dans le sens de lecture. La formation d'inférences de structure ternaire (antécédent, justification et conclusion) repose conjointement sur l'idée d'expansion cognitive du discours déductif, inspirée de Richard (1995), et d'expansion formelle, d'Egret et Duval (1989). La résolution s'effectue par équipe de deux sur des pièces apposées à du carton. Les élèves peuvent, au besoin, demander des pièces supplémentaires à l'enseignant.

Comme les élèves n'ont jamais été initiés au discours déductif, mais que la résolution des activités instrumentées est toute récente, la formation partielle ou complète du casse-tête permet de vérifier l'aptitude à former une déduction cohérente et la constance d'un enchaînement de déductions, sans que la gestion de l'écrit ne soit un obstacle. En principe, les activités instrumentées concrétisent les réciproques de propriétés du parallélogramme. Mais en se référant à ces activités plutôt que de réécrire les énoncés des propriétés institutionnalisées, comme on le retrouve à la dernière ligne du tableau 5, nous pouvons détecter quel est le sens logique employé par l'élève dans sa justification. C'est-à-dire le sens fonctionnel qu'il a intériorisé au seuil de la situation-problème. Par exemple, l'application simultanée des activités A_2 et A_3, au lieu de la propriété P_1, est susceptible de trahir une sorte d'interférence sur la nécessité du lien entre les antécédents choisis et la conclusion produite. De même, la confusion d'usage entre les définitions D_1 et D_2 devrait indiquer si, malgré une structure correcte, les connaissances en jeu sont

[9] Puisque le problème se formule avec un dessin, les hypothèses sur l'alignement ou non des points (F appartient à (AC), ABC est un triangle) demeurent implicites. Ne voulant pas surcharger inutilement le processus de résolution, cette disposition permet d'employer indistinctement (AC) et (CF), ou d'invoquer la définition du milieu d'un segment uniquement avec l'équidistance, ce qui laisse l'alignement se dégager éventuellement du dessin en vue d'un raisonnement discursivo-graphique.

justifiées. Par ailleurs, l'existence des pièces A_1 et A_2, jointe à l'absence explicite d'énoncé dans la pièce D_1, est une astuce qui concilie les deux définitions du parallélogramme.

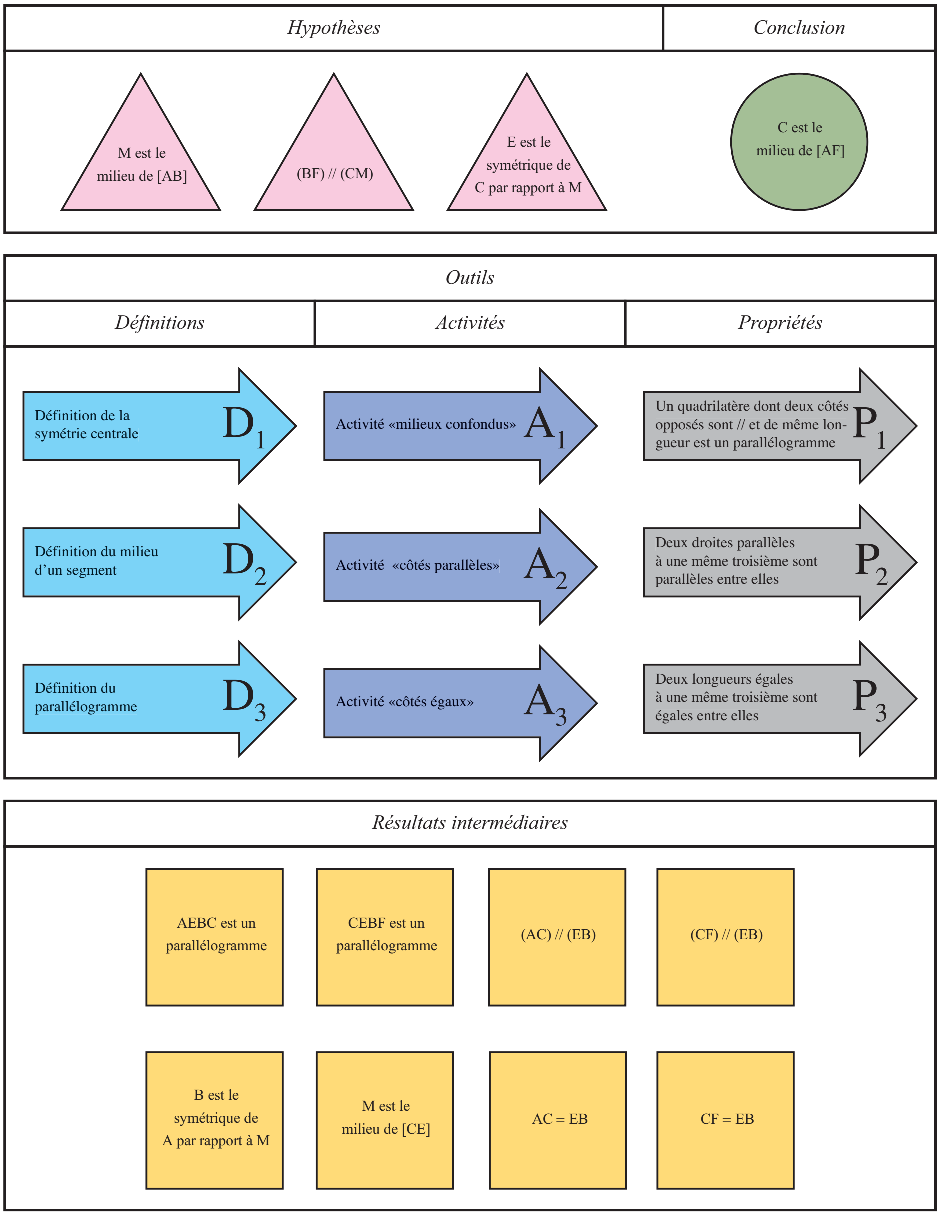


Tableau 8 : Pièces du casse-tête de démonstration.

5. Idonéité de l'espace de travail dans l'interaction sujet-milieu

Selon Kuzniak (2006), pour qu'un ETG soit efficace dans l'institution scolaire et ainsi, le qualifier d'idoine, il faut d'abord qu'il permette « de travailler dans la géométrie correspondant à la problématique visée » et ensuite, qu'il soit « bien construit dans le sens où ses différentes composantes sont organisées de manière valide ». Si à la section *Quelques considérations liminaires*, nous avons déjà nuancé sur la réalité géométrique dans ses rapports à l'institution, il n'en demeure pas moins que nous pouvons facilement situer la géométrie de référence de notre ETG dans l'articulation (GI|GII). En revanche, la validité dans l'organisation des composantes demande à son tour une attention particulière, dont les constituants clefs et les éléments charnières se résument schématiquement dans la figure 9. Inspiré au préalable des niveaux d'organisation de Kuzniak (2009), qui compose les dimensions épistémologique (plan des composantes) et cognitive (plan cognitif) de l'ETG, notre caractérisation met plutôt en valeur l'interaction entre un sujet épistémique et un milieu épistémologique, de même que les principales genèses qui animent cette interaction. Nonobstant les relations planaires qui ne sont pas déterminées chez l'auteur – dans notre caractérisation par exemple, la relation entre l'« espace réel et local » et le « référentiel » est identifiée par le couple « interprétation-mathématisation » –, la structure d'ensemble et la signification de plusieurs composantes sont sensiblement les mêmes. Afin de montrer l'idonéité de notre espace de travail, nous ne nous étendons alors que sur les principales différences du modèle afin d'étayer l'organisation des composantes dans le prolongement de la section *Analyse de l'espace de travail géométrique*.

En ayant choisi de se centrer sur les interactions sujet-milieu et en reconnaissant celles-ci comme étant les plus petites unités d'interaction cognitive, chaque flèche de la figure 9 représente un processus entre les réalisations coordonnées par le sujet épistémique et l'architecture du milieu épistémologique. De façon traditionnelle, la notion de sujet épistémique permet de rendre compte de la genèse des notions géométriques issues des paradigmes à partir de la connaissance elle-même, telle qu'elle est construite au sein du sujet individuel ou d'un groupe de sujets. Mais au regard d'une réalité géométrique dynamique et dans l'idée d'un espace de travail qui se crée aussi par une démarche potentielle (section *Contexte*), nous pouvons également considérer la valeur épistémique qu'un sujet peut associer à ses réalisations, que ce soit dans ses représentations sémiotiques, ses traitements intentionnels ou ses traitements quasi-instantanés (au sens de Duval, 1995).

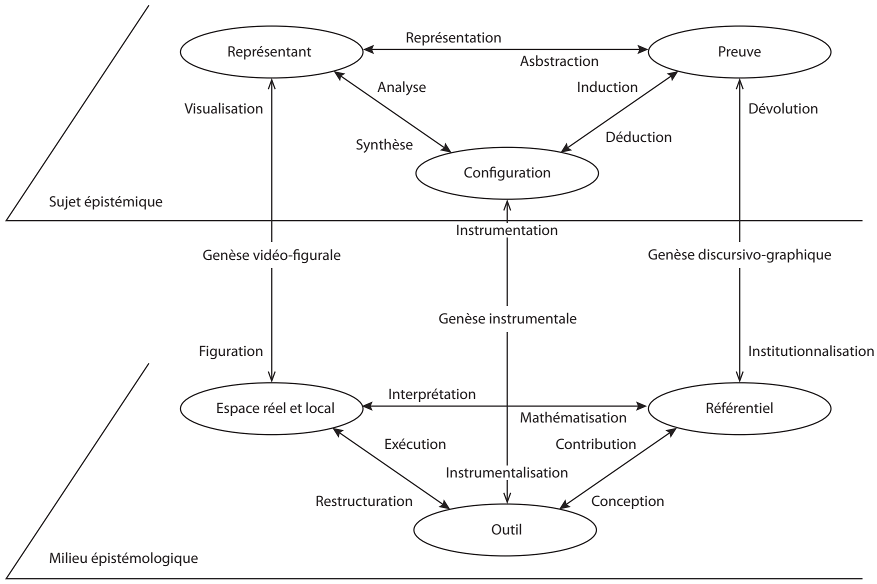


Figure 9 : L'espace de travail géométrique dans l'interaction entre l'élève et le milieu.

Dans notre espace de travail, les propriétés géométriques sont à la fois la cause des activités instrumentées et l'objectif de l'apprentissage. Autrement dit, parce que le référentiel est constitué de propriétés, ce sont elles qui participent à la conception de l'outil, dont l'usage permet d'en rapporter des nouvelles et ainsi, contribuer à la valorisation du référentiel. Pour le sujet, l'entrée dans une nécessité épistémique du lien contraintes-conclusion passe d'abord par deux types de genèses bien différenciées. Si la genèse instrumentale résulte des processus d'instrumentation et d'instrumentalisation (Rabardel, 1995), la genèse discursivo-graphique reprend l'idée que l'exploitation des propriétés dans une démarche de preuve, qui fonctionne et se structure par rapport à une référence instituée, découle de deux processus largement complémentaires que nous empruntons à Brousseau (1998). Dans la théorie des situations didactiques, les processus de dévolution et d'institutionnalisation sont ceux qui permettent à l'enseignant de donner du sens au jeu de l'élève et à la connaissance. Afin qu'il puisse effectuer un travail de « géomètre », nous considérons que l'élève adhère progressivement à une référence théorique préexistante (dévolution des propriétés-cibles) et même qu'il enrichi le référentiel en ayant validé de « nouvelles » propriétés dans son interaction avec le milieu (leur institutionnalisation). En intégrant les processus inductif et déductif que nous avons condensés dans la figure 6, les relations réciproques entre le référentiel, l'outil, la configuration et la preuve forment une des trois démarches fondamentales du système sujet-milieu (figure 10), soit la démarche de validation.

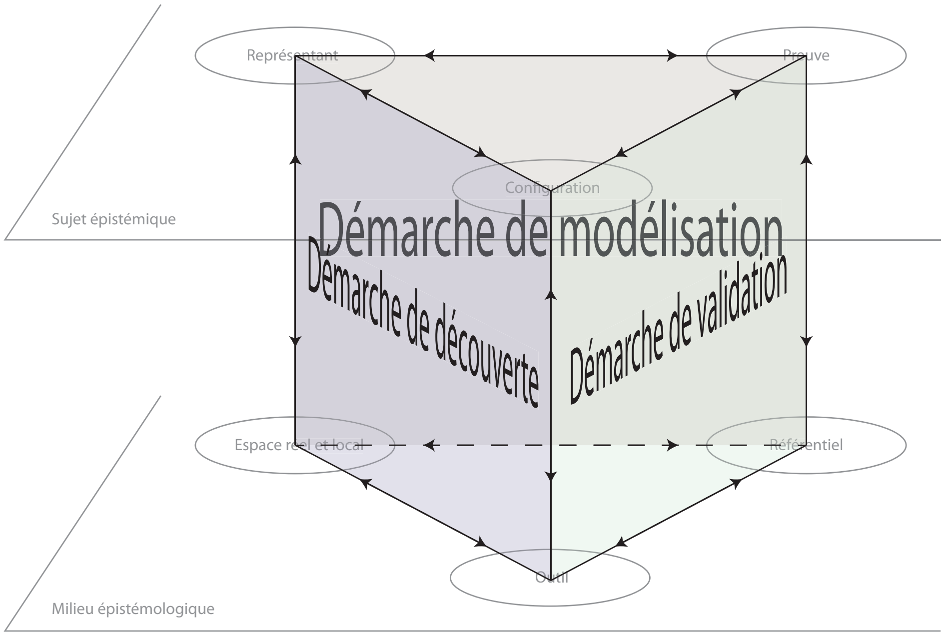


Figure 10 : Trois démarches fondamentales dans l'espace de travail géométrique idoine.

Si la transformation des connaissances mathématiques ou le développement des conceptions chez un sujet procède à la fois par expansion discursive et par expansion graphique (au sens de Richard, 2004b), c'est parce que d'une part, les modes d'expansion permettent aussi bien le traitement au sein d'un registre de représentation que la coordination entre registres, et que, d'autre part, ils participent au contrôle sur la représentation sémiotique et dans le traitement même. Une des particularités de la pratique géométrique se caractérise par ses relations de modélisation, de signifiance et de représentation. Par rapport au référentiel, il semble naturel d'associer aux représentants géométriques un lien direct, comme si les signes figuraux se comportaient exactement comme la plupart des autres signes mathématiques. C'est-à-dire qu'à l'instar des notations de fonction, de vecteurs, d'opérateurs, *etc*., les signes figuraux n'auraient pas de signification, contrairement aux signes linguistiques, et ne se constitueraient que par une référence instituée. Si cela est valable pour des signes conventionnels comme la double coche pour représenter l'équidistance ou l'usage d'une même couleur pour le parallélisme, une bonne partie des signes figuraux sont eux-mêmes des formes, donc leur propre modèle (Richard et Sierpinska, 2004). Ce double jeu représentatif dans l'expression et la signification des figures et de leurs propriétés nous incite à distinguer la genèse vidéo-figurale de la genèse discursivo-graphique. Dans le sens développé avec la notion de figure géométrique opératoire, la genèse vidéo-figurale procède selon les processus de visualisation et de figuration, tournés respectivement vers le représentant et vers l'espace réel et local. En reprenant, de la notion précédente, les processus de représentation et d'abstraction, tout comme, de la définition classique de la notion de modèle, les processus de mathématisation et d'interprétation, nous identifions la démarche fondamentale de modélisation dans les relations réciproques entre le référentiel, l'espace réel et local, le représentant et la preuve.

En l'absence du référentiel, ne serait-ce que de façon momentanée, les processus qui résultent de la genèse vidéo-figurale jouent un rôle heuristique de premier ordre. Mais ce rôle est amplifié par l'usage de l'outil logiciel, alors que celui-ci gère une partie des connaissances en jeu, telles que la représentation interne des objets, la représentation à l'écran et le traitement de ces représentations. Ainsi, dans les allers-retours entre des configurations satisfaisantes et non-satisfaisantes mentionnées au paragraphe *Le moment d'activité instrumentée*, c'est le logiciel qui conserve la logique de la construction durant le déplacement. Indépendamment du sujet, le sens de l'objet technique est son fonctionnement (exécution) et la production par l'outil informatique, qui a sur la perception des effets analogues à ceux de l'espace réel et local, est une sorte de « virtualisation » de cet espace (restructuration). Si les relations réciproques entre l'espace réel et local, l'outil, la configuration et le représentant constituent la démarche fondamentale de découverte, il faut voir que l'organisation des composantes se valide dans l'articulation des trois démarches fondamentales.

Conclusion

L'analyse que nous avons effectuée fourni un exemple d'ETG idoine en faisant abstraction de résultats expérimentaux. Faut-il en conclure pour autant qu'il s'agit aussi d'un ETG de référence ? Dès le début de notre article, nous avons montré jusqu'à quel point les frontières entre les notions de visualisation, de construction et de preuve, sur le plan cognitif de Kuzniak (2009), sont perméables dans l'apprentissage des propriétés géométrique qui procède par « évolution » au début de l'école secondaire. Le concept même de figure dynamique opératoire et le rôle constitutionnel du raisonnement dans celle-ci en sont une manifestation des plus marquées. Dans la perspective plus vaste de séquences d'enseignement qui se fondent sur notre ETG, mais dont l'intention vise ouvertement un enrichissement du référentiel théorique des élèves, le modèle sur la nature du travail géométrique de Kuzniak (2009) devient particulièrement utile pour en situer les caractéristiques dominantes. Ainsi, dans la mesure où les propriétés-cibles forment en soi un référentiel théorique, les relations immédiates de celles-ci à l'outil logiciel, l'espace réel et la preuve sont plus claires pour l'acquisition d'une propriété mathématique appliquée aux démonstrations.

Toutefois, s'il faut envisager l'existence d'espaces de travail spécifiques associés à chaque paradigme, c'est-à-dire un ETG de référence, cela équivaut à considérer une hiérarchisation d'origine épistémologique dans le sens « ETG de référence » → « ETG idoines » → « ETG personnels ». Or, une telle descendance sous-estime le mouvement contraire. Parce que si la référence géométrique ne paraît pas aussi claire pour l'institution, les ETG personnels et les ETG idoines créent de facto une référence pour le développement des compétences géométriques des élèves. Nous croyons alors que notre définition fonctionnelle de la notion de milieu, jointe à la reconnaissance du système sujet-milieu en tant que plus petite unité d'interaction cognitive, permet de mettre en valeur l'organisation d'une réalité géométrique de référence ascendante. Au demeurant, s'il appartient à l'élève de gouverner essentiellement l'objectif fondamental d'une situation, le partage de responsabilités « sujet-milieu » sur le contrôle des connaissances montre combien le référentiel théorique peut être à la fois interne et externe au système d'interaction cognitive.

L'expérience de subordination des contraintes à la conclusion joue sur deux types de rationalités traditionnellement opposées. En premier lieu, la nécessité instrumentale du lien contraintes-conclusion procède par induction sur la figure dynamique opératoire. Cette figure se matérialise, dans la confrontation entre une configuration satisfaisante et des configurations non satisfaisantes relatives à la propriété-cible, afin d'en dégager des propriétés qui demeurent invariantes dans le déplacement et signifiantes pour l'élève. Le contrôle de la justification inférentielle est géré de façon partagée dans l'instantanéité des actions-rétroactions à l'interface de l'outil logiciel, et le conséquent est obtenu par interprétation sur la configuration satisfaisante, à la manière d'une inférence figurale. En second lieu, c'est lors de cette interprétation que la nécessité cognitive du lien contraintes-conclusion est susceptible de se comporter comme une déduction cognitive ou formelle, par raisonnement discursivo-graphique où le contrôle de la justification appartient à l'élève. Même si ce besoin peut naître à la suite d'une situation didactique dans laquelle les verbes d'état se sont substitués aux verbes d'action, l'idée charnière reprend celle de Clairaut (2006) lorsqu'il affirme que « cette induction présumée porte avec elle sa démonstration ».

Afin de vérifier si l'expérience de subordination des contraintes à la conclusion rend fonctionnellement signifiante la structure d'une déduction et le statut opératoire d'une propriété mathématique avec une certaine autonomie par rapport à l'outil logiciel, nous avons mis en place la situation-problème du casse-tête de démonstration en guise de problème complémentaire. Bien que nous n'ayons pas présenté de résultats de recherche dans notre texte, le transfert anticipé sur la base de notre étude permet ici de poser l'idonéité de notre espace de travail géométrique dans une démarche en instance de réalisation. Ainsi, alors que l'expression du raisonnement déductif y serait multiregistre, la structure de contrôle développée chez l'élève renverrait à ce type de rationalité mathématique.

Bibliographie

ALSINA, C. & NELSEN, R. (2006), *Math Made Visual, Creating Images for Understanding Mathematics,* Mathematical Association of America, Washington.

BALACHEFF, N. & MARGOLINAS, C. (2005), Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques, dans *Balises pour la didactique des mathématiques* (Éds. Mercier & Margolinas), 75–106, La pensée sauvage, Grenoble.

BARTOLINI BUSSI, M.G. & MASCHIETTO, M. (2005), *Macchine Matematiche: dalla storia alla scuola*, Springer.

BROUSSEAU, G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BRYANT, J. & SANGWIN, C. (2008), *How round is your circle? Where engineering and mathematics meet*, Princeton University Press.

CARON, F. (2003), *Où sont les mathématiques quand on a besoin d'elles ?*, Éditions Bande didactique, Montréal.

CARON F. & DE COTRET S.R. (2007), Un regard didactique sur l'évaluation en mathématiques : genèse d'une perspective, *Actes du Colloque 2007 du Groupe de didactique des mathématiques du Québec*, 123–134.

CHEVALLARD, Y. (1992), *La transposition didactique*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

CLAIRAUT, A.C. (2006), *Éléments de géométrie*, reproduction en fac-similé de l'édition de Paris chez David fils, 1741 : Éléments de géométrie, Gabay, Paris.

COUTAT, S. (2006), *Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la géométrie pour favoriser une liaison école primaire-collège : une ingénierie au collège sur la notion de propriété*, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble.

DAHAN, J.J. (2005), *La démarche de découverte expérimentalement médiée par cabri-géomètre en mathématiques : un essai de formalisation à partir de l'analyse de démarches de résolutions de problèmes de boîtes noires*, Thèse de Doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble.

DOUADY, R. (2005), *Didactique des Mathématiques*, article de l'Encyclopædia Universalis France.

DRIJVERS, P. & TROUCHE, L. (2008), From artefacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor, dans *Research on technology and the teaching and learning of mathematics, Vol. 2 : Cases and perspectives* (Éds. Blume & Heid), 363–392, Information Age, Charlotte, Caroline du Nord.

DUVAL, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine : registre sémiotique et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Berne.

DUVAL, R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 5–53.

EGRET, M.A. & DUVAL, D. (1989), Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **2**, 41–64.

GIVRY, D. & ROTH, W.M. (2006), Toward a New Conception of Conceptions : Interplay of Talk, Gestures, and Structures in the Setting, *Journal of Research in Science Teaching*, **43.10**, 1086–1109.

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **11**, 175–193.

KUZNIAK, A. (2006), Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, **6.2**, 167–187.

KUZNIAK, A. (2009), Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France, dans *Premier Colloque Franco-Chypriote de Didactique des Mathématiques*, (Éds. Gagatsis, Kuzniak, Deliyianni & Vivier), 71–89.

MARGOLINAS, C. (2009), *Points de vue de l'élève et du professeur : essai de développement de la théorie des situations didactiques*, Habilitation à diriger les recherches en sciences de l'éducation, Université de Provence, version électronique récupérée le 26 juillet 2010 à
http://tel.archivesouvertes.fr/docs/00/42/96/95/PDF/HDR_Margolinas.pdf

MÉLS (2001, 2006 et 2007), *Programme de formation de l'école québécoise, éducation préscolaire, enseignement primaire* (2001), *enseignement secondaire 1^er^ cycle* (2006) et *enseignement secondaire 2^e^ cycle* (2007), Publications du Gouvernement du Québec.

RABARDEL, P. (1995), *Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains*, Armand Colin, Paris.

RICHARD, P.R. (1995), *L'enseignement de la démonstration*, Mémoire de Maîtrise non publié, Universitat Autònoma de Barcelona.

RICHARD, P.R. (2003), Continuités et ruptures dans l'évolution des caractéristiques sémiotiques des manuels scolaires de mathématique en usage au Québec depuis le milieu du XIXe siècle, *Actes du Colloque 2002 du Groupe de didactique des mathématiques du Québec.*

RICHARD, P.R. (2004a), *Raisonnement et stratégies de preuve dans l'enseignement des mathématiques*, Peter Lang, Berne.

RICHARD, P.R. (2004b), L'inférence figurale : un pas de raisonnement discursivo-graphique, *Educational Studies in Mathematics*, **57**, 229–263.

RICHARD, P.R., FORTUNY, J.M., GAGNON, M., LEDUC, N., PUERTAS, E. & TESSIER-BAILLARGEON, M. (2011), Theoretical Fundaments for an Intelligent Tutorial System Towards the Learning of Geometry at a High School Level, dans *Interoperable interactive geometry for Europe* (Éds. Kortenkamp & Laborde), *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, **43.4**, 1–15.

RICHARD, P.R., MEAVILLA, V. & FORTUNY, J.M. (2010), Textos clásicos y geometría dinámica : estudio de un aporte mutuo para el aprendizaje de la geometría, *Revista Enseñanza de las Ciencias*, **28.1**, 95–111.

RICHARD, P.R. & SIERPINSKA, A. (2004), Étude fonctionnelle-structurelle de deux extraits de manuels anciens de géométrie, dans *Le langage dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques* (Éds. Lemoyne & Sackur), *Revue des sciences de l'éducation*, **30.2**, 379–409.

VYGOTSKY, L.S. (1978), *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Process*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts.

Sylvia COUTAT
Université de Genève
sylvia.coutat@unige.ch

Philippe R. RICHARD
Université de Montréal et Universitat Autònoma de Barcelona
philippe.r.richard@umontreal.ca

PARZYSZ BERNARD

QUELQUES QUESTIONS DIDACTIQUES DE LA STATISTIQUE ET DES PROBABILITÉS

Abstract. Some Educational Questions about Statistics and Probability. This article goes over some of the ideas which emerged in France about the teaching of probability and statistics in secondary education during the past ten years, and first of all it takes up and develops the idea of an analogy between modelling in probability and in elementary geometry, considered here from the standpoint of paradigms. Another specificity of the domain is that its teaching makes a great use of various representations: tables, varied kinds of graphs, tree diagrams, box-and-whiskers plots and so on, which are a major element of the workspace but the construction and the meaning of which are sometimes problematic. It is the same for the articulation of one register with another, which is most often considered transparent, but obviously is not without causing difficulties, even among teachers. Taking into account the notion of semantic congruence may allow working this aspect more specifically and bring to the fore the isomorphism subjacent to random experiments which seem *a priori* different, thus opening up the way to the notion of probabilistic model.

Résumé. Cet article rassemble, en leur donnant un éclairage didactique, quelques-unes des idées qui ont émergé en France sur l'enseignement des probabilités et de la statistique dans le secondaire au cours de la dernière décennie, et en premier lieu il reprend et développe celle d'une analogie entre la modélisation en probabilités et en géométrie élémentaire, vue ici sous l'angle des paradigmes. Une autre particularité du domaine est que son enseignement fait un grand usage de représentations variées : tableaux, graphiques divers, arbres, boîtes de dispersion, *etc*., qui constituent un élément majeur de l'espace de travail mais dont la construction et le sens posent parfois problème. Il en va de même de l'articulation de ces divers registres entre eux, qui est le plus souvent considérée comme transparente, mais à l'évidence n'est pas sans créer des difficultés, même chez les enseignants. La prise en compte de la notion de congruence sémantique peut permettre de travailler plus spécifiquement cet aspect et de mettre en évidence l'isomorphisme sous-jacent à des expériences aléatoires *a priori* différentes, ouvrant ainsi la voie à la notion de modèle probabiliste.

Mots-clés. Statistiques et Probabilités, paradigmes, registres, modélisation.

---

1. Introduction

Par rapport à d'autres domaines comme la géométrie, l'algèbre ou l'analyse, la statistique et les probabilités sont apparues très tardivement dans l'enseignement secondaire. En France, par exemple, ce n'est qu'il n'y a une quarantaine d'années − à l'occasion de la réforme dite des « mathématiques modernes », et bien que ce domaine ne fût pas en odeur de sainteté chez Bourbaki − qu'elles ont véritablement fait leur apparition dans l'enseignement général (Parzysz, 1997a), sans doute pour

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 16, p. 127 – 147.

la raison que l'axiomatique de Kolmogorov, avec l'algèbre des événements, ainsi que le traitement statistique, fournissaient des applications de la « théorie des ensembles » (organisation des données, propriétés de la probabilité). Cette place s'est ensuite trouvée confortée par le développement, dans les sciences et l'industrie, de nombreuses applications de la statistique inférentielle, développement concomitant de celui de technologies permettant la simulation des phénomènes aléatoires. En particulier, la mise en place de nouveaux programmes au lycée à partir de 2001 a permis d'installer l'aléatoire comme une branche « à part entière » des mathématiques enseignées dans le secondaire (alors qu'auparavant elle était plutôt considérée comme étant « entièrement à part »), et ce pour deux raisons principales, et non forcément indépendantes, liées aux enseignants : d'une part leur manque de formation dans ce domaine, et d'autre part le fait qu'un certain nombre d'entre eux ne considéraient pas la statistique et les probabilités comme faisant partie des sciences mathématiques. Cette relative nouveauté du domaine et la méfiance à son égard expliquent sans doute, du moins en partie, la proportion relativement faible de travaux didactiques consacrés au domaine de l'aléatoire, alors que, comme on vient de le voir, le besoin de formation était − et reste − important, comme en témoigne la multitude d'actions de formation continue mises en place par les IREM.

La mise en place des probabilités dans l'enseignement secondaire n'est pas, nous le verrons, sans présenter de fortes analogies avec celle de la géométrie « démontrée », que permettent de mettre en évidence les notions de paradigme et d'espace de travail, en soulignant dans un cas comme dans l'autre le rôle crucial des représentations. Cependant, comparées à la « figure » de géométrie, dans l'enseignement de la statistique comme dans celui des probabilités les représentations sont de types très variés, qu'il s'agisse de la statistique descriptive, dont les médias − *via* l'inventivité de leur service d'infographie − nous offrent quotidiennement des exemples plus ou moins pertinents, ou des probabilités, où l'utilisation des arbres est désormais officialisée (*cf.* programme de terminale scientifique : « *On utilisera à bon escient les représentations telles que tableaux, arbres, diagrammes, ..., efficaces pour résoudre des problèmes de probabilités* » (B.O. hors série n° 4 (30 août 2001) p. 70), y compris en tant qu'outil de démonstration : « *un arbre de probabilité correctement construit constitue une preuve* » (*ibid.*).

Je voudrais, dans cet article, reprendre, en leur donnant un éclairage didactique, quelques-unes des idées qui ont émergé à ce sujet au cours de la dernière décennie, pour les relier à des cadres théoriques plus généraux.

2. La modélisation : un parallèle entre probabilité et géométrie

Je commencerai par m'intéresser à l'idée, émise naguère par M. Henry, d'une analogie entre la démarche de modélisation entreprise en géométrie dans l'enseignement secondaire et celle qui concerne la mise en place du cadre probabiliste au lycée (Henry, 1999). Tout d'abord, on peut constater que la notion de probabilité présente une dualité incontournable (Henry, 2009, Carranza, 2009). Schématiquement on peut en effet considérer, d'une part une *probabilité subjective*, degré de croyance de l'observateur relativement à la réalisation d'un événement donné (exemple : pleuvra-t-il ce matin ?), et d'autre part une *probabilité objective*, résultant de nombreuses observations de cet événement (exemple : consultation des données météorologiques) : « *Nous considérons* (…) *la probabilité comme une valeur indépendante de l'observateur, qui indique approximativement avec quelle fréquence l'événement considéré se produira au cours d'une longue série d'épreuves*. » (Renyi, 1966, p. 26). Cette idée avait déjà été émise il y a trois siècles par Jacques Bernoulli : « *Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est du moins a posteriori, c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire en observant l'issue de nombreux exemples semblables* ». (Bernoulli, 1713, p. 42). C'est à cette option (approche dite « fréquentiste ») que s'intéresse plus particulièrement Henry, car elle a été intégrée dans les programmes français actuels à côté de l'approche (dite « laplacienne »), seule présente dans les programmes précédents, qui consiste à définir la probabilité d'un événement associé à diverses éventualités comme le rapport du nombre de celles qui le produisent à leur nombre total. Comme il le fait remarquer : « [Laplace] *souligne la nécessité théorique de l'équiprobabilité des résultats possibles, en laissant à la subjectivité de l'observateur le soin d'en contrôler l'adéquation à la réalité observée.* » (*op. cit.* p. 17) ; c'est-à-dire que, selon la formule consacrée, la probabilité est le nombre de cas favorables divisé par le nombre de cas possibles. Cette conception est également qualifiée de « classique » (Batanero, 2001, p. 13).

Outre le fait qu'elle permet de rendre compte d'un éventail plus large de phénomènes (ceux pour lesquels « il n'est pas donné d'obtenir a priori » la probabilité, c'est-à-dire pour lesquels on ne dispose pas d'un modèle canonique laplacien), l'approche fréquentiste présente l'avantage de permettre une meilleure compréhension des phénomènes de nature aléatoire qui se présentent dans la réalité : « [l'approche fréquentiste] *est cohérente avec l'objectif d'enseigner les mathématiques en vue de donner aux futurs citoyens les capacités de résoudre de vrais problèmes ou de comprendre le fonctionnement des données scientifiques intervenant dans les choix auxquels ils auront à participer.* » (Henry, 1999, p. 33).

Je propose dans ce qui suit une relecture de l'article de Henry, en m'en tenant aux deux conceptions de la probabilité (laplacienne et fréquentiste) figurant explicitement dans les programmes français :

« *La notion de probabilité est abordée à partir de situations familières (pièces de monnaie, dés, roues de loteries, urnes). Certaines de ces situations permettent de rencontrer des cas pour lesquels les probabilités ne sont pas définies à partir de considérations intuitives de symétrie ou de comparaison mais sont approximativement évaluées par les fréquences observées expérimentalement* (…). »

(Programme français de la classe de Troisième)

2.1. Première modélisation

Dans le cas de la géométrie, il y a au départ, selon Henry, une perception de l'environnement et des actions sur celui-ci : manipulations, constructions, qui conduisent au repérage d'invariants. Il prend comme exemple emblématique une rosace médiévale (*op. cit* p. 30) mais, en référence à mes travaux (Parzysz, 2009b), je lui substituerai ici le motif central d'un panneau d'une mosaïque de Besançon (*figure 1*). On commence par observer le motif en vue d'en rechercher une procédure de construction, ce qui nécessite de repérer des segments et des arcs de cercles et de faire des hypothèses sur les égalités de longueurs et les emplacements des centres des cercles (*figure 2*).

Figure 1 : Besançon. Panneau de la mosaïque de Méduse (2e moitié du 2e siècle). Cliché INRAP.

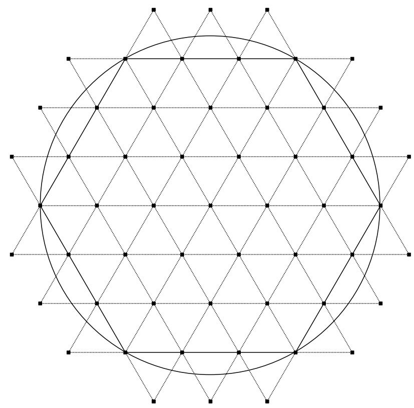


Figure 2 : Positions des centres des cercles
Les fuseaux sont remplacés par des traits droits.
Hypothèse : les triangles sont équilatéraux.

En d'autres termes, il s'agit d'entrer dans G1 (Houdement & Kuzniak, 1999, 2006, Parzysz, 2003) à partir de l'observation du réel, avec un objectif fixé au départ (la reproduction), et de recueillir des données.

On travaille ensuite dans G1 ; l'objet d'étude est maintenant un dessin épuré schématisant l'objet matériel initial, auquel on prête certaines propriétés (alignement, perpendicularité, parallélisme, *etc*.) qui sont, soit issues des observations faites sur l'objet initial, soit constatées sur le schéma lui-même. Sur la base de ces propriétés, on peut le cas échéant envisager une procédure de construction aux instruments.

Dans l'exemple de la mosaïque, le travail sera le suivant : « *Production de dessins géométriques se rapprochant de la* [mosaïque] *observée. (…) Donnée d'un programme de construction du dessin choisi pour représenter la* [mosaïque]. *Justification du programme par des arguments géométriques reprenant les hypothèses issues de l'observation.* » (Henry, 1999, p. 30). Plus précisément, l'observation initiale conduit à considérer la réunion de 72 triangles équilatéraux, dont les sommets sont les centres des cercles servant à mettre les fuseaux en place (*figure 3*).

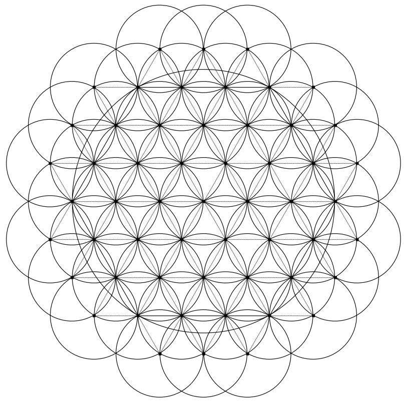


Figure 3 : Disposition des cercles.

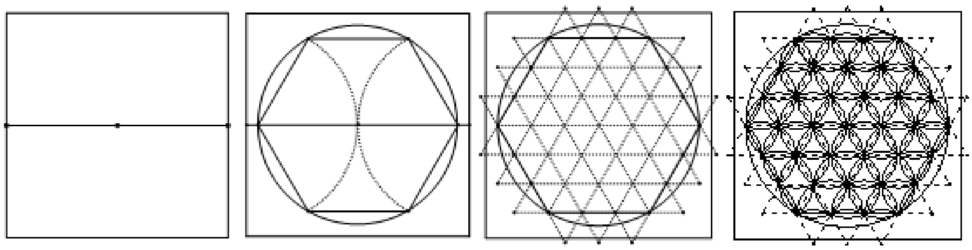
Les outils associés à cet espace de travail sont, soit ceux fournis par un logiciel de géométrie, soit − en environnement papier-crayon − la règle et le compas, et les constructions qui interviennent sont :

- cercle de centre donné passant par un point donné ;
- hexagone régulier inscrit dans un cercle donné ;
- partage d'un segment en *n* parties égales.

(Notons au passage que le mosaïste antique réalisait vraisemblablement cette dernière construction par approximations successives − c'est-à-dire par report de longueur −, qui est une technique propre à G1, beaucoup plus efficace − car sans calculs ni constructions − et économe en temps.)

Une procédure de construction possible fait intervenir sept phases dans l'ordre suivant, en partant du « cadre » carré cernant le panneau (*figure 4*) :

1) Médiane « horizontale » du carré.
2) Milieu de cette médiane.
3) Cercle centré en ce point.
4) Hexagone inscrit dans ce cercle (la médiane tracée étant une diagonale).
5) Partage des côtés de l'hexagone en trois et prolongement des côtés d'une subdivision de chaque côté (N.B. : Ces points extrêmes sont théoriquement nécessaires pour le tracé des arcs extérieurs à l'hexagone, mais il est fort possible − sinon vraisemblable − que le mosaïste antique les ait tracés à main levée, par symétrie d'arcs déjà tracés par rapport aux côtés de l'hexagone).
6) Parallèles aux côtés de l'hexagone passant par les points de subdivision.
7) Cercles et arcs de cercles.



phases 1 et 2 phases 3 et 4 phases 5 et 6 phase 7

Figure 4 : Une procédure de construction.

Dans l'approche fréquentiste de l'aléatoire, et de façon analogue, il y a au départ une perception du hasard (expériences réelles), ainsi que des actions : jeux de hasard, relevés statistiques, conduisant au repérage de stabilités. Pour renouveler l'exemple désormais emblématique de la punaise de bureau, je prendrai ici un exemple fort populaire dans les jeux africains : le cauri. Il s'agit d'un petit coquillage (*cypraea moneta*), jadis utilisé comme monnaie à travers toute l'Afrique (Doumbia & Pil, 1992), dont le dos bombé a été retaillé à plat (*figure 5*) et dont le lancer peut par conséquent produire deux résultats, « fente » (ouverture naturelle du coquillage) et « dos » (face bombée retaillée), selon la face qui apparaît au-dessus (pour une étude plus complète de ce générateur aléatoire, voir Parzysz, 2011).

Figure 5 : Cauris. Cliché B. Parzysz.

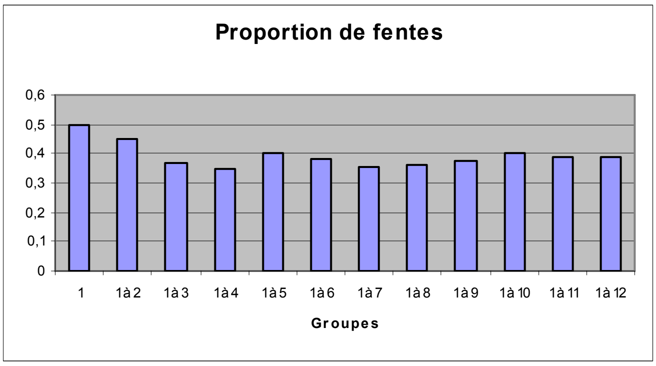
On peut observer les variations de la proportion de « fentes » par groupe de 10 lancers (*tableau 1*), et la stabilisation de cette proportion lorsqu'on regroupe les échantillons (*tableau 2* et *graphique 1*). Il s'agit donc ici d'entrer dans la statistique descriptive (SD) à partir de l'observation de faits, avec un objectif donné (Quel résultat a-t-on le plus souvent ?), et de recueillir des données ayant pour but de fournir une réponse à cette question.

Groupe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Fente	5	4	2	3	6	3	2	4	5	6	3	4
Dos	5	6	8	7	4	7	8	6	5	4	7	6
Proportion de fentes	.5	.4	.2	.3	.6	.3	.2	.4	.5	.6	.3	.4

Tableau 1 : Recueil des données par groupe.

Groupes	1	1 à 2	1 à 3	1 à 4	1 à 5	1 à 6	1 à 7	1 à 8	1 à 9	1 à 10	1 à 11	1 à 12
Fentes	5	9	11	14	20	23	25	29	34	40	43	47
Dos	5	11	19	26	30	37	45	51	56	60	67	73
Prop. fentes	.50	.45	.37	.35	.40	.38	.36	.36	.38	.40	.39	.39

Tableau 2 : Regroupement progressif des données.



Graphique 1 : Stabilisation de la proportion de fentes
par regroupement progressif.

Il s'agit également ici, en s'intéressant cette fois aux expériences aléatoires, de formaliser les constatations faites en définissant, pour une expérience donnée, un protocole expérimental garantissant qu'on pourra la répéter « dans les mêmes conditions » et en émettant des hypothèses en termes probabilistes. Dans le cas du lancer de cauri, on précisera les conditions requises pour le lancer (façon de procéder, hauteur minimale, force, nature du sol, *etc.*). Et, au vu des résultats des tableaux 1 et 2, on pourra conclure que la probabilité d'obtenir fente est plus faible que celle d'obtenir dos, voire la quantifier approximativement (à peu près 2 chances sur 5).

On passe ici de la statistique descriptive (SD) à un premier paradigme probabiliste (P1).

L'espace de travail (Kuzniak, 2009) est constitué :

– de l'expérience « pseudo-concrète », définie par le protocole et les modalités retenues ;
– des essais réalisés (espace réel et local) ;
– des outils mathématiques qui interviennent dans le calcul (moyenne, pourcentage, comparaison de nombres) et la représentation graphique (diagramme en bâtons) ;
– éventuellement, d'instruments permettant la réalisation des actions nécessaires (calculatrice, tableur-grapheur) ;
– de l'ensemble **R** des nombres réels et du plan cartésien (référentiel théorique).

Quant à l'horizon théorique de cette expérience, il s'agit du modèle d'urne de Bernoulli.

2.2. Seconde modélisation

En géométrie, on a ensuite une phase de transition de G1 à G2 : « *du dessin à la figure signifiée, regard sur la figure éclairé par un savoir théorique* » (*ibid.* Kuzniak, 2009) ; on commence à donner des définitions et des axiomes, on énonce des théorèmes et on les démontre. Dans le cas de la mosaïque, on s'intéresse aux « *propriétés de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle. Construction des arcs de la* [mosaïque]*, propriétés géométriques de la figure abstraite* » (*ibid.* Kuzniak, 2009).

On travaille ensuite uniquement dans G2, en s'appuyant néanmoins sur les représentations figurales comme aide à la recherche de propriétés et à l'élaboration de conjectures (allers-retours G1 ↔ G2). Par exemple (*figure 6*) : la droite (BC) est-elle parallèle à la droite (AD) ? La droite (BF) est-elle perpendiculaire à la droite (AD) ? Si oui, est-elle la médiatrice du segment [OA] ? *Etc.*

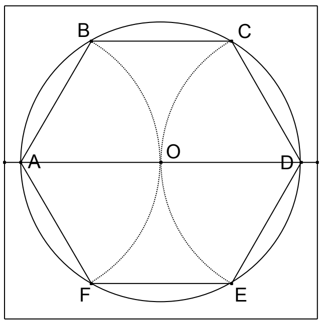


Figure 6 : Propriétés de l'hexagone régulier.

Pour l'aléatoire, on jette un « regard probabiliste » sur l'expérience, on définit l'expérience aléatoire générique, la probabilité mathématique, et on commence à étudier ses propriétés. On passe donc du paradigme précédent (P1) à un autre, plus théorique (P2), dans lequel sont mises en oeuvre des méthodes mathématiques. Ainsi, dans le cas du cauri, on introduit sous une forme quelconque la dichotomie du modèle binomial pour étudier la probabilité d'obtenir k fentes à l'issue de n lancers, …

On travaille ensuite uniquement dans P2, en s'appuyant éventuellement sur des expériences réelles ou des simulations informatiques (Parzysz, 2007), par exemple pour élaborer une conjecture, ou pour confirmer/infirmer un modèle. Ainsi, lorsqu'on lance deux fois successivement une pièce de monnaie « équilibrée », la probabilité d'obtenir deux fois pile est-elle 1/3 ou 1/4 ?

L'espace de travail est maintenant constitué de l'algèbre des événements et des propriétés de la probabilité, avec des modèles « classiques » (notamment les modèles d'urne : tirages avec ou sans remise, tirages simultanés) et des principales lois (binomiale, géométrique, *etc.*) Les outils sont la démonstration mathématique, les techniques de calcul, ainsi que divers registres de représentation (diagramme ensembliste, arbre de probabilité (*figure 7*), tableau à double entrée, …).

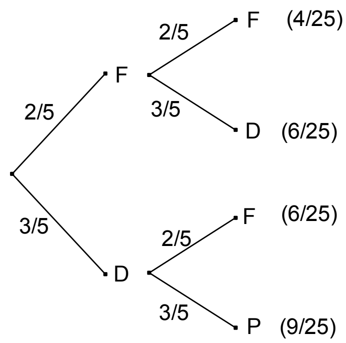


Figure 7 : Arbre associé à deux lancers successifs du cauri (F = fente, D = dos).

Il faut également y inclure les outils de la statistique descriptive (calculatrice, tableur-grapheur), mais ils sont ici utilisés de façon différente, dans le but de produire et d'étudier des expériences aléatoires simulées. On peut aussi réinvestir la statistique descriptive en explicitant l'analogie entre les notions de base de SD et de P2, comme :

fréquence ↔ probabilité
moyenne ↔ espérance mathématique
variance ↔ variance, *etc.*

ce qui permettra la « transposition » de leurs propriétés. La probabilité peut alors être considérée comme une fréquence théorique, et les connaissances en SD peuvent en quelque sorte servir de passerelles pour des apprentissages nouveaux dans P2. Par exemple : « *La notion de probabilité conditionnelle peut être introduite en traitant d'abord des calculs de fréquences. Par exemple on lance trois dés ; parmi les lancers dont la somme est 12, quelle proportion de lancers contiennent le nombre 2 ? (...) Le passage à la définition de « la probabilité d'avoir un 2 sachant que la somme est 12 » comme quotient de deux probabilités est plus compréhensible que si une telle définition est posée ex nihilo.* » (Schwartz & Roser, 2009, p. 10). Enfin, le référentiel théorique est constitué par le concept d'espace probabilisé (Ω, *T*, *P*), et plus généralement l'axiomatique de Kolmogorov.

À propos de simulation, le point essentiel est que ce qui est simulé est un *modèle* probabiliste, ce qui pose théoriquement problème au début de l'enseignement, avant la mise en place de cette notion. Cette difficulté peut néanmoins être contournée si l'on recourt à des simulations qui présentent une congruence sémantique avec l'expérience réelle et en explicitant les hypothèses probabilistes sous-jacentes (Parzysz, 2009a). Considérons par exemple le cas de deux tirages successifs sans remise d'une boule d'une urne à 4 boules (une blanche et trois noires). Pour étudier la distribution de probabilité du nombre de boules blanches obtenues, on commence par préciser l'hypothèse qu'à chaque tirage les boules présentes dans l'urne ont la même probabilité d'être tirées (boules « indiscernables au toucher ») et on introduira deux aléas successifs plutôt qu'un seul aléa, qui correspondrait à une autre expérience, à savoir le tirage simultané de deux boules de l'urne (*figure 8*). Certes, cette seconde expérience, plus simple à simuler, est théoriquement équivalente à l'expérience initiale pour le problème posé, mais elle ne l'est pas pour les élèves ; seule la comparaison les convaincra que c'est un même modèle qui est sous-jacent aux deux.

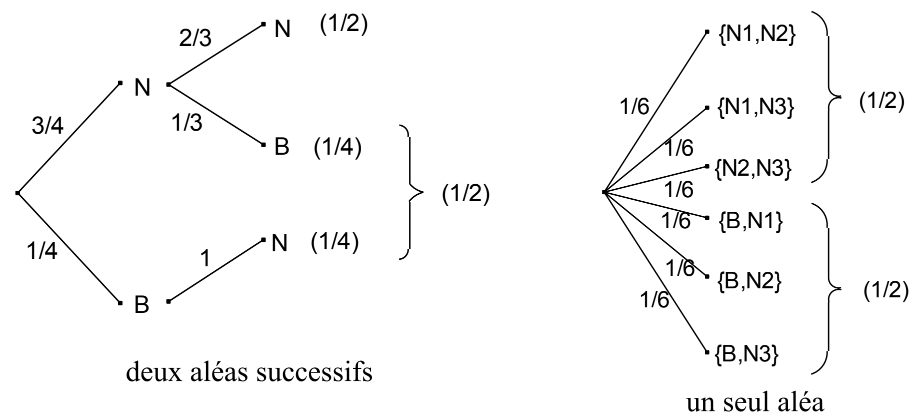


Figure 8 : Les deux modèles.

La simulation informatique peut jouer un rôle important dans l'acquisition de la notion de modèle probabiliste. En effet, la comparaison des procédures de simulation associées à diverses expériences aléatoires, ainsi que des tableaux qu'elles produisent, peut faire apparaître des similitudes conduisant à considérer comme légitime la substitution d'une expérience à une autre et à dégager l'idée d'un schéma d'expérience commun, sur laquelle pourra s'élaborer la notion de modèle (*Parzysz, 2009a,* p. 101), selon le schéma suivant (*figure 9*) :

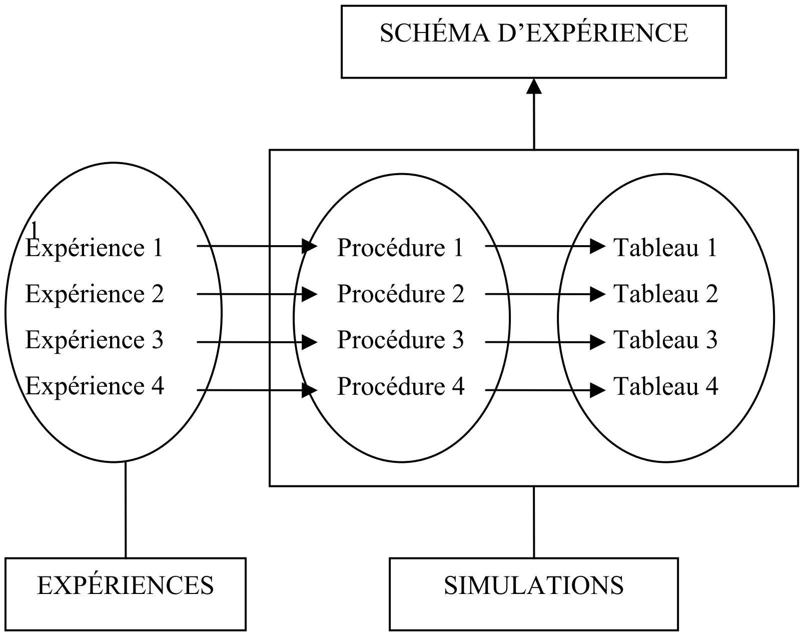


Figure 9 : De l'expérience aléatoire vers le modèle probabiliste.

3. Les registres et leur articulation dans l'enseignement de la statistique et des probabilités

Comme on en a vu un exemple plus haut, les registres de représentation sont à même de jouer un rôle fondamental dans les espaces de travail, comparable à celui des « figures » en géométrie. Le domaine de la statistique et des probabilités met en jeu des représentations variées qui constituent non seulement des *illustrations* des situations étudiées, mais surtout peuvent − à l'instar des dessins en géométrie − devenir des *outils* de résolution des problèmes, à condition de les munir de règles leur conférant un caractère opératoire. Cette variété pose, de façon peut-être plus cruciale qu'en géométrie, non seulement la question de la *traduction* de la situation (concrète ou pseudo-concrète) dans la théorie, mais aussi la double question du *traitement* (transformation au sein d'un registre donné) et de la *conversion* (passage d'un registre à un autre) (Duval, 1995). Je voudrais maintenant montrer comment il est possible d'améliorer l'opérationnalité de certains registres de représentation, à savoir les graphiques en statistique et les arbres et tableaux en probabilités.

3.1. En statistique descriptive : élaboration et gestion des graphiques

Un problème fondamental de la statistique descriptive est l'élaboration, sur la base d'un corpus donné, d'une synthèse qui arrive à concilier les deux objectifs antagonistes que sont la *fidélité* et la *clarté* (Pichard, 1992 ; Parzysz, 1999) : fidélité à l'ensemble des données récoltées à la suite de l'enquête statistique et clarté de la synthèse qui permet de rendre compte et de présenter les résultats de cette enquête, et d'en tirer des conclusions. Certes, la technologie actuelle permet le plus souvent de préserver la totalité de l'information recueillie sous forme de fichier informatique (tableau), mais il est ensuite nécessaire de traiter ce fichier, avec pour objectif d'apporter une réponse − ou, à défaut, des éléments de réponse − aux questions initiales qui ont motivé l'enquête. C'est pour cette raison qu'ont été définis divers paramètres statistiques (de position, de dispersion, …), calculés à partir de l'ensemble des données, qui sont destinés à les synthétiser. La distribution sera alors « résumée » grâce à des valeurs « typiques ». Et, plus le nombre de ces valeurs sera réduit, plus la vue qui en résultera sera synthétique, mais plus on risquera de perdre de l'information.

3.1.1. Quel graphique ?

Les représentations graphiques élaborées, soit directement à partir du corpus, soit à partir des paramètres calculés[1], constituent un autre mode de représentation de l'information recueillie, destiné essentiellement à être appréhendé visuellement. La question de l'encodage (« écriture ») et du décodage (« lecture ») de ces représentations s'avère essentielle par le fait qu'elles ont tendance, non seulement à accompagner, mais aussi à se substituer aux données initiales. D'autre part, les tableurs-grapheurs proposent indifféremment à l'utilisateur une multitude de types de représentations graphiques mais ne prennent pas en compte la question de leur adéquation. Il est donc essentiel que celui-ci soit à même d'identifier le(s) type(s) de graphique adaptés à ses données statistiques et à ce qu'il veut mettre en évidence. Les principaux critères de choix reposent sur le type de variable (caractère), le type de situation et, pour ce qui est de la « visibilité » des résultats, sur le type de graphique.

[1] Comme par exemple la boîte de dispersion, qui visualise médiane, quartiles et étendue.

a) On définit classiquement divers types de caractères statistiques, que je me contenterai de rappeler brièvement :
   - un caractère est dit *quantitatif* lorsque ses modalités possibles sont des valeurs mesurables ; sinon, il est dit *qualitatif* ;
   - un caractère quantitatif peut être *discret* ou *continu*, selon la nature de l'ensemble de ses valeurs possibles (*possibles* et non *observées*, car celles-ci constituent toujours un ensemble discret) ;
   - un caractère qualitatif peut être *ordinal* (lorsque ses modalités sont ordonnées de façon « naturelle ») ; sinon, il est dit *nominal*.

Lorsque le nombre des modalités observées est important, une première synthèse consiste généralement − notamment dans le cas d'une variable quantitative − à les présenter dans un tableau à double entrée dans lequel elles sont groupées en classes (plusieurs questions se posent alors, et notamment celui du choix du nombre de classes et de leurs limites). On peut noter que, dans ce cas, les paramètres calculés à partir du tableau risquent de différer − de façon parfois assez sensible − de ceux calculés sur les données brutes. Il ne s'agit plus alors de *perte* d'information (puisqu'on peut toujours calculer les paramètres) mais de *modification* de l'information.

b) Le tableau statistique fournit des couples dont le premier élément est la modalité du caractère considéré et le second un effectif (ou une fréquence), cet effectif (ou cette fréquence) pouvant être :
   - soit celui de la modalité en question (exemple : répartition des individus selon leur taille) ;
   - soit celui d'un second caractère au sein de cette modalité (exemple : taux de natalité en fonction du département) ;

Dans le premier cas, J.-F. Pichard parle de situation de *partition* (les diverses modalités déterminent une partition de la population statistique), et dans le second de situation de *fonction* (la fréquence du second caractère est fonction de la modalité du premier) (Pichard, 1992, 77–80).

C'est sur la base de ce tableau que vont ensuite pouvoir être élaborées une ou plusieurs représentations graphiques, destinées à visualiser la distribution. Les tableurs-grapheurs usuels en proposent une multitude de types (pour Excel, par exemple : histogramme, barres, courbes, secteurs, nuage de points, aires, anneau, radar, surfaces, bulles, boursier, chacun de ces types comportant lui-même de 2 à 7 sous-types). Et, d'autre part, les infographistes s'en donnent à cœur joie pour les personnaliser. Un objectif de l'apprentissage doit donc être de permettre à l'élève de choisir, pour une enquête donnée, entre les divers types de graphiques *a priori* possibles, car tous ne se valent pas.

c) En ce qui concerne maintenant la typologie des graphiques, on peut en distinguer trois principaux types (Parzysz, 1999, p. 96) :
   - *orthogonal* (selon le couple de directions horizontale-verticale) : diagrammes en bâtons, en barres, histogramme, polygone ;
   - *circulaire* : diagramme circulaire (« camembert ») ou semi-circulaire ;
   - *analogique* : de loin le plus varié (exemple : carte de France où la couleur d'un département est fonction de son taux de natalité).

3.1.2. Qu'est-ce qu'un « bon » graphique ?

Pichard distingue trois qualités principales pour un graphique statistique : la lisibilité, la fidélité et l'auto-suffisance (Pichard, 1992, 76–77). Je ne parlerai pas ici de la dernière de ces qualités, qui me semble relever du simple bon sens. En ce qui concerne la première, A. Jelinski a montré que la relation d'ordre sur les fréquences est mieux perçue sur un diagramme orthogonal que sur un diagramme circulaire, et que l'évaluation quantitative d'une fréquence est également plus facile sur un diagramme orthogonal (Jelinski, 1993). Inversement, elle conclut que le diagramme circulaire « *est plus utile et même irremplaçable dans le cas de données représentant une entité, un tout* » (*op. cit.* p. 56), ce qui est aussi le cas de l'histogramme.

La deuxième qualité, déjà évoquée plus haut, concerne le rapport entre les données et leur représentation et se rapporte plus directement à la notion de congruence sémantique (Duval, 1995), question qu'il importe de se poser au moment de la conversion du tableau au graphique qu'on se propose d'utiliser pour le représenter, et qui est étroitement liée, non seulement au type de situation, mais aussi au type de caractère ; c'est ainsi qu'un diagramme en barres sera indiqué pour représenter la variation d'un caractère qualitatif, et un diagramme en bâtons pour un caractère quantitatif discret.

Il convient aussi de tenir compte de deux dangers inverses : d'une part occulter des éléments importants de la situation, et d'autre part introduire des éléments non pertinents. C'est par exemple le cas lorsqu'on représente l'évolution de la fréquence d'un caractère quantitatif continu par un diagramme en bâtons (qui discrétise le caractère) plutôt que par un « polygone » (en fait, une ligne brisée). Même si celui-ci ne représente pas exactement la distribution, il préserve la continuité du caractère, et en conséquence tout point de la courbe pourra être interprété (ce qui n'est pas le cas lorsqu'on utilise un polygone pour représenter un caractère discret). Remarquons encore que, pour un caractère continu, l'histogramme et le polygone sont deux types de représentation possibles, mais l'histogramme est plus facile à encoder et à décoder, en raison de sa meilleure congruence avec le tableau qui a servi à le créer.

Enfin, il va de soi qu'on ne trompera pas le destinataire du graphique. Je me contenterai ici d'un exemple qui concerne le « camembert 3D en perspective ». La même distribution (*tableau 3*) est ci-dessous représentée deux fois par le tableur-grapheur, avec une simple modification de l'ordre des modalités (*figure 10*).

Modalité	Fréquence
A	0,1
B	0,2
C	0,3
D	0,4

Tableau 3

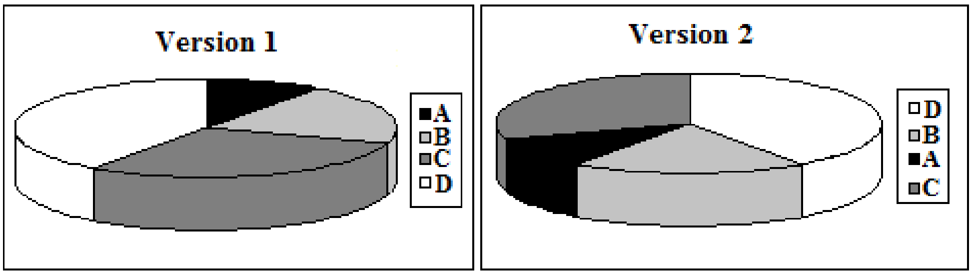


Figure 10

La différence saute aux yeux. Plus précisément, lorsqu'on calcule la proportion de l'aire visible correspondant à chacune des modalités par rapport à l'aire visible totale, on obtient les résultats suivants (*tableau 4*) :

Modalité	Version 1	Version 2
A	6 %	13 %
B	14 %	35 %
C	48 %	20 %
D	32 %	32 %

Tableau 4

On peut constater que, mis à part la modalité D (dont les représentations dans les deux versions sont symétriques), les différences sont sensibles, et on voit le parti que pourraient en tirer des gens peu scrupuleux pour favoriser telle ou telle modalité.

3.2. En probabilités : arbres et tableaux

Comme je l'ai rappelé au début, l'arbre pondéré est désormais, en France, un outil officiellement admis. Plusieurs études ont montré (Parzysz, 1997, Pluvinage, 2005) que, pourvu qu'on le nantisse de règles de traitement et de conversion précises, il possédait les caractéristiques d'un registre de représentation qui de plus, étant commun à la statistique et aux probabilités, pouvait constituer un point d'articulation entre ces deux domaines selon une transition effectifs → fréquences → probabilités (voir plus haut). Transition qui − à condition que le passage de l'un à l'autre soit dûment explicité − est susceptible de constituer un bon accès à la notion de probabilité conditionnelle, *via* celles d'effectif et de fréquence relatifs. Signalons cependant le danger de renforcer chez les élèves une conception « cardinaliste » de la probabilité conditionnelle (Totohasina, 1994), ce qui, semble-t-il, peut être évité, d'une part en passant rapidement des effectifs aux fréquences, et d'autre part en choisissant des situations dans lesquelles le recours aux effectifs est impossible ou malaisé.

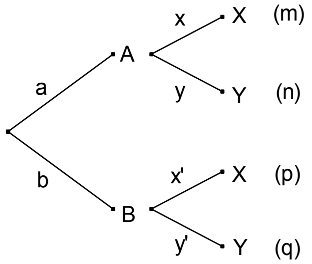
La nécessité de construire un arbre qui soit aussi proche que possible de l'expérience décrite (congruence sémantique) a déjà été évoquée plus haut ; je n'y reviendrai donc pas ici. La première difficulté de l'utilisation de l'arbre de probabilité est celle des conversions énoncé → arbre et vice versa, selon le schéma ci-dessous (*tableau 5*). Notons que l'énoncé est le plus souvent en langage naturel, mais qu'il peut aussi faire intervenir d'autres registres, tels le registre symbolique ou celui des tableaux de contingence.

	situation-→ problème	stratégie → de résolution	résolution
Domaine concerné	« réalité »	probabilités	« réalité »
Registres associés	langagier	langagier symbolique arbres tableaux	langagier

Tableau 5

Dans le tableau 5, les guillemets de « réalité » signifient que le substrat de l'énoncé est généralement un « pseudo-concret » (voir plus haut), c'est-à-dire une réalité simplifiée par la description qui en est faite. Il ne s'agit pas d'un véritable modèle, mais le plus souvent un modèle particulier est sous-entendu, voire fortement suggéré (cas des dés « non pipés » ou « homogènes », des boules « indiscernables au toucher » et des pièces de monnaie « bien équilibrées », par exemple) (Parzysz, 1980).

Par rapport au tableau de contingence (Dupuis & Rousset-Bert, 1996), un intérêt non négligeable de l'arbre est que l'on peut y faire figurer tous les éléments. Comparons par exemple l'arbre et le tableau correspondant ci-dessous (*figure 11*).



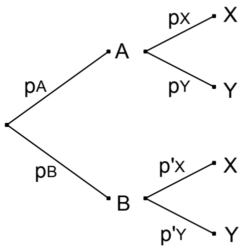
	A	B	Somme
X	m	p	m+p
Y	n	q	n+q
Somme	m+n	p+q	1

Figure 11 : Arbre de probabilité et tableau de contingence.

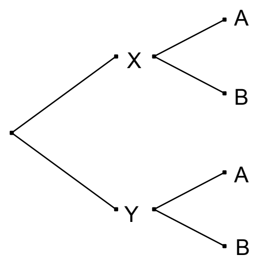
On constate immédiatement que les données visibles ne sont pas les mêmes. En particulier, les probabilités conditionnelles (x, y, x', y') n'apparaissent pas dans le tableau.

Cependant, pour la résolution des problèmes de probabilité conditionnelle, et notamment de ceux qui font intervenir la formule de Bayes, un avantage du tableau est que l'on peut l'utiliser dans les deux sens, en raison de l'interchangeabilité des lignes et des colonnes : la probabilité de A (soit m+n) et celle de X∩A (soit m) étant données, pour trouver P(X|A) il suffit de diviser la seconde par la première ; de même, si on a la probabilité de X (soit m+p) et celle de X∩A, P(A|X) s'obtient comme quotient de m par m+p. L'arbre, lui, nécessite d'être « retourné ». Les règles de traitement régissant ce retournement sont relativement simples (Parzysz, 1997b, p. 235) (*figure 12*), mais elles sont un peu plus « coûteuses » (ce sont elles qui justifient la phrase du programme rapportée au début de cet article).

Pour chaque situation, et en fonction des connaissances et de la familiarité des élèves, la question sera donc finalement celle du choix entre la lisibilité de l'arbre et la versatilité du tableau.



Arbre initial (pondéré)



Arbre retourné (à pondérer selon les règles de traitement)

Figure 12 : Retournement de l'arbre de probabilité.

4. Conclusion

Il n'était pas possible, dans le cadre restreint de cet article, d'envisager de façon exhaustive tous les problèmes didactiques qui se posent dans l'enseignement de la statistique et des probabilités. Je me suis donc contenté d'en évoquer quelques-uns, en renvoyant à des publications antérieures pour plus de détails. Ce domaine souffre en effet de deux handicaps : d'une part sa « jeunesse » en tant que domaine d'enseignement, et d'autre part la dualité de la notion de probabilité, qui dans les programmes français a mis en avant tantôt une conception et tantôt l'autre.

On a pu voir que la question de la modélisation du hasard en probabilités n'est pas sans présenter des analogies avec celle de la modélisation de l'espace en géométrie, avec notamment la nécessité de gérer des rapports ambigus avec l'expérience sensible et l'existence de plusieurs paradigmes ayant pour horizon commun une théorie mathématique de type axiomatique. En vertu de ces analogies, la notion d'espace de travail peut être étendue *mutatis mutandis* au domaine de l'aléatoire, et met en évidence le rôle des registres de représentation.

Un aspect prégnant de la statistique comme des probabilités est en effet l'usage qu'elles font des registres de représentation comme outils de résolution de problèmes : « figures » en géométrie, graphiques divers en statistique, tableaux à double entrée et arbres en probabilités. Ceci nécessite la prise en compte, dans l'espace de travail, de la façon dont sont mis en œuvre ces outils, avec pour objectif de les optimiser (on rejoint ici la notion de genèse instrumentale). Dans le domaine des probabilités, les registres en jeu constituent en effet un élément essentiel de l'espace de travail ; il en résulte que les articulations doivent être prises en compte et travaillées, que ce soit en statistique descriptive (type de variable ↔ type de graphique) ou en probabilités (type de problème ↔ type de registre).

Ainsi, en statistique descriptive, la grande variété des types de représentations graphiques et le fait que les outils technologiques les présentent comme *a priori* également acceptables peuvent conduire à des incompréhensions et à des dérives. Et les enjeux sociaux sont tels qu'on ne peut pas faire l'économie d'une réflexion en profondeur sur cet aspect souvent jugé mineur − parce que transversal ? − de l'enseignement. De même, la notion de congruence sémantique s'avère fondamentale, que ce soit pour choisir le registre le mieux adapté au contexte (situation, élèves, …), pour contrôler les conversions de registres ou pour guider l'apprentissage des concepts.

Les travaux didactiques dans ce domaine sont encore relativement peu nombreux, mais on peut espérer que, en lien avec la montée en puissance du domaine et le développement d'une culture de l'aléatoire chez les professeurs, les chercheurs vont s'intéresser davantage à son enseignement, ainsi qu'en témoignent des travaux comme la récente thèse de P. Carranza (Carranza, 2009).

Bibliographie

BATANERO, C. (2001), *Didáctica de la estadística,* Universidad de Granada.

BERNOULLI, J. (1713), *Ars Conjectandi*, Traduction N. Meusnier, IREM de Rouen 1987.

CARRANZA, P. (2009), *La dualité de la probabilité dans l'enseignement de la statistique. Une expérience en classe de BTS*, Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot.

DOUMBIA, S. & PIL, J.-C. (1992), *Les jeux de cauris*, Institut de Recherches Mathématiques d'Abidjan.

DUPUIS, C. & ROUSSET-BERT, S. (1996), Arbres et tableaux de probabilité : analyse en termes de registres de représentation, *Repères-IREM*, **22**, 51–72.

DUVAL, R. (1995), *Semiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berne.

HENRY, M. (1999), L'introduction des probabilités au lycée : un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie, *Repères-IREM*, **36**, 15–34.

HENRY, M. (2009), Émergence de la probabilité : de la définition classique à l'approche fréquentiste, quelle introduction en classe de troisième ?, *Repères-IREM*, **74**, 67–89.

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (1999), Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie, de l'école primaire à la formation des maîtres, *Petit x,* **51**.

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **11**, 175–193, IREM de Strasbourg.

JELINSKI A. (1993), Diagramme circulaire ou orthogonal ? Une efficacité différente des images graphiques dans la transmission de l'information, *Les Sciences de l'Education*, **1-3**, 39–56.

KUZNIAK, A. (2009), Sur la nature du travail géométrique dans le cadre de la scolarité obligatoire, *Actes de la 14e École d'été de Didactique des Mathématiques* (Bloch I. & Conne F., éds), La Pensée Sauvage, Grenoble.

PARZYSZ, B. (1980), L'équiprobabilité, est-ce que cela va sans dire ? *Chantiers de pédagogie mathématique*, **47**, 2–4, APMEP.

PARZYSZ, B. (1997a), Les probabilités et la statistique dans l'enseignement secondaire, d'hier à aujourd'hui, *Enseigner les probabilités au* lycée (M. Henry, éd.), 17–38, APMEP / ADIREM,

PARZYSZ, B. (1997b), L'articulation des cadres et des registres en probabilités : le cas des arbres et des tableaux, *Enseigner les probabilités au lycée* (M. Henry, éd.), 225–238, APMEP / ADIREM.

PARZYSZ, B. (1999), Heurs et malheurs du su et du perçu en statistique, des données à leurs représentations graphiques, *Repères-IREM*, **35**, 91–112.

PARZYSZ, B. (2003), Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1, *Concertum. Dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques,* Tome 2 (Démarches et savoirs à enseigner) chap. 1 (Espace et géométrie), 107–125, ARPEME.

PARZYSZ, B. (2007), Expérience aléatoire et simulation : le jeu de croix ou pile. Relecture actuelle d'une expérimentation déjà un peu ancienne, *Repères-IREM*, **66**, 27–44.

PARZYSZ, B. (2009a). Des expériences aléatoires au modèle, *via* la simulation, *Repères-IREM*, **74**, 91–103.

PARZYSZ, B. (2009b). À la recherche des espaces de travail géométrique des mosaïstes antiques, *Chypre et France. Recherche en Didactique des Mathématiques* (A. Gagatsis, A. Kuzniak, E. Deliyanni & L. Vivier, éd.), 287–305, Université de Chypre.

PARZYSZ B. (2011), Un générateur aléatoire de pile ou face venu d'ailleurs, *Bulletin de l'APMEP*, **494**, 309–314.

PICHARD, J.-F. (1992), Représentations graphiques en statistiques, *Bulletin inter-IREM, « Des chiffres et des lettres »*, 75–101, IREM de Rouen.

PLUVINAGE, F. (2005), Árboles de transiciones etiquetadas en cálculo de probabilidades, *Relime*, **8-1**, 91–99.

RENYI, A. (1966), *Calcul des probabilités*, Dunod, Paris.

SCHWARTZ, C. & ROZER, E. (2009), L'esprit des probabilités, de l'école au lycée. *MathémaTice*, **13** (revue en ligne).

TOTOHASINA, A. (1993), Introduction du concept de probabilité conditionnelle. Avantages et inconvénients de l'arborescence, *Repères-IREM*, **15**, 93–117.

Bernard PARZYSZ
Université d'Orléans
& Laboratoire de Didactique André Revuz
Université Paris-Diderot
Paris, France
parzysz.bernard@wanadoo.fr

FABRICE VANDEBROUCK

PERSPECTIVES ET DOMAINES DE TRAVAIL POUR L'ÉTUDE DES FONCTIONS

Abstract. Perspectives and working domains for studies of functions. The aim of this paper is to understand and interpret the difficulties that students are facing when learning calculus during the transition from high school to university. We are specifically interested by the study of functions. We first discuss the general background concerning this transition and the notion of function. Then we define quite separate working domains, specific on the one hand of the high school practices and on the other hand of university practices. Finally, we present a study in which we examine the freshmen's difficulties in calculus.

Résumé. Le but de ce travail est de comprendre et d'interpréter les difficultés des étudiants en Analyse à la transition lycée-université et plus particulièrement en ce qui concerne l'étude des fonctions. Après des spécificités génériques liées à la transition et à la notion de fonction, nous définissons des domaines de travail assez étanches mais spécifiques d'une part des pratiques au lycée et d'autre part des pratiques attendues à l'université. Nous terminons par des travaux de recherche sur les étudiants entrant à l'université et une interprétation en termes de perspectives (points de vue spécifiques dans le travail sur les fonctions) de leurs difficultés en Analyse à la transition lycée-université.

Mots-clés. Mathématiques, Fonctions, Transition Lycée-Université, Perspectives.

---

1. Introduction et problématique

Dans cet article, nous proposons un travail sur la transition lycée-université et sur les difficultés des étudiants en ce qui concerne l'entrée dans la démarche d'Analyse. Ce thème a été très étudié depuis plusieurs décennies (Robert 1982, 1983 ; Artigue 1991 ; Robert 1998 ; Artigue, Batanero et Kent, 2007 ou Gueudet, 2008) mais les caractéristiques, sans cesse changeantes, des populations étudiantes arrivant à l'université d'une part (en particulier les difficultés des élèves) et des contenus d'enseignements d'autre part, tant au lycée qu'à l'université, justifient que l'on s'y intéresse de façon continue et renouvelée.

Bien souvent, les étudiants entrant à l'université ne savent pas manipuler des fonctions qui ne sont pas définies par une formule algébrique. Or la démarche d'Analyse est une démarche fondamentalement différente de la démarche algébrique. Elle impose un nouveau point de vue sur l'égalité des nombres réels qui est l'égalité si les deux réels sont arbitrairement proches. Les techniques qui sont attachées à l'Analyse relèvent de la majoration, de la minoration et de l'encadrement, du jeu entre des conditions suffisantes et/ou nécessaires et elles

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 16, p. 149 – 185.

mettent en jeu pour beaucoup les propriétés locales des fonctions (notamment les limites). Mais lors de ces études locales, les étudiants traitent algébriquement les équivalents ou les développements limités, donnant très difficilement du sens aux expressions du type $o(x)$, $O(x)$,… Enfin, les étudiants ne tracent des graphes que quand la question leur est explicitement demandée et ils ne pensent pas spontanément à utiliser cette représentation des fonctions pour faire les raisonnements locaux attendus d'eux. Notre travail consiste donc à interroger leurs difficultés afin de mieux pouvoir y remédier par un travail en amont et un travail au début de l'université.

Nous nous plaçons dans le cadre général de la théorie de l'activité, constitué dans une lignée de recherche qui articule les apports de Piaget et Vygotsky pour enrichir une approche par la conceptualisation des apprentissages mathématiques des élèves (Vergnaud, 1991, 1996, 1999/2002 ; Leplat, 1997 ; Rogalski, 2008). Dans ce cadre, nous reprenons les outils théoriques proposés par Robert (2008) qui spécifie divers éléments des théories de l'apprentissage aux mathématiques et à la situation scolaire : les apprentissages des élèves et des étudiants sont appréhendés par l'intermédiaire d'analyses de leurs activités[1] en classe, elles-mêmes caractérisées par les mises en fonctionnement de connaissances mathématiques qu'ils sont amenés à faire, à partir des tâches qui leurs sont proposées, des modes de travail et des aides de l'enseignant (Robert, 2008). Les apprentissages sont référés à la conceptualisation visée, elle-même définie à partir des spécificités des notions mathématiques, des programmes d'enseignement et des difficultés des élèves. La théorie est exposée en détail dans Vandebrouck (2008b).

Notre investigation s'articule avec le travail mené par Kuzniak (2010) sur les espaces de travail géométrique pour le thème de la géométrie en ce sens que pourraient être introduits des espaces de travail pour l'Analyse (ETA). Cependant c'est à une échelle plus fine que nous souhaitons travailler en spécifiant des domaines de travail pour l'étude des fonctions, domaines qui traversent la scolarité de la classe de troisième aux premières années de l'université et auxquels sont associés une certaine conceptualisation de la notion de fonction. A partir de ces domaines de travail, les connaissances et les mises en fonctionnement qu'ils valorisent, nous questionnons cette conceptualisation, ou plutôt les conceptions des étudiants entrant à l'université relativement à la notion de fonction (au sens de la théorie des champs conceptuel, Vergnaud, 1991). Nous donnons ensuite une interprétation en termes de perspective de leurs difficultés pour entrer dans la démarche d'Analyse attendue d'eux à ce niveau. Par perspective, nous entendons des points de vue spécifiques dans le travail sur les fonctions, associées aux trois grands types de propriétés des fonctions : ponctuelles, globales et locales.

---

[1] Le singulier sera utilisé dans une acception générique : l'activité de l'élève étant constituée de l'ensemble de ses activités contextualisées.

Nous commençons dans le deuxième paragraphe par une étude didactique de la notion de fonction et des difficultés liées à cette notion, déjà pointées dans les travaux de recherche sur le sujet. Nous menons en particulier une discussion sur les représentations des fonctions et les différentes perspectives que l'on peut adopter dans le travail sur les fonctions. Nous continuons dans le troisième paragraphe en définissant trois domaines de travail pour l'étude des fonctions, spécifiques d'une part des pratiques au lycée et d'autre part des pratiques attendues à l'université. Au paragraphe 4, nous rendons compte de travaux de recherches sur les conceptions des élèves de terminale et des étudiants du début de l'université, ainsi que de notre interprétation en termes de perspectives des difficultés en Analyse à la transition lycée-université.

2. Les fonctions à la transition lycée-université

De nombreuses différences peuvent être identifiées à un niveau très général entre le secondaire et le supérieur : passage d'un cours avec un seul enseignant à des cours magistraux en amphithéâtre et à des travaux dirigés ; modularisation des enseignements qui peut contribuer à isoler les connaissances les unes des autres,... En didactique des mathématiques, nous pointons également des différences liées aux contenus mathématiques en jeu, ce qui fait l'objet du paragraphe 2.1. Dans le paragraphe 2.2., nous étudions la complexité de la notion de fonction et sa conceptualisation dans notre cadre théorique. Dans le paragraphe 2.3., nous exposons des approches complémentaires, en didactique des mathématiques, pour penser cette conceptualisation de la notion de fonction à la transition lycée université. Enfin, dans le paragraphe 2.4., nous nous focalisons sur le rôle des perspectives dans la conceptualisation et leurs liens avec les représentations.

2.1. Quelques caractéristiques générales liées aux mathématiques

De nombreuses études ont déjà précisé des caractéristiques de cette transition (Robert, 1998 ; Artigue, Batanero et Kent, 2007 ; Gueudet, 2008). Par exemple, Robert (1998) a pointé l'introduction à l'université d'un nouveau type de notions mathématiques : les notions à la fois Formalisatrices, Unificatrices et Généralisatrices (FUG), spécifiquement toutes les notions d'algèbre linéaire : espace vectoriel, application linéaire,… Ces notions permettent en effet d'introduire plus de généralité, en unifiant différents objets antérieurs grâce à un nouveau formalisme, qui de fait simplifie les écritures mais peut aussi brouiller le sens pour les étudiants. Les notions de topologie, maintenant repoussées en L2 ou L3 sont aussi FUG (Bridoux, 2011). En classe de troisième, compte tenu des nouveaux programmes du collège, la notion de fonction numérique semble présenter des aspects FUG (Robert, travail en cours).

Robert (1998) a aussi relevé une distribution différente, entre lycée et université, au niveau des types de tâches proposées aux étudiants et au niveau des mises en fonctionnement des connaissances attendues : au lycée, les tâches mettent souvent en jeu des connaissances qui sont explicitées et qui doivent être appliquées de façon relativement immédiates. A l'Université, les tâches mettent plus souvent en jeu des connaissances à reconnaître (supposées disponibles) et aussi à adapter (changements de points de vue sur les tâches, mélanger les connaissances visées avec d'autres connaissances, introduire des objets intermédiaires, des étapes de raisonnement, …). A l'université, de ce fait, les connaissances doivent être plus disponibles (mobilisables sans indication) et mises en fonctionnement de façon plus complexe, avec une augmentation des exigences en termes de raisonnements, preuves, formalisations et langage. Par ailleurs, le caractère outil (Douady, 1986) de certaines connaissances est valorisé dans le secondaire alors que c'est plutôt le caractère objet qui l'est à l'université et vice versa pour d'autres connaissances. A ce niveau didactique, Bloch (2005) a clarifié la complexité par l'introduction de 9 « variables didactiques » dont les valeurs différentes contribuent à « mesurer » les différences entre lycée et université.

On note enfin une différence entre secondaire et supérieur au niveau des déroulements (Grenier-Boley, 2009). Par exemple, il y a une accélération du temps didactique, avec un renouvellement rapide des objets mathématiques enseignés qui oblige à des assimilations plus rapides. Il y a également un nouvel équilibre entre exercices à portée générale et exercices plus particuliers, un éventail des types d'exercices plus large qui rend la routinisation beaucoup plus difficile qu'au lycée, cette dernière étant déléguée aux étudiants en travail personnel, qui se doivent de ce fait d'être plus autonomes face à leurs apprentissages (aussi dans Praslon, 2000).

2.2. La notion complexe de fonction et sa conceptualisation

La notion de fonction peut intervenir dans de nombreux cadres, comme outil ou comme objet (Douady, 1986) et elle se trouve connectée à deux autres notions essentielles du champ de l'Analyse : les nombres réels (en particulier les nombres réels comme limites) et les suites numériques. Ceci nécessite de prendre en compte le vaste champ conceptuel de l'Analyse (Vergnaud, 1991) et non la notion isolée pour questionner la conceptualisation de la notion de fonction. Les domaines de travail que nous définirons plus bas ne seront caractérisés que par rapport à la notion de fonction mais ils devront être entendus pour tout ce champ conceptuel. C'est une limite du travail à prendre en compte, sur laquelle nous revenons en fin de notre conclusion, avec les espaces de travail en Analyse.

Le travail sur et avec les fonctions fait également intervenir plusieurs systèmes de représentations dans plusieurs registres différents (Duval, 1991), ce qui fait l'une de ses spécificités essentielles : les représentations en tableau de valeurs (registre numérique), les représentations en courbes (registre graphique), les représentations par des formules (registre algébrique), les représentations en tableau de variations (registre schématique) et les représentations formelles (registre symbolique). Selon Duval, la conceptualisation de la notion passe par trois stades de mises en fonctionnement des représentations : la formation des représentations, le traitement des représentations à l'intérieur d'un registre et la conversion entre représentations de registres différents.

Les fonctions sont donc des objets complexes, encore en apprentissage lorsque les étudiants entrent à l'université. Nous postulons que la conceptualisation de la notion de fonction numérique est liée à la rencontre et à la mise en fonctionnement de la notion dans plusieurs cadres, comme outil ou comme objet (Douady, 1986), proposées dans un ordre approprié, dans des registres multiples (avec des activités de formation, de traitement, de conversion des représentations au sens de Duval, 1991) et à travers des tâches variées, à l'origine de diverses adaptations de connaissances (Robert, 1998), y compris de nombreuses applications immédiates le cas échéant (les « gammes »).

En outre, les études de fonctions font également appel à plusieurs aspects de la notion de fonction. En effet, certaines propriétés sont ponctuelles en un point x_0, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent que de la valeur de la fonction au point x_0. Par exemple, énoncer $f(x_0) = 3$ est une propriété ponctuelle qui ne donne rien sur $f(x_1)$ lorsque $x_1 \neq x_0$. Certaines propriétés sont globales, c'est-à-dire qu'elles sont des propriétés valables sur des intervalles : parité, périodicité, croissance, continuité et dérivabilité globales… Enfin, certaines propriétés d'une fonction f sont locales en un point x_0, c'est-à-dire qu'elles dépendent des valeurs de f sur un voisinage de x_0 aussi petit soit-il : avoir une limite en x_0, être continue en x_0, être dérivable en x_0, être négligeable devant une autre fonction au voisinage de x_0, avoir un développement limité en x_0, … Dans certains cas, x_0 peut aussi être infini mais ce cas est pour nous particulier ; par exemple les propriétés locales de continuité et dérivabilité n'y sont pas définies. Nous y reviendrons.

Nous pointons dans nos travaux l'importance pour la conceptualisation de la notion de fonction de ses mises en fonctionnement sous les trois perspectives ponctuelle, globale ou locale. Autrement dit, comme Rogalski (2008) en fait l'hypothèse, un enjeu important de l'enseignement des fonctions est certainement de développer chez les étudiants une prise de conscience de l'existence de points de vue spécifiques sur les fonctions, associés à ces trois perspectives, ainsi qu'une mise en fonctionnement de toutes ces perspectives d'une fonction (voir aussi Bloch, 2003 ; Maschietto, 2001, 2008 ; Chorlay, 2011).

2.3. Différentes approches complémentaires sur les conceptions et sur la conceptualisation des fonctions

Les conceptions des élèves et des étudiants ont bien sûr déjà été étudiées à travers plusieurs théories didactiques que nous souhaitons mentionner ici : Tall et Vinner (1981) introduisent la distinction entre concept–image et concept–définition, le premier ne concordant pas généralement avec le concept–définition, spécialement dans le cas des fonctions (Vinner, 1983). Balacheff et Gaudin (2002) identifient deux types de conceptions chez des élèves à la fin du lycée : une conception « courbe – algébrique » et une conception « algébrique – graphique ». Les élèves possédant la première conception voient prioritairement les fonctions comme des cas particuliers de courbes, celles pour lesquelles une expression algébrique peut être attachée. Les autres considèrent que les fonctions sont d'abord des expressions algébriques, le graphique venant ensuite. Focalisant aussi sur les représentations graphiques et algébriques des fonctions, Duval (1993) explique que « *la lecture des représentations graphiques suppose la perception des variations correspondantes à l'écriture algébrique. Cette lecture est une démarche d'interprétation globale qui suppose une attitude contraire à la pratique épellative associant un point à un couple de nombres* ». Il montre que les élèves ont des difficultés en cette interprétation globale du graphe. Elia et *al.* (2008) mènent une étude multidimensionnelle et mettent en évidence par des analyses statistiques implicatives des corrélations possibles dans les réponses des étudiants entre quatre dimensions : la définition donnée de fonction, les exemples donnés, l'aptitude à reconnaître et à convertir des représentations et enfin l'aptitude à résoudre des problèmes sur les fonctions. Monoyiou et Gagatsis (2010) proposent quant à eux un questionnaire portant sur les fonctions et leurs représentations à des enseignants en formation initiale à Chypre et en Italie. Malgré les différences existant au niveau des programmes, des manuels scolaires et des pratiques enseignantes entre les deux pays, leurs analyses statistiques révèlent deux classes distinctes de variables, la première correspondant à une approche algébrique des fonctions et la deuxième correspondant à ce qu'ils appellent une approche coordonnée des représentations algébriques et graphiques des fonctions. Enfin, Gagatsis et *al.* (2010) retrouvent ces résultats auprès d'élèves âgés de 16 à 17 ans en lien avec l'enseignement reçu. Plus précisément, ils notent que des étudiants ayant un enseignement scientifique des fonctions dépassant les démarches intuitives et les traitements algébriques persistent toujours dans une approche très algébrique des fonctions.

D'autres approches portent sur la conceptualisation elle-même de la notion de fonction. Une première est basée sur la dualité processus-objet de la théorie APOS (Dubinsky, 1991) : la conceptualisation de la notion de fonction débute par des actions sur des objets physiques ou mentaux déjà construits. Ces actions s'intériorisent alors en processus qui sont ensuite encapsulés en nouveaux objets mathématiques puis manipulés dans des schémas. Cette approche a été complétée par la triade Intra-Inter-Trans (Piaget et Garcia, 1989) qui enrichit le stade « Schéma » de Dubinsky : au niveau intra, l'élève ou l'étudiant considère les fonctions comme des objets isolés et se concentre sur les processus dans lesquels ils sont engagés. Au niveau inter, il commence à faire des connexions entre objets fonctionnels de même nature, à donner sens à l'idée de transformation engageant ces fonctions. Au niveau Trans enfin, il peut considérer des systèmes de transformations et les structures qui en émergent.

Sfard (1991) propose, à la même époque, que les concepts mathématiques tels que les fonctions peuvent être conceptualisés sous deux formes : d'abord opérationnelle, en tant que processus, puis structurelle, en tant qu'objets, les deux conceptions étant toujours successives dans sa théorie de la réification. Suivant Bachelard (1938), Sierpinska (1992) utilise la notion d'obstacle épistémologique pour étudier certaines propriétés des fonctions et notamment la notion de limite. Réfutant ensuite l'idée de succession des conceptions sous tendue par la théorie APOS et la théorie de la réification, Tall (1996) introduit la notion de procept, amalgame entre deux composants : un processus qui donne naissance à un objet mathématique et un symbole qui représente de façon duale à la fois le processus et l'objet[2].

Finalement, Tall (2006) modélise l'évolution cognitive dans la « pensée fonctionnelle » en caractérisant trois mondes mathématiques : un monde « incorporé conceptuel » fait d'expériences sensorimotrices de la quantité et de la covariation, un monde « symbolique proceptuel » où les représentations permettent les manipulations aux niveaux processus et objets des fonctions puis un monde « formel axiomatique » où les objets sont assujettis à des définitions et les propriétés déduites via des preuves formelles.

La transition lycée-université peut donc être interprétée en un passage du monde « symbolique proceptuel » de Tall, caractéristique des pratiques à la fin du lycée, au monde « axiomatique formel », ainsi qu'en une élévation dans la triade de Piaget et Garcia : des niveaux Intra et Inter vers les niveaux Inter et Trans. En effet, le travail sur les fonctions est caractérisé dès le début de l'université par un élargissement vers le langage ensembliste avec les nouvelles notions qui lui sont attachées (injectivité, image réciproque,…). Cet élargissement s'accompagne d'une introduction de nouveaux types de fonctions (fonctions caractéristiques d'ensembles, fonctions de deux variables,…), une généricité plus grande

[2] John Monaghan qui a travaillé avec David Tall à cette époque sur cette dualité entre processus et objet avait proposé la terminologie de « projet », ce qui ne pouvait convenir, d'où l'émergence de la notion de procept, amalgame entre processus et concept. Mais l'idée initiale est bien la dualité entre le processus et l'objet.

(multiplicité des paramètres, familles de fonctions …), un rapport aux procepts différents (rôle accru de la représentation symbolique, rôle minoré de la représentation algébrique, nouveau rôle d'outil de la représentation graphique pour supporter les preuves et les formalisations par exemple …) sans oublier l'utilisation plus importante des aspects locaux des fonctions et de la perspective correspondante qu'ils amènent à adopter de la part des étudiants.

2.4. Discussion sur les registres de représentations et les perspectives

Bloch (2003) exploite l'idée que les différentes représentations sont réductrices ou productrices par rapport aux aspects ponctuels ou globaux des fonctions et donc font travailler différemment les perspectives sur les fonctions. En effet, la représentation numérique, et notamment le tableau de valeurs, ne fait travailler que la perspective ponctuelle sur les fonctions.

Au contraire, la représentation en tableau de variation fait travailler la perspective globale. Coppé et *al.* (2007) ont montré à ce propos que des élèves de seconde ont plus de difficultés à utiliser le registre des tableaux de variations que le registre numérique des tableaux de valeurs. En même temps, la conversion d'un tableau de variation à un autre système de représentation (algébrique, graphique et même numérique) semble être plus difficile que la conversion à partir d'une table de valeur. Ils pointent ainsi que la complexité du tableau de variation est certainement sous estimée dans l'enseignement. Il y a donc des difficultés inhérentes à l'adoption de la perspective globale sur les fonctions à partir des tableaux de variations en classe de seconde.

Les représentations graphiques permettent à la fois les perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions : en effet le graphe d'une fonction peut être tracé point par point et l'adoption de la perspective ponctuelle sur le graphe permet de manipuler les propriétés ponctuelles classiques sur les images et les antécédents. Mais le graphe peut également être considéré globalement et il traduit alors pour les fonctions simples les propriétés globales : croissance, parité, périodicité, majoration,...

Au contraire, la représentation algébrique (la formule) ne peut pas soutenir aisément la perspective globale sur les fonctions. Rogalski (1984) explique par exemple que « *les caractères producteurs dominants* – de la représentation graphique - *sont essentiellement le fait que la représentation graphique fait apparaître une fonction comme unité, ce qui la différencie de l'algorithme de calcul représenté par la formule ou aux données discontinues et partielles de la table de valeur* ». Dans la même idée, selon Raftopoulos et Portides (2010), les formules ne peuvent être interprétées globalement que par les experts. La fonction $x \to x^2$ ou la fonction $x \to \sqrt{x}$ peuvent être interprétées globalement par des élèves car ils ont le graphe en tête (disponibilité du graphe) mais c'est plus difficile pour eux dès que les expressions algébriques deviennent plus complexes. Dire que $x \rightarrow x^2 + \sqrt{x} + \exp(x)$ est croissante sur R^+ car somme de trois fonctions croissantes suppose l'adoption de la perspective globale à partir de la formule, ce qui demande une certaine expertise. Les élèves de première ou terminale vont bien souvent calculer une dérivée de la fonction sur $[0, +\infty[$. En général, les propriétés globales ne sont pas visibles directement à partir de la formule mais elles doivent être déduites à partir de traitements algébriques. Comme cas extrême, citons l'exemple de

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{e^{-x}-1} - 1 - \frac{x}{2}$$

qui est une fonction paire. Cependant, même en adoptant une perspective globale sur la formule, il est impossible de s'en rendre compte. C'est un développement en série entière qui permet de le réaliser ou bien une recherche directe de parité par le calcul de $f(-x)$.

Pour le non expert, la formule ne permet donc pas en général de déduire des aspects globaux de la fonction. Elle ne permet pas la construction directe du tableau de variation. Elle permet la construction de la courbe, mais point par point, ce qui ne fait pas travailler la perspective globale sur la fonction en jeu. C'est seulement la réinterprétation d'un tableau de variation ou d'un graphe déjà construit qui peut faire adopter une perspective globale sur la fonction pour des élèves.

Remarquons que le traitement de ces propriétés globales peut plus ou moins faire travailler la perspective globale : certaines propriétés globales sont en effet des propriétés ponctuelles universelles, c'est-à-dire des propriétés ponctuelles vérifiées pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle de définition – par exemple : f est paire si et seulement si son intervalle de définition est symétrique et pour tout x de cet intervalle, on a $f(x) = f(-x)$; f est t périodique si et seulement si pour tout x de son intervalle de définition, on a $f(x) = f(x+t)$. L'établissement de ces propriétés est donc facilement accessible par un traitement mettant en jeu une seule variable x. L'absence de perspective globale peut ne pas être handicapante sauf s'il faut réinterpréter globalement des propriétés ponctuelles universelles (par exemple pour tout x, $f(x) = f(x+t)$ donc f est t périodique). Au contraire, d'autres propriétés, comme la croissance, sont liées à la variation, et sans une hypothèse de dérivabilité des fonctions, elles ne peuvent pas se traduire par une propriété ponctuelle universelle. Elles nécessitent la prise en compte de deux valences de la variable sur l'intervalle de définition de la fonction : f est croissante si et seulement si pour tout x et y tels que $x \leq y$ on a $f(x) \leq f(y)$. La perspective globale et la quantification deviennent fondamentales dans l'activité. En particulier, un traitement de la croissance sous cette forme fait sans nul doute mieux travailler la perspective globale qu'un traitement par la positivité de la dérivée. Nous y reviendrons.

En ce qui concerne la perspective locale, remarquons tout d'abord que les propriétés locales en un point x_0 ne sont rien d'autres que des propriétés globales vérifiées sur tout voisinage de x_0. Nous émettons l'hypothèse qu'adopter une perspective locale sur le graphe suppose donc de dépasser la perspective uniquement ponctuelle. En effet, dans une recherche ancienne sur l'acquisition de la notion locale de limite de suites, Robert (1982) met en évidence la corrélation entre une conception statique, bidimensionnelle, de la notion locale de limite et l'acquisition de la définition en termes formels. Aussi, la perspective ponctuelle sur les fonctions ne semble pas permettre une conception statique et bidimensionnelle de la notion de limite mais plutôt une conception dynamique, qui fait obstacle à l'acquisition de la définition. Cette perspective ponctuelle peut rentrer en conflit avec la perspective locale. Par exemple, les représentations de la droite numérique (et donc des fonctions) associées à la perspective ponctuelle sont des représentations discrètes alors que les représentations nécessaires pour adopter la perspective locale sont des représentations continues, qui ne sont disponibles qu'avec une perspective globale sur la droite ou la fonction. En d'autres termes, la perspective locale sur les fonctions ne pourrait s'adopter sans la disponibilité préalable d'une perspective globale et savoir adopter la perspective globale serait une condition nécessaire pour conceptualiser la notion fondamentale de limite.

En outre, Robert et Boschet (1984) pointent l'importance pour les étudiants de disposer de connaissances disponibles dans plusieurs cadres et registres (hypothèse des blocs) et non seulement dans un seul (qu'il soit algébrique, graphique ou symbolique notamment). D'après ces résultats et conformément aux arguments développés plus haut, adopter la perspective globale sur les fonctions ne pourrait se faire sans une maîtrise par les étudiants de représentations mettant l'accent sur les propriétés globales des fonctions, d'où la nécessité de connaissances graphiques et symboliques. Les représentations algébriques, seules, peuvent ne pas suffire pour adopter la perspective globale, en particulier lorsque des propriétés comme la croissance ne sont pas suffisamment travaillées avec leur définition originale relevant de la perspective globale.

3. Domaines de travail pour l'étude des fonctions

Dans l'enseignement, la notion de fonction apparaît dans la scolarité française à la fin du collège et s'enrichit jusqu'à l'université. Les premiers travaux que nous avons menés avec la CI2U[3] (Vandebrouck, 2008a), à partir de l'étude des programmes, des manuels scolaires, d'épreuves de baccalauréat et de feuilles d'exercices de la première année d'université ont amené l'idée que le travail sur les fonctions est maintenant divisé en trois grand domaines, bien distincts, non

[3] Commission Inter Irem Université.

hiérarchisés et assez étanches. Ces trois domaines de travail décrivent donc la réalité actuelle de l'enseignement de la notion de fonction. Nous utilisons la définition que fait Robert (2003) de « domaines de travail » en géométrie : un ensemble auto consistant, cohérent, enseigné ou enseignable, spécifié par des fondements, un corps de définitions, des modes de raisonnements, un niveau de rigueur et enfin un corps de problèmes résolubles en son sein. Un domaine de travail fait partie d'un champ conceptuel, plus vaste.

Dans le paragraphe 3.1., nous décrivons rapidement les évolutions de la notion de fonction à travers les programmes de lycée, depuis les années 80. Les trois paragraphes suivants correspondent à la description des trois domaines de travail.

3.1. Évolution des programmes d'enseignements de 1981 à 2002

La notion de fonction apparaît dans les programmes dès le collège, à partir de l'étude des situations de proportionnalité et en lien avec les fonctions linéaires et affines. Nous ne parlons dans la suite que des programmes de lycée, à partir de la classe de seconde et nous nous tournons vers ce qui touche à la démarche d'Analyse et à la perspective locale.

Nous situons notre point de départ de cette étude des programmes en 1981 où Lazet et Ovaert publient un article intitulé « *pour une nouvelle approche de l'enseignement de l'Analyse* ». Suite à la réforme des mathématiques modernes, ils dénoncent l'introduction des notions de base de l'Analyse sans problématique sous jacente ou avec une problématique très élaborée mathématiquement mais loin de l'élève. Ils dénoncent l'emploi trop précoce du langage formalisé souvent hermétique aux élèves, un enseignement trop centré sur le discours du maître, une construction linéaire des concepts, non rapportée à la résolution de problèmes, une prédominance trop grande du qualitatif sur le quantitatif, un intérêt trop précoce pour le pathologique (Artigue, 1993).

Ils proposent de modifier les rapports entre théorie et applications, de promouvoir une approche plus constructiviste des apprentissages, de rééquilibrer le quantitatif et le qualitatif et enfin de ne théoriser que le seul nécessaire, en s'appuyant sur des niveaux de formalisation accessibles aux élèves. Dans leur texte, il apparaît à plusieurs reprises les fonctions ou suites de références comme objets privilégiés pour entrer dans la démarche d'Analyse. Les techniques de majorations, minorations, encadrements avec des suites et des fonctions de références sont mises en valeurs comme techniques fondamentales de l'Analyse. Les suites et fonctions de références apparaissent donc à deux niveaux, au premier comme objets simples et typiques permettant d'aborder qualitativement les propriétés des fonctions et au second comme outils permettant d'aborder quantitativement les propriétés (globales et locales notamment) de classes plus larges de fonctions.

Dans la réforme de 1982, les prescriptions de Lazet et Ovaert sont assez suivies. Le champ de l'approximation est en jeu dès la classe de seconde, avant même un quelconque enseignement de l'Analyse. Il y a une importance accordée à l'exploration (graphique et numérique) à l'aide des calculatrices et à l'étude globale et locale de fonctions simples (fonctions de références) en préalable à l'introduction de définitions générales. C'est ainsi que pour la progression vers la définition de la limite en 0 d'une fonction en première scientifique, les enseignants commencent par des exemples de fonctions vérifiant $|f(x)| < \mathrm{M}|x|$ au voisinage de 0 et la vérification que ce type de $|f(x)|$ peut-être rendu aussi petit que voulu, en imposant à $|x|$ d'être dans un intervalle suffisamment petit centré en 0. Les enseignants continuent par un examen de situations qui échappent à ce cadre et incitent à un point de vue plus qualitatif ($\sqrt{|x|}$ par exemple). La stratégie préconisée est analogue pour la dérivation. Il y a également une limitation bienvenue de la formalisation. Seule la limite en 0 est formalisée en epsilon et êta.

Il s'en suit une période où les fonctions de références envahissent les programmes de seconde. Leur étude globale est traitée et l'étude de leurs aspects locaux se limite à des observations en classe de première. Plus précisément, les limites en 0 sont introduites sur la base d'explorations à la calculatrice du comportement global et local des fonctions de références. Par rapport aux programmes précédents, un aspect conjectures à partir des explorations se perd, qui préparait à des démonstrations. L'algèbre des limites disparaît en outre des programmes. Les limites sont définies de façon générale mais uniquement par des critères suffisants à partir des fonctions de références. Le recours à l'approximation est donc imposé. Les majorations, minorations, encadrements (et le théorème des gendarmes) deviennent des outils essentiels de l'activité des élèves. Mêmes si les techniques sont parfois très lourdes, les enseignants reconnaissent un gain au niveau des majorations, minorations, encadrements, au niveau du contrôle de la variable indépendante, au niveau du choix de fonctions de références pour mettre en évidence une limite, au niveau de l'approximation, du maniement de la valeur absolue ou encore du repérage de terme algébriques prépondérants dans une expression.

La réforme de 1990 voit le repli des fonctions de références dans les programmes de lycée. Mais il n'y a plus de définitions (ou même pseudo définitions à partir des fonctions de références) des notions de convergence et de limite dans les programmes. Il reste un appui sur des explorations numériques et graphiques pour l'introduction des limites, mais pas seulement sur les fonctions de références, qui perdent ainsi progressivement leur statut. Dès la classe de première, les rudiments de l'algèbre des limites sont réintroduits et donc la majoration, minoration par des fonctions de références n'est plus le passage obligé pour l'étude des limites. Les règles algébriques sont essentiellement admises et leur signification est mise en valeur intuitivement. Enfin, les programmes de 2002 se mettent en place et ils entraînent les trois domaines de travail que nous introduisons maintenant.

3.2. Un premier domaine de travail F1 d'entrée dans la pensée fonctionnelle

Ce domaine de travail couvre la fin de collège jusqu'au début de la classe de première S. Dans ce domaine F1, les représentations des fonctions (notamment les tableaux de variations, les graphiques et les formules algébriques) sont introduites, donnant corps à un nouveau cadre de travail pour les élèves, appelé cadre fonctionnel. Le chapitre central de la classe de seconde est le chapitre « généralités sur les fonctions ». A partir d'une introduction ensembliste de la notion de fonction, l'enjeu d'apprentissage semble être que les élèves entrent dans la « pensée fonctionnelle », c'est-à-dire qu'ils conceptualisent les fonctions en tant qu'objet, qu'ils puissent adopter la perspective globale sur cet objet, en coordonnant les multiples registres de représentations et en reliant le cadre fonctionnel à de nombreux autres cadres (géométrique ou physique notamment). Robert (2011) parle de « relief des notions à enseigner » pour présenter les caractères spécifiques des notions, qui peuvent orienter l'enseignement.

Les notions de parité, de périodicité ou de croissance, dont nous avons déjà parlé, sont des propriétés globales des fonctions qui sont spécifiquement travaillées en seconde au sein de ce domaine. Les notions de maximum, minimum (globaux) sont également travaillées, toujours sous différents registres de représentations. Les variations globales de fonctions polynômes de degré 2, de l'inverse, et dans une moindre mesure de fonctions homographiques, sont étudiées mais ces fonctions perdent leur statut de fonctions de références. Des inéquations sont résolues, à la fois algébriquement et graphiquement. Toutes ces activités doivent concourir à l'objectif énoncé plus haut, en particulier l'articulation entre perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions. Dans la terminologie de Tall et Garcia, l'élève doit accéder au monde « symbolique - proceptuel » où les représentations permettent les manipulations aux niveaux processus et objets des fonctions mais aussi accéder au niveau Inter de Garcia : il doit commencer à faire des connexions entre des objets fonctionnels de même nature et à donner sens à l'idée de transformation engageant ces fonctions. Le gain d'un tel effort doit se faire sentir par des tâches de comparaisons de fonctions ou par les propriétés à mettre en jeu dès lors qu'est utilisée une classification des fonctions : linéaires, affines, du 2^{nd} degré, polynomiales….

Cependant, comme dit Comin (2005) : « *l'approche ensembliste de la notion de fonction par une mise en correspondance terme à terme des éléments de deux ensembles, modélisée par un graphe, évacue cette idée de contrainte entre deux grandeurs (...) nous faisons l'hypothèse que les pratiques qui sont proposées aux élèves portent sur un nombre fini de valeurs et éloignent les élèves de l'idée de* *variabilité et de continuité* ». Autrement dit, l'approche retenue dans les programmes pour la définition de fonction éloigne de la perspective globale sur les fonctions, peut enfermer les élèves dans la perspective ponctuelle, voire ne pas leur permettre d'accéder au niveau de conceptualisation objet. Les utilisations de tableaux de valeurs, les tâches de recherches d'image et d'antécédent ou les tâches de recherches de solutions à des équations seraient par exemple surreprésentées au sein du domaine de travail F1. En outre, l'herbier de fonctions disponibles dans ce domaine F1 se limite à des fonctions affines, des fonctions polynomiales de degré 2, la fonction inverse et parfois quelques fonctions homographiques. Ces fonctions perdent enfin leur statut de fonctions de référence pour introduire les notions locales comme dans les programmes précédents.

Bloch (2003) met en évidence le fait que les élèves n'exploitent que rarement, à l'issue de ce domaine de travail F1, la puissance du graphique au niveau global. Elle fait des propositions pour des séquences d'enseignement en seconde, supportées par la perspective globale du registre graphique. Elle pointe déjà le travail au niveau local qui pourrait être engagé dans ce domaine F1. Dans son travail, Maschietto (2001) met aussi en évidence l'importance que pourraient avoir les représentations graphiques comme outils pour entrer dans des tâches d'Analyse locale dès la première S.

3.3. Un deuxième domaine de travail F2 très algébrisé

Dès la classe de seconde (mais surtout à partir de la première S) et jusqu'à l'université où il est complexifié, il s'ouvre un domaine F2 très algébrisé, théoriquement formalisateur et simplificateur du domaine F1. Par exemple, comme le notent Coppé et *al.* (2007), le registre algébrique déjà important pour l'étude des fonctions dans les manuels de seconde (de 30% à 58% des exercices selon un manuel de seconde) devient prédominant dans les manuels de première et de terminale scientifique. Notre hypothèse est que le cadre fonctionnel se réduit alors au cadre algébrique où tout le « relief » que l'enseignement a donné à la notion de fonction dans le domaine F1 est masqué : en particulier les deux perspectives ponctuelle et globale sur les objets fonctions, qui ne sont pas suffisamment repérées par les élèves à l'issue de F1, ne sont plus mises en valeur dans le domaine F2, étant donné l'insuffisance de la représentation algébrique vis-à-vis de ces perspectives. Autrement dit, les élèves ne sont pas assez experts au sortir de la classe de seconde pour interpréter toutes les représentations algébriques rencontrées comme des fonctions sous leur perspective globale.

Cependant, dans ce domaine F2, les notions locales sont progressivement introduites : limite, continuité, dérivabilité, la dernière étant d'ailleurs introduite dans les programmes de première scientifique avant la notion de limite. De nombreux travaux (Schneider, 1991 ; Castela, 1995 ; Vivier, 2010) ont ici mis en évidence la difficulté pour les élèves à adopter la perspective locale à partir du jeu de cadre géométrique/numérique symbolique (Schneider, 1991) qui est proposé dans l'enseignement. Cette introduction est basée sur l'idée de tangente comme limite des sécantes mais les élèves ne peuvent avoir qu'une perspective globale sur la tangente, vue au collège et en seconde comme droite qui intercepte la courbe (le cercle ou la parabole essentiellement) en un unique point double. Le changement de perspective, important au moment de l'introduction de ce nombre dérivé, ne peut donc pas être suffisamment repéré par les élèves. Cette perspective locale est ensuite très peu travaillée pour elle-même en première et en terminale. Maschietto (2001, 2008) a par exemple travaillé avec les technologies le jeu global/local au moment de l'introduction du nombre dérivé. Elle utilisait la fonctionnalité de zooms des calculatrices graphiques mais il s'agissait d'un travail d'ingénierie qui n'est pas usuel dans les pratiques enseignantes. Les notions locales sont en fait principalement mobilisées dans des exercices où les fonctions sont représentées et représentables par une formule algébrique, en général polynomiale puis mêlant exponentielles et logarithmes en terminale. Les recherches de limites sont traitées par des calculs algébriques et les démarches de minorations, majorations et encadrement avec des fonctions de références, qui avaient été introduites dans les programmes à partir de 1982 et qui pouvaient donner corps à la perspective locale, ont quasiment disparu. Il n'y a plus de définition opérationnelle du concept de limite et une approche intuitive de la notion de limite apparaît. Les représentations graphiques permettent seulement d'illustrer les notions et quelques résultats locaux dont les preuves ne sont pas assumées. Selon Bloch (2002), « *cette illustration des propriétés est supposée s'appuyer sur l'intuition graphique. Elle ne questionne pas le rapport graphique/fonctions supposé transparent : les élèves sont supposés voir dans le dessin graphique ce qu'y voit le professeur* ». Compte tenu des considérations faites plus haut sur la difficulté d'accès à la perspective globale sur les fonctions, cette perspective locale ne peut effectivement pas aller de soi pour les élèves.

Au niveau du baccalauréat, Coppé et *al.* (2007) notent qu'il existe toujours une forte algébrisation de techniques pour l'étude des fonctions, basées sur des règles de calcul algébriques (calculs de limites, de dérivées, étude des variations de fonctions polynômes, exponentielles, logarithmes,…), qui renforcent les élèves dans des pratiques algébriques. Les questions portent sur des études globales mais sont algébrisées. En particulier, les fonctions sont toujours dérivables globalement et la variation est étudiée à partir du signe de la dérivée, ce qui ramène des propriétés globales à des propriétés ponctuelles universelles et masque le caractère global de ces propriétés. Les tableaux de variations et les graphiques dont l'usage permettrait de travailler la perspective globale, ne sont que rarement des outils de travail mais sont essentiellement des objets à construire, à compléter, à confronter aux résultats algébriques. Le théorème et l'inégalité des accroissements finis, qui étaient des outils permettant des encadrements et des majorations globales, critiqués parce que stéréotypant les sujets de baccalauréat, ont disparu des programmes, participant à ce recul du travail des perspectives globale et locale sur les fonctions. Les questions ponctuelles (résolutions d'équations ou intersections de graphes) sont traitées algébriquement et le graphique ne sert encore qu'à conforter les résultats algébriques, ce qui réduit son rôle à un rôle de contrôle. Les problèmes locaux (limites, continuité, dérivabilité en un point) sont encapsulés dans des procédures algébriques. Le taux de variation d'une fonction peut être explicitement demandé à des élèves de terminale mais l'idée de son calcul n'est pas supposée disponible spontanément quand elle est judicieuse.

Au final, Bloch, Comin, Coppé et *al.* Pointent, comme nous, le fait qu'avec le travail algébrique dans le domaine F2, de façon assez isolée du travail dans le domaine F1, l'enseignement secondaire contribue à masquer les perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions et évacue aussi la perspective locale dans ses programmes, ses manuels et ses pratiques. Autrement dit, il y aurait, avec le travail en F2, une large algébrisation, qui nuirait d'une part à l'accès des élèves à la perspective locale et qui masquerait d'autre part les perspectives ponctuelle et globale à adopter sur les fonctions. Des élèves, qui se retrouveraient majoritairement dans les populations étudiantes à l'université, ne pourraient pas facilement passer du ponctuel au global et vice versa. Hors des situations algébrisées, les fonctions seraient considérées au mieux, soit comme des correspondances ponctuelles, soit comme des objets globaux, sans une articulation possible entre les deux perspectives. Dans les situations algébrisées, les objets manipulés seraient très formels, sans les différentes perspectives sous jacentes.

3.4. Un troisième domaine de travail F3 tourné vers l'Analyse

Le troisième domaine de travail F3 s'engage cependant dès le début de l'université. C'est le domaine de l'Analyse non algébrisée avec toutes ses règles, et notamment les règles de quantifications qui deviennent ici impératives. Comme nous l'avons vu plus haut, la démarche d'Analyse est une démarche différente de la démarche algébrique. Les techniques qui sont attachées à l'Analyse relèvent de la majoration, de la minoration et de l'encadrement, du jeu entre des conditions suffisantes et/ou nécessaires et relèvent pour beaucoup de la perspective locale sur les fonctions. Son fonctionnement ne doit pas pour autant sacrifier les démarches algébriques simplificatrices et notamment l'algèbre des limites qui reste toujours présent dans ce domaine. Cependant des expressions proposées dans les programmes d'enseignement, comme « proche de » ou « de plus en plus proche », ne peuvent pas être opérationnelles dans le cadre algébrique et sans recours aux quantificateurs. Les fondements du domaine de travail F3 sont ceux de la complétude de **R**, généralement admise sous l'une des trois formes suivantes : la convergence des suites croissantes majorées, la convergence des suites adjacentes ou la convergence des suites de Cauchy. Le premier théorème d'Analyse locale, concernant l'image d'une suite convergente par une fonction continue, est démontré. Sa démonstration nécessite le recours à la quantification et aux définitions précises des notions de convergence et de continuité.

Le travail dans ce domaine F3 nécessite aussi constamment un jeu entre les deux perspectives globale et locale : le calcul algébrique de la limite d'une expression complexe nécessite par exemple une mise en perspective locale pour repérer les termes prépondérants et les termes négligeables de l'expression manipulée. Ensuite vient le travail sur les fonctions négligeables, les fonctions équivalentes, les développements limités et les formules de Taylor qui ont soit un caractère global (formule de Taylor Lagrange ou formule de Taylor avec reste intégral) ou un caractère local (formule de Taylor Young).

4. Expérimentations sur les conceptions des étudiants

Notre identification des trois domaines de travail nous permet une première compréhension des difficultés observées chez les étudiants entrant à l'université. Dans ce paragraphe, nous souhaitons préciser ces difficultés à partir de productions d'élèves et d'étudiants, en reliant directement ces difficultés à la notion de perspective introduite plus haut. Dans le premier paragraphe, nous référons à une recherche exploratoire menée dans le cadre du travail de la CI2U (Vandebrouck, 2008a). Dans les deux paragraphes suivants, nous référons à une recherche personnelle et orientée par notre problématique de l'adoption des perspectives par les élèves et les étudiants.

4.1. Le travail de la CI2U

Dans le cadre du travail de la CI2U, un questionnaire a été proposé aux étudiants de L1 de plusieurs universités françaises (Paris Diderot, Bordeaux 1, Montpellier, Rouen) aux rentrées 2007 et 2008, pendant la première semaine de cours. On a analysé 298 réponses d'étudiants pour ce qui concerne l'Analyse.

Comme prévu, les résultats concernant des calculs de limites étaient assez bons dès lors que ces limites mettaient en jeu des règles algébriques sur les fonctions monômes, exponentielles, logarithmes, avec des formes et des bornes usuelles : le calcul de la limite de $g(x) = x^{10}e^x$ lorsque x tend vers moins l'infini étant par exemple réussi à 55 %, le calcul lorsque x tend vers plus l'infini étant le mieux réussi avec 87 %. Les résultats étaient toujours corrects mais sensiblement moins bons lorsque les formes ne correspondaient pas à des formes indéterminées usuelles de terminale, c'est-à-dire que les règles algébriques ne s'appliquaient pas de façon immédiate : le calcul de la limite de $l(x) = \dfrac{\ln x - \ln 2}{x - 2}$ lorsque x tend vers plus l'infini étant par exemple réussi à 53 %, celui le moins bien réussi étant celui de la limite de $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$ lorsque x tend vers 0, réussi à seulement 9 % : l'absence de disponibilité de la perspective globale sur la fonction représentée semble pouvoir expliquer ce taux d'échec chez les étudiants. En effet, la fonction $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$ tend vers $-\infty$ en 0^- et tend vers $+\infty$ en 0^+. La perspective globale adoptée sur l'expression algébrique $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$ permettrait d'appréhender cette difficulté, mais comme nous l'avons expliqué plus haut seul un expert peut spontanément adopter cette perspective à partir de la seule expression algébrique. L'étudiant peut ne référer qu'aux formules algébriques et ne pense pas à la différence de traitement qui doit être faite en 0^+ et en 0^-.

En outre, les résultats de la CI2U ont remis en évidence la non disponibilité chez les étudiants de la perspective locale nécessaire pour un calcul correct des limites en formes de taux d'accroissement, la limite de $l(x) = \frac{\ln x - \ln 2}{x - 2}$ lorsque x tend vers 2 n'étant réussie qu'à 13%.

Concernant des calculs de limites à l'infini qui ne mettent pas en jeu des règles algébriques, seuls 3 étudiants sur 298 ont répondu correctement aux deux calculs de limites : $\sin(2\pi n)$ lorsque n tend vers l'infini et $\cos(2\pi x)$ lorsque x tend vers plus l'infini. Plus précisément, deux groupes d'étudiants sont alors apparus nettement. Le premier groupe est constitué des étudiants, très nombreux (126 sur 298), qui ne se dégagent pas d'une approche algébrique et ne donnent aucune réponse à ce genre de calcul de limite ($\sin(2\pi n)$ lorsque n tend vers l'infini, $\cos(2\pi x)$ lorsque x tend vers plus l'infini et d'autres du même type). L'autre groupe est constitué d'étudiants qui semblent pouvoir dépasser cette approche purement algébrique des fonctions et des calculs de limites : on trouve cependant parmi ceux-là d'une part des étudiants qui semblent plutôt raisonner sur les deux limites (et d'autres) avec une perspective ponctuelle, donnant une limite finie à la suite et à la fonction (54 étudiants sur les 298), et d'autre part des étudiants qui semblent plutôt adopter une perspective globale pour conclure (traitant notamment les suites comme des fonctions, 49 sur 298). Pour tous les autres étudiants, hors des deux grands groupes que nous venons d'identifier, le questionnaire était trop limité pour les catégoriser.

Comme le calcul de ces limites se fait à l'infini, il semble que ce ne soit pas la perspective locale qui soit pertinente ici mais bien la perspective ponctuelle (dans quelques cas particulier de suites comme $\sin(2\pi n)$ où la perspective ponctuelle permet de trouver que la suite est constamment nulle) et surtout la perspective globale sur les fonctions en jeu (comme pour la fonction $\cos(2\pi x)$ où la perspective globale permet de déduire de l'oscillation la non convergence). De fait, si la coordination des deux perspectives ponctuelle et globale se révélait nécessaire pour traiter au mieux tous les calculs de limites rencontrés, il est apparu que peu d'étudiants arrivant en L1 semblent capables de changer de perspective spontanément (une vingtaine dont les 3 qui ont répondu correctement aux limites de $\sin(2\pi n)$ et $\cos(2\pi x)$) et que beaucoup d'étudiants ne semblent mobiliser aucune des deux perspectives, répondant mal ou ne répondant pas à toutes les questions où les procédures algébriques sont inefficaces et où ces perspectives sont pertinentes.

Signalons que dans le test de la CI2U, des résultats généraux mettaient bien en évidence la meilleure réussite au baccalauréat des étudiants qui semblent avoir pu raisonner à un certain moment sous la perspective globale, confortant notre hypothèse selon laquelle l'aptitude à adopter la perspective globale intervient certainement dans la réussite des étudiants en Analyse. Signalons enfin que le test de la CI2U mettait bien en évidence également les difficultés des étudiants pour manipuler les valeurs absolues et leurs énormes difficultés en ce qui concerne la logique.

4.2. Un exercice à la transition lycée-université

Il a été proposé en 2010 à des élèves de terminale scientifique (S) et à des étudiants de L1 un exercice similaire, caractéristique de la transition lycée – université. Il nous a permis d'affiner notre étude des conceptions sur les fonctions en les reliant à la notion de perspective ainsi que la façon dont cette dernière intervient dans des exercices d'Analyse. Les résultats permettent de préciser les caractéristiques des deux classes d'élèves ou d'étudiants selon la capacité à mobiliser la perspective globale sur les objets manipulés (disponibilité de la perspective globale, ce qui correspondra à l'approche coordonnée proposée par Monoyiou et Gagatsis, 2010) ou bien la prégnance chez eux des seules procédures algébriques dans toutes les situations (l'approche algébrique). Ces résultats sont également cohérents avec ceux de Balacheff et Gaudin (2002), ainsi que ceux de Robert (1983) de façon plus indirecte.

Notre dispositif a consisté à étudier les productions d'élèves de terminale S et d'étudiants de L1 sur un exercice qui mélange le registre algébrique et le registre symbolique, traitant d'une fonction définie par une intégrale de la forme :

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$$

Au lycée et à l'université, les intégrales sont introduites comme des aires sous les courbes, c'est-à-dire une approche par les intégrales définies. Le lien entre les intégrales des fonctions continues et les primitives est fait rapidement (démontré partiellement en général) de sorte que les élèves et les étudiants peuvent travailler la plupart des exercices dans le cadre algébrique.

Nous avons choisi de comparer les productions des élèves et des étudiants de L1 sur cet exercice car il est très proche de tâches classiques dans les deux institutions et les adaptations sont raisonnables, aussi bien pour les élèves que pour les étudiants. En effet, même si ce genre de fonction *G* est inhabituel dans les pratiques des élèves et des étudiants, ces derniers ont déjà rencontré des intégrales indéfinies sur des intervalles de la forme $[a, x]$ ou $[a, \beta(x)]$ (β étant une fonction linéaire) au moment du test. Les élèves devront donc adapter leurs connaissances anciennes, par exemple en introduisant un point intermédiaire *a* et en utilisant la relation de Chasles. L'intérêt d'un tel type d'étude est que des procédures relevant uniquement du domaine F2 peuvent ne pas suffire pour dégager des propriétés de la fonction *G,* mêmes ponctuelles. Il faut travailler dans le domaine F1 et recourir aux perspectives.

Le test a impliqué une classe d'élèves de terminale S d'un lycée parisien (15 étudiants) et un groupe d'étudiants de L1 (109 étudiants de l'Université Paris Diderot). Les énoncés précis ont été choisis par les professeurs de chacun des deux niveaux et de façon indépendante, avec des consignes pour traiter des questions concernant des propriétés ponctuelles et globales de la fonction *G*. Voici l'énoncé qui a été proposé en L1 :

Exercice 5
Soit *f* une fonction continue sur **R** et soit *G* la fonction définie sur **R** par

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$$

1) Montrer que si *f* est une fonction constante, la fonction *G* est également constante.
2) Montrer que si *f* est paire (respectivement impaire), la fonction *G* est paire (respectivement impaire).
3) Montrer que *G* est dérivable et calculer *G*'.
4) Expliciter la fonction *G* associée à la fonction $f(t) = |t|$.

(…)

Énoncé de L1 (mars 2010).

Dans cet énoncé de L1, la fonction *f* est supposée continue globalement sur **R**. Les étudiants doivent montrer des propriétés globales sur *G*, notamment une propriété de parité de *G* (par changement de variable, connaissance spécifique de L1). Ils doivent aussi justifier que *G* est dérivable et calculer *G*'. Les questions 1 et 3 peuvent se traiter algébriquement, en introduisant une primitive *F* de *f* et sans aucune considération de perspective sur les fonctions *f* et *G.* Les difficultés des étudiants liées aux perspectives ponctuelle et globale peuvent apparaître pour les questions 2 – si f est paire alors G est paire – et 4 – expliciter G lorsque f est la fonction valeur absolue. Par exemple, en question 4, les seules procédures algébriques ne suffisent plus, bien que le registre des questions et des réponses attendues reste toujours algébrique. En effet, même en exploitant la parité de la valeur absolue et le résultat de la question 2, il faut envisager plusieurs cas selon que 0 appartient ou non à l'intervalle $[x\text{-}1, x\text{+}1]$; c'est-à-dire $x < -1$, $-1 \leq x \leq 1$ et $x > 1$. La difficulté nous semble tenir en ce qu'il faut pouvoir adopter simultanément la perspective ponctuelle sur G en x et la perspective globale sur f dans l'intervalle $[x\text{-}1, x\text{+}1]$ pour dégager les cas de figure. La question 5 concerne quant à elle uniquement le domaine de travail F3 et nous ne développerons pas à son sujet.

Dans l'énoncé de terminale, l'introduction par l'énoncé d'une primitive F permet d'emblée de rester dans le domaine de travail F2 pour de nombreuses questions : 1a, 1b, 1c, 2a, 3a 1ère partie et enfin 3b.

I THÈMES : Fonction définie par une intégrale

Dans le problème, $\mathcal{D}$ désignera l'ensemble des fonctions définies, dérivables sur $\mathbb{R}$. À toute fonction f de $\mathcal{D}$, on associe la fonction $\tilde{f}$ telle que pour tout réel x : $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$.

1.a. Montrez que pour toute primitive F de f sur $\mathbb{R}$; $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left(F(x+1) - F(x-1)\right)$.

b. Calculez $\tilde{f}$ lorsque f est la fonction définie par $f(t) = t^n$, n entier, $n \geqslant 1$.
Montrez que pour toute fonction polynôme f, $\tilde{f}$ est une fonction polynôme de même degré.

c. Calculez $\tilde{f}$ lorsque f est la fonction définie par $f(t) = \cos \pi t$.

2.a. Montrez que pour toute fonction f de $\mathcal{D}$, $\tilde{f}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout x réel $(\tilde{f})'(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+1) - f(x-1)\right)$.

b. Déduisez-en que les propositions (1) et (2) suivantes sont équivalentes : (1) $\tilde{f}$ est une fonction constante ; (2) f est périodique et 2 est une période.

3.a. On suppose f croissante sur $\mathbb{R}$. Montrez qu'alors $\tilde{f}$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $f(x-1) \leqslant \tilde{f}(x) \leqslant f(x+1)$.

b. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{4e^t}{t^2+4}$. Étudiez les variations de f sur $\mathbb{R}$. Déduisez-en les variations de $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}$.

Énoncé de terminale S (mai 2010).

Dans la suite du texte, comme dans l'énoncé de L1, nous désignerons par G la fonction qui est notée f dans l'énoncé. Les premiers exemples de fonctions f permettent de sensibiliser les élèves à la dépendance de G à f, ce qui n'est pas une préoccupation en L1, les étudiants devant raisonner directement dans le registre symbolique. Des caractéristiques d'énoncés de terminale S se retrouvent, par rapport à des énoncés de L1, concernant la complexité des tâches : la tâche de calcul de la dérivée de G est découpée en deux sous-tâches : question 1a et question 2a, alors que les étudiants de L1 sont supposés trouver G' directement. Tout en restant dans le domaine de travail F2, la question 1b partie 2 comporte des adaptations de connaissances pour les lycéens, mais elle ne questionne toujours pas les perspectives. Ce sont les questions 2b et 3a qui obligent ici à sortir du domaine de travail F2 et qui permettent de tester la capacité des élèves à manipuler des fonctions de façon symbolique sous les perspectives ponctuelle et globale. Autrement dit, comme certaines des questions du partiel de L1, il s'agit de questions qui nécessitent de dépasser les démarches algébrisées.

Dans la question 2b, il faut jouer entre deux propriétés globales sur f et G – le fait que f est 2 périodique et que G est constante – par l'intermédiaire d'une propriété ponctuelle universelle sur f – pour tout x réel, on a $f(x\text{-}1) = f(x+1)$. Plus précisément, dans le sens direct par exemple, il faut traduire de façon ponctuelle universelle le fait que G est constante – pour tout x réel, on a $G'(x)=0$. Il faut ensuite réinterpréter l'information ponctuelle universelle – pour tout x réel, on a $f(x\text{-}1) = f(x+1)$ – en périodicité de la fonction f. Remarquons cependant qu'aucune de ces traductions ne met a priori en jeu la perspective globale. En effet, la périodicité et la constance se traduisent de façon ponctuelle universelle (comme nous l'avons signalé plus haut, les programmes ont évacué la perspective locale liée à la dérivabilité et les propriétés globales de variation des fonctions sont réduites à des propriétés ponctuelles universelles de leur dérivée).

Dans la première partie de la question 3a, il faut jouer de la même façon entre deux propriétés globales sur f et G – à savoir f et G sont croissantes – par l'intermédiaire d'une propriété ponctuelle universelle sur f : Pour tout x réel, on a $f(x\text{-}1) \leq f(x+1)$. Plus précisément, il faut, à partir de la propriété globale que f est croissante, écrire la propriété ponctuelle universelle - pour tout x réel, on a $f(x\text{-}1) \leq f(x+1)$ – et réinterpréter la propriété ponctuelle universelle – $G'(x) \geq 0$ – en propriété globale – G croissante. Remarquons ici que l'écriture en propriété ponctuelle universelle - pour tout x réel, on a $f(x\text{-}1) \leq f(x+1)$ – n'est pas une traduction ponctuelle universelle de la croissance. Il s'agit d'une perte d'information par rapport à l'écriture globale d'une propriété globale – la croissance : pour tout x, y réels, $x \leq y$ implique $f(x) \leq f(y)$ – qui ne peut ici se traduire de façon ponctuelle universelle.

Dans la deuxième partie de la question 3a, il ne s'agit au contraire pas de passer d'une propriété globale à une autre en les traduisant de façon ponctuelle universelle. Comme dans l'exercice de L1, la difficulté semble tenir en ce qu'il faut pouvoir adopter simultanément le point de vue ponctuel sur G en x et le point de vue global sur f dans l'intervalle $[x\text{-}1, x+1]$. En effet, il faut traduire avec deux variables une propriété globale sur f, à savoir que pour tout x réel et t dans l'intervalle $[x\text{-}1, x+1]$, on a $f(x\text{-}1) \leq f(t) \leq f(x+1)$. Une autre méthode consiste à changer de registre et interpréter graphiquement la croissance de f et son intégrale sur un intervalle $[x\text{-}1, x+1]$. Cette question est donc plus complexe que les précédentes car elle met directement en jeu la perspective globale sur f et pas uniquement des propriétés ponctuelles universelles.

La question 3b est quant à elle une simple application, les variations de f se déterminent algébriquement (calcul de dérivée, étude de signe).

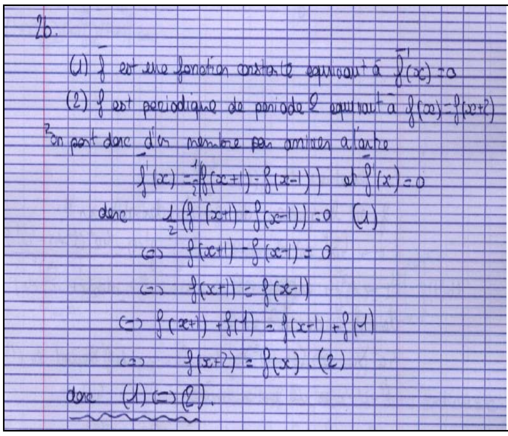
4.3. Les résultats des élèves et des étudiants en termes de perspectives

Focalisés sur la transition lycée-université, nous avons choisi de n'analyser que les copies des cinq élèves de la classe de terminale désignés par leur enseignant comme susceptibles de se retrouver à l'université l'année d'après. En effet, dans une première lecture des productions des élèves, il est apparu que celles-ci étaient de bien meilleure qualité globalement que les productions des étudiants de L1, relativement à la difficulté des énoncés. Cela s'expliquait par le fait que bon nombre de bons élèves de terminale ne se retrouvent pas dans les populations d'étudiants de L1. Ils s'orientent beaucoup par exemple vers les classes préparatoires aux grandes écoles d'ingénieur. Les copies des étudiants ont par contre toutes été consultées, sans pour autant en faire une analyse exhaustive.

Comme prévu, les difficultés des cinq élèves de terminale ont surtout porté sur les questions 2b et 3a. Un seul d'entre eux a réussi les deux questions de façon acceptable. Les autres questions, qui ne mettent pas en jeu les perspectives ponctuelle et globale, ont été traitées sans problèmes majeurs. Seule la question 1b, dont nous avons noté plus haut qu'elle est complexe pour les lycéens, est mal réussie majoritairement.

Il apparaît que la question 2b est moins bien réussie que la première partie de la question 3a, quand bien même les deux mettent en jeu une propriété ponctuelle universelle qui ne fait pas a priori travailler la perspective globale et quand bien même la propriété ponctuelle universelle de la question 3a n'est pas une traduction mais une perte d'information par rapport à la propriété de croissance.

En fait, la traduction des propriétés globales de constance ou de croissance en propriétés ponctuelles universelles $G'(x) = 0$ ou $G'(x) \geq 0$ est une routine pour les élèves de fin de terminale. C'est respectivement en jeu dans les deux questions 2b et 3a. Sans doute la traduction de la périodicité par la propriété « pour tout x réel, on a $f(x+t) = f(x)$ » est-elle, elle aussi, routinière pour les élèves. Cependant, la propriété ponctuelle universelle qui apparaît en 2b) est $f(x+1) = f(x-1)$. Son interprétation en périodicité fait donc finalement pleinement travailler la perspective globale. Au contraire, dans la première partie de la question 3a où il faut traduire la croissance de f de façon ponctuelle universelle - pour tout x réel, on a $f(x-1) \leq f(x+1)$, cette traduction est aidée par le contexte et par ce à quoi il faut arriver. Ceci semble expliquer cette réussite moindre dans la question 2b par rapport à la question 3a. Voici un exemple de production, celle de l'élève 5 pour la question 2b :


2b.
(1) G est une fonction constante équivaut à G'(x) = 0
(2) f est périodique de période 2 équivaut à f(x) = f(x+2)
On part donc d'un membre pour arriver à l'autre
G'(x) = ½[f(x+1) - f(x-1)] et G'(x) = 0
donc ½(f(x+1) - f(x-1)) = 0 (1)
⇔ f(x+1) - f(x-1) = 0
⇔ f(x+1) = f(x-1)
⇔ f(x+1) + f(1) = f(x-1) + f(1)
⇔ f(x+2) = f(x) (2)
donc (1) ⇔ (2).

(1) G est constante ⇔ $G'(x) = 0$
(2) f est 2 périodique ⇔ $f(x) = f(x+2)$
On part d'un membre pour arriver à l'autre :

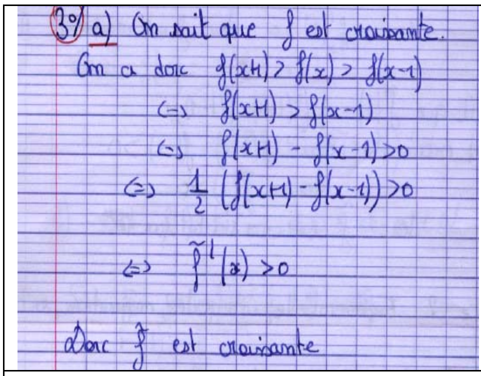
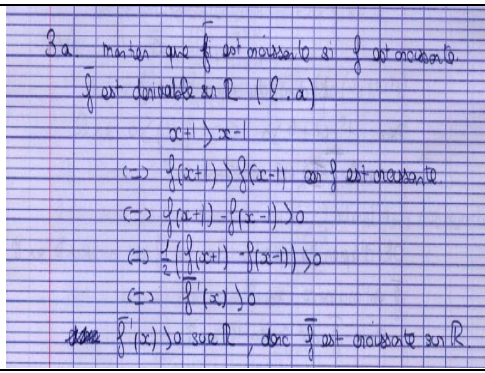
$G'(x) = ½ [f(x+1)-f(x-1)]$ et $G'(x) = 0$
...
⇔ $f(x+1) = f(x-1)$
⇔ $f(x+1) + f(1) = f(x-1) + f(1)$

⇔ $f(x+2) = f(x)$ (2)
donc (1) ⇔ (2).

Élève 5 : question 2b.

L'élève 5 explicite sa procédure « *on part d'un membre pour arriver à l'autre* ». Il n'y a aucune quantification qui traduirait une sensibilité à la perspective globale dans les propriétés ponctuelles universelles. En outre, les équivalences sont fausses. Il est nécessaire pour l'élève de revenir à la forme initiale de la périodicité $f(x) = f(x+2)$ pour conclure à la périodicité de f car l'obtention de $f(x-1) = f(x+1)$, même sans quantification, n'est pas pour lui une caractérisation de la périodicité. Du coup, ce sont des procédés algébriques qui font foi et tout est mis en œuvre algébriquement pour faire apparaître $f(x) = f(x+2)$.

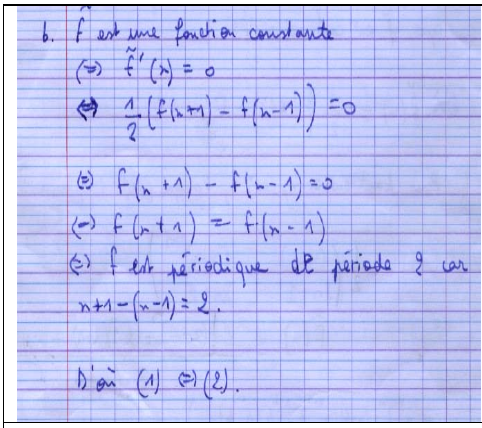
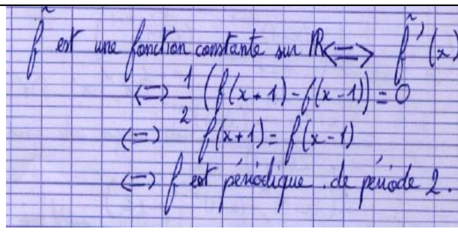
Concernant la première partie de la question 3a, la croissance de la fonction f est traduite par $f(x-1) < f(x+1)$ sans les quantificateurs chez 3 élèves (dont le 5). Il y a également présence d'équivalences, ceci dénotant peut-être aussi l'absence de perspective globale chez ces élèves. Voici les productions des élèves 2 et 5 :

	
3a) On sait que f est croissante. On a donc $f(x+1) > f(x) > f(x-1)$ ⇔ $f(x+1) > f(x-1)$ ⇔ $f(x+1) - f(x-1) > 0$ ⇔ ½ $[f(x+1) - f(x-1)] > 0$ ⇔ $G'(x) > 0$ Donc G est croissante.	3a) G est dérivable sur **R** (2a) $x+1 > x-1$ ⇔ $f(x+1) > f(x-1)$ car f est croissante ⇔ $f(x+1) - f(x-1) > 0$ ⇔ ½ $[f(x+1) - f(x-1)] > 0$ ⇔ $G'(x) > 0$ $G'(x) > 0$ sur **R**, donc G est croissante sur **R**.
Élève 2 : question 3a.	**Élève 5 : question 3a.**

La production de l'élève 3 est sensiblement identique à celle de l'élève 2, sans quantificateur, mais il n'y a pas les symboles d'équivalence. Tout se passe comme si ces trois élèves ne travaillaient que dans le domaine F2, où seuls des calculs algébriques permettent de passer d'un état A traduisant des hypothèses à un état B caractéristique du résultat attendu. Le jeu ponctuel/ponctuel universel/global mis à l'œuvre dans ces deux questions est totalement masqué par des procédures algébriques. Les quantifications permettant de mettre en scène ce jeu sont systématiquement absentes. C'est pourtant l'élève 5 qui réussit correctement la deuxième partie de la question 3b plus complexe mais il reconnait en fait une application immédiate de la formule de la moyenne et passe donc en quelque sorte à côté de l'aspect global.

Le profil des élèves 1 et 4 semble en revanche un peu différent. Même si des caractéristiques de leurs productions sont similaires à celles des élèves précédents (présence des équivalences notamment), ce qui pourrait sans doute s'expliquer en référant au contrat didactique (Brousseau, 1997), il semble que ces élèves sont plus à même d'interpréter ponctuellement ou globalement les écritures symboliques qu'ils manipulent.

Dans la question 2b, ces élèves ne traduisent pas les propriétés globales avec des quantificateurs (mais ils vont le faire en 3a). Cependant comme nous l'avons remarqué plus haut, la quantification explicite n'est pas nécessaire pour réussir la question 2b puisque les propriétés globales mises en jeu sont uniquement ponctuelles universelles. Alors il est légitime de se demander si cette quantification n'est pas présente implicitement. En effet, contrairement aux trois élèves du groupe précédent, les élèves 1 et 4 peuvent interpréter directement l'écriture $f(x\text{-}1) = f(x\text{+}1)$ comme la 2-périodicité.

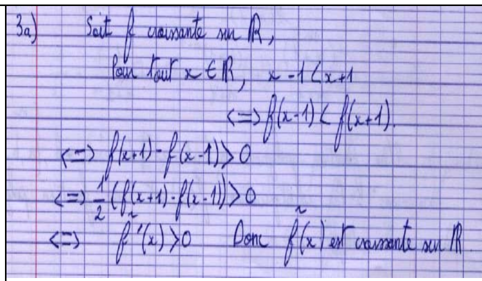
 b. $\tilde{f}$ est une fonction constante (⇔) $\tilde{f}'(x) = 0$ ⇔ $\frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)) = 0$ ⇔ $f(x+1) - f(x-1) = 0$ ⇔ $f(x+1) = f(x-1)$ ⇔ f est périodique de période 2 car $x+1-(x-1) = 2$. D'où (1) ⇔ (2).	 $\tilde{f}$ est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ ⇔ $\tilde{f}'(x)$ ⇔ $\frac{1}{2}(f(x+1)-f(x-1)) = 0$ ⇔ $f(x+1) = f(x-1)$ ⇔ f est périodique de période 2.
b) G est une fonction constante ⇔ $G'(x) = 0$ ⇔ ½ $[f(x+1)\text{-}f(x\text{-}1)] = 0$ ... ⇔ $f(x+1) = f(x\text{-}1)$ ⇔ f est périodique de période 2 car $x+1\text{-}(x\text{-}1) = 2$ D'où (1) ⇔ (2)	G est une fonction constante ⇔ $G'(x) = 0$ ⇔ ½ $[f(x+1)\text{-}f(x\text{-}1)] = 0$ ⇔ $f(x+1) = f(x\text{-}1)$ ⇔ f est périodique de période 2

Élève 1 : question 2b. **Élève 4 : question 2b.**

L'élève 1 explicite le fait que « *f est périodique de période 2 car x+1 – (x-1) = 2* ». Autrement dit, ce n'est pas tant la présence du quantificateur qui est importante mais la capacité à interpréter globalement l'écriture $f(x\text{-}1) = f(x\text{+}1)$. Et comme nous l'avons expliqué plus haut, il faut bien mobiliser une perspective globale sur les fonctions pour passer directement de cette écriture (même non quantifiée) à la 2-périodicité, ce que n'ont pas pu faire les élèves du profil précédent.

Concernant la question 3a (première partie), ces deux mêmes élèves mobilisent cette fois explicitement la quantification pour traduire les propriétés globales en propriétés ponctuelles universelles, ce qui peut signifier encore la prise en compte de la perspective globale. Cependant les élèves n'identifient pas qu'il s'agit d'une perte d'information et non d'une traduction ponctuelle universelle de la croissance. Par exemple, l'élève 1 ci-dessous déduit la croissance de G à partir de la relation

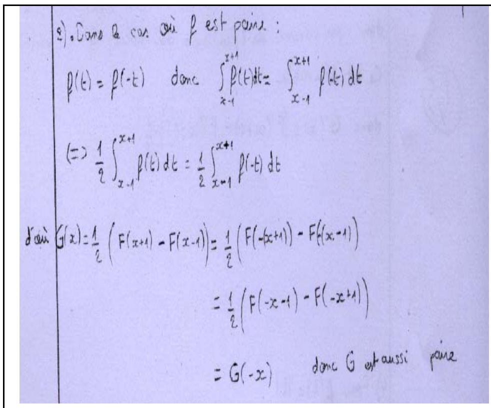
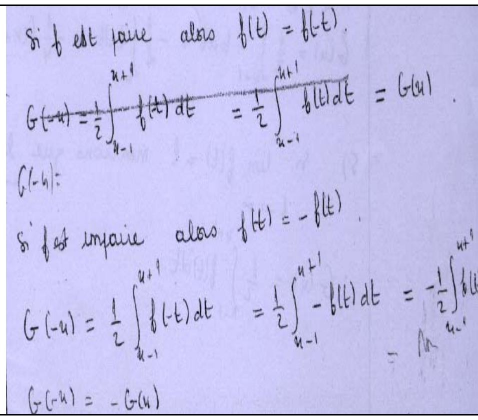
$G(x\text{-}1) \leq G(x) \leq G(x+1)$, ce qui constitue une grave erreur liée à des lacunes dans cette perspective globale.

 $3.a.$ f croissante sur $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ Pour tout x de $\mathbb{R}$ $f(x-1) \leq f(x) \leq f(x+1)$ $\Leftrightarrow \int_{t-1}^{t+1} f(x-1)dx \leq \int_{t-1}^{t+1} f(x)dx \leq \int_{t-1}^{t+1} f(x+1)dx$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1} f(x-1)dx \leq \frac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1} f(x)dx \leq \frac{1}{2}\int_{t-1}^{t+1} f(x+1)dx$ $\Leftrightarrow \tilde{f}(x-1) \leq \tilde{f}(x) \leq \tilde{f}(x+1)$ $\Leftrightarrow \tilde{f}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.	 3a) Soit f croissante sur $\mathbb{R}$, Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x-1 < x+1$ $\Leftrightarrow f(x-1) < f(x+1)$. $\Leftrightarrow f(x+1) - f(x-1) > 0$ $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)) > 0$ $\Leftrightarrow \tilde{f}'(x) > 0$ Donc $\tilde{f}(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$
3a) f est croissante sur **R** ⇔Pour tout x de **R**, $f(x\text{-}1) \leq f(x) \leq f(x+1)$ ⇔ $\int_{t-1}^{t+1} f(x\text{-}1)dx \leq \int_{t-1}^{t+1} f(x)dx \leq \int_{t-1}^{t+1} f(x+1)dx$ ⇔ … ⇔ $G(x\text{-}1) \leq G(x) \leq G(x+1)$ ⇔ G est croissante sur **R**.	3a) Soit f croissante sur **R** Pour tout x de **R**, $x\text{-}1 < x+1$ ⇔ $f(x\text{-}1) < f(x+1)$ ⇔ … ⇔ ½ $[f(x+1) - f(x\text{-}1)] > 0$ ⇔ $G'(x) > 0$ donc G est croissante sur **R**.

Élève 1 : question 3a partie 1. **Élève 4 : question 3a partie 1.**

Ces deux classes (ou profils) ayant été identifiés chez les élèves, nous avons essayé de retrouver des caractéristiques de ces classes chez les étudiants de L1. Ici, les difficultés liées aux changements de perspectives pertinentes ou nécessaires pour résoudre les questions concernent les questions 2 et 4.

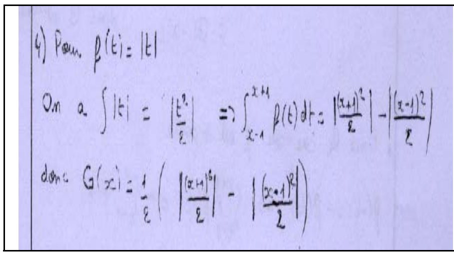
Chez beaucoup d'étudiants de L1, les propriétés globales, dans la question 2 en particulier, sont traduites sans quantificateurs. Ceci entraîne un amalgame entre les différentes perspectives qui sont masquées par des procédures algébriques. Les écritures ne peuvent jamais être interprétées quand c'est nécessaire. Il s'en suit chez des étudiants une confusion entre les variables et une non distinction des rôles différents que chacun d'entre elle tient : ponctuel pour le x et global pour le t, comme dans les deux exemples ci-dessous :

	
Dans le cas où *f* est paire : $f(t) = f(-t)$ donc $\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt =$ $\int_{x-1}^{x+1} f(-t)dt$ $\Leftrightarrow$ ½ $\int_{x-1}^{x+1} f(t)\, dt =$ ½ $\int_{x-1}^{x+1} f(-t)\, dt$ donc $G(x)=$ ½ $[F(x+1) - F(x-1)] =$ ½ $[F(-(x+1)) - F(-(x-1))]$ = ½ $[F(-x-1) – F(-x+1)] = G(-x)$ donc *G* est aussi paire	Si *f* paire alors $f(t) = f(-t)$ $G(-x) =$ Si f impaire alors $f(-t)=-f(t)$ $G(-x)=$ ½ $\int_{x-1}^{x+1} f(-t)\, dt$ = ½ $\int_{x-1}^{x+1} -f(t)\, dt =$ - ½ $\int_{x-1}^{x+1} f(t)\, dt$ $G(-x) = - G(x)$

Exemples de réponses à la question 2.

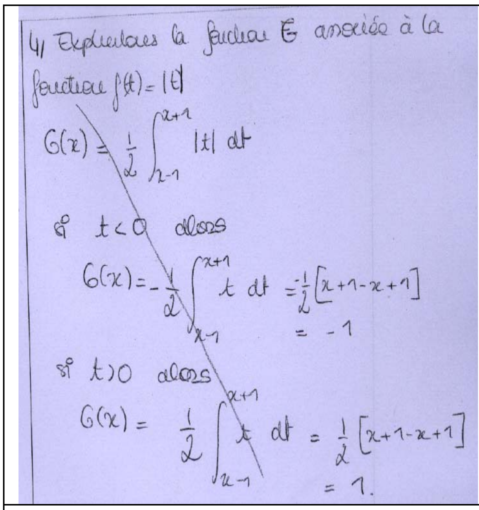
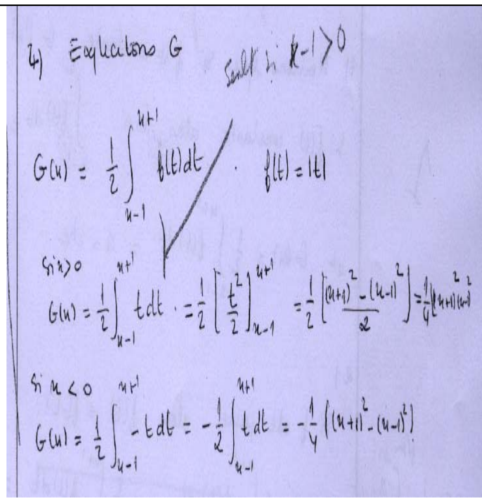
D'un autre côté, il y a des copies où la mise en perspective globale est mieux assurée, même implicitement, lorsqu'elle est pertinente. Les quantificateurs sont présents pour traduire les propriétés globales, en particulier ici lorsqu'il s'agit d'intégrer une relation d'égalité. Cela ne permet pas pour autant à ces étudiants de réussir les questions mais des arguments globaux sont mentionnés : « *c'est la même partie qu'il faut intégrer* » ou « *si deux fonctions sont égales, leurs primitives sont égales* ».

Concernant la question 4), cette distinction se retrouve à nouveau. Pour une partie des étudiants, les procédures mobilisées ne relèvent que du domaine de travail F2 comme dans la copie suivante.

	4) Pour $f(t)=\mid t \mid$ On a $\int \mid t\mid = \mid t^2/2\mid =>$ $\int_{x-1}^{x+1} f(t)\, dt = \mid(x+1)^2/2\mid – \mid(x-1)^2/2\mid$ donc $G(x) =$ ½ $[\mid(x+1)^2/2\mid – \mid(x-1)^2/2\mid]$

Exemple de réponse à la question 4.

Chez d'autres étudiants par contre, il y a une prise en compte des cas de figure, même si à nouveau cela ne mène pas aux bonnes solutions.

	
4) Explicitons la fonction G associée à la fonction $f(\|t\|)$ $G(x) = ½ \int_{x-1}^{x+1} \|t\|\, dt$ Si t < 0 alors $G(x) = - ½ \int_{x-1}^{x+1} t\, dt = - ½ [x+1-x+1]$ $= -1$ Si t > 0 alors $G(x) = ½ \int_{x-1}^{x+1} t\, dt = ½ [x+1-x+1]$ $= 1$	4) Explicitons G $G(x) = ½ \int_{x-1}^{x+1} f(t)\, dt,\ f(t) = \|t\|$ Si $x > 0$ $G(x) = ½ \int_{x-1}^{x+1} t\, dt = ½ [t^2/2]_{x-1}^{x+1}$… Si $x < 0$ $G(x) = ½ \int_{x-1}^{x+1} -t\, dt = - ½ [t^2/2]_{x-1}^{x+1}$…

Exemples de réponses à la question 4.

On trouve extrêmement peu de procédures correctes sur l'ensemble des questions et des étudiants de L1, mais une condition nécessaire à la réussite semble bien être que l'étudiant fasse partie du deuxième groupe. Les copies reproduites montrent clairement combien, même en ayant pris conscience de la nécessité de considérer des cas, il est difficile de gérer simultanément la perspective ponctuelle sur G – le calcul de $G(x)$ pour $x < -1$, $-1 \leq x \leq 1$ ou $x > 1$ – et la perspective globale sur la valeur absolue – la considération de $|t|$ pour t dans $[x\text{-}1, x\text{+}1]$ – ou pour dire autrement, les deux variables en jeu, le domaine de variation de t étant défini par rapport à la première variable x. C'est sans aucun doute une difficulté supplémentaire de cette question, qui dépasse les seules considérations sur les perspectives ponctuelle et globale.

5. Conclusions et discussion

A l'issue de notre synthèse de résultats déjà mis en évidence dans de nombreux travaux, nous émettons l'hypothèse que le cadre fonctionnel est réduit à un cadre algébrique chez les élèves de fin de terminale scientifique, avec la manipulation de formules algébriques sans le « relief » que l'enseignement a voulu donner à la notion de fonction dans le domaine de travail F1. Ce cadre algébrique suppose tout de même la possibilité de travailler avec des expressions symboliques, et la possibilité d'envisager un certain degré de généralité, comme dans l'exercice d'intégration présenté ci-dessus. Cependant, il développe chez certains élèves une approche algébrique qui limite leurs possibilités à l'entrée dans l'Analyse.

En effet, les deux perspectives ponctuelle et globale sur les fonctions, qui ne semblent déjà pas suffisamment repérés par les élèves à l'issue de leur travail dans le domaine F1, ne sont plus suffisamment manipulées dans le domaine F2 du fait de l'insuffisance des formules algébriques vis-à-vis de la perspective globale, du faible herbier de fonctions disponibles et de la sous-exploitation des représentations globales (graphique ou tableau de variation) comme outil heuristique[4] de l'activité mathématique. Les propriétés globales de variation sont en outre réduites à des propriétés ponctuelles universelles, grâce aux hypothèses fortes de dérivabilité, ce qui ne favorise pas la nécessité des quantificateurs et nuit également au travail de la perspective globale. Du coup, le manque de disponibilité de cette perspective globale, la non articulation entre les perspectives ponctuelle et globale, associés à la seule disponibilité du registre algébrique au détriment des registres graphiques ou symbolique, constitue sans doute l'un des obstacles majeurs à l'entrée des lycéens et des étudiants dans les exercices d'Analyse, où les mises en perspectives sont souvent pertinentes (sans pour autant parler nécessairement d'exercices mettant en jeu des notions locales).

Ces hypothèses semblent confirmées par les résultats à l'issue de notre exercice d'intégration proposé aux lycéens et étudiants. En cherchant à préciser les conceptions sur les fonctions à l'issue de la terminale scientifique et à l'entrée à l'université, nous pouvons ici dégager deux populations d'élèves et d'étudiants.

Certains étudiants à l'entrée de l'université n'ont plus aucune disponibilité de la richesse qui leur a été enseignée à propos des fonctions. Ils ne raisonnent plus

---

[4] En reprenant Duval (1999), les représentations graphiques sont essentiellement réduites à un rôle iconique : « *Iconic representations refer to a previous perception of represented object [...] whereas visualization consists in grasping directly the whole configuration of relations and in discriminating what is relevant in it* ». De ce fait, la visualisation au sens de Duval peut-être reliée à la perspective globale sur les courbes et à un rôle heuristique de ces représentations. De même qu'adopter la perspective globale est difficile, il n'y a pas toujours visualisation au sens de Duval dès qu'un graphique est utilisé.

qu'algébriquement sans pouvoir se détacher des représentations issues des formules et sans pouvoir adopter la ou les perspectives pertinentes pour les questions en jeu. Hors des situations algébrisées, les fonctions sont considérées au mieux, soit comme des correspondances ponctuelles, soit comme des objets globaux, sans une articulation possible entre les deux perspectives. Les productions de ces étudiants semblent caractérisées par une absence totale des quantificateurs universels pour traduire des propriétés ponctuelles universelles, ce qui peut être associé à la non disponibilité de la perspective globale sur les fonctions. Cette population d'élèves ou d'étudiants est sûrement à mettre en relation avec la conception algébrique – graphique de Balacheff et Gaudin (2002). Elle se retrouve aussi parmi les nombreux étudiants qui n'ont pu raisonner ni ponctuellement ni globalement dans les questions de limites non algébrisées du questionnaire de la CI2U. Ce sont aussi les étudiants qui ont une approche algébrique[5] du concept de fonction au sens de Monoyiou et Gagatsis (2010).

Une deuxième population d'étudiants est par contre capable de dépasser l'approche algébrique et notamment d'adopter, dans certaines situations à mieux circonscrire, la perspective globale sur les représentations manipulées (symboliques, graphiques mais aussi algébriques). Ce sont ici les étudiants qui ont une approche coordonnée du concept de fonctions au sens de Monoyiou et Gagatsis (2010), étant capables d'adopter une perspective globale sur des formules algébriques en référence à la représentation globale graphique. Ces étudiants peuvent notamment introduire plus spontanément des quantificateurs universels (sous leur forme symbolique ou non) pour traduire que certaines propriétés utilisées sont globales ou même ponctuelles universelles. Ces élèves sont sûrement plus proches de la conception courbe - algébrique de Balacheff. Cette population se rapproche également sans doute des élèves dont Robert (1982, 1983) met en évidence qu'ils disposent d'une conception statique de la notion locale de limite, favorable à une conceptualisation correcte de la définition. Il faut enfin rapprocher ce résultat du fait que les étudiants du questionnaire de la CI2U qui ont pu raisonner d'un point de vue global pour les calculs de limites sont ceux qui statistiquement avaient eu une meilleure réussite au baccalauréat.

Ces résultats sont à affiner mais considérant au final que l'adoption de la perspective globale est une nécessité pour aborder le travail local, avec toutes ses contraintes, nous concluons que l'approche algébrique exclusive fait obstacle à l'entrée dans le champ de l'Analyse et notamment à la conceptualisation des notions locales sur les fonctions, travaillées explicitement dès le début de l'université. Un facteur prédictif de succès des étudiants à l'entrée à l'université est ainsi qu'ils puissent dépasser l'approche algébrique, qu'ils puissent avoir une

[5] Dire « conception algébrique » nous semble trop fort étant donné les limites de notre étude et ce que sous-tend le terme de conceptions.

approche coordonnée des différentes représentations des fonctions et qu'ils puissent adopter les perspectives globale ou locale - même dans des manipulations algébriques : par exemple, détecter les termes prédominants ou négligeables dans des calculs de limites « complexes », ce que sait faire l'expert mathématicien.

Ce travail invite à étendre le domaine de travail F1 jusqu'à la terminale et à l'imbriquer avec le domaine F2 pour mieux préparer le domaine F3. Cela signifie d'une part enrichir l'herbier de fonctions disponible dans le domaine F1 afin que les élèves puissent se représenter globalement les fonctions en jeu à travers des manipulations de formules. Cela signifie aussi ancrer dans le domaine F1 les problèmes de calculs de limites, de calculs de dérivée et d'étude de variations qui relèvent actuellement uniquement du domaine F2 et ne sont plus connectées à des situations concrètes pour les élèves. Enfin, cela signifie travailler dès le domaine F1 des problèmes locaux afin de pouvoir envisager au sein de ce domaine de travail F1 à la fois des questions ponctuelles, des questions globales et des questions relevant de l'aspect local des fonctions. En ce sens, le travail avec les technologies que nous menons par ailleurs est une opportunité pour enrichir le domaine de travail F1 dans ces directions, par exemple en reliant des tâches relevant du travail algébrique à des représentations dynamiques géométriques ou graphiques des fonctions en jeu.

Le travail de recherche reste lui aussi à poursuivre, pour l'étendre à tout le champ de l'Analyse et notamment relier les trois domaines de travail sur les fonctions, les multiples niveaux de conceptualisation caractérisés de diverses manières, à des espaces de travail en Analyse (ETA). Par exemple, les artefacts des ETA seraient à relier aux outils technologiques pour l'Analyse mais tout ce travail théorique reste à faire.

Bibliographie

ARTIGUE, M. (1991), Analysis, Dans D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*, 167–198, Dordrecht: Kluwer Academic Press.

ARTIGUE, M. (1993), Enseignement de l'analyse et fonctions de références, *Repères IREM*, **11**, 115–139.

ARTIGUE, M., BATANERO, C., KENT, P. (2007), Mathematics thinking and learning at post-secondary level. Dans F. Lester (Eds.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 1011–1049, Greenwich, Connecticut: Information Age Publishing, Inc.

BACHELARD, G. (1938), *La formation de l'esprit scientifique*, Paris: Vrin.

BALACHEFF, N., GAUDIN, N. (2002), *Students conceptions: an introduction to a formal characterization*, Cahier Leibniz, **65**, Publication de l'Université Joseph Fourrier. http://halshs.archives-ouvertes.fr/hal-00190425_v1/.

BLOCH, I. (2002), Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée, *Petit x*, **58**, 25–46.

BLOCH, I. (2003), Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove, *Educational Studies in Mathematics*, **52**, 3–28.

BLOCH, I. (2005), The teaching of calculus at the transition between upper secondary school and the university: factors of rupture. Communication to the Topic Study Group 12, Dans M. Niss (Eds.) *Actes de ICME10*, Copenhagen. Copenhagen: Roskilde University.

BRIDOUX, S. (2011), *Enseignement des premières notions de topologie à l'université : une étude de cas*, Thèse de Doctorat. Université Paris Diderot. Paris.

BROUSSEAU, G. (1997), *Theory of didactical situations in mathematics*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

CASTELA, C. (1995), Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **15 (1)**, 7–48.

CHORLAY, R. (2011), Local-global: the first twenty years, *Archives for history for exact sciences*, **65**, 1–66.

COMIN, E. (2005), Variables et fonctions, du collège au lycée, Méprise didactique ou quiproquo inter institutionnel, *Petit x*, **67**, 33–61.

COPPÉ, S., DORIER, J.-L., YAVUZ, I. (2007), De l'usage des tableaux de valeurs et des tableaux de variations dans l'enseignement de la notion de fonction en France en seconde, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, **27 (2)**, 151–186.

DOUADY, R. (1986), Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7 (2)**, 5–31.

DUBINSKY, E. (1991), Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. Dans D. Tall (Eds.) *Advanced mathematical* thinking, 95–123, Dordrecht: Kluwer Academic Press.

DUVAL, R. (1991), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **5**, 37–65.

DUVAL, R. (1993), *Graphiques et équations: l'articulation de deux registres*, Caen: C.E.R.S.E.

DUVAL, R. (1999), Representation, vision and visualisation: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning, Dans F. Hitt et M. Santos (Eds.) *Actes de 21st North American PME Conference*, **1**, 3–26.

ELIA, I., et al. (2008), Exploring different aspects of the understanding of function: Toward a four-facet model, *Canadian Journal of Sciences, Mathematics and Technology*, **8 (1)**, 49–69.

GAGATSIS, A., et *al.* (2010), Tracing 10th and 11th graders approaches in function tasks, *Acta Didactica Universitatis Comenianae - Mathematics*, **10**, 51–67.

GRENIER-BOLEY, N. (2009), *Un exemple d'étude de gestion des déroulements en travaux dirigés de Mathématiques à l'Université*, Cahier de Didirem, **59**, Publication de IREM de Paris 7.

GUEUDET, G. (2008), Investigating the secondary-tertiary transition, *Educational Studies in Mathematics*, **67**, 237–254.

KUZNIAK, A. (2010), L'espace de travail mathématique et ses genèses, Dans *Actes du Deuxième Symposium Franco-Chypriote "Mathematical Work Space*", 9–18, Paris.

LEPLAT, J. (1997), *Contribution à la psychologie ergonomique*, Paris: PUF.

MASCHIETTO, M. (2001), Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d'analyse à l'université, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, **21 (1-2)**, 123–156.

MASCHIETTO, M. (2008), Graphic Calculators and Micro Straightness: Analysis of a Didactic Engineering, *International Journal of Computer for Mathematics Learning*, **13**, 207–230.

MONOYIOU, A., GAGATSIS, A. (2010), Pre-service teachers' approaches in function problem solving: A comparative study between Cyprus and Italy, *Quaderni di Ricerca in Didattica Mathematica*, **1-2**, 9–23.

PIAGET, J., GARCIA, R. (1989), *Psychogenesis and the history of science*, New-York: Colombia University Press.

PRASLON, F. (2000), *Continuités et ruptures dans la transition Terminale S/DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*, Thèse de Doctorat. Université Paris Diderot. Paris.

RAFTOPOULOS, A., PORTIDES, D. (2010), Le concept de fonction et sa représentation spaciale, Dans *Actes du Deuxième Symposium Franco-Chypriote "Mathematical Work Space"*, 201–214, Paris.

ROBERT, A. (1982), *Divers travaux de mathématiques et l'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur*, Thèse d'Etat. Université Paris 7.

ROBERT, A. (1983), L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG, *Bulletin de l'APMEP*, **340**, 431–449.

ROBERT, A. (1998), Outil d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **18 (2)**, 139–190.

ROBERT, A. (2003), Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation, *Petit x*, 63, 7–29.

ROBERT, A. (2008), La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques, Dans F. Vandebrouck (Eds.) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des* enseignants, 59–68, Toulouse: Octarès Edition.

ROBERT, A. (2011), Des recherches de type "ingénierie", Dans C. Margolinas, et *al.* (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques*, Grenoble: La pensée sauvage.

ROBERT, A., BOSCHET, F. (1984), *Acquisition des premiers concepts d'analyse sur R dans une section ordinaire de DEUG première année*, Cahier de didactique des mathématiques, **7**, Publication de IREM de Paris 7.

ROGALSKI, J. (1984), Représentations graphiques dans l'enseignement: concepts et méthodes d'analyse appliqués au graphe de fonction, Dans A. Giordan et J.-L. Martinand (Eds.) *Signes et discours dans l'éducation et la vulgarisation* *scientifiques. Sixième journées internationales sur l'éducation scientifique et technique*, 379–388, Chamonix.

ROGALSKI, J. (2008), Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique, Dans F. Vandebrouck (Eds.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, 23–30, Toulouses: Octarès Editions.

ROGALSKI, M. (2008), Les rapports entre local et global: mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques, Dans L. Viennot (Eds.) *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* 61–87, Paris: PUF.

SCHNEIDER, M. (1991), Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente, *Repère IREM*, **5**, 65–82.

SFARD, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, **22**, 1–36.

SIERPINSKA, A. (1992), On understanding the notion of function, Dans G. Harel et E. Dubinsky (Eds.) *The Concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, Mathematical Association of America Notes, **25**.

TALL, D. (1996), Functions and calculus, Dans A. J. Bishop, et al. (Eds.) *International handbook of mathematics education*, 289–325, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

TALL, D. (2006), A theory of mathematical growth through embodiment, symbolism and proof, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **11**, 195–215.

TALL, D., VINNER, S. (1981), Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, **12**, 151–169.

VANDEBROUCK, F. (2008a), Functions at the transition between French upper secondary school and University. Communication de la commission Inter Irem université (CI2U), Dans *Actes de ICMI*, Monterey, Mexico.

VANDEBROUCK, F. (Eds) (2008b), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouses: Octarès.

VERGNAUD, G. (1991), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **10 (2-3)**, 133–169.

VERGNAUD, G. (1996), Au fond de l'apprentissage, la conceptualisation, Dans R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian (Eds.), *Actes de la VIIIème école d'été de didactique des mathématiques*, 174–185, Clermont-Ferrand: IREM.

VERGNAUD, G. (1999/2002), On n'a jamais fini de relire Vygotski et Piaget, Dans Y. Clot (Ed.), *Avec Vygotski,* 55–68, Paris: La dispute.

VINNER, S. (1983), Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Education in Science and Technology*, **14 (3)**, 293–305.

VIVIER, L. (2010), Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **15**, 173–199.

Fabrice VANDEBROUCK
Laboratoire de Didactique André Revuz
Université Paris-Diderot
Paris, France
vandebro@math.jussieu.fr

INÉS Mª GÓMEZ-CHACÓN, ALAIN KUZNIAK

LES ESPACES DE TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE DE FUTURS PROFESSEURS EN CONTEXTE DE CONNAISSANCES TECHNOLOGIQUES ET PROFESSIONNELLES

Abstract. Prospective Teachers' Geometric Work Space within Technological and Professional Knowledge. This article is focused on the study of the geometric work involved in the initial teacher training in a learning environment based on the use of GeoGebra dynamic software. The intention is to identify how three figural, instrumental and discursive reasoning genesis are articulated in the Geometric Work Space and to study the role which GeoGebra plays in the construction of this geometric space. In addition, we explore the influence of software in the step from Geometry I to Geometry II in the performance of the student as viewed by the teacher.

Résumé. Cet article est centré sur l'étude du travail géométrique des professeurs en formation initiale lorsqu'ils utilisent un logiciel de géométrie dynamique (GeoGebra) dans le cadre de leur formation. Il s'agit d'identifier comment s'articulent les genèses figurale, instrumentale et discursive de l'espace de travail géométrique et de voir le rôle éventuel et spécifique de GeoGebra dans la construction de cet espace de travail géométrique. De plus, l'influence sur les étudiants du logiciel pour assurer le passage de la géométrie I à la Géométrie II est explorée.

Mots-clés. Géométrie, Espace de travail géométrique, GeoGebra, Formation initiale de professeurs, connaissances professionnelles, connaissances technologiques.

1. Conditions de l'expérimentation et questions initiales de la recherche

La recherche présentée ici fait partie d'un projet plus vaste, le projet ESCEMMAT (scénario Multimédia pour l'apprentissage des mathématiques). Ce projet, développé en 2007-2009 à l'Universidad Complutense de Madrid, porte sur la formation initiale des enseignants de mathématiques (Gómez-Chacón, 2008 ; Gómez-Chacón & Joglar, 2010). Il comprend la création et la mise en application de scénarios multimédia d'apprentissage conçus pour que les étudiants (futurs professeurs de mathématiques de Lycée) acquièrent ou perfectionnent les compétences nécessaires pour enseigner les mathématiques en utilisant les nouvelles technologies dans les classes. L'accent est mis surtout sur le fait d'apprendre à enseigner les mathématiques en utilisant des programmes de calcul symbolique (comme Derive) et de géométrie interactive (comme GeoGebra) dans les classes de Lycée. L'objectif de ces scénarios est double, d'une part il s'agit de détecter et de développer les compétences des étudiants de la licence de Mathématique en tant que futurs professeurs de mathématiques et d'autre part

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 16, p. 187 – 216.

d'approfondir le *savoir stratégique* vu comme un ensemble de connaissances sur les variables permettant le contrôle des situations d'enseignement. Dans ce cadre les étudiants ont besoin de comprendre comment l'usage des instruments peut influencer l'activité cognitive et mathématique de leur utilisateur.

Notre recherche concerne un groupe de trente étudiants de licence de mathématiques, futurs enseignants, en 2007-2008 en Espagne. A l'université, ces étudiants ont suivi des cours de mathématiques avancées dans différents domaines de la géométrie (Géométrie différentielle et riemannienne) mais ils ont peu travaillé les connaissances mathématiques scolaires qui se réfèrent à la géométrie classique qu'ils devront ensuite enseigner et de ce fait la pratique de cette géométrie leur est devenue étrangère. En outre, s'ils sont habitués à résoudre des problèmes avec l'aide de différents logiciels, ils ont peu de connaissances didactiques sur l'utilisation en classe de ces technologies informatiques.

Dans le cadre de cet article, nous étudierons plus particulièrement les réactions de ces étudiants à un problème de construction en Géométrie. Nous appuierons notamment notre analyse sur notions d'Espace de Travail Géométrique (ETG) et de paradigmes géométriques (Houdement et Kuzniak, 1998, 2006 ; Kuzniak, 2010, 2011 et annexe 1).

Jusqu'à présent, il y a eu peu d'études (Coutat, 2006 ; Mithalal, 2010) sur les apprentissages mathématiques en contexte technologique qui ont utilisé ce cadre théorique comme cadre interprétatif du comportement des étudiants engagés dans un processus de raisonnement avec une genèse instrumentale. En France, l'approche instrumentale (Artigue, 2002 ; Lagrange, 2009 ; Trouche, 2005) est privilégiée dès qu'il s'agit d'étudier une tâche donnée à des élèves en contexte technologique. Les deux perspectives, celle du travail géométrique et celle de l'approche instrumentale sont pourtant complémentaires pour comprendre le développement du travail géométrique. L'approche instrumentale permet de mettre à jour les difficultés spécifiques liées à l'usage des technologies tandis que celle des ETG est plus sensible à la construction épistémologique et cognitive du travail spécifique en géométrie.

Le cadre des Espaces de Travail Géométrique (ETG) se propose de définir les conditions qui permettent à un individu (étudiants, professeur, chercheur,...) d'effectuer son travail de géomètre. Ce travail suppose une réorganisation spécifique des deux plans constitutifs de l'ETG, le plan épistémologique et le plan cognitif, ainsi que la mise en relation de chacun de ces deux plans (Kuzniak, 2010, 2011). Pour décrire cette mise en réseau, nous avons introduit un certain nombre de genèses qui établissent les connexions entre les composantes du plan épistémologique et du plan cognitif.

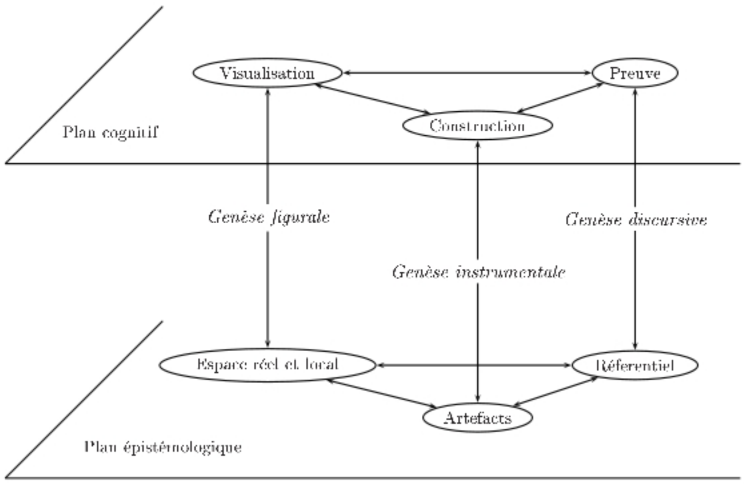


Figure 1 : L'espace de travail géométrique et ses genèses (Kuzniak, 2010).

De manière plus précise, les trois genèses étudiées portent sur la figure, les artefacts et le discours de preuve.

- La *Genèse figurale* précise le travail sur les objets tangibles du point de vue de la visualisation qui structure les intuitions premières de l'espace ;
- la *Genèse instrumentale* dépend des taches mettant en jeu les processus d'organisation et de construction des configurations principalement dus à l'usage des artefacts ;
- la *Genèse discursive* du raisonnement s'appuie sur les propriétés et sur les formes de raisonnement déductif en privilégiant le registre discursif. Elle fonctionne en étroite liaison avec le processus de preuve.

La notion de genèse qui apparaît ici ne se réfère pas seulement à la génération de schèmes opératoires, elle repose aussi sur une perspective sémiotique (sémiose) en rapport avec les figures et le raisonnement. D'autre part, les relations indiquées par les flèches ne doivent pas être perçues comme établissant une bijection entre deux composantes déterminées mais plutôt comme insistant sur certaines relations qui participent de la genèse globale de l'ETG.

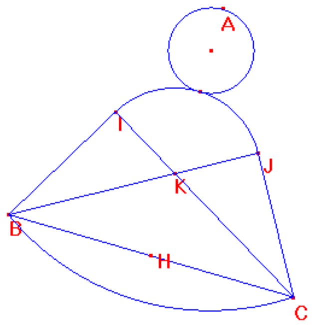
Dans cet article, nous regarderons particulièrement la place que joue un environnement technologique sur le développement et la mise en œuvre des compétences en géométrie de ces étudiant-professeurs. Pour cela, nous observerons comment s'articulent les genèses figurale, instrumentale et discursive de l'espace de travail géométrique personnel des étudiants placés dans une situation de formation demandant l'usage d'un logiciel de géométrie dynamique. Nous préciserons l'influence sur les étudiants de l'emploi du logiciel GeoGebra pour assurer le passage de la Géométrie I à la Géométrie II en nous intéressant aux usages des propriétés et des artefacts.

Dans la perspective d'accompagner les étudiants dans la construction de leur savoir stratégique sur un enseignement utilisant les technologies, nous dégagerons aussi les difficultés qu'ils auront pu rencontrer dans cette situation de formation et qui fragilisent leur ETG personnel.

2. Présentation de la situation de formation et de la méthodologie de recherche utilisée

Pour étudier ces questions, nous avons proposé aux étudiants une situation didactique « La Campana » (la cloche) adaptée à partir d'un article d'Houdement et Kuzniak (1999). Il s'agit d'une activité de construction qui permet, comme nous le verrons, d'articuler la Géométrie I et la Géométrie II. Initialement, le problème était proposé dans un environnement papier-crayon et nous l'avons transformé pour le poser dans un environnement technologique avec l'usage du logiciel Geogebra.

La forme originale du problème était la suivante : On souhaite agrandir la figure (ABCH) en (A'B'C'H') de telle façon que A'H' mesure le double de AB.



1. Effectuer cet agrandissement avec la règle non graduée et le compas en laissant visible les traits de construction.
2. Les élèves affirment que l'aire de la figure obtenue est quatre fois plus grande que celle de la figure initiale. Ont-ils raison ? Justifier votre réponse.
3. Si ce n'est pas vrai, donnez le rapport entre les deux aires.

La réponse à la première question ne peut se faire sans une analyse préalable du dessin pour comprendre sa construction. L'énoncé ne donnait aucune explicitation des propriétés géométriques nécessaires pour assurer la construction de la figure et certaines sont loin d'être évidentes comme la nature du triangle ABC ou celle du cercle support de l'arc BC. La reconnaissance du caractère équilatéral du triangle ABC est même cruciale pour la réalisation correcte de la figure. Pour avancer dans le problème, l'étudiant doit formuler des propriétés suggérées par une première analyse de type figural et perceptif. Dans le même temps, il peut les valider sous des formes qui peuvent être variées : en utilisant un instrument de dessin ou en esquissant une démonstration basée sur des propriétés. De ce fait, la tâche est très dépendante du point de vue de l'étudiant et ainsi l'analyse des procédures de construction qu'il utilisera sera révélatrice de son ETG personnel en permettant de voir l'influence relative des différentes genèses à l'œuvre dans son travail.

Nous avons modifié la situation initiale en demandant cette fois une résolution utilisant un environnement de géométrie dynamique ce qui nous a conduit à changer l'énoncé dont voici la nouvelle forme.

Agrandir la cloche de façon à ce que A'H' mesure le double de AB.
Décrivez votre protocole de construction de manière détaillée. Voici quelques pistes qui peuvent vous aider à dessiner la cloche.

1. Observer que A est sur la droite BI et sur la droite CJ.
2. H est le milieu de BC.
3. Les angles IBC et JCB mesurent 60°.
4. Les angles BIC et CJB sont des angles droits.
5. L'arc BC appartient au cercle de centre A.

La cloche est dessinée sur le papier fourni aux étudiants et ceux-ci doivent commencer par la construire sur l'écran avant le l'agrandir. Ils sont libres d'utiliser un environnement papier-crayon pour avancer dans la résolution du problème.

Nous avons introduit des indications susceptibles d'aider les étudiants dans leur perception de la figure et dans leur processus de construction et aussi de limiter leurs possibilités d'interprétation. Dans l'environnement papier-crayon du problème initial, les étudiants pouvaient légitimement utiliser les outils de cet environnement pour valider leurs hypothèses et donc s'appuyer sur l'équerre, la règle ou le rapporteur pour faire la construction, ce qui plaçait de fait l'activité dans le cadre de la Géométrie I.

En donnant des propriétés de la figure, nous éliminons certains de ces instruments par ailleurs interdits dans l'agrandissement. Un autre choix aurait été possible en laissant vivre simultanément les deux types d'artefacts, logiciels et instruments de dessins. Cependant, en procédant ainsi nous souhaitions obliger les étudiants à montrer leurs connaissances instrumentales de l'outil informatique avec lequel ils devront réaliser directement des expériences. Ils devaient notamment identifier les propriétés géométriques invariantes avec le mode de déplacement de GeoGebra.

La présence des indications était aussi destinée à faire ressortir les propriétés mathématiques de la figure. Il s'agit d'un point-clé pour le passage de la Géométrie I à la Géométrie II. D'autre part, les étudiants doivent représenter le dessin agrandi sur le même écran que le dessin initial. De ce fait, ils sont incités à voir une dépendance entre les deux dessins dans le contexte du logiciel. Cette consigne change substantiellement la nature de la tâche. Il sera important de voir l'influence de ce changement de consigne sur le passage de la Géométrie I à la Géométrie II et l'impact sur les interactions dans l'ETG. Il faut noter que nous n'avons pas imposé que la dépendance entre la figure initiale et la figure finale soit invariante dans toute modification de la figure initiale ce qui aurait rendu le problème bien plus complexe tant au niveau mathématique que technologique.

La demande d'un agrandissement peut conduire certains étudiants à s'appuyer sur des théorèmes comme ceux de Pythagore ou de Thalès pour guider leur construction et introduire des éléments de Géométrie II dans leur solution. Une analyse a priori des stratégies possibles pour agrandir la figure dans l'environnement papier-crayon donne trois grandes méthodes de résolution :

(i) les stratégies numériques qui consistent à calculer la mesure du côté B'C' à partir de celle de BC puis à reproduire la construction de la cloche à partir du segment [B'C'], en utilisant des propriétés géométriques lues sur le dessin ;

(ii) les stratégies géométriques, qui consistent à construire le segment [A'H'] tel que A'H'=2 AB (par exemple en construisant H' le symétrique de A par rapport à B) puis à construire la cloche à partir du segment A'H' en utilisant des propriétés géométriques lues également sur le dessin ;

(iii) les stratégies globales qui consistent à appliquer une homothétie à la cloche initiale avec un rapport 2 AB/AH.

Le basculement vers la Géométrie II était très explicite dans la question 3 de l'énoncé initial qui demandait le rapport d'agrandissement. Cette demande n'était pas faite ici mais l'utilisation de l'ordinateur permet d'observer les façons d'obtenir le rapport 2 AB/AH. Celles-ci peuvent, là encore, se baser sur une mesure directe sur la figure ou sur une anticipation de ce rapport en faisant apparaître sur la même figure la figure initiale et la figure finale ce qui peut faire apparaître une configuration de Thalès (voir Annexe 2 p. 215). Le rapport peut alors être calculé sur une figure particulière ou bien sur une figure générique. L'étude de l'obtention de ce rapport permettra de confirmer certaines des stratégies utilisées précédemment pour agrandir la figure.

La situation de la « Campana » s'est déroulée en deux sessions. Avant de la proposer, les étudiants avaient reçu trois cours de formation d'une heure et demie sur l'utilisation du logiciel GeoGebra au cours desquels des activités de construction sur les triangles et les polygones leur avaient été proposées.

Lors de la première session, la situation a été donnée sur un papier aux étudiants qui devaient décrire leur manière de résoudre le problème de construction de la cloche initiale : les étapes de la résolution, l'explication de leurs difficultés et les procédures qu'ils avaient utilisées pour résoudre le problème en utilisant le papier-crayon et l'ordinateur. Nous leur avons demandé aussi de décrire leurs blocages éventuels dans la résolution du problème (Annexe 2).

La majorité des étudiants n'a pu faire que la construction de la cloche initiale lors de la première session. La seconde session a donc été consacrée à l'agrandissement de la cloche et à une mise en commun sur les solutions et sur les difficultés rencontrées pendant la résolution du problème. Cette session s'appuyait sur notre analyse des résultats de la première session. Un enregistrement de cette session nous a permis un croisement des données avec les productions des étudiants en prêtant attention aux interactions entre les étudiants et le professeur.

3. Analyse des types de solutions obtenues

Dans cette section, nous présentons une analyse des résultats. Pour cela, nous allons dans un premier temps (§ 3.1.) décrire une typologie des constructions faites par les étudiants pour obtenir la cloche. Puis (§ 3.2.), nous détaillerons les procédures obtenues pour faire l'agrandissement. Pour déterminer l'espace de travail géométrique personnel des étudiants, nous retiendrons d'abord les aspects mathématiques et cognitifs et nous insisterons particulièrement sur la partie instrumentale de la construction essentielle ici, puisque nous souhaitons étudier les comportements des étudiants dans un environnement technologique.

Dans un deuxième temps, nous établirons une relation entre les deux tâches pour déterminer le rôle joué dans le travail géométrique par les différentes genèses dans l'ensemble de l'activité. Cette présentation globale des résultats permettra de mettre en relief les connexions entre les trois genèses (figurale, instrumentale et discursive) dans le développement du travail géométrique (§ 4) ainsi que les difficultés des étudiants (§ 5).

3.1. Typologie des solutions trouvées par les étudiants pour construire la cloche initiale

Nous présentons les solutions pour la construction de la cloche initiale. Nous avons distingué trois types différents que nous désignerons ainsi : « règle et compas », « angles », « polygones réguliers ». Ces procédures permettent de tracer le triangle équilatéral qui, comme nous l'avons noté plus haut, est le support de toute la construction. Les procédures suivies pour compléter la cloche sont ensuite très semblables.

3.1.1. Solutions Règle et Compas (RC)

Ce type de solutions est la transposition avec le logiciel des constructions à la règle et au compas dans un environnement papier-crayon. La démarche est celle que l'on trouve déjà dans Euclide, l'unique différence vient du fait que le logiciel construit les cercles dans leur entier ce qui introduit des éléments parasites et des choix parmi les points d'intersection. Ces choix sont guidés par des considérations spatiales.

Voici le détail de la construction du triangle tel que nous le trouvons dans les productions des étudiants.

1. Créer les points B, C et le segment qui les joint.
2. Tracer le cercle de centre B et de rayon BC puis celui de centre C et de rayon BC. Prendre le point d'intersection « supérieur » des deux cercles, nommé A. On obtient ainsi un triangle équilatéral.
3. Pour trouver les points I et J, on trace les perpendiculaires aux côtés AB, AC passant par les sommets C et B.

Espace de travail géométrique

Paradigmes et aspects mathématiques et cognitifs

Comme nous l'avons indiqué, cette construction s'appuie largement sur les expériences antérieures des étudiants dans l'environnement papier-crayon. Il s'agit naturellement d'une construction qui prend sa place dans la Géométrie I mais il faut noter qu'elle est aussi emblématique de la Géométrie II la plus classique car il s'agit de la première construction justifiée dans les éléments d'Euclide (Livre I, Prop 1). Dans la Géométrie II, la règle non graduée et le compas sont deux outils fondamentaux pour faire comprendre la différence entre construction et constructibilité : il faut montrer que l'objet obtenu à la suite d'une construction remplit bien les caractéristiques attendues.

Sans la seconde phase de l'activité consacrée à l'agrandissement de la figure, il est difficile de caractériser le travail des étudiants car la technique utilisée pour cette construction est tellement familière qu'il s'agit d'une technique devenue naturelle. Notons cependant qu'elle oblige à une déconstruction dimensionnelle puisque les étudiants doivent observer les côtés, les sommets du triangle. Cette décomposition favorise le passage dans le domaine des propriétés. Il sera donc important d'observer le comportement des étudiants dans la deuxième question pour savoir s'ils se sont situés en Géométrie I ou Géométrie II.

Dimension instrumentale

Dans le logiciel utilisé, les procédures de construction sont congruentes (au sens de Duval, 2005) à celles utilisées dans le l'environnement papier-crayon. Grâce aux séances préparatoires sur l'usage du logiciel, les étudiants n'ont eu aucun problème d'instrumentation avec cette procédure.

3.1.2. Solutions Angle (AN)

Dans cette solution, la piste 3, qui donne une indication sur la mesure des angles, est utilisée. On peut décrire ainsi la construction.

1. Créer les points B, C et le segment qui les joint.
2. Utiliser la commande angle de GeoGebra. « Angle avec une mesure ». Il faut désigner d'abord le point B puis le point C en donnant la valeur de l'angle qui dans notre cas est 60 degrés. Il est ainsi possible de créer un point que l'on nomme avec le programme A. A partir de cela, on obtient un triangle équilatéral.
3. Pour trouver les point I et J, la majorité des étudiants utilisent la même méthode que dans le premier type.

Une variante a été utilisée par quelques étudiants qui ont introduit la rotation autour d'un point avec un angle donné. Le passage des étudiants à cette variante peut sans doute s'expliquer par la très grande proximité sémantique qui existe dans GeoGebra entre les commandes « rotation (objet-centre) » et « angle de mesure donnée ». Cette deuxième commande construit en fait un point A tel que mes(BCA)=60° et CA = CB avec la marque de l'angle dont un des côtés n'est pas construit. Il s'agit donc en fait de l'image de B par la rotation de centre C et d'angle 60°.

Espace de travail géométrique

Paradigmes et aspects mathématiques et cognitifs

Cette construction s'appuie sur la perception globale de la figure et sur quelques propriétés des angles égaux. Elle est équivalente à l'usage d'un rapporteur dans l'environnement “papier-crayon”, mais elle nécessite une adaptation dans l'environnement du logiciel. Il faut noter que lors de l'agrandissement de la figure, l'invariant qui va servir est justement l'angle ce qui laisse supposer peu de changement dans les procédures utilisées par la suite. Il y a certes une attention aux propriétés mais celles-ci semblent être mise au service de la construction sans nécessité d'explicitation. Le processus privilégié semble bien être celui de la construction.

Dimension instrumentale

Cette fois, la construction proposée dans GeoGebra n'est pas congruente à celle existant dans l'environnement papier-crayon car il n'existe pas de rapporteur dans ce logiciel. Les étudiants doivent donc avoir une meilleure maîtrise des outils dont dispose le logiciel. Ils peuvent utiliser deux outils prédéfinis dans le logiciel pour construire l'angle et le triangle soit la commande “angle de mesure donnée” soit “rotation d'un objet autour d'un point, angle donné”. La première est la plus proche de la construction usuelle avec le rapporteur, la seconde suppose une connaissance des transformations géométriques qui dans le cadre scolaire sont généralement travaillées en Géométrie II. Cependant, comme nous l'avons signalé, ces deux commandes ont une proximité sémantique dans GeoGebra.

3.1.3. Solutions « Polygone régulier » (PR)

Cette dernière procédure n'est possible que dans un environnement digital car elle utilise la commande « Polygone régulier » qui permet de tracer un triangle équilatéral en une seule opération.

1. Créer les points B, C et le segment qui les joint.
2. Utiliser la commande « Polygone régulier » qui nécessite d'introduire le nombre de côtés et de tracer le premier côté.
3. Pour trouver les points I, J, utiliser la commande milieu d'un côté.

<u>Espace de travail géométrique</u>

Paradigmes et aspects mathématiques et cognitifs

Une première analyse de la cloche par les étudiants leur a permis de constater que le triangle équilatéral sert d'appui à la construction de la cloche. La construction utilisée privilégie une approche 2D de la figure avec des modifications méréologiques qui portent sur la réorganisation de la figure globale en sous-figures de même dimension. D'autre part, elle ne peut s'adapter à la construction de l'agrandissement, les étudiants devront donc changer de stratégie et il sera intéressant d'observer s'ils utilisent explicitement des propriétés et s'ils restent dans le domaine instrumental ou s'ils font un détour par l'environnement papier-crayon.

Dimension instrumentale

La solution est basée sur la possibilité qu'offre le logiciel de construire directement un triangle équilatéral vu comme un polygone régulier à trois côtés. Pour trouver la commande adaptée, ces étudiants ont parcouru les menus de GeoGebra faisant preuve de leur capacité d'exploration (étudiant bricoleur au sens de Trouche, 2000). Il est donc possible que la capacité de ces étudiants à explorer le logiciel les conduise à rester dans un ETG de la Géométrie I, où sont privilégiées les deux genèses liées aux artefacts et la visualisation globale.

3.2. Typologie des solutions pour agrandir la cloche initiale

Cette fois, quatre types de solutions sont apparus : Thalès (TH), Pythagore (PI), Angles (An), Homothétie (H).

3.2.1. Solution avec le théorème de Thalès (TH)

Les étudiants qui entrent dans cette catégorie ont choisi le théorème de Thalès pour obtenir la distance B'C'. Ensuite, ils ont suivi la même méthode pour construire la cloche agrandie que celle qu'ils avaient utilisée pour tracer la cloche initiale. Leur raisonnement s'appuie sur la figure classique qui permet de voir le théorème de Thalès dans le cas du triangle (voir p. 215). Cela leur permet d'obtenir la formule générale suivante : B'C' = 4AB.BH/AH.

Il faut noter que certains utilisent le papier et d'autres raisonnent directement sur le logiciel.

Espace de travail géométrique

Paradigmes et aspects mathématiques et cognitifs

La construction est basée sur un théorème classique et elle nécessite l'usage de propriétés déduites à partir de la perception de la figure vue comme un objet de l'espace réel. Cette abstraction à partir du réel est censée privilégier un ETG orienté par la Géométrie II comme on le voit clairement lorsque la solution est trouvée dans un environnement papier-crayon qui est un support heuristique car le tracé utilisé dans ce cas ne respecte pas le rapport de proportion. Parmi les élèves qui ont utilisé cette procédure, certains l'ont fait directement avec GeoGebra en respectant les proportions grâce à l'usage de la commande « Segment créé par un point et une longueur (Étudiant20) » ou bien en utilisant la commande « distance» (Étudiant19 et Étudiant17). Dans ce cas, le travail reste orienté par la Géométrie I.

Dimension instrumentale

Comme nous l'avons indiqué, une partie des étudiants se pose le problème sur la feuille de papier et change d'artefact. Au moment d'introduire les distances dans GeoGebra, les étudiants ne savaient pas comment traiter les longueurs des côtés ce qui nécessita une mise au point dans le cours sur cette question avec un travail spécifique d'instrumentation utilisable ensuite pour l'agrandissement de la figure. Dans ce cas, le blocage qui est apparu a fait jouer à l'artefact un rôle d'obstacle dans le passage à la Géométrie II.

3.2.2. Solution avec le théorème de Pythagore (PI)

Il s'agit d'appliquer le théorème de Pythagore pour trouver également la distance B'C', le reste de la construction suivant les mêmes règles que précédemment.

Cette fois, le raisonnement est interne au triangle A'B'C' sans nécessité de modification de la figure comme dans une configuration de Thalès. Le résultat obtenu relie B'C' à AB.

$$\textit{Comme } \text{A'H'} = 2\text{AB}, \textit{ alors } \text{B'C'} = \frac{4}{\sqrt{3}}\ \text{AB}.$$

Espace de travail géométrique

Paradigmes et aspects mathématiques et cognitifs

Comme dans le cas précédent, la construction est basée sur un théorème classique, celui de Pythagore. Pour pouvoir appliquer le théorème, il est ici nécessaire de faire un important travail de visualisation sur la figure pour notamment observer les hauteurs et les milieux des côtés. Il faut aussi s'apercevoir que la figure n'est pas un cas particulier et qu'elle peut servir d'appui pour la construction. Cette situation permet donc bien de travailler sur un passage de la Géométrie I à la Géométrie II et cette fois le logiciel ne permet pas un détour par la mesure ou le calcul numérique. D'une certaine manière, il force un changement de stratégie chez les étudiants.

Dimension instrumentale

Dans cette solution basée sur le théorème de Pythagore, les étudiants sont confrontés à des calculs algébriques, qu'ils raisonnent en papier-crayon ou directement sur l'ordinateur. Le calcul pouvait être évité dans le cas de l'application du théorème de Thalès qui rendait possible une construction sans connaître les valeurs, mais ce n'est pas le cas ici.

3.2.3. Solutions Angles (An)

Cette fois, la construction s'appuie sur celle d'un triangle rectangle en connaissant sa hauteur qui doit être 2AB. Voici la solution la plus utilisée par les étudiants :

1. Dessin de la hauteur AH' avec la distance 2AB, en utilisant la commande « segment créé par un point et une longueur ».
2. Tracer deux droites à partir de A et qui forment un angle de 30º avec la hauteur en utilisant la commande « angle de mesure donnée ».
3. À partir de H', on trace une perpendiculaire à la hauteur et les points B' et C' sont les points d'intersection de cette perpendiculaire et des droites trouvées en 2. De cette façon, on obtient le triangle.

Espace de travail géométrique

Paradigmes et aspects mathématiques et cognitifs

Pour faire cette construction, les étudiants utilisent une propriété de symétrie dans le triangle équilatéral qui leur permet de construire les deux droites qui font un angle de 30° avec la hauteur. Il s'agit d'une propriété mais aussi d'un travail de visualisation sur la figure. L'autre propriété qui justifie la construction (mais là encore de façon implicite) est celle de l'invariance des angles dans un agrandissement. Dans cette procédure, les étudiants restent dans l'ETG de la Géométrie I avec comme objectif celui de construire l'agrandissement en étant guidé par la perception et les instruments.

Dimension instrumentale

Si l'on s'en tient à la construction, il faut noter qu'interviennent les mêmes commandes que celles qui ont été utilisées dans la construction de la cloche initiale avec la procédure Angles. Notons dès maintenant un blocage sur lequel nous reviendrons (§ 5.2.) et qui est lié à la dépendance des objets et à l'ordre de construction de ces objets dans les logiciels de géométrie dynamique.

3.2.4. Solution Homothétie (H)

Enfin, une solution est apparue naturelle à certains étudiants qui ont associé une homothétie à l'agrandissement de la figure en introduisant la condition A'H' = 2AB.

1. Ajouter un point extérieur à la cloche qui sera le centre d'homothétie.
2. Utiliser la commande « dilatation d'un objet à partir d'un point suivant un rapport ». De cette façon, on applique l'homothétie à toute la cloche.

<u>Espace de travail géométrique</u>

Paradigmes et aspects mathématiques et cognitifs

Cette solution s'inscrit dans une logique axiomatique de la géométrie et nous pouvons remarquer que les résultats ne reposent plus sur la perception mais sur des connaissances logiques internes à la géométrie. Cette fois la solution relève de la Geométrie II voire de la Géométrie III car elle insiste sur des invariants liées aux transformations géométriques indépendamment d'un travail direct sur la figure. L'entrée par les transformations est normale en Géométrie II mais elle n'a pas pour préoccupation première de construire des objets réels mais de travailler sur les propriétés des configurations. Les étudiants se retrouvent un peu démunis pour la construction car ils n'associent pas de technique précise à leurs connaissances géométriques. En revanche, l'environnement technologique peut changer cette perspective et donner aux transformations un rôle d'outil pour construire.

Dimension instrumentale

Les étudiants ont travaillé avec la version de GeoGebra 2.0 ; depuis GeoGebra 3.0 a été publiée au printemps de 2008. Dans le menu de GeoGebra 2.0 dans sa version espagnole, il n'existait pas alors de commande « homothétie » mais une commande « dilatation ». De plus, une fois reconnue, cette commande « dilatation » nécessite, là encore, une maîtrise instrumentale suffisante pour pouvoir résoudre le problème de construction. Si la difficulté, pour certains, pouvait venir du nombre d'arguments à introduire dans la commande, nous avons pu constater que le principal blocage pour la plupart des étudiants venait aussi du manque de connaissances sur l'homothétie. L'utilisation de cette commande dans GeoGebra permet d'introduire l'homothétie comme un outil de construction et facilite la liaison entre Géométrie II et I. Cependant, un nouveau type de blocage apparaît ici car l'usage des transformations comme instrument de construction et de vérification en Géométrie I semble coûteuse en temps d'apprentissage et elle est, de plus, contraire au contrat didactique de l'université pour ces étudiants habitués à faire de la Géométrie III. Ce nouveau blocage pourra, une fois surmonté, servir d'appui pour faire comprendre aux étudiants le changement de point de vue qu'ils doivent faire pour entrer dans la géométrie qu'ils devront enseigner à leurs élèves.

4. Analyse globale

4.1. Résultats des étudiants

Nous commençons par un donner un récapitulatif quantitatif de toutes les procédures utilisées par les étudiants à la fois pour réaliser la cloche initiale et la cloche finale.

Pour la construction de la cloche initiale, parmi les trente étudiants :

7 ont utilisé la Règle et Compas

14 ont employé une solution basée sur les Angles (An)

9 ont utilisé l'outil polygone régulier (PR)

Quant à la construction de la cloche agrandie :

8 ont appliqué le théorème de Thalès et parmi eux deux l'ont utilisé aussi avec l'homothétie sans pouvoir le résoudre avec cette transformation

3 se sont appuyés sur le théorème de Pythagore

16 ont fait leur construction sur les Angles

1 seul a pu résoudre le problème avec l'homothétie sur les trois qui ont pensé à cette possibilité

Enfin, un étudiant n'a pas pu résoudre le problème d'agrandissement.

Pour la suite, nous avons croisé les procédures pour les deux problèmes et le tableau suivant résume l'ensemble des résultats (Tableau 1) pour faire apparaître des groupes d'étudiants.

	Thalès	**Pythagore**	**Angles**	**Homothétie**	**Échec**	**Total**
Règle et compas	1	**3**	1	1	1	7
Polygone régulier	**4**	-	**5**	-	-	9
Angles	3	-	**11**	-	-	14
Total	8	3	16	1	1	30

Tableau 1 : Croisement des résultats.

4.1.1. Le groupe Angles

Angles/Angles. Ce groupe comprend 11 étudiants qui pour calculer le rapport d'agrandissement ont utilisé le dessin et une mesure donnée par le logiciel. Cela leur a ensuite permis de calculer la nouvelle hauteur de la grande cloche. Il y a une grande similitude entre les deux constructions utilisées qui s'appuient toutes les deux sur l'usage des angles. Nous pouvons affirmer que les étudiants de ce groupe se sont centrés sur la tâche de construction. Il faut aussi noter leur maîtrise des outils qui leur a permis de faire ce travail entièrement dans le cadre de l'environnement logiciel.

Angles/Thalès. Trois étudiants ont utilisé une procédure Angles pour tracer la cloche initiale puis ils ont essayé d'utiliser le théorème de Thalès. Dans le cas de deux étudiants (par ex. Étudiant1 et Étudiant2) (Angles/Thalès/essai avec l'homothétie), ils y ajoutent l'homothétie. Ce qui dirige alors leur travail, ce n'est plus l'activité de construction proprement dite mais l'usage des propriétés géométriques. Nous verrons que ces étudiants ont ensuite eu des difficultés pour transférer leurs résultats dans l'environnement dynamique qui ne favorise pas ce passage ici. C'est également le cas de Étudiant13 (voir plus loin) qui n'a pas pu utiliser la formule donnée par Thalès et qui a réussi sa tâche en revenant à une procédure Angles.

4.1.2. Le groupe Polygone Régulier

Les neuf étudiants de ce groupe ont utilisé la commande « Polygone régulier » qui n'existe que dans l'univers de la géométrie dynamique. Dans ce cas, le passage de la cloche initiale à la cloche agrandie ne peut se faire en utilisant la même procédure ce qui implique qu'ils ont dû se poser la question de cet agrandissement en envisageant la question des propriétés de la figure. Il y a alors eu deux manières différentes de traiter le problème.

PR/Thalès

Quatre étudiants ont utilisé le théorème de Thalès puis à nouveau la construction utilisant l'instruction « Polygone régulier » pour construire la cloche agrandie en construisant le triangle en connaissant son côté à partir de la hauteur donnée par le théorème de Thalès.

PR/Angles

Les autres étudiants ont changé de stratégie et cela paraît dû au fait qu'ils n'ont pas pu établir de relation entre les côtés et la hauteur du triangle. Ils n'ont donc pas utilisé des propriétés du triangle équilatéral et ont résolu le problème en s'appuyant sur les commandes du logiciel pour le résoudre avec des distances et des angles.

4.1.3. Le groupe Règle et Compas

Lorsque nous examinons ce qu'ont fait les étudiants de ce groupe pour agrandir la cloche initiale, il apparait une grande diversité de solutions mais qui d'une certaine manière s'appuient toutes sur des propriétés : Thalès, Pythagore, Angles et Homothétie. Dans ce groupe « Règle et Compas », la méthode de construction utilisée privilégie une construction classique qui s'appuie sur les propriétés des triangles ici équilatéraux ou rectangles. Dans la genèse figurale, ces étudiants ont décomposé visuellement les figures (Duval, 2005). Cela implique une genèse opératoire qui favorise la déconstruction dimensionnelle étroitement reliée à l'étude des propriétés. Dans ce groupe, nous avons rencontré un cas particulier qui a résolu le problème en maîtrisant la commande « dilatation » du logiciel.

4.2. Caractéristiques du travail géométrique des étudiants

Pour dégager les caractéristiques globales des ETG personnels des étudiants, nous nous appuierons sur les trois genèses à l'œuvre dans le travail géométrique ainsi que sur leurs interactions (§ 1).

4.2.1. Un travail géométrique privilégiant la genèse instrumentale

Dans ce groupe essentiellement constitué des étudiants appartenant au groupe Angles et pour partie au groupe PR/Angles, le travail en relation avec la genèse figurale est resté global sans décomposition.

La construction ne s'appuie pas explicitement sur des propriétés et elle apparaît supportée par l'usage des instruments et des calculs dans un cas particulier. S'il y a une genèse discursive, elle reste totalement implicite, car l'invariant angle est un invariant assez naturel. De ce fait, la genèse instrumentale se fait en étroite relation avec la genèse figurale dans une géométrie pilotée par la Géométrie I.

Nous pouvons résumer le travail géométrique par le diagramme (Figure 2) qui fait apparaître l'incomplétude de ce travail qui s'appuie essentiellement sur deux genèses.

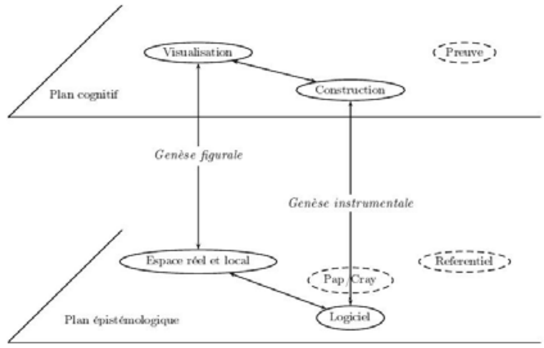


Figure 2 : Diagramme du travail géométrique privilégiant la genèse instrumentale.

Nous avons mis en pointillé les points qui concernent le sous-groupe Angles/Thalès qui a esquissé un passage par un chemin discursif qui n'a pu aboutir.

4.2.2. Un travail géométrique s'appuyant sur la genèse discursive du raisonnement

Le second type de travail géométrique que nous avons pu identifier privilégie une articulation entre genèse figurale et genèse de la preuve discursive qui s'appuie sur les déconstructions dimensionnelles des figures en relation avec les propriétés classiques de la géométrie. Ces propriétés sont explicitées par l'usage des théorèmes de Pythagore, de Thalès ou de l'homothétie. Le travail s'effectue dans la Géométrie II classique où les propriétés justifient la construction. Ce travail se rencontre essentiellement dans le groupe Règle et Compas. Ceci n'est pas étonnant car la forme de pensée est clairement située dans un premier temps dans le champ traditionnel de l'environnement papier-crayon. Le cycle du travail est complet (Figure 3). Par contre il demeure imparfait pour un certain nombre d'étudiants qui ne maîtrisent pas suffisamment l'outil informatique.

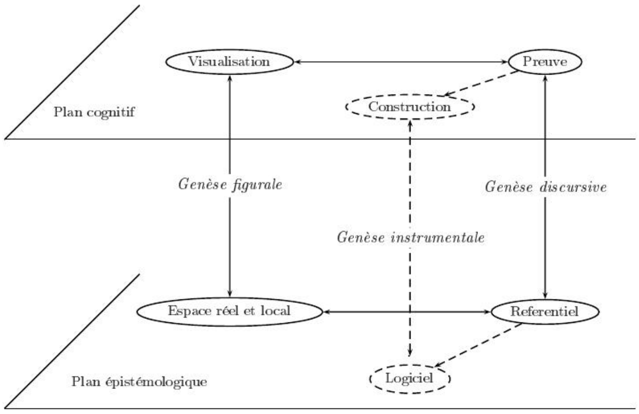


Figure 3 : Diagramme du travail géométrique s'appuyant sur la genèse discursive du raisonnement.

4.2.3. Un travail géométrique homogène et adapté au logiciel

Les étudiants de ce troisième groupe parviennent à articuler un travail géométrique qui s'appuie sur les trois genèses. Ils manifestent une grande aisance dans l'usage du logiciel qui n'apparait pas comme un blocage à leurs investigations. Il s'appuie ainsi tantôt sur une genèse figurale, tantôt sur une genèse discursive (Figure 4). C'est le cas des étudiants qui ont utilisé initialement la procédure « Polygone Régulier » puis Thalès. Ils ont commencé par utiliser la commande « polygone régulier » qui supposait un appui sur les deux genèses figurale et instrumentale. Par la suite, ils se sont appuyés sur la genèse discursive, certains de manière générale (se situant ainsi en GII) et d'autres en raisonnant sur un cas particulier (en raisonnant dans GI).

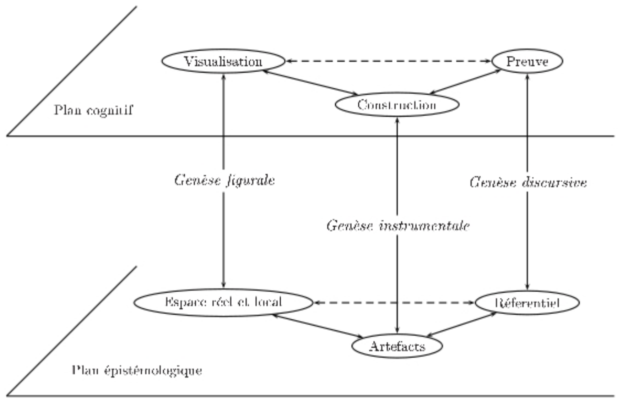


Figure 4 : Diagramme du travail géométrique homogène et adapté au logiciel.

On peut noter que d'un côté la genèse figurale s'appuie sur la genèse instrumentale puis c'est la genèse discursive qui parvient à s'appuyer sur la genèse instrumentale. C'est pour cela que nous avons mis en pointillé le lien entre les deux autres genèses (figurale et discursive) qui existe mais semble moins important pour ces étudiants qui font preuve d'une très bonne maitrise instrumentale (Figure 4).

Pour conclure, cette simple situation de construction fait apparaître une grande diversité d'approches de la part des étudiants. Cette diversité pourra servir d'appui pour la formation. Cependant, il s'agit encore de parcours généraux qu'il est nécessaire de mieux connaître en examinant les ETG personnels de certains étudiants qui ont pu rencontrer des difficultés.

5. Interactions entre les différentes genèses du travail géométrique et certains blocages d'étudiants

Dans cette partie, nous avons recueilli des blocages et des difficultés de type cognitif qui sont apparus au cours de la résolution du problème et dans le développement du travail géométrique. Les données proviennent essentiellement des protocoles écrits dans lesquels les étudiants ont pu s'exprimer sur leur comportement affectif et cognitif (Annexe 2). Il leur était demandé :

a) Décrivez quelles sont vos réactions, vos sentiments, vos blocages lorsque vous travaillez avec ou sans l'ordinateur ;
b) indiquez les stratégies et les ressources que vous avez utilisées pour dépasser vos blocages dans la résolution du problème.

Ces données ont été complétées par l'enregistrement vidéo de la séance de formation.

Nous avons dégagé trois grands types de blocages et difficultés : dans la phase initiale de résolution du problème, dans la genèse instrumentale et dans l'articulation entre les différentes genèses pour développer un travail géométrique complet.

5.1. Difficultés de compréhension et d'interprétation du problème dans la phase initiale de résolution du problème

En relation avec la vision de la figure

« Un problème m'est apparu pour comprendre l'énoncé puis la position du point A n'était pas claire sur le dessin que vous nous avez donné et vous n'avez pas dit que A' et H' étaient les points équivalents de A et H. Il n'était pas dit non plus qu'ils devaient aussi être dépendants quant on changeait la position de A et B ». (Étudiant4, Angles)

« Je me suis un peu perdu au début sans voir que le triangle que formaient les points A, B et C était équilatéral parce que je n'ai pas pensé que les angles en B et C mesuraient chacun 60º » (Étudiant9, Angles). Cette remarque indique aussi la difficulté de relier les nombreuses propriétés données dans l'énoncé avec ce premier travail de découverte figurale.

En relation avec la mobilisation des connaissances disponibles

« Je ne me rappelais pas les propriétés et comment construire un triangle équilatéral. » (Étudiant27, Règle et Compas, Pythagore).

« Je ne savais pas par où commencer, ensuite avec l'outil polygone régulier, je n'ai plus eu de difficultés pour trouver les points. » (Étudiant20, Thalès, cas particulier dans le groupe qui utilise Thalès).

« J'ai eu un blocage initial dans la construction de la cloche à partir du côté IB.» (Étudiant19, Angles).

En relation avec l'organisation du travail de résolution

« Au départ, je me suis tenu un moment à l'écart de l'ordinateur pour penser plus tranquillement au problème. » (Étudiant17, Polygone régulier).

5.2. Difficultés liées à la genèse instrumentale

Il s'agit de difficultés bien identifiées dans les recherches dans le domaine des usages des instruments :

Relier commandes du logiciel et signification mathématique

« Quand je travaille directement avec l'ordinateur, je suis beaucoup plus dispersée, ce qui fait que j'ai plus de problèmes car il y a des fois où je ne trouve pas les commandes que je veux. J'ai eu un peu de mal avec la construction des arcs parce que j'avais mal fixé les sommets et ça m'a dessiné un arc contraire à celui que je voulais » (Étudiant8, Angles).

La question des dépendances entre objets en géométrie dynamique

Il s'agit ici de ce que Varda et Yerushalmy (2004) appellent les relations parent-child qui peuvent avoir des conséquences sur la construction finale comme nous le voyons dans le cas d'Étudiant12 et d'Étudiant7, qui ont utilisé une construction basée sur les angles. Ces étudiants ont rencontré des problèmes quand ils ont souhaité agrandir la figure car brusquement le triangle disparaissait dès qu'ils agrandissaient la base AB. Ils avaient construit un segment quelconque, puis une hauteur de longueur 2AB perpendiculaire au milieu de ce segment et enfin les points B' et C' comme intersection du segment avec deux droites faisant un angle de 30° avec la hauteur. Dans ce cas les points B' et C' dépendent du segment initial et quand ils ont agrandi la figure, il est arrivé un moment où les point B' et C' ont disparu car les droites ne coupaient plus le segment. Il leur a été compliqué de comprendre cette difficulté.

5.3. Blocage dans la gestion complète des différentes genèses du travail géométrique

Cette fois, nous allons analyser les difficultés qui montrent pourquoi le travail géométrique n'a pas pu articuler les trois genèses pour parvenir à un travail complet.

Du discursif à l'instrumental

Nous avions indiqué que les étudiants appartenant au groupe Angles avaient essentiellement articulé les genèses instrumentales et figurale pour effectuer leur travail laissant de côté tout travail explicite de raisonnement déductif. Pourtant, à la différence des autres étudiants, l'Étudiant13 a mobilisé cette dimension du travail géométrique en utilisant le théorème de Thalès (voir page 215). Et elle a obtenu sur le papier la valeur de B'C'.
Elle est bloquée quand elle doit transférer ce résultat dans GeoGebra qui ne lui permet pas le traitement formel du résultat qu'elle souhaiterait. Elle utilise ainsi, sans succès, la commande distance pour calculer le côté B'C' :

sol = 4 Distance(A,B).Distance(B, H)/Distance(A, H).

Elle revient alors à une solution entièrement dans le domaine des Angles. Dans le développement de son espace de travail interviennent les trois genèses, mais elle est bloquée dans son usage des instruments et par la suite son travail géométrique sera entièrement guidé par les propriétés lorsqu'elle utilisera GeoGebra.

D'autres, comme l'Étudiant15 (Angles), décrivent leur blocage dans le passage du papier à l'ordinateur pour agrandir la cloche.

« J'ai été bloqué pour agrandir la cloche. Finalement j'ai réussi. Cela me semble plus facile avec l'ordinateur que je pensais. J'ai eu des problèmes pour tracer le cercle supérieur de la cloche. J'ai d'abord tracé deux demi-cercles (petite cloche) puis la cloche agrandie. J'ai trouvé le milieu pour qu'il soit le centre du cercle. Il est plus facile de travailler sur le papier pour agrandir la cloche. »

Sur le difficile usage de l'homothétie

Comme nous l'avons déjà dit, seul l'Étudiant25 a utilisé de manière correcte une homothétie pour résoudre le problème alors qu'il s'était trompé dans la construction de la cloche initiale en dessinant un triangle isocèle.

De son côté, l'Étudiant2 n'a pas pu trouver le résultat, car il a mal déterminé le rapport d'homothétie.
« Pour trouver la nouvelle cloche, j'ai utilisé l'homothétie de rapport 2 (erreur) à partir du segment AB. »
Il se rend compte de son erreur et sur son dessin final fait figurer les deux solutions. En rouge, il donne la solution fausse obtenue par homothétie de rapport 2 et en noir la solution qu'il a obtenue avec le théorème de Thalès. Il écrit « le côté B'C' est 4 AB.BH/AH ».

Les blocages que nous avons rencontrés apparaissent à divers moments du travail géométrique et peuvent renvoyer à différentes genèses. La genèse instrumentale d'abord bien sûr, mais pas seulement, car l'usage du logiciel, force à interroger les relations entre Géométrie I et Géométrie II et la nature des deux autres genèses. Certains blocages dus au logiciel ont empêché l'usage des propriétés. Par contre d'autres blocages, une fois surmontés, ont permis d'avoir un autre point de vue sur des objets mathématiques comme ce fut le cas avec l'homothétie. Il faut noter que les blocages ont parfois été surmontés directement par les étudiants lorsqu'ils étaient suffisamment explorateurs ou maîtres du logiciel mais le plus souvent, l'intervention du professeur a été décisive. Tous ces blocages et les manières de les analyser pour les surmonter peuvent aussi servir d'appui au professeur formateur lorsqu'il voudra sensibiliser ses étudiants aux difficultés inhérentes à l'usage des logiciels dans une classe.

6. Conclusion

Un des objectifs principaux de cette recherche était de voir l'importance d'un environnement informatique sur les relations entre les trois genèses (figurale, instrumentale et discursive) de l'ETG. Il s'agissait notamment de voir si GeoGebra jouait un rôle spécifique dans ce travail géométrique chez des futurs enseignants. La situation de formation donne un certain nombre d'informations qui montrent bien comment les étudiants oscillent entre raisonnement intuitif et raisonnement déductif quand ils doivent résoudre un problème de construction avec un logiciel.

Les données que nous avons recueillies, montrent une grande diversité des approches chez les étudiants. Cette diversité provient à la fois de leur relation à la machine et au logiciel et aussi de leur relation à la géométrie.

Une première relation (voir Figure 4) privilégie dans le cycle global les deux genèses instrumentale et figurale. Ce point n'est pas surprenant compte tenu de la tâche qui insistait sur la construction, cependant elle dénote chez les étudiants une bonne adaptation aux instruments. Elle devrait aussi leur permettre de voir la difficulté qu'ils auront à faire expliciter des propriétés à une partie des élèves dans le cadre de leur enseignant lorsque ceux-ci seront engagés dans des tâches de construction avec logiciel.

Un deuxième point à souligner est l'incomplétude du cycle dans le travail géométrique chez les étudiants qui commencent leur recherche en s'appuyant sur les aspects figuraux et discursifs. Le retour aux instruments pour finir le cycle peut être problématique quand il n'y a pas congruence entre l'outil théorique et l'outil informatique.

Enfin, il apparaît que pour maitriser l'ensemble du cycle, les étudiants doivent à la fois maîtriser les compétences en jeu dans les trois genèses et faire preuve d'une certaine flexibilité cognitive dans l'usage des différentes facettes du travail géométrique. Ce point existait naturellement déjà dans les environnements papier et crayon mais il est plus facile de le voir ici car les logiciels offrent une plus grande diversité d'outils et de solutions pour résoudre les problèmes.

Une façon d'analyser cette flexibilité dans l'usage des différentes facettes du travail géométrique renvoie aussi à l'articulation entre Géométrie I et II.

Un autre point de réflexion concerne la situation de formation elle-même dont nous souhaiterions voir si elle peut constituer une situation de référence pour le professeur en formation initiale et si nous pouvons baser sur cette situation d'homologie une formation complète à l'enseignement en contexte technologique. Pour cela, il est nécessaire de s'appuyer explicitement sur certains points dégagés par l'étude. Or cette étude a permis de repérer certains comportements d'étudiants qui peuvent servir d'exemples à étudier dans le cadre de la formation notamment sur :

a) les schèmes utilisés pour résoudre une situation mathématique avec un logiciel ;
b) les schèmes utilisés pour analyser et construire des situations didactiques intégrant un logiciel.

Dans cette perspective, il est nécessaire d'introduire en complément de la situation d'homologie des modules de formation qui relient étroitement des éléments techniques sur le fonctionnement du logiciel et des éléments de didactique des mathématiques.

Dans une perspective plus théorique, il nous semble aussi que nous avons pu mieux voir l'articulation entre l'approche instrumentale et l'approche par les espaces de travail géométrique (ETG). Le fait d'adopter la perspective plus holistique des ETG introduit, pensons-nous, une dimension plus dynamique et complète sur le travail global du professeur comme élément d'un cadre plus général. Elle ajoute un élément à l'orchestration du professeur généralement vu comme un facilitateur de la genèse instrumentale. Notre étude montre qu'il faut aussi y ajouter une dimension portant sur le développement du raisonnement géométrique en gardant comme ligne stratégique la construction d'une genèse discursive articulée avec des éléments de déconstruction visuelle. Ce raisonnement passe notamment par une réflexion sur le rôle des définitions et des théorèmes dans ces processus de construction de la Géométrie orientée par une visée pratique (Géométrie I) ou plus axiomatique (Géométrie II). La notion d'ETG donne aux élèves-professeurs un cadre pour voir d'où viennent les propriétés et comment elles s'articulent dans la pensée géométrique des élèves avec leur usage des instruments et leur perception des objets. On peut aussi espérer qu'une sensibilisation à ces trois types de genèses qui agissent dans le travail géométrique pourra donner aux étudiant-professeurs des pistes pour prendre une distance par rapport à leur propre travail géométrique et ensuite des éléments pour structurer leur propre apprentissage et celui de leurs élèves au niveau des activités à mettre en œuvre dans l'enseignement secondaire.

Remerciements

Cette étude a été possible grâce au financement des projets UCM-PIMCD-463-2007 et UCM-PIMCD-200-2009 du Vice-rectorat de Recherche de l'Université Complutense de Madrid et a été partiellement supportée par le projet de recherche ACEIA (Computer Algebra and Artificial Intelligence) de l'UCM. réf. 910563. Elle a aussi été facilitée par les séjours effectués à Madrid et Paris dans le cadre d'Erasmus.

RÉFÉRENCES

ARTIGUE, M. (2002), Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, **7(3)**, 245–274.

COUTAT, S. (2006), *Intégration de la géométrie dynamique dans l'enseignement de la pour favoriser une liaison école-collège*, Thèse de l'université J. Fourier, Grenoble.

DUVAL, R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnements, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 5–53.

HERSHKOWITZ, R., PARZYSZ, B. & VAN DORMOLEN, J., (1996), Space and Shape, *In A.J. Bishop et al. (Eds) International Handbook of Mathematics Education*, *Kluwer*, 161–204.

GÓMEZ-CHACÓN, I. Mª (2008), Mathématiques et technologies. Apprentissage du professeur et stratégies de formation. En C. Ouvrier-Buffet & M.-J. Perrin-Glorian (éd.) *Approches plurielles en didactique des mathèmatiques. Apprendre à faire des mathèmatiques du primaire au supérieur : quoi de neuf ?*, 344–351, Université Paris Diderot.

GÓMEZ-CHACÓN, I. Mª & JOGLAR, N. (2010), Developing competencies to teach exponential and logarithmic functions using GeoGebra from a holistic approach, *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, **12-3**, 485–513.

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (1999), Géométrie et Paradigmes géométriques, *Petit x*, **51**, 5–21.

HOUDEMENT, C. ET KUZNIAK, A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **11**, 175–193.

KUZNIAK, A. (2010), Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de scolarité obligatoire en France, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **15**, 75–91.

KUZNIAK, A. (2011), L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **16**, 9–24.

LAGRANGE, J.B. (ed.) (2009), *Genèses d'Usages Professionnels des Technologies chez les Enseignants* GUPTEn. GUPTEn Rapport final Septembre 2009, Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris-Diderot.

LAGRANGE J.B., LECAS J.F., PARZYSZ B. (2006), Les professeurs stagiaires d'IUFM et les technologies. Quelle instrumentation ? *Recherche et* Formation, **52**.

MITHALAL, J. (2010), *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle*, Thèse de l'université J. Fourier, Grenoble.

TROUCHE, L. (2000), La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur : étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques, *Educational Studies*, **41**, 239–264.

TROUCHE, L. (2005), Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **25(1)**, 91–138.

VARDA, T., YERUSHALMY, M. (2004), Understanding dynamic behavior: Parent–Child relations in dynamic geometry environments, *Educational Studies in* Mathematics, **57 (1)**, 91–119.

Inés Mª GÓMEZ-CHACÓN
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
igomezchacon@mat.ucm.es

Alain KUZNIAK
Laboratoire de Didactique André Revuz
Université Paris-Diderot
Paris, France
kuzniak@math.jussieu.fr

Annexe 1. Courte présentation des paradigmes

Notre étude de la géométrie enseignée est fondée sur une approche qui repère dans cet enseignement des changements de points de vue sur la géométrie équivalents à des changements de paradigmes au sens de Kuhn. Nous avons retenu trois paradigmes géométriques qui organisent l'interaction entre l'intuition, expérience et raisonnement.

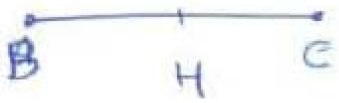
La Géométrie I : la géométrie naturelle. Cette géométrie a pour source de validation la réalité, le monde sensible. Il y a une certaine confusion entre modèle et réalité. La déduction s'exerce prioritairement sur des objets matériels à l'aide de la perception et de la manipulation d'instruments. La construction et la perception sont au cœur de cette géométrie naturelle de type expérimental. La Géométrie I se situe dans une perspective technologique.

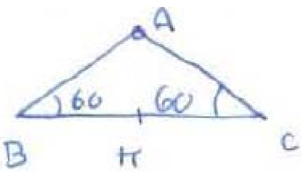
La Géométrie II : la géométrie axiomatique naturelle. Son archétype est la géométrie classique euclidienne Cette géométrie est construite sur un pas de côté par rapport à la réalité. L'axiomatisation est en marche et constitue un horizon pour la modélisation. Une fois posés les axiomes, les preuves doivent être développées au sein de ce système pour être valides. Par contre le système d'axiome peut être incomplet.

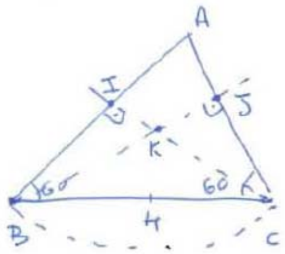
La Géométrie III : la géométrie axiomatique formaliste. Cette géométrie est déconnectée de la réalité et le système d'axiomes est central. Les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique s'impose. La notion de vérité devient totalement intrinsèque au système formel et peut n'avoir aucun degré de validité dans le monde réel. La mise en place de cette géométrie renvoie plutôt à une problématique de la cohérence logique, sa perspective de travail sera logique et formelle.

Annexe 2. Exemple de protocole d'une étudiante (Étudiant13)

1.- Ecrivez un protocole détaillé de votre résolution du problème

<table>
<tr><th>Sur le raisonnement mathématique, les figures, les opérations, etc.</th><th>Utilisation du logiciel GeoGebra (possibilités, difficultés, éléments instrumentaux qui vous ont aidés)</th></tr>
<tr><td>Faire d'abord la cloche.
<u>Premier essai</u>. Tracer une ligne passant par deux points donnés B et I et suivre les instructions.


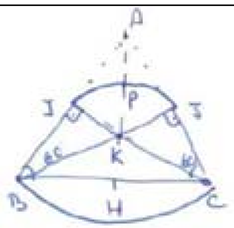
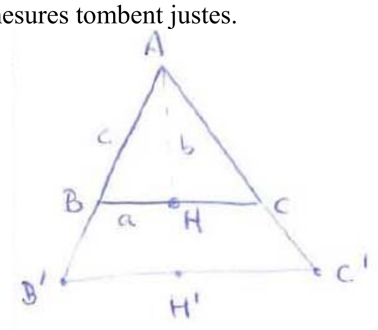
<u>Deuxième essai</u> faire un triangle équilatéral.


ABC, I et J étant sur les hauteurs du triangle issues des angles B et C, K est l'orthocentre. Nous traçons les arcs de cercle passant par BC et par IJ de centre A et K respectivement.


Et pour faire le cercle passant par A il faut juste se rendre compte que le centre est aligné avec A et K et qu'il est aussi sur la médiatrice du segment passant par A et par l''intersection de l'arc passant par I et J.</td><td>Faire la cloche.
<u>Premier essai</u>. En utilisant l'outil rotation d'un objet autour d'un point, tracer la droite qui passe par les points donnés B et I et faire une rotation de cette droite de 60° pour obtenir une autre droite et tracer la perpendiculaire à la droite qui passe par B et I.
Faire l'intersection de la perpendiculaire que nous venons de tracer et de la droite que nous avons fait tourner pour obtenir un point C.
Nous tournons la droite BC de 60° et nous traçons la perpendiculaire à la nouvelle droite qui passe par B.
Ainsi, nous avons les points B, I, C, J, et K et les segments qui les joignent.
A, nous l'avons obtenu en faisant l'intersection des deux droites (piste 1). Nous traçons les arcs de cercles, pour le premier le centre A et d'extrémités B et C et ensuite le centre K et les extrémités I, J.
Il reste seulement à faire le cercle qui passe par A et qui est tangent au dernier arc passant par I, J, en obtenant les points E', nous traçons la médiatrice de AE et ainsi ils se coupent.

AK et AE, nous obtenons le centre du cercle qui passe par A.

<u>Deuxième essai</u>. Sans faire tourner les droites : tracer le triangle équilatéral ABC, tracer deux de ses bissectrices (celles qui passent par B et C) qui pour être équilatéral coïncident avec les hauteurs et terminer comme précédemment.
Agrandissons-la.</td></tr>
</table>

 Pour essayer d'agrandir la cloche, ce n'est pas un problème, c'est la même chose qu'avant, mais maintenant nous ne partons pas de points arbitraires, il faut que les mesures tombent justes.  Agrandir la cloche. Nous devons construire un triangle équilatéral connaissant sa hauteur 2.AB = A´H´.	Agrandir la cloche. Nous faisons un segment de longueur 2.AB = A´H´. Nous traçons la perpendiculaire qui passe par H' et nous faisons la droite qui passe par A' et H' pour la faire tourner de 30º dans le sens des aiguilles d'une montre et 30° dans le sens contraire. Ainsi, nous obtenons un triangle équilatéral. Pour obtenir J' e I' nous traçons les perpendiculaires aux segments A'C' et I'B' qui passent respectivement par B' et C'. Pour la terminer, on fait la même chose que l'on a faite avec la première cloche.

Décrivez qu'elles ont été vos réactions émotionnelles, vos sentiments, vos blocages, pendant le travail sur le problème avec l'ordinateur et sans ordinateur.

Travail sur le problème sans l'ordinateur	Travail sur le problème avec l'ordinateur
Cette partie est plus facile. La partie sur la construction de la première cloche une fois que t'y a un peu réfléchi n'est pas difficile, il suffit de faire un triangle équilatéral et ses bissectrices et médiatrices (qui coïncident) pour trouver I et J. Pour agrandir ce n'est non plus compliqué, il suffit de construire un triangle équilatéral à partir d'une hauteur.	Résoudre avec GeoGebra fut plus difficile et coûteux, je n'utilise pas encore bien le logiciel, je vais très lentement et de fait je n'ai pas eu le temps d'agrandir la campagne, parce que en plus j'ai mal interprété l'énoncé et pour cette raison je me suis bloquée.

Indiquez vos stratégies et ressources pour surmonter vos blocages dans le problème

Dans les moments où j'ai été bloquée, comme quand j'ai réalisé que ma première manière de faire la cloche n'était pas juste, j'ai cherché une nouvelle façon de poser le problème, en ne me fixant pas sur ce que j'avais déjà fait.

Répondez aux questions suivantes :

1.- Avez vous utilisé des propriétés géométriques pour travailler avec GeoGebra ou est-ce le logiciel qui a dirigé votre travail géométrique ?

La construction de la première cloche, sur la base des renseignements fournis dans l'énoncé du problème n'a pas présenté de difficultés de même que le travail que j'ai fait directement avec GeoGebra. Travailler avec un logiciel comme Geogebra donne un certain nombre d'outils déjà construits, comme le calcul des points médians, des lignes perpendiculaires, etc, il est plus facile de travailler avec, et surtout c'est très rapide. Le plus gros problème est venu dans la construction de la seconde cloche. La difficulté était de savoir comment appliquer avec Geogebra la relation trouvée sur le papier.

2.- Si c'est le logiciel GeoGebra qui a piloté votre travail géométrique, comment cela a-t-il influencé l'utilisation des propriétés pour résoudre le problème ?

Comme future enseignante, Geogebra est un logiciel qui est intéressant à connaître et à maîtriser et avec lequel on peut créer des applications utiles pour les élèves du secondaire.

D'habitude quand j'utilise GeoGebra je me sens capable de traiter un problème, avec confiance et une bonne motivation, mais parfois je m'inquiète d'avoir à consacrer plus de temps en l'utilisant que sans. Même si on travaille directement avec un ordinateur, il faut connaître les propriétés. Dans le cas de la cloche j'ai fait directement avec le logiciel au début, mais ensuite j'ai dû analyser les propriétés avant d'agrandir la cloche avec GeoGebra.

3.- Pensez vous que les propriétés géométriques jouent un rôle différent quant on utilise GeoGebra à la place du papier et du crayon ?

L'idée initiale était de construire la seconde cloche directement sur la première, mais ce fut un premier blocage. Après un certain temps, j'ai décidé de chercher le problème avec un crayon et du papier, étudier les propriétés, puis passer à l'ordinateur. Il était difficile de trouver la relation qui devait répondre à la partie sur B'C', le problème se posait pour traduire cette idée en utilisant le logiciel. Ici apparaît un nouveau blocage et il faut faire de nouveaux essais. Je savais les propriétés sur le papier mais je n'étais pas en mesure de les transférer sur l'ordinateur.

Enfin, pour résoudre ce problème en définissant « l'agrandissement de la mesure avec B'C' », une question qui a été couteuse avec le traitement de Geogebra, mais une fois surmontée cette difficulté, le reste du travail a été de répéter ce que j'avais fait pour la cloche initiale et je l'ai fait sans blocage supplémentaire.

4.- Donnez des suggestions ou des orientations qui aideraient un professeur dans sa formation professionnelle sur les nouvelles technologies.

Pour moi, les difficultés lorsqu'on travaille avec un ordinateur sont :

- Apprendre à utiliser efficacement le programme dont on a besoin.
- Transférer un problème du papier à l'ordinateur.
- Utiliser une nouvelle langue, une langue peut être difficile et elle implique plus de temps

BLANCA SOUTO RUBIO, INÉS Mª GÓMEZ-CHACÓN

VISUALIZATION AT UNIVERSITY LEVEL. THE CONCEPT OF INTEGRAL

Abstract. In recent years, several studies have highlighted the importance of tackling the students' difficulties in understanding of the concept of the integral. This study carried out with the first year students of the Mathematics Degree at the Universidad Complutense de Madrid, presents a deeper insight into these difficulties through data collected from a non-routine problem questionnaire and semi-structured interviews. Some of these difficulties clearly have their origin in the coordination between the analytic and graphic registers. In the analysis of students' use of the graphic register, the distinction between two different functions of images (iconic and heuristic) is exploited productively. Moreover, a specific teaching of visualization is recommended. As a main contribution in this approach two examples of relevant characteristic of visualization that should be taken into account in this proposal are shown: a high cognitive requirement and the need of a global apprehension.

Résumé. Visualisation au niveau universitaire : le concept d'intégrale. Ces dernières années, plusieurs études ont relevé l'importance d'aborder les difficultés des étudiants dans la compréhension de la notion d'intégrale. L'étude présentée, menée avec des étudiants de première année de la Licence de mathématiques à l'Université Complutense de Madrid, présente une vue plus approfondie de ces difficultés par les données recueillies à partir d'un questionnaire de problèmes non routiniers et d'entretiens semi-structurés. Certaines de ces difficultés ont évidemment leur origine dans la coordination entre les registres graphique et algébrique. Dans l'analyse de l'usage par les étudiants du registre graphique, la distinction entre deux fonctions différentes des images (iconique et heuristique) apparaît fructueuse. Par ailleurs, un enseignement spécifique de la visualisation est recommandé. A titre de principale contribution dans cette direction, on montre deux exemples de caractéristiques pertinentes de la visualisation, qui devraient être prises en compte dans cette proposition : une forte exigence cognitive et la nécessité d'une appréhension globale.

Mots clés. Intégrale, Enseignement de l'analyse, Représentations, Visualisation, Pensée mathématique avancée.

1. Introduction

The results shown in this paper are part of a larger study (Souto, 2009; Souto & Gómez-Chacón, 2009) developed in the academic year 2008/2009. The main objective of this study was to improve the teaching of Mathematical Analysis at the university level favouring the processes of visualization.

This paper focuses on the concept of integral because it is one of the most prominent in the research on students' difficulties in Mathematical Analysis (Mundy, 1987; Llorens & Santoja, 1997; González-Martín & Camacho, 2005;

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 16, p. 217 – 246.

Legrand, 2002). These studies emphasize that during the first year of university, students use the concept of integral in a very mechanical and operative way. This may be due to a wide gap between the teaching of the integral in high school and its instruction at the university level. However, in this paper the focus is not in institutional or sociocultural aspects of the understanding of the integral, but in cognitive ones. In this way, we focus on previous research results about the lack of integration between the concept of area and the integral.

This result leads us to pay particular attention to the coordination of graphic and analytic registers in an attempt to improve comprehension of the concept and eventually, to take into consideration the cognitive theories of the registers of semiotic representation (Duval, 1995, 1999, 2006; Hitt, 2003, 2006) in order to explain and analyze students' difficulties with the concept of integral. Furthermore, this study will go beyond mere identification and explanation of these said difficulties by exploring some recommendations for the teaching of the concept. One noteworthy recommendation is to pay explicit attention to visualization (Guzmán, 1996; Llorens & Santoja, 1997; González-Martín & Camacho, 2005) which will be elaborated further in this paper. According to Guzmán (1996, p. 40):

> *We should try to explicitly teach to perform the processes of visualization correctly. We should pay special attention to the different types of visualization and to their specific usefulness in the mathematical teaching and learning. We should try to be aware of the process of codification and decodification implied in the practice of visualization and try to make them explicit for our students.*

From the point of view of research on visualization, this study follows some of the approaches in which deeper research is needed pointed out by Presmeg (2006). Moreover, in this review (Presmeg, 2006) of the last thirty years of research on visualization in the field of Mathematics Education, lack of studies of visualization at University Level is highlighted. Our research tries to contribute in this way.

Therefore, this research poses the following questions:

- What kind of understanding of the concept of the integral do university level students possess and exhibit?
- What are the possibilities that visualization offers to improve the students' learning of the concept of the integral?

The above queries are treated in an exploratory way through a dialogue between theoretical and practical elements. Review of the theories serves as the basis of the analyses of the students' answers which will be put forward to promote examination of two main issues: (1) the identification of aspects related to the students' understanding of the concept of integral paying special attention to students' use of the graphic register (difficulties, mental blocks and misinterpretations as well as representations, treatments and conversions that appear in the students' answers) and (2) the exploration of characteristics of visualization to be taken into account in the design of a teaching proposal that improves students' understanding of the concept (the high cognitive requirement of visualization and the need for a global apprehension of the images). Moreover, a contribution of this paper is the use of distinction between *iconic* and *heuristic function of images* (Duval, 1999) to analyze students' productions. In this way, the *heuristic function* is found related to *visual methods* (Presmeg, 1985) and this connection inspires us to distinguish three different kinds of methods for solving a problem using the graphic register: *non-visual, mixed* and *visual*.

2. Theoretical Foundations

On one hand, the approach to the problem leads us to consider the theoretical framework of the cognitive theories of the registers of semiotic representation (Duval, 1995, 1999, 2006; Hitt, 2003, 2006) which talks about the coordination between registers and in particular, about the use of graphic register. This framework is useful in describing and analyzing students' difficulties in learning the concept of the integral.

On the other hand, research in Mathematics Education on visualization incorporates other perspectives of analysis that go beyond the semiotic approach which are relevant to our study. Among them, we highlight the role of visualization related to intuition in mathematical reasoning (De Guzmán, 1996; Arcavi, 2003), individual differences in visualization preference (Presmeg, 1985, 1991, 1994, 1995, 2006); and causes for the reluctance to visualization (Eisenberg & Dreyfus, 1991) that include more sociocultural issues about the use of visualization.

Understanding and learning of the mathematical concepts

We agree with Duval (1995, 1999) that the only possible access to mathematical objects is through their representations in their different semiotic registers. This fact makes the study of representations so important in order to explain the understanding of the concepts and the learning of mathematics.

From this point of view, the *understanding of a concept* is built through tasks that imply the use of different representation systems and promote the flexible articulation between representations. This articulation is produced through three cognitive activities inherent to any representation: representation, treatment and conversion. Thus, *learning mathematics* implies "*the construction of a cognitive structure by which the students can recognize the same object through different representations and can make objective connections between deductive and empirical mathematics*" (Duval, 1999, p. 12).

In this context, to *improve learning* supposes a diminution of the difficulties, misinterpretations and mental blocks that could surge in the mentioned process of articulation. As an example of these difficulties, observations highlight that "if most of the students can learn some *treatment*, very few of them can really *convert* representations" (Duval, 1999, p. 9). As we remarked in the introduction, research shows that the main cause of this is the lack of coordination between graphic and analytic registers. In our specific case of understanding the concept of integral, the analytic register in the students' answers is more prevalent than the graphic one. This fact conducts us to pay special attention to the use of the graphical register.

We define the notion of *visual comprehension* as the process in which a subject *acquires representations* of this concept in the *graphic register* and is able to *treat* and *convert* them into another register when thinking mathematically as well. This definition is based on a more global notion of understanding defined previously though it is limited to the graphic register. This limitation offers a new shade of meaning crucial to the study of the visualization processes.

Visualization in Mathematics Education

In fact, the specific teaching of visualization is proposed as a fundamental way in acquiring visual comprehension. We note that for this study, the notion of visualization considered diverges from Duval's[1]. According to Arcavi (2003, p. 217), *visualization* refers to:

> *"the ability, the process and the product of creation, interpretation, use of and reflection upon pictures, images, diagrams, in our minds, on paper or with technological tools, with the purpose of depicting and communicating information, thinking about and developing previously unknown ideas and advancing understandings".*

Thus the meaning of visualization is limited to the use of figures, images and diagrams, which are produced in the graphic register. For Duval (1999), however, visualization can be produced in any register of representation, as it is referred to processes linked to the visual perception and then to the vision, which is not limited to only one register. For this study, this notion is not operative enough, being too broad. In spite of it, Duval (1995, 1999) emphasizes some characteristics that distinguish visualization from vision that will be useful for our purpose.

From the characterization of visualization in the context of problem solving, we find it very useful to point out the difference between visual and non-visual methods established by Presmeg in her research about preference to visualize

[1] Duval characterizes the visualization as "a bi- dimensional organization of relations between some kinds of units. Through visualization, any organization can be synoptically grasped as a configuration" (Duval, 1999, p. 15).

(Presmeg 1985, 1991, 1994, 1995, 2006). A *visual method* of resolution involves visual images, with or without a diagram, as an essential part of the solution method. A *non-visual method* of resolution is the one that does not involve visual images as an essential part of the solution method.

Now, the discussion will focus on the differences between the languages used by Presmeg and Duval. For example, the following equivalence should not be made: visual method (Presmeg) - the use of graphic register (Duval); non-visual method (Presmeg) - without using the visual register (Duval). This equivalence cannot be established for two reasons. Firstly, when Presmeg talks about visual images, she includes mental images that belong to the world of mental representations: these are very different from the semiotic representation for Duval (Duval, 1995, p. 14). Secondly, the use of the graphic register does not imply that the method is visual. When Duval (1999, p. 14) reflects about the differences between the way of watching in vision and in visualization, he distinguishes two types of functions for the images: the iconic and the heuristic. *"Iconic representations refer to a previous perception of the represented object [...] whereas visualization consists in grasping directly the whole configuration of relations and in discriminating what is relevant in it"* (Duval, 1999, p. 14). Consequently, the visualization is related to a global apprehension of the images and to a conduct of abduction that guides the deduction (Duval, 1995, 1999). Thus, this kind of function performed by these so-called *heuristic* images is found typical of visual methods. As a result, this kind of function typically takes part in the visualization processes as well. Therefore, the use of graphic register does not always imply the presence of visualization. It could lack the global apprehension or the image could perform an iconic function.

From a teaching point of view, the acquisition of this global vision poses a big challenge. Frequently, students do not go further than having a local apprehension and do not see the relevant global organization (Duval, 1999, p. 14). The different levels of apprehension of the geometric and graphic figures (local and global) are needed to develop the conduct of abduction, that is linked to the interaction between a question of mathematical order and the realization of treatment pertinent to this question (Duval, 1995, p. 153). This mental process that is present in mathematical thinking of the experts is not always present in new learners. However, it could be developed with a specific training (Duval, 1999).

Moreover, these are not the only challenges that a specific teaching of visualization could present. Eisenberg and Dreyfus (1991) identified three reasons to explain the reluctance of the students to visualize: "*a cognitive one (visual is more difficult), a sociological one (visual is harder to teach) and one related to beliefs about the nature of mathematics (visual in not mathematical)"* (1991, p. 30).In this paper, and with the help of Duval's approach, it will be possible to describe deeply this higher cognitive difficulty of visualization.

The review of these theoretical elements has enabled us to clarify the meaning and relevance of the research questions. Particularly, the following fundamental notions for the analysis of the results of this study have been defined: visual comprehension, improvement of the learning, visualization, iconic/heuristic function of the images, visual/non-visual methods and some difficulties related to visualization.

3. Methodology and population

The study group was composed of a first year group of 29 Mathematics students at Universidad Complutense de Madrid (UCM), 15 female and 14 male. These students were enrolled in the subject called Real Variable Analysis[2], wherein the formal definition of the integral is introduced. However, this is not the first time they have come across this concept. In high school, they were supposed to have learned the basic rules for the calculation of primitives as well as the relation with the calculation of some areas under curves. This gap in the teaching of the concept between secondary school and university could be the cause of some students' difficulties with the understanding of the integral. However, as it was mentioned in the introduction, the focus of this study is cognitive. Therefore, we do not consider relevant to give more institutional details.

This research has an exploratory, descriptive and interpretative character. These characteristics take part – and are specific - of the qualitative research (Glaser & Strauss 1967; Latorre, Rincón & Arnal 1996). For data collection, a questionnaire of problems and semi-structured interviews have been used. Data analysis is mainly inductive, as categories and interpretation are built from the obtained information. Systemic networks for the questionnaire and transcriptions for the interviews are the main instruments employed in doing this data analysis.

Research instruments

The questionnaire of Mathematical Analysis problems

The questionnaire is composed of 10 non-routine problems in Mathematical Analysis, some of them used in previous research (Mundy, 1987; Llorens & Santoja, 1997; and works quoted in Eisenberg & Dreyfus (1991): Selden, Mason & Selden, 1989 and Tufte, 1988). Most of the problems are posed in an analytic register. However, according to Eisenberg and Dreyfus (1991) *"each of these problems is based on a concept that has a visual interpretation"* (Eisenberg & Dreyfus, 1991, p. 26). Thus the problems allow the study of the students'

[2] In Spanish, *Análisis de Variable Real.*

behaviour with the coordination of registers and they enable us to compare results between those who make a conversion to the graphic register and those who do not. This is possible because each problem admits several kinds of resolution, including a visual one. Therefore, these problems seem to be valid in the study of visual comprehension and students' preference to visualize.

For questionnaire analysis, a recount attending to four indicators was used together with a more qualitative study through *systemic networks* and resume tables, whose results will be showed in the next section (see 4.1.).

The use of systemic networks (Bliss, Monk & Ogborn, 1983) favours a data configuration that allows us to simultaneously look at all effective answers of the students. This way of presenting the data offers a global view interesting to our objectives as it highlights the complex relations between the different elements represented:

- resolution methods of the students and frequency with which they appear (successful or not, visual or non-visual, using graphic or analytic register);
- kind of representations associated to the main concepts used by the students, including the graphical representations.

Nº	PROBLEM'S STATEMENT	DESCRIPTION
1	What's wrong in the following calculation of the integral? $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^{1} x^{-2}dx = \frac{x^{-1}}{-1}\Big\|_{-1}^{1} = \frac{-1}{x}\Big\|_{-1}^{1} = \frac{-1}{1} - \frac{-1}{-1} = -2$	Command of the concept of integral and its properties. It is not routine because of the formulation (to look for a mistake instead of calculating)
2	Evaluate $\int_{-3}^{3} \|x+2\|dx.$	Command in the calculation of integrals, with the added difficulty of the absolute value.
3	If f is an odd function in $[-a,a]$ calculate $\int_{-a}^{a} (b + (f(x)))dx$	Command in the calculation of integrals, greater degree of abstraction that requires the use of reasoning and more general properties than in the others.

Table 1: Statements of the analyzed problems and their individual brief description.

Four out of ten problems in the questionnaire involve the concept of integral. In this paper, results of three of these problems completed with data from the interviews are described (see section 4.1.). In the table above (Table 1), the statement of each problem is shown with a brief description about the way in which the concept of integral is involved and some a priori difficulties the students could have. The fourth problem was not included here because it had a low rate of answers (16 blank answers).

The interviews

The results obtained from the questionnaire required a deeper study of the individuals in affective, cognitive and sociocultural aspects related to visualization. In order to do this, semi-structured interviews were conducted with 6 individuals chosen to be representative of different student profiles established according to their preference to visualize and their achievement in the problem questionnaire. The interviews, with an average duration of 90 minutes, were divided into four parts: background of the individual, tasks, beliefs about visualization and queries about the problem questionnaire.

This paper focuses on the students' cognitive difficulties related to visualization. Therefore, we will not deal with all the details about the classification in student profiles and the results of the interviews (see Souto, 2009; Souto & Gómez-Chacón, 2009). This will explicitly deal with the answers of a student to a task based on the Young Inequality (see section 4.2.). In Figure 1, the task is shown. Among other things, the interpretation of a graphic and its posterior connection with the statement of the theorem is asked. This case has been chosen because of its own interest and not as representative of what happened in the other interviews.

1. What do you see in the image?

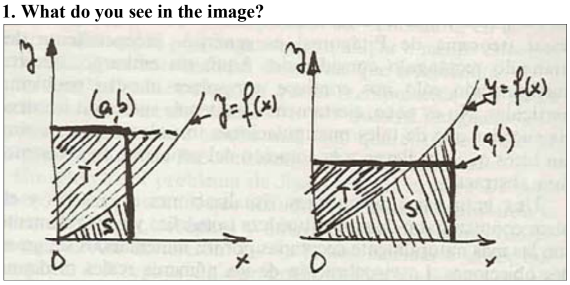


Figure: Image of the Young's Inequality (Guzmán, 1996:22)

2. Do you find some relation with the following statement?

Theorem 3.2 (Young's Inequality). *If f has a continuous and positive derivative on $[0,c]$ $(c > 0)$ and $f(0) = 0$, then for $a \in [0,c]$, $b \in [0, f(c)]$, we have*

$$ab \leq \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b f^{-1}(x)\,dx. \qquad (3.3)$$

The equality holds if and only if $b = f(a)$.

Figure: Statement of Young's Inequality

Figure 1: Statement of the Young's Inequality task of the interview.

4. Analysis and discussion of the results

The following is a description of results of the study that shed some light to the conclusions of the research questions through:

- identification of aspects related to the students' understanding of the concept of integral: difficulties, mental blocks and misinterpretations as well as representations, treatments and conversions that appear in the students' answers. Particular attention is given to students' use of the graphic register;
- analysis of two examples from the data that illustrates two characteristics of visualization: In the first example, there is visualization, as the image performs a heuristic function while in the second one, there is no visualization.

4.1. Difficulties, mental blocks and misinterpretations in the resolution of problems about the concept of integral

Initially, the results of the qualitative analysis of students' answers to the three problems are presented. The overall vision offered by the recount made attending to four indicators follows next.

Problem 1

This problem enables us to explore students' understanding of the concept of the definite integral (that is defined if and only if the function is bounded in the interval of integration) as well as its properties (e.g., positive functions have positive integral). The way and the moment in which the problem is posed are non-routine. Instead of asking for the evaluation of an integral, one is given with mistakes and the student is asked to justify what is wrong with it. Besides, improper integrals have not been explained yet at the moment in which the questionnaire was applied. This problem can be answered either by using the graphic register (by representing the function $f(x) = 1/x^2$ and identifying the area with integral) or the analytic register (by showing that f is not defined and/or not bounded in $x = 0$).

The answers of the students to this particular problem are reflected in the associate systemic network (Figure 2). Valid answers are placed above in the figure and there are only 8 out of the total of 28 non-blank answers. The rest of responses, a total of 20 placed below in the figure, were all in the analytic register. Among them, 7 out of 29 students responded that there was nothing wrong with the calculation. Three of them even repeated the same calculation. The rest (13 students) also tried to repeat the calculation or indicated how it should be done correctly suggesting one or several of the following misinterpretations:

– use of a different primitive;
– interchange between the signs when applying the Barrow rule (In this case, the result obtained is 2, that is coherent with the integration rules.);
– consideration of the constant of integration;
– miscalculations.

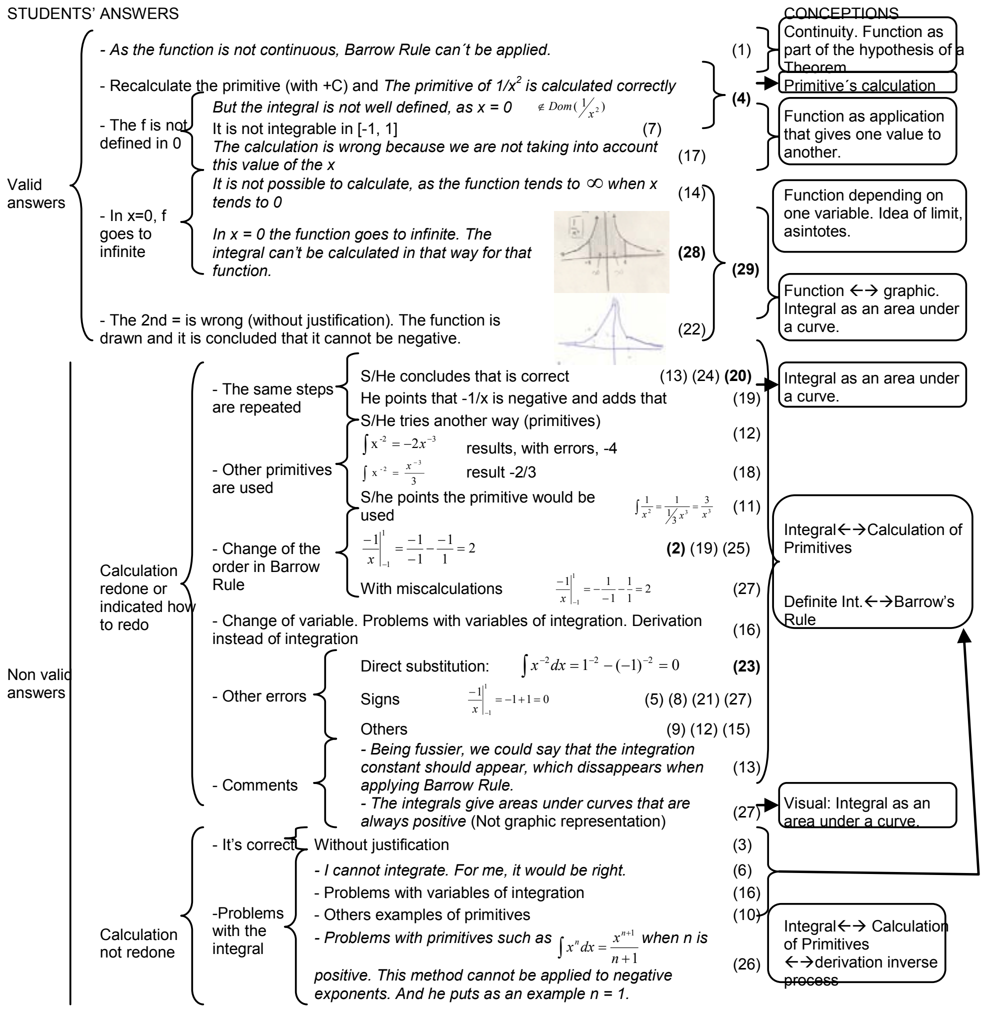


Figure 2: Systemic network associated to Problem 1.

Firstly, it is significant that only 2 out of 29 students explicitly used the graphic register, making a representation of the function and answering correctly. This fact reinforces our hypothesis about the advisability of the use of the graphic register coordinated with the analytic one or at least, the advisability of having a visual idea about what is happening. However, this visual interpretation of the integral can lead to some problems that could be due to the mechanical learning of this connection instead of having the visualization of an image (none of them included a graphic representation in their answer):

- *The integrals give areas under curves that are always positive (27[3]).*
- *As -1/x is negative, when we make Barrow we should change the signs (19).*

Secondly, looking at the balloons on the right side of the systemic network (Figure 2), it is possible to see the importance of the choice of representation in solving the problem successfully. This choice is directly related to the way the integral is being conceptualized. All the students who gave valid answers, placed on the top of Figure 2, either focused on the function (overall properties as continuity or asymptotes, or local at $x = 0$), or they contemplated the integral as a product (area under a curve). This led two of them to the use of the graphic register. However, most of the students, a total of 22, interpreted the integral as a process (calculation of primitives and Barrow rule or integration as inverse process of derivation) which led all of them to the use of the analytic register. In this case, students do not seem to achieve a complete understanding about what is happening and were not able to give a correct answer, making some of the mistakes cited above.

Thirdly, we examine the way in which representations are used. The data above show that the kind of representation chosen does not completely determine the success or lack of success in the resolution. The way in which these representations are used is also important. For example, student 4 is the only one who, at the beginning, puts attention in the integral as calculation of primitives but answered successfully. This is possible because of the flexible combination of this calculation with another argument about the domain of definition of the function.

Finally, the analysis made from the systemic network associated to this problem (Figure 2) has enabled us to observe how, according to Duval's theory, the appropriation of a diversity of representations of the concepts involved in a problem together with an appropriate and flexible use of them, provide a good understanding of the concepts as well as the problem (see 28 and 29). Although as earlier noted, it is important that this coordination is not made mechanically as it could result to some mistakes (19 and 27). It should be done with reflection.

[3] It was adjudicated a number from 1 to 29 to each student that answered the questionnaire. In the systemic network, this number appears between parentheses together with the answer given by this individual. So, from now on, we will use this numeration to refer both the answer and the students.

Problem 2

In this problem, a direct evaluation of an integral was asked. However, the non-routine aspect of it, as well as its main difficulty, was the kind of function integrated: an absolute value defined in intervals. Therefore, this problem enables us again to explore students' ability in the computation of integrals (application of properties, calculation of primitives, use of Barrow rule, graphic evaluation of integrals). As shown below, this problem admits several kind of resolution using the graphic register aside from the following analytic solution:

$$\int_{-3}^{3}|x+2|dx = -\int_{-3}^{-2}(x+2)dx + \int_{-2}^{3}(x+2)dx = -\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-3}^{-2} + \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_{-2}^{3} = \ldots = 13$$

Students' answers to this problem are represented in the systemic network of Appendix 1. In this problem, 26 out of 29 students tried, but only 7 were able to solve it. As predicted in the prior analysis of the problem to separate the integral in intervals, this resulted to several difficulties summarized in the following table (Table 2):

KIND OF DIFFICULTY	DESCRIPTION
Problems with the property $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$	- It is not separated in parts. - It is calculated only one of the parts. - Two parts are considered: o But only the expression of the function is changed, not the integration intervals. o But they are separated at x=0. o But, although they are well calculated separately, they are not added in the end.
Miscalculations	- Primitives - Barrow rule - With operations

Table 2: Students' difficulties with Problem 2 in the analytic register.

The use of the graphic register is more present in students' solutions of this problem than in the previous one, in spite of not being present in the statement of the problem either. Moreover, it appears mainly among those students who answered the problem successfully: 5 out of 8 students who used the graphic register satisfactorily solved the problem. Two of them and 2 made some wrong interpretations although the answers were coherent and comprehension of the problem could be demonstrated.

Therefore, it is possible to analyze with more detail than before students' use of the graphic representations when solving problems. In order to do that, it is going to be useful to take into consideration the difference between iconic and heuristic function of images referred in Theoretical Foundation section. Some differences between both functions of images can be pointed out by looking at some examples. Thus, we can compare the answers of Students 18 and 7 with those of Students 28 and 22, shown in the Table 3.

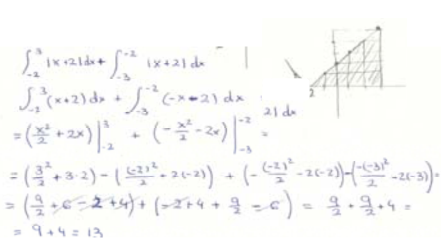
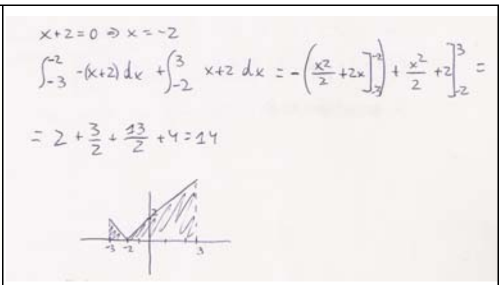
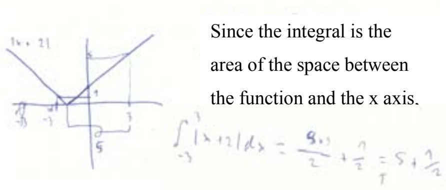
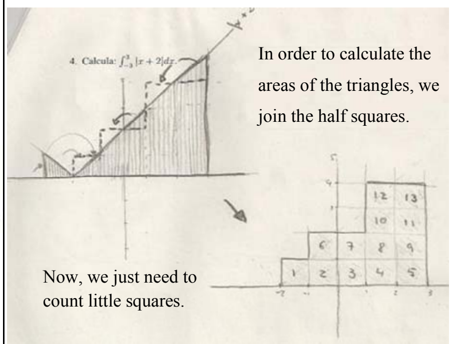
Iconic function	 **Figure 3:** Answer of Student 18.	 **Figure 4:** Answer of Student 7.
Heuristic function	 **Figure 5:** Answer of Student 22.	 **Figure 6:** Answer of Student 28.

Table 3: Iconic and heuristic functions of images in the answers to Problem 2.

All the graphic representations made are almost the same (with or without little squares). However, they have a very different role in each resolution of the problem. In the first row, we can see two answers in which the main argument is analytic accompanied by an image. These images seem to be used either to have an overview of the problem (Figure 3) or to check (Figure 4). However, in the second row (Figure 5, Figure 6), the image is key in the argument. It is essential. That is, if the image was removed, the argument would not have any sense.

Another difference between both functions of the images is that in the iconic answers, there are no graphic *treatments.* This is not necessarily the case in the heuristic ones.

Problem 3

This problem is again about the evaluation of an integral. However, in this case, the degree of abstraction is higher as the function to be integrated is not completely known (it is only known that it is odd) and it depends on a parameter, *b*. Thus, difficulty increases and a deeper understanding of the fundamental concepts involved is needed. These concepts are the odd function and the definite integral. Both of them admit either a graphic or an analytic representation, being any of them suitable in solving the problem.

We note a particularity of the statement of this problem in relation to previous ones. The fact of being *f* defined as "odd", instead of writing for example, $\forall x \in [-a,a] \quad f(-x) = -f(x)$, it could suggest the use of the graphic register or at least, the coordination of registers. However, the conversion to the graphic register is not compulsory to solve the problem. Actually, although the use of the graphic register in this problem is higher than in the previous ones, the strategy followed by most of the students (12 out of 20 who tried to solve the problem) is eminently analytic and it is the following:

$$\int_{-a}^{a} \left(b + \left(f(x)\right)\right)dx = \int_{-a}^{a} bdx + \int_{-a}^{a} f(x)dx = bx\Big|_{-a}^{a} + 0 = 2ab$$

Students' answers to this problem are presented in the systemic network of Appendix 2. There, it is possible to see that only half of the students that used this analytic answer give the correct answer.

KIND OF DIFFICULTY	DESCRIPTION
Problems with the definition of odd function	- Not to know how to use it. - To change it with the definition of even function. - Punctual definition, only in the extremes. - To use explicitly or implicitly: f(x)+b odd
Problems with the defined integral	- Calculation: similar to previous problems. - Properties: o Additive: mental block if is not applied at the beginning. o To take out of the integral additive constants. o Not to change the sign when a change either in the integration extremes or in the variables is made.
Symbolic misinterpretations	- Problems with notation (names of parameters) Problems with the integral symbol, (used to refer the primitive) $\int_a^b \left(f(x)\right)dx = \int f(a) - \int f(b)$

Table 4: Difficulties of the students with Problem 3 in the analytic register.

The rest of strategies followed consist either of separating the integration interval at 0 or having a more abstract character, producing some logical misinterpretations. For example, Student 13 tried to reason out by proving that *f* even implies *f'* odd and then concludes that *F*, the primitive, is even. That is, he proved an implication that is used in the opposite sense afterwards. In Table 4, the main difficulties found in analytic answers are summarized. Among these difficulties, we find some of the common difficulties of the calculation of integrals pointed in previous problems aside from those predicted on the a priori analysis due to the abstract character of the problem. New obstacles related to the use of more general arguments have been added too. Moreover, in this case, the concept of integral appears intertwined with the concept of odd function, which presents its own difficulties.

In relation to the graphic register, there are 8 out of 20 students who used it in their answers. Taking into consideration again the difference between iconic and heuristic function of images, the use of graphic register in this problem presents some particularities that are worth underscoring.

Firstly, we found the most common type of answers, 5 out of 8 students, in which the graphic representations used appear in combination with the analytic register. In these cases, images are employed either to try to remember the definition of odd function or to obtain some other properties, but they do not contribute very successfully in the resolution of the problem. Therefore, image is not essential and it could be said it performs an iconic function. Thus, we say that the method of resolution is *non-visual¸* in spite of the graphic register's presence.

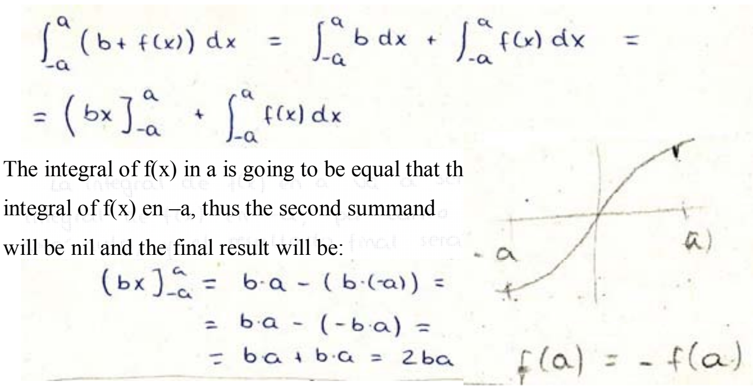


Figure 7: Non-visual answer of student 20 to Problem 3.

The solution above (Figure 7) illustrates this kind of use of the graphic register. It belongs to Student 20, the only one among five students who is able to give the correct answer. The main argument is analytic and it appears with a graphic representation, which is interpreted by giving an incorrect definition of odd function. However, this wrong interpretation did not affect the analytic reasoning, which is valid. Moreover, this example shows one difficulty typical of iconic use of images: the lack of coordination between graphic and analytic registers. In this case, lack of coordination can be attributed to several reasons: the "pointwise" understanding of the graphic representation (Monk, 1988 quoted in Eisenberg & Dreyfus, 1991), or the lack of connection between integral and area.

Secondly, there are answers in which images perform a heuristic function (3 out of 8 students). Two very different arguments are found among them attending to a different number of conversions made between the analytic and the graphic registers. The first kind of argument was given by only one student (Figure 11). It is completely *visual* since the main argument is developed in the graphic register. Therefore, only one conversion is made (analytic-graphic). This answer will be analyzed more extensively in the next section (see 4.2).

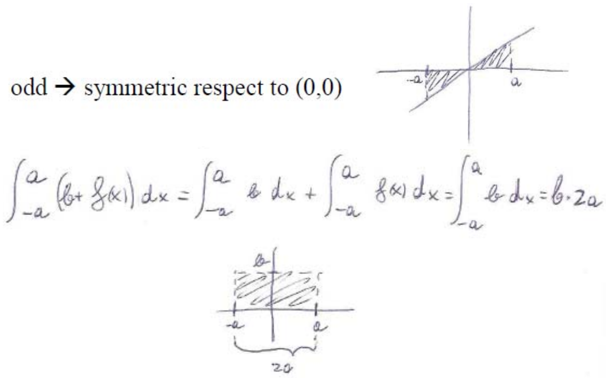


Figure 8: Mixed answer of Student 7 to Problem 3.

The second kind of argument was used by two students, one of them (student 7) giving a valid answer (Figure 8). As a first step in the analytic register is needed in order to apply the additive property of integrals, it has been called *mixed*. Later on, each integral is converted into a graphic representation which allows calculating their value without performing treatments in the algebraic register. Finally, it is needed to revert to the analytic register in order to finish the evaluation of the integral. Thus, in this last case, two conversions are made (analytic-graphic-analytic). In both arguments, images are essential but in a very different way.

Overall view of the results of the questionnaire.

In order to have an overview of the results of the questionnaire, a recount of students' answers attending to the following four indicators was made:

- Ans- Number of students that do not leave the answer blank.
- Corr- Number of students that answer correctly.

- VA- Number of students that use a visual method.
- GR- Number of students that make some graphic representation.

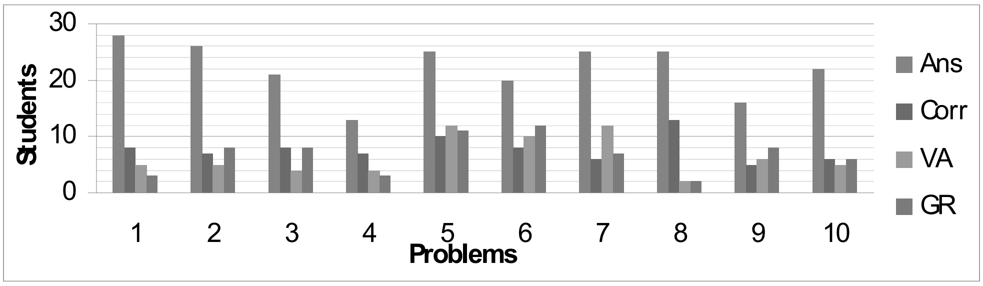


Figure 9: Graph of the overall results of problems.

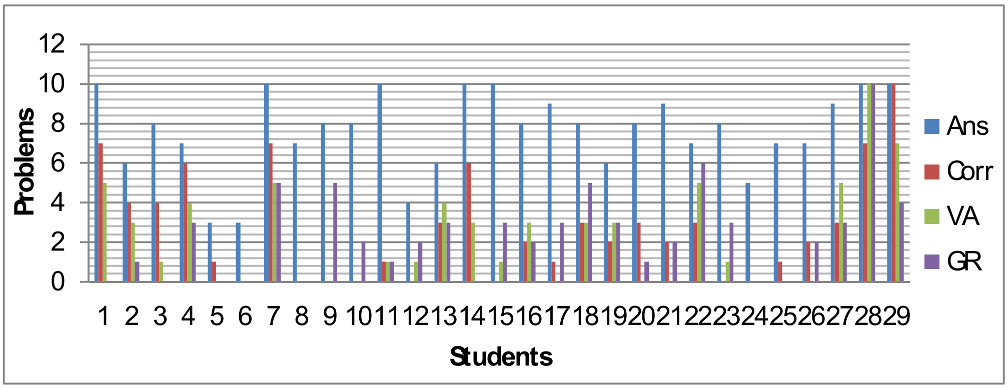


Figure 10: Graph of overall results of students.

In Figure 9 and Figure 10, each column corresponds to one indicator. The relation between the first two columns (Ans and Corr) enables us to have an idea of students' achievement in the questionnaire. The relation between the last two columns gives us an idea of the presence of visualization processes in students' answers, making the distinction between the presence of a graphic representation (GR) and a visual argument (AV). As it has been discussed above, this distinction is related to the difference between iconic and heuristic function of images. Therefore, the limited success and presence of visualization processes in students' answers are pointed out. This conclusion is valid for both, the problems related to the integral concept (1, 2, 3 presented in this paper and 4) and the others in the questionnaire[4].

[4] The original ordering in the questionnaire was different and problems about integral were not consecutive. It has been modified here in order to make it coherent with the numbers in the analysis presented in this paper.

Furthermore, results can be interpreted from two points of view offering different perspectives: (1) interpretation from the problem point of view gives us an idea about the students' understanding of the main concepts of Mathematical Analysis, particularly that of the integral; (2) interpretation from the student point of view gives us an idea of individual differences according to achievement and preference to visualize.

4.2. An example and a counterexample of visualization

Until now, data has shown how the prevalence of the analytic register as well as the lack of coordination between registers. Both results explain some of the students' difficulties in solving problems on the concept of integral. Following our initial hypothesis, special attention has been given to the graphic register. It has been found that its use cannot be always considered as visualization, as it is related to the heuristic function of images. But how can we help students to use images in a heuristic way? Now, we will analyze two examples taken from the data in order to illustrate two characteristics of visualization that should be taken into account in its specific teaching: a high cognitive requirement and the need of a global apprehension of the images.

Analysis of a visual method of resolution: a high cognitive requirement

The first example we are going to analyze is the visual argument found among the answers to Problem 3 (Figure 11). It belongs to Student 28, which shows (Figure 10) a clear preference for visualization and an acceptable achievement in the questionnaire (7 correct out of 10 answered problems). The analysis of this original visual answer enables us to go deeper into the cognitive difficulties of visualization pointed out by Eisenberg and Dreyfus (1991).

As it was noted above, the main argument is visual because it takes place completely in the graphic register. In the end, there is also a non-visual answer that takes place in the analytic register. It could be considered as verification more than as the main argument. This non-visual answer follows a linear process consistent in the succession of several algebraic treatments performed without mistakes giving $2ab$ as the result. Unlike the non-visual answer, the visual one is far from being linear. Actually, more concepts and relations should be taken into account simultaneously. These are the following: (1) It is required a visual interpretation of the integral as an area and of the odd functions as those symmetric with respect to the origin; (2) It should be remembered that adding a constant quantity to a function means a translation of its graph along the y-axis though this notion is not necessary for the analytic answer; and finally, (3) There is the need to generate areas through some editing similar to "cut and paste", considering their signs.

Obviously, in both arguments, the result is the same. However, each kind of argument leads us to see the problem in a very different way.

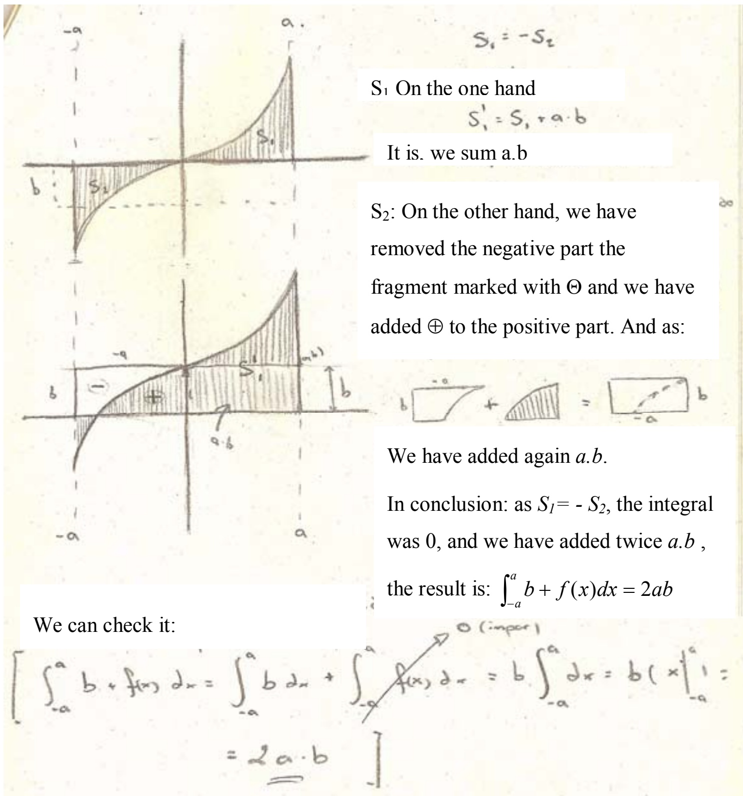


Figure 11: Visual answer of Student 28 to Problem 3.

Therefore, each register provides a very different understanding of the situation but they require different cognitive processes. In particular, in this example, it has been found that visual argument is not linear and it involves more relations and notions than in the analytic one (for example, the translation along the y-axis). Thus, from a didactic point of view, we emphasize the convenience of combining both kinds of arguments, visual and non-visual, but taking into consideration the higher cognitive requirement of the former.

The case of Silvia: The global apprehension

The following discussion is obtained from the interviews. Unlike the previous example, visualization as defined in this study seems to be absent. Nonetheless, the analysis of this case is illustrative. As counterexamples in Mathematics, this analysis makes us know what is not working in this case and realize that what is occurring here is useful in understanding the aim of the study, that is, processes of visualization.

The subject chosen for this interview, named Silvia (Student 23), was selected because her responses to the questionnaire showed some preference for graphic register (see Figure 10). However, her achievement in the questionnaire was low: (no correct answer in 8 problems tried). Therefore, some difficulties related to visualization were conjectured. The interview enabled us to go deeper into these difficulties. There are three notable parts in these interviews corresponding to the task based on Young's Inequality.

The first part belongs to the moment in which only the image (Figure 1) is shown to her and she was asked to interpret it. Silvia detected isolated elements (1[5]) and even made some references to the integral as an area (7). She based the difference between the two images in Riemann's theory of integration, which has been taught recently. But there is no clear evidence if the areas she has identified are the ones involved in the inequality.

The second part begins when the statement of the inequality is shown (Figure 1) and she was asked if there are some relations with the image. She presumed a relation, but it does not seem to be too clear for her (8). Actually, she frequently asked for help in making questions (12, 17, 18). Finally, it seemed that she has found the graphic interpretation of the statement when she stated: *"The addition of the areas contained by the function is bigger than the area of the rectangle"* (14).

However, later in the interview, she admitted that she did not understand well the graphic representation ("drawing"): *"Well, to understand it [the theorem], with the drawing I wouldn't understand it*" (besides 21, 22). In this last part, in order to be able to continue with the interview, some indications were given to the student in order to help her to correctly identify all the elements in the image with those in the statement (from 23 to 32). Silvia seemed to be able to coordinate both registers. Nevertheless, there was not any clear moment of understanding (33, 34).

Several reasons for explaining this lack of understanding could be pointed out: her incapacity of seeing f^{-1} in the image (17, 18), the way integral has been recently explained in class (7). However, from the point of view of visualization, the main hypothesis established is the lack of global apprehension. Thus, for her, the image was only an illustration, an iconic representation that does not work as a means of visualizing the statement of Young's Inequality.

[5] This number makes reference to the place occupied for the fragment of transcription of the interview referred in the text. This number appears in the left column of the transcription in Appendix 3.

These two pieces of data allow us to show the high cognitive difficulty of visualization and the necessary but not sufficient condition of coordinating two different representations of the concept of integral in order to visualize. In this way, it is possible for the student to establish a relation between these two representations but it could be not enough to make an image meaningful, that is, to overcome the iconic function of the graphic representation. Global apprehension is needed as well.

5. Conclusion

In this paper, the following two research questions formulated in the introduction have been explored through a theoretical discussion and the analysis of empirical data obtained in a larger study:

- What kind of understanding of the concept of the integral do university level students possess and exhibit?
- What are the possibilities that visualization offers to improve the students' learning of the concept of the integral?

An initial hypothesis based on previous research (Mundy, 1987; Llorens y Santoja, 1997; González-Martín & Camacho, 2005) was behind these two questions: first year undergraduate students' mechanical and operative way of using the concept of integral could be attributed to the lack of integration between the concept of area and the integral and therefore, the lack of coordination between the analytic and graphic registers. This hypothesis lead us to take into account the cognitive theories of registers of semiotic representation (Duval, 1995, 1999, 2006; Hitt, 2003, 2006) in order to explain and analyze students' difficulties with the concept of integral. Research on visualization (De Guzmán, 1996; Arcavi, 2003; Presmeg, 1985, 1991, 1994, 1995, 2006; Eisenberg & Dreyfus, 1991) has been useful to analyze students' productions too, incorporating other perspectives of analysis that go beyond the semiotic approach.

With this point of view of our problem, in order to answer the first research question, we have identified aspects related to the students' understanding of the concept of integral paying special attention to students' use of the graphic register: difficulties, mental blocks and misinterpretations as well as representations, treatments and conversions that appear in the students' answers to three problems of the questionnaire. In order to explore the second research question, two examples from the data have been analyzed. This is to illustrate the characteristics of visualization that should be taken into account in its specific teaching.

In this analysis, it has been found of particular interest to exploit the distinction between *iconic* and *heuristic function of images* (Duval, 1999). Moreover, the *heuristic function* has been identified with *visual methods* (Presmeg, 1985) which inspired us to distinguish three different kinds of methods in solving a problem using the graphic register: *non-visual, mixed* and *visual*. Therefore, visualization, as being dealt with in this study, is not necessarily always present when graphic register is used.

Other important conclusions in this paper are: (1) Operative and mechanical students' understanding of the concept of integral, except in some individual exceptions; (2) Teaching visualization by combining visual and non-visual aspects is a complex task in which specific characteristic of this ability should be taken into account.

1. *Operative and mechanical students' understanding of the concept of integral, except in some individual exceptions.*

According to our initial hypothesis, the analysis of the three problems highlighted the prevalence of an operative and mechanic use of the integral which appears to be linked to the use of analytic register and which results to numerous miscalculations. This result is characteristic of the concept of integral but also of other concepts of Mathematical Analysis, as the overall view of results pointed out. Some reasons that may explain this fact are the following:

a. *The connection between the choice of representation and the conception of integral owned:* It was noted in the analysis of the systemic network associated to the Problem 1 that integral seen as a process leads to the identification with the notions of "primitive" and Barrow's rule and hence, the choice of an analytic representation. Nevertheless, integral seen as a product leads to the identification with the notion of area and consequently, to the choice of a graphic representation as well. Most of the students have a process point of view of the integral.

b. *The lack of flexible coordination between the analytic and the graphic register*. As it has been pointed out, most of the students choose the analytic register and eventually, they got stuck into it. There are no evidences of that they are able to integrate the concept of the integral and area. However, this connection has been found advisable either to check the answer (see answer of the student 28 to Problems 3) or to deal with the non-routine character of the problems (see analysis of the Problem1, students 28 and 29).

c. *Iconic versus heuristic function of images*: On the other hand, among those students who use the graphic register, we frequently find that the image remains as an accessory element in the resolution of the problem, not being as meaningful as it might be. That is, there is a frequent iconic use of images, which does not contribute to get a better understanding of the situation. This happened, for example, in the answer to Problem 3 of the Student 20 (Figure 7). Another consequence of this iconic use of images is a small number of substantial examples of image treatment, such as the answer of the Student 28 to Problems 2 and 3 (Figure 6, Figure 11). Image treatment has been found related to the heuristic function of images.

d. *The problem of conversion and the importance of the register of problem's statement:* Most of the problems were posed in an analytic register. Therefore, a conversion was needed in order to solve them by using the graphic register. Thus, the shortage of visual answers can be explained by saying that conversion is difficult for students, which confirms results of previous research (Duval, 1999). This difficulty lies between cognitive and sociological reasons for reluctance to visualize pointed by Eisenberg & Dreyfus (1991). If only analytic register is used in classroom, as conversion is difficult for students, they are going to be condemned to use it.

2. *Teaching visualization by combining visual and non-visual methods is a complex task in which specific characteristic of this ability should be taken into account.*

The convenience of combining both kinds of arguments, visual and non-visual, is pointed out. The analysis of the first example of the section 4.2 highlighted that each register provides a very different understanding of the situation. But how can we help students to use images in a heuristic way? Some characteristics of visualization should be taken into account:

a. *The flexible coordination of both registers:* It involves having at least a representation in each one, to identify the represented units and to find relations between them in both representations. We claim that the coordination of registers can be learned. Thus, taking into account the findings of this study, we emphasize the necessity of a specific training of image treatment and conversion via tasks proposed in both registers as part of a teaching of visualization.

b. *The global apprehension:* To coordinate an analytic and a graphic representation could be not enough to make an image meaningful. That is, to overcome the iconic function of the graphic representation. As we could see through the analysis of Silvia's episode, global apprehension is needed too. It allow going beyond mere identification of the represented units.

c. *The high cognitive difficulty of visual arguments:* Besides the coordination between the analytic and graphic registers, and the global apprehension, we see in the example of the visual answer to Problem 3 that visual methods are not necessarily linear and that they can involve more relations and notions that the analytics ones (in the example, the translation along y's axis). This higher cognitive difficulty of visual reasoning should be taken into account in a specific teaching of visualization too.

In the future, we find it relevant to continue researching around these three factors as well as how to put them into practice. It could be done through an explicit teaching experiment of the visualization of concepts. In this way and by thinking on the impact of this research into the practice, we believe that the analysis made from the three problems via the systemic networks is a valuable material that can be used in the design of teaching situations for the classroom. For the future, we also find it important to undertake more studies like this in order to make advances in a systematic knowledge of the different kind of representations, treatments and conversions in each register of the main concepts of mathematics.

Acknowledgments

This work has been partially supported by grant AP2007- 00866.

Bibliography

ARCAVI, A. (2003), The role of visual representations in the learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, **52(3)**, 215–24.

BLISS, J., MONK, M. & OGBORN, J., (1983), *Qualitative data analysis for educational research. A guide to users of systemic networks*, Croom.Helm:London.

DUVAL, R (1995), *Sémiosis et Pensée Humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Neuchatel: Peter Lang. (Translated to spanish as Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. by M. Vega Restrepo, Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, GEM. Cali. Colombia, 1999).

DUVAL, R. (1999), Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking, Basic issues for learning, En F. Hitt y M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st North American PME Conference*, **1**, 3–26.

DUVAL, R. (2006), A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, **61**, 103–131.

EISENBERG, T. & DREYFUS, T. (1991), On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmemann, W. & Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics,* MAA Notes **19**, 25–37, Washington, D.C.

GLASER, R. & STRAUSS, A. (1967) *The discover of grounder theory: strategies for qualitative research*. New York: Aldine Publishing.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S. & CAMACHO, M. (2005), Sobre la comprensión en estudiantes de Matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores. *Enseñanza de las ciencias*, **23 (1)**, 81–96.

GUZMÁN, M. DE (1996), *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático*, Ediciones Pirámide, S. A.

HITT, F. (2003), Le caractère fonctionnel des représentations, *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, **8**, 255–271, IREM de Strasbourg.

HITT, F. (2006), Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example: the concept of limit, *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, **11**, 251–267, IREM de Strasbourg.

LATORRE, A, RINCÓN, D. & ARNAL, J. (1996), Bases metodológicas para la investigación educativa, Barcelona: GR92.

LEGRAND, M. (2002), Scientific Debate in Mathematics Courses, In Holton, D., Artigue, M., Kirchgräber, U., Hillel, J., Niss, M., & Schoenfeld, A. (Eds.), (2002).

The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

LLORENS, J.L. & SANTOJA, F.J. (1997), Una interpretación de las Dificultades en el Aprendizaje del Concepto de Integral, *Divulgaciones Matemáticas*, **5(1(2))**, 61–76.

MUNDY, J. (1987), Analysis of Errors of First Year Calculus Students, en *Theory, Research and Practice in Mathematics Education*, Bell, A., Low, B. y Kilpatrick, J. (Eds.), *Proceedings ICME*, **5**, 170–172.

PRESMEG, N.C. (1985), *The role of visually mediated processes in high school mathematics: A classroom investigation*, Unpublished Ph.D. dissertation, Cambridge University, England.

PRESMEG, N.C. (1991), Classroom Aspects which Influence Use of Visual Imagery in High School Mathematics. In F. Furinghetti (Ed.) *Proceedings of the 15th PME*, Assisi, June 29 - July 4, 1991, **3**, 191–198.

PRESMEG, N.C. & BERGSTEN, C. (1995), Preference for visual methods: an international study. In L. Meira & D. Carraher (Eds), *Proceedings of the 19th PME*, **3**, 58–65, Recife, Brazil: PME.

PRESMEG, N.C. (2006), Research on visualization in learning an teaching mathematics*, Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future. PME 1976-2006*. Ed. Sense Publishers, 205–235.

SOUTO, B. (2009), Visualización en matemáticas. Un estudio exploratorio con estudiantes del primer curso de Matemáticas. Master Dissertation, UCM. (Retrieved from http://www.mat.ucm.es/vdrmat/TI-08-09/trabajo-master-curso-2008-09-blanca-souto.pdf).

SOUTO, B. & GÓMEZ-CHACÓN, I. (2009), How to prepare students for a successful first year at university: an experience in visualization, En Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. y Sakonidis, H (Eds.) Proceedings of the 33rd PME, **5**, 495. Thessaloniki, Greece: PME.

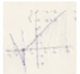
Blanca SOUTO RUBIO,
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
blancasr@mat.ucm.es

Inés Mª GÓMEZ-CHACÓN
Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid
igomezchacon@mat.ucm.es

Appendix 1. Systemic network associated to the Problem 2

The integral is calculated

- Previous obs.
  - Calculation of the roots : x+2 $\Rightarrow x=-2$
  - Definition of | | as a piecewise function



S/He makes a wrong graphic representation not used to answer (21) → S/He calculates correctly (21)

- Analytic calculation
  - Well separated in pieces — Primitive's calculation — Barrow rule — S/He calculates obtaining 13

$$\int_{-3}^{3}|x+2|dx = -\int_{-3}^{-2}(x+2)dx + \int_{-2}^{3}(x+2)dx = -\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-3}^{-2} + \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-2}^{3} = Cálculos = 13$$

(1) (18) (21)

| | ↔ piecewise function
Integral ↔ Primitive's calculation
Definite integral ↔ Barrow rule

- Graphic repres.
  - Distinction of little squares

(18)

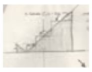
$\frac{1}{2}+\frac{25}{2}=13$ *Here, the most direct way of calculation is to draw and to calculate by parts. As they are right-equilateral triangles, the slope is 1 and it is easy to calculate the area.* **(29)**

  - Calculation of the area under the graphic of the function

This integral would have the value of the shaded area, if it would some "negative" area (under the axis) I should subtract instead to add.

S/he calculates separately: $A_1=\frac{1.f(-3)}{2}=\frac{1.1}{2}=\frac{1}{2}$; $A_2=\frac{5.f(3)}{2}=\frac{5.5}{2}=\frac{25}{2}$

S/He writes the result: $A_T=A_1+A_2=\frac{26}{2}=13$ $=\int_{-3}^{3}|x+2|dx$ (13)



In order to avoid the calculation of triangle's areas, we join the half squares.

Now, we just need to count little squares. **(28)**

| | ↔ V
Integral ↔ area under a curve (with sign)

The integral is not calculated

Mistakes related with separation in pieces: not separated, wrongly separated or left separated

- Calculation of either just one piece or without separating into pieces
  - The definition of | | it's not taken into account | Barrow is applied directly without calculation of primitives | *I've just applied the method I was taught in order to solve integrals.* (11)

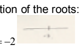
$\int_{-3}^{3}|x+2|dx = x+2|_{-3}^{3} = 3+2-[(-3)+2] = 5-(-1) = 6$

|x+2| ↔ (x+2)

  - S/He write the definition of | | as a piecewise function — It is not taken into account and s/he calculates $\int_{-3}^{3}(x+2)dx = Cálculos = 12$ (10)

Int. ↔ Barrow (without primitive's calculation)

  - Calculation of the roots: x+2 $\Rightarrow x=-2$



S/He writes x<-2 and only this piece is calculated without modifying the intervals of integration — A sign is forgotten (9)

$\int_{-3}^{3}|x+2|dx = \int_{-3}^{3}(-x-2)dx = -\int_{-3}^{3}xdx - \int_{-3}^{3}2dx = \frac{x^2}{2}\Big| -2x|_{-3}^{3} = Cálculos = -12$

  - S/He puts $\int$ inside of | |: Barrow is applied in the wrong order

$\int_{-3}^{3}|x+2|dx = \left|\frac{x^2}{2}+2x\right|_{-3}^{3} = \left|\frac{9}{2}+(-6)\right| - \left|\frac{9}{2}+6\right| = Cálculos =$

- Correct calculations giving 12 **(4)**
- Wrong calculations giving $-\frac{23}{2}$ (25)

| | ↔ critical point in x=2

- Two pieces are considered
  - But intervals of integration are not modified
    - The primitive is calculated without taking into account the | | — 2 pieces are calculated (without intervals), the sign is changed in one, s/he operates and 0, -12 (15)

$-x\geq -2$ $\int_{-3}^{3}(x+2)dx = \int_{-3}^{3}xdx + 2dx = 12$

$-3<x<-2$ $\int_{-3}^{3}(2+x)dx = \int_{-3}^{3}2dx + (-x)dx = -1$ (12)

    - Incorrect definition of | | as a piecewise function.

$\int_{-3}^{3}|x+2|dx = \int_{-3}^{3}x+2dx = Cálculos = 12$

$\int_{-3}^{3}|x+2|dx = \int_{-3}^{0}-x+2dx = Cálculos = 12$ (26)

Calculations are left separately. (12) (15) (26)

Integral ↔ Primitive's calculation
Definite integral ↔ Barrow rule
| | ↔ piecewise function

    - Calculation of two integrals $\int_{-3}^{3}(x+2)dx\ y - \int_{-3}^{3}(x+2)dx$
      - Wrongly operated (signs) — Results 12,9 — Substraction (24)
      - Change of order in Barrow in the 2[nd] because of *it's negative* — Results 12,12 — 12 as result (19)

Integral ↔ area under a curve

    - Mistake in the calculation of the primitive

$\int_{-3}^{3}|x+2|dx = \int_{0}^{3}x+2dx = Cálculos = 12$

$\int_{-3}^{3}|x+2|dx = \int_{-3}^{0}-x-2dx = Cálculos = 12$ **(23)**

|x+1| ↔ |x| + 2

  - But it is separated in x = 0
    - S/He calculates $\int_{-3}^{3}|x|+2dx$

$\int_{0}^{3}|x+2|dx = \int_{0}^{3}x+2dx = Cálculos = \frac{21}{2}$

$\int_{-3}^{0}|x+2|dx = \int_{-3}^{0}2-xdx = Cálculos = \frac{21}{2}$ (16)

$-\int_{0}^{3}|x+2|dx = 5-2=3;$ $\int_{-3}^{0}|x+2|dx = 2+1=3$ (17)

Suma las dos integrales (16) (17) **(23)**

Int. ↔ Barrow (without primitive's calculation)

  - With correct intervals — Primitives are correctly calculated in each piece — Barrow is well applied — Separated calculations (3)

Mistakes in the calculation of the primitive

- Calculation of roots: x+2 $\Rightarrow x=-2$
- Definition of | | as a piecewise function
  - Correctly separated in pieces — Mistakes in the calculation of the primitive in one of the pieces: $\int_{-2}^{3}(x+2)dx = \left(\frac{x^2}{2}+2\right)\Big|_{-2}^{3}$
    - Barrow is applied (addition) — Operations and 14 — Inexact graphic repres.

(7)

    - Barrow is applied correctly — Operations and result $3u^2$ (14)

Integral ↔ area under a curve
| | ↔ piecewise function

Mistakes with Barrow rule

- Piecewise function integrated

$f(x) = \int_{-3}^{3}|x+2|dx$ $f(x) = \begin{cases} x+2 & x\geq -2 \\ -x-2 & x<-2 \end{cases}$ → $F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}+2x & x\geq -2 \\ \frac{x^2}{-2}-2x & x<-2 \end{cases}$

Barrow applied directly using this F and after calculations, it results –9

$\int_{-2}^{3}(x+2)dx = \frac{(-3)^2}{-2} - 2.(-3) - \left(\frac{(3)^2}{2} - 2.(3)\right) = ... = -9$

As it should be poisitive. we take |-9| = 9u² (27)

Integral ↔ Primitive's calculation
Definite integral ↔ Barrow rule

Micalculations

- Graphic representation

Since the integral is the area of the space between the function and the x axis, it is hold that: Miscalculations $\int_{-3}^{3}|x+2|dx = \frac{5.5}{2}+\frac{1}{2} = 5+\frac{1}{2}$ (22)

| | ↔ V

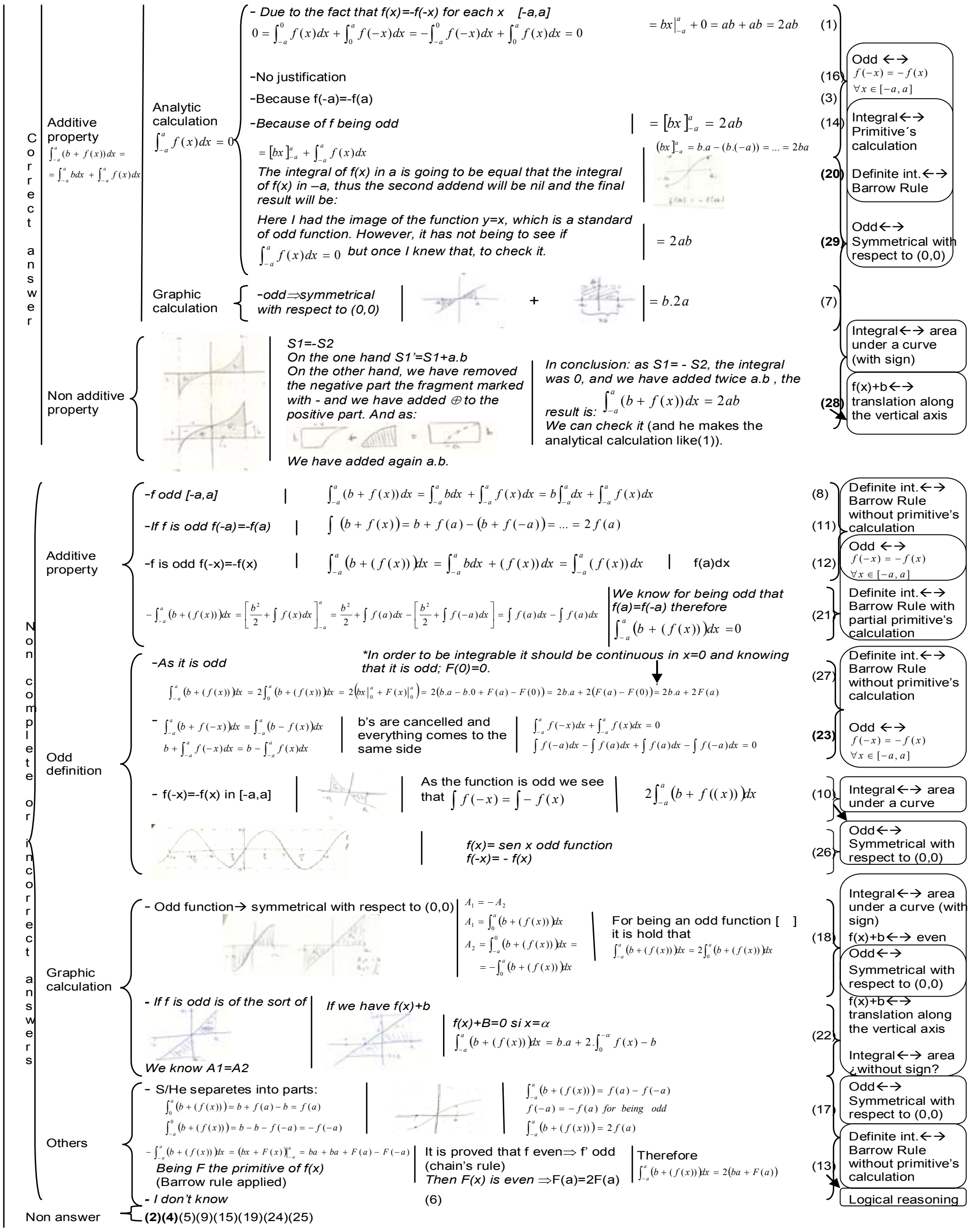
- Definition of | | as a piecewise function — Correctly separated — Calculation of primitives — Barrow rule — Miscalculations and 5 **(20)**

Others

- Incorrect definition of | | as a piecewise function (without intervals) — S/He cannot follow (mantal block) (8)
- *I don't have a clear idea of integrals. I saw them in high school and one year and a half has past since then.* **(2)**
- *I don't know how to integrate very well.* (6)

No answer (5)

Appendix 2. Systemic network associated to Problem 2



Appendix 3. Transcription of Silvia's interview

Part 1

1	S: I don't know. Let me see. There's a function (pointing at the function) and they give you a point (pointing at the point) and you calculate the area under (encircling the rectangle), isn't it? Between the function and the point.
2	E: OK. Is there something more that occurs to you?
3	S: I don't know.
4	E: How would you calculate the area?
5	S: The area of… the rectangle?
6	E: Um- huh.
7	S: Well, integrating the function… But still… This is what we're studying. So, integrating the function and… Let me see. This is the superior area of the function (she points with her finger at the upper part of the first drawing) and this is the inferior (she points with her finger at the lower part of the second drawing). I don't know.

Part 2

8	S: So the positive integral will be this. From 0 to a… (She puts her finger on the x-axis). (She quietly thinks for a moment). I don't know. Let me say that this is the same, isn't it? They are representing it to you. Let me see what it's doing here… Which one is the point a, this one?
9	E: Do you see any point in which *a* is written?
10	S: Yes, here, around *a* and *b* (she points at the point *(a, b)*).
11	E: OK.
12	S: Then it makes the area greater than or equal to *ab*. And what's *ab*? The rectangle?
13	E: What do you think?
14	S: Yes, yes. The sum of areas contained by the function is greater than the area of the rectangle.
15	E: And where are the areas contained by the function here in the statement?
16	S: In the integral.
17	E: OK, and this, the f^{1}?
18	S: This, no? (She points at the second image). I don't know.
19	E: Well, but you find some relation, don't you?
20	S: Yes.

Part 3

21	E: OK, what kind of explanations would you need with the drawing? Have you understood it completely, the drawing?
22	S: Um… Well…
23	E: The continuous function, with a positive derivative. Can you see it?
24	S: Yes, this (pointing at the 1st image and draws it in the air)
25	E: OK. After it passes by the 0, this has been shown, and where do you place the *a* and the *b*?
26	S: Well, the a (pointing at the *x*- axes) and the b (pointing at the *y*- axes).
27	E. OK, and then, now they say to you that ab, what was this? What did you say it was?
28	S: The area… of the rectangle.
29	E: OK, this is less than or equal to this integral, But where is the integral in the drawing?
30	S: Well, it'll be this, from *0* to a (pointing with her finger at an interval over the *x*-axes). This one, the *S'*s.
31	E: OK, and the other?
32	S: Well, *T*'s. (She's thinking).
33	E: This is little more difficult for you to see, isn't it?
34	S: Yes.