En guise d'éditorial

A travers son histoire longue de déjà quarante ans, L'OUVERT modifia à plusieurs reprises son aspect au gré des techniques nouvelles. Mise en page différente, typographie modernisée, introduction de la couleur, reliure plus élégante, autant d'améliorations qui rendent à chaque fois notre publication toujours plus attrayante. Jamais toutefois L'OUVERT ne changea de format. Aujourd'hui, l'initiative a été prise de refondre la présentation de la revue de l'IREM de Strasbourg et de l'APMEP d'Alsace tant dans son graphisme que dans sa dimension.

En cette ère du tout numérique, où la douceur du papier est remplacée par le froid écran de l'ordinateur, tout amoureux de la chose écrite sait que le second ne saura jamais vraiment remplacer le premier. Sans tomber dans un excès de passéisme et de nostalgie, force est de constater que la fréquentation des livres et des revues, que ce soit dans une bibliothèque scolaire, universitaire ou tout simplement personnelle, reste indispensable à tous ceux et toutes celles qui font preuve de curiosité et d'ouverture d'esprit.

Ne serait-ce que parce que la part de l'imprévu occupe une place capitale dans l'activité culturelle ou scientifique. Qui, en feuilletant négligemment un ouvrage, peut-être découvert de manière fortuite sur une étagère, n'est jamais tombé, totalement par hasard, sur un chapitre ou un article inattendu, infléchissant le cours de ses réflexions et ouvrant une porte inespérée vers de nouveaux horizons ? On me rétorquera très justement que, par ordinateur, c'est également possible. Mais je persiste à croire que surfer sur le net, comme on dit si joliment en français, relève moins de l'aléatoire que feuilleter un document écrit ou se promener entre les rayonnages d'une bibliothèque. Et, ceci est mon goût personnel, en a moins de charme.

Il est important d'offrir au public des livres ou des revues agréables à manier, à tenir, à lire. Nous espérons que l'évolution esthétique de ce précieux instrument de diffusion de la connaissance mathématique qu'est L'OUVERT sera appréciée de nos lecteurs. Les principes fondamentaux guidant notre revue depuis sa création ne changent guère. Plus que jamais, L'OUVERT, qu'il soit en papier ou en ligne, demeure, avec l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, duquel il est une des voix principales, une interface essentielle entre les enseignants du secondaire et du supérieur. Plus que jamais, à l'heure de la réforme du recrutement des maîtres, un tel outil s'avère indispensable pour les professeurs, les élèves, les étudiants, les curieux.

Nous souhaitons que le nouvel écrin de L'Ouvert donnera aux passionnés de mathématiques non seulement encore plus envie de lire notre revue et de s'y abonner, mais encore d'apporter leurs propres contributions en rédigeant des articles. «Chaque lecteur peut et même doit être un jour ou l'autre auteur» se fixait pour objectif, il y a exactement quarante ans, Jean Samson, éditorialiste du premier numéro de L'Ouvert. Formulons le vœu que L'Ouvert continue, sous son nouvel habit, d'être, conformément à l'origine de son nom, toujours et de plus en plus «ouvert à tous».

Philippe Nuss

Quelques notions sur les ordinaux

Jean Lefort

Résumé : Après avoir défini ce qu'est un bon ordre, on envisage tous les bons ordres de l'ensemble des naturels. On définit ainsi des ordinaux transfinis dont le plus petit, oméga, correspond à l'ordre habituel sur $\mathbf{N}$. On définit ensuite des opérations entre ordinaux (addition, multiplication, exponentiation) dont on donne quelques propriétés. L'existence d'une relation d'ordre entre ordinaux permet d'aborder la notion de récurrence transfinie. Enfin on laisse entendre qu'il existe des ordinaux plus grands que tous ceux que l'on peut définir à partir des naturels.

Mots-clés : Infini, ordinal, ordre, bon ordre.

On distingue habituellement dans la langue naturelle les nombres cardinaux comme $1, 2, 3, \ldots$ des nombres ordinaux qui sont $1^{\text{er}}, 2^{\text{e}}, 3^{\text{e}}, \ldots$ Dans ce dernier cas on parle parfois de « numéro ». Selon les langues, ces deux notions sont plus ou moins distinguées. L'anglais ignore cette distinction, l'allemand ou le russe les distinguent nettement tandis que le français hésite puisque si on parle de Louis I^{er} ou du 1^{er} avril, on parle ensuite de Louis XV ou du 12 avril, *etc.* Comme leur nom l'indique, les ordinaux font référence à l'ordre alors que les cardinaux ne se réfèrent qu'à la quantité. On distingue donc les deux 30 des phrases suivantes :

> *Le mois d'avril a 30 jours ;* notion de cardinal.
>
> *C'était le 30 avril ;* notion d'ordinal (on sous-entend que c'est le lendemain du 29, lui-même lendemain du 28,...).

1. Rappels

On dit qu'une relation (notée par exemple $\triangleleft$) dans un ensemble E est une *relation d'ordre* si elle possède les trois propriétés suivantes :

- elle est réflexive : $\forall x \in E,\ x \triangleleft x$;
- elle est transitive : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x \triangleleft y \text{ et } y \triangleleft z) \Longrightarrow x \triangleleft z$;
- elle est antisymétrique : $\forall (x, y) \in E^2,\ (x \triangleleft y \text{ et } y \triangleleft x) \Longrightarrow x = y$.

On caractérise certains ordres grâce à des propriétés supplémentaires.

- On dit que l'ordre est *total* dans E si $\forall (x, y) \in E^2,\ x \triangleleft y$ ou $y \triangleleft x$.
- On dit que l'on a affaire à un *bon ordre* dans E ou que E est *bien ordonné* si toute partie non vide possède un plus petit élément. Ceci implique en particulier que l'ordre est total.

On admet en général l'axiome du choix, équivalent à l'axiome de Zermelo qui dit que tout ensemble admet au moins une relation de bon ordre. Cependant, on ne connaît pas explicitement une telle relation de bon ordre sur $\mathbf{R}$.

Exemples

- La relation d'ordre habituelle dans $\mathbf{N}$, notée $\leqslant$, est une relation d'ordre total et aussi une relation de bon ordre.
- La relation d'ordre habituelle dans $\mathbf{Z}$, notée $\leqslant$, est une relation d'ordre total, mais n'est pas une relation de bon ordre (la partie $]-\infty, 2]$ ne possède pas de plus petit élément).
- La relation de divisibilité dans $\mathbf{N}^*$, notée $|$, est une relation d'ordre qui n'est pas total (on dit alors partiel).
- La relation d'inclusion dans l'ensemble des parties d'un ensemble donné, notée $\subset$, est une relation d'ordre partiel.

2. Quelques bons ordres sur N

Il est possible de fabriquer une grande quantité de relations d'ordre sur un ensemble donné. Ainsi les 26 lettres de l'alphabet français sont classées habituellement suivant l'ordre alphabétique $(a, b, c, \ldots)$ mais suivant l'ordre $(a, z, e, r, t, y, \ldots)$ sur le clavier de votre ordinateur. Dans les deux cas, on peut construire une bijection avec l'ensemble $[\![1, 26]\!]$ qui respecte la relation d'ordre. C'est implicitement ce qui a été fait en énonçant les lettres dans un certain... ordre ! Nous avons ainsi un isomorphisme d'ordre et même de bon ordre. L'ordre alphabétique usuel est tellement connu que si l'on signale une référence se trouvant dans le paragraphe d du chapitre 8, tout le monde sait qu'elle se trouve après le paragraphe c de ce même chapitre, *etc.*

Tant qu'il s'agit d'ensemble fini on peut se ramener à une partie finie de $\mathbf{N}$ donc à $[\![0, \ldots, n-1]\!]$ pour un certain naturel n (qui est le cardinal de l'ensemble fini). Mais les choses se compliquent dès que l'on passe aux ensembles infinis. $\mathbf{N}$ lui-même peut recevoir plusieurs relations de bon ordre qui ne sont pas isomorphes entre elles. En voici quelques exemples :

1. Plaçons dans $\mathbf{N}$ d'abord tous les nombres impairs puis tous les nombres pairs, c'est-à-dire que l'on a l'ordre $(1, 3, 5, 7, \ldots, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots)$. Il est facile de vérifier qu'il s'agit d'une relation de bon ordre. Seulement il est impossible d'établir une bijection de $\mathbf{N}$ sur lui-même qui transforme la relation d'ordre habituelle en cette nouvelle relation. En effet dans le cas présent, il y a deux éléments, 0 et 1, qui n'ont pas de prédécesseur tandis que dans l'ordre classique seul 0 n'a pas de prédécesseur.
2. Inspiré d'un résultat de Sarkovski, voici un bon ordre sur $\mathbf{N}^*$:
$$(1, 3, 5, \ldots, 2, 6, 10, \ldots, 4, 12, 20, \ldots, \ldots, 2^n \times 1, 2^n \times 3, 2^n \times 5, \ldots, \ldots),$$
où le premier paquet ne contient que les nombres impairs et les suivants ces mêmes nombres multipliés par les puissances successives de 2. On voit ici apparaître une infinité d'éléments qui n'ont pas de prédécesseur.
3. Considérons dans $\mathbf{N}$ l'ordre $(1, 2, 3, 4, \ldots, 0)$. Qu'il n'y ait pas isomorphisme avec la relation d'ordre habituelle résulte de la remarque faite sur l'exemple 1. Mais il n'y en a pas non plus avec ce même exemple 1 car ici il y a un élément, 0, qui n'a pas de successeur, tandis que dans les exemples 1 et 2 tous les éléments ont un successeur. Ici 0 est l'unique élément qui vient après

tous les autres. Il est assez tentant de dire que c'est l'infini plus un. Nous y reviendrons.

3. Les ordinaux finis

Les ordinaux finis sont tout simplement les naturels habituels. Seulement pour, d'une part bien mettre en évidence qu'un ordinal comme 5 vient après les ordinaux 0, 1, 2, 3 et 4, et d'autre part pour permettre de mieux représenter les ordinaux infinis, nous allons écrire ces ordinaux sous la forme d'une suite ordonnée. Ceci conduit à l'écriture qui rappelle (ce n'est pas un hasard) ce qui a été fait précédemment.

$$\begin{aligned}
0 &= (\ ) \\
1 &= (0) \\
2 &= (0,1) \\
3 &= (0,1,2) \\
&\cdots\cdots \\
n &= (0,1,2,3,\ldots,n-1)
\end{aligned}$$

Les parenthèses ne sont là que comme délimiteurs. Ce qui compte, c'est l'ordre dans lequel est écrite la liste. Nous voyons ainsi que l'ordinal 2 est à la fois un élément de l'ordinal 3 (le dernier élément) et une partie de l'ordinal 3 (appelée la section commençante (0, 1)).

Nous utilisons l'écriture à partir de l'ensemble $\mathbf{N}$ parce que cet ensemble est bien connu avec son ordre naturel. Mais il est clair que nous aurions pu représenter 3 par (a, b, c) où par définition $a < b < c$, ou par tout autre ensemble de trois éléments totalement ordonné par l'écriture même de leur liste ; ainsi $(7, 9, 100)$ convient également.

3.a. Addition de deux ordinaux finis

Nous voulons retrouver l'addition habituelle, l'addition où $2 + 3 = 5$, mais en utilisant l'écriture ci-dessus. Il n'est pas possible de mettre seulement bout à bout les représentations $(0, 1)$ et $(0, 1, 2)$ car nous obtiendrions $(0, 1, 0, 1, 2)$ qui ne contient que trois éléments distincts dont il est impossible de définir l'ordre (où serait 1 ?). Il faut donc utiliser une copie de $(0, 1, 2)$ qui ne contient pas les éléments de $(0, 1)$. Le plus simple est de prendre $(0', 1', 2')$ et d'écrire

$$2 + 3 = (0, 1) + (0, 1, 2) = (0, 1) + (0', 1', 2') = (0, 1, 0', 1', 2')\ .$$

L'idée est que tout nombre primé est plus grand que tout nombre non primé. Bien sûr, dans le cas présent où nous nous intéressons aux ordinaux finis, il aurait mieux valu réécrire $(0, 1, 2)$ sous la forme $(2, 3, 4)$ pour obtenir :

$$2 + 3 = (0, 1) + (0, 1, 2) = (0, 1) + (2, 3, 4) = (0, 1, 2, 3, 4)\ ,$$

et l'on reconnaît beaucoup plus facilement l'ordinal 5 comme on s'y attendait.

Mais nous verrons que dans le cas général, il faut être beaucoup plus astucieux. Une méthode assez générale, si on veut écrire la somme de plusieurs ordinaux, et non pas seulement la somme de deux ordinaux, c'est de remplacer dans chaque ordinal, ses éléments par des couples $\langle\ ,\ \rangle$ dont le premier élément indique le rang de l'ordinal dans l'addition. Ainsi :

$$\begin{aligned}2+5+3 &= (0,1)+(0,1,2,3,4)+(0,1,2)\\ &= (\langle 1,0\rangle,\langle 1,1\rangle)+(\langle 2,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle)+(\langle 3,0\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle)\\ &= (\langle 1,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,0\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,2\rangle)\ ,\end{aligned}$$

où l'on utilise l'ordre lexicographique, à savoir que

$$\langle a,b\rangle < \langle c,d\rangle \iff a<c \text{ ou } (a=c \text{ et } b<d)\ .$$

Et ce dernier résultat est identique à $10=(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)$ puisqu'il y a une bijection évidente qui respecte l'ordre entre ces deux expressions.

3.b. Multiplication de deux ordinaux finis

La multiplication est une addition répétée, il n'y a pas grand-chose à rajouter par rapport aux problèmes d'écriture qui ont été soulevés à propos de l'addition. Contentons-nous d'un exemple. Pour calculer 2×3 nous plaçons 3 copies distinctes de l'ordinal 2 bout à bout, ainsi :

$$\begin{aligned}2\times 3 &= (0,1)\times 3=(0,1)+(0,1)+(0,1)=(0,1)+(0',1')+(0'',1'')\\ &= (0,1,0',1',0'',1'')\\ &= (0,1,2,3,4,5)\\ &= 6 \quad \text{bien entendu!}\end{aligned}$$

4. Opérations sur les ordinaux

Tant qu'on en reste aux éléments finis, il n'y a vraiment pas grand-chose à ajouter. C'est quand on passe à l'infini que cela commence à devenir intéressant en mettant en évidence des propriétés originales. Et c'est en passant à l'infini que la notation précédente qui était rudement lourde va se révéler très pratique.

Un ordinal infini est donné par une relation de bon ordre sur un ensemble infini. S'il existe une bijection respectant l'ordre entre deux ensembles bien ordonnés, ces deux ensembles déterminent le même ordinal.

Le plus simple des ensembles infinis est $\mathbf{N}$. Nous poserons donc

$$\omega=(0,1,2,3,4,\ldots)\ ,$$

correspondant à l'ordre habituel. Cependant, il nous arrivera dans certains cas de ne pas utiliser 0 dans l'écriture, faute d'avoir une bonne raison pour le placer à tel ou tel endroit (ce que nous avions fait dans l'exemple 2 inspiré de SARKOVSKI). Il est clair que nous pouvons aussi écrire

$$\omega=(1,2,3,4,5,\ldots)\ ,$$

puisqu'il y a une bijection évidente qui respecte le bon ordre entre $\mathbf{N}$ et $\mathbf{N}^*$. Pour les autres ordinaux nous utiliserons des lettres grecques minuscules sauf s'il s'agit d'ordinaux finis connus comme 0, 1, ... auquel cas nous utiliserons l'écriture habituelle des nombres. Notons qu'ω a été choisi car c'est la dernière lettre de l'alphabet grec et qu'il note, d'une certaine façon, le « dernier entier » puisqu'il est plus grand que tous les autres !

4.a. Addition des ordinaux

Comme pour les ordinaux finis, pour créer l'ordinal noté $\alpha+\beta$ à partir des deux ordinaux, α et β nous allons mettre bout à bout (on dit concaténer) une représentation d'α et une de β en s'arrangeant pour que ces représentations n'utilisent pas les mêmes symboles et en décidant que les symboles utilisés dans β viennent après ceux utilisés dans α. Commençons par le cas le plus simple, le calcul du successeur d'ω :

$$\begin{aligned}\omega+1 &= (0,1,2,3,4,\ldots)+(1) = (0,1,2,3,4,\ldots)+(1') \\ &= (1,2,3,4,5,\ldots)+(0) = (1,2,3,4,5,\ldots,0)\ .\end{aligned}$$

Nous avions déjà vu ce bon ordre sur $\mathbf{N}$ au troisième exemple. Il est alors facile de continuer et d'obtenir

$$\begin{aligned}\omega+2 &= (2,3,4,5,6,\ldots\ldots,0,1)\ ,\\ \omega+3 &= (3,4,5,6,7,\ldots\ldots,0,1,2)\ .\end{aligned}$$

Cela devient un peu plus délicat avec $\omega+\omega$ où il nous faut juxtaposer deux copies de l'ordre habituel sur $\mathbf{N}$; mais nous en avons déjà vu un exemple :

$$\begin{aligned}\omega+\omega &= (1,3,5,7,\ldots,0,2,4,6,\ldots)\ ,\\ \text{puis}\qquad \omega+\omega+1 &= (3,5,7,\ldots,0,2,4,6,\ldots,1)\ ,\\ \omega+\omega+\omega &= (1,4,7,10,\ldots,2,5,8,11,\ldots,0,3,6,9,\ldots)\ ,\end{aligned}$$

où nous avons distingué les entiers selon leur reste dans la division par 3.

Nous avons ainsi créé une infinité d'ordinaux infinis que nous appellerons les *ordinaux transfinis*. Il y a malheureusement un gros hic en ce qui concerne leur addition. Voyons-le en calculant

$$1+\omega = (0)+(0,1,2,3,4,...) = (0)+(1,2,3,4,5,...) = (0,1,2,3,4,...) = \omega\ .$$

L'addition n'est plus commutative ! Perdre certaines propriétés quand on cherche à étendre une structure à un ensemble plus vaste est assez classique. Voyons alors les propriétés de l'addition des ordinaux.

- Pour tout ordinal α , $0+\alpha=\alpha+0=\alpha$ donc 0 est élément neutre.
- Pour tout triplet d'ordinaux (α,β,γ), $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$, ce qui traduit l'associativité.
- Si α,β et γ sont des ordinaux, $\gamma+\alpha=\gamma+\beta \Longrightarrow \alpha=\beta$. On peut donc simplifier à gauche.

- Mais de $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$ on ne peut rien conclure comme le prouve l'exemple $1+\omega=0+\omega$ alors qu'on a $1\neq 0$.

Il n'est, a priori, pas possible de définir une soustraction parmi les ordinaux car certains ordinaux n'ont pas de prédécesseur. Ainsi, si ω est parfaitement défini de même que $\omega+1$, il est impossible de définir $\omega-1$.

4.b. Relation d'ordre dans les ordinaux

Nous avions remarqué, à propos des ordinaux finis, que $2=(0,\,1)$ est à la fois un élément de $4=(0,\,1,\,2,\,3)$ et une section commençante de 4. Ceci nous permet de définir une relation d'ordre dans les ordinaux. Mais comme nous travaillons toujours à un isomorphisme de bon ordre près (nous parlons ici de *copies*), nous dirons que

$\alpha\leqslant\beta$ *si et seulement si* α *est une copie d'une section commençante de* β .

Il est remarquable que l'ordre défini ainsi est total et même un bon ordre sur les ordinaux (voir [2] p. 48).

Il est facile de voir que l'on a toujours $\alpha<\alpha+1$ puisqu'il est évident que ces deux ordinaux sont différents ; de plus il n'y a aucun ordinal strictement compris entre α et $\alpha+1$. On pourrait imaginer construire tous les ordinaux en partant de 0 et en ajoutant 1 régulièrement. Seulement on ne construit de cette façon que les ordinaux qui ont un prédécesseur et on ne peut donc pas dépasser ω.

4.c. Ordinal limite et récurrence transfinie

On dit qu'un ordinal est *limite* s'il n'est pas nul et s'il n'a pas de prédécesseur. Ainsi ω est un ordinal limite et c'est même le plus petit ordinal limite.

En raison de l'existence des ordinaux limites, toute récurrence classique partant d'un ordinal α ne peut dépasser le plus petit ordinal limite supérieur à α. Par exemple, en partant d'$\omega+\omega$ on ne peut jamais atteindre $\omega+\omega+\omega$. Il existe cependant une notion de *récurrence transfinie* qui permet de s'affranchir de cette difficulté. Si $\mathcal{P}$ est une propriété portant sur les ordinaux satisfaite pour 0 et telle que pour tout ordinal α

$$\big(\forall\beta<\alpha\quad\mathcal{P}(\beta)\big)\Longrightarrow\mathcal{P}(\alpha)\ ,$$

alors $\mathcal{P}(\alpha)$ est vraie pour tous les ordinaux.

> La démonstration se fait par l'absurde. Supposons que l'on puisse trouver γ avec $\mathcal{P}(\gamma)$ faux. Considérons alors tous [1] les ordinaux $\leqslant$ à γ pour lesquels la propriété $\mathcal{P}$ n'a pas lieu et notons λ le plus petit de ces ordinaux (dont l'existence est assurée par le bon ordre). Il n'est pas nul et pour tout $\beta<\lambda$ on a $\mathcal{P}(\beta)$. D' après l'hypothèse de récurrence on doit avoir $\mathcal{P}(\lambda)$, ce qui est contradictoire.

1. Nous escamotons ici les difficultés dues au fait que la « collection » de tous les ordinaux n'est pas un ensemble.

4.d. Multiplication des ordinaux

Nous avons vu un cas particulier de multiplication quand nous avons calculé $\omega+\omega$ que nous pouvons écrire $\omega\times 2=(0,2,4,6,\ldots,1,3,5,7,\ldots)$. On imagine assez facilement la multiplication d'un ordinal α par un ordinal fini n : on met n copies d'α bout à bout en veillant à ne pas répéter deux fois les mêmes symboles.

Exemple :

$$\omega\times 5=(0,5,10,15,\ldots,1,6,11,16,\ldots,2,7,12,17,\ldots,3,8,13,18,\ldots,4,9,14,19,\ldots)$$

où l'on a placé les nombres ayant un reste nul dans la division par 5, puis ceux ayant un reste 1, puis 2 puis 3 et enfin 4 en conservant l'ordre habituel dans chaque paquet.

Mais déjà se pose la question : a-t-on $2\times\omega=\omega\times 2$? Nous devons écrire ω copies de $2=(0,1)$ utilisant des symboles tous différents. Prenons $2=(2n,2n+1)$ en faisant varier n depuis 0 jusqu'à l'infini. Nous obtenons ainsi

$$2\times\omega=(0,1;2,3;4,5;....)=\omega\ .$$

Les points-virgules ne sont là que pour faciliter la lecture et mettre en évidence les paquets de deux symboles ordonnés. A nouveau nous obtenons une opération non commutative.

Et combien vaut $\omega\times\omega$? Il faut trouver ω copies utilisant des symboles différents pour ω. Le mieux serait de pouvoir utiliser les seuls entiers naturels. Nous avons déjà vu au deuxième exemple l'astuce due à SARKOVSKI :

$$\omega\times\omega=(1,3,5,\ldots,2,6,10,\ldots,4,12,20,\ldots,\ldots,2^n\times 1,2^n\times 3,2^n\times 5,\ldots,\ldots)\ .$$

On place tous les nombres impairs puis les produits des nombres impairs par les puissances successives de 2. Remarquons que l'on aurait pu aussi écrire :

$$\begin{aligned}\omega\times\omega=(0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots,\\ &\omega,\ \omega+1,\ \omega+2,\ \omega+3,...,\\ &\quad\omega\times 2,\ \omega\times 2+1,\ \omega\times 2+2,\ \omega\times 2+3,...,\\ &\qquad\ldots\ldots\ldots,\\ &\qquad\quad\omega\times n,\ \omega\times n+1,\ \omega\times n+2,\ \omega\times n+3,\ldots,\\ &\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots)\end{aligned}$$

C'est une autre façon de voir le produit [2] et qui peut facilement s'étendre en imaginant un livre infini. Chaque ligne peut être infinie et chaque page contient éventuellement un nombre infini de lignes. On peut aussi imaginer que le nombre de pages est infini et que l'ouvrage se décline en un nombre infini de tomes *etc.* Supposons que chaque ligne soit isomorphe à l'ordinal α, et qu'il y ait β lignes sur chaque page, alors une page représentera l'ordinal $\alpha\times\beta$. Et s'il y a γ pages dans le livre, il représentera l'ordinal $\alpha\times\beta\times\gamma$, *etc.*

Voyons, sans démonstration, les principales propriétés de la multiplication (on notera au passage les différences avec la multiplication habituelle dans $\mathbf{N}$, ou, ce qui revient au même, la multiplication des ordinaux finis).

2. Cette idée m'a été soufflée par Michel ÉMERY.

- $\alpha \times 0 = 0 \times \alpha = 0$; 0 est un élément absorbant.

- $\alpha \times 1 = 1 \times \alpha = \alpha$; 1 est élément neutre pour la multiplication.

- Pour tout triplet d'ordinaux (α, β, γ) on a $(\alpha \times \beta) \times \gamma = \alpha \times (\beta \times \gamma)$ ce qui traduit l'associativité (on pourra se convaincre de l'associativité en reprenant l'image du livre infini).

- Si trois ordinaux α, β, γ sont tels que $\alpha < \beta$ avec $\gamma \neq 0$, alors $\gamma \times \alpha < \gamma \times \beta$; il y a conservation de l'inégalité stricte par multiplication à gauche. Mais,

- $\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha \times \gamma \leqslant \beta \times \gamma$. Par exemple $1 < 2$ mais $1 \times \omega = 2 \times \omega = \omega$.

- $\alpha \times \beta = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$ ou $\beta = 0$.

- $\alpha \times (\beta + \gamma) = \alpha \times \beta + \alpha \times \gamma$; il y a distributivité à gauche, mais pas à droite car
  $(\omega + 1) \times 2 = (\omega + 1) + (\omega + 1) = \omega + (1 + \omega) + 1 = \omega + \omega + 1 = \omega \times 2 + 1$
  et non pas $\omega \times 2 + 2$.

- Pour tout triplet d'ordinaux (α, β, γ) avec $\gamma \neq 0$ on a
  $\gamma \times \alpha = \gamma \times \beta \Longrightarrow \alpha = \beta$, c'est-à-dire qu'on peut simplifier à gauche.

- Il existe une sorte de division euclidienne :
  si α et β sont des ordinaux, il existe un unique ordinal γ et un unique ordinal $\delta < \beta$ tel que $\alpha = \beta \times \gamma + \delta$. Cette division marche dans ce sens mais pas dans d'autre en raison de l'absence de commutativité tant de l'addition que de la multiplication.

4.e. Exponentiation

L'exponentiation ne pose aucun problème tant qu'il s'agit d'ordinaux finis puisqu'alors le résultat est exactement le même que dans **N**.

Il est assez facile de calculer 2^ω et de vérifier qu'il vaut ω, de même que n'importe quel ordinal fini élevé à la puissance ω. Nous avons calculé ci-dessus $\omega \times \omega$ que l'on écrit assez naturellement ω^2.

Il faut être un peu astucieux pour calculer ω^n dans le cas n fini. Voyons ce que l'on peut faire pour $n = 3$ en nous inspirant de ce qui a été fait pour $n = 2$ où nous avions distingué les naturels suivant leur divisibilité par 2^n. Nous allons donc les distinguer suivant leur divisibilité par $2^n \times 3^p$ et écrire d'abord les entiers non multiples de 2 ou de 3, puis ces mêmes multipliés par 2, puis... par 2^n, ... puis on reprend cette liste ainsi construite en multipliant chaque terme par 3, et on recommence en multipliant chaque terme par 3^2, *etc.* Cela donne quelque chose comme

$$
\begin{aligned}
(1, 5,\ 7,\ 11,\ 13, \ldots,\\
&2,\ 10,\ 14,\ 22,\ 26, \ldots,\\
&4,\ 20,\ 28,\ 44,\ 52, \ldots,\\
&\ldots,\\
&\qquad 3,\ 15,\ 21,\ 33,\ 39, \ldots,\\
&\qquad 6,\ 30,\ 42,\ 66,\ 78, \ldots,\\
&\qquad 12,\ 60,\ 84,\ 132,\ 156, \ldots,\\
&\qquad \ldots,\\
&\qquad\qquad 9,\ 45,\ 63,\ 99,\ 117, \ldots,\\
&\qquad\qquad 18,\ 90,\ 126,\ 198,\ 234, \ldots,\\
&\qquad\qquad 36,\ 180,\ 252,\ 396,\ 468, \ldots,\\
&\qquad\qquad \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)
\end{aligned}
$$

Cela devient assez acrobatique pour calculer ω^ω . On s'inspire de l'exemple précédent en utilisant la décomposition d'un entier en facteurs premiers. Tout entier non nul se met de façon unique sous la forme $2^a 3^b 5^c 7^d 11^e \ldots$ où il n'y a qu'un nombre fini d'exposants non nuls. Un entier est alors caractérisé par la suite $(a, b, c, d, e, \ldots)$ et nous placerons les entiers selon une sorte d'ordre lexicographique inversé. Plus exactement les entiers apparaissent dans l'ordre suivant :

D'abord toutes les puissances de 2	$1, 2, 2^2, 2^3, \ldots$
Puis les puissances de 2 multipliées par 3	$3, 2\times 3, 2^2\times 3, \ldots$
Puis multipliées par 3^2	$3^2, 2\times 3^2, 2^2\times 3^2, 2^3\times 3^2, \ldots$
Puis multipliées par 3^3	$3^3, 2\times 3^3, 2^2\times 3^3, 2^3\times 3^3, \ldots$
Jusqu'à épuisement des puissances de 3	$\ldots\ldots$

Puis on reprend tous les termes précédents que l'on multiplie par 5

$5, 2\times 5, 2^2\times 5, 2^3\times 5, \ldots$

$3\times 5, 2\times 3\times 5, 2^2\times 3\times 5, \ldots$

$3^2\times 5, 2\times 3^2\times 5, 2^2\times 3^2\times 5, \ldots$

$\ldots\ldots$

Puis de même en multipliant par 5^2	$5^2, 2\times 5^2, 2^2\times 5^2, \ldots$
Jusqu'à épuisement des puissances de 5	$\ldots\ldots$

Puis on reprend tous les termes précédents que l'on multiplie par 7, puis par 7^2 et ainsi de suite.

Voilà ce qu'est ω^ω. Pas facile à écrire !

Donnons ci-après, sans démonstration, quelques propriétés de l'exponentiation.

- α étant un ordinal, $1^\alpha = 1$.
- Si $\gamma > 1$ alors $\alpha < \beta \Longleftrightarrow \gamma^\alpha < \gamma^\beta$. Il y a conservation de l'ordre strict, mais attention :
- pour trois cardinaux arbitraires α, β, γ , on a $\alpha \leqslant \beta \Longleftrightarrow \alpha^\gamma \leqslant \beta^\gamma$ car a contrario on vérifie que $2^\omega = 3^\omega = \omega$ alors que $2 < 3$.
- $\alpha^\beta \times \alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$ et $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.

De plus, en utilisant la division euclidienne et le fait que, deux ordinaux $\alpha > 1$ et $\beta \neq 0$ étant donnés , on trouve toujours un unique ordinal δ tel que $\alpha^\delta \leqslant \beta \leqslant \alpha^{\delta+1}$, on peut construire une sorte de décomposition de β sur la base α, c'est-à-dire construire des γ_i strictement compris entre 0 et α et des β_i croissants tels que

$$\beta = \alpha^{\beta_n}\gamma_n + \cdots + \alpha^{\beta_1}\gamma_1 + \alpha^{\beta_0}\gamma_0 \ .$$

4.f. Et après ?

Malheureusement, en itérant les opérations arithmétiques que nous venons de définir, il n'est pas possible d'épuiser tous les ordinaux. Bien sûr, il est possible de calculer ω^{ω^ω} mais on peut imaginer mettre une infinité d'exposants. On obtient, à la limite, un nouvel ordinal nommé ε_0 qui est la solution de l'équation (en ordinaux) $x = \omega^x$. Et puis on recommence avec ε_0 avec une infinité d'exposants qui valent tous ε_0 pour obtenir ε_1 *etc.* Et il n'y a aucune raison de s'arrêter : $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_\omega, \ldots, \varepsilon_{\varepsilon_0}, \ldots$ Mais même ainsi, on n'épuise pas tous les ordinaux. En effet, tous les ordinaux précédents correspondent à un bon ordre sur $\mathbf{N}$. Ils sont donc dénombrables. On note Ω le plus petit ordinal non dénombrable... On pourrait penser qu'Ω a un lien avec $\mathbf{R}$ mais cela suppose l'hypothèse du continu [3].

À chaque fois que l'on manipule l'infini on se retrouve face à des propriétés surprenantes. Considérons-en une que nous utiliserons un peu plus loin et qui s'apparente à la récurrence descendante. Soit α un ordinal et soit $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots)$ une suite décroissante d'éléments d'α (nous avons vu que chaque ordinal est à la fois un élément d'un ordinal plus grand et la section commençante de ce même ordinal plus grand). Alors cette suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes, c'est-à-dire qu'elle est constante à partir d'un certain rang.

> En effet, puisqu'α est bien ordonné, le sous-ensemble formé des ξ_i l'est aussi et il contient donc un plus petit élément ξ_n pour un certain n. Mais pour $p > n$ on doit avoir à la fois $\xi_p \geqslant \xi_n$ puisque ξ_n est le plus petit élément et $\xi_p \leqslant \xi_n$ puisque la suite est décroissante et $p > n$. On en déduit que $\xi_p = \xi_n$.

Pour mieux comprendre ce résultat surprenant, il faut se souvenir qu'il est impossible de faire une soustraction. Ainsi, même en partant d'ω et en construisant la suite des ξ_i on est obligé de n'écrire que des ordinaux finis dès le deuxième terme.

3. Il n'existe aucun ensemble dont le cardinal est compris entre celui de $\mathbf{N}$ et celui de $\mathbf{R}$.

5. Une application des ordinaux : les suites de GOODSTEIN

Dans [1] Alain CONNES [4] en donne une version amusante : **le problème du lièvre et de la tortue**.

> Prenez un nombre N, pas trop grand (5 par exemple).
> Écrivez-le en base 2 : $5 = 2^2 + 1$.
> Le lièvre arrive et remplace tous les 2 par des 3 et écrit $3^3 + 1$.
> La tortue ne fait que retrancher 1 et écrit 3^3.
> Le lièvre remplace alors tous les 3 par des 4 et écrit 4^4.
> Puis la tortue retranche 1, ce qui donne en base 4 : $3\times4^3+3\times4^2+3\times4^1+3$.
> Et le lièvre remplace tous les 4 par des 5 et ainsi de suite...
> *Le lièvre parviendra-t-il à empêcher la tortue d'atteindre* 0 *?*

Ce qui est étrange c'est que la tortue finit toujours par gagner au bout d'un nombre fini d'étapes et ce, bien que le lièvre semble faire des bonds gigantesques à chaque fois qu'il joue. Au bout d'un temps fini, on arrive à 0.

On peut démontrer que le nombre d'étapes nécessaire pour que la tortue gagne croît plus vite que n'importe quelle fonction de N que vous pouvez explicitement écrire [5]. Vous pouvez cependant programmer un ordinateur pour connaître le nombre d'étapes nécessaire pour une valeur particulière de N. Mais démontrer que la tortue gagne à tous les coups tient en quelques lignes à l'aide de la théorie des ordinaux.

Considérons la suite des nombres obtenus après chaque intervention que ce soit celle du lièvre ou celle de la tortue. Cette suite commence (dans le cas d'un départ à 5) par $(5, 28, 27, 64, 63, 468, 467, \ldots)$. Associons à cette suite une suite d'ordinaux en remplaçant dans chaque écriture la base n par le premier ordinal infini, ω . Nous obtenons

$$(\omega^\omega+1, \omega^\omega+1, \omega^\omega, \omega^\omega, 3\omega^3+3\omega^2+3\omega+3, 3\omega^3+3\omega^2+3\omega+3, 3\omega^3+3\omega^2+3\omega+2, \ldots)\,.$$

Cette suite est décroissante donc elle est constante à partir d'un certain rang. Mais cette constante est nulle. En effet, après chaque intervention de la tortue, le terme de la suite associée décroît strictement (sauf si 0 a été obtenu). Or chaque terme de cette suite est, par construction, supérieur au terme de même rang de la suite initiale qui par conséquent se termine par 0 également.

Nous venons de démontrer, sous une forme imagée (pour une démonstration plus formelle voir [3]), le théorème de GOODSTEIN (démontré en 1944). Notons qu'il a été prouvé qu'il est impossible de démontrer ce théorème en n'utilisant que les axiomes de PEANO, c'est-à-dire l'arithmétique habituelle. Mais cette preuve (L. KIRBY et J. PARIS, 1982) est autrement plus ardue.

On trouvera deux autres illustrations des ordinaux dans l'article de N. BOPP *et* M. ÉMERY *page 13 de ce numéro de* L'OUVERT.

---

4. Dans la même interview il remarque que « It is only with CHOQUET [...] that I learnt the theory of ordinals. You might think that this theory is useless, but that's absolutely false ».

5. Dans le cas d'un départ à $4 = 2^2$, il faut un nombre d'étapes qui s'écrit en base dix avec plus de 48 millions 800 mille milliards de chiffres. Malgré la longévité légendaire des tortues il en faudra de nombreuses générations !

Conclusion

Sans chercher à être tout à fait rigoureux et surtout sans chercher à faire toutes les démonstrations, le but de cette présentation était d'introduire à la notion d'ordinal en en explicitant une forme possible, celle correspondant à un bon ordre sur **N**. Cela permet, peut-être, de mieux se familiariser avec la notion d'ordinal et de pouvoir ensuite l'aborder de façon très rigoureuse et axiomatique sous la forme que l'on trouve habituellement dans les ouvrages récents et qui repose sur la définition suivante due à John von Neumann.

Un *ordinal* α est un ensemble vérifiant les deux propriétés suivantes :

- Il est bien ordonné par la relation d'appartenance ($\in$).
- Il est transitif, c'est-à-dire que $\forall x, x \in \alpha \Longrightarrow x \subset \alpha$.

Dans ce cadre, on écrit habituellement les premiers ordinaux sous la forme

$$0 = \{\}, 1 = \{\{\}\}, 2 = \{\{\}, \{\{\}\}\}, 3 = \{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}, \ldots$$

que les tenants du bourbakisme reconnaîtront facilement.

Il y a bien évidemment des liens qui apparaissent entre la notion d'ordinal et celle plus connue de cardinal, mais ici encore avec des surprises, tant la manipulation de l'infini nous fait sortir des schémas habituels.

Bibliographie

[1] C. Goldstein & G. Skandalis (2007), An interview with Alain Connes, *Eur. Math. Soc. Newsl.*, **63**, 25-30.

[2] P. Dehornoy (2006-07), *Logique et théorie des ensembles*, Notes de cours FIMFA ENS, `http://www.math.unicaen.fr/~dehornoy/surveys.html`

[3] P. Dehornoy (2009), Cantor et les infinis, *Gazette des mathématiciens*, **121**, 29-46.

Jean Lefort
jlefort.apmep@wanadoo.fr

Deux exemples de récurrence transfinie

Nicole Bopp et Michel Émery

Résumé : Pour compléter l'article de Jean Lefort sur les ordinaux publié dans ce numéro de L'Ouvert nous présentons deux illustrations (certes classiques) de la récurrence transfinie : l'existence d'une base de $\mathbb{R}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ et une description de la structure des fermés du plan.

Mots-clés : Base d'un espace vectoriel, fermé du plan, ordinal, récurrence transfinie.

Les ordinaux sont inséparables de la récurrence transfinie, indispensable pour étudier même leurs propriétés les plus élémentaires. Les deux concepts ont été inventés simultanément, dans la seconde moitié du XIX^{e} siècle, par G. Cantor ; au départ, son but n'était pas d'explorer l'infini, mais de résoudre une question d'analyse (décrire les « ensembles d'unicité » pour les séries de Fourier), qui l'a amené à explorer en profondeur la structure des ensembles fermés. Ce n'est qu'ensuite, après avoir ainsi pris pied dans l'infini, qu'il a créé et développé la théorie des ensembles.

1. Existence d'une base de $\mathbb{R}$, espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$

C'est un exercice classique, dans les leçons introductives aux espaces vectoriels, que de montrer que $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels. Rappelons qu'une base d'un espace vectoriel sur un corps est une partie B de cet espace telle que tout élément de l'espace puisse s'écrire **de façon unique** comme combinaison linéaire **finie** à coefficients dans le corps d'éléments de B (que B soit un ensemble fini ou infini). On se souviendra, par exemple, que l'ensemble des polynômes à coefficients réels est un espace vectoriel (sur $\mathbb{R}$) qui admet une base dénombrable.

Pour démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}$ considéré comme espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$, on procède par récurrence comme en dimension finie. Seulement, la dimension étant infinie et même non dénombrable, la récurrence doit ici être transfinie [1]. En voici les principales étapes.

- On oublie l'ordre habituel sur $\mathbb{R}$ et on fixe une fois pour toutes un bon ordre sur $\mathbb{R}$. C'est grâce au théorème de Zermelo, équivalent à l'axiome du choix, que nous sommes assurés de l'existence d'un bon ordre sur tout ensemble, et donc en particulier sur $\mathbb{R}$.
- Pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$, on notera $<A>$ le sous-espace vectoriel (sur $\mathbb{Q}$) engendré par A, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires $\sum_{i=1}^{n} q_i a_i$, où n peut être n'importe quel entier, les a_i sont dans A et les coefficients q_i

1. Le même argument établirait plus généralement l'existence d'une base de n'importe quel espace vectoriel sur un corps quelconque ; le cas de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ n'est pas plus simple que le cas général.

dans le corps $\mathbb{Q}$. Du fait que $\mathbb{R}$ a été bien ordonné, pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$ telle que $<A> \neq \mathbb{R}$ on peut alors définir un réel x_A par

$$x_A = \text{ le plus petit élément (bon ordre!) de } \mathbb{R} \backslash <A> .$$

L'idée va être de construire des sous-espaces vectoriels emboîtés de plus en plus gros en rajoutant à chaque fois un nouvel élément pris à l'extérieur du dernier sous-espace.

Le plus simple est de partir de $A_0 = \emptyset$, d'où $<A_0> = \{0\}$, puis on pose x_{A_0} égal au plus petit élément non nul de $\mathbb{R}$ et on définit $A_1 = A_0 \cup \{x_{A_0}\}$. On recommence en déterminant x_{A_1}, le plus petit élément de $\mathbb{R} \backslash <A_1>$, (on remarquera que $<A_1>$ est isomorphe à $\mathbb{Q}$) et on pose $A_2 = A_1 \cup \{x_{A_1}\}$, etc.

- C'est là qu'intervient la récurrence transfinie. Le procédé ci-dessus, qui définit A_1 à partir de A_0, A_2 à partir de A_1, *etc.*, ne convient pas pour un ordinal limite qui n'a pas de prédécesseur ; il nous faut donc une procédure spéciale pour construire A_α quand α est un ordinal limite. On pose donc

$$A_\alpha = \begin{cases} A_\beta \cup \{x_{A_\beta}\} \text{ si } \alpha = \beta + 1 \ , \\ \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta \text{ si } \alpha \text{ est un ordinal limite} \ . \end{cases}$$

  Cette construction est possible tant que $<A_\alpha> \neq \mathbb{R}$. Comme A_α a autant d'éléments que α , et comme il existe des ordinaux ayant plus d'éléments que $\mathbb{R}$, il arrivera nécessairement un γ pour lequel $<A_\gamma> = \mathbb{R}$. On dit alors que l'ensemble A_γ est générateur : tout réel s'écrit comme combinaison linéaire rationnelle d'un nombre fini d'éléments de A_γ.

- Pour montrer que A_γ est une base, il reste à vérifier qu'une telle écriture est unique, à l'ordre et aux termes nuls près, c'est-à-dire que la partie A_γ est libre : si l'on écrit 0 comme combinaison d'éléments de A_γ, tous les termes doivent être nuls. Pour cela, on vérifie, par récurrence transfinie bien sûr, que chaque A_α est libre.

  Le passage de α à $\alpha + 1$ se fait facilement, exactement comme en dimension finie : si A est libre, $A \cup \{x_A\}$ l'est aussi parce que $x_A \in \mathbb{R} \backslash <A>$.

  Le cas où α est un ordinal limite se traite en remarquant que si $0 = \sum_{i=0}^n q_i a_i$ où les coefficients q_i appartiennent à $\mathbb{Q}$ et où les a_i sont des éléments deux-à-deux distincts de $A_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$, alors chaque a_i est dans un A_{β_i} donc aussi dans A_μ où $\mu = \max(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ (μ existe parce que l'ordre est total). Chaque terme $q_i a_i$ est nul parce que A_μ, qui est l'un des A_{β_i}, est libre par hypothèse de récurrence.

Il faut se garder d'interpréter l'ordinal γ comme la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}$; il dépend du bon ordre choisi, et pas seulement de l'espace $\mathbb{R}$ et du corps $\mathbb{Q}$. La seule notion invariante est le cardinal de γ, égal à la puissance du continu.

2. Structure des fermés du plan

Voici comment Cantor épluche transfiniment un fermé pour exposer sa structure. Nous parlerons des fermés du plan (c'est plus visuel) [2].

2. Au départ, c'est à des fermés unidimensionnels (sur le cercle trigonométrique) que s'intéressait Cantor, mais cela ne change rien.

Rappelons qu'un sous-ensemble F du plan est *fermé* si pour toute suite convergente (x_n) de points du plan telle que chaque x_n soit dans F, le point limite $\lim_n x_n$ est également dans F. Exemples : l'ensemble vide, le plan tout entier, un disque fermé, une suite convergente avec sa limite.

Le complémentaire d'un fermé est un *ouvert.* La structure des ouverts est assez simple : on montre que tout ouvert est la réunion d'une suite de disques ouverts [3]. Mais les fermés sont plus compliqués : en dimension 1, pensez à l'ensemble triadique de Cantor, qui a la puissance du continu mais ne contient aucun intervalle (sauf bien sûr ses points) ; dans le plan, c'est encore pire ; regardez par exemple les ensembles de JULIA [4] dans [1] p. 88, 95 ou 99.

Toute partie F du plan, fermée ou non, est faite de deux sortes de points : les *points isolés* de F et les *points d'accumulation* de F.

> *Un point $x \in F$ est isolé si, pour un certain $\varepsilon > 0$, la distance de x à tout autre point de F est $\geq \varepsilon$.*
>
> *Au contraire, x est un point d'accumulation de F s'il existe dans F des points différents de x mais aussi proches de x que l'on veut.*

Par exemple,

- si F est le réseau des points à coordonnées entières, tous ses points sont isolés ;
- un disque fermé de rayon non nul n'a pas de point isolé ;
- Si (x_n) est une suite de points qui converge vers une limite x_∞ et si $x_n \neq x_\infty$ pour tout n fini, tous les points du fermé $F = \{x_n\ ,\ n \leq \infty\}$ sont isolés, sauf x_∞.

Pour comprendre ce qu'a découvert (ou inventé ?) CANTOR, il nous faut préalablement savoir deux choses : primo, les points isolés de F sont en quantité dénombrable (c'est-à-dire que l'on peut les numéroter par des entiers, ou par tous les entiers) ; et secundo, si F est fermé, l'ensemble des points d'accumulation de F est lui aussi fermé. On peut démontrer sans peine ces résultats en utilisant les définitions ci-dessus, mais nous allons nous contenter d'admettre ces deux propriétés pour aller directement savourer la beauté du travail de CANTOR.

Si un fermé F n'a pas de point isolé, on dit que F est *parfait.* Nous allons voir comment un argument transfini permet de décomposer tout fermé F en deux sous-ensembles disjoints, dont l'un est dénombrable (ses éléments peuvent être numérotés par des entiers) et l'autre est le plus gros parfait inclus dans F.

Nous avons rappelé que lorsqu'à un fermé F on ôte tous ses points isolés, on obtient un nouveau fermé (l'ensemble des points d'accumulation de F) ; il est noté F' et appelé le *dérivé* de F, l'opération $F \mapsto F'$ étant la *dérivation de Cantor.* Il serait naïf de croire que F', obtenu en enlevant à F ses points isolés, n'a pas de points isolés.

- Dans l'exemple vu plus haut du fermé $F = \{x_n\ ,\ n \leq \infty\}$ formé d'une suite et de son point limite, F' n'a qu'un seul point, x_∞, évidemment isolé (dans F' mais pas dans F), et $F'' = (F')'$ est vide.

3. En dimension 1, c'est encore plus simple : tout ouvert de $\mathbb{R}$ est la réunion d'une suite d'intervalles ouverts disjoints.

4. Ce sont entre autre des ensembles parfaits (la définition en est donnée ci-dessous).

- On pourrait compliquer cet exemple : si $F = \{x_{m,n}\ ,\ m \leq \infty\ ,\ n \leq \infty\}$, où les coordonnées de $x_{m,n}$ sont $(1/m, 1/n)$, alors F' est formé des $x_{m,n}$ tels que m ou n soit infini, F'' du seul point $x_{\infty,\infty}$, et F''' est vide.
- Pour chaque entier n, on peut sans trop de peine concevoir un fermé dont les n premiers dérivés (son dérivé, le dérivé de celui-ci, etc.) sont différents.

  Par exemple en remarquant que *tout fermé F est un dérivé.* En effet, il suffit, pour chaque x isolé dans F, d'adjoindre à F toute une suite de points qui tendent vers x et qui sont plus proches de x que de tout autre point de F ; le fermé ainsi grossi admet F pour dérivé. En partant d'un fermé non parfait et en effectuant n fois cette anti-dérivation, on obtient un fermé dont le n-ième dérivé n'est pas parfait, et dont les n premiers dérivés sont donc tous différents.
- Essayez maintenant d'imaginer un fermé construit comme suit. On part d'une suite $(D_1, D_2, \ldots)$ de disques fermés disjoints, dont les rayons tendent vers zéro, et les centres vers un point limite $\{x\}$. À l'intérieur de D_n, on place un fermé F_n dont le n-ième dérivé n'a qu'un seul point. On prend pour F la réunion des F_n et de $\{x\}$. Lorsque l'on dérive $n+1$ fois le fermé F, tout ce qui est dans $D_1, D_2, \ldots, D_n$ disparaît, mais il reste des points dans D_{n+1}, D_{n+2}, etc. et lorsque n tend vers l'infini, seul le point x subsiste. C'est là que Cantor manifeste son génie : il sort du chapeau l'ordinal ω, définit le ω-ième dérivé de F comme étant le singleton $\{x\}$, et constate que le $(\omega+1)$-ième dérivé de F est vide.
- Une fois qu'on a saisi le truc, on peut compliquer autant qu'on veut : par exemple, en reprenant les disques D_n, mais en mettant cette fois-ci dans chaque D_n une copie (homothétique) du F précédent, et en prenant la réunion de ces copies et du point limite $\{x\}$, on a un nouveau fermé, dont c'est maintenant le $(\omega+1)$-ième dérivé qui vaut $\{x\}$ et le $(\omega+2)$-ième qui est vide. Et il n'y a bien sûr aucune raison de s'arrêter là...

En partant d'un fermé F quelconque, les dérivations itérées décrites ci-dessus peuvent être formalisées comme une récurrence transfinie : on ne se contente pas de définir le n-ième dérivé $F^{(n)}$ de F pour tout n fini, mais on introduit $F^{(\alpha)}$ pour tout ordinal α. La formule, qui suppose $F^{(\beta)}$ déjà défini pour tout ordinal β inférieur à α, distingue deux cas, suivant que α a ou non un prédécesseur :

$$F^{(\alpha)} = \begin{cases} \left(F^{(\beta)}\right)' & \text{si } \alpha = \beta + 1, \\ \bigcap_{\beta<\alpha} F^{(\beta)} & \text{si } \alpha \text{ est un ordinal limite.} \end{cases}$$

Remarquer par récurrence que $F^{(\alpha)}$ est fermé, soit comme dérivé d'un fermé, soit comme intersection de fermés. La suite transfinie des fermés $F^{(\alpha)}$ est décroissante : $F^{(\alpha)}$ est inclus dans $F^{(\beta)}$ lorsque $\alpha > \beta$. Si, pour un ordinal γ, le γ-ième dérivé $F^{(\gamma)}$ se trouve être parfait, donc égal à son dérivé, un point fixe est atteint, et l'on a $F^{(\delta)} = F^{(\gamma)}$ pour tout ordinal $\delta \geq \gamma$.

Arrivé là, Cantor démontre que, si compliqué que puisse être le fermé F initial, il existe toujours un ordinal *dénombrable* γ tel que le dérivé $F^{(\gamma)}$ soit parfait.

Comme l'ensemble $F - F'$ des points isolés d'un fermé F est dénombrable le passage de F à $F^{(\gamma)}$ se fait donc en un « nombre » dénombrable d'étapes, lors de chacune desquelles on a supprimé un « nombre » dénombrable de points. Une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables étant elle-même toujours dénombrable, il en résulte que l'ensemble $F - F^{(\gamma)}$ des points supprimés est dénombrable ; on a ainsi une décomposition de F en deux sous-ensembles, l'un, $F - F^{(\gamma)}$ étant dénombrable, et l'autre, $F^{(\gamma)}$ étant parfait. En outre, $F^{(\gamma)}$ est le plus gros parfait inclus dans F, car une récurrence transfinie immédiate établit que, si un parfait est inclus dans F, il est aussi inclus dans chaque $F^{(\alpha)}$, et en particulier dans $F^{(\gamma)}$.

Il reste bien sûr à démontrer l'existence d'un tel γ, mais nous espérons que le lecteur qui nous aura suivi jusque là voudra bien nous croire sur parole ou aller consulter [2] p. 62 pour une démonstration dans le cas des fermés de $\mathbb{R}$.

Trois commentaires pour conclure.

a) D'abord, le plus petit ordinal γ tel que $F^{(\gamma)}$ soit parfait est dénombrable, mais ne peut pas être borné parmi les ordinaux dénombrables : pour tout ordinal dénombrable α, on peut construire un fermé F suffisamment compliqué pour que $F^{(\alpha)}$ ne soit pas parfait.

b) Nous avons censuré une partie du scénario. Cantor travaillait sur certains fermés, les « ensembles d'unicité », qu'il cherchait aussi petits que possible. Or si F est un ensemble d'unicité, tous ses dérivés $F^{(\alpha)}$ en sont aussi, y compris la partie parfaite $F^{(\gamma)}$ de F ; l'étude des ensembles d'unicité est ainsi ramenée à celle des parfaits d'unicité. C'était cela qui intéressait Cantor, les ordinaux n'étant qu'un moyen pour y parvenir ; aujourd'hui, les ensembles d'unicité n'intéressent qu'une poignée de spécialistes et les ordinaux l'ont rendu immortel...

c) Enfin, il n'est pas difficile de montrer que tout parfait non vide a la puissance du continu (c'est-à-dire autant de points que $\mathbb{R}$) ; Cantor en déduit aussitôt que *tout fermé est soit fini, soit infini dénombrable, soit continu.* Il a longtemps cherché à prouver que c'est vrai non seulement pour les fermés, mais pour tous les sous-ensembles du plan. C'est la célèbre hypothèse du continu, dont on sait maintenant qu'elle n'est ni réfutable (Gödel, 1938) ni démontrable (Cohen, 1963) dans le cadre de la théorie des ensembles habituelle, même avec axiome du choix.

Bibliographie

[1] M. Audin (2009), *Fatou, Julia, Montel, le grand prix des sciences mathématiques de 1918, et après...* , Springer, Berlin, Heidelberg.

[2] P. Dehornoy (2006-07), *Logique et théorie des ensembles*, Notes de cours FIMFA ENS, `http://www.math.unicaen.fr/~dehornoy/surveys.html`

Nicole Bopp et Michel Émery
IRMA
bopp@math.unistra.fr
emery@math.unistra.fr

Entre mathématiques et littérature : les nombres de Queneau

Vanessa Vallet

Résumé : *La belle Hortense*, roman de Jacques Roubaud, comporte, en plus de l'histoire purement littéraire, un fondement mathématique. Nous en relevons différents indices et montrons en quoi un nombre assez conséquent d'empreintes numériques s'unifient autour des nombres de Queneau. À l'aide de l'arithmétique élémentaire nous donnons deux caractérisations de ces nombres.

Mots-clés : Arithmétique, littérature, nombre de Queneau, nombre de Sophie Germain, Jacques Roubaud.

Ce travail est la reproduction, quelque peu modifiée, de mon mémoire de première année de magistère de mathématiques, soutenu en 2009 à l'université de Strasbourg sous la direction de Michèle Audin.

Introduction

Tout comme Hortense [1], à vingt-deux ans, je consacre une partie de mon été à la rédaction d'un mémoire, celui-là même que vous êtes en train de lire. Et tout comme pour l'inspecteur Blognard [2], il s'agit aujourd'hui pour nous de résoudre une affaire. Non pas celle de la Terreur des Quincaillers dont est chargé d'enquête ce dernier dans le livre de Jacques Roubaud, mais celle de l'organisation de cette œuvre qu'est *La belle Hortense.*

Notre tâche consiste ainsi à relever dans ce roman tous les indices mathématiques et littéraires potentiellement utiles, en vue de les analyser et de les comparer avec l'espoir que ces traces laissées par l'auteur, unique suspect dont il ne nous reste plus qu'à déterminer le mobile et surtout le plan d'action, lèveront une partie du voile sur la structure de cet « acte » d'écriture.

Il est en effet indéniable que ce récit comporte, en plus de l'histoire purement littéraire, un fondement mathématique, une sorte de trame qui apparaît çà et là et que nous allons tenter de mettre en lumière. Plus précisément, nous montrerons en quoi un nombre assez conséquent d'empreintes numériques s'unifient autour des nombres de Queneau et donnent, plus ou moins discrètement, une valeur ajoutée à l'histoire elle-même.

1. Hortense est l'héroïne de *La belle Hortense*, [6].
2. Anselme Blognard est également un personnage de ce livre.

1. Sextine et permutation

Pour commencer, intéressons-nous au protagoniste qu'est Alexandre Vladimirovitch, le chat de Mme Eusèbe [3], qui très rapidement attire l'attention. En effet, d'une part un chapitre, le troisième, lui est entièrement dédié ; d'autre part, et c'est là la raison la plus importante de notre intérêt, le récit de ses amours fait l'objet d'une narration particulière, une sorte d'histoire dans l'histoire écrite avec une typographie caractéristique puisqu'en italique, à la fin de certains chapitres bien choisis, ce qui le met de manière très explicite en valeur. Mais attardons-nous davantage sur le choix de ces chat-pitres.

La belle Hortense est constituée de
- vingt-huit chapitres,
- trois entre-deux chapitres qui permettent de les répartir par groupes de sept chapitres,
- un après-dernier chapitre, qui se situe, comme son nom l'indique, après le dernier chapitre, c'est-à-dire après le vingt-huitième.

Ceux dont la fin est consacrée à Alexandre Vladimirovitch sont
- le premier entre-deux-chapitres,
- les chapitres 9 et 11,
- le deuxième entre-deux-chapitres,
- les chapitres 18, 23 et 26.

Alors pourquoi cette suite bien précise de nombres ? Pour répondre à cette question, considérons les origines poldèves d'Alexandre Vladimirovitch : la principauté de Poldévie compte six héritiers, de sorte qu'a été mis en place un ingénieux processus de succession [4], grâce à une permutation dont le Premier Prince, Arnaut Danieldzoï, aurait eu l'idée. Derrière ce nom poldévisé par Jacques ROUBAUD se dissimule clairement le poète provençal du Moyen-Âge, Arnaut DANIEL, de l'œuvre duquel il nous reste à ce jour peu de choses, si ce n'est le célèbre poème suivant, accompagné ici d'une traduction littérale due à Jacques ROUBAUD [7].

Ce poème, composé de six strophes de six vers chacune (sans prendre en compte les trois derniers vers qui constituent un envoi, sorte de signature du poète), utilise en tout et pour tout six « mots-rimes » — intra, ongla, arma, verja, oncle, cambra — qui sont repris à chaque strophe dans un ordre différent. C'est précisément sur cette particularité de la rime que va porter notre étude et non pas sur la métrique elle-même.

Dans un premier temps, on associe à chaque mot-rime un nombre en fonction de sa place dans la première strophe. Puis on identifie chaque vers au mot-rime qui le termine. De sorte que si l'on parle du vers p de la strophe q, il s'agit en fait du vers de la strophe q qui se termine par le mot-rime p, c'est-à-dire le mot-rime se trouvant en p-ième position dans la première strophe.

On peut ainsi définir une permutation qui à chaque mot-rime d'une strophe associe son image dans la strophe suivante, autrement dit le mot-rime situé au

3. Edwige Eusèbe, de son vrai prénom Bertrande, fait aussi partie de ce roman : avec son mari, elle tient une épicerie.
4. Voir la citation en page 21.

Lo ferm voler qu'el cor m'intra no'm pot ges becs escoissendre ni ongla de lauzengier qui pert per mal dir s'arma ; e pus no l'aus batr'ab ram ni verja, sivals a frau, lai on non aurai oncle, jauzirai joi, en vergier o dins cambra.	La ferme volonté qui au cœur m'entre ne peut ni langue la briser ni ongle de médisant qui perd à mal dire son âme n'osant le battre de rameau ni de verge sinon en fraude là où je n'ai nul oncle je jouirai de ma joie en verger ou chambre
Quan mi sove de la cambra on a mon dan sai que nulhs om non intra — ans me son tug plus que fraire ni oncle — non ai membre no'm fremisca, neis l'ongla, aissi cum fai l'enfas devant la verja : tal paor ai no'l sia prop de l'arma.	Quand je me souviens de la chambre où pour mon mal je sais que nul homme n'entre mais tous me sont pires que frère ou qu'oncle tremblent tous mes membres jusqu'à l'ongle ainsi que fait l'enfant devant la verge tant j'ai peur de n'être assez sien dans mon âme
Del cor li fos, non de l'arma, e cossentis m'a celat dins sa cambra, que plus mi nafra'l cor que colp de verja qu'ar lo sieus sers lai ont ilh es non intra : de lieis serai aisi cum carn e ongla e non creirai castic d'amic ni d'oncle.	Ah que je sois sien dans le corps non dans l'âme et qu'elle m'accueille en secret dans sa chambre plus me blesse le cœur que coup de verge d'être son serf qui là où elle est n'entre toujours je serai près d'elle comme chair et ongle n'écoutant aucun reproche d'ami ni oncle
Anc la seror de mon oncle non amei plus ni tan, per aquest'arma, qu'aitan vezis cum es lo detz de l'ongla, s'a lieis plagues, volgr'esser de sa cambra : de me pot far l'amors qu'ins el cor m'intra miels a son vol c'om fortz de frevol verja.	Jamais la sœur de mon oncle je n'aimerai tant ou plus par mon âme aussi proche qu'est le doigt de l'ongle s'il lui plaisait je voudrais être de sa chambre il peut faire de moi l'amour qui en mon cœur entre à son gré comme homme un fort de faible verge
Pus floric la seca verja ni de n'Adam foron nebot e oncle tan fin'amors cum selha qu'el cor m'intra non cug fos anc en cors no neis en arma : on qu'eu estei, fors en plan o dins cambra, mos cors no's part de lieis tan cum ten l'ongla.	Depuis qu'a fleuri la sèche verge que du seigneur Adam sont nés neveu et oncle un amour qui comme celui qui dans mon cœur entre je ne crois qu'il a été en corps ni âme où qu'elle soit sur la place ou dans la chambre mon cœur sera moins loin que l'épaisseur d'un ongle
Aissi s'empren e s'enongla mos cors en lieis cum l'escors'en la verja, qu'ilh m'es de joi tors e palais e cambra ; e non am tan paren, fraire ni oncle, qu'en Paradis n'aura doble joi m'arma, si ja nulhs hom per ben amar lai intra.	Qu'ainsi s'enracine devienne ongle mon cœur en elle comme écorce en la verge elle m'est de joie tour et palais et chambre je n'aime tant frère parent ni oncle en paradis aura double joie mon âme si jamais homme, d'avoir aimé y entre
Arnaut tramet son chantar d'ongl'e d'oncle a Grant Desiei, qui de sa verj'a l'arma, son cledisat qu'apres dins cambra intra.	Arnaut envoie sa chanson d'ongle et d'oncle pour plaire à celle qui de sa verge à l'âme son Désiré son prix entre en sa chambre

même vers, mais dans la strophe d'après : cela permet de déduire les mots-rimes d'une strophe à partir de ceux de la précédente. En particulier, dans le poème d'Arnaut Daniel, la permutation en question est la suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cette permutation régit non seulement le passage de la première à la deuxième strophe, mais également plus généralement le passage de n'importe quelle strophe à celle qui la suit. Et il y a plus encore car lorsqu'on l'itère une sixième fois, et pas avant, on retrouve exactement l'enchaînement initial des mots-rimes : σ est donc d'ordre 6.

On retrouve d'ailleurs dans cette permutation la loi qui régit la succession des princes poldèves comme nous la décrit Roubaud :

> *L'ordre de préséance parmi les Princes était modifié à chaque génération, suivant une permutation fixée immuablement depuis le* XIII*e siècle [...] : le fils aîné du Premier Prince Régnant devenait deuxième dans l'ordre hiérarchique [...], l'héritier (ou héritière) du deuxième quatrième, le troisième passait en sixième position, le quatrième en cinquième et le cinquième devenait second ; quant au successeur du Sixième Prince (fille ou garçon), il se retrouvait premier ; de cette façon [...] chaque famille occupait successivement chaque place dans la hiérarchie. L'ordre initial, celui du Premier Prince (Arnaut Danieldzoï), était rétabli au bout de six générations.*

Il y a certes une petite « erreur », si l'on peut employer ce terme, sûrement intentionnelle, mais qui ne perturbe pas notre raisonnement dans la mesure où l'on retrouve quelques autres petites incohérences au fil du texte, et où celle-ci se résout aisément en remplaçant « second » par « troisième ». A cela s'ajoute le fait que le XIIIe siècle correspond effectivement à l'époque d'Arnaut DANIEL. Et c'est sans compter l'analogie frappante entre la structure de ce poème et celle de la chaconne de Telemann, morceau que choisit de jouer à l'occasion de l'inauguration de la chapelle poldève son organiste, le père Sinouls [5], qui évoque lui-même son originalité en ces termes :

> *C'est une chaconne en trente-six variations, mais au lieu de varier simplement la mélodie, comme d'habitude [...], il utilise en fait six morceaux mélodiques pratiquement indépendants, puis il les fait tourner les uns après les autres d'une manière d'ailleurs assez compliquée mais fort plaisante, ça met en valeur tous les jeux, mais le plus fort, c'est qu'il s'arrête juste au moment où, s'il continuait, on retrouverait la mélodie de départ.*

Cela nous conforte dans la pensée que cette permutation joue un rôle prépondérant au sein du roman : il semble que nous soyons sur la bonne voie !

Vient dès lors l'idée de considérer la permutation σ_n suivante, appelée *permutation spirale*, appartenant à $\mathfrak{S}_n$, le groupe des bijections de $\{1,\dots,n\}$ dans lui-même et définie comme suit :

$$\begin{cases} \sigma_n(2p) = p\,, \\ \sigma_n(2p+1) = n-p\,. \end{cases}$$

Cette permutation σ_n est en effet une généralisation à n quelconque de la permutation structurant le poème d'Arnaut DANIEL (pour $n = 6$, on a bien $\sigma_6 = \sigma$). C'est Raymond QUENEAU [6] qui l'avait suggérée en se demandant si, pour n'importe quel entier n, on pouvait construire un tel poème, s'appuyant sur le fait que, pour tous k et $i \in \{1,\dots,n\}$ l'image $\sigma_n^k(i)$ correspondrait au mot-rime concluant le vers i de la strophe $k+1$.

5. Le nom du *Père Sinouls*, personnage du récit, est d'ailleurs, à un *r* près, une anagramme de *Pierre Lusson*, grand ami de Jacques ROUBAUD et auteur d'une théorie du rythme.

6. L'écrivain Raymond QUENEAU, auteur d'*Exercices de style*, est un des fondateurs de l'*Oulipo*, où, par l'élaboration de contraintes, mathématiques et littérature se rencontrent. C'est à l'Oulipo qu'il a exposé cette idée, qui a été reprise dans diverses publications de ce groupe.

Considérons le groupe $G_n = \{id, \sigma_n, \sigma_n^2, \ldots\}$ engendré par σ_n que l'on appelle le groupe de Queneau-Daniel. C'est un sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$. On note $|G_n|$ le nombre d'éléments de G_n.

Répondre à la question de Queneau revient à chercher les entiers n tels que $|G_n| = n$ ou, ce qui est équivalent, tels que σ_n soit d'ordre n c'est-à-dire

$$\sigma_n^n = id \text{ et si } 0 < k < n, \text{ alors } \sigma_n^k \neq id$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\sigma_n^n = id \text{ et si } 0 < k < n, \text{ alors il existe un } i \in \{1, \ldots, n\} \text{ tel que } \sigma_n^k(i) \neq i.$$

En effet, si $|G_n| \geq n$, cela implique que l'on peut construire (au moins) n strophes dont l'enchaînement des n mots-rimes soit toujours différent. Leur succession dans le poème prendra alors la forme suivante :

$$\begin{array}{ccccc} 1^{\text{re}} \text{ strophe} & 2^{\text{e}} \text{ strophe} & 3^{\text{e}} \text{ strophe} & \cdots & n^{\text{e}} \text{ strophe} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sigma_n(1) \\ \sigma_n(2) \\ \vdots \\ \sigma_n(n) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sigma_n^2(1) \\ \sigma_n^2(2) \\ \vdots \\ \sigma_n^2(n) \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} \sigma_n^{n-1}(1) \\ \sigma_n^{n-1}(2) \\ \vdots \\ \sigma_n^{n-1}(n) \end{pmatrix} \end{array}$$

En particulier, si $|G_n| = n$ exactement, le poème identifié à ses mots-rimes sera en quelque sorte unique à permutation des strophes près. Dans ce cas n sera appelé un *nombre de Queneau* ; le poème en résultant, quant à lui, sera désigné par le terme n-ine ou encore *quenine* d'ordre n.

Par exemple, 6 est un nombre de Queneau, comme nous l'avons vu. Le nombre 3 est lui aussi un nombre de Queneau, les ordres successifs de trois mots-rimes étant $1, 2, 3$, puis $3, 1, 2$ et enfin $2, 3, 1$, avant de retrouver l'ordre de départ.

2. Une première caractérisation des nombres de Queneau

L'étude mathématique qui suit est essentiellement basée sur les articles [1] et [2]. Nous supposons que $n \geq 2$. Aussi, σ_n étant une bijection de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même, on peut considérer son inverse δ_n. Poétiquement, cela revient à partir de la dernière strophe :

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 2x \leq n\,, \\ 2n + 1 - 2x & \text{sinon, c'est-à-dire pour } n < 2x \leq 2n\,. \end{cases}$$

Dans ce cas, on peut considérer les entiers modulo $2n+1$, de sorte que l'on a, pour tout x,

$$\delta_n(x) \equiv \pm 2x \; [2n+1]\,.$$

Autrement dit, modulo $2n+1$, δ_n est la multiplication par ± 2. On en déduit par récurrence l'itéré i-ième

$$\delta_n^i(x) \equiv \pm 2^i x \; [2n+1]\,.$$

À partir de cette petite propriété, on peut déjà établir une première condition nécessaire pour qu'un entier n soit un nombre de Queneau.

Proposition. *Si n est un nombre de Queneau, alors σ_n est un cycle.*

Avant de passer à la démonstration, voici un exemple de permutation d'ordre n (ici $n = 6$) qui n'est pas un cycle.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} .$$

Cette permutation est le produit de trois cycles que l'on écrit ainsi

$$\sigma = (1)(2\ 3)(4\ 5\ 6) .$$

Démonstration

- Commençons par remarquer que, pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$, on a les équivalences

$$\sigma \text{ est d'ordre } n \iff \sigma^{-1} \text{ est d'ordre } n ,$$
$$\sigma \text{ est un cycle } \iff \sigma^{-1} \text{ est un cycle } .$$

  Pour démontrer la seconde équivalence (la première est évidente) on suppose que σ est un cycle d'ordre p contenant un élément a et on note

$$\sigma = \Big(a, \sigma(a), \sigma^2(a), \ldots, \sigma^{p-1}(a)\Big) .$$

  En appliquant successivement σ^{-1} à l'égalité $a = \sigma^p(a)$ on obtient les égalités $\sigma^{-1}(a) = \sigma^{p-1}(a)$, $\left(\sigma^{-1}\right)^2(a) = \sigma^{p-2}(a)$, $\ldots$, $\left(\sigma^{-1}\right)^{p-1}(a) = \sigma(a)$ et pour finir $\left(\sigma^{-1}\right)^p(a) = a$ d'où l'on déduit que σ^{-1} est un cycle d'ordre p qui s'écrit

$$\sigma^{-1} = \Big(a, \sigma^{p-1}(a), \sigma^{p-2}(a), \ldots, \sigma(a)\Big) .$$

- La proposition à démontrer est donc équivalente au résultat ci-dessous

  Si la permutation δ_n est d'ordre n alors c'est un cycle.

  Comme l'expression de $\delta_n = \sigma_n^{-1}$ est plus simple à utiliser que celle de σ_n, c'est ce résultat que nous démontrerons.

- Comme toute permutation, δ_n se décompose en produit de cycles disjoints (voir [3] page 14) que l'on peut écrire ainsi

$$\delta_n = d_1 d_2 \cdots d_k \text{ où } d_j \text{ est un cycle d'ordre } |d_j| \ (j = 1, \ldots, k,) .$$

  D'une part l'ordre de δ_n est le ppcm des $|d_j|$ et, d'autre part, les d_j sont des cycles disjoints qui permutent $|d_j|$ éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Puisque, par hypothèse, l'ordre de δ_n est n on obtient

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{k} |d_j| \leqslant n = \operatorname{ppcm}\left(|d_j|\right) .$$

- Quitte à permuter les cycles, notons d_1 le cycle qui contient 2. Par définition de δ_n on a $\delta_n(1) = 2$ (car n est supposé $\geqslant 2$) et comme l'ordre de d_1 est $|d_1|$ on obtient
$$\delta_n(1) = 2 = \delta_n(2)^{|d_1|} \text{ ce qui implique } 1 = \delta_n(2)^{|d_1|-1}\,.$$
En utilisant l'expression explicite de δ_n on a alors
$$1 \equiv \pm 2^{|d_1|}\ [2n+1]\,.$$

- On en déduit que pour tout $x \in \{1, \ldots, n\}$ on a
$$\delta_n^{|d_1|}(x) \equiv 2^{|d_1|}x \equiv \pm x\ [2n+1]\,.$$
Une famille de représentants de $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ est donnée par les entiers $\{-n, -(n-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n\}$. Comme x appartient à $\{1, \ldots, n\}$, $-x$ appartient à $\{-n, \ldots, -1\}$ et ne peut donc pas être congru à x modulo $2n+1$. Comme $\delta_n^{|d_1|}(x)$ appartient lui aussi à $\{1, \ldots, n\}$, on en déduit que
$$(**) \qquad \forall x \in \{1, \ldots, n\}\ \delta_n^{|d_1|}(x) = x\,.$$

- Revenons à la décomposition de δ_n en cycles. La formule $(**)$ implique que l'ordre de chacun de ces cycles divise $|d_1|$ d'où
$$n = \text{ppcm}\,(|d_j|) = |d_1|\,.$$
Or nous savons par $(*)$ que
$$n \geqslant |d_1| + \sum_{j=2}^{k} |d_j|\,.$$
Ceci implique que, pour $j \geqslant 2$, tous les $|d_j|$ sont nuls et donc que δ_n est égal au cycle d_1. L'inverse de la permutation spirale et donc la permutation spirale elle-même est bel et bien un cycle. □

Nous pouvons donc à ce stade éliminer tous les entiers qui ne vérifient pas la condition selon laquelle σ_n doit être un cycle (d'ordre n).

Exemple. 4 *n'est pas un nombre de Queneau.*

En effet : $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1,4,2)(3)$ qui n'est pas un cycle puisque composé de deux cycles à supports disjoints. L'entier 4 n'est par conséquent pas un nombre de Queneau : il n'existe pas de *catherines* !

Néanmoins, le caractère cyclique des permutations « quenesques » ne s'arrête pas là, puisqu'on dispose même de l'équivalence suivante :

Théorème. *L'entier n est un nombre de Queneau si et seulement si σ_n est un cycle (de longueur n).*

Démonstration : Il ne nous reste plus qu'à prouver la proposition réciproque. Supposons pour cela que σ_n est un cycle :

– s'il est de longueur n, alors il est d'ordre n et donc n est un nombre de Queneau,
– s'il est de longueur $< n$, alors il est d'ordre $< n$ et donc n n'est pas un nombre de Queneau. $\square$

Mais revenons-en à la sextine d'Arnaut Daniel. Lorsque l'on observe plus précisément les mots-rimes et l'ensemble des places qu'occupe chacun d'eux, on remarque que sur la totalité du poème un mot-rime n'est jamais deux fois au même endroit d'une strophe. Surgit alors la question suivante : tous les poèmes construits avec un nombre de Queneau possèdent-ils cette particularité ? Autrement dit, est-ce une conséquence du fait que σ_n est un cycle ? Voire une équivalence ? Ou bien est-ce fortuit que cela se passe ainsi pour l'entier 6 ?

Pour répondre à ces interrogations, il convient d'étudier les itérées de σ_n, leur caractère cyclique et surtout l'existence ou non, pour elles, de points fixes.

Remarque. De manière générale, pour toute permutation σ et quel que soit l'entier $k \neq 0$ ou 1, le fait que σ est un cycle n'implique pas que σ^k est un cycle. Autrement dit, σ peut très bien être un cycle sans que toutes ses puissances en soient.

Exemple. $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ est un cycle mais $\sigma^2 = (1, 2, 3, 4)(1, 2, 3, 4) = (1, 3)(2, 4)$ se décompose en deux cycles disjoints, donc n'est pas un cycle. D'ailleurs plus généralement encore, si n est pair, $n = 2k$, alors tout cycle σ d'ordre n est tel que σ^k est d'ordre 2 et de longueur n, de sorte que σ^k n'est jamais un cycle, puisque l'ordre d'un cycle est toujours égal à sa longueur !

On a toutefois la conséquence suivante :

Lemme. *L'entier n n'est pas un nombre de Queneau si et seulement s'il existe un $p \in \{1, \dots, n-1\}$ pour lequel σ_n^p admette un point fixe.*

Démonstration : Vu le théorème précédent, n est un nombre de Queneau si et seulement si σ_n est un cycle d'ordre n, c'est-à-dire une permutation circulaire de $\{1, \dots, n\}$. C'est équivalent à ce que $\{1, \dots, n\} = \{1, \sigma_n(1), \dots, \sigma_n^{n-1}(1)\}$. C'est-à-dire que pour tout k dans $\{1, \dots, n\}$, il existe un unique p dans $\{0, \dots, n-1\}$ tel que $k = \sigma_n^p(1)$, autrement dit tel que le mot-rime k se trouve au vers 1 dans la strophe $p + 1$. Or en fait

$$\begin{aligned}\{1, \sigma_n(1), \dots, \sigma_n^{n-1}(1)\} &= \{2, \sigma_n(2), \dots, \sigma_n^{n-1}(2)\} \\ &= \dots \\ &= \{n, \sigma_n(n), \dots, \sigma_n^{n-1}(n)\}.\end{aligned}$$

De sorte que l'on peut écrire que n est un nombre de Queneau si et seulement si

$$(1) \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \exists! p \in \{0, \dots, n-1\} \text{ tel que } k = \sigma_n^p(i).$$

En particulier, pour $k = i$, comme $i = \sigma_n^0(i)$, il vient que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et tout $p \in \{1, \dots, n-1\}$ on a $i \neq \sigma_n^p(i)$, c'est-à-dire que σ_n^p n'admet pas de point fixe pour $p \in \{1, \dots, n-1\}$.

- Ainsi n nombre de Queneau implique que pour tout $p \in \{1, \ldots, n-1\}, \sigma_n^p$ n'admet pas de point fixe. Soit, par contraposée : si il existe $p \in \{1, \ldots, n-1\}$ pour lequel σ_n^p admet un point fixe, alors n n'est pas un nombre de Queneau.
- Réciproquement, supposons que n ne soit pas un nombre de Queneau. Alors vu (1),

$$\begin{cases} \exists i \in \{1, \ldots, n\}, \exists k \in \{1, \ldots, n\} \\ \exists\ p \text{ et } q \in \{1, \ldots, n-1\} \text{ avec } p \neq q \end{cases} \quad \text{tels que } k = \sigma_n^p(i) = \sigma_n^q(i)\,.$$

En supposant $p > q$, on a ainsi $\sigma_n^{p-q}(i) = i$ avec p et $q \in \{0, \ldots, n-1\}$ d'où $p - q \in \{1, \ldots, n-1\}$. Donc il existe $r = p - q \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $\sigma_n^r(i) = i$ avec $i \in \{0, \ldots, n\}$, c'est-à-dire tel que σ_n^r admette un point fixe.□

Corollaire. *L'entier n est un nombre de Queneau si et seulement si σ_n est un cycle de longueur n, ce qui équivaut également à ce qu'aucun des σ_n^p n'ait de point fixe, et ce pour tout $p \in \{1, \ldots, n-1\}$.*

Appelons *orbite poétique d'un mot-rime* l'ensemble des vers où se trouve ce mot sur l'ensemble des strophes. L'orbite, au sens de σ_n, d'un mot-rime, identifié au vers auquel il se situe dans la première strophe du poème, est l'ensemble des mots-rimes qui se trouvent à ce vers sur l'ensemble des strophes.

Or le fait que ni σ_n, ni ses composées successives σ_n^p n'admettent de point fixe signifie que, « poétiquement », l'orbite de chacun des vers contient, sur l'ensemble du poème, tous les mots-rimes en un seul exemplaire, c'est-à-dire encore que chaque mot-rime se trouve une et une seule fois à un endroit donné de la strophe dans l'ensemble du poème.

Et par conséquent, n est un nombre de Queneau si et seulement si cette caractéristique structurelle du poème est réalisable, ce qui répond à notre questionnement précédent : toutes les n-ines possèdent cette particularité, et si elles ne la possèdent pas, alors d'ordre n sont-elles une quenine ? Que nenni !

Toutefois, la quête des nombres de Queneau par l'observation de σ_n et de ses composées se révèle être assez fastidieuse dès lors que n devient trop grand. Pour pallier ce petit problème, il existe un autre théorème qui les caractérise : c'est justement l'objet du paragraphe qui suit que d'aboutir à sa démonstration.

3. Caractérisation des nombres de Queneau

Commençons par une condition nécessaire au fait qu'un entier n soit un nombre de Queneau et qui résulte encore une fois de la propriété initiale de δ_n.

Théorème [1]. *Si n est un nombre de Queneau, alors $2n+1$ est premier.*

Démonstration : Supposons que n soit un nombre de Queneau et que $2n+1$ ne soit pas premier. Il existe alors $q > 1$ avec $q \neq 2n+1$ tel que q divise $2n+1$. Or $G_n = \langle \sigma_n \rangle = \langle \delta_n \rangle$, de sorte que les raisonnements précédents concernant les mots-rimes et leur position restent valable pour δ_n : cela revient à identifier $1, 2, \ldots, n$ aux vers de la dernière strophe, plutôt qu'à ceux de la première, et à « remonter » le poème.

Soit donc m appartenant à l'orbite de q. Cela a un sens, car comme q divise $2n+1$, q est nécessairement $\leq n$, d'où $\delta_n(q)$ et par conséquent l'orbite de q sont bien définis. Il existe ainsi $k \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $m = \delta_n^k(q)$, ce qui implique l'existence de $e \in \{0,1\}$ tel que $m \equiv (-1)^e 2^k q \; [2n+1]$. C'est-à-dire que $2n+1$ divise $m-(-1)^e 2^k q$. Or par hypothèse, q divise $2n+1$, donc q divise $m-(-1)^e 2^k q$, d'où q divise m.

Par conséquent, m appartient à l'orbite de q implique que q divise m, c'est-à-dire que dans l'orbite de q se trouvent uniquement des multiples de q. Or $1,\ldots,q-1$ ne sont pas des multiples de q, donc n'appartiennent pas à son orbite qui n'est donc pas complète dans la mesure où elle ne contient pas tous les mots-rimes. $\square$

Conséquence. Si n est un nombre de Queneau, alors $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ est le corps fini à $2n+1$ éléments. Son groupe des inversibles, noté $(\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z})^*$, est quant à lui cyclique d'ordre $2n$ (voir [3]).

Rappel. Un corps fini à q éléments étant donné, on appelle *racine primitive de l'unité* tout générateur du groupe des inversibles, groupe cyclique de cardinal $q-1$, c'est-à-dire tout élément d'ordre $q-1$ de ce groupe.

Théorème [2]. *Si $2n+1$ est premier, alors n est un nombre de Queneau si et seulement si*
– *soit 2 est d'ordre $2n$ dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$, c'est-à-dire 2 est racine primitive,*
– *soit n est impair et 2 est d'ordre n dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$.*

Rappel. Dire que l'élément 2 est d'ordre p dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ signifie que $\bar{2}^p = \bar{1}$ et que $\bar{2}^k \neq \bar{1}$ pour tout $k \in \{1,\ldots,p-1\}$, autrement dit $2^p \equiv 1 \; [2n+1]$, mais $2^k \not\equiv 1 \; [2n+1]$ pour tout k tel que $0 < k < p$.

Démonstration :

- Supposons que n soit un nombre de Queneau. Comme 2 est différent de 0, 2 est dans $(\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z})^*$ de sorte que l'ordre de 2 divise l'ordre de ce groupe, à savoir $2n$. Par conséquent, les seuls ordres possibles pour 2, différents de n et de $2n$, sont strictement inférieurs à n.

  Supposons ainsi que 2 est d'ordre $j < n$, d'où $2^j \equiv 1 \; [2n+1]$. Or on a $\delta_n^j(2) \equiv \pm 2^j.2 \; [2n+1]$, donc $\delta_n^j(2) \equiv \pm 2 \; [2n+1]$. Il y a alors deux cas à distinguer :
  - $*$ Si $\delta_n^j(2) \equiv +2 \; [2n+1]$, alors $\delta_n^j(2) = 2$ étant donné l'expression de δ_n qui est la suivante :

$$(2) \qquad \delta_n(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 2x \leq n \\ 2n+1-2x & \text{sinon, c'est-à-dire pour } n < 2x \leq 2n. \end{cases}$$

    De sorte que l'orbite de 2 contient au plus $j < n$ éléments, donc n'est pas complète, ce qui est en contradiction avec le fait que n est un nombre de Queneau.
  - $*$ Sinon, dans l'autre cas, $\delta_n^j(2) \equiv -2 \; [2n+1]$, donc vu (2), on a en fait $\delta_n^j = 2n+1-2 = 2n-1$. Or $1 \leq \delta_n^j(x) \leq n$, d'où $1 \leq 2n-1 \leq n$ soit $1 \leq n$ et $n \leq 1$ d'où $n = 1$, une contradiction puisque nous avons supposé $n \geq 2$.

Par conséquent, dans les deux cas, on aboutit à une contradiction : 2 ne peut être d'ordre $j < n$, donc 2 est d'ordre $\geq n$, c'est-à-dire d'ordre n ou $2n$ dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$.

Vu le théorème, il ne nous reste donc plus qu'à exclure le cas $n = 2p$ pair et 2 d'ordre n dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$.

Supposons qu'il en soit ainsi. Cela implique $2^{2p} \equiv 1\,[2n+1]$, c'est-à-dire $(2^p)^2 \equiv 1\,[2n+1]$ d'où $2^p \equiv \pm 1\,[2n+1]$. Or si on avait $+1$, cela impliquerait que 2 est d'ordre p modulo $2n+1$, absurde car il est d'ordre $2p$, donc nécessairement $2^p \equiv -1\,[2n+1]$. Il s'ensuit que $\delta_n^p(2) \equiv \pm 2^p 2\,[2n+1] \equiv \pm 2\,[2n+1]$. Et dans l'étape précédente, à la seconde $*$, nous avons vu que $\delta_n^p(2) \equiv -2\,[2n+1]$ impliquait $n = 1$ qui n'est bien sûr pas pair.

La seule possibilité est donc $\delta_n^p(2) \equiv 2\,[2n+1]$, soit $\delta_n^p(2) = 2$. Mais alors l'orbite de 2 par δ_n ne contient au plus que $p = \frac{n}{2} < n$ éléments distincts et donc n ne serait pas un nombre de Queneau. Par conséquent le cas $n = 2p$ et 2 d'ordre n est impossible.

- Prouvons désormais la condition suffisante en supposant vérifiées les hypothèses en question. Soit ω le cardinal de la plus petite orbite des éléments de $\{1, \ldots, n\}$ par δ_n. On note u cet élément de sorte que l'orbite de u est égale à $\{u, \delta_n(u), \ldots, \delta_n^{\omega-1}(u)\}$. Il suffit alors de montrer que $\omega = n$ auquel cas n sera un nombre de Queneau.

  On a $\delta_n^\omega(u) = u$, d'où $\delta_n^\omega(u) \equiv u\,[2n+1]$. Or $\delta_n^\omega(u) \equiv \pm 2^\omega u\,[2n+1]$, d'où $u \equiv \pm 2^\omega u\,[2n+1]$. Et $2n+1$ étant supposé premier, $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ est un corps dans lequel tout élément non nul est inversible. En particulier, comme $u \in \{1, \ldots, n\}, \bar{u} \neq \bar{0}$ est inversible. Par conséquent, $1 \equiv \pm 2^\omega\,[2n+1]$, c'est-à-dire $2^\omega \equiv \pm 1\,[2n+1]$. Deux cas sont alors à distinguer :

  * Si $2^\omega \equiv 1\,[2n+1]$, alors $\omega \geq \text{ordre}(2)$. Or par hypothèses, $\text{ordre}(2) \geq n$, donc $\omega \geq n$. Mais $\omega \leq n$ car δ_n est à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$. Donc $\omega = n$.
  * Si $2^\omega \equiv -1\,[2n+1]$, alors
    - Soit l'ordre de 2 est $j = 2n$, ce qui implique que $2^n \equiv -1\,[2n+1]$. Or $2^\omega \equiv -1\,[2n+1]$, d'où $2^{n+\omega} \equiv 1\,[2n+1]$, donc $2n | n+\omega$. Mais $\omega \leq n$, d'où $n + \omega \leq n + n = 2n$. Donc nécessairement $n = \omega$.
    - Soit l'ordre de 2 est $j = n$, avec n impair. Comme $2^\omega \equiv -1\,[2n+1]$, cela implique que $(2^\omega)^2 \equiv 1\,[2n+1]$, soit $2^{2\omega} \equiv 1\,[2n+1]$. Par conséquent n, ordre de 2, divise 2ω. Comme n est impair, le lemme de Gauss entraîne que n divise ω. D'où $n \leq \omega$ or $\omega \leq n$. Donc finalement $n = \omega$. □

Exemple. 9 est un nombre de Queneau, contrairement à 8.
En effet :

* Pour $n = 8$: $2n+1 = 17$ est premier, mais $2^4 = 16 \equiv -1\,[17]$, d'où $2^8 \equiv 1\,[17]$, de sorte que 2 est d'ordre 8 modulo 17. A fortiori, 2 n'est pas d'ordre $2n = 16$ modulo $2n+1$ d'où il s'ensuit que 8 n'est pas un nombre de Queneau.
* Pour $n = 9$: $2n+1 = 19$ est aussi premier et $2^4 = 16 \equiv -3\,[19]$, $2^5 \equiv -6\,[19]$, $2^6 \equiv -12\,[19] \equiv 7\,[19]$, $2^7 \equiv -5\,[19]$, $2^8 \equiv -10\,[19]$, $2^9 \equiv -20\,[19] \equiv -1\,[19]$ d'où $2^{18} \equiv 1\,[19]$. Ceci montre que 2 est d'ordre $2n = 18$ modulo $2n+1$, 9 est par conséquent un nombre de Queneau.

Dans *La belle Hortense*, le Narrateur insinue d'ailleurs cette remarque lorsque, cherchant dans *Le Journal* la suite d'un article concernant l'Affaire qui se trouve ne pas être à la page indiquée, il écrit :

> *je conclus qu'il devait y avoir une erreur de numérotation, que le 8 devait être un 6 ou encore un 9.*

Corollaire [2]. *Si $2n+1$ est premier, alors n est un nombre de Queneau si et seulement si*
– *soit 2 est d'ordre $2n$ dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ et $n \equiv 1$ ou $2\,[4]$,*
– *soit 2 est d'ordre n dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ et $n \equiv 3\,[4]$.*

Remarque. Pour $n \in \mathbb{N}$ impair, écrivons $n = 2p+1$. Alors :

$$n = 2p+1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit } p = 2q, \ \text{c'est-à-dire } n = 4q+1 \\ \text{soit } p = 2q+1, \ \text{c'est-à-dire } n = 4q+3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow n \equiv 1 \text{ ou } 3\,[4].$$

Conséquence : Les différences entre le corollaire et le théorème se traduisent en les termes suivants

a) 2 est d'ordre $2n$ dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ est incompatible avec $n \equiv 0\,[4]$ et $n \equiv 3\,[4]$.

b) 2 est d'ordre n dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ est incompatible avec $n \equiv 1\,[4]$.

Rappel (voir [8, page 15]). Soit p un nombre entier. On dit que 2 *est un carré modulo* p s'il existe un entier x tel que

$$2 \equiv x^2\,[p].$$

On peut caractériser les nombres premiers p pour lesquels c'est le cas ainsi : si p est un nombre premier différent de 2 alors

$$2 \text{ est un carré modulo } p \Longleftrightarrow p \equiv \pm 1\,[8].$$

Démonstration du corollaire : Cela revient à démontrer les conséquences *a*) et *b*).

a) Supposons d'une part que 2 est d'ordre $2n$ dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$, ce qui implique $2^n \equiv -1\,[2n+1]$. D'autre part, si on suppose $n \equiv 0\,[4]$, alors $2n+1 \equiv 1\,[8]$; ou si on suppose $n \equiv 3\,[4]$, alors $2n+1 \equiv 7 \equiv -1\,[8]$. Dans les deux cas, 2 est un carré de $(\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z})^*$. Donc il existe $x \in (\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z})^*$ tel que $2 \equiv x^2\,[2n+1]$ d'où $2^n \equiv x^{2n}\,[2n+1]$.
Mais $x \in (\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z})^*$, donc son ordre divise le cardinal du groupe, à savoir $2n$, de sorte que $x^{2n} \equiv 1\,[2n+1]$; il s'ensuit que $2^n \equiv 1\,[2n+1]$. Par conséquent, l'ordre de 2 est au plus n, donc $< 2n$. Les deux hypothèses sont donc bel et bien incompatibles.

b) Supposons d'une part $n \equiv 1\,[4]$, alors $2n+1 \equiv 3\,[8]$. Donc 2 n'est pas un carré modulo $2n+1$, c'est-à-dire un carré de $(\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z})^*$ $(\star)$. Supposons d'autre part que 2 est d'ordre n dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$, alors $2^n \equiv 1\,[2n+1]$. Mais on a aussi supposé que $n \equiv 1\,[4]$, c'est-à-dire $n = 4k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$. D'où $2^{1+4k} \equiv 1\,[2n+1]$. Cela implique $2^{1+4k}2 \equiv 2\,[2n+1]$ c'est-à-dire $2^{2+4k} \equiv 2\,[2n+1]$, soit encore $(2^{1+2k})^2 \equiv 2\,[2n+1]$. Par conséquent 2 est un carré modulo $2n+1$, ce qui est incompatible avec $(\star)$. □

Remarque. Un cas particulier du corollaire précédent est que si $n \equiv 0\ [4]$, alors n n'est jamais un nombre de Queneau.

On peut ainsi déterminer tous les nombres de Queneau. Voici en particulier la liste, donnée par J.-D. DUMAS dans [2], de tous les nombres de Queneau inférieurs à 1000, $^\diamond$ indiquant que 2 est d'ordre n dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$:

1	2	$3^\diamond$	5	6	9	$11^\diamond$	14	18	$23^\diamond$	26	29	30	33
$35^\diamond$	$39^\diamond$	41	50	$51^\diamond$	53	65	69	74	81	$83^\diamond$	86	89	90
$95^\diamond$	98	$99^\diamond$	105	113	$119^\diamond$	$131^\diamond$	134	$135^\diamond$	146	$155^\diamond$	158	173	174
$179^\diamond$	$183^\diamond$	186	189	$191^\diamond$	194	209	210	221	230	$231^\diamond$	233	$239^\diamond$	$243^\diamond$
245	$251^\diamond$	254	261	270	273	278	281	293	$299^\diamond$	$303^\diamond$	306	309	$323^\diamond$
326	329	330	338	350	354	$359^\diamond$	$371^\diamond$	$375^\diamond$	378	386	393	398	410
$411^\diamond$	413	414	$419^\diamond$	426	429	$431^\diamond$	438	441	$443^\diamond$	453	470	473	$483^\diamond$
$491^\diamond$	$495^\diamond$	509	$515^\diamond$	$519^\diamond$	530	$531^\diamond$	$543^\diamond$	545	554	558	561	$575^\diamond$	585
593	606	$611^\diamond$	614	$615^\diamond$	618	629	638	$639^\diamond$	641	645	650	$651^\diamond$	653
$659^\diamond$	$683^\diamond$	686	690	713	$719^\diamond$	$723^\diamond$	725	726	741	$743^\diamond$	746	749	$755^\diamond$
761	765	$771^\diamond$	774	$779^\diamond$	$783^\diamond$	785	$791^\diamond$	$803^\diamond$	809	810	818	$831^\diamond$	833
834	846	866	870	873	$879^\diamond$	$891^\diamond$	893	$911^\diamond$	$923^\diamond$	930	933	$935^\diamond$	938
$939^\diamond$	950	953	965	974	$975^\diamond$	986	989	993	998				

Et ce n'est pas tout. Revenons-en à *La belle Hortense*, car il est l'heure de mettre ces connaissances arithmétiques au profit de notre enquête sur les numéros des chat-pitres (9, 11, 18, 23, 26)... qui apparaissent au grand jour dans cette table des nombres de Queneau : les voilà enfin démasqués !

Par ordre croissant, il manque certes parmi les chat-pitres le numéro 14 qui pourtant est un nombre de Queneau. On peut alors penser à juste titre que ce nombre a dû se perdre quelque part dans le livre. On le retrouve effectivement à un autre endroit où il n'est vraisemblablement pas à sa place, puisque « l'inauguration de la rue de l'Abbé-Migne eut lieu, comme prévu, le 14 octobre, deuxième dimanche du mois », « le lendemain, lundi 14 octobre, il pleuvait » et « le jeudi 18, ça y était » : le second 14 semble égaré en mauvais lieu, ou plus exactement, en mauvaise date.

Un autre indice nous confirme d'ailleurs que les nombres de Queneau sont légion dans ce livre, particulièrement lorsqu'il s'agit de la Poldévie et de l'Affaire. Pour illustration, c'est en ces termes qu'est décrite l'édition de la Patrologie financée par les Princes poldèves :

> *Si on pense qu'il y avait dans chaque volume six fois vingt-six onces d'or, neuf émeraudes, onze rubis, quatorze diamants de dix-huit carats chacun, ça fait une jolie somme !*

On retrouve là encore foule d'entiers de Queneau !

Enfin, on aurait pu éventuellement se douter, avant toute cette analyse, qu'il s'agissait de nombres de Queneau, dans la mesure où ROUBAUD fait référence à cet auteur à plusieurs reprises : lors de la description de la Bibliothèque, Hortense est supposée avoir envie de lire le roman *Pierrot mon ami* [4] ou plus loin, dans une intervention du Lecteur, ce dernier reconnaît l'avoir lui-même lu ; Eusèbe marmonne « Ça bichebiche mézigue, ça bichebiche beaucoup », expression toute droite extraite de *Loin de Rueil* [5].

Ceci dit, il existe également une autre conséquence du corollaire qui permet de repérer certains nombres de Queneau encore plus rapidement.

Définition. Un nombre premier p est un nombre premier de Sophie Germain si $2p+1$ est aussi un nombre premier.

Cette mathématicienne française (1776-1831) a en effet démontré, pour les nombres premiers vérifiant cette propriété, un résultat se rapprochant du grand théorème de Fermat, leur léguant ainsi son nom.

Proposition [1]. *Les nombres premiers de Sophie Germain sont des nombres de Queneau.*

Démonstration : Le premier nombre premier de Sophie Germain est $n = 2$ (car $2n+1 = 5$ est premier) : c'est aussi un nombre de Queneau, σ_2 étant la transposition $(1, 2)$, forcément cyclique.

Soit désormais n un nombre premier de Sophie Germain différent de 2, n est donc impair. On a ainsi $n \equiv 1$ ou $3\,[4]$, de sorte que, vu le corollaire, il suffit de discuter sur l'ordre de 2 dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ pour montrer que n est un nombre de Queneau. Or n étant un nombre premier de Sophie Germain, $2n+1$ est aussi premier. Il s'ensuit, comme nous l'avons déjà fait remarquer précédemment, que l'ordre de 2 modulo $2n+1$ divise $2n$: c'est donc $2n$, n ou 2, étant donné que n est premier. Mais 2 est d'ordre 2 dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ implique $2^2 = 4 \equiv 1\ [2n+1]$, c'est-à-dire que $2n+1$ divise 3, soit $n = 1$, ce qui est en contradiction avec n premier. Par conséquent 2 est d'ordre n ou $2n$ modulo $2n+1$.

Étudions dès lors les deux cas qui se présentent :
– Si $n \equiv 1\,[4]$, vu la conséquence *b*), 2 n'est pas d'ordre n, il est donc d'ordre $2n$.
– Si $n \equiv 3\,[4]$, vu la conséquence *a*), 2 n'est pas d'ordre $2n$, il est donc d'ordre n.
Ceci montre, en vertu du corollaire, que n est un nombre de Queneau. $\square$

Exemple. Nous avons déjà dit que 3 est un nombre de Queneau. Étant donné que $n = 3$ est un nombre premier tel que $2n+1 = 7$ l'est aussi, 3 est un nombre premier de Sophie Germain. Nous pouvons par conséquent, si nous ne sommes pas à ce point tiraillés par la faim que notre esprit ne puisse se concentrer, écrire quelque *ter(r)ine*, à l'instar de celle qui suit.

Ce matin-là, il se leva de bonne heure
Et sur ses fruits découpés, en contemplant le banc
De coraux, saupoudra du sucre de canne.

Puis le vieillard, à l'aide de sa canne,
Comme il sentait venir son heure,
S'assit tranquillement sur un banc

Jusqu'à ce que la vue d'un banc
De poissons lui fît penser à sa canne
À pêche et comprendre que ce n'était pas l'heure !

Nous avons désormais une et même plusieurs méthodes pour identifier les nombres de Queneau. Mais quel en est le nombre ? Une esquisse de réponse nous est fournie par le mathématicien allemand Emil Artin (1898-1962) au travers d'une conjecture datant de 1927, dont un cas particulier peut s'exprimer ainsi :

Conjecture d'Artin. *Au moins 37% des entiers n tels que 2n+1 soit premier sont des nombres de Queneau.*

Il y aurait donc une infinité de nombres de Queneau...

Mais nous sommes soucieux de respecter les personnages du roman de ROUBAUD, en particulier Mme Yvonne qui confie ses craintes à son mari : « — Arsène, lui dit-elle, la pensée de ces espaces infinis m'effraye ». Aussi allons-nous dorénavant nous concentrer à nouveau sur les cycles qui, tournant en rond, n'ont aucune raison de diverger vers des univers inconnus et angoissants, voire dantesques [7].

4. Des cycles aux spirales

Jusqu'à présent, concernant les nombres de Queneau, les quenines qui en résultent et leur impact dans *La belle Hortense*, nous avons évoqué et tenté de répondre aux questions : qui ? quoi ? où ? comment ? combien ? Mais reste la question : pourquoi ? Oui, pourquoi Jacques ROUBAUD a-t-il choisi de s'intéresser en particulier aux nombres de Queneau ?

Il aurait tout à fait pu définir une autre permutation, employer certains entiers bien précis s'y référant et permettre ainsi l'élaboration de ce que l'on pourrait alors nommer des « roubines » d'ordre n.

En effet, pour obtenir la caractéristique structurelle présente dans le texte d'Arnaut DANIEL et dont on a discuté dans la première partie, il suffit que la permutation choisie soit un cycle pour que cela fonctionne. Par exemple, le cycle $(1, 2, \dots, n)$ tout simplement répond aux exigences. Cela est dû au fait que cette construction repose sur un raisonnement purement mathématique et que mathématiquement, tous les cycles d'ordre n sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$ (voir [3, p. 15]). Autrement dit, ils se valent tous dans la mesure où le nom des éléments permutés n'a pas d'importance, le principe essentiel étant que l'on envoie chaque élément sur celui qui le suit, quel que soit sa désignation.

Rappel. Soit G un groupe, g_1 et $g_2 \in G$. On dit que g_1 est *conjugué* à g_2 s'il existe $h \in G$ tel que $g_1 = hg_2h^{-1}$.

Propriété. *Tous les cycles d'ordre n sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$, c'est-à-dire que, étant donnés deux cycles $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n$, il existe $\delta \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma_1 = \delta\sigma_2\delta^{-1}$.*

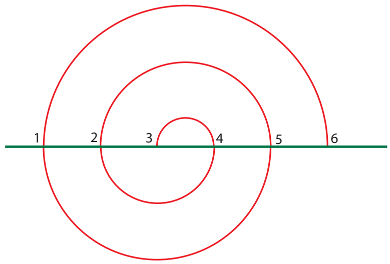
Mais cette conjugaison des n-cycles ne peut pas se transcrire en littérature, où c'est justement l'ordre de succession des mots-rimes qui donne son sens au poème : le choix d'une permutation particulière en constitue par conséquent le fondement.

Observons donc de plus près la permutation à l'œuvre dans le roman de ROUBAUD et dans la sextine d'Arnaut DANIEL, à savoir σ_6, afin d'en déterminer la spécificité :

$$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Petit clin d'œil à Dante, qui reconnut dans ses écrits les qualités poétiques d'Arnaut DANIEL.

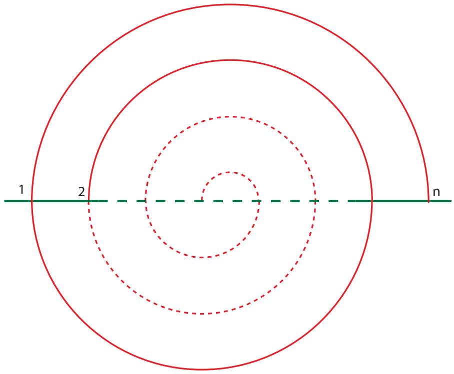
On remarque ainsi que, si l'on inscrit les chiffres de 1 à 6 dans cet ordre sur une droite, la spirale que l'on peut construire débutant à 6 et passant par chacun d'eux suit précisément l'ordre de succession des images par σ_6 de $\{1, \ldots, n\}$, c'est-à-dire $\sigma_6(1) = 6$, puis $\sigma_6(2) = 1$,... et enfin $\sigma_6(6) = 3$. En d'autres termes, si on lit les chiffres dans l'ordre dans lequel ils apparaissent le long de la spirale (ici 615243), on trouve les images de (123456) par σ_6. C'est ce que montre le dessin suivant :



On comprend alors mieux pourquoi le roman de Roubaud est truffé d'allusions aux spirales et aux escargots. Cela donne toute sa signification au fait qu'avec le processus institutionnel de succession des princes « tout demeurait conforme à la figure emblématique des Poldèves qui est l'hélice, et satisfaisant pour leur animal sacré qui est l'escargot » et que c'est « la Grande Course d'Escargots qui [en] avait, disait-on, donné à Arnaut Danieldzoï l'idée décisive ». Enfin pour ne citer que quelques autres exemples, les trente-six quincailleries cambriolées décrivent géographiquement une spirale, toutes victimes d'un criminel qui suspend en spirale au plafond une série de casseroles et dérobe une statuette représentant une Vénus poldève portant dans ses bras un escargot. Et c'est sans compter la marque de fabrique dont sont tatoués tous les princes poldèves, à savoir encore un escargot...

Quant à la sextine d'Arnaut Daniel, la spirale, puisque représentant la permutation σ_6, donne en fait l'enchaînement des mots-rimes au sein d'une même strophe, ceux-ci étant identifiés par rapport à leur ordre dans la strophe précédente.

C'est même en s'appuyant sur cette spirale que l'on a pu généraliser σ_6 à n quelconque. En effet, pour un n fixé, la spirale prend la forme suivante...



... à partir de laquelle il apparaît clairement, en « remplissant » dans un premier temps les images des nombres impairs, puis dans un second celle des nombres pairs, que

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & n-1 & 2 & n-2 & 3 & n-3 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

D'où l'on déduit la forme générale de σ_n, à savoir celle annoncée au début :

$$\begin{cases} \sigma_n(2p) = p \\ \sigma_n(2p+1) = n - p. \end{cases}$$

Ce n'est ainsi pas innocemment que σ_n est appelée permutation *spirale* : quel que soit l'entier n, on peut dessiner cette spirale, ce qui est cohérent avec le fait que σ_n est définie pour tout n, mais il est seulement certains entiers pour lesquels cette permutation se trouve être un cycle, ceux-là même qui sont dits nombres de Queneau.

Cependant, même pour les entiers qui ne sont pas des nombres de Queneau, il est toujours possible de créer des poèmes avec une structure analogue à celle des quenines : il suffit pour cela de définir une permutation qui soit cyclique pour ces nombres. Pour ne citer qu'un exemple, voici celle développée par Jacques Roubaud et Georges Perec afin de remédier au fait que 10 n'est pas un nombre de Queneau, à savoir la *perecquine*, notée π_n, appartenant à $\mathfrak{S}_n$ et qui vérifie

$$\pi_n(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 2x \leq n \\ 2x - (n+1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Conclusion

Notre enquête sur *La belle Hortense* n'est à ce jour certes pas aboutie, mais nous sommes toutefois parvenue à sonder certains de ses mystères.

Par notre étude de la Poldévie, ses princes et ses animaux — chats et escargots — nous avons en effet mis en lumière leurs liens avec la sextine d'Arnaut Daniel, la permutation qui structure cette dernière ainsi que sa généralisation à n quelconque. D'où notre intérêt — à l'origine littéraire, mais qui se transforme rapidement en curiosité purement mathématique — pour la recherche des nombres de Queneau et de leur caractérisation, d'abord à l'aide des cycles puis grâce aux corps finis, afin de déterminer les entiers n de Queneau et pouvoir ainsi construire le cas échéant une n-ine ou *quenine* d'ordre n, c'est-à-dire un poème s'appuyant sur la construction qui résulte de σ_n. Une permutation dont la singularité est d'ailleurs de représenter indirectement une spirale, motif auquel il est souvent fait allusion dans l'œuvre.

En dépit de ces révélations, le roman ne nous a sans conteste pas encore livré tous ses secrets. Certains indices nous sont restés imperméables, par exemple la présence de multiples références à d'autres ouvrages, en particulier, comme il s'agit ici d'une histoire de Prince et de chats, les extraits à la fois du *Petit Prince* et du *Chat qui s'en va tout seul*. Et c'est sans compter la récurrence acharnée du nombre 53 (qui d'ailleurs est un nombre premier de Sophie Germain, et donc de Queneau) :

mis en parallèle des quatre groupes de sept chapitres et des trois cent soixante-six volumes de la *Patrologie*[8], il pourrait évoquer le temps (une année bissextile compte trois cent soixante-six jours, régulièrement cinquante-trois semaines, les mois se composant généralement de quatre semaines de sept jours).

En tous les cas, mêmes si certaines questions restent en suspens (après tout, il s'agit également d'une énigme policière où subsiste toujours un soupçon de mystère), il est manifeste que le fondement arithmétique de cette œuvre lui confère une dimension supplémentaire qui permet à Jacques ROUBAUD d'enrichir encore un peu plus son roman, en suggérant par des figures de style mathématiques ce que l'on tait par les termes habituels. Le langage des nombres apparaît donc ici comme une Renaissance — terme qui revient très fréquemment dans le récit — du langage des mots, une sorte de complémentarité qui donne un nouveau souffle à la littérature.

Et pour qu'en cette fin, vous ne restiez pas sur votre faim, voici une petite *terrine*, juste pour le plaisir de savourer encore quelques instants avec vous...

La châtelaine, du haut de sa tour,
Pour que son poème entre dans la mesure,
N'a de cesse de recompter le nombre de ses pieds.

De même, du bout de ses mains et de ses pieds
Le potier façonne à l'aide de son tour
L'objet qui prend vie au fur et à mesure.

Oui, l'art n'aura jamais de commune mesure,
Car dans l'océan des possibles nous n'aurons jamais pied
Et de l'imagination nous ne ferons jamais le tour.

Remerciements

Tous mes remerciements à Laura PALLEZ et Claire PARIZEL qui m'ont fait découvrir l'Oulipo, cette belle collaboration des mathématiques et de la littérature et qui, sans le savoir, m'ont insufflé le thème de ce mémoire.

Je tiens également à remercier les membres de ma famille qui m'ont soutenue dans mon travail et se sont émerveillés de ce qu'ils comprenaient ou non...

Un très grand merci à Michèle Audin qui m'a accompagnée dans cette aventure en m'apportant toute l'aide dont j'avais besoin, que ce soit au niveau de mes questionnements mathématiques qu'en ce qui concerne les obstacles que je rencontrai dans ma découverte de LaTeX, sans compter les innombrables idées et connaissances dont elle me fit part.

Bibliographie

[1] Monique BRINGER (1969) Sur un problème de Raymond Queneau, *Math. & Sci. hum.* **27**, 13–20.

8. Ouvrage dont l'abbé Migne est l'auteur et au nom duquel une rue est inaugurée.

[2] Jean-Guillaume DUMAS (2008) Caractérisation des quenines et leur représentation spirale, *Math. & Sci. hum.* **184**, 9–23.

[3] Daniel PERRIN (1996) *Cours d'algèbre,* Ellipses.

[4] Raymond QUENEAU (1942) *Pierrot mon ami*, Gallimard, Paris (disponible en Folio).

[5] Raymond QUENEAU (1944) *Loin de Rueil,* Gallimard, Paris (disponible en Folio).

[6] Jacques ROUBAUD (1985) *La belle Hortense,* Ramsay (disponible en Points Seuil).

[7] Jacques ROUBAUD (2008) *La fleur inverse,* Architecture du verbe, Les Belles lettres, Paris.

[8] Jean-Pierre SERRE (1970) *Cours d'arithmétique,* Presses Universitaires de France, Paris.

Vanessa VALLET
vanessa.vallet@etu.unistra.fr

La dérive des continents, quinze ans après

Groupe *Lycée-Université* de l'Irem de Strasbourg [1]

Résumé : Un article d'un groupe de l'Irem de Strasbourg, paru en 1995 et intitulé *La dérive des continents*, faisait le constat d'un écart grandissant entre l'enseignement au lycée et l'enseignement à l'université. Quinze ans après nous reprenons ce travail pour voir si les deux continents se sont rapprochés ou au contraire encore éloignés. La comparaison des programmes, des méthodes d'enseignement et d'évaluation nous permet de conclure que les deux mondes se sont indéniablement rapprochés.

Mots-clés : Curriculum, liaison lycée-université, méthode d'enseignement, programme d'enseignement, système scolaire.

Introduction

En 1995 paraissait dans les revues Repères et L'Ouvert un article intitulé *La dérive des continents* ([1]), rédigé par un groupe de l'Irem de Strasbourg. Ce groupe y étudiait la liaison entre le lycée et le DEUG. Près de quinze années se sont écoulées et le lycée comme l'université ont évolué. Les continents se sont peut-être rapprochés ou au contraire éloignés davantage. L'objet de ce texte est de faire le point sur les pratiques et les programmes actuels en mathématiques dans la filière scientifique du lycée et la première année de licence de mathématiques à l'université.

Nous y décrivons et comparons les programmes de mathématiques des terminales S et de la première année de licence de mathématique (L1) . Nous expliquons succinctement les conditions d'études au lycée et à l'université. Chaque fois qu'à notre sens une évolution majeure a eu lieu, nous la soulignons en prenant comme point de comparaison les remarques faites en 1995 par les auteurs de *La dérive des continents.*

1. L'enseignement secondaire, la filière S

Les élèves n'ayant pas choisi la voie professionnelle commencent leurs années de lycée par la classe de seconde qui est une classe dite « de détermination ». Durant cette année scolaire un élève suit actuellement quatre heures de cours de mathématiques dont une heure de module en demi-classe et, s'il est en difficulté, une heure supplémentaire d'aide individualisée en groupe de huit élèves maximum. À l'issue de la seconde, les élèves (ou leurs parents) formulent des vœux d'orientation. Dans les lycées d'enseignement général, trois filières sont proposées : littéraire (L), économique et sociale (ES) et scientifique (S). Un élève de seconde a également la possibilité d'opter pour une voie technologique : STI (technologies industrielles), STG (technologies de la gestion) et STL (technologies de laboratoire) sont les

1. Ont participé aux travaux de ce groupe : François Dreyfuerst, Claude Mitschi, Hélène Tanoh, Christine Vespa, Marc Wambst et Dominique Weil.

principales possibilités. La décision d'orientation incombe au proviseur du lycée, sur proposition du conseil de classe. La décision est évidemment motivée par le niveau de l'élève, mais elle peut aussi être influencée par un besoin conjoncturel de gestion des flux.

Dans les faits, on constate que la section S est plus que jamais la « voie royale ». Il s'agit davantage d'une filière « générale » ne fermant aucune porte, que d'une véritable filière scientifique. Les mathématiques restent la matière principale (avec le plus fort coefficient au baccalauréat), mais souvent hélas la moins appréciée des élèves. En effet, certains de ceux qui y sont inscrits n'ont pas de projet particulier, voire de goût ou d'aptitude pour les mathématiques ou les sciences en général. La forte proportion de matières non scientifiques permet d'ailleurs d'obtenir le baccalauréat scientifique avec des notes très médiocres en mathématiques.

1.1. Les conditions d'études

L'horaire hebdomadaire pour un élève de première S est actuellement de 4 heures de cours en classe entière et 1 heure de module en demi-classe. Pour la classe de terminale S, il est de 4 heures 30 de cours et 1 heure de module. En terminale, les élèves ayant choisi les mathématiques comme enseignement de spécialité ont 2 heures supplémentaires. Nous ne pouvons que constater une diminution du nombre d'heures de mathématiques. À titre de comparaison, en 1995, un élève de terminale S suivait 9 heures de mathématiques par semaine. Cette diminution a également touché tous les niveaux inférieurs, tant au lycée qu'au collège.

Les classes de lycée ont un effectif oscillant le plus souvent entre 24 et 40 élèves (dans certaines situations très particulières, les effectifs peuvent baisser en-dessous de 20) et sont de niveau hétérogène. Dans certaines classes de terminale S les élèves sont regroupés selon leur spécialité (mathématiques, physique-chimie ou sciences de la vie et de la terre), mais les établissements sont parfois amenés à réunir plusieurs spécialités dans une même classe.

1.2. Les programmes

Les programmes officiels de lycée sont en général directifs. Ainsi la fonction exponentielle doit maintenant être définie comme solution de l'équation différentielle $f' = kf$, solution introduite à l'aide de la méthode d'Euler. L'enseignant reste libre de choisir la manière d'introduire la fonction logarithme. Les professeurs de lycée ont toutefois une grande marge de liberté dans l'organisation de leur enseignement et en particulier de sa progression.

Par ailleurs, le cours semble reprendre de l'importance et les démonstrations une place privilégiée dans celui-ci, grâce notamment à l'introduction de la « Restitution Organisée des Connaissances » (ROC), qui a fait son apparition en 2005 dans l'épreuve du baccalauréat. Il s'agit d'inciter l'élève à apprendre le cours en lui demandant de rédiger certaines démonstrations faites en classe. Enfin, il semble que les programmes à venir accorderont une place plus importante à l'algorithmique.

Concernant le contenu des programmes de mathématiques au lycée, nous décrivons ceux qui étaient en vigueur au cours de l'année scolaire 2008/2009, et sur lesquels ont travaillé tous les étudiants qui entrent ou entreront en L1 jusqu'en 2011 inclus [2]. Donnons-en, pour commencer, les grandes lignes :

— Fonctions numériques d'une variable réelle. Fonctions de référence : affine, carré, cube, racine carrée, sinus, cosinus, tangente, exponentielle, logarithme népérien, fonctions puissances.

— Dérivation et application à l'étude des variations, à la recherche d'extrema, tangente, méthode d'Euler. Théorème des valeurs intermédiaires (essentiellement dans le cas d'une fonction continue strictement monotone.)

— Calculs de limites (suites et fonctions), théorèmes de comparaison, asymptotes.

— Calcul intégral, primitive, calcul d'aire, intégration par parties, intégration et ordre. Équations différentielles $y' = ay$ et $y' = ay + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

— Suites numériques, suites arithmétiques et géométriques, somme des termes. Suites monotones, bornées. Suites adjacentes. Toute suite croissante et majorée converge. Démonstration par récurrence.

— Géométrie classique et repérée dans le plan et dans l'espace. Calcul vectoriel, produit scalaire. Applications aux calculs de distances et d'angles. Équations de plan. Représentations paramétriques d'une droite dans l'espace. Barycentre, homogénéité et théorème du barycentre partiel. Applications à des problèmes de concours. Caractérisations barycentriques des droites, des segments et des plans.

— Nombres complexes. Formes algébrique et trigonométrique. Application à la géométrie. Caractérisation des translations, des homothéties et des rotations. Équation du second degré à coefficients réels. Formule de Moivre. Équation paramétrique d'un cercle.

— Statistiques descriptives et simulation. Loi des grands nombres. Adéquation à une loi équirépartie.

— Probabilité sur un ensemble fini. Variables aléatoires, espérance et variance. Combinaisons. Loi binomiale. Formule du binôme. Formule des probabilités totales. Probabilités conditionnelles. Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples de lois continues (uniforme et exponentielle).

Les élèves suivant l'enseignement de spécialité mathématique (moins d'un quart des élèves de terminale S) abordent en plus les points suivants :

— Arithmétique. Divisibilité, pgcd, congruences, Théorèmes de Bézout, Gauss et Fermat (version la plus simple), théorème de décomposition en facteurs premiers.

— Etude des similitudes planes. Caractérisation par $z' = az + b$ et $z' = a\bar{z} + b$.

— Exemples de surfaces.

Détaillons le programme d'analyse. L'étude des suites et des fonctions est motivée par la résolution de problèmes issus aussi bien des mathématiques que des autres disciplines : elle n'est pas une fin en soi. Les fonctions étudiées sont des fonctions numériques d'une variable réelle, sans paramètre et, la plupart du temps,

2. Pour plus de détails on trouvera les programmes complets sur le site *eduscol* du ministère de l'éducation nationale (voir [2]).

définies sur un intervalle. On peut noter que les problèmes mettant en jeu des fonctions trigonométriques sont rares au baccalauréat et, de fait, on en étudie rarement en terminale (par manque de temps). La continuité n'est abordée que pour permettre d'énoncer certains théorèmes (valeurs intermédiaires et existence de primitives). Démontrer qu'une fonction donnée est continue n'est pas un objectif du programme. Toutes les indications nécessaires à l'étude d'une suite sont données dans l'énoncé, mis à part le cas des suites arithmétiques ou géométriques. Citons quelques exemples classiques, de difficulté croissante :

— Déterminer une équation de la tangente au graphe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0. Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$. Démontrer que pour tout réel x, on a $e^x \geq x + 1$. Interpréter graphiquement ce résultat.

— Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a $\ln x < \sqrt{x}$ (on pourra étudier les variations de $\ln x - \sqrt{x}$). En déduire que pour tout $x > 1$, on a $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$. Déterminer la limite de $\frac{\ln x}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

— On pose $I_0 = \int_0^1 e^{-x}dx$ et $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx$ pour tout entier naturel $n \geq 1$. Calculer I_0 et I_1. Démontrer $0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n$ pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $x \in [0, 1]$. En déduire $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. Quelle est la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$?

— On admet l'existence d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle $y' = y$ qui vérifie $f(0) = 1$. Démontrer $f(x) \neq 0$ pour tout x (on pourra étudier les variations de la fonction h définie par $h(x) = f(x)f(-x)$).

Les élèves ont de grandes difficultés à manipuler des inégalités. Par exemple, les deux exercices *encadrer* a^2 *lorsque* $-1 < a < 2$ ou *démontrer par récurrence que l'on a* $u_n \in [0, 1]$ *lorsque* $u_0 \in [0, 1]$ *et* $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$ ont un taux de réussite faible. Cependant, lorsque les indications nécessaires sont fournies par l'énoncé, l'exploitation de l'étude des variations d'une fonction pour obtenir des inégalités est un travail familier, bien compris par une majorité d'élèves.

En dehors des théorèmes de comparaison, les calculs de limites sont peu développés. Pour calculer la limite en $+\infty$ de xe^{-x^2} un élève se contentera souvent de dire que *l'exponentielle l'emporte* et que la limite est donc 0.

En géométrie, la résolution de problèmes tient une place essentielle. Les élèves devraient être entraînés à choisir l'outil le plus pertinent (propriétés des configurations, calcul vectoriel, calcul barycentrique, transformations, nombres complexes, géométrie analytique). Cette capacité est cependant rarement évaluée. Les structures algébriques sous-jacentes ne sont étudiées ni dans la partie obligatoire, ni en enseignement de spécialité (toutes les indications nécessaires sont données dans le cas où un élève aurait à étudier la composée de deux similitudes). Lors de l'étude des nombres complexes on revient sur les formules de trigonométrie (somme et duplication) mais les formules d'Euler ne sont pas au programme. Il en est de même des racines carrées d'un nombre complexe et des racines n-ièmes de l'unité. La résolution de systèmes linéaires est au programme, en lien avec la géométrie, donc limitée de fait à des systèmes 3×3. La méthode du pivot de Gauss ne figure pas au programme et il faut reconnaître que les élèves ont pour la plupart des difficultés à mener les calculs jusqu'au bout.

En ce qui concerne la statistique et les probabilités, on peut penser que dans l'esprit des concepteurs du programme la partie statistique s'inscrit dans l'éducation à la citoyenneté. En classe de seconde, un huitième du temps doit y être consacré, la sensibilisation aux phénomènes aléatoires étant abordée par le biais de simulations effectuées par les élèves sur leurs calculatrices ou à l'aide d'un logiciel. En première, le lien entre statistique et probabilités est abordé à travers l'énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres. En terminale, le paragraphe *adéquation à une loi équirépartie* est une brève introduction à la problématique des tests.

Comme les élèves ne disposent pas du vocabulaire et des symboles de la théorie des ensembles, le formalisme de la théorie des probabilités ne les met pas à l'aise : modéliser une situation à l'aide d'un arbre de probabilités est une activité bien maîtrisée par la plupart d'entre eux, mais beaucoup ont du mal à faire le lien avec les formules classiques ; la confusion entre probabilité d'une intersection et probabilité conditionnelle est fréquente à l'écrit, et certainement aussi dans leur esprit.

La définition des coefficients binomiaux, leurs premières propriétés et la formule du binôme sont au programme. Toutefois les problèmes de dénombrement ne sont pas étudiés pour eux-mêmes, mais en relation avec les probabilités.

1.3. L'évaluation

Nous terminons notre description de l'enseignement au lycée par quelques remarques sur l'évaluation. Celle-ci prend souvent la forme de contrôles de deux heures, d'épreuves de « Bac blanc » de quatre heures et de « devoirs maison » à un rythme moyen d'un devoir de mathématiques toutes les deux semaines.

L'épreuve de mathématiques du baccalauréat a également évolué depuis 1995. Nous avons déjà évoqué l'apparition de la « restitution organisée des connaissances ». De manière générale, on abandonne les problèmes longs et très guidés au profit d'exercices plus courts mais plus ouverts. Ainsi la distinction entre « les exercices » et « le problème » a disparu. L'épreuve consiste généralement à résoudre quatre, parfois cinq, exercices d'importance comparable.

2. L'enseignement supérieur, la licence de mathématiques

Depuis l'adoption du système de Bologne, les universités françaises déclinent leurs diplômes en termes de licence (bac+3), master (licence+2) et doctorat (on parle du sytème LMD). Le cursus d'études s'articule en semestres. Il faut acquérir six semestres pour obtenir une licence puis quatre autres pour un master. Les différentes matières sont appelées UE (Unités d'Enseignement). Chacune d'elles, en cas de réussite, donne lieu à la délivrance de Crédits européens. Ainsi l'acquisition d'un semestre permet d'acquérir 30 crédits, celle de la licence 180 crédits.

Cette réforme des diplômes a donné lieu à d'autres modifications de l'organisation des études, en particulier dans les premières années de licence. Elle a en même temps créé de grandes différences d'organisation d'une université à l'autre. Nous décrirons ici les études en première année de licence de mathématiques à l'Université de Strasbourg.

Tout bachelier, quelle que soit la mention de son baccalauréat, peut de plein droit s'inscrire en première année de licence à l'université. Les enseignements de première année sont identiques pour la licence d'informatique et la licence de mathématiques. Au moment du passage en deuxième année un étudiant peut choisir librement de poursuivre en informatique ou en mathématiques.

Nous observons depuis quelques années un recul des effectifs en licence de mathématiques. Celle-ci doit faire face à une désaffection à l'égard des sciences en général, mais aussi à la concurrence des filières sélectives comme les classes préparatoires, les IUT et même les BTS. Il n'est pas rare de voir des étudiants s'inscrire à l'université faute de mieux car ils n'ont pas été admis dans ces filières.

Depuis 2009 l'Université de Strasbourg participe au programme *d'Orientation active* du portail *Admission post-bac.* Par l'intermédiaire de ce portail, il est expliqué aux lycéens faisant le vœu de s'inscrire en première année de notre licence malgré de mauvais résultats en mathématiques et en physique en terminale, ou n'ayant pas suivi la filière S, que leurs chances de réussite sont faibles, voire nulles.

Signalons également la création d'une filière *Mathématiques et Physique Approfondies* (MPA) qui est, au sein de la licence de mathématique, un parcours renforcé en vue de l'accès aux grandes écoles par la voie universitaire, de l'admission dans un magistère et de l'accès aux préparations aux agrégations de mathématiques ou de physique. Cette filière est sélective, l'admission se faisant sur dossier, également par l'entremise du portail *Admission post-bac.*

Dans la suite, nous nous contenterons de décrire la licence de mathématiques hors parcours MPA. Pour ce dernier les conditions d'études et les programmes sont les mêmes que ceux de la licence « ordinaire », si ce n'est que les exigences y sont plus fortes en mathématiques et que les enseignements d'informatique y sont remplacés par de la physique [3].

2.1. Les conditions d'études

L'article de 1995 décrivait les études à l'université en termes de cours magistraux en amphithéâtre. Ceci a considérablement changé. Les effectifs ayant baissé, il a été possible d'adoucir le passage du lycée à l'université. L'enseignement de première année est principalement dispensé sous forme de *cours intégrés.* Cela signifie que les étudiants d'une promotion sont répartis en groupes de trente à quarante. Dans chaque matière, un groupe est suivi par un enseignant qui dispense à la fois le cours et les travaux dirigés.

Depuis la rentrée 2008, l'UFR [4] de mathématique et d'informatique de l'Université de Strasbourg a mis en place un système de « semestrialisation totale » en licence, dans lequel les cours sont (presque) tous répétés chaque semestre. Dans les faits, un étudiant n'ayant pas acquis le semestre 1 lors des examens de janvier, devra suivre à nouveau les cours des UE non acquises à la rentrée semestrielle de février. Il pourra les compléter par certains cours du semestre 2. Ce nouveau

3. Les descriptifs officiels de ces diplômes sont disponibles sur le site de l'UFR de mathématique et d'informatique : http ://mathinfo.unistra.fr

4. Unité de Formation et de Recherche, autrement dit, la *Faculté.*

système remplace le système dit de « progression » adopté par l'université lors du passage au LMD et qui permettait à un étudiant n'ayant pas acquis un semestre de s'inscrire au semestre suivant et même à l'année suivante dans certains cas. Ce système n'était pas adapté aux mathématiques car il menait les étudiants en difficultés à l'échec. En effet, surchargés de travail, ceux-ci n'arrivaient pas à acquérir des UE de l'année supérieure ni même, le plus souvent, à rattraper celles de l'année précédente.

De plus, depuis la rentrée 2009, les étudiants les plus faibles en mathématiques peuvent bénéficier d'un *semestre tampon* ou *semestre 0*. Ils sont repérés par un test d'entrée auquel sont soumis tous les étudiants *primo-entrants* en première année de licence de mathématiques et informatique. Le semestre 0 est identique au semestre 1, à l'exception des enseignements de mathématiques qui sont remplacés par un enseignement intitulé *Mathématiques S0* où l'on reprend une partie du programme de mathématiques de terminale S. Les étudiants réussissant le semestre avec cet aménagement se voient délivrer le Diplôme d'université *Propédeutique en mathématiques*. On espère que, soit ces étudiants se réorienteront à l'issue du semestre, par exemple en IUT, soit ils auront acquis les bases nécessaires à la poursuite normale d'un semestre 1 en janvier.

Enfin, les étudiants des deux premières années de licence peuvent assister à des séances hebdomadaires *de tutorat* ou *d'étude* durant lesquelles un enseignant de mathématiques est à leur disposition pour les aider dans leur travail personnel (résolution d'exercices ou lecture des cours).

La grande difficulté de la première année consiste à assimiler un grand nombre de notions et à acquérir la pratique d'un raisonnement mathématique rigoureux. L'étudiant ne dispose pour cela que de douze semaines d'enseignement par semestre.

Bien que l'abandon des cours magistraux ait rapproché les enseignants des étudiants et que la part du contrôle continu soit devenue plus importante, les étudiants sont moins encadrés que les élèves de lycée ou de classe préparatoire. Une certaine autonomie et du travail personnel sont nécessaires pour réussir. Les étudiants sont soumis à une assez grande pression du fait de la courte durée des semestres d'enseignement, de la fréquence du contrôle continu et de l'obligation de passer une session d'examen à la fin de chaque semestre. Ils sont, de plus, confrontés à un saut conceptuel inattendu pour la plupart d'entre eux. Dès la première année, l'enseignement met l'accent sur le raisonnement logique et l'abstraction. Les théorèmes sont démontrés et la compréhension du cours est testée lors des examens.

Par ailleurs, pour beaucoup d'étudiants s'ajoutent à ces difficultés celles de nouvelles conditions de vie, loin de leur famille. Certains de nos étudiants sont dans la nécessité matérielle d'occuper un emploi salarié et doivent alors jongler entre les horaires de travail et ceux de cours. Ces étudiants arrivent rarement à dégager suffisamment de temps pour le travail personnel et ont beaucoup de peine à réussir leurs examens.

Les deux tableaux ci-dessous récapitulent les différentes matières enseignées en première année de licence de mathématiques et d'informatique et donnent, pour chacune d'elles, la forme du cours, l'horaire total, l'horaire hebdomadaire et le coefficient attribué pour le calcul de la note d'examen du semestre.

SEMESTRE 1 :

UE	**Type d'enseignement**	**Horaire semestriel**	**Horaire hebdomadaire**	**Coefficient**
Analyse S1	Cours intégré	60 h	5 h	6
Algèbre S1	Cours intégré	60 h	5 h	6
Informatique S1 (algorithmique et programmation)	Cours intégré	38 h plus 22 h de TP	5 h	6
Physique S1 (mécanique)	Cours intégré	42 h	3 h 30	3
Langues S1	Cours intégré en centre de ressources	24 h	2 h	3
Méthodologie du travail universitaire	Cours intégré	12 h	6 séances de 2 h	3
Certificat informatique et internet (C2i)	Séances tuteurées	20 h	2 h	3

On peut remarquer que les coefficients des différentes UE ne correspondent pas à leur nombre d'heures d'enseignement et encore moins à l'importance que l'on attribuerait a priori aux différentes matières. Ces coefficients sont imposés par des règles de l'université qui stipulent que le nombre de crédits européens attribués par UE doit être égal au coefficient de celle-ci et à un multiple de 3.

Semestre 2 :

UE	Type d'enseignement	Horaire semestriel	Horaire hebdomadaire	Coefficient
Analyse S2	Cours intégré	60 h	5 h	6
Algèbre S2	Cours intégré	60 h	5 h	6
Informatique S2 (algorithmique et programmation)	Cours intégré	38 h plus 22 h de TP	5 h	6
Option S2 à choisir entre — *Géométrie* — *Informatique* — *Modélisation* — *Physique* — *Économie*	Cours intégré	36 h	3 h	3
Langues S2	Cours intégré en centre de ressources	24 h	2 h	3
Projet professionnel personnel	Cours et travaux dirigés	10 h		3
UE de découverte	Cours	20 h	1 h 30	3

Comme nous l'avons souligné plus haut, l'ensemble des enseignements est réparti sur deux fois 12 semaines de cours seulement. Selon ses options du second semestre, l'étudiant aura de 10 à 13 heures de mathématiques par semaine, et de 5 à 8 heures d'informatique, de 3 h 30 à 6 h 30 de physique, et de 4 h 30 à 7 heures d'enseignements non disciplinaires. Au total, cela fait 22 h 30 de cours par semaine, sur 24 semaines.

A titre de comparaison, les élèves de classes préparatoires (CPGE section MPSI) ont 30 heures de cours par semaine dont 12 heures de mathématiques sans compter les heures d'interrogation (« colles »), le tout sur 36 semaines, **soit exactement 50% d'heures de cours de plus qu'un étudiant de première année de licence de mathématiques et informatique !**

2.2. Les programmes de la première année au regard des programmes de première et terminale

Contrairement aux programmes du lycée, les programmes de licence ne sont pas nationaux. Même si l'on enseigne approximativement les mêmes choses durant les deux premières années dans les différentes universités, les approches sont laissées à l'entière initiative des enseignants, qui d'ailleurs concevront leurs examens en conséquence. Les programmes des cours sont sciemment succincts et il n'y a aucun document d'accompagnement. Lors d'un changement d'enseignant, l'approche peut changer du tout au tout. Dans le cas des cours intégrés, c'est l'équipe d'enseignants qui se concerte pour faire des choix pédagogiques similaires et préparer des épreuves de contrôle des connaissances communes.

Enfin, le grand nombre d'enseignants et le découpage en UE font paraître les différents cours comme cloisonnés de sorte que les étudiants perdent de vue l'unité des mathématiques.

Nous décrivons et commentons ci-dessous les contenus des UE *algèbre* S1, *analyse* S1, *algèbre* S2 et *analyse* S2. Notons que l'UE *méthodologie du travail universitaire* est également disciplinaire. On y travaille des notions transversales : structure des textes mathématiques, définitions, démonstrations, rédaction *etc.*

Programme d'algèbre du semestre 1

Algèbre linéaire (25 h)

— Pivot de Gauss sur des tableaux, application à la résolution des systèmes linéaires. Notion de variable libre, nombre de solutions.
  En terminale S on est amené à résoudre des systèmes jusqu'à la dimension 3×3 *mais uniquement en liaison avec des problèmes de géométrie analytique.*

— Notation matricielle, calcul matriciel (somme, produit), inversion d'une matrice carrée à l'aide de la méthode du pivot. Réinterprétation des systèmes en terme de produits de matrice et vecteur.
  La notation matricielle est introduite de façon anecdotique seulement en spécialité mathématiques de la filière ES. Elle n'est pas vue en terminale S.

— Déterminant pour les matrices de dimension 2 et 3, formules de Cramer.
  Ces formules ne sont pas au programme du lycée.

— Équation cartésienne de droites et de plans, étude de leurs intersections.
  Cette partie du programme est entièrement traitée en terminale S. De fait, elle est souvent éludée en première année de licence.

Arithmétique de $\mathbb{Z}$ (25 h)

— Définition d'un anneau, notion de divisibilité. Etude de $\mathbb{Z}$: plus grand commun diviseur, plus petit commun multiple, division euclidienne, théorèmes de Bézout et de Gauss, théorèmes de résolution des équations diophantiennes de la forme $ax + by = c$. Décomposition en produit d'entiers premiers.
  Ce point fait partie du programme de l'enseignement de spécialité en mathématiques suivi par certains élèves de terminale S. Les notions de pgcd, ppcm, les théorèmes de Gauss et de Fermat y sont énoncés.

— Définition d'une relation d'équivalence. Congruences. Définition des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (on n'introduit pas la notion d'ensemble quotient en toute généralité). Inversibilité des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, théorème chinois.
Ces notions ne sont pas au programme du lycée.

Polynômes (10 h)

— Définition de l'anneau des polynômes d'une variable à coefficients dans un corps, division euclidienne, racines et factorisation. Décomposition en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ (on rappelle que les nombres complexes ont été traités au début du cours d'analyse).
Au lycée, les polynômes n'apparaissent que sous la forme de fonctions polynomiales. L'égalité de deux polynômes n'est abordée que sous forme de condition suffisante d'égalité des coefficients. De plus, un élève n'est pas censé savoir que, si α est racine d'un polynôme, celui-ci se factorise par $(X - \alpha)$.

Dans la pratique, la plupart des enseignants commencent le cours d'algèbre par une introduction à la logique, bien que ce point ne soit plus explicitement spécifié dans le programme (nous comparons avec le programme du DEUG de 1995). Des notions de logique et de théorie des ensembles sont également abordées en cours de méthodologie. Un texte « mode d'emploi » traitant des ensembles, des connecteurs logiques et de leurs différents emplois ainsi que de la structure du discours mathématique est distribué aux étudiants à cette occasion.

Programme d'algèbre du semestre 2

Cette partie du programme est entièrement nouvelle pour les étudiants issus de terminale.

— Définition d'un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, sous-espaces vectoriels. Exemples : $\mathbb{K}^n$, $M_{n,p}(\mathbb{K})$; espaces de fonctions ; espaces de polynômes, espaces fonctionnels.

— Familles libres, génératrices, bases. Lien entre liberté et déterminant pour les familles de n vecteurs dans $\mathbb{K}^n$ $(n = 2, 3)$.

— Dimension, dimension d'un sous-espace vectoriel. Description des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ $(n = 0, ..., 3)$.

— Opérations sur les sous-espaces vectoriels : somme, intersection. Supplémentaire, somme directe. Liens avec la dimension.

— Applications linéaires. Structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{L}(E, F)$, composition d'applications linéaires. $\mathcal{L}(E)$ est un anneau.

— Exemples d'applications linéaires : projecteurs, symétries. Rotations dans le plan. Exemples d'endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$: dérivations, produits.

— Noyau, image d'une application linéaire. L'application linéaire φ est injective si et seulement si $\mathrm{K}er(\varphi) = 0$.

— Rang d'une application linéaire, théorème du rang.

— Matrice d'une application linéaire relativement à des bases de E et F. L'application $\mathcal{L}(E, F) \to M_{n,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Matrice d'une composée d'applications linéaires.

— Automorphisme linéaires de E : critères équivalents pour que $f \in \mathcal{L}(E)$ soit inversible (rang, noyau). L'inverse de f est alors dans $\mathcal{L}(E)$. Le groupe $GL(E)$.

— Matrices inversibles : critères pour qu'une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ soit inversible (rang, noyau). Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$. Lien avec $GL(E)$.

— Changement de base : matrices de passage, effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire.

Programme d'analyse du semestre 1

Les points étoilés (*) sont abordés en section S au lycée.

Les nombres complexes

— Vocabulaire*, écriture cartésienne de l'inverse*, calculs*, produits remarquables*, binôme de Newton*, résolutions d'équations* et de systèmes linéaires*.

— Conjugué*, module*, interprétation géométrique dans le plan orienté*, forme trigonométrique*, règles de calcul associées*, notation exponentielle*, formules d'Euler et de Moivre*, linéarisation de $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$.

— Racines carrées (forme cartésienne et trigonométrique), équations du second degré dans $\mathbb{C}$, racines n-ièmes. Applications à la trigonométrie élémentaire.

Seule la résolution des trinômes de degré 2 à coefficients réels est traitée en terminale. En particulier, on n'y parle pas de racine n-ième.

Analyse réelle

— Relation d'ordre total dans un ensemble non vide. Majorant, minorant, plus grand et plus petit élément ; illustration dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$. Définition de la borne sup (inf). Exemples et contre-exemples dans $\mathbb{Q}$.

— Intervalles de $\mathbb{R}$*, valeur absolue d'un réel (*cette notion disparaît du nouveau programme de seconde*), inéquations, encadrements*. $\mathbb{R}$ est archimédien, partie entière d'un réel, densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

— Les suites réelles. Exemples, sens de variation, convergence*. Suites géométriques*. Propriétés liées à l'ordre (théorèmes de comparaison)*. Opérations sur les suites*. Suites adjacentes*, suites monotones bornées*, suites extraites.

— Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Généralités : ensemble de définition*, sens de variation sur un intervalle*, extremum* local (*les extrema considérés au lycée sont soit globaux, soit sur des intervalles bornés*), fonctions majorées*, minorées*, représentation dans le plan*.

Limites à l'infini*, en un point*. *La limite en un point est utilisée au lycée sans être réellement définie.* Cas des fonctions monotones bornées.

Continuité en un point, caractérisation séquentielle, prolongement par continuité. Continuité sur un intervalle*, théorème des valeurs intermédiaires* : *ce théorème est admis en terminale S*. Image d'un segment. Cas des fonctions strictement monotones* (forme de l'intervalle image). Continuité de la bijection réciproque.
En terminale, le cas des fonctions continues strictement monotones est souvent rencontré. La lecture du tableau de variation est admise comme preuve de l'existence et de l'unicité d'une solution d'une équation $f(x) = a$.

Application : existence d'un point fixe et suites récurrentes.
Des études de suites définies par une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ *sont traitées en terminale.*

— Dérivabilité. Définition de la dérivabilité en un point*, sur un intervalle*; tangente en un point de la courbe*. Opérations sur les fonctions dérivables*.

— Théorème de Rolle et des accroissements finis. Application au sens de variation des fonctions sur un intervalle. Étude de fonctions. Inégalité des accroissements finis. Application à la convergence de suites récurrentes.
L'inégalité de la moyenne est vue en terminale.

— Dérivabilité de la bijection réciproque d'une fonction dérivable. Applications à la définition et à l'étude des fonctions $\arcsin, \arccos, \arctan$. Fonctions hyperboliques et réciproques.
On peut remarquer ici que ces fonctions ne sont pas introduites au lycée, où même les fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ *ne sont pas étudiées de manière systématique.*

— Convexité.

Programme d'analyse du semestre 2

— Développements limités (DL). Dérivées successives. Formules de Taylor.
Au lycée, on aborde les développement à l'ordre 1, en relation avec la dérivée et la méthode d'Euler.

— Formule de Taylor-Young au voisinage d'un point. Formules de Mac-Laurin. Application aux fonctions standard. Notation de Landau.

— Développements limités en un point. Définition. Exemple de fonction admettant un DL en un point sans vérifier les hypothèses de Taylor-Young. Opérations sur les DL. Application aux études locales de fonctions.

— Développements asymptotiques en $\frac{1}{x}$ au voisinage de l'infini : définition, exemples, application aux études de branches infinies d'une courbe.
L'élève de terminale doit être capable de déterminer les asymptotes verticales ou horizontales ainsi que de prouver qu'une droite donnée est une asymptote oblique.
Application aux études de suites.

— Calcul intégral* (*l'intégrale est définie comme une aire en terminale S*). Intégrale de Riemann, propriétés de l'intégrale* (*l'intégration par parties est au programme de la terminale S*). Théorème de la moyenne*. Calcul de primitives*. Application aux sommes de Riemann et aux suites dont le terme général est une intégrale.

L'étude d'une suite définie par une intégrale, généralement $u_n = \int_0^n f(t)dt$, est un exercice classique de terminale S, d'ailleurs plutôt perçu comme difficile par les élèves.
Application à la résolution d'équations différentielles simples (linéaires, à variables séparables...) ou s'y ramenant. *En terminale S, on résout les équations linéaires du premier ordre à coefficients constants.*

2.3. Le contrôle des connaissances

Rappelons que les enseignements sont regroupés par semestre. A l'issue de chaque semestre un jury composé d'enseignants du semestre délibère sur l'acquisition de celui-ci. L'étudiant acquiert un semestre lorsqu'il obtient une moyenne générale supérieure à 10. Lorsque le semestre n'est pas acquis, l'étudiant garde le bénéfice des UE pour lesquelles il a obtenu une note supérieure ou égale à 10.

Les notes des UE sont elles-mêmes des moyennes de notes de contrôle continu et/ou de notes d'épreuves d'examen terminal. Les examens terminaux prennent généralement la forme d'une épreuve écrite de deux heures. Les épreuves de contrôle continu sont plus variées : « devoirs maison », courtes interrogations écrites spécifiques à un groupe, épreuves écrites régulières communes à la promotion.

En comparant à la situation de 1995, nous constatons que le contrôle continu a pris une place plus importante en licence. Les pratiques tendent à se rapprocher de celles du lycée et vont même au delà puisqu'en première année les matières de mathématiques sont sanctionnées uniquement par du contrôle continu.

Le taux de réussite au premier semestre 2008 a été de 33%. Si l'on retranche à l'effectif des étudiants celui des étudiants absents aux examens, le taux de réussite réel s'élève à 47%. Notons que ce semestre n'avait pas bénéficié des mesures décrites plus haut : l'orientation active, le semestre 0, les séances tuteurées.

En guise de conclusion ...

Les continents ont-ils inexorablement poursuivi la dérive annoncée, avec une certaine inquiétude, en 1995 ? Peut-être pas ...

Certes, étudier les mathématiques à l'université représente toujours un changement fondamental auquel l'enseignement secondaire ne prépare que partiellement les élèves pour diverses raisons : d'une matière parmi d'autres au lycée, les mathématiques deviennent le sujet d'étude principal en licence de mathématiques-informatique ; par ailleurs, certains outils techniques comme les méthodes de calcul ne sont pas toujours bien maîtrisés (*tempus fugit ...*) tandis que certaines notions conceptuelles (formalisme des ensembles, bases solides de la logique) ne font pas à proprement parler partie du bagage du bachelier arrivant en licence.

Cependant, les deux mondes se sont indéniablement rapprochés. L'enseignement des mathématiques dans le secondaire a commencé à réhabiliter la démonstration, préparant ainsi mieux le terrain pour les cours dispensés à l'université. Depuis quelques années, les étudiants de première année de licence semblent d'ailleurs moins perplexes de voir la place fondamentale qu'elle prend dans un cours de mathématiques. De son côté, l'université a fait des efforts pour rapprocher les cours de première année de ce que les étudiants ont connu au lycée, par la mise en place de cours intégrés et une évaluation tenant compte du contrôle continu. La forme restant familière, les étudiants peuvent en principe mieux se concentrer sur le fond.

Ce constat nous rend prudemment optimistes : les choses semblent moins préoccupantes que le titre d'il y a quinze ans le laissait entendre. Il reste que nous regrettons tous la diminution régulière du nombre d'heures d'enseignement de mathématiques dans le secondaire.

Toutefois, même si les continents se rapprochent, les habitants de chacun d'eux ignorent souvent ce qui se passe de l'autre côté de l'océan. Combien d'enseignants du supérieur ou du secondaire se contentent de leurs souvenirs de lycée ou d'université ? Nous ne pouvons qu'encourager chacun à aller à la rencontre de ses collègues de « l'autre rive ».

Nous pourrions, par exemple, conseiller à nos collègues enseignants dans les premières années de licence de prendre connaissance des programmes de première et terminale S, d'autant plus que ceux-ci sont actuellement en train de changer, et de consulter quelques manuels scolaires ainsi que les sujets récents de baccalauréat.

Les enseignants du secondaire pourraient peut-être profiter des manifestations organisées par l'université en direction des lycéens (visites dans les lycées, Journées des universités, Journées « portes ouvertes », ...) pour rencontrer leurs collègues du supérieur. Nous avons découvert, lors des séances de travail de notre groupe IREM, combien il était profitable de se parler plus souvent.

Bibliographie

[1] L. BLASCO, A. DIDIERJEAN, C. KAHN, V. KHARLAMOV, B. KOCH, D. WEIL (1995), La dérive des continents, *Repères* **20**, 61–70 et *L'Ouvert* **78**, 48–58.

[2] MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2001), Programme de l'enseignement des mathématiques en classe terminale de la série scientifique, `http://www.education.gouv.fr/bo/2001/hs4/default.htm`

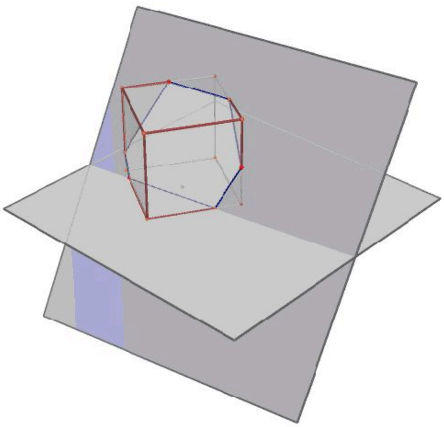
[3] UFR DE MATHÉMATIQUE ET D'INFORMATIQUE (2009), Programme des licences de sciences, mention mathématiques et parcours MPA, `http://mathinfo.unistra.fr`

François DREYFUERST, Lycée Stanislas de Wissembourg
Claude MITSCHI , Université de Strasbourg
Hélène TANOH, Lycée Blaise Pascal de Colmar
Christine VESPA, Université de Strasbourg
Marc WAMBST, Université de Strasbourg
Dominique WEIL, Lycée International de Strasbourg

Nouvelle publication

VOIR ET DESSINER L'ESPACE

par le groupe *Géométrie dans l'espace* de l'IREM de Strasbourg



Collection : *Dans nos classes* n° 1

Auteurs : Emmanuelle ACKER
Cécile BERGOTTI
François BRISOUX
Adeline DE MEZZO
Claire GABUS
Valérie JAEGER
Anne-Élise SCHWEISS
Christine UNDREINER

Résumé : Les représentations planes de situations spatiales sont désormais omniprésentes dans l'environnement des jeunes. Cette brochure propose une analyse des obstacles liés à la compréhension d'une figure en perspective. Les professeurs souhaitant comprendre les mécanismes de raisonnement induits par une représentation de l'espace pourront s'appuyer sur des expérimentations réalisées en classe de seconde et utiliser les activités proposées avec ou sans logiciel dynamique pour redonner toute sa dimension à cet enseignement.

Mots-clés : espace – 3D – lycée – perspective – représentation – figure – solide – plan – incidence – coplanaire – section – trace - gabarit – polyèdre – raisonnement – didactique – logiciel – Geospace – Cabri3D – voir – comprendre – construire – dessiner.

Public concerné : professeurs de lycée – enseignants en formation initiale – intervenants en formation continue

Date de parution : juillet 2009

Format : 55 pages A4

Éditeur : IREM de Strasbourg (**S. 195**)

ISBN : 2-911446-30-5
ISSN : 2105-956X

Prix : 7 € (+ 2,50 € de frais d'envoi)

Un bon de commande est accessible en ligne sur le site de l'IREM :

`http://irem.u-strasbg.fr`

De l'orthogonalité au parallélisme

Nicole Bopp et Michel Émery

> Je n'aimais point cette manière d'opérer sans voir ce qu'on fait, et il me semblait que résoudre un problème de géométrie par les équations, c'était jouer un air en tournant une manivelle.
>
> Rousseau, *Les Confessions*

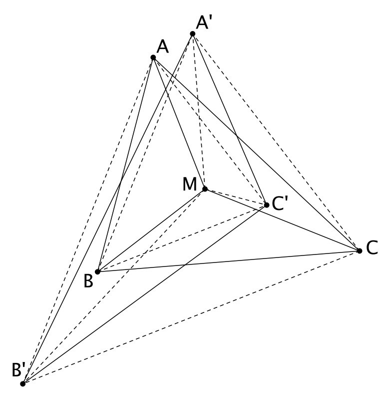
Résumé : Comment des va-et-vient de solutions nous ont amenés à faire évoluer l'énoncé d'un problème de géométrie euclidienne vers une question de géométrie affine.

Mots-clés : aire, aire orientée, homothétie, parallélisme, orthocentre, triangle, hexagone, polygone, produit extérieur, produit vectoriel, Thalès.

1. Passage d'un problème à un autre

Un jour de novembre 2008, croisant N. B. [1] dans le couloir de l'Irem de Strasbourg, J.-P. F. lui demande : « Connaîtrais-tu une démonstration géométrique de la propriété suivante ? »

Problème 1. — *Soient ABC un triangle et M un point du plan du triangle n'appartenant pas aux droites portant les côtés du triangle. On désigne par A', B' et C' respectivement les orthocentres des triangles MBC, MCA et MAB. Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont même aire.*



Ce résultat avait été récemment (re)découvert par Louis Rivoallan en manipulant un logiciel de géométrie dynamique. Il en proposait au bulletin vert de l'Apmep une démonstration (voir [2]), que J.-P. F. était en train de relire.

Il aurait été surprenant que N. B. ait dans sa poche une solution à un problème de géométrie inconnue de J.-P. F. Elle en parla à M. É., rencontré dans un couloir

1. Les protagonistes de cette histoire sont Nicole Bopp (N. B.), Michel Émery (M. É.), Jean-Pierre Friedelmeyer (J.-P. F.), Louis Rivoallan et Marc Roux.

de l'Irma [2], et dès lors commença une collaboration par correspondance, chacun répondant au dernier message de l'autre par une remarque ou une amélioration. Nous n'avons jamais travaillé ensemble sur cette question comme le font souvent les mathématiciens, en réfléchissant tout haut à deux devant le même tableau noir, probablement parce que nous n'accordions guère d'importance à ce sujet ; et nos échanges, parfois relancés par des messages de J.-P. F., n'étaient pas réguliers, s'espaçant de quelques heures à quelques semaines : de temps en temps, on prenait le loisir de réfléchir un peu au dernier courrier reçu, et, si l'inspiration venait, on y répondait. Voici quelques étapes de notre cheminement dont le point de départ était le problème 1.

1.a. Premières solutions

Prenant le point M comme origine de tous les vecteurs, notre première démonstration faisait intervenir des produits scalaires, des produits extérieurs, l'expression de l'aire d'un triangle à l'aide de produits extérieurs (nous y reviendrons plus bas) et des calculs trigonométriques, culminant avec la formule

$$\operatorname{aire}(A'B'C') = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta\ \operatorname{tg}\gamma}\ \operatorname{aire}(ABC)\ ,$$

où α est l'angle $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$, *etc.* Pour pouvoir conclure, on est conduit à remarquer que $\alpha+\beta+\gamma = 0 \bmod 2\pi$ entraîne $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta\ \operatorname{tg}\gamma$. Ça marche, mais ça ne donne vraiment pas l'impression d'avoir compris de quoi il retourne !

L'intervention bien laborieuse de toute cette trigonométrie suscita une seconde solution, plus expéditive, inspirée du début de la première, et évitant produits scalaires et trigonométrie pour ne garder que les produits extérieurs. Rappelons que, dans le plan euclidien orienté, le produit extérieur de deux vecteurs u et v est le nombre réel $u\wedge v$ indifféremment défini par les propriétés équivalentes suivantes :

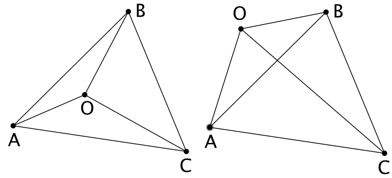
- $u \wedge v$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur u et v ;
- $u \wedge v = \|u\|\,\|v\|\,\sin(u, v)$;
- si R désigne la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$, $u \wedge v = (Ru)\cdot v = -u\cdot(Rv)$;
- $u \wedge v$ est linéaire en u, linéaire en v, antisymétrique ($v\wedge u = -u\wedge v$; en particulier, $u\wedge u = 0$) et $u\wedge v = 1$ si (u, v) est une base orthonormée directe ;
- le produit vectoriel de u et v dans un espace tridimensionnel contenant le plan vaut $(u\wedge v)\,k$, où k est le vecteur unitaire normal au plan et choisi selon la règle du tire-bouchon.

Les produits extérieurs sont par excellence l'outil algébrique approprié aux calculs d'aires. L'aire orientée d'un triangle ABC est la moitié de l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, et vaut donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$. En prenant une origine O dans le plan et en notant $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$ et $\overrightarrow{OC} = c$, l'aire devient $\frac{1}{2}\,(b-a)\wedge(c-a)$; en utilisant bilinéarité et antisymétrie de $\wedge$ pour mettre un peu d'ordre, on a finalement

$$\operatorname{aire}(ABC) = \tfrac{1}{2}\,(a\wedge b + b\wedge c + c\wedge a)\ .$$

2. L'Irem de Strasbourg occupe une (petite) partie du bâtiment de l'Irma (Institut de Recherche Mathématique Avancée), aussi les couloirs se croisent-ils.

Cette formule peut s'interpréter ainsi : *l'aire orientée de ABC est égale à la somme des aires orientées des triangles OAB, OBC et OCA.*



Voici notre deuxième solution. Les orthocentres A', B' et C' sont bien définis car le point M n'appartient pas aux côtés du triangle. Comme A' (resp. B') est l'orthocentre de MBC (resp. MAC), le vecteur $\overrightarrow{BA'}$ (resp. $\overrightarrow{AB'}$) est orthogonal à (MC) ; ces deux vecteurs $\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{AB'}$ sont donc parallèles, d'où $\overrightarrow{AB'} \wedge \overrightarrow{BA'} = 0$.

Gardant le point M comme origine (c'était le choix permettant les calculs dans la première solution), et posant

$$a = \overrightarrow{MA},\ b = \overrightarrow{MB},\ c = \overrightarrow{MC} \ \text{ et } \ a' = \overrightarrow{MA'},\ b' = \overrightarrow{MB'},\ c' = \overrightarrow{MC'}\ ,$$

l'égalité $\overrightarrow{AB'} \wedge \overrightarrow{BA'} = 0$ s'écrit $(b' - a) \wedge (b - a') = 0$; en développant, on en tire

$$a' \wedge b' = a \wedge b - a \wedge a' + b \wedge b'\ .$$

Par permutation circulaire on a de même

$$\begin{aligned} b' \wedge c' &= b \wedge c - b \wedge b' + c \wedge c'\ , \\ c' \wedge a' &= c \wedge a - c \wedge c' + a \wedge a'\ . \end{aligned}$$

En additionnant ces trois égalités, six termes disparaissent et il reste

$$a' \wedge b' + b' \wedge c' + c' \wedge a' = a \wedge b + b \wedge c + c \wedge a\ ,$$

c'est-à-dire $2\,\mathrm{aire}\,(A'B'C') = 2\,\mathrm{aire}\,(ABC)$. □

1.b. D'autres problèmes

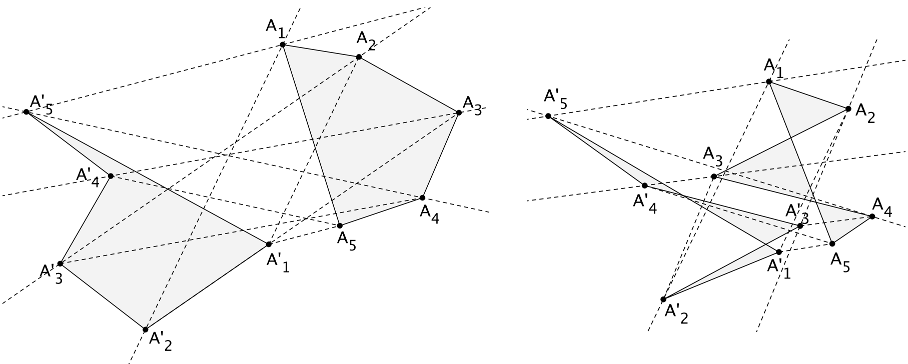
Cette histoire aurait pu s'arrêter là, puisque quelque temps après parut l'article de Rivoallan ([2]). Notre première démonstration était essentiellement la même que l'une de celles qu'il proposait (annexe 1, page 56), ce qui montre qu'elle tombe assez naturellement sous la plume (ou le bâton de craie) ; et notre deuxième solution était proche de celle proposée par J.-P. Friedelmeyer et M. Roux, les relecteurs de son article (annexe 3, page 59), ce qui montre que la précédente donne vraiment envie qu'on la simplifie. De plus, entre temps, J.-P. F. avait déniché l'énoncé du problème 1 dans le *Traité de géométrie* ([3], page 504) de Rouché et Comberousse. Plus précisément l'énoncé figure, sans indication aucune, dans l'exercice 9 de la note III *Sur la géométrie récente du triangle,* à partir de l'édition de 1891 (la première édition date 1864).

De notre côté aussi, nous avions entre temps un peu progressé. La seconde démonstration a deux qualités : elle est courte, et on n'y comprend rien, c'est un pur calcul. Elle donne donc envie de voir ce qu'elle cache ; et lorsqu'on la regarde, quatre remarques s'imposent.

1) Choisir le point M comme origine ne sert à rien : une fois établi le parallélisme de (BA') et (AB'), le calcul peut se faire avec n'importe quelle origine O au lieu de M.

2) Ainsi éliminé des calculs, le point M n'intervient plus que pour fournir le parallélisme de (BA') et (AB'). On peut donc s'en passer complètement, il suffit de postuler que (BA') et (AB') sont parallèles, ainsi que les deux autres paires analogues. Le calcul effectué ci-dessus montre donc que *si un hexagone a ses trois paires de côtés opposés parallèles, les aires (et même les aires orientées) des deux triangles obtenus en prenant un sommet sur deux sont égales.*

3) Le même calcul montre plus généralement, et tout aussi facilement, une propriété analogue pour des polygones à nombre pair de sommets : *si, dans le plan, $2n$ points A_1, ..., A_n, A'_1, ..., A'_n vérifient les n relations de parallélisme $(A_1A'_2)/\!\!/(A'_1A_2)$, $(A_2A'_3)/\!\!/(A'_2A_3)$, et ainsi de suite jusqu'à $(A_nA'_1)/\!\!/(A'_nA_1)$, les deux polygones $A_1A_2\dots A_n$ et $A'_1A'_2\dots A'_n$ ont même aire orientée.*



Ces polygones sont quelconques, pouvant avoir de nombreux croisements ; l'aire orientée est la somme des aires de chaque région du plan délimitée par le polygone, chaque terme étant multiplié par le nombre (positif, nul ou négatif) de tours qu'effectue le polygone autour de la région correspondante. Cette aire étant donnée par la formule

$$\text{aire}\,(A_1A_2\dots A_n) = \tfrac{1}{2}\,(a_1\wedge a_2 + a_2\wedge a_3 + \dots + a_n\wedge a_1)\ ,$$

le calcul fait pour $n = 3$ s'étend immédiatement à n quelconque.

4) Enfin, le calcul peut se faire à 3 dimensions, le produit extérieur devenant le produit vectoriel habituel ; il peut même s'étendre en dimension n quelconque, le produit extérieur étant alors à valeurs dans un espace de dimension $\frac{1}{2}\,n(n-1)$, et la manipulation algébrique restant inchangée. (Cet espace à $n(n-1)/2$ dimensions est l'ensemble des éléments de surface bidimensionnels dans l'espace à n dimensions.) Le résultat subsiste sous la forme suivante : *si, dans l'espace, les trois paires de côtés opposés d'un hexagone sont parallèles, les deux triangles obtenus en prenant un sommet sur deux sont dans des plans parallèles et ont des aires (orientées) égales.*

Ces remarques vont être développées, en commençant par la seconde, qui ramenait le problème 1 au problème 2 ci-dessous, dont il est un cas particulier.

Problème 2. — *Soient A, B, C, A', B' et C' six points dans le plan tels que $(AB')/\!/(A'B)$, $(BC')/\!/(B'C)$ et $(CA')/\!/(C'A)$. Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont même aire.*

Le problème se trouvait ainsi transformé en une question de géométrie affine, et non plus euclidienne. En effet, bien que l'aire d'un triangle — ou de toute autre figure — ne soit pas une notion affine, les relations linéaires entre aires, par exemple les égalités entre aires, sont affines.

L'apparence plus simple et la plus grande généralité de cette nouvelle formulation permettaient d'en espérer une solution géométrique. Comme nous allons le voir, de telles solutions existent, mais nous n'en connaissons aucune qui soit pleinement satisfaisante : à des degrés divers, chacune garde un parfum plus ou moins prononcé de produit vectoriel et de sa linéarité.

Bien que J.-P. F. ne soit pas encore parvenu à la localiser dans cette jungle qu'est l'immense littérature sur la géométrie élémentaire, il serait très surprenant que cette propriété des hexagones à côtés parallèles soit nouvelle, d'autant plus que, comme nous l'avons dit plus haut, le cas particulier des trois orthocentres est connu depuis longtemps. Il est curieux aussi que ce soit ce cas particulier, et non le cas général plus simple, qui ait été redécouvert grâce à l'ordinateur.

D'après J.-P. F. une explication des raisons pour lesquelles le problème posé par Rouché et Comberousse se restreignait au cas des orthocentres pourrait être celle-ci : six points vérifiant les hypothèses du problème 2 sont sur une même conique (d'après la réciproque du du théorème de Pascal) ; ceci évoque aussitôt le théorème de Brianchon-Poncelet selon lequel *l'orthocentre d'un triangle inscrit dans une hyperbole équilatère se trouve toujours sur cette hyperbole.* C'est ainsi que l'on retrouve l'orthocentre du problème intial. Le problème 1 se résout donc analytiquement de façon très simple en choisissant un repère porté par les asymptotes d'une hyperbole équilatère passant par les sommets du triangle ABC et le point M, ce qui est toujours possible comme le montre l'article ([1]) de J.-P. Friedelmeyer et M. Roux.

2. Solutions géométriques du problème 2

2.a. Cas où l'hexagone $AB'CA'BC'$ est convexe

Cette démonstration repose uniquement sur les deux propriétés suivantes.

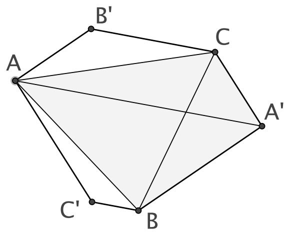
(P_1) Soit MNP un triangle et P' un point de la droite parallèle à (MN) passant par P. Les triangles MNP et MNP' ont même aire.

(P_2) Si deux polygones du plan ont des intérieurs disjoints alors l'aire de leur réunion est égale à la somme de leurs aires.

Bien sûr ce sont les hypothèses de parallélisme du problème 2 qui nous ont incités à utiliser la propriété (P_1). Quant à la propriété (P_2) son utilisation va de soi mais pose de redoutables problèmes de position que nous avons évacués ici en supposant l'hexagone convexe.

Démonstration (cas convexe). Pour alléger l'écriture, nous noterons MNP l'aire du triangle MNP. Grâce à la convexité on voit que

$$AA'B + AA'C = ABC + A'BC$$
$$BB'C + BB'A = ABC + B'CA$$
$$CC'A + CC'B = ABC + C'AB\ .$$



En sommant ces trois égalités on obtient

$$AA'B + AA'C + BB'C + BB'A + CC'A + CC'B = 2\,ABC + \text{ aire de l'hexagone.}$$

En échangeant A et A', B et B', et C et C', on a aussi

$$AA'B' + AA'C' + BB'C' + BB'A' + CC'A' + CC'B' = 2\,A'B'C' + \text{ aire de l'hexagone.}$$

Mais puisque les droites (AB') et (BA') sont parallèles on a

$$AA'B = BB'A' \text{ et } BB'A = AA'B'$$

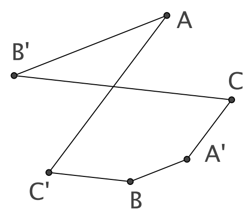
et de même (par permutation circulaire)

$$BB'C = CC'B' \text{ et } CC'B = BB'C'$$
$$CC'A = AA'C' \text{ et } AA'C = CC'A'\ .$$

Ceci permet de conclure à l'égalité des aires des triangles ABC et $A'B'C'$ puisque

$$2\,ABC + \text{ aire de l'hexagone} = 2\,A'B'C' + \text{ aire de l'hexagone}\ . \quad \square$$

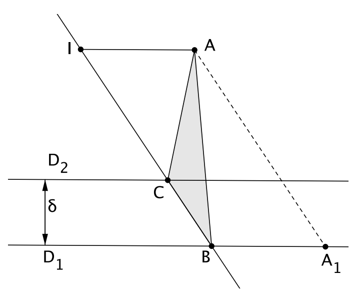
Il n'est pas facile de généraliser cette démonstration dans *tous* les cas (comme ci-contre par exemple) car justement il faudrait arriver à faire la liste des différents cas.



C'est en cherchant à utiliser la propriété (P_1), qui ne dépend pas de la position relative des points, que l'on arrive à réduire le problème 2 à un autre dont la solution ne dépend pas du cas de figure. Et c'est en faisant *bouger* une partie de la figure que nous avons résolu ce problème.

2.b. Réduction du problème 2

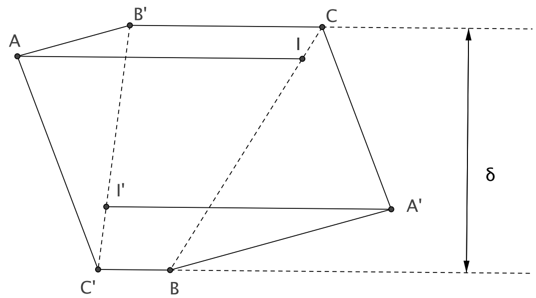
Lemme. — *Soient D_1 et D_2 deux droites parallèles distinctes ; appelons δ la distance entre ces deux droites. Soient B (resp. C) un point de D_1 (resp. D_2) et A un point du plan ; appelons I le point intersection de la droite (BC) avec la parallèle à D_1 et D_2 issue de A (le point I existe car $\delta > 0$).*
L'aire du triangle ABC vaut $\frac{1}{2}\,\delta\,AI$.



Démonstration du lemme. Introduisons le point A_1 intersection de D_1 avec la parallèle à (BC) passant par A. Puisque (AA_1) est parallèle à (BC), l'aire du triangle ABC est aussi celle du triangle A_1BC, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\,\delta\,A_1B$. Pour conclure, il ne reste qu'à remplacer la longueur A_1B par AI, qui lui est égale car A_1AIB est un parallélogramme. □

Réduction du problème 2. Le cas où $A' = A$, $B' = B$ et $C' = C$ est trivial, ainsi que celui où les six points sont alignés (les aires des triangles sont nulles). En éliminant ces deux cas, on peut, sans perdre en généralité, supposer B et B' distincts puis supposer que C n'appartient pas à la droite (BB'). En d'autres termes on peut supposer que les points B, B' et C ne sont pas alignés. On note alors δ la distance de B à la droite $(B'C)$. C'est la distance entre $(B'C)$ et sa parallèle passant par B (qui est la droite (BC') sauf dans le cas où $B = C'$).

La droite parallèle à $(B'C)$ passant par A rencontre (BC) en un point I ;
de même, la droite parallèle à $(B'C)$ passant par A' rencontre $(B'C')$ en un point I'.



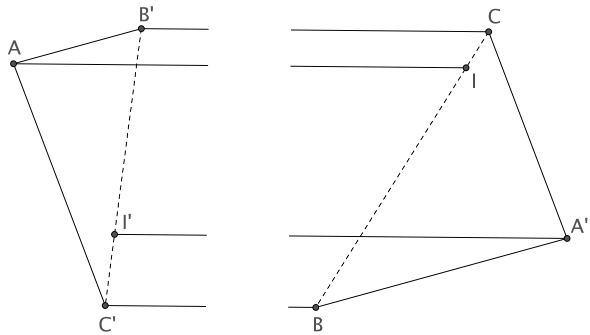
Le lemme dit que l'aire de ABC est $\frac{1}{2}\,\delta\,AI$ et que celle de $A'B'C'$ vaut $\frac{1}{2}\,\delta\,A'I'$. Pour résoudre le problème 2, il suffit donc de montrer que les longueurs AI et $A'I'$ sont égales ; nous allons plus précisément établir que $\overrightarrow{A'I'} = -\overrightarrow{AI}$.

Nous avons donc ramené la résolution du problème 2 à celle du problème 3, qui est lui aussi une question de géométrie affine.

Problème 3. — *Soient A, B, C, A', B' et C' six points dans le plan tels que $(AB') /\!/ (A'B)$, $(BC') /\!/ (B'C)$ et $(CA') /\!/ (C'A)$. On suppose en outre que les points B, B' et C ne sont pas alignés et l'on note I et I' les intersections des parallèles à $(B'C)$ passant par A et A' avec respectivement les droites (BC) et $(B'C')$. Montrer que $\overrightarrow{A'I'} = -\overrightarrow{AI}$.*

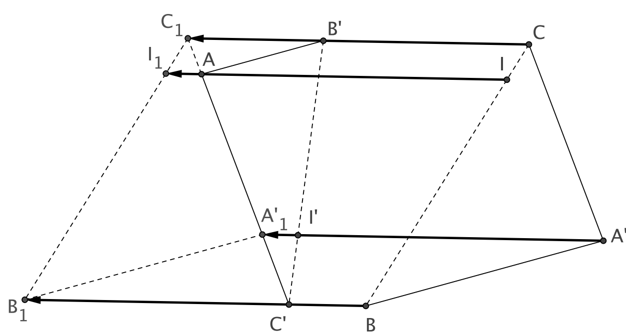
2.c. Réduction du problème 3 à un cas particulier

Pour résoudre le problème 3, l'idée est que les trois hypothèses de parallélisme restent satisfaites lorsque l'on déforme la figure en faisant subir aux trois points A', B et C une translation parallèle à $(B'C)$ et (BC'). Ces trois points sont déplacés en bloc alors que A, B' et C' restent immobiles ; et le point I se déplace avec le bloc $A'BC$, tandis que I' ne bouge pas. La somme $\overrightarrow{A'I'} + \overrightarrow{AI}$ reste donc constante, et pour montrer qu'elle était initialement nulle, il suffit de montrer qu'elle l'est après la déformation.



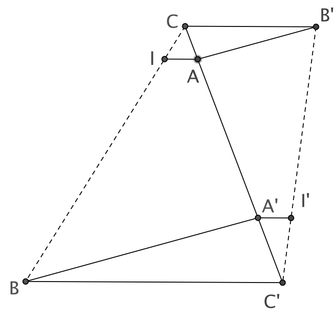
Parmi les translations possibles, il faut maintenant en choisir une qui simplifie le problème ; plusieurs possibilités s'offrent immédiatement à l'esprit. On peut par exemple amener le point B sur C' ; le lecteur pourra s'amuser à traiter ce cas. Une autre possibilité est d'amener A' sur la droite $(B'C')$; la résolution se ramène alors à établir que *si, aux hypothèses du problème 3, on ajoute l'alignement de* A'*,* B' *et* C'*, les points* A*,* B *et* C *sont eux aussi alignés.* On est alors incité à passer de la géométrie affine à la géométrie projective. Pour cela on remplace les trois hypothèses de parallélisme par l'hypothèse unique que les trois intersections sont alignées (elles l'étaient auparavant sur la droite à l'infini) ; et une simple application du théorème de Pappus donne la conclusion souhaitée. Une troisième possibilité consiste à choisir la translation de façon à amener le point A' sur la droite (AC') ; on est ainsi ramené au cas où les droites (AC') et (CA') sont confondues ; c'est ce cas que nous allons traiter.

Voici la figure dans ce cas. Les lettres A'_1, B_1, C_1 et I_1 indiquent la position des points A', B, C et I après la translation parallèle à (BC') qui a amené A' sur la droite (AC').



2.d. Résolution du problème 3

Supposons donc les droites (AC') et $(A'C)$ confondues. On peut supposer en outre que le point B n'appartient pas à la droite (AC') car en ce cas les six points A, B, C, A', B' et C' seraient alignés.



Les hypothèses de parallélisme entraînent l'existence d'une homothétie ou d'une translation $\mathscr{F}$ envoyant le triangle $A'BC'$ sur le triangle $AB'C$. Considérons

l'homothétie $\mathscr{H}_C$ de centre C envoyant A sur C' et donc I sur B ;

l'homothétie $\mathscr{H}_{C'}$ de centre C' envoyant C sur A' et donc B' sur I'.

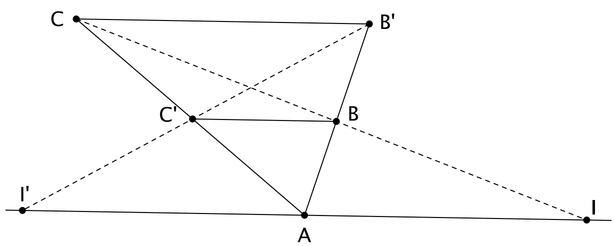
La composée $\mathscr{H}_{C'} \circ \mathscr{F} \circ \mathscr{H}_C$ envoie A sur A' et I sur I'.
L'application vectorielle associée (qui est scalaire) est identique à celle associée à $\mathscr{H}_C \circ \mathscr{F} \circ \mathscr{H}_{C'}$ qui envoie C sur C' et C' sur C. On en déduit que $\mathscr{H}_C \circ \mathscr{F} \circ \mathscr{H}_{C'}$ et donc $\mathscr{H}_{C'} \circ \mathscr{F} \circ \mathscr{H}_C$ sont des symétries centrales ce qui implique

$$\overrightarrow{A'I'} = -\overrightarrow{AI}\ . \qquad \square$$

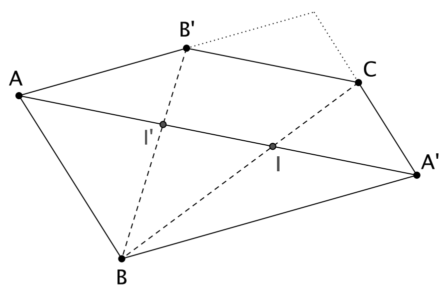
2.e. Des cas particuliers

Certains cas particuliers du problème 3 peuvent donner lieu à des exercices de collège ou lycée (applications du théorème de Thalès). En voici trois dans un ordre croissant de difficulté.

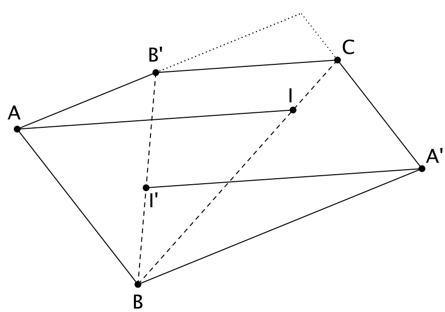
1. $A' = A$.



2. $C' = B$ et $(B'C) /\!/ (AA')$.



3. $C' = B$. Ce cas est celui déjà évoqué plus haut.



3. Généralisation du problème 2 à l'espace

Comme nous l'avons signalé plus haut, la solution algébrique du problème 1 s'écrit de la même façon dans un espace de dimension trois ou plus, le même calcul fournissant la même égalité $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}$. En dimension trois, le produit extérieur devient le produit vectoriel et c'est maintenant une égalité entre vecteurs ; en dimensions plus grandes, ce serait une égalité entre tenseurs. L'égalité entre les normes de ces vecteurs ou tenseurs signifie que les deux triangles ont même aire, et l'égalité en direction, que les plans de ces triangles sont parallèles. (De plus, ces vecteurs ou tenseurs ayant même sens, les aires orientées des triangles sont les mêmes.) Nous avons ainsi été conduits à un nouvel énoncé :

Problème 4. — *Soient A, B, C, A', B' et C' six points de l'espace tels que $(AB') /\!\!/ (A'B)$, $(BC') /\!\!/ (B'C)$ et $(CA') /\!\!/ (C'A)$. Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont situés dans des plans parallèles et ont même aire.*

Comme dans le cas plan, il était tentant d'en chercher une solution géométrique ; et, leurrés par l'analogie avec la démonstration algébrique qui donne simultanément le résultat en toutes dimensions, nous avons cherché à adapter à l'espace les constructions géométriques qui marchent dans le plan, bricolant des parallélogrammes et des homothéties dans un cadre tridimensionnel. Il nous a fallu quelque temps avant de réaliser que ce n'est pas la démonstration qui passe du plan à l'espace, mais bien le résultat lui-même.

En effet, l'hypothèse du problème 4 est que les côtés opposés de l'hexagone (spatial) $AB'CA'BC'$ sont parallèles. Cette propriété se préserve évidemment par projection, et, en utilisant le résultat connu dans le cas bidimensionnel, on en déduit aussitôt que les projections des triangles ABC et $A'B'C'$ sur n'importe quel plan ont même aire. En projetant sur des plans perpendiculaires à l'un des triangles, il est facile d'en conclure ensuite que ces triangles sont dans des plans parallèles, et enfin qu'ils ont même aire.

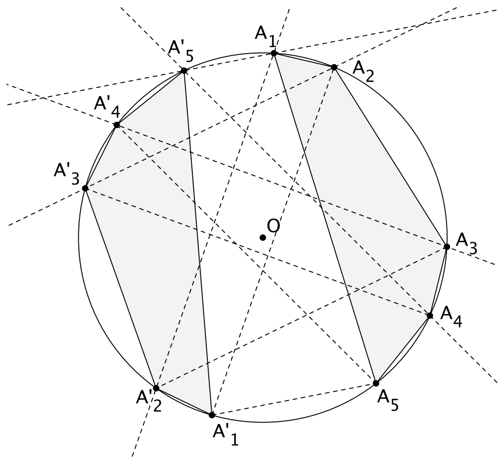
4. Annexe : cas particulier de $2n$ points cocycliques

Nous avons vu comment la démonstration algébrique du problème 1 conduit à énoncer le problème 2 et à le généraliser à plus de six points. C'est en manipulant un logiciel de géométrie dynamique pour faire les figures correspondantes que nous avons été amenés à poser le problème ci-dessous. Son intérêt provient du fait qu'il peut être résolu en faisant uniquement appel aux propriétés élémentaires des isométries planes.

Problème 5. — *On se donne $n+1$ points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et A'_1 sur un cercle $\mathscr{C}$. Pour $j \in \{2, \ldots, n\}$ on construit successivement les points A'_j appartenant à l'intersection de $\mathscr{C}$ et de la parallèle à $(A'_{j-1}A_j)$ passant par A_{j-1}. Montrer que le point A'_n appartient aussi à la parallèle à $(A_nA'_1)$ passant par le point A_1 et que le polygone $A'_1A'_2\cdots A'_n$ se déduit du polygone $A_1A_2\cdots A_n$ par une rotation.*

Les deux polygones ont alors évidemment la même aire et nous obtenons ainsi, dans un cas particulier, une résolution géométrique de la généralisation à $2n$ points du problème 2.

Cas où $n = 5$.



Solution. Pour $j \in \{2, \ldots, n\}$, les cordes $A_{j-1}A'_j$ et $A'_{j-1}A_j$ étant parallèles ont même médiatrice (celle-ci passe par le centre O du cercle $\mathscr{C}$). Notons σ_j la réflexion ayant pour axe cette médiatrice. Elle échange donc le point A_j avec le point A'_{j-1} et le point A'_j avec le point A_{j-1}. Considérons enfin l'isométrie $f = \sigma_n \circ \sigma_{n-1} \circ \cdots \circ \sigma_2$ qui agit ainsi sur les points A_1 et A'_1.

$$A_1 \xmapsto{\sigma_2} A'_2 \xmapsto{\sigma_3} A_3 \cdots\cdots \xmapsto{\sigma_n} A_n \text{ ou } A'_n$$
$$A'_1 \longmapsto A_2 \longmapsto A'_3 \cdots\cdots \longmapsto A_n \text{ ou } A'_n$$

- *Cas où n est pair.* Dans ce cas f, composée d'un nombre impair de réflexions, est elle-même une réflexion. Comme $f(A_1) = A'_n$ et $f(A'_1) = A_n$, les droites $(A_1A'_n)$ et (A'_1A_n), qui sont orthogonales à l'axe de la réflexion f, sont bien parallèles.
- *Cas où n est impair.* Dans ce cas f est une rotation (de centre O) telle que $f(A_1) = A_n$ et $f(A'_1) = A'_n$.
  Considérons la réflexion σ qui fixe O et envoie A_1 sur A'_n. Comme $f \circ \sigma$ est une réflexion et donc une involution on a
  $$f \circ \sigma = \sigma \circ f^{-1} \quad \text{d'où} \quad f \circ \sigma \circ f = \sigma \ .$$
  Or l'image par $f \circ \sigma \circ f$ du point A'_1 est égale à $f\big(\sigma(A'_n)\big) = f(A_1) = A_n$. On en déduit que les droites $(A_1A'_n)$ et (A'_1A_n), qui sont orthogonales à l'axe de la réflexion σ, sont bien parallèles.

Considérons dans les deux cas la rotation ρ de centre O qui envoie A_1 sur A'_1 et démontrons par récurrence que $\rho(A_j) = A'_j$ pour $j \in \{2, \ldots, n\}$. Supposons donc que $\rho(A_k) = A'_k$ pour k tel que $1 \leqslant k < n$. Comme σ_{k+1} échange A_{k+1} avec A'_k et A_k avec A'_{k+1}, on a

$$\sigma_{k+1} \circ \rho^{-1} \circ \sigma_{k+1}(A_{k+1}) = \sigma_{k+1} \circ \rho^{-1}(A'_k) = \sigma_{k+1}(A_k) = A'_{k+1} \ .$$

Or, comme ci-dessus, on a

$$\rho \circ \sigma_{k+1} = \sigma_{k+1} \circ \rho^{-1} \quad \text{d'où} \quad \sigma_{k+1} \circ \rho^{-1} \circ \sigma_{k+1} = \rho \ .$$

On en déduit que $\rho(A_{k+1}) = A'_{k+1}$ ce qui montre que le polygone $A'_1A'_2 \cdots A'_n$ est l'image par la rotation ρ du polygone $A_1A_2 \cdots A_n$. $\square$

Bibliographie

[1] Jean-Pierre Friedelmeyer & Marc Roux (2010), Orthocentre, cercle d'Euler et hyperbole équilatère, *à paraître.*

[2] Louis Rivoallan (2009), Orthocentres et aires, *Bulletin de l'APMEP* **480**, 54–60.

[3] Eugène Rouché & Charles de Comberousse (1900), *Traité de géométrie,* Gauthier-Villars, Paris (réimpression en 1997 aux éditions Jacques Gabay).

Nicole Bopp et Michel Émery
IRMA
bopp@math.unistra.fr
emery@math.unistra.fr