ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

Revue internationale de didactique des mathématiques

Rédacteurs en chef : ALAIN KUZNIAK & FRANÇOIS PLUVINAGE

2ème édition corrigée et augmentée

IREM de Strasbourg
Université de Strasbourg

Volume 15 **2010**

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
ISSN 0987 - 7576

Rédacteurs en chef

ALAIN KUZNIAK
Université Paris-Diderot
Laboratoire de Didactique André Revuz
Site Chevaleret
Case 7018
75205 Paris Cdx 13
kuzniak@math.jussieu.fr

FRANÇOIS PLUVINAGE
IREM de Strasbourg
7 Rue René Descartes
67084 Strasbourg
francois.pluvinage@math.unistra.fr

Comité de rédaction

ALAIN BRONNER – Montpellier
VIVIANE DURAND-GUERRIER – Montpellier
RAYMOND DUVAL – Lille
ATHANASIOS GAGATSIS – Chypre
FERNANDO HITT – Canada
CATHERINE HOUDEMENT – Rouen
MICHALIS KOURKOULOS – Crète
GUY NOËL – Mons
LUIS RADFORD – Canada
JEAN-CLAUDE RÉGNIER – Lyon
CARL WINSLOW – Danemark
MONCEF ZAKI – Maroc

Responsable de publication

PHILIPPE NUSS – Directeur de l'IREM de Strasbourg

Mise en page

ALEXANDRA CARMINATI – IREM de Strasbourg

Éditeur

IREM de Strasbourg
Université de Strasbourg
7, rue René Descartes
F - 67084 Strasbourg CEDEX
Tel. (33) 03 68 85 01 30
Fax (33) 03 68 85 01 65
Bibliothèque : (33) 03 68 85 01 61
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
VOLUME 15 – 2010

SOMMAIRE

ÉDITORIAL 7

Monique PARIÈS (France)
Circulation du savoir en classe de mathématiques : quelles variabilités dans les pratiques des enseignants ? Études de cas 9

Georgios KOSYVAS (Grèce)
Problèmes ouverts : notion, catégories et difficultés 45

Alain KUZNIAK (France)
Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en france 75

Éléna BOUBLIL-EKIMOVA (Canada)
Lacunes géométriques des futurs enseignants 97

Caroline BULF (France)
Le rôle de la symétrie dans la nature du travail géométrique des tailleurs de pierre et des ébénistes 119

Viviane DURAND-GUERRIER, Carl WINSLØW, Hiroaki YOSHIDA (France, Danemark, Japon)
A model of mathematics teacher knowledge and a comparative study in Denmark, France and Japan 147

Laurent VIVIER (France)
Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire 173

Avenilde Romo VÁZQUEZ (Mexique)
Projets d'ingénierie : Étude d'une activité pratique dans la formation d'ingénieurs 201

NOTE DE LECTURE sur l'ouvrage de GUEUDET & TROUCHE par Alain KUZNIAK
Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs de mathématiques 219

INSTRUCTIONS POUR LES AUTEURS 225

ÉDITORIAL

Une majorité des articles de ce numéro s'intéresse aux pratiques et aux connaissances des enseignants, ceci à un moment où la formation des enseignants va subir une profonde transformation en France. Désormais, les professeurs français devront, comme nombre de leurs collègues étrangers, posséder un master puis se lancer directement dans leur métier sans le sas d'entrée que constituait la formation en alternance qu'ils recevaient antérieurement dans les IUFM. Cette réforme ne s'appuie, comme malheureusement bien des réformes portant sur l'enseignement, sur aucune étude didactique, pas même sur une enquête statistique. Cela démontre que, pour le pouvoir, l'enseignement reste un champ où les décisions peuvent uniquement résulter de considérations politiques, voire économiques, sans besoin d'expertises pour étayer, contrôler, puis permettre d'aménager les orientations envisagées et leurs modalités d'application.

La formation des enseignants a toujours constitué un domaine favorable pour la mise au point et la diffusion des recherches didactiques, tant il apparaît qu'une meilleure connaissance du métier d'enseignant est nécessaire pour mieux étudier, in fine, le travail de l'élève. Plusieurs revues internationales sont entièrement consacrées à l'étude de la formation des enseignants, la revue de référence dans le domaine étant le Journal of Mathematics Teacher Education. La lecture de ces revues montre que les préoccupations diffèrent d'un pays à l'autre en fonction du niveau des recrutements d'enseignants, de la durée et du type de la formation, du niveau d'enseignement visé et des objectifs éducatifs de chaque pays.

Cependant une question qui reste toujours en débat est celle qui porte sur le lien entre les connaissances des enseignants et leur performance dans les classes. Cette question reste controversée du fait, semble-t-il, d'un manque de consensus sur la nature des connaissances étudiées qui peuvent relever des mathématiques, de la didactique et de la pédagogie. Dans ce volume des Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, trois types d'éclairage sont apportés sur ce problème du lien entre savoir des professeurs et nature de l'enseignement. L'article de Boublil part des lacunes avérées des enseignants du primaire en géométrie au Québec, pour envisager la mise à niveau de ces enseignants. Celui de Paries s'intéresse à la gestion différenciée des remarques des élèves par leurs professeurs. Il s'agit là d'un point essentiel pour comprendre les différences dans ce qu'elle appelle la circulation du savoir dans la classe. Enfin, l'article cosigné par Winslow, Durand-Guerrier et Yoshida introduit une dimension comparative entre pays, pour apprécier encore une fois le type de gestion de la classe par des enseignants qui doivent mobiliser divers types de connaissances.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 15, p. 7 – 8.
© 2010, IREM de STRASBOURG.

Ce dernier article utilise, de plus, des éléments de la théorie anthropologique du didactique pour caractériser les tâches données aux enseignants. La qualité de ce cadre théorique, créé par Yves Chevallard, a été soulignée par le Prix Freudenthal, qui vient de lui être attribué par la Commission Internationale sur l'Enseignement des Mathématiques. Ce prix encourage tous les chercheurs en didactique à développer des outils théoriques qui permettront de toujours mieux fonder ce champ de recherches qu'est la didactique des mathématiques. Lorsque de plus les outils théoriques participent de l'analyse d'observations du terrain et d'expérimentations, à laquelle beaucoup des articles publiés dans cette revue cherchent à contribuer, la vision de l'enseignement qui en résulte permet de nourrir l'espoir – on peut toujours rêver – qu'enfin les politiques éducatives s'appuient sur les résultats de recherches et non plus seulement sur l'opinion plus ou moins avisée de tel ou tel membre influant de la société.

Alain KUZNIAK & François PLUVINAGE

MONIQUE PARIÈS

CIRCULATION DU SAVOIR EN CLASSE DE MATHÉMATIQUES : QUELLES VARIABILITÉS DANS LES PRATIQUES DES ENSEIGNANTS ? ÉTUDE DE CAS

Abstract. The circulation of knowledge in mathematics classes: what variability in teachers' practices? A case study. From a case study comparing the same teacher acting in two different mathematics classes of the same age but different levels, we try to analyze the variability of the ways by which the teacher supports the pupils' work, particularly through his or her speech. We suggest that the differences that can be observed actually represent a differentiation of the tasks offer provided by the teacher to the two classes. We then challenge these first results with a few other cases.

Résumé. A partir d'un exemple comparant le même enseignant dans deux classes différentes, nous tentons d'établir un diagnostic des variabilités de la manière selon laquelle l'enseignant accompagne le travail des élèves en classe de mathématiques, particulièrement à travers son discours. Nous suggérons que les différences effectives relevées peuvent être source de différenciation dans leur accès aux connaissances. Nous confrontons ensuite nos premiers résultats à quelques autres cas.

Mots-clés. Pratiques des enseignants, discours, activités possibles des élèves, circulation du savoir, animation du scénario, différenciation, élèves défavorisés.

Nous nous intéressons, dans cet article, au travail mathématique des élèves tel qu'il est provoqué par l'enseignant, en classe, en essayant de traquer des différences éventuelles. Il s'agit de contribuer à établir un diagnostic des variabilités de la manière dont l'enseignant accompagne ce travail dans la mesure où l'activité des élèves et leurs apprentissages peuvent en dépendre. Nous utilisons l'expression circulation du savoir pour caractériser tout ce qui, s'ajoutant à la donnée des énoncés d'exercices ou de cours, contribue au travail mathématique des élèves pendant les déroulements en classe. Elle traduit l'animation que l'enseignant organise pour son scénario. Y participent les discours de l'enseignant, et tous les échanges collectifs sur les mathématiques, mais rapportés à leur condition de production. Cette circulation, en grande partie révélée par les analyses du discours mais qui dépend aussi des formes de travail des élèves, nous intéresse dans la mesure où elle influence les cheminements individuels des élèves dans leur travail mathématique.

Ce travail est déduit de l'analyse de leurs activités possibles déduites elles-mêmes de la confrontation entre les tâches *a priori* et les déroulements, en prenant en compte les aspects fins du discours de l'enseignant. Pour une tâche donnée, les différences repérables dans le travail des élèves sont certes liées à la composition

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 15, p. 9 – 44.
© 2010, IREM de STRASBOURG.

des classes, au niveau mathématique des élèves ainsi qu'au scénario dans lequel la tâche s'insère. Cependant nous soupçonnons que l'enseignant peut simultanément et paradoxalement aider, freiner, réduire, restreindre les apprentissages, que cela peut se traduire au niveau de son discours et c'est l'objet de notre traque.

Ainsi, cette analyse faite à partir des pratiques enseignantes nous éclaire-t-elle sur leurs variabilités et nous permet d'envisager des alternatives éventuelles.

Nous partons d'un exemple permettant de comparer le même enseignant dans deux classes différentes et confrontons ensuite nos premiers résultats à quelques autres cas.

Dans cet article nous précisons notre problématique et notre méthodologie avant d'aborder les exemples évoqués ci-dessus.

1. Cadre général de l'étude et problématique

Nous reprenons à notre compte l'idée suivante exprimée dans Bucheton (2008) : si la question du savoir est permanente, la question de sa circulation est prioritaire. Cette médiation de la parole est « *épaisse : c'est un agir pratique, communicationnel, relationnel, réflexif* » (Bucheton et al., 2005).

Cette assertion traduit bien notre hypothèse, admise, que la manière dont est mis en circulation le savoir mathématique n'est ni seconde ni isolée, mais qu'elle doit être prise en compte d'entrée, de manière imbriquée à celle des choix de contenu : le discours de l'enseignant, en classe, peut modifier les activités des élèves ; c'est une variable essentielle des pratiques des enseignants.

1.1. La circulation du savoir, un double questionnement général présent dans les travaux antérieurs

Bianco et Bressoux (2009) montrent, à l'issue d'un travail portant sur l'effet « maître » à l'école primaire, que certaines attitudes en partie langagières des enseignants peuvent favoriser l'apprentissage des élèves. Expliciter, analyser et structurer les activités proposées aux élèves et ses attentes, enseigner explicitement des stratégies cognitives pour l'acquisition d'habiletés de haut niveau, faire des liens, adopter une position de guidage de l'élève en font partie.

Dans une étude portant sur différents types de guidage en milieu universitaire, Beney et Guinard (2004) indiquent qu'un guidage serré en suivant des consignes opératoires n'est pas inefficace. Cependant un guidage procédural doit être accompagné d'une activité de verbalisation concernant les problèmes à résoudre et les démarches utilisées.

Dupont note dans les actes du colloque sur « les effets des pratiques enseignantes sur les apprentissages des élèves » (2007), que « *l'enseignant expérimenté module sa place et gère l'interaction de façon à ce que puissent s'ouvrir des espaces langagiers coopératifs dans lesquels les enjeux du débat émergent et des apprentissages se construisent*. »

Dans le même ordre d'idée, ce qu'on appelle clarté cognitive est souvent invoqué comme pouvant avoir un effet sur les apprentissages. Toutes ces études amènent ainsi à postuler que ce que dit l'enseignant à propos de ce qu'ont à faire les élèves (pour nous leur travail mathématique) a une influence discriminante.

Réciproquement, partir des besoins exprimés ou devinés des élèves et donc s'attacher à les identifier à partir de leur engagement dans le travail, puis y répondre par des aides est une autre activité d'accompagnement des élèves. L'enseignant explique, structure, oriente, récapitule aux travers ses interactions avec les élèves. *« Savoir les (les élèves) écouter pour savoir leur parler et étayer au mieux leurs apprentissages est de première importance* » (Bucheton et al. 2005). Ainsi, *« une part importante de la professionnalisation se joue dans des gestes d'ajustements, d'écoute, de négociation patiente du sens des tâches, des situations, des savoirs avec les élèves dans leur différence*. » (Bucheton et al. 2005).

En particulier, on peut se demander si, pour certains élèves pour qui le langage aurait pour fonction principale la communication, y compris en mathématiques, les autres fonctions comme désigner précisément, décrire, démontrer, ne leur échappent pas. Cela peut nécessiter des interactions langagières spécifiques, inattendues, à partir d'expressions de leurs élèves révélatrices de registres inappropriés.

Ainsi en mathématiques, l'utilisation et l'intrication des différents langages, naturel, mathématique, symbolique et des différents registres, sont travaillées notamment par Duval (2006). Il insiste sur la non-transparence de certaines formulations mathématiques et sur la différence entre argumenter et démontrer. D'autres auteurs ont depuis longtemps mis en évidence la différence, quelquefois ignorée des élèves, du vocabulaire d'implication en mathématiques et en français (Gandit, 2001). La dimension pragmatique telle que l'approche Durand Guerrier (2005) peut aussi nous aider à interroger davantage la manière d'énoncer les mathématiques et tout ce qui concerne les preuves, spécificité s'il en est des mathématiques. Nous ne la considérons pas encore dans notre travail.

1.2. Les analyses que nous adoptons

Notre analyse des pratiques de l'enseignant en classe nous permet d'approcher la circulation du savoir mathématique qu'il organise.

Nous adoptons la problématique d'analyse de pratiques développée par Robert et Rogalski (Robert et Rogalski, 2002, 2008 ; Robert 2005, 2008) inscrite dans le cadre de la théorie de l'activité (Rogalski, 2008) et imbriquant didactique des mathématiques et psychologie ergonomique. Ainsi pour analyser les pratiques des enseignants nous prenons en compte à la fois leur but, les apprentissages des élèves (conceptualisation) et les contraintes qu'impose le métier d'enseignant (enrôlement des élèves, respect des programmes, *etc*). Nous étudions ces pratiques à partir de séances en classe et des activités que l'enseignant y déploie. Nos observables sont les tâches proposées aux élèves et les déroulements tels que l'enseignant les organise : forme et nature du travail, chronologie, discours de l'enseignant.

Ainsi, pour étudier une séance en classe et y insérer les questions qui nous préoccupent, nous analysons d'abord les « itinéraires cognitifs » prévus, tâches définies par les énoncés des exercices donnés aux élèves et les formes de travail envisagées[1]. Ensuite nous mettons en relation les tâches proposées et les déroulements organisés par l'enseignant en classe[2] : nous déduisons de ce scénario les activités possibles que les élèves peuvent développer. Enfin nous analysons, dans le contexte précis ainsi dégagé, l'animation du scénario que l'enseignant met en jeu, qui donne à voir la circulation du savoir recherché.

1.3. Le détail du discours de l'enseignant

L'étude du discours détaillé de l'enseignant nous aide à lire et relier à la fois l'objet et l'objectif de ses interventions, le discours analysé étant systématiquement rapporté au savoir en jeu au moment où il est rapporté.

Dès notre travail de thèse nous nous sommes penchée sur le discours de l'enseignant de mathématiques pendant les séances de classe, cherchant comment il pouvait influencer les activités possibles des élèves. En nous inspirant des analyses de Bruner (1983) nous avons associé des fonctions aux phrases prononcées par l'enseignant pour tenter de cerner au mieux ce qui se passe en classe (Pariès, 2004). Cette étude très systématique a montré l'existence de diversités et de régularités dans les discours des enseignants de mathématiques, intra et interpersonnelles, l'interprétation en était cependant difficile aussi avons nous essayé de réorganiser ces fonctions autour de ce que nous avons appelé avec Robert et Rogalski (2009) les actions langagières de l'enseignant. Plusieurs dimensions contribuent à renseigner cette recherche, les questions échangées, le « meta » (commentaires généraux sur les mathématiques et le travail à effectuer, Robert et Robinet, 1996), les actions langagières exprimées dans les phrases prononcées par l'enseignant,

[1] Cela correspond à la composante cognitive des pratiques.
[2] Cela correspond à la composante médiative des pratiques.

dans le contexte précis où elles sont énoncées. La méthodologie correspondante est présentée ci-dessous.

Dans nos analyses, les rôles de l'enseignant et des élèves ne sont pas symétriques compte tenu en particulier de la faible participation des élèves à toutes les séances étudiées où le discours et le pilotage de l'enseignant sont déterminants. Ainsi il ne s'agit pas à proprement parler d'action conjointe comme dans Sensevy et Mercier (2007).

1.4. Circulation du savoir et élèves en difficulté

Dans leur étude sur l'efficacité des classes dans l'enseignement secondaire, Opdenakker et Van Damme (2009) reprennent cette idée de l'importance de la composition des classes sur les pratiques de classe pour expliquer les différences de performance entre classes. Se pose alors la question des relations entre ces deux variables. Autrement dit, l'enseignant adapte-t-il sa pratique à la classe et comment le fait-il ?

L'étude du discours de l'enseignant semble d'autant plus pertinente pour les élèves en difficulté que les dernières recherches identifient des causes de difficulté dont le dépassement relèverait d'actions langagières spécifiques comme l'identification de l'objet de savoir ou la prise en compte explicite de la différence des registres langagiers.

La composition sociale des classes et les représentations qu'en ont les enseignants peuvent influer aussi sur leurs pratiques. Les difficultés des élèves et leur prise en compte peuvent être anticipées par l'enseignant. Crinon, Marin et Bautier (2008) avancent qu'une « *part des ajustements qu'ils* [les enseignants] *pratiquent relève d'adaptations, souvent à leur insu, aux caractéristiques représentées des élèves et à ce qui constitue davantage une aide au fonctionnement général de la classe et à son atmosphère qu'aux élèves eux-mêmes et à leurs apprentissages. Il en est ainsi de l'évitement de l'écrit dans les classes ou pour les élèves qui sont peu à l'aise avec l'écrit ou l'écriture, de la dénivellation et/ou du morcellement des tâches pour les rendre plus aisées, de tâches de repérage et de classement dans des colonnes ou tableau qui éludent le travail réflexif qui permet de conclure sur la règle.* »

1.5. Problématique précise du travail : tâches, circulation du savoir, aides, variabilité - Vers une interprétation en termes d'offre différentielle de conceptualisation pour les élèves

Nous étudions la circulation du savoir dans un certain nombre de classes contrastées, à partir de l'organisation et de l'accompagnement effectifs du travail mathématique des élèves en classe et plus particulièrement à travers le discours de l'enseignant. Notre travail contribue ainsi à donner quelques pistes sur la question

de la variabilité des pratiques enseignantes en mathématiques selon la composition des classes. En effet, l'analyse *a priori* des tâches proposées aux élèves et celle *a posteriori* du déroulement effectif aménagé par l'enseignant, dont l'animation précise du scénario, nous permettent de comprendre comment peut se construire de manière différentielle l'aide aux élèves et de suivre le fil du projet de l'enseignant tel qu'il le conduit. Le projet de l'enseignant se traduit par l'élaboration d'un scénario (a priori) à appliquer en classe. Ce scénario comprend l'ensemble ordonné des cours et exercices et la gestion des séances, prévue a priori. Le chercheur peut être amené à le reconstituer à partir de documents plus ou moins détaillés. Ce scénario révèle l'itinéraire cognitif prévu pour les élèves, constitué de l'ensemble des activités à proposer aux élèves. Cependant ce travail du chercheur sert aussi à repérer les acticités possibles, celles qui importent finalement. Elles dépendent des adaptations de leurs connaissances qu'ils ont à mettre en œuvre pour résoudre une tâche (reconnaissances de modalités d'applications, introductions d'intermédiaires, mélanges de cadres, *etc*.) a priori mais aussi compte tenu des déroulements. Elles dépendent du travail effectif des élèves, a priori et compte tenu de ce qu'ajoute l'enseignant en classe, des formes de travail des élèves, de son repérage de leur travail. Elles dépendent aussi, à l'issue de ce travail, de la proximité plus ou moins grande entre ce qu'ont fait les élèves, ce qu'ils peuvent « entendre », et ce que dit l'enseignant.

Certaines interventions que nous appelons aides peuvent influer directement sur les activités possibles des élèves. Elles sont toujours en relation avec l'interprétation du travail des élèves, de leurs interrogations, *etc*.

Ces aides données à l'oral, pendant des recherches d'exercices, fréquentes en classe de mathématiques peuvent avoir une influence différente et complémentaire sur les activités des élèves, et selon le moment où interviennent elles ont plutôt une fonction procédurale ou une fonction constructive.

Les aides qui ont une fonction procédurale jouent sur les tâches prescrites elles-mêmes et peuvent modifier les activités mathématiques des élèves par rapport à celles prévisibles à partir de l'énoncé. Par exemple, lorsque les élèves semblent « bloqués » pour poursuivre une division après la virgule, l'enseignant indique la procédure : « *Quand on n'a plus assez de chiffres au dividende, on met un 0 et on met une virgule* ».

D'autres aides qui ont une fonction constructive ajoutent quelque chose entre le travail de l'élève et la construction (espérée) de la connaissance qui pourrait en résulter. Une aide dont la fonction est constructive serait ainsi un intermédiaire explicite apporté par l'enseignant, entre un travail mathématique des élèves, collectif ou non, et l'activité qui peut en résulter (Pariès et al., 2009). Les bilans, les récapitulations que fait l'enseignant, en lien avec le travail des élèves, peuvent devenir des aides constructives.

La frontière entre ces deux fonctions des aides est cependant mince. En fait, la distinction peut ne pas concerner de façon analogue tous les élèves. Des facteurs individuels influent sur ce qu'une aide peut produire chez un élève ; la tâche, le travail de l'élève, le moment où l'aide est donnée, sa nature ont leur importance. En effet, une aide donnée assez tôt, dont la fonction est procédurale peut être constructive pour certains élèves qui auront à utiliser un raisonnement identique dans la suite par exemple.

Nous allons maintenant présenter notre méthodologie précise, qui nous permet de traquer ce qui est en jeu dans la circulation du savoir à partir de l'analyse a priori des tâches.

2. Méthodologie

Nos analyses se font à partir de séances filmées et/ou enregistrées puis transcrites. Nous utilisons la méthodologie développée dans Pariès, Robert, Rogalski (2009) et dans Robert (2005) mais en l'adaptant à une reconstitution voulue plus qualitative que dans les premières recherches, pour mieux cibler les différences recherchées.

Comme ci-dessus, nous imbriquons deux actes, les analyses des tâches et déroulements (actes 1 et 2)[3] après avoir précisé auparavant des éléments (en particulier le rapport entre ce qui est nouveau et ce que les élèves ont déjà travaillé) concernant la notion étudiée, les programmes en vigueur, l'objectif de l'enseignant qui donnent sens à l'ensemble. C'est par l'intermédiaire du discours de l'enseignant dans sa globalité que nous reconstituons les différentes phases de la séance : mise au travail, enrôlement et maintien dans l'activité, recherche, correction et bilan.

Nous nous restreignons aux phases collectives du travail des élèves sur une tâche donnée pour une étude de la circulation du savoir, notamment à travers le discours détaillé de l'enseignant pour animer son scénario.

Mais pour décrire de manière différentielle la prise en compte du travail des élèves avec ses retombées sur leurs activités possibles, nous avons recours à des indicateurs globaux, comme les aides apportées aux différents moments du travail des élèves, directes, indirectes, générales ou particulières, et le filage du projet de l'enseignant, c'est-à-dire ce qui transparaît de son suivi, tout au long de la séance. L'enrôlement des élèves, leur maintien dans l'activité, l'exploitation de leur travail en sont des éléments fondamentaux. D'autres auteurs comme Bucheton (2008) évoquent, dans un sens proche, le « pilotage » de la leçon et le « tissage » mis en place.

[3] Nous n'y revenons pas ici.

Ainsi nous différencions, dans chaque phase, les interventions strictement mathématiques et les discours « méta », plus généraux. Nous dégageons tout ce qui concerne l'enrôlement des élèves, questions et autres. Nous comparons la nature et la forme des aides données aux élèves compte tenu du moment où elles sont données et de leur insertion dans leur travail, y compris pour conclure, compléter ce travail.

Différentes fonctions des actions langagières peuvent intervenir dans l'analyse du chercheur, mais sans être repérées systématiquement ici (cf. Pariès et al *ibid.*) : l'information, l'orientation, les justifications, les récapitulations, les bilans, l'interprétation.

Nous précisons la méthodologie associée à l'étiquetage des principales catégories d'analyse qui vont intervenir dans la suite.

2.1. L'enrôlement des élèves

L'enrôlement des élèves peut prendre des formes différentes. Il peut s'agir d'une interpellation nominative ou non des élèves. En font partie les interventions ayant les fonctions suivantes :

- l'engagement : le professeur interpelle explicitement les élèves : *« Alors R. vous allez faire la suite »*[4],
- la mobilisation de l'attention : *« N'écoutez pas les bêtises qu'on peut vous dire et réfléchissez à ce que vos faites »*.

Toutes les interventions de l'enseignant participent à l'enrôlement des élèves mais les questions en sont une explicitation directe.

Les répétitions y contribuent également. Nous distinguons ici, comme le font Volteau, Garcia Debanc (2008) dans leur étude portant sur la reformulation, les auto répétitions d'une répétition (répétition par le professeur de ce qu'il a déjà dit), mais nous n'avons pas étiqueté différemment, les quasi répétitions, les répétitions modifiées par addition ou soustraction, les répétitions d'une amorce d'énoncé inachevé par l'enseignant des paroles des élèves.

Nous complétons ces indicateurs par l'indicateur mutualisation, qui se réfère exclusivement à un contenu mathématique (quel qu'il soit) et qui permet au professeur de faire partager la réponse d'un élève à tous :

« *Elève : Forcément ce sera un nombre impair.*

[4] Les citations sont, sauf indication contraire, issues du discours de l'enseignant observé. Nous précisons dans la suite de l'article le contexte.

Professeur : Forcément ce sera un nombre impair puisque tous les nombres pairs vont être divisibles par 2. »

2.2. Le discours « méta »

Nous qualifions de « méta » les discours sur les mathématiques (cf. ci-dessus). Le vocabulaire utilisé peut être banal ou mathématique. Il peut concerner les méthodes utilisées, des mises en relation que fait l'enseignant entre différentes parties du cours de mathématiques, différents exercices travaillés. Il peut permettre d'accéder à la façon dont l'enseignant fait appel à la mémoire des élèves de suivre aussi le fil de son projet (voir ci-dessous).

« Alors l'exercice qui était à faire pour aujourd'hui c'était donc un exercice qui utilisait les critères de divisibilité ».

2.3. Les aides

Nous avons déjà précisé que les aides sont toujours en relation avec le travail des élèves. Le professeur a identifié un besoin des élèves et y répond par une information, donnant la réponse attendue, orientant les élèves vers cette réponse ou demandant de la justifier. Nous considérons aussi que les récapitulations, les bilans qui font référence au travail des élèves sont des aides. Les aides procédurales, plus locales, visent à engager les élèves dans un travail immédiat alors que les aides constructives peuvent permettre aux élèves, même si leur travail n'a pas été terminé, de prendre une petite distance par rapport à leur action, en complétant, justifiant ou expliquant ce qui a été fait.

2.4. Suivi du projet de l'enseignant

L'étude du discours de l'enseignant nous permet, de manière plus globale, de suivre au plus près l'avancée de son projet, tout au long de la séance. C'est en effet la manière dont l'enseignant fait « vivre » son projet, pilote son scénario, qui nous intéresse, dans la mesure où les activités mathématiques des élèves en résultent. Nous attachons une attention particulière à la façon dont il structure sa séance c'est-à-dire énonce des ponctuations du travail des élèves en le caractérisant de diverses manières dans un ensemble plus vaste. Ce peut être par rapport à la résolution d'une tâche ou pour replacer ce qui est proposé dans son contexte. Le discours associé peut être « méta » ou non.

« Donc on avait travaillé sur un chapitre I en chiffre romain qui devait s'appeler diviser. Dans ce chapitre I on avait vu diviser quand on faisait un quotient entier avec un reste entier. Ensuite on avait vu un deuxièmement où on avait divisé avec un reste nul. Eh bien maintenant on va faire des divisions quand on a le droit d'aller après la virgule. »

Dans cet article, nous nous attacherons à comparer les discours de l'enseignant dans deux classes, discours qui se rapportent à des tâches initiales identiques, pour en repérer les différences et tenter de les interpréter.

Dans une première analyse nous comparons les discours d'un même professeur de mathématiques enseignant dans deux classes de sixième l'une « forte » (notée A), l'autre « faible » (notée B) d'un même collège de la banlieue parisienne. Nous dégageons quelques résultats que nous testons par l'analyse plus rapide d'autres séances, avec d'autres enseignants dans des classes difficiles ou non qui nous permettent de les élargir.

2.5. Mise en œuvre de l'analyse de la circulation du savoir

Cette analyse se fait à partir des transcriptions découpées en phases grâce au repérage, comme nous l'avons indiqué, de la succession des activités possibles des élèves. Une relecture de chaque intervention permet d'inclure dans la description des activités possibles des élèves les catégories ci-dessus. Cela contribue à donner accès à la manière dont l'enseignant ménage finalement chaque activité des élèves et, en particulier, fait « circuler le savoir » visé. Lorsqu'il s'agit d'une comparaison de la même séance dans deux classes, comme dans le premier exemple, la mise en regard des discours précis facilite ce travail du chercheur (cf. le tableau 2).

3. Les études de cas

Nous présentons brièvement pour chaque séance analysée le niveau scolaire des élèves et le type d'établissement ou de classe, les tâches proposées aux élèves et le déroulement organisé par l'enseignant. Nous détaillons l'étude du discours de l'enseignant pour une partie des séances de sixième et ne donnons que les résultats pour les autres.

3.1. Deux classes de sixième

Le professeur observé enseigne notamment dans deux classes de 6e d'un même collège avec le même curriculum et approximativement le même nombre d'élèves (une trentaine)[5]. Le niveau de ces classes diffère ; il est repéré à partir des taux de réussite à une évaluation nationale[6] et les dossiers des élèves : l'une des classes

[5] La comparaison des discours de cet enseignant dans ces deux classes a été étudiée en 1999 dans un DEA de didactique des mathématiques non publié, avec une méthodologie différente (utilisation du logiciel lexico 1 pour quantifier le discours). Ces discours ont aussi fait l'objet d'une étude portant sur la stabilité des pratiques (Chappet-Pariès et al, 2008) qui concluait à de grandes invariances dans les déroulements des séances et la stabilité des pratiques des enseignants observés.

[6] Scores moyens de réussite : 65,5% dans la classe A, 49,2% dans la classe B.

(notée B) est plus « faible » que l'autre (notée A). Les observations ont été effectuées le même jour, le matin dans la classe A, l'après midi dans la classe B.

3.1.1. Le contexte

A. L'analyse des tâches

La séance qui s'inscrit dans un travail sur la division porte sur le même contenu dans les deux classes : la correction d'un exercice cherché à la maison par les élèves puis la recherche de deux exercices nouveaux. L'application des critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9 est explicitement demandé dans le programme de sixième. C'est un travail nouveau alors que les élèves ont déjà abordé les divisions d'un entier par un entier à l'école primaire.

Pour plus de commodité, nous avons numéroté les tâches.

Énoncé de l'exercice à faire à la maison : tâche n°1

Voici une liste de dix nombres : 207 ; 815 ; 79 ; 116 ; 48 ; 135 ; 950 ; 29 ; 5 208 ; 360.

Faire un tableau comme ci-dessous et le remplir.

Divisibles	Nombres de la liste
Par 2	
Par 3	207
Par 5	
Par 9	207

Il s'agit d'utiliser correctement les critères de divisibilité par 2, 3, 5 et 9, vus la veille. La tâche consiste à appliquer à chaque nombre, de manière indépendante les différents critères de divisibilité. Ils sont de deux types : somme des chiffres et nature du chiffre des unités. L'exemple donné (207) contribue à clarifier ce que les élèves ont à faire.

L'exercice consiste à résoudre une succession de tâches simples et isolées mettant en jeu sur des nombres précis les critères exposés en cours.

Énoncé donné à l'oral : tâche n°2

Trouver des nombres non divisibles par 2, 3, 5, 9 mais divisibles par un nombre autre que lui même et 1.

La correction de la tâche n°1 peut servir à actualiser l'utilisation des critères. Aucun des nombres considérés dans cette tâche n°1 ne répond à la consigne. La

tâche est complexe puisqu'elle demande l'utilisation conjointe et négative de tous les critères de divisibilité ; de plus il n'y a pas unicité de la solution. Aucun algorithme ni test a priori ne s'appliquent. Il s'agit de choisir un nombre qui ne vérifie aucun des critères révisés. Si certains critères comme la non divisibilité par 2 et par 5 sont relativement simples à mettre en œuvre, la non divisibilité par 3 l'est moins. L'ordre dans lequel les critères sont à envisagés est à prendre en compte. De plus si on ne retient que les nombres de deux chiffres (ce qui n'est pas indiqué par le professeur), seuls 49, 77 et 91 conviennent.

Enoncé donné à l'oral ; les divisions sont écrites au tableau : tâche n°3

Effectuer les divisions suivantes et les poursuivre après la virgule jusqu'à ce que la division s'arrête ou jusqu'à ce que vous deviniez la suite.
118 : 66 ; 13 : 52 ; 376 : 5 ; 341 : 3 ; 45 : 8

Ce n'est que l'utilisation des tables de multiplication qui peut faire le lien entre les tâches n°2 et n°3.

La tâche porte sur des divisions déjà abordées à l'école primaire (connaissance ancienne : les observations datent de 1997 et les programmes en vigueur à l'école primaire sont ceux de 1995) mais comme la consigne de l'enseignant est « de les continuer après la virgule jusqu'à ce qu'on puisse dire quelque chose » ou « dire quelque chose d'intéressant » ou « dire quelque chose de malin », il y a là confrontation à quelque chose de nouveau, l'extension d'une technique opératoire en partie connue.

B. Le déroulement

Les tâches et l'ordre dans lequel elles sont proposées dans les deux classes sont identiques (les quotients obtenus sont ou non exacts et la difficulté n'est pas croissante). La séance dure 55 minutes.

Dans les deux classes, les élèves travaillent à leur place et sont interrogés individuellement ou collectivement. Lors de la correction de l'exercice cherché à la maison (tâche n°1), deux élèves sont sollicités au tableau pendant que le professeur circule dans la classe pour vérifier le travail ; la tâche n°2 est engagée à la suite de cette correction et les élèves n'ont aucun temps de recherche individuelle ; pour la tâche n°3, en revanche, un long temps de recherche individuelle est ménagé.

Cette chronologie est présentée dans le tableau 1 qui récapitule les durées observées pour les différentes phases de chacune des séances.

	A	**B**
Correction de l'exercice cherché à la maison (tâche n°1) par un élève au tableau. Dans la classe A, les autres élèves ne sont pas sollicités par des questions. Dans la classe B, les élèves répondent aux questions de l'enseignant pour remplir le tableau ce qui n'a pas été réussi d'emblée.	10 min	17 min
Remarques et travail collectif sur la tâche n°2. A partir d'une proposition d'élève, élargissement à la recherche de nombres premiers dans la classe A.	9 min	11 min
Divisions : présentation du travail et recherche individuelle (tâche n°3).	14 min	16 min
Correction collective de quelques divisions. Le professeur est au tableau et interroge des élèves à leur place.	10 min 30	7 min
Donnée du travail pour la fois suivante.	6 min	2 min

Tableau 1 : Chronologie du déroulement de la séance dans les deux classes.

Les mêmes phases de travail se retrouvent dans le même ordre dans les deux classes, néanmoins le temps passé à la première correction est différent : dans la classe B il est presque double (10 min dans la classe A et 17 min dans la classe B) car l'enseignant non seulement fait des remarques sur le travail à la maison (comme dans la classe A), sur le comportement (chewing-gum, coloriage, bavardage, retard à expliquer, *etc*.) mais il doit finalement corriger en détail l'exercice en demandant aux élèves la justification de tous les résultats.

Le temps consacré aux remarques et à la résolution de la tâche n°2 varie moins. Dans tous les cas, il s'agit de commenter le tableau rempli obtenu précédemment : les nombres qui n'apparaissent pas, les nombres qui apparaissent à toutes les lignes et les nombres qui n'apparaissent que quelquefois. Dans la classe B les élèves ont beaucoup de difficulté à répondre à l'attente de l'enseignant, de nombreuses propositions ne conviennent pas : le professeur s'y attarde, justifie son évaluation lorsque le nombre n'est pas un nombre premier et ne convient pas, et répète la consigne. Dans la classe A, la tâche initialement prévue est rapidement transformée en recherche de nombres premiers.

Pour la tâche n°3, le travail demandé en classe est sensiblement le même et le temps de recherche est assez comparable même si de nombreuses interruptions étrangères aux mathématiques prennent un temps non négligeable dans la classe B : dans les deux classes, les élèves s'engagent individuellement dans les calculs, comme le montrent les interventions du professeur qui corrige individuellement les élèves et s'applique, pour certains, à détailler les calculs.

La correction des divisions est analogue dans les deux classes : le professeur écrit au tableau et les élèves sont interpellés à tout instant pour compléter les calculs.

Toutefois, toutes les divisions sont corrigées dans la classe A et le professeur a le temps de tirer un bilan alors que dans la classe B seule la première division est corrigée en totalité.

Cette description qui montre des déroulements analogues dans les deux classes, ne permet pas de mesurer les écarts éventuels de l'animation fine du scénario en direction des activités des élèves. Nous le complétons par une comparaison du discours de l'enseignant.

C. Étude de la circulation du savoir pendant les différentes phases de chaque séance

La mise en regard des discours de l'enseignant dans les deux classes en a facilité la comparaison détaillée et a permis de trouver des différences. Ces différences portent sur des ajustements dans l'animation et n'apparaîtraient pas dans une lecture globale. Nous en rendons compte en nous référant au détail des activités possibles des élèves déduites du discours de l'enseignant compte tenu des tâches proposées. Nous tenterons d'en donner une interprétation en ce qui concerne la conceptualisation possible ou non des élèves. En particulier, en croisant le moment où se situent les interactions du professeur, sa prise en compte et son interprétation du travail des élèves, nous indiquerons comment une aide peut devenir constructive c'est-à-dire une aide à la conceptualisation.

Nous illustrons cette comparaison dans le tableau 2 qui concerne le début de la correction de l'exercice cherché à la maison. Les phrases soulignées indiquent des différences.

Les données ainsi présentées sont commentées de manière linéaire, en suivant la chronologie, dans un premier temps, pour la première phase. Pour les autres phases nous ne donnons qu'une synthèse, le détail étant présenté en annexe.
(Ce qui est souligné montre ce qui diffère)

Classe A	**Classe B**
Alors vous sortez <u>vos</u> cahiers d'exercices. On corrige l'exercice n° 12 heu n° 39.	Alors vous sortez <u>votre</u> cahier d'exercice… Alors l'exercice qui était à faire pour aujourd'hui c'était <u>donc un exercice qui utilisait les critères de divisibilité</u>
Donc y avait divisible par 2, par 3, par 5 et les nombres qu'on vous proposait c'étaient 207, 815, 79 bien je vais prendre un élève qui va me dicter ça évitera à tout le monde, C je vous écoute.	Alors on vous proposait <u>un tableau</u> avec divisible par 2, par 3, Par 5 et 9. Et puis il y avait une série de nombres qui étaient 207, 815, alors il y a une personne qui va me les dicter, les autres se taisent.
Ben S qui a envie de parler va venir s'occuper des 4 premiers… alors	Bon alors quelqu'un va venir me remplir le tableau pour les uns 2, 3, 4, 5 premiers nombres,

des 5 premiers, voilà, vous mettez le son aussi, d'accord ?	jusqu'à 48. Et quand vous avez mis un nombre quelque part dans le tableau ou à plusieurs endroits, vous le barrez, d'accord ? [Commentaire du professeur sur l'absence d'un élève]
Donc vous nous remplissez le tableau et vous nous expliquez pourquoi. Pendant ce temps là je vérifie comment c'est fait. [le professeur circule dans la classe et commente individuellement le travail des élèves]	Alors en revanche pendant que K va nous remplir ça et bien je circule pour voir comment l'exercice est fait dans vos cahiers d'exercices. [le professeur circule dans la classe et commente individuellement le travail des élèves]
	C'est K tout seul qui le fait. J'ai dit on barre les nombres qui sont dans le tableau, K, qu'on a mis dans une ligne, mais j'ai pas dit qu'on barrait tous les nombres. H, si y a une question vous levez la main. On a dit K, qu'on barrait les nombres qu'on avait mis dans le tableau. Voilà et que vous vous occupiez des 5 premiers nombres jusqu'à 48.
Alors R vous allez faire la suite. On va faire les remarques après. Vous laissez le travail qu'il a fait, vous faites la suite R. [remarques individuelles]	Alors quelqu'un vient me remplir les 5 autres. [remarques individuelles] N'écoutez pas les bêtises qu'on peut vous dire et réfléchissez à ce que vos faites. Alors vous allez me donner des explications. Donc 135 vous le mettez sur quelle ligne et pourquoi ?
	135 est divisible par…, les multiples de 5 c'est 0 ou 5. C'est très mal dit ça. Ca finit par 0 o 5 ça c'est déjà mieux. Est-ce que ce nombre là est un multiple de 3 ? Non comment on voit pour, qu'un nombre est multiple de 3 ? [remarque à un élève] Chuttt Isabelle comment on voit qu'un nombre est multiple de 3 ? Quelle est la règle du cours I ? *Un nombre entier est divisible par 3 si…* Rachid ? *Si la somme des chiffres est multiple de 3……..*

Tableau 2 : Exemple de comparaison des discours de l'enseignant pendant la correction de l'exercice cherché à la maison.

Étude de la première phase : correction de l'exercice cherché à la maison

La correction est au départ organisée de la même façon dans les deux classes. Cependant si on analyse finement les discours du professeur, des différences apparaissent en particulier concernant les fonctions des actions langagières. Certaines apparaissent dans une casse et pas dans l'autre, d'autres sont déclinées différemment.

a) Une mise au travail plus consistante, plus détaillée et un déplacement de la tâche dans la classe B

On relève d'abord une information plus détaillée assortie d'une structuration reliant le travail des élèves et les mathématiques vues en cours et d'un engagement personnel[7] de chaque élève dans la classe B contrairement à ce qui se passe dans la classe A, bien que dans les deux classe le vouvoiement soit utilisé :

« *Alors vous sortez vos cahiers d'exercices. On corrige l'exercice n° 12 heu n° 39.* » (Classe A)

« *Alors vous sortez votre cahier d'exercice…Alors l'exercice qui était à faire pour aujourd'hui c'était donc un exercice qui utilisait les critères de divisibilité.* » Classe B)

La description de la tâche qu'avaient à résoudre les élèves est plus précise dans la classe B :

« *Donc y avait divisible par 2, par 3, par 5 et les nombres qu'on vous proposait c'étaient 207, 815, 79* » (Classe A)

« *Alors on vous proposait un tableau avec divisible par 2, par 3, Par 5 et 9. Et puis il y avait une série de nombres qui étaient 207, 815.* » (Classe B)

La consigne destinée à l'élève au tableau diffère, elle l'engage dans une action matérielle et lui demande de justifier dans la classe B ; le professeur y précise son rôle et celui des autres élèves.

Consigne de la classe A : « *Ben S qui a envie de parler va venir s'occuper des 4 premiers… alors des 5 premiers, voilà, vous mettez le son aussi, d'accord ? »*

Consigne de la classe B *: « Donc vous nous remplissez le tableau et vous nous expliquez pourquoi. Pendant ce temps là je vérifie comment c'est fait. Bon alors quelqu'un va venir me remplir le tableau pour les uns 2, 3, 4, 5 premiers nombres, jusqu'à 48. Et quand vous avez mis un nombre quelque part dans le tableau ou à plusieurs endroits, vous le barrez, d'accord ? Alors en revanche pendant que K va*

[7] Remarque pragmatique sur le singulier et le pluriel.

nous remplir ça et bien je circule pour voir comment l'exercice est fait dans vos cahiers d'exercices. »

Apparaît alors subrepticement, dans la classe B, un déplacement de la tâche qui est indépendant de la tâche mathématique à résoudre (il s'agit de « barrer », dans la liste de nombres proposés, ceux déjà traités) et qui finalement la complique puisque le professeur doit y revenir. Au lieu d'être considéré par les élèves comme une aide pour mémoriser les nombres déjà traités, une nouvelle tâche apparaît :

« *J'ai dit on barre les nombres qui sont dans le tableau, K, qu'on a mis dans une ligne, mais j'ai pas dit qu'on barrait tous les nombres. H, si y a une question vous levez la main. On a dit K, qu'on barrait les nombres qu'on avait mis dans le tableau.* »

b) Des réactions d'élèves différentes qui « nécessitent» une correction longue et détaillée dans la classe B

La correction nécessite, uniquement dans la classe B, un retour sur le remplissage du tableau pour les nombres 135, 950, 29, 5208, 360 avec une justification décalée.

« N'écoutez pas les bêtises qu'on peut vous dire et réfléchissez à ce que vos faites. Alors vous allez me donner des explications. Donc 135 vous le mettez sur quelle ligne et pourquoi ? »

Le professeur découpe alors la tâche pour l'élève au tableau et pour ceux qui n'ont pas compris. Cet échange représente 89 tours de parole (sans compter les interventions de l'enseignant qui interpelle un élève au sujet de son comportement, son absence, *etc*.) au cours desquels il pose 44 questions.

Pour l'examen de la divisibilité des nombres considérés, l'enseignant compare, toujours dans la classe B, les deux types de critères de divisibilité, 2 et 5 d'une part, 3 et 9 d'autre part. C'est une récapitulation générale :

« Y a deux façons de faire pour voir si un nombre est divisible par quelque chose : y a une méthode qui consiste à regarder le dernier chiffre et y a une autre méthode qui consiste à faire la somme des chiffres. Dans la méthode regarder le dernier chiffre, c'est comme ça qu'on fait pour divisible par 2, divisible par 5, divisible par 10. Et dans la méthode faire la somme des chiffres, c'est comme ça qu'on fait pour divisible par 3, divisible par 9, d'accord ? Faut pas mélanger les deux méthodes. »

Il n'y a rien de semblable dans la classe A.

c) Un bilan de l'exercice plus général, plus mathématisé et plus partagé avec les élèves dans la classe A que dans la classe B

Pour le retour sur l'exercice, à la fin de la correction, les mêmes choses sont pointées mais de façon plus détaillée et exemplifiée, moins générale dans la classe B.

L'enseignant parle de nombres ou des nombres dans la classe A et de leur divisibilité alors que dans la classe B il évoque deux nombres, 79 et 29, puis il détaille tous les résultats obtenus en termes de place dans le tableau même si l'utilisation du mot « comme » laisse une place au caractère générique de l'exemple ; il ne fait pas intervenir les élèves.

« *Alors on remarque dans ce tableau qu'il y a des nombres qui n'ont leur place nulle part : 79 et 29. 79 et 29 ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 9. Il y a des nombres qui ont leur place partout comme quoi par exemple ?* » (Classe A)

« *Alors parmi les nombres qui sont là, qu'est ce qu'on constate ? On constate qu'il y en a deux qu'on a laissé en plan qui sont 79 et 29. 79 et 29 qui sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 9, d'accord. Et puis on constate qu'il y en a un par exemple comme 360 qu'on retrouve à toutes les lignes. Et puis il y en a, comme 48 qu'on retrouve seulement sur deux lignes mais pas sur les deux autres ou qu'y en a un comme 950 qu'on retrouve seulement sur une ligne et puis qu'il y en a un comme 207 sur deux lignes mais la 3 et la 9.* » (Classe B)

Enfin dans la classe B, il tire un bilan de l'exercice en utilisant un vocabulaire très peu mathématique. Il n'y a pas de bilan dans la classe A.

« Bref on se rend compte que quand on donne un nombre on peut pas savoir, savoir avant d'essayer, ce qui va se passer. Y en a pour lesquels ça va marcher, y en a pour lesquels ça va pas marcher et c'est pas parce que ça marche pour 2 que ça marche pour 3. »

Néanmoins dans les deux classes l'enseignant pose des questions aux endroits analogues même s'il ne justifie pas, dans la classe B, qu'un nombre divisible par 9 est divisible par 3.

Tout se passe comme si l'enseignant faisait moins confiance aux élèves dans la classe B que dans la classe A, dans leur capacité à se rappeler l'objectif de l'exercice, à le relier au cours, ce qu'il précise dans la classe B et non dans la classe A, à comprendre ou interpréter le cas général à partir d'un seul exemple comme nous l'avons vu précédemment, comme si l'utilisation d'un vocabulaire banalisé allait simplifier le fait de n'avoir pas d'algorithme à appliquer pour reconnaître si un nombre est divisible par un autre.

Étude de la deuxième phase : remarques et travail collectif sur la tâche n° 2

Nous donnons directement la synthèse des analyses à partir des tableaux analogues au tableau 2 (l'étude détaillée est jointe en annexe).

Dans la classe A, l'enseignant évoque d'abord le cas général avant de passer au cas particulier des nombres rencontrés dans l'exercice précédent, 29 et 79. En fait la tâche de départ est transformée par la réaction d'un élève, Driss, qui introduit la notion de nombre premier. Elle simplifie de fait la tâche initialement prévue car il existe de petits nombres premiers, 7, 11, 13, *etc*. qui sont plus facilement mobilisables par les élèves que 49 ou 77 par exemple. D'ailleurs les élèves la réussissent plutôt bien.

L'aide procédurale, décontextualisée, portant sur le repérage d'un nombre premier, à savoir n'être dans aucune table de multiplication connue, est donnée assez tôt (22e tour de parole) permettant peut-être de devenir constructive pour beaucoup d'élèves.

La tâche proposée est introduite explicitement à partir de l'exemple particulier des nombres 29 et 79 dans la classe B. Elle est difficile à réaliser puisque seuls les nombres 49, 77, 91 inférieurs à 100 conviennent. De plus, les élèves n'ont que tardivement une aide procédurale d'abord très contextualisée, à savoir n'être ni dans la table de 2, de 3, de 5, de 9….puis décontextualisée, à savoir être dans une table mais la bonne (59e tour de parole). Cette aide décontextualisée est d'ailleurs reprise sous forme contextualisée par un élève, mais étant tardive elle a peut-être moins de chance de devenir constructive pour le plus grand nombre car reste moins de temps pour le travail autonome.

L'enseignant n'évoque pas la notion de nombre premier. Aucun élève n'en parle.

L'enrôlement est important puisqu'on relève 83 tours de paroles (65 dans la classe A).[8]

Une validation reprenant tous les critères de divisibilité structure la séance en servant de lien avec l'activité précédente.

Dans les deux classes, l'enrôlement est important, comme en témoigne le jeu incessant des questions/ réponses, même s'il l'est davantage dans la classe B.

La référence aux critères de divisibilité n'est faite dans aucune des deux classes pour l'examen des propositions d'élèves, sauf à la fin dans la classe B.

Il n'y a pas de bilan réel du travail.

---

[8] Les réflexions de l'enseignant externes aux mathématiques (non prises en compte ici), renforcent encore cet enrôlement.

Étude de la troisième phase : présentation, recherche et corrections des divisions

Nous donnons directement la synthèse obtenue à partir de tableaux analogues au tableau 2 (l'étude détaillée est jointe en annexe).

Dans les deux classes l'enrôlement est du même ordre, le discours « méta » banalisé a trait au même sujet, mais il est plus développé dans la classe B. La consigne y est plus détaillée que dans la classe A et s'appuie sur un exemple.

L'enseignant rappelle, dans une aide procédurale, dès le début de la recherche, la technique générale de la division (lorsqu'on la poursuit « après la virgule) alors que dans la classe B il laisse chercher les élèves et n'aide qu'individuellement les élèves. Cette aide est contextualisée, toujours dans la classe A, à 13 divisé par 52. Elle pourra donc être utilisée par tous les élèves s'ils ne savent pas démarrer. Dans cette classe l'enseignant peut s'appuyer sur les élèves, ici Marjorie, pour faire des rappels.

« *P : Y a un autre moyen de faire,* ***Marjorie***

E : 2 fois 6 ça fait 12 alors comme on voit que c'est trop grand on met une fois.

P : Alors l'idée de Marjorie *c'est de dire en 118 combien de fois 66 ou alors en 11 combien de fois 6 : ça va nous aider pour nous donner un ordre de grandeur du chiffre du quotient.* »

Il n'y a pas de « Marjorie » dans la classe B. L'enseignant donne les méthodes, reprend une erreur constatée dans l'autre classe et anticipe ainsi une erreur éventuelle.

Faute de temps il n'y a pas d'institutionnalisation dans la classe B.

Le bilan de la séance est plus synthétique dans la classe A que dans la classe B où elle est exprimée par un discours « méta » banal.

D. Des différences effectives

Ces deux séances se ressemblent à première vue beaucoup : mêmes tâches proposées aux élèves, même organisation du travail, des déroulements analogues. Cependant il existe des différences dont nous suggérons qu'elles peuvent être source de différenciation. C'est ce que nous développons maintenant. Dans le tableau 3 nous récapitulons ainsi des éléments constitutifs de la circulation du savoir qui diffèrent d'une classe à l'autre.

Classe A	Classe B
• Des aides procédurales qui sont données presque au début de la recherche.	• Des tâches peu identifiables doublées quelquefois d'une tâche matérielle : barrer les nombres considérés au fur et à mesure.

• Un appui effectif sur les élèves pour faire émerger les questions et des réponses. • Une institutionnalisation souvent implicite et rapide qui peut être illustrée par un exemple générique. • Des éléments de généralisation avec un vocabulaire mathématique approprié.	• Un enrôlement important en particulier un « harcèlement » des élèves sur tout par des « petites » questions (mathématiques, comportement…), des répétitions dans l'explicitation des tâches, plus de « méta » « banal ». • Une structuration très présente qui permet aux élèves de situer les différentes tâches les unes par rapport aux autres ou du travail déjà fait. • Un faible appui sur les connaissances des élèves. • Un temps qui s'allonge et des aides procédurales après de nombreux essais. • Une institutionnalisation quelquefois non mathématique, limitée, précédée de beaucoup d'exemples et quelquefois explicitée avec un vocabulaire non mathématique. • Peu de généralisation.

Tableau 3 : Des éléments constitutifs de la circulation du savoir qui diffèrent.

a) Enrôler tout le monde et structurer le travail, récapituler de manière détaillée prend du temps dans la classe B

L'enseignant dit plus de choses. Il répète, redit la tâche à résoudre, il donne tous les exemples, multiplie les questions/réponses, questionne tous les élèves. Ce constat rejoint celui de René De Cotret et Giroux (2003) qui évoque la contextualisation plus prégnante dans les classes d'élèves qui redoublent que dans les autres classes. Comme l'indiquent Volteau et Garcia Debanc (2008) les reformulations en situation d'apprentissage tendent vers un but précis, elles permettent la validation ou la problémisation des énoncés des élèves. Elles sont donc en lien avec les réactions des élèves. Les répétitions ont une part d'efficacité, comme l'a montré Horocks (2008), cependant elles peuvent limiter les adaptations possibles des connaissances des élèves (Dumail, 2007). Nous n'avons pas eu accès aux productions de élèves en contrôle par exemple donc nous n'avons pas pu mesurer l'efficacité de l'accompagnement de l'enseignant.

Au fur et à mesure de la séance, l'enseignant restitue une histoire du travail fait en classe plutôt que des mathématiques abordées, la structuration du travail des élèves jouant quasiment une fonction d'enrôlement. Les différences repérées dans les durées respectives des différentes phases montrent que certaines phases sont allongées et, par suite, d'autres abrégées.

b) Mettre la tâche à la portée de tous les élèves de la classe B peut la réduire

L'enseignant simplifie à la fois les tâches qu'il propose aux élèves et le vocabulaire qu'il met en oeuvre avec une utilisation du « méta » plus ou moins banal. Cette anticipation des difficultés des élèves semble d'ailleurs justifiée par les erreurs effectives commises. Cependant des sociologues comme Bautier soulignent les dangers d'une simplification systématique qui limiterait les élèves à l'exécution d'une tâche matérielle au lieu de la résolution d'une tâche mathématique. Une analyse des interactions langagières pendant une séance en classe de mathématiques menée par A. Bronner et M. Larguier illustre le décalage qui peut exister entre la tâche donnée par l'enseignant et celle dans laquelle s'engagent les élèves (Bucheton et al., 2005).

c) Un jeu subtil à organiser pour rester dans la ZPD des élèves de la classe B : entre faire refaire, faire chercher suffisamment et faire à la place

Tout se passe comme si la question de l'activation des élèves était déterminante pour l'enseignant. Il essaie par différents leviers de ne pas laisser de côté les élèves en difficulté (enrôlement, « petites » questions), de rallier le maximum d'élèves à son projet, presque malgré eux.

Pour ne pas risquer de travailler sur des connaissances en dehors de la ZPD des élèves, l'enseignant profiterait de ce qui est déjà là en faisant refaire aux élèves ce qu'ils réussissent et peut hésiter à faire aborder le nouveau (ici par exemple la notion de nombre premier). La crainte que les élèves ne trouvent pas et le fait que dans certaines classes il n'y a pas de « Marjorie » pourraient aussi amener l'enseignant à prendre en charge davantage, à simplifier et/ou par un questionnement serré à faire émerger les réponses attendues voire à remplacer les élèves. En même temps, et paradoxalement, la nécessité de rassurer les élèves sur leur capacité à trouver, pourrait conduire certains enseignants à retarder le moment où viennent les aides procédurales comme nous l'avons déjà montré (Pariès et al., 2007). Ce temps là, de recherche individuelle des élèves pourrait ne pas être efficace.

3.2. Les autres classes

Les séances que nous considérons dans la suite ont aussi été analysées dans des perspectives un peu différentes avec des méthodologies néanmoins assez proches. Nous voulons ici confronter les résultats précédents et ce que nous avions repéré dans ces autres classes sur la circulation du savoir.

3.2.1. Une séance en classe de cinquième

Cette séance a été analysée dans notre thèse (Pariès, 2004), c'est la classe de C, d'un collège ZEP de la région parisienne. Nous avions étudié alors, à travers le

discours de l'enseignant, comment la tâche initiale avait été transformée pendant la séance et ce qui était à la charge des élèves dans sa résolution. Nous présentons rapidement le contexte.

L'enseignante propose à ses élèves de résoudre un exercice portant sur la symétrie centrale.[9] Il s'agit de reproduire une figure en vraie grandeur, de construire l'image de certains points, de justifier la mesure d'une longueur, de trouver la mesure d'un angle, enfin de démontrer que l'image d'un point d'un cercle appartient à un cercle.

Le professeur organise le travail en quatre temps :

- présentation détaillée de l'exercice, travail collectif sur l'énoncé (10 min),
- construction individuelle de la figure, le professeur circule dans la classe, bilan collectif (20 min),
- repérage collectif dans l'énoncé des questions posées avec un retour sur la construction de la figure (11 min),
- repérage collectif des données et de l'ordre de leur prise en compte dans la construction de la figure et travail pour la fois suivante (15 min),
- La réponse aux questions posées n'a pas pu être abordée pendant cette séance faute de temps. L'enseignant organise plutôt de multiples tâches de repérage, comme s'il reculait le moment de confronter les élèves aux démonstrations qui suivent la construction.

Le temps consacré à la construction de la figure (reproduction en vraie grandeur et construction des symétriques de certains points) est très long du fait des difficultés éprouvées par les élèves. Le rappel par l'enseignant de la méthode de construction du symétrique d'un point est donné collectivement au bout de 40 minutes.

En ce qui concerne l'étude du discours de l'enseignant, même si notre méthodologie ne recouvre pas exactement celle suivie alors, nous pouvons tout de même relire certaines de nos conclusions assez facilement.

L'étude des fonctions du discours et des buts illocutoires[10] nous renseigne sur le contenu et sur la forme du discours de l'enseignant (enrôlement, structuration, questions, méta).

Nous avons ainsi mis en évidence la place importante de l'enrôlement dans son discours aussi bien par la mobilisation directe des élèves que par les questions qui visent, par leur portée limitée, leur réussite. Nous avons vu que l'enseignant de la classe B jouait lui aussi sur ce levier (cf. 3. 1. 1.D. a)).

---

[9] L'énoncé de l'exercice est donné en annexe.

[10] Les buts illocutoires indiquent ce que le contenu du discours cherche à produire.

Nous avons relevé aussi une forte structuration de la tâche pour replacer l'exercice dans le programme de géométrie et organiser le travail. Les principales étapes du travail sont notées au tableau. Cette structuration permet à l'enseignant de tracer l'histoire du travail des élèves et de les rallier à ce qu'il propose c'est aussi ce que fait l'enseignant dans la classe B (cf. 3. 1. 1.D. a)). L'enrôlement des élèves y contribue également.

Les bilans sont détaillés d'autant que l'enseignant s'appuie pour les faire sur le travail des élèves. Pourtant l'aide procédurale portant sur la construction du symétrique d'un point a été tardive ce qui a conduit certains élèves à ne rien faire. La même remarque a été faite pour l'enseignant de la classe B (cf. 3. 1. 1.D. b)).

L'analyse de cette séance observée dans une classe de ZEP montre comment l'enseignant adapte son projet à ses élèves à la fois par les tâches qu'il leur propose pour les maintenir dans l'activité et par son accompagnement langagier (tâches essentiellement de repérage : mots, mesures, questions, données). Ces tâches qu'ils réussissent en répondant à des questions calibrées reculent de fait le moment où ils sont confrontés aux mathématiques. L'enseignant anticipe les difficultés des élèves en aménageant la tâche pour la simplifier mais sans tout dire. Il laisse un temps long de recherche autonome aux élèves. On peut se demander toutefois si certaines aides procédurales ne pourraient pas être données plus tôt pour permettre aux élèves de résoudre au moins en partie l'exercice (construction du symétrique d'un point, rappel des propriétés de la symétrie centrale.

3.2.2. Deux séances en troisième

Il s'agit de deux séances d'exercices de géométrie portant sur des sujets analogues en classe de troisième. L'une se déroule dans un lycée ordinaire, l'autre en classe de ZEP. Nous ne regardons ici que certains résultats. (La comparaison détaillée de ces séances a fait l'objet d'une communication au colloque organisé par l'université Rennes 2, du 19 au 21 novembre 2008, « Efficacité et Equité en Education ».)

Les deux énoncés sont assez proches[11] : ils amènent à utiliser le théorème de Thalès tel qu'il figure actuellement au programme de quatrième avec des adaptations conduisant à des calculs algébriques.

Dans les énoncés trois cadres sont explicités : géométrique, numérique, algébrique ; les élèves le voient. Cela peut tout de même amener les élèves à hésiter, pour commencer, entre les cadres algébrique ou géométrique et le professeur peut en tenir compte s'il lui semble que le cadre géométrique n'est pas suffisamment prégnant.

[11] Les énoncés des exercices sont donnés en annexe.

L'enseignant de ZEP insiste sur l'éventuel choix et certains élèves choisissent le cadre numérique d'abord.

Le calcul des longueurs est obtenu directement par un produit en croix dans la classe ordinaire alors qu'il nécessite la résolution d'une équation quotient avec des x au numérateur et au dénominateur dans la classe ZEP. De plus, dans cette même classe, l'une des longueurs s'exprime sous la forme x+4,5 mélangeant ainsi les cadres numérique et algébrique. Dans l'autre classe c'est directement x qui intervient dans les rapports de longueurs.

Nous présentons dans le tableau 4 la chronologie du déroulement de la séance dans les deux classes.

ZEP	**non ZEP**
Distribution des sujets et mise au travail des élèves. Recherche individuelle des élèves (7 min), état des lieux du professeur sur les différents cadres de travail adoptés par les élèves (géométrique ou algébrique). La méthode géométrique (Thalès) est conseillée au bout de 12 minutes.	Travail sur la figure et recherche collective de stratégie (Thalès)-Nombreux échanges permettant aux élèves de se familiariser avec l'utilisation de x comme longueur-L'utilisation géométrique du théorème de Thalès est validée. (5 min 30).
Correction au tableau par un élève silencieux de l'application géométrique du Théorème de Thalès. Commentaire de l'enseignant (8 min). Recherche individuelle de l'expression des longueurs en jeu (2min). Correction par l'enseignant qui revient sur une démarche (erronée) utilisée par un élève et qui écrit les rapports à utiliser. (2 min).	Recherche individuelle sur l'application géométrique du théorème de Thalès (1 min). Correction par un élève au tableau très contrôlée et commentée par l'enseignant. Les autres élèves sont impliqués par des questions. (2 min).
Recherche individuelle des élèves pour résoudre l'équation (7 min).	Calcul des longueurs en fonction de x. Recherche individuelle (1 min). Correction.
Correction par un élève muet-Commentaire de l'enseignant (8 min).	Correction par un élève au tableau très contrôlée et commentée par l'enseignant. Les autres élèves sont impliqués par des questions. (2 min 30).

Tableau 4 : Chronologie du déroulement de la séance dans les deux classes et activités des élèves.

Ce tableau met en évidence des différences importantes autant dans la durée des différentes phases (recherche individuelle des élèves, correction) que de leur organisation (plus ou moins collective). Ces différences sont liées aux réactions des élèves. Le temps de correction en ZEP est ainsi beaucoup plus long qu'en non ZEP puisque la plupart des élèves n'ont pas trouvé.

En non ZEP, le professeur partage avec certains élèves la recherche de la stratégie. Il les familiarise, par des questions (aides procédurales), à l'intrusion du cadre algébrique dans un exercice de géométrie. Il donne ainsi une place à l'oral collectif, permettant peut-être à certains d'élèves de démarrer vite même s'ils n'ont pas été associés à la recherche de la stratégie.

En ZEP, si le professeur annonce le mélange des cadres géométrique et algébrique, il n'engage aucune discussion collective à ce sujet ni sur la stratégie à suivre. La tâche des élèves peut ainsi rester plus longtemps difficile ou floue. Comme dans la classe B, les aides procédurales sont tardives (cf. 3. 1. 1.D. c)).

La prise en compte des élèves des difficultés et/ou potentialités des élèves est plus importante en ZEP qu'en non ZEP. Les différentes productions des élèves, les différentes pistes, mêmes fausses, sont souvent mutualisées par l'enseignant au moment des recherches des élèves ce qui peut entraîner comme dans la classe B un allongement de certaines phases (cf. 3. 1. 1.D. a)).

En revanche, dans les phases de correction, le professeur de ZEP n'organise pas de correction collective, au mieux elle est publique[12]. Il commente seul ce que l'élève interrogé, mais muet, a écrit au tableau et cela contrairement au professeur de non ZEP qui lui engage tous les élèves, au tableau et leur place, par des questions, à participer activement à la correction et mutualise leurs propositions.

En ZEP, la structuration est surtout destinée à mettre en rapport ce qui est travaillé dans la séance et ce qui a été ou va être fait (contenus) ce que nous pouvons rapprocher de ce qui se passe dans la classe B (cf.3.1.1.D. a)). En non ZEP, le déroulement de la séance est très scandé par le travail en cours (nature du travail) : recherche individuelle, recherche collective, recherche individuelle, correction découpée temporellement et récapitulée.

En non ZEP, le professeur laisse aux élèves moins de temps de recherche qu'en ZEP, organise moins d'aller-retour et de possibilité d'émergence et d'interprétation des difficultés des élèves.

Si les aides procédurales sont assez semblables, visant à préciser ou à faire préciser le théorème et son adaptation, elles sont paradoxalement plus nombreuses en non

[12] Elle est énoncée assez fort mais sans que l'attention de tous les élèves soit nécessairement mobilisée.

ZEP qu'en ZEP et données plus tôt dans la séance comme nous l'avons observé aussi dans la classe B (cf. 3. 1. 1.D. c)).

L'enseignant de ZEP laisse plus d'autonomie aux élèves, brouille quelquefois les aides qu'il donne, peut-être dans le souci de ne pas « trop » en dire aux élèves.

Il y a très peu d'aides constructives. Les deux enseignants reviennent sur la justification du théorème de Thalès et sur le mélange des cadres géométrique, numérique et algébrique pour exprimer une longueur. Peut-être retrouve-t-on le souci de l'enseignant de ZEP de faire comprendre les élèves localement alors que l'enseignant de non ZEP retrace l'histoire de l'exercice en une seule aide constructive à la fin.

En ce qui concerne le caractère générique d'un tel exercice, il est évoqué par les deux enseignants, faisant référence au brevet des collèges.

Le projet de l'enseignant de non ZEP est suivi à la lettre, tant au niveau du temps que des aides. En ZEP, tout se passe comme si le professeur redoutait de donner des aides trop tôt et de perdre ainsi, à la fois, les bénéfices de la mise au travail des élèves et leur compréhension.

Discussion et conclusion

La comparaison des deux séances de sixième, nous a permis de dégager trois facteurs qui peuvent intervenir de manière différentielle dans la circulation du savoir.

Le premier facteur est celui du temps (global) : enrôler tout le monde et structurer le travail, récapituler de manière détaillée prend du temps. Une des conséquences est de ne pas pouvoir confronter les élèves des classes faibles à autant d'exercices que les élèves des autres classes. Ils disposent de moins d'entraînement donc les connaissances deviennent moins facilement disponibles.

Le deuxième facteur est relatif à la tâche : mettre la tâche à la portée de tous les élèves peut la réduire. Les tâches sont en conséquence moins variées, demandent moins d'adaptations, entraînant ainsi des mises en fonctionnement de connaissances plus limitées. Il peut se faire aussi que le professeur n'ose pas aborder avec certaines classes des notions qui lui semblent, au premier abord, trop difficiles comme on l'a vu ici pour les nombres premiers. Les élèves de la classe B sont alors privés d'une discussion, qui semble à leur portée, et qui aurait élargi leur connaissance des nombres.

Enfin les circulations du savoir organisées dans les deux classes diffèrent. En particulier la répartition, le contenu et la durée des phases de recherche, avec les aides correspondantes de l'enseignant, qui sont différentes, laissent penser que l'enseignant est amené à organiser un jeu subtil, pas nécessairement efficace pour les apprentissages mais adapté à la classe, pour rester dans la ZPD des élèves :

entre faire refaire, faire chercher suffisamment et faire à la place des élèves. Ainsi dans la classe B, les élèves ne bénéficient pas aussi rapidement que dans la classe A des aides de l'enseignant quand il s'agit de reconnaître qu'un nombre n'est pas divisible par 2, 3 et 5 ou de rappeler comment on poursuit une division après la virgule. Ils cherchent longtemps, mais sans succès : ont-ils avancé dans leurs connaissances ? Réciproquement, comme le professeur peut moins souvent s'appuyer sur les élèves pour donner une réponse ou rappeler un résultat, il finit par souvent le faire lui-même : les élèves vont-ils avancer dans leurs connaissances ?

Les analyses des autres séances montrent que certains de ces facteurs interviennent plus ou moins. Dans la classe de cinquième, une modification de la tâche initiale visant à la simplifier recule de fait le moment de confronter les élèves aux mathématiques et peut amener l'enseignant à prendre en charge une partie de la tâche à résoudre comme dans la classe B (nombres premiers). Dans la classe de troisième ZEP, l'enseignant conscient des difficultés des élèves, mais se refusant à réduire la tâche et à réduire leur temps de recherche, peut les empêcher de s'impliquer dans une résolution même partielle de l'exercice en ne les aidant que tardivement (comme dans la classe B, pour les tâches n°2 et 3).

Ces résultats pourraient impliquer que certains choix dans la circulation du savoir conduisent à une plus petite offre de conceptualisation pour des élèves des classes faibles sans qu'on sache très bien si ça tient au professeur, à la représentation qu'il se fait de ses élèves ou aux élèves eux-mêmes ou encore au cumul des trois avec quelques régularités. Le grand problème est celui des alternatives et de leur existence même.

Une alternative du côté de l'institution serait le maintien de classes hétérogènes pour qu'à coup sûr il y ait une « Marjorie » dans la classe.

L'ajustement du temps de recherche autonome des élèves est un facteur qui pourrait intervenir. Savoir arrêter la recherche suffisamment tôt et donner des aides intermédiaires pour que les élèves puissent résoudre la tâche nous paraît nécessaire. Tous les élèves n'aurons certes pas accès aux mêmes activités (nous parlons d'activité a maxima et d'activités a minima) mais certaines aides de l'enseignant pourraient quand même devenir constructives alors.

Un autre ajustement tient aux formes de travail mais le travail en groupes n'est pas toujours celui qui permet l'apprentissage du plus grand nombre surtout lorsqu'ils sont en grande difficulté (Horocks, 2008).

Exploiter au plus près le travail des élèves semble les aider mais en dire trop (mutualiser toutes les propositions, les essais des élèves sans faire un tri) sans choisir ce qui est retenu peut aussi les perdre.

Enfin les recherches ne sont pas encore assez nombreuses sur le sujet pour que nos résultats soient suffisamment fiables d'où la nécessité de les poursuivre.

Bibliographie

BIANCO, M. et BRESSOUX, P. (2009), Effet-classe et effet-maître dans l'enseignement primaire : vers un enseignement efficace de la compréhension, *In DUMAY X. et DUPRIEZ V. L'efficacité dans l'enseignement- promesses et zones d'ombre.* Bruxelles : De Boeck.

BENEY, M., GUINARD, J.-Y. (2004), L'évaluation de l'efficacité du guidage dans les travaux pratiques de DEUG : un problème méthodologique complexe**,** *Didaskali*, **24,** INRP, 29–64.

BUCHETON, D., BRONNER, A., BROUSSAL, D., JORRO, A., LARGUIER, M., (2005), Les pratiques langagières des enseignants : des savoirs professionnels inédits en formation, *Repères* **30** , 33–54.

BRUNER, J. (1983), *Savoir dire, savoir faire*. Paris : PUF.

CRINON, J., MARIN, B., BAUTIER, E., Quelles situations de travail pour quels apprentissages ? Paroles des élèves, paroles de l'enseignant, (2008) *In Le développement des geste professionnels dans l'enseignement du français- Un défi pour la recherche et la formation,* Bucheton D. et Dezutter O .Bruxelles : De Boeck.

CHAPPET-PARIÈS, M., ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2008), Que font de élèves de troisième et de quatrième avec une même enseignant dans une séance de géométrie ? Ou de la stabilité des pratiques. In F. Vandebrouck (Éd.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouse : Octarès, 95–137.

CHAPPET-PARIÈS, M., ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2008), Analyses de séances en classe et stabilité des pratiques d'enseignants de mathématiques expérimentés du second degré. *Educational Studies in Mathematics*, **68**, 55–80.

DUMAIL, A. (2007), La racine carrée en troisième, des enseignements aux apprentissages. Mémoire de Master 2. *Cahier de Didirem*, **57**.

DUPONT, P. (2007), Effets des médiations de l'enseignant sur les pratiques langagières des élèves dans un débat littéraire, *Actes du colloque International du Pôle Nord-Est « Les effets des pratiques enseignantes sur les apprentissages des élèves »*.

DURAND GUERRIER, V. (2005), Recherche sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique, note de synthèse HDR, Universté Claude Bernard Lyon.

DUVAL, R. (2006), Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques, Relime, Numéro spécal, Mexico.

HOROKS, J. (2008), Les triangles semblables en classe de seconde : de l'enseignement aux apprentissages, *Recherches en didactique des mathématiques*.

GANDIT, M. et MASSE-DEMANGEOT, M.C. (2001), Le vrai et le faux en mathématiques au collège et au lycée IREM de Grenoble, Université JF.

OPDENAKKER, M.C. et VAN DAMME, J. (2009), L'efficacité des classes dans l'enseignement secondaire *In Dumay X. et Dupriez V.L'efficacité dans l'enseignement- promesses et zones d'ombre.* Bruxelles : De Boeck.

PARIÈS, M. (2004), Comparaison de pratiques d'enseignants de mathématiques, relations entre discours des professeurs et activités potentielles des élèves, *Recherches en didactique des mathématiques*, **24, 3,** 251–284.

PARIÈS, M., ROBERT, A., ROGALSKI, J. (2009), Comment l'enseignant de mathématiques, en classe, met ses élèves sur le chemin des connaissances : un point de vue méthodologique en didactique des mathématiques *In Travail et Apprentissage.*

RENÉ DE COTRET, S., GIROUX, J. (2003), Le temps didactique dans trois classes de secondaire I (doubleurs, ordinaires, forts) *In Education et francophonie,* **volume XXXI**.

ROBERT, A. (2005), Des recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 209–250.

ROBERT, A. (2008), La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants de mathématiques. In F. Vandebrouck (Éd.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouse : Octarès, 59–68.

ROBERT, A. (2008), Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In F. Vandebrouck (Éd.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, 45–57, Toulouse : Octarès.

ROBERT, A., ROBINET, J., (1996), Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, **16**, 2.

ROBERT, A., ROGALSKI, J. (2002), Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, **2, n°4**, 505–528

ROBERT, A., ROGALSKI ,J. (2005), A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class, *Educationnal studies in mathematics*, **59**, 269–298.

ROGALSKI, J. (2008), Le cadre général de la théorie de l'activité. Une perspective de psychologie ergonomique. Des compléments sur les théories de l'activité et du développement, pour l'analyse des pratiques des enseignants et des apprentissages des élèves. In Vandebrouck F. (Éd.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, Toulouse : Octarès, 23–30 & 429–459.

SENSEVY, G. et MERCIER, A. (2007), Agir ensemble : l'action didactique conjointe du professeur et des élèves, P.U.R.

VOLTEAU, S. et GARCIA DEBANC, C. (2008), Les reformulations de l'enseignant dans les interactions orales au cours d'une séance de réécriture de texte littéraire au cycle 3 de l'école primaire, In *Analyse des pratiques des enseignants débutants*, La Pensée Sauvage.

MONIQUE PARIÈS
37 rue Bezout
75014 Paris (France)
monique.paries@orange.fr

Annexe

L'analyse des discours pendant la résolution de la tâche n° 2

Le nombre de tours de parole est de 65 dans la classe A et 83 dans la classe B.
Si au départ la tâche demandée aux élèves est la même, trouver un nombre non divisible par 2, 3, 5, 9 mais divisible par autre chose que 1 et lui-même, l'enseignant ne l'énonce pas de la même façon. Il l'énonce comme telle aux élèves de la classe A puis justifie son choix « autre chose que 1 et lui-même » en prenant exemple sur un des nombres de l'exercice corrigé alors que dans la classe B il part de l'exemple des deux nombres 29 et 79 de l'exercice corrigé avant d'énoncer la tâche. L'enseignant énonce une remarque généralisée à tous les nombres pour la classe A alors qu'il évoque deux nombres pour la classe B :
« Alors pourquoi je dis divisible par autre chose que lui même et 1 ? Et bien parce que tous les nombres du monde sont divisibles par 1 et sont divisibles par eux-mêmes. » (Classe A)
« Donc tous les nombres, comme 79 par exemple sont tous divisibles par eux-mêmes et par 1. Alors 79 il est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 9 mais il est divisible par 79 et par 1. » (Classe A)
« Alors 79 et 29 ce sont des nombres qui sont pas divisibles par 2, pas par 3, pas par 5, pas par 9, et puis si on essayait, bien ils seraient divisibles par rien du tout sauf deux valeurs. » (Classe B)
« Donc on a deux nombres comme 29 et 79 qui sont divisibles par eux mêmes et par 1 mais par rien d'autres. » (Classe B)

La tâche demandée aux élèves de la classe A est très rapidement transformée en une autre qui est la recherche de nombres premiers à deux chiffres avant même que soit donné un exemple de nombre répondant à la tâche initiale. L'enseignant a demandé le nom de ces nombres et Driss a répondu. :
« P : *En revanche c'est vrai qu'il existe des nombres Driss qui sont divisibles que par 1 et eux mêmes et ces nombres là on les appelle ?*
E *: Des nombres premiers*
P *: Des nombres premiers, oui. Alors 29 en est un exemple, 79 aussi. Trouvez m'en deux autres simples des nombres premiers qui sont divisibles que par eux-mêmes et par 1 mais des nombres à deux chiffres.* » (Classe A)
La notion de nombre premier n'est pas abordée dans la classe B, le mot n'est pas prononcé même si les élèves en donnent de nombreux exemples.
La tâche initiale est répétée cinq fois presque à l'identique. Le professeur donne peu de pistes aux élèves de la classe faible pour trouver les nombres demandés et la tâche est plus difficile que la recherche de nombres premiers puisque peu de nombres de deux chiffres conviennent : 49, 77, 91.
Dans la classe A, au bout du 22e tour de parole, l'enseignant donne un moyen de reconnaître qu'un nombre est premier après la deuxième proposition des élèves, pour valider la réponse :
« 59 c'est divisible par rien du tout à par 59 et 1, oui, c'est dans aucune table de multiplication au départ qu'on connaît. » (Classe A)
Ce n'est qu'au 59e tour de parole que l'enseignant évoque ce moyen dans la classe B, après la dixième proposition :

« *Moi je voudrais quelque chose de simple qui soit pas dans une table de multiplication, ou qui soit dans une table mais pas la bonne.* » (Classe B)

Cependant au 46e tour de parole, l'enseignant énumère les tables dans lesquelles ne doit pas se retrouver le nombre. C'est à propos du même nombre proposé, 59 qu'il fait ce commentaire :
« *Alors réfléchissez et avant d'avoir une réponse à me donner essayez bien dans vos têtes, faut qu'il soit pas divisible par 2, pas par 3, pas par 5, pas par 9 et par autre chose que lui même et 1.* » (classe B)
Une élève de la classe B avait donné une piste au 35e tour de parole :
« *Forcément ce sera un nombre impair.* » (Classe B).

Dans la classe B, l'enseignant examine le cas de 17 propositions d'élèves dont 4 nombres premiers, 9 nombres divisibles par 2, 3 ou 5 et un de 3 chiffres dont le cas n'est pas « tranché » (seuls 3 nombres conviennent). Chaque fois l'enseignant justifie ou fait justifier la validité de la réponse.
Dans la classe A, il examine 15 propositions dont 5 qui ne sont pas des nombres premiers. Il n'y a pas de bilan. La justification du refus d'une réponse est rapide celle d'une validation n'est pas donnée à part pour le nombre 59.
Il n'y a de bilan dans aucune des deux classes. Cependant dans la classe B l'examen de la dernière proposition de nombre sert à récapituler ce qu'il a fallu successivement contrôler pour connaître la validité ou non de la proposition :
« C'est vrai, donc voilà 119, un nombre qui n'est pas divisible par 2, il est impair, qui n'est pas divisible par 5, il se termine ni par 0 ni par 5, il n'est pas divisible par 9 parce que la somme de ses chiffres ça fait 11, il est pas divisible par 3, pour la même raison et pourtant il est bien divisible par autre chose que 2, 3, 5, 9, à savoir 7 et 17, d'accord ? Bon on finit ça , vous prenez votre cahier de brouillon. » (Classe B)
On ne relève rien de tel dans la classe A :
« *13, oui on en a parlé déjà. Bon on s'arrête là* ».

L'analyse des discours pendant la troisième phase
Dans les deux classes, le professeur rappelle ce qui a été déjà vu à propos de la division ; la structuration est à peu près la même. Les divisions, questions concernant les outils de travail sont identiques.
Le discours diffère dans la manière d'exprimer son attente lorsque la division se poursuit après la virgule :
« *Ah, et bien on continue à faire la division jusqu'à ce qu'on puisse dire quelque chose. Ah on continue, on continue, on continue, on continue jusqu'à ce qu'on puisse dire quelque chose pour chacune des divisions.* » (Classe A)
« Alors on s'arrête après la virgule jusqu'à ce qu'on puisse dire quelque chose de malin sur ce qui se passe après la virgule. [….]
S'il en faut 10 000 on va jusqu'à 10 000, si on peut dire quelque chose de malin avant, on s'arrête avant. » (Classe B)
Pour la classe A l'enseignant n'ajoute pas le mot « malin » qui n'est pas mathématique. Il utilise un vocabulaire moins contextualisé choisissant la répétition des mots « on continue » pour illustrer son propos.

Au début de la recherche individuelle des élèves sur les divisions, il demande aux élèves de la classe A s'ils se souviennent de la méthode puis leur indique comment démarrer :
« P : *Dites moi si vous ne savez plus comment faire. Tout le monde sait comment démarrer la division avec des virgules ?*
E : Oui.
P : Oui, Quand on n'a plus assez de chiffres au dividende, on met un 0 et on met une virgule d'accord ? ».
Il n'y a rien de tel dans la classe B.
Après avoir constaté dans la classe A qu'une des divisions pose problème, il fait une intervention collective et donne aussi le démarrage :
« P : Y en a qui sont gênés par 13 divisé par 52. Alors, 13 divisé par 52, on peut pas le faire parce qu'on prend deux chiffres au diviseur et
E : Alors on met un 0.
P : Alors on met un 0, on met un 0 et une virgule et on fait en 130 combien de fois 52, d'accord ? »
L'enseignant constate la même difficulté dans la classe B mais il intervient individuellement.
Pour la correction collective des divisions les différences sont aussi assez marquées.
Dans la classe B l'enseignant structure davantage en annonçant la méthode :
« *j'en corrige deux pour vous montrer la méthode.* »
« Alors la méthode : il y a deux chiffres au diviseur, j'en prends deux au dividende, ça ne suffit pas donc j'en prends trois et je dis en 118 combien de fois 66. » (Classe B)
Le mot méthode est d'ailleurs répété à quatre reprises dans cette intervention ; il n'est pas utilisé dans l'autre classe à ce moment là.
L'enrôlement des élèves pour ce moment de correction est de même nature dans les deux classes. Les questions sont nombreuses et adressées à de nombreux élèves. Cependant dans la classe A le professeur peut s'appuyer sur une élève Marjorie pour lui faire exposer la procédure de division d'un nombre à trois chiffres par un nombre à deux chiffres.
Il n'y a pas de Marjorie dans la classe faible et c'est l'enseignant qui expose cette procédure :
« *P : Y a un autre moyen de faire,* ***Marjorie.***
E : 2 fois 6 ça fait 12 alors comme on voit que c'est trop grand on met une fois.
P : Alors l'idée de Marjorie *c'est de dire en 118 combien de fois 66 ou alors en 11 combien de fois 6 : ça va nous aider pour nous donner un ordre de grandeur du chiffre du quotient.* » (Classe A)
« *Alors j'ai vu des gens parmi vous qui essayaient de faire 66 multiplié par 1, multiplié par 2, multiplié par 3 pour voir combien ça allait donner. Y a une autre méthode plus rapide qui est de dire en 118 combien de fois 66 ou en 11 combien de fois 6 et ça va nous donner directement l'ordre de grandeur. Et donc en 11 combien de fois 6, une fois. Et donc ça va être 1. Je vous rappelle aussi la méthode sans poser les soustractions.* » (Classe B)
Dans la classe B, le professeur expose un « essai/ erreur » qu'il a déjà corrigé dans l'autre classe anticipant une erreur que les élèves n'ont pas commise :
«P : *je dis en 520 combien de fois 66 ou alors bien plus malin en 52 combien de fois 6 et normalement si je dis en 52 combien de fois 6, j'essaie 8.*
E : 7 fois.

P : Vous me dites 7 parce que vous savez que 8 ça va pas marcher mais si moi je joue le jeu en étant à votre place, on a commencé d'abord par essayer 8. Alors essayons 8. » (Classe B)

Le professeur corrige une seconde division dans la classe A, mais n'a que le temps de la commencer dans la classe B. C'est celle qui posait des problèmes à plusieurs élèves dans les deux classes.

Dans la classe A le professeur a le temps de tirer un bilan :

« *Bref j'ai obtenu 1, 2, 3, 4, 5 résultats que je pourrais classer en deux catégories de résultats.*

….

Y a une catégorie où le reste finira par être nul oui…

Et puis l'autre où il y aura un chiffre après la virgule qui va se répéter, un ou deux parce que là regardez c'est deux qui se répètent, là c'est un, ça pourrait être beaucoup plus. Oui. En gros y a deux catégories de résultats possibles, des résultats qui vont se terminer après la virgule à un moment donné et puis des résultats qui après la virgule vont se répéter. Et forcément quand on fait des divisions on peut ranger notre résultat dans l'une des deux catégories.

Donc bien faire la différence entre un quotient entier avec reste nul et un quotient à virgule avec reste nul. Dans un cas on aura une divisibilité et dans l'autre cas on aura une quantité finie de chiffres après la virgule, d'accord ? » (Classe A)

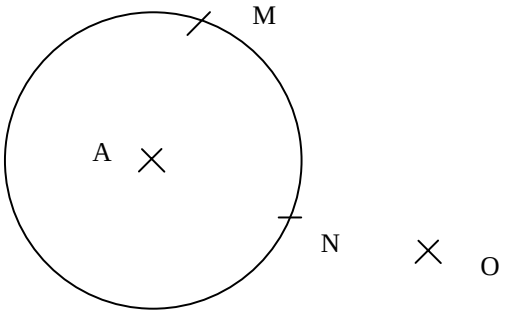
Dans les deux classes nous avons déjà noté que l'enrôlement était du même ordre, le discours « méta » banalisé a trait au même sujet, mais est plus développé dans la classe faible :

« Ca c'est sûr que, écoutez moi bien si on veut faire une division faut savoir les tables de multiplication. Si on les sait pas c'est pas la peine. La première chose à faire pour pouvoir faire des divisions et vous allez en avoir au prochain contrôle, sans calculatrice, c'est de revoir encore les tables de multiplications indispensable, surtout dans le sens quand on vous donne un résultat, savoir d'où il vient, N, ça veut pas dire les lire au dos d'un cahier de brouillon, ça veut dire les savoir dans sa tête parce qu'au contrôle, pas de cahier de brouillon non plus. » (Classe B)

« *Quelle est la condition indispensable pour faire des divisions ?...*

Savoir ses tables de multiplication par cœur, par cœur et sans hésitation, d'accord ? (Classe A).

Enoncé de l'exercice de la classe de cinquième



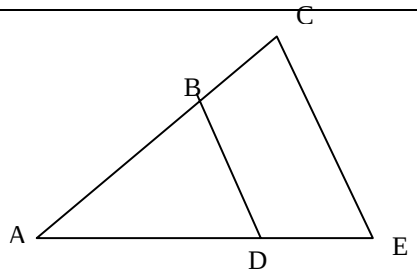
- Reproduire la figure en vraie grandeur et la coder sachant que l'angle MAN mesure 90° et que le rayon du cercle est de 4 cm.
- Construire les points M', N', A' symétriques respectifs des points M, N, A par rapport au point O.
- Expliquer pourquoi on a A'M'= 4 cm et A'N' = 4 cm.
- Quelle est la mesure de l'angle M'A'N ? Justifier la réponse (sans mesurer l'angle).
- Tracer le cercle de centre A' qui passe par les points M' et N'. Que peut-on dire de ces deux cercles ?

Enoncés des exercices des classes de troisième

En classe non ZEP

EFG est un triangle tel que EF = 5, EG = 7, FG = 9 (l'unité est le cm). On prend un point M sur le segment [EF] et on pose EM = *x*. Un point N est sur le segment [EG] et tel que les droites (MN) et (FG) sont parallèles.
1) Exprimer EN et MN en fonction de *x*.
2) Calculer *x* pour que le périmètre du trapèze MNGF soit égal à 19,8.

En classe ZEP



Le point B appartient au segment [AC], le point D au segment [AE] et les droites (BD) et (CE) sont parallèles. Les longueurs sont exprimées en centimètres.
On donne AB=*x* ; BC=4,5 ; CE=8 et BD=5
Calculer *x*.

GEORGIOS KOSYVAS

PROBLÈMES OUVERTS : NOTION, CATÉGORIES ET DIFFICULTÉS

Abstract. Open problems: concept, categories and difficulties. What is the concept of the open-ended problem? Why is it necessary to pose open problems for research in the class? Which are the essential difficulties of treatment of the open problems in the class? How could we treat them? This text supplements a series of articles of the bibliography devoted to the resolution of the open problems. It presents short data of the practice and exposes many statements of the organized open problems of categories, favourable for research with groups of co-operation in the class with the level of the high school and senior high school. It brings new elements on the subject, and recalls for memory of the already treated questions.

Résumé. Quelle est le sens du problème ouvert ? Pourquoi faut-il poser des problèmes ouverts pour la recherche dans la classe ? Quelles sont les difficultés essentielles de gestion des problèmes ouverts dans la classe ? Comment pourrions-nous les traiter ? Ce texte complète une série d'articles de la bibliographie consacrés à la résolution des problèmes ouverts. Il présente des brèves données de la pratique pédagogique et expose beaucoup d'énoncés de problèmes ouverts organisés en catégories, propices à la recherche avec des groupes de coopération dans la classe au niveau du Collège et du Lycée. Il apporte de nouveaux éléments sur le sujet et rappelle pour mémoire des questions déjà traitées.

Mots-clés. Problème ouvert, résolution de problème.

1. La notion de problème ouvert

En science des mathématiques le terme *problème ouvert* se réfère habituellement aux problèmes qui pendant une longue période restaient non résolus, comme par exemple le dernier Théorème de Fermat qui a été résolu en 1993 ou la Conjecture de Goldbach, qui reste encore sans solution[1]. En didactique de mathématiques le terme *problème ouvert* renvoie à un problème de recherche par les élèves qui ne les engage pas à une méthode spécifique de solution. Ce n'est pas un problème de routine quotidienne de la classe. C'est plutôt un problème inhabituel pour lequel l'élève ne dispose d'aucune procédure de résolution éprouvée. Avec son insertion on veut améliorer l'enseignement traditionnel des mathématiques.

L'introduction du terme "problème ouvert" est d'origine japonaise (Shimada, 1977, Becker et *al.*, 1997), il est apparu durant les années 70 et il avait pour but de réformer l'enseignement des mathématiques avec des approches ouvertes en

[1] La Conjecture de Goldbach a l'énoncé suivant : Chaque nombre naturel pair plus grand que 4, peut s'écrire comme somme de deux nombres impairs premiers. (Exemples : 6=3+3 8=5+3 10=7+3=5+5 *etc.*)

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 15, p. 45 – 73.
© 2010, IREM de STRASBOURG.

pratique de l'enseignement. (Nohda, 2000 ; Pehkonen, 1991). Chez les didacticiens de mathématiques, il n'y a pas une définition commune du problème ouvert. Durant les années 1993-96, il y avait un groupe de discussion de PME (Psychology of Mathematics Education) sur le sujet « *Using Open-ended Problems in Mathematics* ». D'après les résultats de ce groupe, les problèmes ouverts répondent aux catégories suivantes : « *investigations, Problem Posing, situations réelles vivantes, projets, problèmes sans questions, problèmes avec variété de réponses, problèmes de champs (ou problèmes de séquence)* » (Nohda, 1995 ; Silver, 1995 ; Stacey, 1995 ; Pehkonen, 1997). En psychologie cognitive, la classification des problèmes revêt une importance capitale pour les activités de la classe, parce qu'elle présente deux grands types de problèmes : problèmes bien définis et problèmes mal définis (well-structured and ill-structured). Dans les problèmes ouverts ou dans les problèmes mal structurés, les questions ou les données ne sont pas claires ou sont insuffisantes (Davidson et Sternberg, 2003 ; Xun et Land, 2004, Silver, 1995).

La notion de problème ouvert peut être expliquée de la manière suivante : un problème est fermé si la situation initiale et la situation finale sont bien définies. Un problème est considéré comme bien défini dans la mesure où les données initiales, les contraintes et le but sont énoncés de façon explicite et opérationnelle. Dans l'énoncé du problème, la personne a en sa possession, sans devoir les définir elle-même, tous les éléments et les critères concrets et précis pour évaluer la démarche et non le but (Tardif, 1997 ; Jonassen, 1997). Si la situation initiale ou la situation finale est ouverte, nous avons un problème ouvert. Le degré de précision de l'état initial et de l'état final, obtenu à la suite de la résolution des problèmes, comporte le critère du caractère ouvert. Le tableau suivant (Pehkonen, 1995a) montre les trois catégories des problèmes ouverts, qui se forment dans toutes les combinaisons.

	Situation finale fermée (problèmes bien définis)	Situation finale ouverte (problèmes mal définis)
Situation finale fermée (problèmes bien définis)	• Problèmes fermés	• Problèmes ouverts • Investigations • Problèmes de champs • Problèmes de variation
Situation finale ouverte (problèmes mal définis)	• Situations vivantes réelles • Problèmes de variation	• Situations vivantes réelles • Problèmes de variation • Projets • Problem Posing

On pourrait affirmer que les problèmes mal définis répondent aux catégories de problèmes ouverts qui sont présentés dans le tableau ci-dessus.

Dans les problèmes ouverts, la question est formulée avec clarté seulement du point de vue grammatical-rédactionnel. Contrairement au niveau sémantique, il existe une ambiguïté dans la question. Ceci ne signifie pas que le problème est vague en tant que problème. Il signifie plutôt que sa formulation implique aussi les élèves. Ceci signifie que le problème ouvert n'est pas déterminé de façon univoque : nous ne pouvons pas par exemple déterminer la tangente d'une courbe à un point de celle-ci. Il est exigé de clarifier de nombreuses choses précédemment. Il s'agit de multi-problème, un problème avec de nombreuses directions ouvertes.

Une étude pertinente du "problème ouvert" a été réalisée par un groupe de l'IREM de Lyon, qui a étudié des problèmes posés plutôt à des élèves de collège et de lycée, et vise au développement d'attitudes de recherche et de capacités de méthodologie scientifique (Arsac, et Mante 2007 ; Arsac, et *al*. 1992 ; Arsac, et *al*. 1991 ; Bouvier, 1986 ; Arsac, et *al*. 1985a ; Arsac, et *al*. 1985b). Une recherche scientifique développe des capacités de méthodologie composées, comme la formulation des hypothèses de travail, la préparation du projet expérimental ou de recherche, le choix de l'échantillon, la mise en place des outils d'évaluation, l'analyse et l'interprétation des résultats. Certaines de ces capacités apparaissent à chaque problème ouvert.

Une procédure plus exigeante du problème ouvert constitue le Problem Posing (Silver, 1994 ; Crespo, 2003 ; Cunningham, 2004). Le Problem-Posing focalise l'élève sur une procédure plus ouverte, sur la procédure de la recherche et de la création de problèmes sur la base d'une "situation-cadre". Le terme situation-cadre est un champ initial de référence où les élèves seront encouragés à exercer leur imagination, à poser des questions et à soulever des problèmes qui ont des solutions mathématiques. Dans le Problem-Posing, les enfants suivent leurs propres motivations (Brown et Walter, 1983). Dans la perspective de l'enseignement, les activités du Problem-Posing révèlent beaucoup de sujets essentiels concernant la compréhension, les capacités et les attitudes des enfants et deviennent un bon outil d'évaluation (English, 1997).

Il y a eu des expérimentations de problèmes ouverts dans des classe en Australie (Stacey, 1995), au Japon (Nohda, 1995), en Angleterre (Blanc & Sutherland 1996 ; Wiliam, 1994), en Finlande (Pehkonen, 1995b) et aux pays Bas sous le nom « Realistic Mathematics» (Treffers, 1991 ; Bichop et *al*., 1996). D'autres recherches pédagogiques réalisées étudient la nature et l'application des problèmes ouverts à l'éducation mathématique (Silver, 1995). Des activités de problème ouvert ont été proposées en France dans les programmes officiels d'éducation préscolaire (ERMEL, 1990) et d'enseignement primaire (ERMEL de 1991 à 1999) et nommés : problèmes de recherche ou problèmes pour chercher (Artigue et Houdement, 2007 ; Coppé et Houdement, 2002 ; Houdement, 1998).

Les problèmes mal structurés sont plus fréquents dans la pratique sociale et professionnelle et les problèmes bien structurés sont dominants en environnement scolaire (Xun et Land, 2004 ; Jonassen, 2003). Les types de problèmes qui sont utilisés dans les classes sont couramment des problèmes d'application classiques permettant le réinvestissement de connaissances et d'outils mathématiques. Des problèmes inhabituels qui incluent tant de difficultés de compréhension, lesquels sont liées à leur caractère spécial, à leurs difficultés de gestion par la classe, sont absents.

C'est pourquoi, les problèmes ouverts restent une activité marginale dans les pratiques de classe les plus courantes et les instituteurs habituellement les évitent. Cependant, il vaudrait la peine de développer l'intérêt pour ces problèmes. Mais quelle est la nature des problèmes ouverts ? Nous commençons avec certains exemples.

2. Exemples de problèmes ouverts classés en catégories

Il est évident que tous les problèmes ouverts ne sont pas pertinents d'un point de vue pédagogique. Nous pouvons distinguer entre autres quatre catégories de problèmes ouverts :

2.1. Variété de stratégies de résolution (ou une stratégie originale)

Les stratégies sont les démarches d'approche des problèmes ouverts que les enfants inventent. La stratégie est une composition qui est constituée par un raisonnement mathématique, ou logique, ou une série d'arguments liés, lesquels sont composés pour justifier une proposition (une constatation, une hypothèse, une conjecture, une affirmation, *etc*.). La synthèse de la stratégie est obtenue avec un lien indissoluble, puissant et solide des propositions. Chacune devra avoir été liée aux précédentes et aux suivantes. Nous mentionnons les exemples suivants, qui peuvent avoir une richesse de stratégie ou une stratégie originale :

Premier exemple (problème traditionnel) **:** *Quelqu'un a une bouteille de 8 litres d'eau et veut donner à son ami 4 litres de cette quantité. Pour la mesurer, il dispose seulement de deux récipients vides : un de 5 litres et un de 3 litres. Quelles sont les actions à faire pour verser les 4 litres d'eau dans le récipient de 5 litres.*

Des problèmes comme le précédent sont habituels dans les manuels traditionnels d'énigmes. Cependant, il appartient à un secteur mathématique moderne qui se nomme "mathématiques discrètes". Des tels problèmes diffèrent de la routine scolaire et habituellement provoquent l'intérêt des élèves pour les découvertes mathématiques et la prise de décisions avec emploi de raisonnement et de stratégies pour l'élaboration d'inventaire des cas. Dans le tableau suivant on présente deux solutions du problème.

	1ère Solution			2ème Solution		
Ordre	A (8)	B (5)	C (3)	A (8)	B (5)	C (3)
1.	8	0	0	8	0	0
2.	3	5	0	5	0	3
3.	3	2	3	5	3	0
4.	6	2	0	2	3	3
5.	6	0	2	2	5	1
6.	1	5	2	7	0	1
7.	1	4	3	7	1	0
8.	-	-	-	4	1	3
9.	-	-	-	4	4	0

Lorsque nous avons donné ce problème à des élèves de douze ans la plupart l'ont accueilli avec des sentiments de plaisir et de curiosité. Les essais initiaux échouaient habituellement parce qu'ils ne satisfaisaient pas les conditions du problème. De nombreux élèves imaginaient 3-4 transvasements de récipient à récipient ; cependant, ils ne pouvaient pas continuer et ils revenaient au début. Certains ne mettaient pas en valeur leur expérience des efforts antérieurs et manifestaient de la déception ou de la perplexité. D'autres avaient une meilleure organisation et, en enregistrant leurs pas successifs sur papier, surmontaient les impasses. Ainsi, avec inventaire systématique, après des essais successifs persistants, ils ont trouvé la solution, souvent avec plus de pas que ceux qui sont présentés dans le tableau ci-dessus.

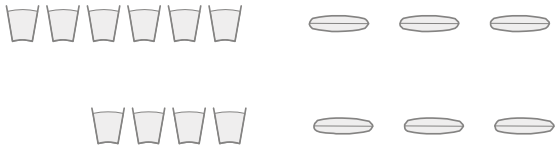
Le problème ne fait intervenir que la connaissance de l'addition. Cependant, ce n'est pas un problème d'application des opérations arithmétiques élémentaires, mais il exigeait une démarche scientifique qu'il fallait retenir avec une validation précise et organisée. Incontestablement, le problème était fécond et il appelait continuellement les élèves à contrôler les nouvelles conjectures, à argumenter et à modifier une partie de leurs stratégies.

Second exemple (**Les arabes,** problème traditionnel) **:** *Deux arabes A et B qui voyageaient dans le désert, avaient avec eux l'un 2 pains et l'autre 3. Durant la route ils ont rencontré un voyageur riche C, qui avait faim. Après ils ont mangé tous ensemble et le voyageur leur a laissé 15 livres. Comment faudrait-il faire le partage de l'argent ?*

La solution exige des opérations arithmétiques avec nombres entiers ou fractions et la notion de la proportionnalité. Le choix de stratégie dépend de facteurs liés au type du problème et aux relations qui dépendent des données numériques. Bien qu'au début, le problème semble être un problème de routine, l'énoncé le rend très attractif.

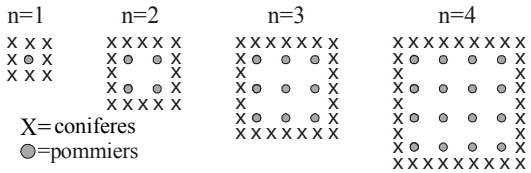
Troisième exemple : *Pour 6 jus d'orange et 3 sandwichs nous avons payé 21 €, mais le groupe voisin a payé pour 4 jus d'orange et 3 sandwichs 17 €. Combien coûte le sandwich et combien le jus d'orange ?*

C'est un bon problème de recherche pour la sixième. Les enfants peuvent faire des hypothèses sur le prix du jus d'orange et du sandwich, tester ces hypothèses sous la contrainte de l'énoncé. L'engeignant y reconnaît le problème relevant d'un système d'équations à deux inconnues. Les enfants du cycle 2 pourraient faire un dessin comme le suivant :



Le dessin précédent peut aider les enfants à trouver la solution.

Quatrième exemple : (Concours international *PISA* 2000) : *Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de protéger ces arbres contre le vent, il plante des conifères tout autour du verger. Compléter un tableau donnant le nombre de pommiers et le nombre de conifères. Puis généraliser le problème donnant le nombre de* pommiers *et le nombre de conifères pour n séries de pommiers.*



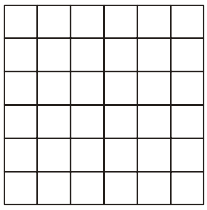
n	Nombre de pommiers	Nombre de conifères
1	**1**	**8**
2	**4**	
3		
4		
5		

Une manière de généraliser ce problème exige l'introduction de la variable. Les élèves peuvent constater que les pommiers forment des carrés dont le nombre d'arbres de chaque côté augmente : 1, 2, 3, … À la nième figure, le nombre de pommiers du côté du carré serait n. Donc, la nième figure a : n×n pommiers. Une manière de réfléchir sur le nombre des conifères est de reconnaitre que le nombre des conifères de chaque côté est toujours 1 de plus du double, c'est-à-dire 2n+1. Le nombre des conifères pourrait être 4 fois 2n+1, moins les conifères comptés deux fois, c'est-à-dire les conifères des quatre angles. Par conséquent, on a : 4(2n+1)-4, ou 8n conifères.

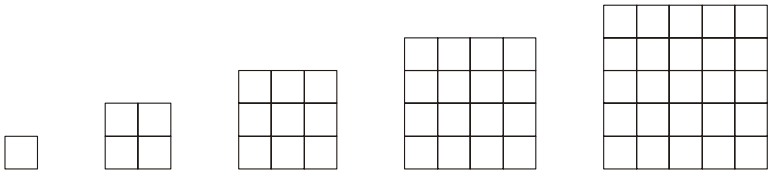
2.2. Résultats multiples

Les problèmes ouverts, qui conduisent à plusieurs solutions ou nombre de résultats corrects, constituent une deuxième catégorie.

Premier exemple : *Combien de carrés différents existent dans le dessin suivant ?*



Deux carrés sont considérés comme différents s'ils ont une taille différente ou une place différente. On peut examiner un cas plus simple, c'est-à-dire un carré avec un côté de 1, 2, 3, 4, 5 unités.



(a) (b) (c) (d) (e)

- au dessin (b) il est évident qu'il y a : 1 carré avec un côté de 2 unités et 4 carrés avec un côté d'une unité ($1+4=5$ ou $1^2+2^2=5$),
- au (c) il y a : 1 carré avec un côté de 3 unités, 4 carrés avec un côté de 2 unités et 9 carrés avec un côté d'une unité. ($1+4+9=14$ ou $1^2+2^2+3^2=14$),
- au (d) il y a : 1 carré avec 4 unités, 4 carrés avec un côté de 3 unités, 9 carrés avec un côté de 2 unités et 16 carrés d'une unité. ($1+4+9+16=30$ ou $1^2+2^2+3^2+4^2=30$),
- enfin au (e) il y a : 1 carré avec un côté de 5 unités, 4 carrés avec un côté de 4 unités, 9 carrés avec un côté de 3 unités, 16 carrés avec un côté de 2 et 25 carrés d'une unité. ($1+4+9+16+25=55$ ou $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$).

Les éléments précédents sont résumés dans le tableau suivant :

Taille des carrés	Nombre des carrés 5×5	Nombre des carrés 4×4	Nombre des carrés 3×3	Nombre des carrés 2×2	Nombre des carrés 1×1	Somme
k=1 (1×1)					$1=1^2$	$1^2=1$
k=2 (2×2)				$1=1^2$	$4=2^2$	$1^2+2^2=5$

k=3 (3×3)			$1=1^2$	$4=2^2$	$9=3^2$	$1^2+2^2+3^2=14$
k=4 (4×4)		$1=1^2$	$4=2^2$	$9=3^2$	$16=4^2$	$1^2+2^2+3^2+4^2=30$
k=5 (5×5)	$1=1^2$	$4=2^2$	$9=3^2$	$16=4^2$	$25=5^2$	$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$

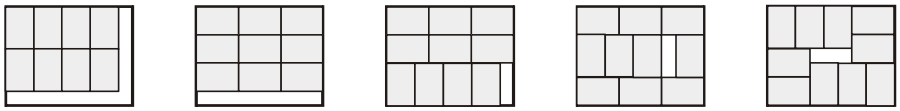
Nous observons que l'ensemble des carrés est égal à la somme du nombre des carrés -de 1'unité jusqu'au chiffre qui désigne le nombre des carrés formant le côté du dessin initial. De ce tableau ressort avec évidence la règle qui peut être utilisé pour le dénombrement de la multitude des carrés différents lorsque le côté du dessin a une longueur de 6 unités. Nous avons : $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2=91$.

Second exemple (Nodha, 1995) **:** *Melina fête son anniversaire et veut fabriquer des invitations en papier qu'elle distribuera à ses invités. Chaque carte est un rectangle de 15 cm de longueur et 10 cm de largeur. Nous supposons qu'elle dispose d'un grand carton rectangulaire de dimensions : 45 cm de longueur sur 35 cm de largeur. Combien d'invitations pourra-t-elle fabriquer avec ce carton ? Pouvez-vous les dessiner sur une diapositive ? Attention ! Il est interdit d'unir deux morceaux pour fabriquer une invitation.*

De la division des surfaces, il résulte une seule solution numérique (10 invitations). Cependant, selon la coupe du carton, cela nous donnera 8, 9 ou 10 cartes d'invitations.

Au cours d'une expérimentation dans la classe avec des élèves de 12 ans, cinq groupes ont donné les solutions suivantes :

8 cartes 9 cartes 10 cartes 10 cartes 10 cartes



Il est évident que les solutions ci-dessus n'épuisent pas le problème puisqu'il admet aussi d'autres solutions. La solution optimale est cette de 10 cartes. Des problèmes avec variété de réponses correctes confirment le caractère fécond du problème ouvert.

Troisième exemple : *Un cube avec une arête de 10 cm est peint en rouge. Il est ensuite découpé en 1000 petites cubes d'une arête de 1 cm. Pouvez-vous prévoir combien de petits cubes sont colorés en rouges sur 6 faces, combien sur 5, 4, 3, 2, 1 ou aucune ?*

Les élèves doivent concevoir le cube dans leur esprit et ils peuvent alors trouver:

1. 4, 5 et 6 faces rouges : il y a 0 petits cubes.
2. 3 faces rouges : ils peuvent compter 8 petits cubes.

3. 2 faces rouges : ils peuvent calculer 8×4+8×4+8×4=96 petits cubes.
4. 1 face rouge : ils peuvent calculer : (8×8)×6= 384 petits cubes.
5. Aucune face rouge : ils peuvent calculer : (8×8)×8= 512 petits cubes, ou 1000-(8+96+384)=512.

Cette catégorie d'énoncé peut admettre un résultat ou certains résultats ou tous les résultats différents.

2.3. Interprétation ouverte de l'énoncé

Une troisième catégorie de problèmes ouverts comprend des problèmes dont l'énoncé est soumis à une interprétation ouverte. Habituellement il n'y a pas de données arithmétiques.

Un tel problème, que Schoenfeld (1992) a posé, est le suivant : *Combien de cellules existent en moyenne dans le corps d'un homme adulte ?*

Ouverte en ce qui concerne l'interprétation de la situation qu'il décrit : *Comment peux-tu plus efficacement remplir une boîte d'objets de la même forme* ? Ici les élèves vont trouver des solutions différentes selon l'interprétation de la situation. Quelle forme donneront-ils au terme « boîte » ? Au terme « remplir», comprendront-ils qu'il ne faut laisser aucun vide dans la boîte ? Le terme « efficacement » signifie-t-il qu'ils doivent utiliser le plus petit nombre d'objets ou qu'il doit rester le moins d'espace vide possible dans la boîte ?

On donne encore certains exemples avec une interprétation ouverte de l'énoncé :

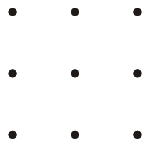
- *À la fin de l'année scolaire votre classe a décidé d'organiser un beach-party. Pouvez-vous prévoir combien cela va coûter ?*
- *Combien coûte-t-il d'avoir un chien à la maison ?*
- *Quelles dépenses aurai-je pour conserver un vélo ?*
- *150 litres d'eau sont-ils suffisants pour les besoins d'un jour d'une famille moderne ?*
- *Une barque commence à traverser une rivière. À quel point de la rive opposée va-t-elle arriver ?* (Lycée)

Dans les problèmes précédents, les questions et les données ne sont pas claires. Les enfants peuvent trouver ou déterminer leurs propres données. Bien évidemment, il y a beaucoup de possibilités. Chaque fois la solution change et dépend du choix des données. Ces problèmes pourraient s'intégrer à la catégorie du Problem-Posing. Cela constitue un sujet particulier sur lequel il n'est pas nécessaire de s'étendre.

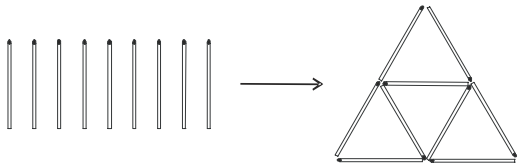
2.4. Des problèmes ouverts-énigmes

Enfin, nous mentionnerons aussi une quatrième catégorie de problèmes ouverts, lesquels sont les problèmes-puzzles ouverts qui exigent une dissociation de la première perception et du changement d'angle optique. Dans cette catégorie de problèmes, l'état actuel et l'état désiré peuvent être clairement définis ou non. Nous donnons sept exemples.

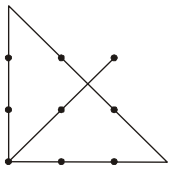
Exemple 1 : *Relier les 9 points par 4 traits ininterrompus sans lever le crayon.* (CM 1)

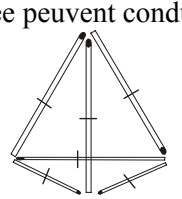


Exemple 2 : *Avec 9 allumettes, on a construit 4 triangles équilatéraux. Peux-tu avec 6 allumettes, construire 4 triangles équilatéraux ?* (CM 2)



Le premier problème exposé est un problème de tracement des lignes. Mais ce n'est pas un problème de géométrie classique ; il ne se résout pas avec des procédures formelles de résolution, exige de sortir de la structure du carré et d'élargir le champ de vision dans le plan. Cet élargissement renvoie au dépassement de la pensée convergente ou de la pensée verticale (Silver, 1987). La première impression est liée à un obstacle, à une interprétation erronée de l'énoncé ou du dessin ou à une restriction inhabituelle que les enfants sont obligés de respecter. Ici, la solution exige la sortie des enfants du cadre du carré que forment les 9 points. Si les enfants se dégagent radicalement de la première perception et montrent de la flexibilité en inventant des changements inhabituels, alors les visions momentanées de l'intuition et de la pensée peuvent conduire à leur succès.





Le deuxième problème exposé est un problème de disposition. La solution exige une réorganisation des éléments présentés. Cependant, alors que l'état actuel du problème est clairement défini et qu'on connaît bien les éléments de départ, la solution finale est inconnue. De plus, cette solution particulière est difficile à prévoir puisqu'elle surgit généralement de façon soudaine. Les problèmes de ce type font donc appel au phénomène découvert, il y a de nombreuses années, grâce à la psychologie gestaltiste et que l'on nomme "insight". En fait, elle vient d'avoir

une appréhension instantanée des relations unissant les divers éléments composants son problème (Duncker, 1945).

On demande dans ce type de problème de disposer six allumettes de façon à former quatre triangles équilatéraux. De plus, chacun des côtés des triangles doit avoir une longueur correspondant à une seule allumette. La plupart des personnes qui doivent faire face à cette situation éprouvent beaucoup de difficultés parce qu'elles se limitent à une seule façon de percevoir le problème. Dans ce cas, le fait de concevoir la solution en seulement deux dimensions, plutôt qu'en trois, empêche la résolution du problème. En effet, la solution paraît évidente lorsque l'on peut considérer le même problème sous une forme tridimensionnelle. Les personnes adoptent ainsi souvent des contraintes non nécessaires qui les éloignent des solutions.

Habituellement les énigmes sont des problèmes exigeants qui privilégient la curiosité, l'humour, la stimulation de l'intelligence, la réflexion, le plaisir de la recherche, la motivation des élèves à développer le goût et l'esprit des mathématiques et contribuent à donner à cette discipline une meilleure image sociale et culturelle. Pour pouvoir trouver la réponse du problème ouvert-énigme, les élèves doivent construire une représentation adéquate de l'énoncé avant de la symboliser mathématiquement. La résolution de tout problème ne nécessite pas nécessairement de faire des calculs. Dans certains cas, la stratégie du problème peut correspondre à mesurer des dimensions, à faire des arrangements, à tracer des lignes, à dessiner une « carte routière », à organiser un inventaire, à réaliser une disposition, un classement, un tri, *etc*.

3. Une nouvelle tentative de détermination du problème ouvert

Selon le groupe de l'IREM de Lyon, le problème ouvert, proposé et examiné par les élèves, présente les caractéristiques suivantes :

- *L'énoncé est court.*
- *L'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires ni de questions "montrer que"). En aucun cas, cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou à l'application immédiate des derniers résultats présentés en cours.*
- *Le problème ouvert se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi, peuvent-ils prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples. (Arsac et al, 1991, p. 7)*

De manière plus analytique, l'adoption des caractéristiques ci-dessus, que le groupe de recherche de l'IREM de Lyon considère comme nécessaires à chaque problème ouvert, est justifiée comme suit :

L'énoncé du problème est habituellement court et formulé en langage courant ou mathématique. L'énoncé simple et court favorise la lecture rapide et la compréhension et crée des conditions de facilité en ce qui concerne ce qui se maintiendra en mémoire et en ce qui concerne la gestion des données. En outre, il peut donner l'impression que le problème est facile et inciter à s'intéresser à ce problème.

En aucun cas, cette solution ne devra se limiter à l'utilisation simple ou à l'application directe de conclusions ou de règles qui se sont présentées durant les derniers cours, parce qu'alors, il constituera un problème d'application directe et non un problème ouvert. Cependant, ce qui a une importance fondamentale est la manière dont est posé l'énoncé du problème ouvert qui ne résulte pas directement de la méthode et de la solution.

Le problème ouvert doit être fondé sur des notions avec lesquelles les enfants sont assez familiarisés. Ceci est indispensable afin que les enfants, dans le cadre des restrictions habituelles de l'horaire scolaire, puissent calculer des résultats ou produire des idées dans le temps imparti. Le problème peut être ouvert mais cependant, le temps de la recherche reste malheureusement fermé. Dans ces conditions, les enfants doivent pouvoir saisir facilement la situation et prendre part à des essais, formuler des conjectures, établir des voies de vérification, des projets de résolution et des contre-exemples, lesquels visent à la découverte et à la création de la solution ou des solutions du problème ouvert.

On observe que la première et la troisième des caractéristiques ci-dessus du problème ouvert limitent le cadre dans lequel peut se mettre en marche la réflexion des élèves. Il n'est pas certain que seule la formulation laconique facilite la compréhension. L'énoncé du problème ouvert peut se présenter sous la forme d'une longue narration ou encore sous la forme d'un dialogue attractif. En plus, une notion non déjà enseignée constitue toujours un problème ouvert pour les enfants. Par conséquent, les caractéristiques proposées par le groupe de recherche du Lyon, la brièveté de l'énoncé et l'exigence d'assimilation par les enfants des notions sur lesquelles est fondé le problème ouvert, bien qu'elles contribuent favorablement à la gestion pédagogique de la classe, ne sont pas indispensables à chaque problème ouvert. Tout problème ouvert n'est pas forcément approprié à la recherche dans la classe (Lepine, 1996). Présentons un exemple, qui s'avère un défi pour les élèves. C'est un petit problème facile et classique, qu'on trouve dans de nombreux livres de mathématiques du collège, l'intrigue variant selon les adaptations.

LE PROBLEME DES CHEVEUX BLONDS :

Après de longues années, se rencontrent deux anciens camarades de classe qui avaient un intérêt particulier pour les mathématiques et le dialogue suivant a lieu :

PYTHAGORE : As-tu été marié ? As-tu des enfants ? Combien ? De quel âge ?

HYPATIE : Oui. Trois et le produit de leurs âges est 36. (Bien sûr, il s'agit de nombres entiers d'années.)

PYTHAGORE : (Après réflexion). *Je ne peux pas trouver leurs âges. Les données sont insuffisantes.*

HYPATIE : Très juste. Et si je te dis que la somme des trois nombres est égale au numéro de ta maison ?

PYTHAGORE : (Après y avoir pensé un peu). *Ni même maintenant peuvent être déterminés les trois âges.*

HYPATIE : Bravo ! Donc, je t'informe que le plus grand enfant a des cheveux blonds !

PYTHAGORE : Maintenant, bien sûr ! Je peux te dire les âges de tes enfants sans aucune hésitation. Et les dit.

Il y a habituellement deux questions chez les enfants qui ont l'habitude de répondre sans trop penser : « *Quelle est la relation entre les cheveux blonds et les âges des enfants ?* » et « *quel est le numéro de la maison de Pythagore ?*». Leur erreur est qu'ils se sont empressés de répondre, sans analyse attentive des données et leur mise en valeur. Donc ils échouent dès la première étape qui est la lecture du problème.

Puisque les réponses de Pythagore et les observations d'Hypatie sont justes et sont données avec attention ce qui est exigé est le repérage des informations « dissimulées » et leur exploitation. Il est nécessaire de suivre le dialogue pas à pas et de se concentrer sur la question : « *Quelles raisonnements a fait Pythagore et comment a-t-il abouti à la réponse considérée* ». Concrètement, lorsqu'on lui a donné le produit des trois âges, il a répondu qu'il ne pouvait pas trouver leurs âges, parce qu'il existe plus d'un triplet de nombres entiers ayant pour produit 36. Il suffit de trouver comment se décompose le chiffre 36 en produits de trois nombres. Comme c'est un petit nombre, les élèves n'ont pas de mal à écrire touts les triplets :

$$1\cdot1\cdot36,\ 1\cdot2\cdot18,\ 1\cdot3\cdot12,\ 1\cdot4\cdot9,\ 1\cdot6\cdot6,\ 2\cdot2\cdot9,\ 2\cdot3\cdot6 \text{ et } 3\cdot3\cdot4.$$

Pythagore n'a plus qu'à choisir celle de ces combinaisons qui est la bonne, c'est-à-dire telle que la somme des facteurs égale le numéro de sa maison, puisqu'il connaissait évidemment son propre numéro de maison. Mais justement à la deuxième information, Pythagore a déclaré à nouveau son impuissance. Comment cette information peut-elle être mise en valeur ? Comment peut-elle être liée à la précédente ? Les élèves peuvent trouver respectivement toutes les sommes :

1+1+36=**38**, 1+2+18=**21**, 1+3+12=**16**, 1+4+9=**14**, 1+6+6=**13**, 2+2+9=**13**, 2+3+6=**11** et 3+3+4=**10**.

On constate que deux de ces sommes sont précisément égales à 36 et que de là provient la raison de l'incertitude de Pythagore. C'est seulement si la somme des âges est 13 qu'il ne peut pas décider, parce qu'existent deux possibilités, qui toutes les deux impliquent des jumeaux : 1, 6, 6 ou 2, 2, 9. Cependant, dans la dernière phrase d'Hypatie, en dehors de la couleur des cheveux est mentionné aussi un autre élément. C'est qu'il existe « *un plus grand enfant*». Ainsi, *un* aîné existe dans la combinaison 2, 2, 9 (qui a des cheveux blonds) et c'est donc la seconde solution recherchée qui est la bonne.

Il est évident que l'énoncé de dialogues incite à la recherche. Si on demande une décomposition en facteurs premiers de 36, ou la liste de ses diviseurs ou celle de tous les produits de trois nombres qui égalent 36, c'est évidemment plus austère que la saynète jouée par Hypatie et Pythagore.

Bien que l'exigence pour une définition acceptable du problème ouvert constitue un autre problème ouvert pour les mathématiciens et les pédagogues, nous pourrions dire que ce qui rend un problème ouvert ou fermé est son type, la manière dont l'énoncé est posé et la relation de la situation qui décrit les expériences des enfants. Plus spécialement, le problème doit être fécond pour la recherche dans la classe, et avoir un caractère vécu. Nous abordons ces sujets de façon détaillée.

3.1. La fécondité de la recherche

Il y a de purs énoncés mathématiques, sans "emballage" attractif, qui peuvent sembler très secs, mais constituent d'efficaces moteurs de recherche. On donne les exemples suivants qui s'adressent-sauf le premier - plutôt aux dernières classes du collège et au Lycée :

Méthode de l'organisation d'un inventaire (Le maraîcher et les quatre poids, problème traditionnel) **:** *Un maraîcher a dans son magasin une balance et 4 poids avec lesquels il peut peser des objets de n'importe quelle masse entière de 1 jusqu'à 40 kilos. Quels sont les poids dont il dispose et comment pourra-il peser ses produits ? Répétez le problème pour 5 poids et pour des masses de 1 jusqu'à 121 kilos.*

Preuve : On peut examiner systématiquement toutes les possibilités et vérifier la démarche totale :

- Avec des poids d'1 kilo on peut peser des masses d'un kilo.

– Avec des poids d'1 kilo et 3 kilos on peut peser toutes les masses d'un kilo jusqu'à 4 kilos :

$$2=3-1 \text{ και } 4=3+1.$$

– Avec des poids d'1 kilo, 3 et 9 kilos on peut peser toutes les masses d'un kilo jusqu'à 13 kilos :

$$5=9-3-1,\ 6=9-3,\ 7=9+1-3,\ 8=9-1,\ 10=9+1,\ 11=9+3-1,\ 12=9+3, 13=9+3+1.$$

– Avec des poids d'1 kilo, 3, 9 et 27 kilos on peut peser toutes les masses d'un kilo jusqu'à 40 kilos :

$$14=27-9-3-1,\ 15=27-9-3,\ 16=27+1-9-3, \textit{etc}.$$

Pour le second problème il faut ajouter un poids de 81 kilos.

Méthode du contre-exemple : *Dans l'expression* n^2+n+41, *si on remplace le n par n'importe quel nombre naturel trouvons-nous toujours un nombre premier naturel ?*

Preuve : Pour n=0, 1, 2,…, 40 nous trouvons des nombres premiers, tandis que pour n=41 il résulte un nombre composé (41·43). Bien qu'il existe 41 essais réussis, il suffit d'un seul contre-exemple pour démentir la conjecture.

Méthode de la réduction à l'absurde : *Les 15 élèves d'une classe ont au total dans leurs sacs 115 cahiers. Si chaque élève a au moins un cahier, prouvez que deux au moins des élèves ont le même nombre de cahiers.*

Preuve : En supposant que tous les élèves ont un nombre différent de cahiers, alors le nombre minimum de cahiers qu'ils peuvent avoir tous ensemble est

$$1+2+3+\ldots+15=120>115.$$

Par conséquent, il n'est pas possible que tous les élèves aient un nombre différent de cahiers, donc deux au moins auront le même nombre de cahiers.

Méthode de cas : *Prouvez que le produit de trois entiers successifs est divible par 6.*

Preuve : Puisque n=6q+r, où $r\in\{0,1,2,3,4,5\}$ on a :

$$n^3-n=(6q+r)^3-(6q+r)=r^3-r+\text{mult}6.$$

Pour r=0,1,2,3,4,5 on trouve respectivement $\upsilon^3-\upsilon$=0, 0, 6, 24, 60, 120. Par conséquent :

$$n^3-n=r^3-r+\text{mult}6=\text{mult}6.$$

Combinaison des méthodes (démonstration directe, examen des cas) : *Est-ce qu'il y a un nombre positif entier k tel que* k^2-4 *soit premier ?*

Preuve : Pour ce problème il n y a pas un algorithme prêt pour la solution. Mais on a :

$$k^2-4=(k+2)(k-2) \text{ (factorisation de différence des carrés).}$$

Pour que le produit précédent soit un nombre premier, il faudra qu'un des facteurs soit l'unité (définition du nombre premier). Le nombre k+2 ne peut pas être égal à 1 car k>0.

Donc k-2=1, c'est- à -dire k=3.

Combinaison des méthodes (examen des cas, démonstration directe) : *Si p est un nombre premier, examiner si le nombre A=27p+1 est premier ou non ?*

Preuve : Pour p=2 on a : $A=27\cdot 2+1=55=5\cdot 11$.

Pour $p\neq 2$ le 27p est impair, alors A est pair. Plus précisément :

$$A=27p+1=27(2n+1)+1=54n+27+1=54n+28=2(27n+14)=2k \text{ (pair).}$$

Un problème ouvert doit être fécond du point de vue de la recherche, ou plus exactement l'être plus qu'un problème fermé analogue. Il y a la conviction qu'un problème ouvert a de nombreuses solutions.

La fertilité du problème n'est pas épuisée du fait que le problème admet de nombreuses solutions. C'est l'originalité des arguments qui le rend fécond ou fructueux. L'important, ce n'est pas la découverte d'Ithaque par Ulysse, qui représente la solution ou les solutions du problème, mais surtout le voyage admirable des élèves vers Ithaque, les trajets d'apprentissage et la recherche mathématique féconde avant le dénouement. S'il existe une fin, elle fermera la recherche tandis que toute la recherche reste ouverte.

Puisque le problème ouvert est nouveau pour les élèves, et sa construction elle-même, il n'exige pas une combinaison linéaire habituelle de ses connaissances antérieures et il révèle des « originalités et diversités » : le problème ouvert peut donner des solutions à des niveaux différents et couvrir un large éventail d'idées, de raisonnements empiriques simples en tant que raisonnements déductifs composés qui n'exigent pas certaines connaissances spéciales. Il peut révéler une diversité tant d'arguments de démonstration que d'arguments pragmatiques, qui dépassent le domaine scientifique des mathématiques. Il peut encore conduire à des interprétations différentes de l'énoncé, conduire à une variété de résultats et de réponses, admettre plusieurs approches de solutions (voies ou stratégies de résolution) ou exiger des changements radicaux d'interprétation.

Si certains des éléments ci-dessus sont présents, alors le problème est ouvert. Si toutes ces caractéristiques manquent, il n'est pas ouvert. Dans ce cas, si les élèves ne dépassent pas le problème, il est probable qu'ils l'interprèteront de façon très semblable, qu'ils feront les combinaisons habituelles des données, qu'ils suivront

la même stratégie stable et pour trouver le même résultat, en manifestant de l'uniformité et de la pratique. Si le type de problème est pauvre en ce qui concerne la production « de diversités » et oblige les élèves à faire presque les mêmes choses, il limite l'articulation d'arguments convaincants puissants et il diminue la qualité du questionnement et du dialogue. Donc si le problème n'inclut pas l'élément de la fertilité de recherche, il ne peut pas être un problème ouvert (Charnay, 1993).

Le fait que le problème soit ouvert, en ce qui concerne les questions posées ou en ce qui concerne les données, peut être fécond, non seulement du point de vue mathématique. Le caractère fécond n'est pas réduit au champ des mathématiques, mais il constitue de l'oxygène pour d'autres efforts d'acquisition des connaissances en liant les mathématiques au monde.

3.2. L'énoncé ouvert

L'énoncé du problème ouvert est une « problématisation » avec une question générale, c'est-à-dire qu'il ne limite pas le champ des recherches. L'énoncé ouvert ne "trahit" pas directement la solution ni l'outil mathématique qui sera recherché, utilisé, constitué mais sera à construire. Les hypothèses sont données, mais les élèves ignorent leur validité. On donne certains exemples :

Est-ce qu'il existe un triangle équilatéral et rectangulaire ?

Est-ce qu'il existe un triangle avec des côtés de 3 cm, 4 cm et 8 cm ?

Est-il possible que des angles soient opposées et complémentaires ?

La somme de deux impairs est paire ? Pourquoi ?

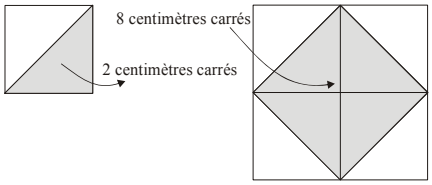
Aux problèmes précédents, les élèves doivent formuler des conjectures, trouver une réponse et la justifier.

La formulation d'un problème peut se concrétiser avec l'énoncé ouvert ou fermé. Nous mentionnons le problème classique de la duplication du carré en deux énoncés, un ouvert et un fermé :

Énoncé ouvert : *On a un carré avec un côté de 2 centimètres et nous voulons en construire un autre avec une surface double. Peux-tu trouver une méthode de construction ?*

Énoncé fermé : *On a un carré avec un côté de 2 centimètres et nous voulons en construire un autre avec une surface double. Peux-tu constater (ou prouver) que la solution est trouvée si nous prenons comme côté du deuxième carré demandé la diagonale du premier* ?

Le carré et sa diagonale Le schéma du *Menon*



Il est évident que l'énoncé fermé va conduire l'élève à la résolution du problème. Bien qu'il soit ouvert, l'énoncé peut varier et conduire jusqu'à la suppression des données.

Une activité créative qui a un intérêt pour le chercheur en didactique des mathématiques est la transformation de problèmes fermés en problèmes ouverts. Une telle activité, bien qu'elle soit un exercice assez difficile, serait peut-être possible dans des situations appropriées et à condition qu'elle soit engagée par le groupe d'enseignement de la classe scolaire (Banks, 1988).

3.3. Le caractère vécu

L'énoncé ouvert et le caractère fécond sont deux caractéristiques qui concernent l'objet, c'est-à-dire le problème ouvert ; cependant, le sujet vivra le problème proposé en tant qu'ouvert : ceci dépend principalement du mode de conduite de la classe par l'instituteur et l'instauration d'un climat propice au dialogue. Néanmoins, une condition importante est de qu'il ne faudra pas que soit ignoré le caractère vécu du problème ouvert.

Ce n'est pas seulement le type de problème et le mode de formulation de l'énoncé qui rendent un problème ouvert. Il faudra en outre qu'il s'avère ouvert pour le sujet. Il faudra qu'il soit relié avec les caractéristiques individuelles et sociales des enfants et principalement avec leurs expériences personnelles et la motivation scolaire, c'est-à-dire l'engagement, la participation et la persistance de l'élève dans une tâche (Tardif, 1997). **Le problème ouvert doit être vécu comme un défi**. Les enfants ne font pas une recherche mathématique formelle. Un problème qui peut être ouvert pour le mathématicien, ne peut pas toujours être propice pour une recherche dans la classe. Un problème peut être favorisé par des conditions de la classe si y sont associées des situations familières des enfants ou des éléments de leur environnement social, lesquels rendent la procédure d'apprentissage vécue et communicative. Donnons un exemple :

Le problème ouvert des poignées de main : *Les 7 filles de la classe lorsqu' elles se sont rencontrées après les vacances d'été, se sont toutes donné une poignée de main (l'une à l'autre). Si chaque fille a serré la main à chacune des autres une fois seulement, pourriez-vous calculer combien de poignées de main y a-t-il eu au*

total ? Répétez le problème pour les 16 enfants d'une classe et pour les 1.000 enfants d'une école.

On peut facilement constater que ce problème est un excellent problème, riche, vécu et très intéressant pour les enfants. Il développe la communication et le goût de la recherche. Les enfants peuvent l'aborder avec des stratégies diverses dans plusieurs cadres (numérique, symbolique, algébrique, graphique, géométrique, dramatique, …). Ce problème est ouvert en ce qui concerne la richesse des stratégies de résolution et s'avère fécond. Les enfants mettent en valeur des stratégies différentes et originales, ce qui nous surprend. Il est remarquable que leurs stratégies habituellement soient si spontanées : les enfants ne se limitent pas seulement à l'usage d'algorithmes tout prêts, mais de leur propre initiative, ils ouvrent des chemins cognitifs particuliers et ils découvrent de nouvelles connaissances.

Si le problème ouvert proposé est séparé du vécu des enfants, il ferme les horizons de la recherche. Il peut être ouvert pour le chercheur en mathématiques, mais les portes de la communication avec l'élève seront fermées. Le caractère vécu de la situation contribue à maintenir la situation problématique ouverte et féconde du point de vue pédagogique. Cependant, il est aussi relié directement au cadre de chaque problème, ouvert ou fermé. Le cadre du problème doit correspondre aux motivations et au vécu de l'élève et répondre à ses doutes et à ses interrogations. Les problèmes ouverts devront être vivants, permettre aux enfants de participer activement, mobiliser leurs curiosité, susciter l'enthousiasme et générer des motivations intrinsèques, des incitations intérieures. De plus, il faudra que nous inventions et que nous préparions des situations problématiques ouvertes, qui ont une importance pour l'expérience quotidienne des enfants, qui provoquent un vif intérêt chez eux, enrichissent leurs expériences, réveillent la curiosité et le désir d'apprentissage des enfants et qui peuvent également entraîner les élèves les plus faibles à les résoudre de manière simple, en développant chez eux le plaisir de la découverte.

Les élèves devront renverser la procédure formelle d'une liaison directe des données avec les questions. En faisant preuve d'imagination et d'inventivité, ils sont appelés à suivre une voie scientifique non linéaire qui implique des progrès et des retours en arrière, des balancements et des renversements d'obstacles, des contrôles et des reconstructions : ils commencent en fouillant et en effectuant des essais pour élaborer une hypothèse initiale de solution, ils vérifient ou infirment l'hypothèse en la testant plusieurs fois et à la fin, la découverte de la solution (ou des solutions) "démontre" la valeur de l'hypothèse. La preuve de l'élève, c'est une voie personnelle, qui diffère des démonstrations mathématiques formelles, et dans cette perspective, il est peut-être mieux que nous parlions de preuve ou d'argumentation et non de démonstration (Balacheff, 1987). Et bien évidemment,

on développe la confiance des enfants dans leurs propres compétences. Il est nécessaire de les prendre en compte en tant que sujets.

4. Difficultés de la gestion des problèmes ouverts dans la classe et recherche de propositions de traitement

Pendant la gestion des problèmes ouverts dans la classe on constate des difficultés spécifiques, qui surgissent. Nous mentionnerons certaines de celles-ci :

4.1. Le peur devant la liberté

Le caractère différent du problème ouvert crée certaines difficultés spécifiques. De l'énoncé ne résultent ni la méthode ni la solution. Le problème ouvert peut suggérer de nombreuses interprétations différentes de l'énoncé, conduire à de nombreux résultats différents mais corrects ou à une solution pouvant découler de nombreuses stratégies. Toute cette variété ne résulte pas de jonctions habituelles des données avec les questions, ou même d'une combinaison linéaire de notions connues et d'outils. La cession de la responsabilité du problème aux élèves établit encore une rupture de l'autorité de l'enseignant, alors que celui-ci décide habituellement de l'erreur et de la validité du processus. Ces particularités créent chez les enfants un climat d'incertitude (il n y a pas une vérité unique) qui les empêchent de trouver en premier l'idée appropriée pour le démarrage, de mobiliser leurs connaissances acquises, de formuler des propositions et de les vérifier (Arsac et Mante, 2007 ; Arsac et *al*. 1991). On peut soutenir qu'il existe une peur devant la liberté, devant ce voyage admirable vers une mer ouverte et inconnue, qui fait que l'élève est désorienté. Cependant, ceci est aussi un avantage qui distingue les problèmes ouverts d'autres activités formelles. Avec la pratique fréquente, l'élève est encouragé par ses succès, acquiert une confiance en soi et, au lieu de craindre la liberté, la résolution des problèmes ouverts devient pour lui l'**occasion créative d'exercer sa liberté**.

4.2. Les restrictions du programme officiel

Le succès de la gestion du problème ouvert dans la classe exige des expérimentations nombreuses et persistantes pour que l'enseignant tire profit de son expérience et pour qu'il s'habitue à un mode performant de travail. Cependant, les contraintes du programme officiel demeurent.

Un obstacle est qu'une importance fondamentale est attribuée aux activités de mémorisation des connaissances et des techniques de calculs exigées par les critères d'évaluation, les divers contrôles et examens. L'importance qui est attribuée à la résolution de toute sorte de problèmes (non seulement ouverts) vient en seconde position. La recherche du problème ouvert remet en question les

mécanismes formels du travail scolaire habituel. Cependant, l'apprentissage n'avance pas dans un temps fractionné, ni soumis aux conditions des manuels scolaires et il exige des procédures ouvertes pour pouvoir fructifier.

La tentative d'application des problèmes ouverts à l'école diminue l'effort d'imposition et exige un espace pour la quête collective et l'activation du groupe scolaire. Une proposition, dans ces conditions données, serait **l'adoption de semaines de problèmes ouverts** dans le programme, durant lesquelles les élèves s'occuperaient de la recherche de problèmes ouverts.

4.3. Les difficultés des représentations et du transfert de la connaissance

Lorsque l'élève entre dans une démarche de résolution d'un problème ouvert, il construit progressivement une certaine représentation de ce problème. La représentation d'un problème nécessite l'interprétation des informations du problème, le processus de structuration qui est le noyau central de l'activité de représentation et le processus d'opérationnalisation qui permet l'élaboration des stratégies conduisant à la solution du problème (Julo, 1995). Le transfert de la connaissance signifie la possibilité d'utiliser à bon escient un savoir ou un savoir-faire dans un contexte différent de celui où il a été acquis (Hameline, 1991). Il s'agit de connaissances inertes. Lorsqu'un problème connu est transposé dans un cadre différent, les élèves ne réussissent pas à reconnaître les ressemblances, ne peuvent effectuer des abstractions facilement intelligibles et que nous considérons comme automatiques. Bien sûr, au fur et à mesure que nombreux éléments changent, de plus en plus de difficultés apparaissent (Tardif, 1999 ; Julo, 2002). Les problèmes ouverts exigent plus qu'une simple manipulation par application des règles algorithmiques. Ils exigent un transfert au niveau intradisciplinaire ou transdisciplinaire (Schneider, 2004). Dans les problèmes ouverts, dont les moyens de transfert sont nombreux, les combinaisons ne se distinguent pas au premier coup d'œil et les niveaux d'abstraction augmentent. Il se peut qu'ils conduisent les enfants à une transférabilité insuffisante et une représentation inadéquate du problème. Le transfert réussi est lié à la réactivation efficace d'informations qui sont stockées dans la mémoire de longue durée. L'élève devra principalement avoir une réserve riche en expériences stockées dans la mémoire à court terme. Cependant, des recherches ont démontré (Richard, 1982) que la possibilité que l'élève retrouve une information dans sa mémoire dépend de la différence qui existe entre le cadre dans lequel cette information s'est inscrite et le cadre où il est demandé qu'il se la rappelle. En plus, les données structurelles conduisent à la résolution effective du problème ou à la réalisation effective de la tâche (Tardif, 1999). Le problème ouvert, en mettant l'élève devant la nouvelle situation, crée des difficultés de reconnaissance d'informations existantes, lesquelles cependant restent inaccessibles ou sont difficilement localisées. C'est pourquoi, le choix de

problèmes adéquats une importance primordiale et l'enseignant doit leur accorder une très grande attention.

4.4. Les difficultés de contrôle

On constate que les élèves présentent des difficultés **dans le contrôle de l'activité** (Richard, 1990). Le contrôle intervient aux différents moments de l'activité : lors de la formation de la représentation mentale du problème, de la création du cadre interprétatif commun, du choix de la stratégie appropriée, de l'application de cette stratégie et pendant le contrôle des résultats La stratégie choisie peut ne pas être correcte, tandis que la représentation des enfants est appropriée ou le cadre interprétatif collectif est correct. L'exécution de la stratégie peut être encore erronée (Mante, 1993). Dans tous les cas, il est utile que nous développions chez les enfants des outils d'autocontrôle. Nous pouvons leur proposer de prendre du recul pendant l'activité afin d'établir une hypothèse virtuelle, des bilans, des appréciations, et de réfléchir partiellement ou en totalité à leurs activités pour développer des stratégies efficaces de vérification : *Qu'est-ce qui vous a permis de résoudre le problème ? Quel a été l'obstacle pour vous ? Avez-vous déjà résolu des problèmes de ce type ? Quels facteurs avez-vous pris en compte pour choisir cette stratégie ? Est-ce que le résultat est correct ? Pourquoi ? Pourriez-vous réfléchir et vérifier votre solution ?* Habituellement, ce type d'approche a peu d'effet et les élèves sont peu enclins à se lancer spontanément dans une démarche d'autorégulation de leur travail (Margolinas, 1993). Le travail de l'autocontrôle est plutôt négligé et cela pourrait attirer l'intérêt des chercheurs.

4.5. Les meilleurs, les moyens et les faibles et leurs erreurs respectives

Quand les enfants ne disposent pas de stratégies appropriées à la solution d'un problème, ils inventent des stratégies erronées, de la même manière qu'ils construisent des stratégies correctes (Ravestein et Sensevy, 1994). Conformément au constructivisme, l'erreur constitue une forme de connaissance.

> *« L'erreur n'est pas seulement le résultat de l'ignorance, de l'incertitude, du hasard, comme dans les théories d'apprentissage empiriques et behavioristes, mais le résultat d'une plus ancienne connaissance, laquelle a connu ses succès, mais maintenant s'est avérée erronée, ou simplement inadéquate. Les erreurs de ce type ne sont pas rares et imprévisibles, mais constituent des obstacles. Tant pour l'enseignant que pour l'élève, l'erreur constitue un élément constitutif du sens de la connaissance acquise. »* (Brousseau, 1983, p. 171)

Les erreurs commises par les enfants ont un caractère formateur et sont pour l'enseignant une source précieuse d'informations qui offrent des possibilités de discussions créatives avec les autres membres de la classe. Lors de ces discussions collectives sur l'analyse des erreurs, les enfants en bas âge réfléchissent à leurs

erreurs, apprennent de celles-ci et constatent que les erreurs sont source de progrès. Le dialogue avec les enfants donne à l'enseignant la possibilité d'évaluer la démarche de la procédure d'apprentissage, qui à son tour reflète la qualité de l'enseignement. L'enseignant tire profit des erreurs des enfants et il peut prendre des décisions pour améliorer l'enseignement (Charnay R, Mante M., 1993).

Les élèves qui sont habituellement appelés "premiers en maths", lorsqu'ils sont confrontés aux problèmes ouverts, n'ont pas de succès dans tous les cas et ils sentent que leur confiance en soi est ébranlée, alors que les algorithmes tout prêts ou les outils préfabriqués dont ils disposaient ou la vitesse d'opération qu'ils avaient acquise ne les aident pas beaucoup. Puisqu'ils se distinguent habituellement en classe, ils s'énervent et dans, certains cas, ils contestent les problèmes ouverts. D'autre part, les élèves moyens et faibles, qui ont des lacunes de connaissance, ou apprennent avec un rythme plus lent, sont habitués aux difficultés et à être distancés. Bien sûr, certains d'entre eux sont encouragés alors en voyant "les premiers de la classe" confrontés à des difficultés majeures. Cette situation les pousse à sortir de l'ombre et à entreprendre des tentatives audacieuses, à agir créativement, à se valoriser au sein de la communauté de la classe. Les élèves qui étaient en marge entrent sur scène et revendiquent la place qui leur appartient en paraissant étranges à leurs camarades de classe et en surprenant l'enseignant.

4.6. La gestion du temps

Nos expérimentations sont réalisées pendant une durée de deux heures d'enseignement. Les observations ont démontré que le travail trop bref en groupes rend impossible la coopération, la recherche en profondeur et l'examen complexe du problème ouvert, et déstabilise toutes les modalités d'échange de vues. La phase de la coopération des enfants doit laisser assez de temps pour que les enfants puissent examiner le problème et formuler par écrit leur solution.

Durant la phase du débat ouvert devant toute la classe, nous laissons non seulement le temps indispensable aux «meilleurs», mais aussi aux élèves faibles pour qu'ils réfléchissent et expriment leurs opinions sur les arguments qu'ils ont devant eux, pour qu'ils les approuvent ou les réfutent. La méthode que nous proposons est parfois plus lente, mais parfois plus rapide que la méthode traditionnelle. Ce n'est pas un gaspillage de temps, mais un gain de temps, puisque l'élève acquiert une compréhension plus profonde des mathématiques. Les élèves sont actifs et s'appuient sur leurs propres forces, pour arriver à des résultats créatifs d'apprentissage. Finalement, nous ne considérons pas qu'il existe des solutions toutes prêtes face à la gestion et de la répartition du temps. Ce sont des problèmes plutôt ouverts pour l'enseignant, liés au degré de difficulté du problème ouvert et aux particularités de la classe.

4.7. D'autres difficultés

La pratique du problème ouvert dans la classe, avec la méthode que nous avons esquissée ci-dessus, présente encore certaines difficultés pour l'enseignant et les élèves. Lorsque la classe est séparée en groupes, des difficultés de gestion et de suivi des groupes et, plus spécialement, de répartition de notre attention sur cinq ou six groupes persistent. Il existe encore des difficultés à percevoir les erreurs, à comprendre le raisonnement spontanée et l'argumentation ordinaire des élèves, à observer les enfants sans influencer leurs raisonnements, à analyser les représentations et les stratégies de résolution, *etc*. Lors de discussions en groupes, les enfants sont ennuyés d'être réunis pour un travail commun, d'avoir à écouter leurs camarades de classe et à prendre en compte les avis des autres *etc*… Les élèves les plus avancés, ou les plus dominants, s'imposent aux autres et reconstituent la hiérarchie habituelle ; ils s'imposent grâce à des interventions appropriées dont nous nous occupons afin que puissent s'exprimer librement tous les membres de chaque groupe sans qu'il soit observé de marginalisation des enfants hésitants (Arsac et Mante, 2007).

Durant la discussion commune, certains élèves s'adressent souvent à l'enseignant pour essayer de convaincre leurs camarades de classe. L'enseignant ne doit pas regarder dans les yeux les élèves, afin de ne pas risquer de les influencer. Finalement, ce type d'activité présente l'inconvénient d'être bruyant par rapport au cours traditionnel, quelque chose qui, si certaines précautions indispensables ne sont pas prises, peut conduire à des commentaires négatifs de la part des autres collègues, des parents, et même des élèves eux mêmes. La préparation soigneuse de l'expérimentation peut prévenir de nombreux problèmes. Pour limiter les difficultés liées aux problèmes ouverts, il faudra cultiver chez l'enfant **un climat agréable** dans lequel la résolution de problèmes ouverts est une joie et un jeu. La résolution d'un problème n'est pas seulement un "question intellectuelle". Le développement d'attitudes positives, la détermination et le sentiment jouent un très grand rôle (Brechêt, 1994). Le désir des élèves de comprendre et de résoudre le problème, leur volonté d'aller jusqu'au bout, leur curiosité ou leur motivation à écouter les autres, constituent certaines des conduites observées lors d'un travail agréable et intéressant.

5. Conclusion

On vit à une époque de changements. Dans le siècle qui a déjà commencé, l'histoire avance plus vite. On sait que le facteur primordial pour cette voie, c'est l'évolution de la connaissance. La révolution technologique, les progrès scientifiques, la rapidité de la transmission des informations changent tout. Ils contribuent à un monde sans frontières. Ce monde se développe à un rythme spectaculaire et les connaissances de l'humanité augmentent avec une vitesse

incomparable. Mais elles sont éphémères. Une découverte actuelle ne résiste plus au temps, elle se trouvera peut-être très vite au musée.

Le système scolaire d'aujourd'hui forme les adultes de demain pour des activités professionnelles que nous ne connaissons pas encore. Cette école n'est plus actuelle. Il est exigé de l'école qu'elle redéfinisse son rôle en donnant un accent particulier à la participation des élèves, dans le cadre de la communauté scolaire. L'objectif exclusif du transfert de connaissances fragmentées dans le cadre traditionnel devra être réévalué et il faudra conférer une importance primordiale à la recherche de situations vécues de problématisation par les enfants. Cette perception correspond au besoin inhérent à l'être humain d'action et de quête, sur la base d'incitations intérieures, de ses intérêts personnels et de ses problèmes, de ses motivations intrinsèques, pour qu'il puisse trouver des solutions fiables, en recherchant des modes d'activation de sphères le concernant directement. Simultanément, soulignons que l'enjeu majeur de nos sociétés contemporaines, c'est le renforcement de la collégialité et de la dimension sociale de l'individu, au détriment de la passivité, de l'égoïsme pur et de l'isolement, au bénéfice donc de l'action sociale et de la co-décision.

En dehors des connaissances qui sont considérées indispensables pour l'homme moderne, l'école devra viser à la formation d'élèves qui disposent de certaines caractéristiques qualitatives : pour formuler des arguments personnels cohérents, pour juger des activités personnelles rationnelles et indifférenciées, pour examiner, pour discuter, pour développer des initiatives créatives, pour apprendre collectivement, à travers la coopération et la solidarité, pour "apprendre à apprendre". Avec le développement de ces facultés et les expériences de l'élève actuel, celui-ci pourra sans doute devenir un **participant actif, critique et créatif face au changement du monde contemporain**. À chaque changement dans ce monde dynamique qui glisse sans cesse vers l'inconnu, l'individu se trouve confronté à de nouveaux problèmes ouverts et il lui faudra s'enquérir avec lucidité de toutes les options possibles et trouver les meilleures solutions. Il devient **de plus en plus un sujet** au sens philosophique du terme. De cette manière, l'élève améliore ses capacités et peut affronter plus efficacement des situations qui pourraient se présenter plus tard dans sa vie. Dans cette perspective, sa relation vivante avec les problèmes ouverts dans l'environnement scolaire constitue une préparation pertinente minimale. Au lieu d'attendre qu'autrui lui offre une solution toute prête, il est préférable qu'il résolve avec une joie nouvelle et inédite les problèmes, seul ou en coopération avec d'autres personnes concernées ou intéressées. Ce n'est pas important si les solutions proposées par des élèves ne répondent pas aux exigences précises des mathématiques. L'essentiel est de donner la priorité à l'auto-épanouissement individuel et/ou collectif.

Bibliographie

ARSAC, G., CHAPIRON, G., COLONNA, A., GERMAIN, G., GUICHARD, Y., MANTE, M. (1992), *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Presses Universitaires de Lyon.

ARSAC, G., GERMAIN, G., MANTE, M. (1991), *Problème ouvert et situation-problème*, IREM de Lyon.

ARSAC, G., GERMAIN, G., MANTE, M., PICHOT, D. (1985a), *La pratique du problème ouvert*, IREM de Lyon.

ARSAC, G., GERMAIN, G., MANTE, M., PICHOT, D. (1985b), *Varions notre enseignement avec les problèmes ouverts*, IREM de Lyon.

ARSAC, G., MANTE, M. (2007), *Les pratiques du problème ouvert*, IREM de Lyon, CRDP, Villeurbanne.

ARTIGUE, M., HOUDEMENT, C. (2007), Problem solving in France: didactic and curricular perspectives, *ZDM*, **39(5-6)**, 365–382.

BALACHEFF, N. (1987), Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics*, **18**, 147–176.

BANKS, J.A. (1988), Ethnicity, Class, Cognitive, and Motivational Styles: Research and Teaching Implication, *The Journal of Negro Education*, **57**, 452–466.

BECKER, J., SHIMADA, S. (1997), *The open-ended approach: a new proposal for teaching mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

BICHOP, A.J., CLEMENTS, K., KEITEL, C. KILPATRICK, J., LABORDE, C. (Eds.) (1996), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

BOUVIER, B. (1986), *Didactique des Mathématiques : le lire et le faire*, CEDIC.

BRECHET, M. (1994), La résolution des problèmes, *Math Ecole*, **163**, Neuchâtel.

BROUSSEAU, G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, *Recherche en didactique des mathématiques*, **4.2**, Grenoble, La pensée sauvage, 6–42.

BROWN, S.I., WALTER, M.I. (1983), *The art of problem Posing*, LEA Publishers.

CHARNAY, R, MANTE, M. (1991), De l'analyse d'erreurs en Mathématiques aux dispositifs de remédiassions : quelques pistes. *Grand N*, **48**, 37–64.

CHARNAY, R. (1993), Problème ouvert problème pour chercher, *Grand N*, **51**, 77–83.

COPPE, S., HOUDEMENT, C. (2002), Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire. *Grand N*, **69**, 53–63.

CRESPO, S. (2003), Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices, *Educational Studies in Mathematics*, **52**, 243–270.

CUNNINGHAM, R. (2004), Problem posing: an opportunity for increasing student responsibility, *Mathematics and Computer Education*, **38**, 83–89.

DAVIDSON, J.E., STERNBERG, R.J. (2003), *The psychology of problem solving*, Cambridge University Press.

DUNCKER, K. (1945), On problem solving, *Psychological Monographs*, **58 (5, 270**).

ENGLISH, L. (1997), Promoting a Problem Posing Classroom, *Teaching children Mathematics*, **3**, 172–179.

ERMEL (1990), *Apprentissages numériques en grande section de maternelle*, Paris, HATIER.

ERMEL (de 1991 à 1999), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes :* CP, CE1, CE2, CM1 et CM2, Paris, HATIER.

HAMELINE, D. (1991), *Les objectifs pédagogiques*, Paris, ESF.

HOUDEMENT, C. (1998), Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes. *Grand N*, **63**, 59–77.

JONASSEN, D.H. (1997), Iinstructional design models for well-structured and ill-structured problem-solving learning outcomes, *Educational technology Research and Development*, **44.1**, 65–94.

JONASSEN, D.H. (2003), Using cognitive tools to represent problems, *Journal of Research on Technology in Education*, **35 (3)**, 362–381.

JULO, J. (1995), *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, Presses Universitaires de Rennes, Rennes.

JULO, J. (2002), Des apprentissages spécifiques pour la a résolution de problèmes ?, *Grand N*, **69**, 31–52.

LEPINE, L. (1996), Tout problème ouvert n'engage pas nécessairement une bonne recherche, *Grand N*, **60**, 57–62.

MANTE, M. (1993), L'élève face à un problème concret, *Math Ecole*, **158**, 21–29.

MARGOLINAS, C. (1993), *De l'importance du vrai et du faux*, Pansée sauvage, Grenoble.

NOHDA, N. (1995), Teaching and evaluating using «open-ended problems» in classroom, *ZDM*, **95(2)**, 57–61.

NOHDA, N. (2000), Teaching by Open-Approach Method in Japanese Mathematics Classroom. In: NAKAHARA, T. KOUAMA M. (Eds.), *Proceedings of the PME-24 Conference*, Hiroshima University (Japan), **1**, 39–53.

PEHKONEN, E. (1991), Introduction: Problem solving in mathematics, *ZDM*, **23(1)**, 1–4.

PEHKONEN, E. (1995a), Using open-ended problems in mathematics, *ZDM*, **95(2)**, 55–57.

PEHKONEN, E. (1995b), On pupils' reactions to the use of open-ended problems in mathematics. In: *Nordic Studies in Mathematics Education*, **3(4)**, 43–57.

PEHKONEN, E. (Ed.) (1997), *Use of open-ended problems in mathematics classroom*, Department of Teacher Education, Research Report 176, University of Helsinki.

RAVENSTEIN, I., SENSEVY, G. (1994), Statuts de l'erreur dans la relation didactique, *Grand N*, **54**, IREM de Grenoble.

RICHARD, J. (1982), Mémoire et résolution des problèmes, *Revue française de pédagogie*, **60**, INRP, Paris, 67–76.

RICHARD, J. (1990), *Les activités mentales. Comprendre, raisonner, trouver des solutions*, Armand Collin, Paris.

SCHNEIDER, M. (2004), Trois compétences transversales conceptualisées au sein de l'enseignement des mathématiques, *Repères-IREM*, **55**, 51–70.

SCHOENFELD, A.H. (1992), Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. GROUWS (Eds.), Handbook of research on mathematics teaching and learning, Macmillan, New York, 334–370.

SHIMADA, S. (1977), Open-ended approach in arithmetic and mathematics. A new proposal towards teaching improvement,Tokyo, Mizuumishobo.

SILVER, E.A. (1994), On Mathematical Problem Posing, *For the Learning of Mathematics*, **14(1)**, 19–28.

SILVER, E.A. (1995), The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives, *ZDM*, **95(2)**, 67–72.

SILVER, E.A. (1997), Fostering Creativity Through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing, *ZDM*, **97(3)**, 75–80.

STACEY, K. (1995), The challengers of keeping open problem-solving open in school mathematics, *ZDM*, **95(2)**, 62–67.

TARDIF, J. (1997), *Pour un enseignement stratégique*, Les éditions Logiques, Montréal.

TARDIF, J. (1999), *Les transfert des apprentissages*, Les éditions Logiques, Montréal.

TREFFERS, A. (1991), *Realistic mathematics education in the Netherlands 1980–1990*, In: STEEFLAND L. (Eds.) Realistic mathematics education in primary school, Freudenthal Institute, Utrecht 11–20.

WILIAM, D. (1994), Assessing authentic tasks: alternatives to mark-schemes. – In: *Nordic Studies in Mathematics Education*, **2(1)**, 48–68.

XUN, G. et LAND, S.M. (2004), A conceptual framework for scaffolding ill-structured problem-solving processes using question prompts and peer interaction, *Educational technology Research and Development*, **52(2)**, 5–22.

GEORGIOS KOSYVAS
Sevastoupoleos 92-94
11526 Ambelokipi
Athènes, Grèce
gkosyvas@yahoo.com

ALAIN KUZNIAK

UN ESSAI SUR LA NATURE DU TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE EN FIN DE LA SCOLARITÉ OBLIGATOIRE EN FRANCE[1]

Abstract. On the nature of geometric work at the end of compulsory school in France. The purpose of the study is to define the nature of geometric work implemented in France at the end of compulsory school. To make the study, the notions of geometric paradigms and geometric working spaces (GWS) have been used. The reference GWS study is based on an analysis of the French Curriculum published in 1996 and 2005 and textbooks and classrooms observations have been used to precise the appropriate GWS. From the study, the appropriate GWS appears more and more fragmented and oscillates on a confused way between geometric paradigms. This GWS fragmentation is mostly due to the fact that the geometric work is not longer led by epistemological aims, but by an adaptation to the mathematic level of the students.

Résumé. Le propos de cette contribution est de définir la nature du travail géométrique mis en place en France à la fin de la scolarité obligatoire. Pour conduire cette étude, les notions de paradigmes géométriques et d'Espaces de Travail Géométrique (ETG) ont été utilisées. L'ETG de référence est explicité à partir d'une analyse des programmes officiels de 1996 et 2005 puis les ETG idoines sont étudiés en confrontant les manuels scolaires et des observations en classe. De cette analyse, il résulte que les ETG sont de plus en plus morcelés et oscillent de manière confuse entre les paradigmes géométriques. Cet émiettement de l'ETG est en grande partie dû au fait que le travail géométrique n'est plus piloté par des préoccupations épistémologiques mais par une adéquation au niveau des élèves.

Mots clés. Paradigmes géométrique, travail géométrique, scolarité obligatoire, programmes.

Introduction

Dans cet article, nous allons étudier la nature du travail géométrique mis en place en fin de scolarité obligatoire en France (classes de quatrième, troisième et seconde). Ces niveaux de scolarité correspondent à la fin de l'enseignement obligatoire et aussi à la fin d'un programme d'enseignement unique pour la quasi-totalité des élèves. La troisième est la classe terminale du Collège dit *unique* car il est censé accueillir tous les élèves en leur fixant les mêmes objectifs d'apprentissage. La classe de seconde est la première classe du Lycée et elle constitue une classe de détermination qui permet aux élèves de choisir ensuite des

[1] Le texte de cet article est issu d'une conférence présentée dans le cadre du premier colloque franco-chypriote sur l'enseignement des mathématiques.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 15, p. 75 – 95.
© 2010, IREM de STRASBOURG.

sections plus spécialisées dans certains domaines. Ainsi pour la majorité des élèves, c'est dans cette classe qu'ils reçoivent pour la dernière fois un enseignement de la géométrie. Pour conduire notre étude, nous utiliserons les notions d'espace de travail géométriques (ETG) et de paradigmes géométriques [1] (Houdement & Kuzniak, 2003, 2006). Nous ne revenons pas ici sur les trois paradigmes géométriques, notés Géométrie I, II et III, mais nous allons apporter quelques précisions sur la notion de travail géométrique et d'ETG pour poser dans ce cadre les questions que nous souhaitons étudier. Nous étudierons ensuite la nature de l'ETG actuel en nous basant sur diverses études effectuées au sein du Laboratoire André Revuz.

De la pensée mathématique au travail mathématique

La pensée mathématique

La prise en compte de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques comme thème de recherche est relativement récente puisqu'on peut faire remonter sa naissance à la fin des années soixante. La réforme des mathématiques modernes ou plus exactement les ratés de cette réforme ont suscité en partie ce mouvement de recherche en faisant apparaître les difficultés diverses rencontrées par les élèves et les professeurs. À partir de là, il devenait nécessaire de ne plus penser seulement en terme de contenus mais aussi en termes d'éducation et d'apprentissage.

Très fortement influencée par les idées des psychologues, notamment Piaget, une vision constructiviste de l'enseignement s'est alors imposée : il s'agissait de comprendre et d'accompagner la construction de la pensée mathématique. Cette notion de pensée mathématique réfère au type de pensée que doit déployer un individu quand il fait des mathématiques (Piaget, 1950). Dans le cas de la géométrie, vue comme une science déductive dont le domaine d'appui est l'espace, les thèmes privilégiés dans les études internationales sur l'enseignement de la géométrie sont en rapport avec :

1. le développement des capacités spatiales ;
2. la relation entre monde réel et géométrie à travers le processus de géométrisation ;
3. l'instrumentation et le rôle des artefacts comme les logiciels ;
4. le raisonnement et son développement.

Quelle place peut alors avoir le didacticien des mathématiques dans ce paysage longtemps dominé par l'approche psychologique ? Il nous semble qu'elle réside dans l'observation précise de l'activité des actants (professeurs et élèves) dans le cadre scolaire. Ceci nous conduit à privilégier les approches qui étudient non plus

la pensée mathématique en tant que telle mais plutôt sa part visible dans l'activité du mathématicien.

L'activité du mathématicien

Des auteurs comme Giaquinto (2005) distinguent plusieurs phases dans l'activité du mathématicien comme la découverte, l'explication, la justification et les applications. Dans chacune de ces phases, des moments permettent de passer de l'élaboration de ce savoir à sa diffusion la plus large dans la communauté des mathématiciens et au-delà de toucher les professeurs et les étudiants. Ainsi pour le travail relatif à la découverte, il faut faire la découverte, puis la présenter et aussi s'approprier d'autres découvertes.

Cette présentation de l'activité du mathématicien prend en compte le fait que son travail s'intègre dans une communauté d'êtres humains et qu'un acte fort qui permet le développement des mathématiques est l'acte de compréhension, non seulement par l'auteur de la découverte mais aussi par les membres de la communauté. Le mathématicien Thurston (1998) exprime un point de vue semblable en définissant mathématiques comme le plus petit sujet tel que :

- les mathématiques incluent les nombres entiers et la géométrie du plan et des solides ;
- les mathématiques sont ce que les mathématiciens étudient ;
- les mathématiciens sont ces êtres humains qui font avancer la compréhension humaine des mathématiques.

L'intérêt de cette conception est de bien montrer la dépendance des mathématiques de l'activité des mathématiciens, ces êtres humains spécialisés dans l'avancée de la compréhension de ce domaine.

Le travail mathématique : une œuvre et un style

Une autre façon d'envisager la question du travail mathématique consiste à se concentrer sur l'œuvre élaborée par les mathématiciens et à définir le travail mathématique à partir de la conception généralisée du travail donnée par Granger (1963, 1998). Pour lui, le « travail » consiste à mettre en forme un contenu initial non structuré. Ce contenu amorphe n'est pas nécessairement matériel et le travail mathématique illustre de manière exemplaire cette vision généralisée du travail. Dans ce cas le contenu n'est pas tangible et ne devient visible que grâce au travail de mise en forme effectué par le mathématicien. Ceci permet de dépasser l'opposition traditionnelle et caricaturale entre le travail intellectuel qui ne porterait que sur des formes et le travail manuel orienté vers un produit concret et pratique.

Cette mise en relation de la forme et du contenu passe par un travail rhétorique nécessaire sur la forme mais non vide de sens et qui doit permettre d'établir un contact codifié entre le lecteur et l'auteur des propositions. Granger appelle style cette manière de présenter la connaissance rationnelle en la soumettant à des normes codifiées qui participent de la mise en place du sens des objets dans un sens déterminé. Ces normes s'appliquent notamment au langage et aux symboles utilisés dans l'activité mathématique. Cette manière de faire, ce style, contribue à fixer l'orientation du travail et la résolution des problèmes. Elle permet d'exclure certaines pratiques en limitant les possibilités du lecteur ou de l'étudiant.

La notion d'espace de travail géométrique

Vers une définition

Nous avons appelé espace de travail géométrique (ETG) un univers organisé pour le travail du géomètre. Cet espace comporte deux niveaux, l'un que nous appellerons le plan des composantes et l'autre le plan cognitif.

Le premier se structure avec la mise réseau des trois composantes suivantes :

- un espace réel et local avec un ensemble d'objets de nature sensible ;
- un ensemble d'artefacts qui seront les outils et instruments utilisés par le géomètre ;
- un référentiel théorique constitué de propriétés.

Mais un espace de travail de la géométrie ne prend tout son sens que grâce à ses utilisateurs. Les composantes seules ne suffisent pas à le définir car le sens de l'espace de travail va dépendre de la fonction que son concepteur et ses utilisateurs lui attribuent Une première réorganisation de ces différentes composantes sera plutôt de nature épistémologique et son orientation sera guidée par les paradigmes géométriques mis en jeu. Le paradigme de référence permet d'interpréter les contenus des composantes et de les structurer dans le sens souhaité.

La fonction de l'ETG peut évoluer en relation avec le contexte social et économique qui influe sur les institutions éducatives dans lesquelles la géométrie est enseignée. Elle va aussi dépendre fortement d'une dimension cognitive ce qui nous a conduit à introduire un deuxième plan dit cognitif et structuré autour des trois processus suivants : visualisation, construction et preuve (Duval, 1995).

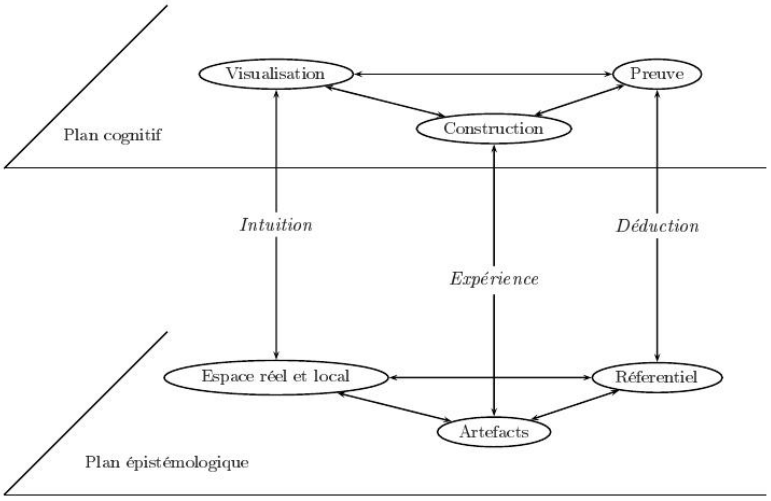


Figure 1 : L'espace de travail géométrique.

Le travail géométrique que nous décrivons s'inscrit dans le cadre des institutions scolaires. Ceci conduit à distinguer un certain nombre de niveaux d'ETG qui ne sont pas sans relations avec le processus de la transposition didactique.

L'ETG de référence : la réorganisation attendue

Le fait pour une communauté d'individus de s'accorder sur un paradigme donné pour formuler des problèmes et organiser leurs solutions en privilégiant certains outils ou certaines manières de pensée, débouche sur ce que nous conviendrons d'appeler l'ETG de référence. Pour connaître cet ETG, il faudra dégager ces manières de faire et de voir en décrivant notamment le style du travail géométrique avec ses règles de discours, de traitement et de présentation. Cet ETG dépendra du paradigme privilégié : Géométrie I, II ou III.

L'ETG idoine ou la question de la didactisation

Une fois posées les bases de la géométrie enseignée, il reste à se préoccuper de son enseignement effectif qui nécessite l'existence d'un espace propice à l'enseignement réussi de la géométrie souhaitée. Cette réussite dépendra naturellement aussi des utilisateurs de cet espace mis en forme pour eux : les élèves bien sûr mais aussi les professeurs chargés de le mettre en place dans les classes.

L'ETG de référence doit être aménagé et organisé pour devenir un espace de travail effectif et idoine dans une institution donnée avec une fonction définie. Les experts concepteurs de la réorganisation didactique des diverses composantes de

l'espace de travail, jouent un rôle semblable à celui d'un architecte qui conçoit un espace de travail pour des utilisateurs potentiels futurs. Ils aménagent un ETG qui peut être idoine parce qu'il respecte les intentions et le cahier des charges de l'institution demandeuse mais qui peut n'être pas adéquat à sa fonction attendue en se révélant non performant lors de sa mise en œuvre dans les classes.

Les ETG personnels

Les ETG idoines doivent être investis par des élèves qui se les approprient avec leurs connaissances et leur fonctionnement cognitif particuliers. Ces espaces de travail sont ce que nous appelons des ETG personnels. Ils se constituent de manière progressive et peuvent n'être parfois pas opérationnels. La notion d'ETG personnel ne concerne pas les seuls élèves et étudiants, mais elle concerne aussi les professeurs. En effet, ces derniers doivent avoir une conscience claire de la nature des espaces de travail géométrique idoines afin d'éviter les malentendus résultant d'une gestion floue et implicite du jeu entre les paradigmes.

Espaces de travail et paradigmes géométriques

Une diversité d'articulations

Dans la pratique, les ETG, notamment les ETG personnels et idoines, ne reposent pas sur un seul paradigme mais plutôt sur une articulation entre les paradigmes et celle-ci peut être maîtrisée ou non. Nous parlerons, dans le premier cas d'un jeu entre paradigmes et, dans le second, d'un glissement pour insister sur l'aspect non maîtrisé et subi de la relation entre les paradigmes. Plusieurs articulations possibles sont envisageables que l'étude des différents niveaux d'ETG permet d'affiner dans une institution donnée. Voici quelques exemples que nous avons déjà rencontrés.

La Géométrie I assumée (GI / gII) [2]. Le but de cette géométrie est l'étude des configurations du monde réel avec la possibilité encouragée de mesurer sur les figures pour établir une conclusion. D'autre part, un certain nombre de théorèmes, éventuellement démontrables en GII, sont utilisés comme des outils techniques évitant la mesure ou facilitant le calcul.

La Géométrie II assumée (GII / gI) dont le modèle de référence est la géométrie d'Euclide. L'horizon axiomatique est clairement assumé et l'organisation logique de l'ensemble du référentiel est recherchée. Cependant cette géométrie n'est pas aveugle et les propriétés s'appuient pour leur genèse sur l'intuition de l'espace.

La Géométrie II morcelée (GII / GI). Comme la précédente, cette géométrie prend appui sur un ensemble de propriétés et d'expériences issues de la Géométrie I. Mais ici, il s'agit plutôt de développer des îlots hypothético-déductifs autour des

propriétés de quelques figures de base. Ces îlots sont fondés sur une propriété souvent validée par la mesure ou l'observation.

La Géométrie III subreptice (GII / GIII). Dans ce cas, l'enseignement de la Géométrie II est orienté, voire piloté, par des nécessités intra mathématiques qui ne s'expliquent que par un horizon caché de type GIII. Elle est ainsi organisée de manière subreptice (Robert, 2003) par des considérations affines et euclidiennes ou par la structuration, toujours cachée, des propriétés autour de la notion de groupes de transformation.

La Géométrie III assumée (GIII / gI, gII). En privilégiant d'autres cadres et registres dans le travail géométrique (cadre vectoriel, analytique, numérique), l'enseignement de cette géométrie réalise sciemment l'évacuation de la géométrie élémentaire discursive et figurale que l'on rencontre déjà, de manière progressive, dans les autres approches de la géométrie enseignée.

Nos questions et un cadre pour l'étude

Nous pouvons enfin exprimer les deux questions que nous souhaitons éclaircir dans cet article.

Question 1 : Quel est l'ETG de référence actuellement proposé en fin de scolarité obligatoire en France ?

Nous faisons l'hypothèse qu'il s'agit d'une Géométrie II (GII/GI) morcelée.

Question 2 : Quelle est la caractéristique de l'ETG idoine correspondant ?

Nous souhaitons étudier plus particulièrement les conséquences du morcellement annoncé de l'ETG de référence sur ces ETG et aussi sur les ETG personnels des élèves.

Notre recherche des caractéristiques du travail géométrique s'accorde bien avec l'approche systémique privilégiée par l'étude internationale TIMSS. Dans cette étude les auteurs se concentrent sur différents types de curricula qu'ils appellent *Intended*, *Implemented* et *Attained* (Kaiser, 1994 et Kuzniak, 2005). Cette étude utilise aussi une méthodologie (SMSO) qui précise le type d'étude à effectuer pour analyser ces différents niveaux et dont nous ne retenons que quelques éléments adaptés à la question de la géométrie et en phase avec notre travail.

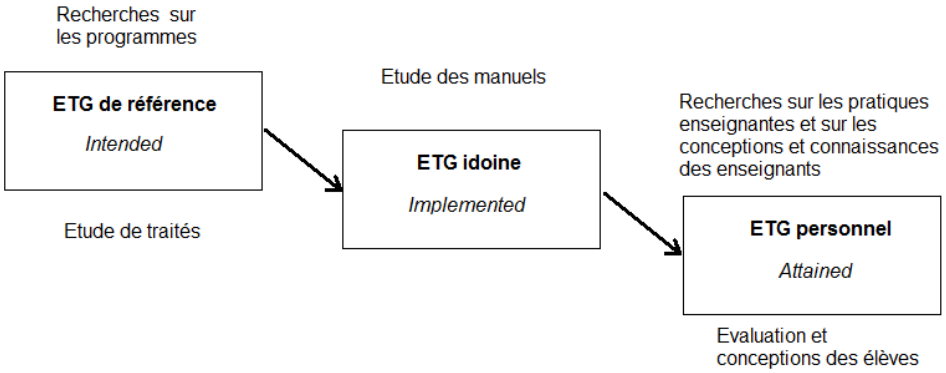


Figure 2 : L'organisation et l'étude des différents ETG.

Sur l'ETG de référence en fin de scolarité obligatoire en France

Dans les périodes de stabilité éducative, l'accès à l'ETG de référence est facilité par ce qu'on peut appeler des « traités » qui regroupent et organisent le corpus de référence. Pendant très longtemps, les éléments d'Euclide ont joué ce rôle et fixé la nature du travail géométrique. Ce n'est plus le cas aujourd'hui dans notre enseignement et le dernier « traité » qui visait à asseoir le référentiel théorique de la géométrie enseignée au collège en France fut celui de Cousin-Fauconnet (1995) et son impact resta très limité.

Depuis, il semble que seuls les textes des programmes officiels et les documents qui les accompagnent remplissent ce rôle de référence. Les mathématiciens sont pratiquement absents du processus d'élaboration de ces programmes qui est à la charge de l'institution scolaire et des enseignants. D'autre part, nous verrons que l'absence d'organisation du référentiel théorique en un traité explique l'impression d'espace de travail morcelé que nous attribuerons à l'ETG de référence actuel. Les programmes qui nous préoccupent sont ceux publiés en 1996 et 2005.

En collège, les deux versions du programme, l'ancienne comme la nouvelle, insistent sur la notion d'activité mathématique définie comme le fait d'« identifier un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation et contrôler le résultat obtenu. ». Quant à la géométrie, il lui est assigné le rôle de « passer de l'identification perceptive de figures et de configurations à leur caractérisation par des propriétés ». Dans les documents d'accompagnement du programme, il est précisé que les propriétés à démontrer « se voient » sur la figure mais que les élèves doivent comprendre la nécessité de démontrer ce résultat.

En utilisant la terminologie des paradigmes, nous pouvons affirmer que les programmes mettent au cœur de leurs préoccupations la question de la transition entre GI et GII. Cependant, le passage d'une géométrie à l'autre n'est pas établi une fois pour toute à un moment du curriculum, et la transition semble sans cesse remise à l'œuvre sur chaque nouvelle notion. Celles-ci sont introduites et structurées autour d'objets géométriques : les triangles, les cercles, les polygones dont il est rappelé qu'ils sont aussi des objets de l'espace sensible. Les programmes s'appuient aussi sur les transformations géométriques comme élément structurant. Dans les programmes de 1996, une transformation nouvelle (symétrie orthogonale, symétrie centrale, translation et rotation) est introduite dans chaque classe du collège. Dans ceux de 2005, la translation et la rotation disparaissent, ce qui a pour effet de diminuer la structuration globale du référentiel théorique qui apparaît de plus en plus en plus comme le résultat d'une juxtaposition d'objets.

Cette indécision sur le choix définitif du paradigme se manifeste particulièrement par l'importance accordée dans chaque classe aux études expérimentales afin de conjecturer des propriétés. Les constructions (à l'aide d'instruments, de l'outil informatique ou de schémas à main levée) jouent un rôle clé dans ce processus. Mais dans le même temps, la notion de socle est imposée par l'institution scolaire pour définir dans toutes les matières un niveau minimal exigible pour tous les élèves. Or dans le cas des constructions en mathématiques, aucune démonstration n'est exigible et les connaissances de base se limitent à la maîtrise de techniques utiles pour faire des constructions. À la fin du collège, un élève doit savoir construire et maîtriser les techniques sans forcément connaître les justifications théoriques issues de la Géométrie II. À travers cette reconnaissance exclusive des techniques, on devine déjà le glissement possible vers des ETG idoines et personnels guidés par un horizon GI avec l'accent mis sur la perception et les artefacts. Nous appellerons Géométrie I subreptice ce glissement non assumé vers la Géométrie I.

A contrario, toujours dans les programmes de 2005, l'apprentissage de la démonstration fait l'objet d'une attention plus soutenue. Un paragraphe intitulé « une initiation progressive à la démonstration » explique que « la question de la preuve a une place centrale en mathématiques ». La pratique de la preuve permet progressivement d'aboutir à la mise en place de la démonstration. Cette distinction entre preuve et démonstration est une nouveauté dans l'enseignement français. La preuve dépend du contexte social et elle peut revêtir différentes formes tandis que la démonstration est fondamentalement une forme rhétorique caractéristique du style mathématique. Cette distinction entre preuve et démonstration conduit les auteurs à différencier deux phases dans le processus d'apprentissage de la démonstration : le raisonnement et sa mise en forme. Dans le même temps les auteurs insistent sur la phase de découverte. Cela ne va pas être sans conséquence

sur le travail mis en place dans les classes car elle suggère l'introduction dans l'ETG idoine de deux contextes différents : celui de la découverte et celui de la justification.

L'utilisation de logiciels de géométrie dynamique est aussi présentée comme un outil facilitateur pour ne plus considérer la figure uniquement sous sa forme iconique. En donnant la possibilité de déplacer les points et de multiplier les expériences, les logiciels sont censés favoriser l'accès à la notion générale de figure qu'il faut distinguer du dessin. Dans cette optique optimiste, l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique favorise les conjectures et le raisonnement pour valider cette conjecture.

Mais, l'ambiguïté de l'espace de travail idoine est à nouveau accentuée par le rôle attribué aux logiciels qui peuvent, dans certains cas, se substituer à une démonstration lorsque les élèves ne sont pas en mesure de produire les raisonnements correspondants en Géométrie II. Ainsi, non seulement les logiciels peuvent être à la source de conjectures mais ils peuvent être aussi les garants de la validité d'un résultat. Il y a là un glissement implicite et potentiel vers un ETG où l'expérience et les artefacts guident le travail.

En classe de seconde, dans une autre institution, le Lycée, la volonté annoncée des auteurs des programmes est de stabiliser le travail géométrique développé au Collège. Les nouvelles notions introduites (triangles isométriques et semblables) ne doivent pas l'être pour elles-mêmes mais pour utiliser les outils de preuve développés au Collège. La démarche de travail préconisée reste très proche de celle mise en œuvre au Collège. Le point de départ de la géométrie doit être intuitif et expérimental et s'appuyer sur la perception. Les logiciels restent une source de conjectures de propriétés. Celles-ci doivent être ensuite prouvées puis démontrées.

Pour conclure cette partie, nous parlerons d'une Géométrie (GI /GII) mixte car si les auteurs insistent sur la différence entre démonstration et preuves expérimentales, les deux cohabitent sans cesse et semblent également légitimes. De plus, le référentiel théorique morcelé ne permet pas d'assumer complètement le passage à la Géométrie II par manque d'horizon axiomatique. Seuls des îlots argumentatifs isolés sont développés et ils doivent à chaque fois pouvoir être étayés par des expériences. Cette évanescence d'un référentiel théorique organisé n'est pas une nouveauté car tel était déjà le cas dans la période de réaction au tout axiomatique des mathématiques modernes. Ce qui est nouveau, c'est, d'une part, le statut ambigu donné aux instruments et aux constructions et, d'autre part, la multiplicité des îlots démonstratifs dépendants de configurations mal reliées les unes aux autres. Cette multiplicité contribue à la déstructuration du référentiel théorique.

ETG idoines d'aujourd'hui

Nous allons maintenant tenter d'apprécier les effets de cette Géométrie mixte et morcelée sur les ETG idoines que nous avons rencontrés. Autrement dit, comment cette évolution de l'espace de référence se répercute-t-elle dans les manuels et dans la pratique des enseignants ?

La description des ETG idoines est bien plus complexe que celle des ETG de référence car il est rare de pouvoir disposer d'une source unique pour définir ces ETG. Pour comprendre leur fonctionnement, il faut recourir à différentes sources parfois contradictoires comme les cours des professeurs et les manuels, très nombreux en France où il n'existe pas de manuels accrédités par le ministère. De plus, il n'est souvent possible d'aborder les ETG que de manière locale à partir de l'étude d'un thème voire d'un type de taches prescrites. Pour notre approche des ETG idoines, en plus de nos observations personnelles en classe, nous nous appuierons sur divers travaux réalisés au sein du Laboratoire André Revuz et qui donnent des informations issues des manuels mais aussi de la pratique en classe.

Pour décrire le processus de didactisation qui s'opère dans les classes et déterminer l'ETG idoine, nous présenterons successivement :

- une étude de la notion d'angle inscrit en classe de troisième qui nous donnera une première caractérisation de l'ETG idoine standard ;
- le glissement introduit dans cet ETG par l'emploi massif des logiciels de géométrie à partir des années 2000 ;
- la rupture entre l'ETG idoine standard et une grande partie des élèves engagés dans un autre type de travail géométrique que celui attendu par le professeur.

ETG idoine standard

Nous allons observer le traitement de la notion d'angle inscrit en troisième. Cette notion nous semble pertinente car elle se place en fin du cursus de Collège et elle force les professeurs et les manuels à l'intégrer dans un ETG déjà en place et dont nous pouvons ainsi voir certaines des caractéristiques stables.

Deux propriétés figurent dans les programmes de troisième qui correspondent aux propriétés énoncées par Euclide dans son livre III : la propriété 20 portant sur la relation entre l'angle au centre et un angle inscrit interceptant le même angle et la propriété 21 sur l'égalité des angles inscrits qui en est une conséquence. Dans l'enseignement classique de la géométrie, la démonstration de la propriété 20 s'appuie sur l'étude de trois cas de figure, elle est donc relativement complexe, par contre il est facile de déduire la propriété 21 de la propriété 20.

Dans les programmes de 1996, les notions d'angles inscrit et au centre sont incluses dans une partie intitulée « rotation, angles, polygones réguliers ». Le programme précise « comparer un angle inscrit et l'angle au centre qui intercepte le même arc ». Il est dit que cette comparaison permet celle de deux angles interceptant le même arc. Dans les nouveaux programmes, ces notions ne font plus partie des notions exigibles et elles se rattachent aux figures planes dans le mouvement de déstructuration que nous avons signalé (les rotations ne font plus partie du programme).

La mise en place de la notion d'angle inscrit en classe a fait l'objet d'un travail de Roditi (2004) qui a pu montrer à cette occasion la proximité de l'approche développée par un enseignant avec la proposition du manuel que nous avons retenu pour notre étude. Le manuel choisi (Triangle, 2003) a été développé par des auteurs proches de l'Institut National de la Recherche Pédagogique qui assument de manière cohérente et constante un même parti pris pour introduire les notions mathématiques. Roditi signale que ce manuel est bien connu pour être bien adapté au niveau des élèves. Ainsi dans ce cas, la mise en place de l'ETG idoine est déjà très influencée par le niveau des élèves.

Une activité (p. 165) présente la notion d'angle inscrit et d'angle au centre. Les élèves sont invités à dégager ces deux notions à partir de deux questions portant sur un corpus de six figures.

Sur les figures (1) et (4), on dit que l'angle BAC est un angle inscrit dans le cercle (C). Ce n'est pas le cas de BAC sur les autres figures.

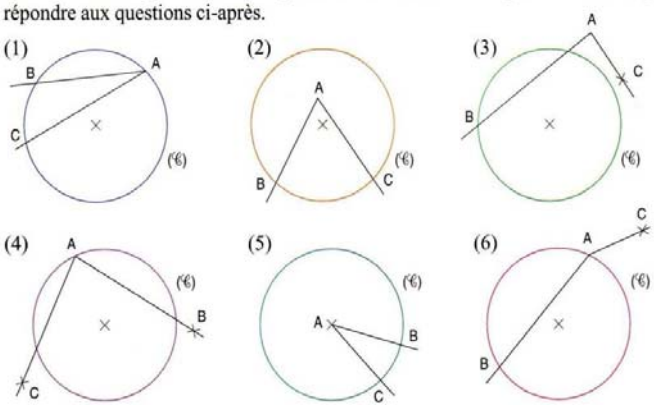
En déduire qu'elles semblent être les caractéristiques d'un angle inscrit.

Sur la figure (5), on dit que l'angle BAC est un angle au centre. Ce n'est pas le cas de BAC sur les autres figures. En déduire quelles semblent être les caractéristiques d'un angle au centre.

Angle inscrit et angle au centre

7. Des cercles et des angles *exercices 10 à 12 p. 171 et 172*

a/ Observer la disposition de l'angle $\widehat{BAC}$ sur chacune des figures ci-dessous puis répondre aux questions ci-après.



Des définitions sont proposées un peu plus loin par les auteurs du livre. Elles sont alors associées à des images prototypiques des notions d'angle aigu et d'angle au centre dans un lien très fort de l'image colorée et codée avec le texte. Ainsi le mode de production des définitions est nettement de type empirique. En s'appuyant sur quelques dessins particuliers, il fonctionne aussi d'une manière abductive qui va se trouver confirmée dans l'activité suivante (p. 165) consacrée aux deux propriétés fondamentales des angles inscrits et au centre.

« *Tracer un cercle de centre O. Tracer plusieurs angles inscrits dans un cercle qui interceptent un même arc BC. Mesurer ces angles.*

Quelle conjecture peut-on faire ?

Tracer un cercle de centre O. Tracer un angle au centre et un angle inscrit de ce cercle qui interceptent le même arc BC. Mesurer ces deux angles. Recommencer plusieurs fois ces tracés.

Quelle conjecture peut-on faire ? »

Cette activité permet de dégager les deux propriétés, écrites en rouge dans le livre et présentées dans un ordre différent de l'ordre euclidien.

« *Si deux angles inscrits dans un cercle interceptent le même arc, alors ils ont la même mesure.*

Si, dans un cercle, un angle au centre et un angle inscrit interceptent le même arc, alors la mesure de l'angle au centre est le double de la mesure de l'angle inscrit. »

Les deux propriétés ont été dégagées à partir de très peu d'exemples. On peut réellement parler ici d'abduction puisque l'idée de propriété étant présente, il suffit de l'extraire à partir de petit nombre d'exemples qui la vérifient. L'usage de la mesure est recommandé pour dégager la propriété même si le processus abductif incite à négliger les approximations et tend à rendre inutile la réalisation effective d'un mesurage. Ainsi, l'espace idoine qui se met en place s'appuie résolument sur la Géométrie I mais entre-t-on vraiment dans GII ? Trancher la question n'est pas évident dans ce livre puisque les deux propriétés ne sont pas démontrées. Elles sont admises sans que l'on sache exactement quelle a été la validation retenue. Autrement dit, ces propriétés font-elles partie de GII ou de GI ?

De plus, les propriétés ne sont pas présentées dans l'ordre qui habituellement permet de déduire la propriété des angles inscrits de celle des angles au centre. Cette absence d'un souci d'organisation globale du schéma déductif éloigne l'ETG idoine de la Géométrie II. Cette impression se confirme par l'étude du seul exemple d'application de la propriété dans le manuel. Il s'agit de prouver un alignement sur une figure bien particulière sans le degré de généralité qu'aurait pu

introduire une formulation plus générale. Ainsi, le travail reste fixé sur une figure particulière sans atteindre le niveau des figures génériques.

L'ETG idoine se caractérise ainsi par l'absence de figure générique et par un appui sur des figures particulières. Il est également possible de mesurer. Le raisonnement fait la part belle à l'abduction pour dégager des propriétés qui sont ensuite utilisées comme techniques pour donner des valeurs numériques. Tous ces éléments nous semblent caractériser un ETG situé, de fait, plutôt dans une Géométrie I subreptice. Dans son étude, Roditi a observé une séance conduite par un jeune professeur. Ce dernier utilise le manuel précédent pour préparer son cours tout en opérant un certain nombre de transformations toutes destinées à limiter les degrés de liberté dans l'activité des élèves. Le fait de limiter le travail et les initiatives des élèves permet au professeur de gérer plus facilement la conduite de la classe. On remarque que :

- l'activité sur les définitions est supprimée et remplacée par la donnée immédiate des définitions. Chaque définition est associée à une figure comme dans le livre cité ;
- l'activité d'émission de la conjecture est nettement plus fermée que dans le livre, les élèves ne dessinent plus des angles sur leur feuille. Les dessins (trois en tout) figurent sur la fiche donnée aux élèves ce qui permet de donner les mêmes angles à mesurer à tous les élèves. De plus, la mesure des angles choisis permet une division simple. Comme dans le livre, une conjecture, qui relève plus du constat, est demandée à la fin.

Dans son étude, Roditi affirme que les élèves en font encore moins que ce que le professeur attendait, notamment au niveau des calculs et de l'émission de la conjecture. Ainsi, nous voyons à l'œuvre un phénomène de délitement progressif de l'ETG idoine de plus en plus piloté par le professeur qui tente de l'adapter au niveau des élèves. Ces derniers, dans un jeu de rôle bien huilé, tentent encore de le simplifier pour alléger leur travail d'élève.

L'impact des logiciels sur l'ETG idoine

Dans un travail de master, Boclé (2008) a déterminé une situation prototypique proposée dans les manuels français pour introduire une nouvelle notion en géométrie en fin de Collège. Son étude fait apparaître, dans les manuels conçus juste après 1998, la structure prototypique SP1 suivante :

1. construction de figures particulières avec des instruments de dessins,
2. mesurage sur ces figures à l'aide des instruments,
3. émission d'une conjecture d'une propriété,

4. institutionnalisation de la propriété admise ou démontrée plus tard.

Dans les manuels qui suivent les programmes de 2005, une nouvelle tendance émerge. L'introduction d'une nouvelle notion se fait par le biais d'un logiciel de géométrie. La situation prototypique SP2 est alors la suivante :

1. construction d'une figure à l'aide d'un logiciel de géométrie,
2. mesure donnée par le logiciel,
3. déplacement de points afin de constater que la propriété reste vraie,
4. institutionnalisation de la propriété admise ou démontrée plus tard.

Dans les deux cas, pour introduire une propriété, les élèves construisent plusieurs figures répondant à des critères donnés. Les mesures effectuées sur ces figures permettent de constater un invariant puis d'émettre une conjecture. Dans les manuels qui suivent les programmes de 2007, les activités de construction et de mesure supposent l'usage d'un logiciel de géométrie. Le début de chaque activité se situe clairement dans GI avec un ETG qui favorise la perception et l'instrumentation. Dans les deux approches, avec et sans logiciel, le point crucial pour déterminer le type de géométrie réellement en jeu dans l'ETG idoine se situe au niveau du point 4. Si la propriété est démontrée uniquement de manière déductive sans recours à la mesure, il est possible de basculer en Géométrie II. Par contre, que se passe-t-il si la propriété n'est pas démontrée ?

Ces situations prototypiques répondent bien aux instructions des programmes recommandant la mise en place d'activités aboutissant à la conjecture de propriétés. L'insistance dans les nouveaux programmes sur l'utilisation d'un logiciel de géométrie a été prise en compte dans les manuels mais l'apport réel de ces logiciels dans le passage de la GI à GII mérite d'être questionné. En effet, plusieurs manuels justifient l'utilisation d'un logiciel de géométrie par l'amélioration de la précision de la mesure et la possibilité de multiplier les exemples. Or une mesure reste une approximation et elle est donc imprécise. C'est justement cette imprécision qui peut créer une contradiction au sein de la classe et conduire à la volonté de convaincre puis à la nécessité de prouver sans usage de la mesure. Insister sur la précision des logiciels et sur leur avantage par rapport aux constructions à la règle et au compas risque d'éloigner de la nécessité de fournir une preuve qui était un des enjeux de l'ETG de référence.

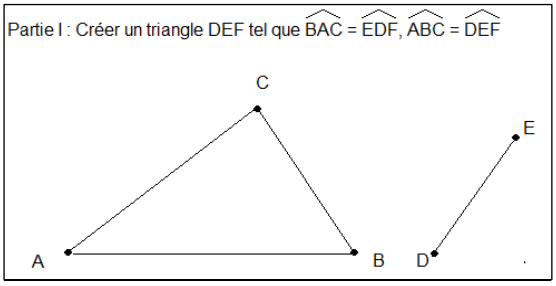
Dans son travail en classe, Boclé a essayé de voir si l'utilisation de l'outil informatique dans ces situations prototypiques favorisait le passage vers GII ou bien si au contraire elle constituait un élément bloquant. Elle a pu constater que la force de la preuve par expérimentation l'emportait sur un travail classique sur la démonstration comme une preuve purement déductive. Dans ce cas, il semble que

l'usage des logiciels en situation standard stabilise plutôt un ETG de type GI et non une transition vers la GII.

La rupture consommée en classe de seconde ou quand la monstration devient démonstration.

Nous allons retrouver cette contradiction entre le travail attendu par l'institution et le travail effectivement mis en place dans le cas de l'étude des triangles semblables dans une classe de seconde ordinaire. Les triangles semblables ont été réintroduits dans l'enseignement obligatoire français en 2000. La notion avait disparu des programmes depuis la réforme des mathématiques modernes et elle est réapparue dans un tout autre contexte en 2000 en classe de seconde. Les triangles semblables ne sont pas vus par les programmes comme une notion nouvelle mais comme l'occasion de stabiliser le travail géométrique en fin de scolarité. Nous regarderons ici uniquement les résultats d'une séance menée par un professeur qui suit la démarche prototypique SP1 dans un premier temps mais qui, au moment de la phase 4 d'institutionnalisation, développe une démarche SP2 avec un usage exclusif du logiciel par lui-même.

L'activité suivante est donnée aux élèves. Il s'agit de la première activité sur les triangles semblables.



Les questions suivantes figurent sur la fiche :

Que peut-on dire des angles ACB et DFE ?

Comparer les côtés des triangles avec votre règle. Que constate-t-on ?

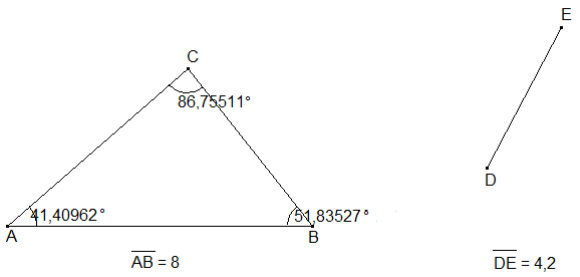
Finir la phrase : *On peut conjecturer que si deux triangles ont ... alors leurs côtés sont ...*

Pour le professeur la phase de construction ne pose pas de problème. Il a anticipé deux triangles possibles, ce qui lui semble une difficulté intéressante. Pour lui, il s'agit clairement de motiver dans GI l'origine d'une propriété qui sera pleinement dans GII une fois qu'elle aura été démontrée dans la leçon suivante. La figure est

pour lui un exemple générique et il n'a pas vraiment réfléchi aux mesures qui figuraient sur la fiche.

La grande majorité des élèves, mais pas tous, s'engage pleinement dans l'activité de construction qui s'avère longue et complexe. Les élèves ont des difficultés à utiliser leurs instruments de dessin et la tâche « faire un angle égal » ne correspond pas pour eux à une technique immédiatement mobilisable. De plus, les deux possibilités de figures suscitent des problèmes dans la classe car les élèves travaillent sur des figures particulières et non générales.

Une autre partie des élèves a compris que la construction n'avait pas d'importance pour le professeur et ils attendent tranquillement que le cours se déroule. Ils émettent, par abduction, des conjectures purement linguistiques en essayant d'adapter au mieux leurs connaissances mathématiques avec la situation. Dans le même temps, les élèves engagés dans la tâche de construction produisent des résultats très divers et contradictoires mais de fait ces résultats et le travail de ces élèves vont être laissés de côté par le professeur qui va privilégier la solution construite avec l'aide du logiciel Geogebra et présentée avec un vidéoprojecteur. Pour cela, le professeur suit alors la structure prototype SP2 mais sans faire de dévolution aux élèves. L'usage du logiciel est à sa seule charge et il procède ainsi à une institutionnalisation qui nie tout le travail antérieur des élèves. Le point de départ sur l'ordinateur est cette figure où les mesures affichées sont données avec cinq chiffres décimaux et ceci même pour les angles. Le rapport de proportionnalité calculé par l'ordinateur était de l'ordre de 1,905 et était exactement le même pour les trois rapports.



La précision des mesures indiquées sur l'ordinateur fait d'autant plus violemment apparaître aux élèves l'imperfection de leur travail avec les instruments. Leur travail proprement dit est de peu d'utilité puisqu’il est laissé de côté. De plus la précision du logiciel le transforme et, ceci, à l'insu du professeur, en outil de preuve et en source de vérité comme en témoigne le dialogue qui clôt le cours après l'énoncé de la conjecture.

Le professeur : « A-t-on démontré la propriété ? »

Les élèves dans une quasi-unanimité : « Oui ! On a fait une démonstration. »

Le professeur interloqué : « Ben Non c'est trop imprécis ! »

Ainsi après plus de trois années d'entrée progressive en Géométrie II et malgré les programmes qui insistent sur la vigilance nécessaire sur le statut des énoncés, admis ou démontrés, le décalage entre le travail attendu et le travail effectué est profond mais cela résulte en grande partie du fait que l'ETG idoine proposé aux élèves est lui-même très ambigu et probablement fondamentalement de type GI subreptice.

Conclusion

Notre étude nous permet de conclure d'une manière assurée sur quelques points caractéristiques des ETG rencontrés en fin de scolarité en France.

L'ETG de référence peut être caractérisé comme relevant de la Géométrie II morcelée. Un grand nombre d'îlots démonstratifs sont introduits pour bien montrer le lien entre la géométrie et l'intuition de l'espace. Puis, l'accent est mis sur la nécessité de développer le travail démonstratif en le distinguant des preuves expérimentales et des affirmations perceptives. Cependant, cet ETG de référence laisse la porte ouverte, dans certains cas, à la mise en place de techniques et de propriétés validées par la seule expérimentation par les élèves avec des logiciels. De plus, son insistance constante sur une transition vers la Géométrie II appuyée sur la Géométrie I, peut laisser supposer qu'une Géométrie mixte est possible.

Cette porte ouverte devient un boulevard lorsqu'on envisage les ETG idoines qui se révèlent particulièrement instables et dépendants du niveau des élèves et des choix du professeur. Le jeu traditionnel entre les Géométries I et II s'avère particulièrement ambigu du fait de la puissance probatoire des logiciels pour les élèves.

Dans les exemples que nous avons pu observer [4], le glissement vers la Géométrie I a été favorisé par l'usage des logiciels qui instituent une preuve informatique qui vient à l'encontre de la preuve axiomatique. Cette dernière est d'autant plus affaiblie que le référentiel théorique mis à disposition des élèves n'apparaît pas, même en filigrane.

Enfin, la réorganisation des ETG semble de plus en plus piloté par un professeur s'adaptant au niveau des élèves plus que par des choix épistémologiques assumés. Le travail géométrique fonctionne par appauvrissements successifs ce qui peut expliquer la tentative récente de supprimer la géométrie discursive et figurale en classe de seconde au profit de la seule géométrie analytique. Une autre voie serait possible, en adéquation avec la demande sociale actuelle : assumer une Géométrie I

dans la scolarité obligatoire. Cela permettrait de remettre en place un travail géométrique riche et de restructurer les ETG de manière cohérente.

Notes

[1] La notion de paradigme, due à Kuhn, recouvre l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. Elle permet de fixer la manière correcte de poser et d'entreprendre la résolution d'un problème. (Houdement & Kuzniak, 2006).

[2] Nous désignons l'ETG en utilisant le paradigme dominant, le couple entre parenthèses précise les paradigmes en jeu dans cet ETG.

[3] Manuel collection Triangle mathématiques de 3e édité par Hatier.

[4] Nous avons pu observer, chez des professeurs débutants, un grand nombre de séances qui allaient toutes dans le même sens.

Bibliographie

BOCLÉ, C. (2008), *Utilisation des logiciels de géométrie dynamique et espace de travail géométriques en classe de quatrième*, Master de didactique des mathématiques, Université Paris-Diderot.

COUSIN-FAUCONNET, A. (1995), *Enseigner la géométrie au collège*, Paris : Armand Colin.

DUVAL, R. (1995), Why to teach geometry in *ICMI Studies on Geometry*, 53–58, Catania.

GIAQUINTO, M. (2005), Mathematical activity in *Visualization, Explanation and Reasoning styles in Mathematics*, Springer, 75–87.

GRANGER, G.G. (1963), *Essai d'une philosophie du style*, Paris : Odile Jacob.

GRANGER, G.G. (1998), *L'irrationnel*, Paris : Odile Jacob.

HOUDEMENT, C., KUZNIAK, A. (2003), Elementary geometry split into different geometrical paradigms. *Proceedings of CERME 3*, Bellaria, Italie.

HOUDEMENT, C., KUZNIAK, A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **11**, 175–193.

KAISER, G., LUNA, E. & HUNTLEY, I. (1999), *International Comparisons in Mathematics*, Education Falmer Press.

KUZNIAK, A. (2005), Diversité des mathématiques enseignées "ici et ailleurs": l'exemple de la géométrie, In Copirelem (Ed) *Enseigner les mathématiques en France, en Europe et ailleurs*, 47–56, Strasbourg : IREM de Strasbourg.

KUZNIAK, A. (2006), Paradigmes et espaces de travail géométriques. Eléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, **6(2)**, 167–188.

KUZNIAK, A., & VIVIER, L. (2009), A French look on the Greek Geometrical Working Space at secondary school level, *Proceedings of Cerme6*. Lyon, France

PIAGET, J. (1950), *Introduction à l'épistémologie génétique, La pensée mathématique*. Paris : PUF

ROBERT, A. (2003), Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation, *Petit x*, **63**, 7–29.

RODITI, E. (2004), Le théorème de l'angle inscrit au collège : analyse d'une séance d'introduction, *Petit x*, **66**, 18–48.

THURSTON, W.P. (1995), On Proof and Progress in Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, **15(1)**, 29–35. **90**

ALAIN KUZNIAK
Laboratoire de Didactique André Revuz,
Université Paris Diderot, France
kuzniak@math.jussieu.f

HELENA BOUBLIL-EKIMOVA

LACUNES GÉOMÉTRIQUES DES FUTURS ENSEIGNANTS

Abstract. Geometrical Difficulties Among Future Teachers. This article reflects on a study we have conducted in the organization of didactical formation for the teaching of geometry. We seek to draw a portrait of mathematical knowledge among teachers and future teachers in elementary schools. Analysis of research undertaken in the teacher formation relating to the mathematical preparation of teachers in primary education, made it possible for us to emphasize their difficulties and the principal reasons in the gaps in mathematical knowledge among students. In this article, we identified and described the difficulties of prospective teachers in the solving of concrete geometrical tasks and in the teaching of geometry during their practice in the schools.

Résumé. Cet article rend compte d'une analyse que nous avons menée afin de concevoir un dispositif de formation des futurs maîtres à l'enseignement de la géométrie au primaire. Nous cherchons à tracer un portrait des connaissances mathématiques des futurs enseignants du primaire, et plus particulièrement en géométrie. Cette identification des difficultés des étudiants à l'intérieur de la formation didactique se révèle intéressante dans la mesure où elle sert de point de départ à leur analyse, à l'analyse du contexte de leur apparition et à la recherche des conditions permettant leur résolution.

Mots-clés. Difficultés en apprentissage de la géométrie, formation des maîtres.

Introduction

Plusieurs recherches rapportent des difficultés éprouvées par des enseignants du primaire sur certains contenus mathématiques enseignés (Mayberry, 1983 ; Graeber, Tirosh, Glover, 1986 ; Ginther, Pigge et Gibney, 1987 ; Porter, 1989 ; Brown, Cooney et Jones, 1990 ; Fennema et Franke, 1992 ; Bauersfeld, 1994). En géométrie, ces difficultés concernent autant la visualisation et le raisonnement que l'organisation des concepts géométriques (Clements et Battista, 1992 ; Bishop, 1989 ; Hershkowitz, 1989). Notre propre analyse des difficultés des étudiants, futurs maîtres, et notre expérience d'enseignement à ce public corroborent ces résultats. Dans la première partie de cet article, nous décrivons les difficultés rencontrées en géométrie par les futurs maîtres, observées lors de notre enseignement en formation des maîtres. Notre étude porte sur deux groupes, constitués de 110 étudiants et étudiantes inscrits au cours obligatoire « Didactique de la géométrie et de la mesure » du programme du baccalauréat en enseignement primaire. L'analyse présentée dans la deuxième partie montre les éléments que nous avons fait ressortir pour dégager les principales raisons des lacunes en mathématiques des enseignants du primaire. Dans cet article, nous ne donnons que quelques exemples, pour justifier nos propos.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 15, p. 97 – 118.
© 2010, IREM de STRASBOURG.

1. Difficultés en apprentissage de la géométrie

Des recherches sur les obstacles et les difficultés des élèves dans l'apprentissage de la géométrie et dans la résolution de problèmes géométriques (Vladimirskii, 1949 ; Zhuravlev, 1950 ; Landa, 1955 ; Zykova, 1955,1969 ; Yakimanskaya, 1959, 1971 ; Kabanova-Meller, 1970 ; Fennema et Sherman 1977; 1978 ; Guay et McDaniel, 1977 ; Vinner et Hershkowitz, 1980 ; Gardner, 1983 ; Burger et Shaughnessy, 1986 ; Fischbein, 1987 ; Fuys, Geddes et Tischler, 1988 ; Bishop, 1989 ; Hershkowitz, 1989 ; Clements et Battista, 1992 ; Capponi et Laborde, 1995 ; Duval, 1995) ont montré que les difficultés se situent dans la visualisation, le langage, le raisonnement et leur emploi dans la résolution de problèmes (Ekimova, 2005). Dans cette partie, nous allons utiliser ce repérage des difficultés afin de décrire les conceptions et les comportements des étudiants, futurs maîtres, que nous avons pu observer et identifier lors de notre enseignement en formation des maîtres. Bien que nous ne possédions pas d'instruments d'analyse sûrs pour discriminer certaines difficultés qui relèvent de catégories différentes (par exemple, « visuelle » et « langagière »), nous allons essayer de dissocier, au moins partiellement, les différents savoirs géométriques mobilisés pour donner une réponse ou pour résoudre des problèmes, en privilégiant la première action ou l'action que nous jugeons essentielle. En particulier, nous nous intéressons aux difficultés éprouvées par un nombre important d'étudiants et à celles considérées comme des difficultés « typiques ». Pour ces dernières, nous nous rapportons aux recherches sur les obstacles et les difficultés des élèves dans l'apprentissage de la géométrie et dans la résolution des problèmes géométriques citées plus haut. En effet, puisque la majeure partie de nos étudiants, futurs maîtres, n'a pas eu de contact avec le contenu géométrique depuis le secondaire, nous pouvons partir de l'hypothèse que leur niveau de connaissances géométriques est comparable à celui des élèves du secondaire, à nuancer selon les connaissances déclaratives ou procédurales.

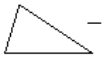
Chacune des sections suivantes sera consacrée à un type de difficultés et sera subdivisée en une partie descriptive et une partie analyse.

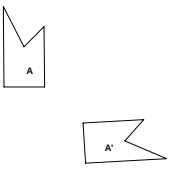
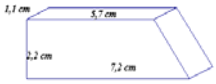
1.1. Difficultés visuelles

Le terme de « visualisation » est employé dans la littérature didactique en lien aux images visuelles, à la capacité spatiale, à la mémoire visuelle, au traitement visuel, aux rapports visuels, à l'attention visuelle et l'imagination visuelle (Bishop, 1980, 1989 ; Clements, 1982 ; Hershkowitz, 1989 ; Presmeg, 1986b). Selon Bishop (1989, p. 7), ce terme réfère à deux aspects différents : le produit, l'objet, ou le « quoi » de la visualisation appelé « image visuelle » et le processus ou le « comment » du fait de visualiser. Le troisième aspect s'entend aux traits éducatifs de visualisation - les activités mathématiques spécifiques et leur rôle dans le développement de processus permettant la construction des images visuelles.

La « visualisation » en tant que processus fait appel aux processus soit de la construction de l'image visuelle de la figure soit de son emploi. En ce qui concerne la construction de différentes représentations de la figure et de relations entre les éléments de la figure, on retrouve dans les recherches didactiques des références aux processus d'observation, de comparaison (recherche des ressemblances, des différences, des éléments congrus, d'un élément commun à deux figures, *etc*.), de représentation (graphique ou à l'aide des outils physiques ou informatiques), de transformations (pliage, découpage et composition), *etc*. qui permettent de réfléchir aux informations visuelles et de décrire les propriétés de la figure. Quant à l'emploi des images visuelles, on réfère plus aux processus de reconnaître, d'identifier, d'évoquer les figures et les relations entre les éléments de la figure à partir de l'observation de la figure ou de la description de ses propriétés.

Dans le tableau ci-après, nous donnons quelques exemples de difficultés éprouvées par les étudiants, que nous associons plus particulièrement au type « visuel ». Il s'agit de l'identification de la figure à partir de sa représentation graphique ou discursive, de la représentation graphique des éléments de la figure et de l'évocation de plusieurs figures correspondant à la description. Dans la description des difficultés visuelles des étudiants, on préfère utiliser le terme « reconnaissance » des figures au lieu de « dénomination », car ce n'est pas la connaissance de propriétés de la figure qui est en jeu dans les questions posées (les propriétés sont connues des étudiants), mais leur reconnaissance dans les représentations graphiques et discursives des figures.

Difficultés observées	**Exemples**
1. Reconnaissance de plusieurs caractéristiques particulières dans l'identification des figures (et pas seulement de la plus marquante).	– *triangle rectangle* (triangle rectangle isocèle), – *triangle isocèle* (triangle rectangle isocèle).
2. Reconnaissance des figures dans des positions inhabituelles.	 – Personne n'a reconnu le triangle isocèle ainsi représenté, – à la demande de donner les noms les plus précis de certaines figures planes, le « parallélogramme » a été identifié dans la seconde représentation et le « quadri-latère » dans la dernière (les réponses attendues étaient : « losange » et « trapèze rectangle »).

Difficultés observées	Exemples
3. Reconnaissance de transformations géométriques dans la représentation de deux figures (initiale et image) disposées inhabituellement.	 A à la question « *De quelle transformation géométrique s'agit-il ?*», une partie considérable du groupe ne reconnait pas la réflexion (mais la réflexion et la rotation). 9 étudiants parmi 54 ont identifié la rotation.
4. Reconnaissance de transformations géométriques possibles dans la représentation de deux figures (initiale et image).	A à la question « *De quelle(s) transformation(s) géométriques s'agit-il ? Indiquer les propriétés de chacune* », un seul type de transformation est donné.
5. Reconnaissance de certains axes de symétrie des figures (axes obliques ou dans des figures disposées inhabituellement)	Dans 75 % des réponses, la figure ci-dessous n'est pas reconnue comme symétrique.
6. Reconnaissance et représentation de figures obtenues par projection de solides ou de figures vues lorsque l'on observe un solide sous différents angles (vue de droite, de gauche, de haut, du bas).	À la demande de « *Tracer le dessin de ce qu'on voit lorsqu'on observe un solide de gauche, de droite, de haut* », certains tracent des parallélogrammes. Souvent, seule est représentée la face supérieure dans la vue de haut et dans la vue de droite, le rectangle représentant la face droite (et pas le rectangle 2.2x1.1) . 
7. Reconnaissance et représentation (dessin) du développement du cône.	Pour une partie considérable du groupe, le développement du cône est représenté par un triangle.
8. Reconnaissance des figures selon la description de leurs propriétés visuelles marquantes.	À la question « Qui suis-je ? Je suis un polygone ayant 3 côtés, dont 2 sont isométriques et ayant un angle droit », nous avons obtenu seulement 25 réponses complètes (parmi 110 participants) : triangle rectangle isocèle. La répartition des autres réponses obtenues a été la suivante. Triangle rectangle : 73, triangle isocèle : 6, triangle : 6. D'après ces résultats, il semble que, dans la détermi-nation du nom d'un triangle, la caractéristique locale d'« avoir un angle droit » domine par rapport à celle plus globale d'« avoir deux côtés de mesure égale » (73 contre 6).

Difficultés observées	Exemples
9. Reconnaissance de la figures (de plusieurs figures) correspondant à la description	– À la question « De quels solides s'agit-il ? J'ai au moins une surface courbe » qui prévoit la recherche de différents solides ayant cette caractéristique (cône, cylindre, sphère), 93 étudiants présentent seulement un solide et 10 réponses sont erronées, – à la question « De quelle(s) figure(s) s'agit-il ? « On peut me générer par une translation d'un triangle », à part d'un prisme à base triangulaire (translation dans l'espace, 48/110 réponses), seulement 3 étudiants, parmi les 110 étudiants interrogés, ont identifié aussi les polygones (ex. : trapèze, pentagone) pouvant être obtenus par la translation dans le plan.

Les étudiants manifestent une incapacité à coordonner des données visuelles avec les propriétés du concept en jeu ou avec le contenu de la consigne donnée. La reconnaissance des formes des figures et des propriétés géométriques soulève une difficulté lorsqu'il s'agit d'une représentation inhabituelle d'une figure ou simplement d'une orientation inhabituelle de la représentation[1]

Dans sa théorie des intelligences multiples, Gardner (1983, p. 8) souligne que la capacité spatiale est une des « *compétences intellectuelles humaines relativement autonomes* ». Des relations entre la capacité spatiale et l'accomplissement de tâches mathématiques chez des élèves de différents âges, ont été rapportées par les chercheurs américains Fennema et Sherman (1978) et Guay et McDaniel (1977). Ces travaux mettent en évidence de telles relations dans la résolution de différentes tâches géométriques, où la reconnaissance des figures géométriques dépend des opérations mentales de rotation et de translation des figures, de leur conjonction ou de leur séparation. La reconnaissance des figures disposées inhabituellement exige des élèves un saut qualitatif qui s'exprime par l'opération de rotation mentale d'un objet géométrique (Duval, 1995, p. 194).

De même, Yakimanskaya insiste sur l'importance de la visualisation dans la construction de concepts. « *Visualizations are used as a basis for assimilating abstract [geometric] knowledge and individual concepts*» (1971, p. 145). Par exemple, cette chercheure écrit que la compréhension du concept de rectangle et de ses propriétés exige que les élèves analysent le rapport spatial de ses côtés (opposés et adjacents). Laborde (1988, p. 343) affirme aussi que « *les données issues de la perception sont un des éléments clés dans la construction des savoirs théoriques* ».

[1] Les représentations graphiques des figures peuvent avoir des positions différentes dans le plan, mais les figures planes que les élèves rencontrent dans les manuels sont habituellement tracées en privilégiant les directions parallèles aux bords de la page.

La faible capacité à visualiser les figures géométriques selon la description de leurs propriétés peut être attribuée à une expérience géométrique insuffisante et à une difficulté à imaginer toutes les figures possibles ayant les propriétés décrites. C'est l'appréhension opératoire des figures qui peut servir de support intuitif à la reconnaissance spontanée d'une figure (ou d'une propriété) (Duval, 1995).

Vergnaud souligne la contribution de la perception et de l'imagination à la conceptualisation, car « *la conceptualisation est, par définition, l'identification des objets du monde et de leurs propriétés et relations* » (Vergnaud, 2001, p. 25). De même, écrit cet auteur, la conceptualisation apporte une contribution décisive à l'énonciation ; elle est une condition de l'énonciation (Vergnaud, 1991).

1.2. Difficultés langagières

Le langage et l'intuition géométriques sont des éléments fondamentaux dans l'acquisition de nombreux concepts et beaucoup d'échecs en mathématiques, souligne Vergnaud (1991), s'expliquent par l'incapacité à lire correctement, à comprendre l'énoncé, à justifier la démarche, *etc.*

Dans le tableau ci-après, nous donnons quelques exemples de difficultés langagières éprouvées par les étudiants. Il s'agit de l'emploi du langage géométrique dans l'identification des figures (de dimensions 3 et 2), des éléments de la figure et de leurs relations, dans l'interprétation des énoncés et des consignes et dans la description des démarches.

Difficultés observées	Exemples
10. Non-connaissance de certains termes géométriques.	– Parmi les droites remarquables du triangle (hauteur, bissectrice, médiane et médiatrice), seule la « hauteur » est bien connue, – la liste des polygones se termine par « hexagone ». Les termes « solide tronqué », « parallélépipède », « polyèdre », « corps rond », « secteur circulaire » (qui représente le développement de la surface latérale du cône) ne sont pas dans le vocabulaire des étudiants.

Difficultés observées	Exemples
11. Description de la figure ne fait pas appel à la recherche de maximum de ses caractéristiques	– *ligne brisée* (les caractéristiques telles que : ouverte, non simple, *etc*., étaient aussi attendues).
12. Emploi de termes imprécis dans l'identification, la description ou dans la définition des figures	– Dans les définitions du polygone (et du cercle) en tant que figure plane fermée composée de segments de droite (composée d'une ligne courbe …), les étudiants oublient le terme « fermé », – le qualificatif « régulier » n'accompagne pas le terme pentagone, hexagone, *etc*. dans la détermination du nom du polygone régulier, – dans la description des étapes de construction de figures planes, les incorrections langagières principales portaient sur l'emploi des termes géométriques pour - identifier (par exemple, « ligne » (au lieu de « segment », de « corde » ou de « diamètre »), « cercle » au lieu de « disque », « circonférence » au lieu de « cercle » (circonférence est la mesure du contour du cercle et pas le contour). Par exemple, à la question demandant de trouver le centre du cercle, le tiers des 82% qui ont réussi utilise dans la description des procédures l'expression suivante : *Tracer les* ***perpendiculaires*** *aux milieux des* ***segments*** (l'expression attendue était « médiatrices des cordes »), - décrire les procédures (par exemple, « reporter la mesure d'angle A» au lieu de « mesurer l'angle A »), et sur l'absence d'étapes nécessaires (par exemple, il faut trouver le milieu avant de tracer la hauteur du triangle isocèle), *etc*.

Des recherches analysées (Van Hiele, 1987 ; Yakimanskaya, 1971 ; Fuys, Geddes et Tischler, 1988) il ressort que la mise en œuvre par des élèves du processus de conceptualisation nécessaire à l'énonciation, demande que l'enseignement insiste sur la recherche et la description du maximum de propriétés d'une figure géométrique. Cela établit une base permettant plus tard la déduction des propriétés. En effet, ce type de travail permet d'élargir des concepts géométriques particuliers ; il permet aussi d'éviter les obstacles associés à la modification d'un concept déjà mis en

place sous une forme réduite (comprendre par exemple qu'il peut arriver qu'un rectangle soit un carré) ou d'un énoncé géométrique appris par cœur sans être compris. Si, précise Yakimanskaya (1971), les enseignants se contentent de signaler par des informations verbales les propriétés de figures, sans se préoccuper de l'organisation des activités pour le développement de l'imagination spatiale des élèves, cet enseignement « formaliste » ne participera pas à la construction des concepts. Dans de telles conditions, l'apprentissage au niveau supérieur exigera une mémorisation (Clements et Battista, 1992).

1.3. Difficultés à raisonner

Le raisonnement est l'un des éléments fondamentaux dans la construction de concepts géométriques et son emploi est un indicateur de la progression conceptuelle de l'élève (van Hiele, 1959/1984, p. 246). En ce sens, la géométrie constitue un lieu privilégié, car elle « *entraîne les élèves au raisonnement mathématique, c'est-à-dire à un mélange de raisonnement déductif et d'imagination inductive, activé par une manipulation familière des images* » et « *prépare les élèves à aborder d'autres théories mathématiques* » (Brousseau, 2000, p. 1). Notons d'emblée, à l'instar de Brousseau, que la tendance des « mathématiques modernes » à assimiler le raisonnement mathématique au raisonnement déductif a contribué fortement « […] *à dévaluer la partie du « raisonnement » qui, à l'école primaire consistait à ordonnancer, à annoncer et à justifier un ensemble de tâches, ou un calcul…* » (p. 2).

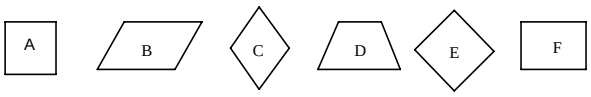
En ce qui concerne le raisonnement visé par l'enseignement primaire, on peut décrire son emploi en référant aux processus mentaux qui favorisent la formation des idées et des jugements destinés à construire la connaissance, à mettre de l'ordre dans la connaissance, à choisir et appliquer les concepts et les processus appropriés à la tâche, à justifier, à convaincre, à prouver ou à réfuter et à développer des relations de dépendance entre des propositions pour aboutir à une conclusion. Il s'agit pour nous plus du fonctionnement « naturel » du raisonnement qui est commandé par les représentations des sujets (Duval, 1995) en le distinguant du raisonnement « logique »[2] qui est commandé par des règles de validité.

Dans le tableau ci-après, nous donnons quelques exemples de difficultés éprouvées par les étudiants qui peuvent être associées aux processus décrits ci-haut.

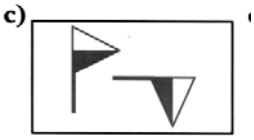
---

[2] Duval (1995, p. 250) distingue les formes suivantes de raisonnement :

- le syllogisme aristotélicien qui a été si longtemps considéré comme le raisonnement logique,
- le raisonnement déductif et le raisonnement par l'absurde qui sont, en mathématiques, les formes de raisonnement pour la démonstration,
- l'argumentation, forme de raisonnement plus adaptée aux situations ouvertes de discussion ou de recherche

<table>
<tr><th>Difficultés observées</th><th>Exemples</th></tr>
<tr><td>13. Reconnaissance de la forme du quadrilatère ne fait pas appel à la définition et à la recherche des propriétés communes de classes, même si la consigne le demande.</td><td>A la question suivante : Faites la classification en considérant les propriétés et les définitions habituelles des quadrilatères suivants selon le tableau ci-dessous :
 

<table>
<tr><th>Quadrilatères</th><th>Réponses</th></tr>
<tr><td>Carré</td><td></td></tr>
<tr><td>Losange</td><td></td></tr>
<tr><td>Rectangle</td><td></td></tr>
<tr><td>Parallélogramme</td><td></td></tr>
<tr><td>Trapèze</td><td></td></tr>
</table>
Parmi 16 (sur 110) réponses complètes pour les quatre premières classes (carrés, losanges, rectangles, parallélogrammes), 6 participants ont identifié le trapèze seulement dans sa représentation habituelle.</td></tr>
<tr><td>14. Compréhension de la consigne ou des mots particuliers de la consigne (comme « est », « s’appelle », « au moins », « certainement », etc.), qui participent à la réponse attendue.</td><td>À la question « Comment appelle-t-on ?
c) Un quadrilatère dont les côtés sont isométriques s’appelle _____ ».
il y avait seulement 7 réponses correctes (losange). Et encore, 7 contenaient deux noms « carré, losange» ; 95 étudiants ont répondu « carré».</td></tr>
<tr><td>15. Détermination des figures selon la description de leurs propriétés (définitions constructives).</td><td>En demandant de déterminer le quadrilatère <u>défini</u> par des énoncés du genre suivant « Mes diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu », etc., nous avons observé les difficultés chez presque la moitié du groupe (qui a répondu le carré au lieu du losange).
(Les étudiants confondent ainsi l’appartenance d’une figure à une classe de quadrilatères définie par une propriété et la détermination d’une classe par une propriété).</td></tr>
<tr><td>16. Distinction entre une définition et une description.</td><td>Les étudiants font peu de distinction entre une définition et une description. Pour eux, « définir » signifie souvent nommer une propriété ou plusieurs appartenant à la figure.</td></tr>
</table>

Difficultés observées	Exemples
17. Classification des figures géométriques.	– La classification des triangles fait appel aux quatre classes suivantes : isocèles, équilatéraux, scalènes et rectangles. (Les critères de classification selon les côtés et selon les angles ne sont pas utilisés), – les étudiants ont une représentation erronée des relations entre les classes de triangles : les « triangles isocèles » et « triangles équilatéraux » sont vus comme deux classes distinctes, les triangles isocèles sont vus comme une sous-classe des « triangles scalènes ».
18 Connaissance de propriétés des transformations.	À la question : « *Dans cet encadré, on a dessiné un objet qui a ensuite été déplacé. Quelle transformation a été effectuée ? Indiquer les propriétés de cette transformation* », la rotation (ou la rotation et la translation) a été facilement reconnue. Cependant peu de réponses correctes ont été obtenues quant aux propriétés (centre et angle de rotation). 
19. Conversion des unités de mesure.	À la question : « *Combien y a-t-il de mètres carrés dans* 2 *kilomètres carrés ? dans 1 centimètre carré* ? », les taux de réussite ont été respectivement de 15/110 et 14/110.
20. Emploi des concepts principaux.	Dans la question : « *L'aire d'un cercle est de 320 cm*^{2}. *Parmi les réponses suivantes (*31.4, 94.2, 62.8), *laquelle se rapproche le plus de la mesure de la circonférence ? Entourer la réponse. Justifier.* », l'application des formules d'aire et de circonférence du cercle a été effectuée par 33 participants (parmi 110).
21. Justification des résultats.	– À la question « Vrai ou Faux ? Justifier la réponse. » a) *Si on double les côtés d'un rectangle, son aire aussi double*, la majorité des participants répond à la question sans justification. (Les justifications données contiennent des exemples concrets.)

Le phénomène de la non-reconnaissance d'une figure dans une de ses représentations dessinées appelée « dessin/figure », « figural concept », *etc*. (cité dans Capponi et Laborde, 1995, p. 265) est dû au traitement théorique du dessin et dépend du niveau conceptuel de l'étudiant.

Vinner et Hershkowitz (1980) déclarent qu'en pensant à des objets géométriques, les élèves n'emploient pas des définitions de concepts, mais plutôt des images, des

combinaisons de toutes les images mentales et des propriétés qui ont été associées au concept. Leur recherche démontre qu'une même représentation de figure peut être associée par les élèves à des concepts géométriques différents et que telle ou telle représentation peut trouver sa source dans un enseignement inopportun et dans le choix limité des exemples présentés dans les manuels.

Les autres études (Zykova, 1969 ; Kabanova-Meller, 1970 ; Burger et Shaughnessy, 1986 ; Fuys, Geddes et Tischler, 1988) attestent que les conceptions limitées d'élèves s'expliquent par l'habitude d'apprendre les exemples particuliers et de considérer comme l'élément essentiel du concept des particularités non essentielles, mais communes. Hershkowitz (1989) constate également que les élèves peuvent avoir des difficultés dans l'application d'une définition qu'ils connaissent, s'ils ont aussi une image visuelle spécifique associée à ce concept. Cela aide à expliquer la résistance des élèves aux rapports hiérarchiques entre les quadrilatères particuliers : les images attachées à chaque figure fonctionnent cognitivement non pas comme des cas particuliers, mais comme des modèles généraux (Fischbein, 1987).

À partir de l'école primaire, la nécessité de raisonner se présente plus particulièrement dans des situations de classification, de construction et de résolution de problèmes. Ces activités participent à une structuration des connaissances, à la construction de concepts géométriques, permettent de faire le choix de concepts et de les appliquer correctement, de réduire l'information à ce qui est nécessaire et suffisant pour comprendre et traiter une situation. Cependant les différentes activités qu'on peut observer dans les manuels scolaires sont proposées comme des faits géométriques établis, ce qui ne donne pas à l'élève l'occasion ni d'observer et de découvrir des relations d'objets géométriques ni de mettre en jeu de telles relations dans des activités plus conceptuelles. Avec une telle approche, tout ce qui reste à l'élève est de retenir par cœur les énoncés des propriétés des figures et des classes.

Dès l'école primaire, on doit offrir aux élèves des occasions de construire leur pensée géométrique, et si les élèves n'atteignent pas le niveau suffisant pour employer le raisonnement, écrit Van Hiele (1986) c'est, en partie, parce qu'on ne leur offre pas de problèmes géométriques appropriés. Cette « *période prolongée d'inactivité géométrique* » (Wirszup, 1976, p. 85) dans les premières années d'apprentissage rendrait les élèves « *geometrically deprived* » (Fuys, Geddes et Tischler, 1988). Laborde (1994, p. 386) affirme que la sélection des éléments pertinents d'un dessin pour les interpréter géométriquement et les rattacher à des concepts géométriques ne sont pas des compétences spontanées chez les élèves, mais le résultat d'un apprentissage.

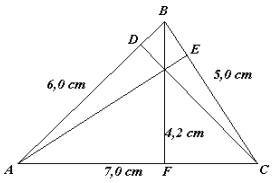
Les enseignants devraient orienter leur travail tout d'abord vers le niveau où « *des figures géométriques deviennent les porteurs de propriétés* » (Wirszup, 1976, p. 88) pour ensuite, viser la compréhension des relations entre les propriétés de la figure et entre les figures.

1.4. Résolution de problèmes

La résolution de problèmes se situe parmi les activités les plus complexes et exige beaucoup d'autonomie, d'initiative intellectuelle et de compréhension de la part du sujet. L'analyse de recherches portant sur les difficultés des élèves dans la résolution de problèmes géométriques qui emploient le dessin (Yakimanskaya, 1958 ; Zykova, 1955 ; Zhuravlev, 1950), démontre que la démarche de recherche de la solution dépend du niveau de visualisation et de conceptualisation. Il s'agit de la reconnaissance et de l'identification des éléments (indiqués ou supposés) nécessaires à la résolution d'un problème géométrique, de la capacité de tirer des informations supplémentaires de l'observation visuelle (visualiser les éléments non-tracés et les procédures permettant la résolution d'un problème) et de déterminer les conséquences logiques de certaines données.

Dans le tableau ci-après, nous donnons quelques exemples de difficultés éprouvées par les étudiants dans la résolution de problèmes géométriques. Il s'agit de difficultés visuelles, langagières et conceptuelles.

Difficultés observées	Exemples
22. Coordination entre les éléments visuels et les concepts et/ou les théorèmes pertinents.	– À la question demandant de trouver le périmètre de l'hexagone régulier inscrit dans un cercle de l'aire de π cm^2, presque la moitié du groupe ne répond pas à la question. Les difficultés des étudiants sont dues à l'absence du dessin (hexagone inscrit), à l'interprétation du terme « inscrit », à l'identification et à la représentation sur le dessin des axes divisant l'hexagone en six triangles, à la détermination de la nature de ces triangles (équilatéraux), à l'identification d'un élément commun (rayon/côté de l'hexagone) et l'emploi de formules (A et P).

Difficultés observées	Exemples
	– À la question : « *Voici le triangle ABC dont les mesures des côtés sont : mAB=6cm, mBC=5cm, mAC=7cm et de la hauteur mBF=4,2cm. Trouvez les mesures de deux autres hauteurs* », la majorité essaye d'appliquer la formule de Pythagore, quelques-uns mesurent à la règle (bien que toutes les données nécessaires à la résolution soient présentes et que chacun connaisse la formule de l'aire du triangle). Cet exemple correspond à un échec permanent et peut aussi être considéré comme « problème canonique ». 

La lecture du dessin demande soit de reconnaître un tout à partir de ses éléments ou de « disséquer » les parties d'un tout, soit d'analyser la figure selon son arrangement spatial, soit encore d'établir des relations entre les éléments de la figure et de découvrir de nouvelles informations (Zhuravlev, 1950 ; Zykova, 1955 ; Yakimanskaya, 1958).

Rubinshtein (1958) explique que les figures (ou les éléments nécessaires pour résoudre un problème) ne heurtent pas l'œil quand on « regarde » simplement le dessin et que le processus de perception d'un dessin n'est pas un acte instantané qui aurait pour résultat une découverte immédiate de la complexité entière d'un objet géométrique. La diversité des éléments du dessin apparaît seulement par l'activité mentale analytique-synthétique active du sujet, qui définit les divers critères de l'analyse. Ce processus d'analyse permet à l'élève d'évoquer certains éléments de la figure, les relations entre les éléments, de relier cette figure à une figure ou à la démarche connue, de représenter ces éléments sur le dessin ou de les employer afin de répondre à la question ou résoudre un problème.

Dans une revue de l'Institut de la psychologie de l'Académie des sciences pédagogiques de RSFSR[3] (1958), les recherches sur les difficultés des élèves dans l'étude des preuves géométriques expliquent les erreurs commises par un processus d'abstraction ou par une « vision mathématique »[4] insuffisamment développés (Zhura-

[3] L'abréviation de la république russe (l'une des quinze républiques de l'U.R.S.S).

[4] Ce terme est employé dans la recherche de Zhuravlev (1950) sans être précisé. Nous comprenons par la « vision mathématique » le comportement attendu dans la résolution des tâches mathématiques (et géométriques en particulier) exigeant la reconnaissance des éléments (présents ou supposés) nécessaires à la résolution, la capacité à tirer des informations supplémentaires de l'observation visuelle (déterminer les conséquences logiques de certaines données) et l'anticipation de la stratégie

vlev, 1950 ; Zykova, 1955 ; Yakimanskay, 1959) et notent que les élèves ont des difficultés à coordonner mentalement le dessin avec la condition du problème contenue dans la consigne (Vladimirskii, 1949, Landa, 1955, Kabanova-Meller, 1959).

Cette identification des difficultés se révèle intéressante pour l'organisation de la formation de futurs maîtres, dans la mesure où elle peut servir de point de départ à leur analyse, à l'analyse du contexte de leur apparition et à la recherche des conditions permettant leur résolution.

2. Préparation mathématique des enseignants, compte tenu de leurs lacunes

Si les recherches analysées (Mayberry, 1983 ; Graeber, Tirosh, Glover, 1986 ; Ginther, Pigge et Gibney, 1987 ; Porter, 1989 ; Brown, Cooney et Jones, 1990 ; Fennema et Franke, 1992 ; Bauersfeld, 1994 ; Burton, Detheux-Jehin et Fagnant, 1997) proviennent de différents pays (ayant des programmes différents de formation et différents critères d'évaluation), plusieurs de ces études notent une préparation faible en mathématique des enseignants du primaire.

Brown, Cooney et Jones (1990), en faisant le bilan d'un ensemble d'études en formation initiale des maîtres, rapportent qu'en général les enseignants du primaire aux États-Unis ne possèdent pas un niveau suffisant de compréhension des mathématiques pour enseigner cette discipline. Graeber, Tirosh, Glover (1986) précisent qu'ils ont des difficultés dans le choix des opérations appropriées pour résoudre les problèmes mathématiques. Dans leur étude de 1989, ils associent les difficultés des enseignants aux erreurs que font les élèves du primaire.

L'étude de Fennema et Franke (1992), par la description des erreurs des enseignants en résolution de tâches mathématiques, conclut aussi que la responsabilité des enseignants est engagée pour les difficultés observées chez leurs élèves dans l'apprentissage des mathématiques.

Bauersfeld (1994) souligne que le « bagage mathématique et pédagogique » des futurs maîtres, accumulé dans les années d'études pré-universitaires, peut engendrer des conséquences importantes sur leur formation universitaire. Notre propre analyse de 184 cas d'échec à l'examen de classement en mathématiques pour la formation à l'enseignement primaire (en 1999) montrait que le tiers de ces étudiants en échec n'avait pas suivi de cours de mathématiques en dernière année d'enseignement secondaire et que 150 étudiants n'avaient pas eu de formation mathématique au niveau collégial (Ekimova, 2005). Cependant, d'autres chercheurs (Ginther, Pigge et Gibney, 1987) ont montré que le nombre de cours suivis en ma-

---

de résolution (le choix et l'emploi de concepts et de méthodes permettant la résolution d'un problème).

thématiques n'explique pas à lui seul le niveau insuffisant de la connaissance de la discipline d'une grande partie des professeurs du primaire.

Quelles autres raisons pourraient alors expliquer la faible préparation mathématique (et géométrique en particulier) des enseignants du primaire ? L'étude de Porter (1989) démontre que la géométrie est le sujet le plus fréquemment identifié par les étudiants comme étant appris simplement pour « être récité », c'est-à-dire que le contenu géométrique a été couvert de façon brève et superficielle (p. 11). Mayberry (1983) signale qu'apparemment, beaucoup de concepts géométriques ont été appris par cœur. De plus, souligne Porter (1989), les enseignants n'enseignent pas souvent certains contenus prescrits par le programme d'études de la géométrie.

Dans l'étude portant sur le premier degré de l'enseignement secondaire, les chercheurs belges Burton, Detheux-Jehin et Fagnant (1997) dégagent le contenu géométrique évalué par les enseignants et le relient à la connaissance que les enseignants possèdent. La géométrie évaluée est surtout la géométrie plane (seulement six pour cent de questions font référence à la géométrie dans l'espace). Les questions sont posées (dans la majorité des cas) sur un aspect précis de la matière. Parmi les questions portant sur les constructions, 84 % des exercices se résument à une simple construction au moyen des instruments, 3 % demandent de rédiger les étapes et seulement 13 % imposent de donner des justifications de la construction. Aucun exercice de démonstration n'est proposé aux élèves. Quant à la technique d'apprentissage de la démonstration, les auteurs mentionnent qu'elle se réalise en trois étapes « *apprendre par cœur, compléter des démonstrations lacunaires, rédiger et résoudre des démonstrations innovantes* ». Les questions portant sur une démarche explicative et justificative sont peu représentées dans les tests d'évaluation. Les résultats montrent d'importantes variations dans les évaluations des élèves et cette diversité, concluent les auteurs, a des conséquences sur la réussite ou l'échec de l'élève, sur le bagage géométrique acquis et sur les méthodes employées par l'élève dans ses préparations aux tests et aux examens.

De façon implicite ou explicite, ces études font ressortir le fait que les connaissances mathématiques des enseignants influent considérablement sur l'enseignement de cette discipline. Cela s'observe dans le choix du contenu, dans les évaluations des apprentissages et surtout dans la manière d'enseigner. Quant aux raisons principales des lacunes mathématiques des enseignants, nous pensons que le nombre de cours suivis, le contenu étudié et surtout la façon dont ce contenu a été enseigné et appris jouent un rôle décisif.

La préparation géométrique (et surtout la formation d'une culture géométrique) nous apparaît donc un enjeu important, sur lequel nous devons agir dans le cadre de notre formation. Nous admettons volontiers qu'une bonne connaissance mathématique n'est pas une condition suffisante pour un bon enseignement. Cependant, il

nous faut aussi admettre qu'il est très difficile pour le formateur en didactique des mathématiques de parler de didactique pour l'acquisition de connaissances, lorsque celles-ci sont ignorées du public auquel le formateur s'adresse. De plus les connaissances didactiques que le formateur transmettra lors de son enseignement seront interprétées selon les théories personnelles des étudiants et probablement ne seront pas mobilisées dans la pratique, donc ne deviendront pas utiles pour l'enseignement. Peut-être se trouve ici l'une des raisons qui expliqueraient l'écart existant entre le contenu didactique de la formation et son utilisation dans la réalité scolaire.

Dans le cadre de notre enseignement en formation des maîtres et lors des observations des futurs maîtres en stages, nous avons pu confirmer à maintes reprises la nécessité d'approfondissement des connaissances disciplinaires. Souvent, le manque de connaissances spécifiques ne permettait pas aux stagiaires de se servir des occasions d'explorer l'inconnu, de profiter d'une situation pour aller plus profondément dans la recherche du sens de la notion, de répondre de façon adéquate aux questions des élèves, d'utiliser les réponses non complètes pour continuer dans la même direction en modifiant la question ou en utilisant le contre-exemple, *etc*. Dans certains cas provoqués par des imprévus qui demandaient une prise de décision dans le feu de l'action, les étudiants faisaient des erreurs géométriques (Ekimova et Portugais, 2001).

Les étudiants ont un réel besoin de formation aux différentes démarches géométriques, aux diverses formes qu'elles peuvent prendre, à leur emploi. Par exemple, ils ne connaissent qu'une méthode d'enseignement de la notion de cercle, celle qui consiste à montrer les propriétés essentielles du cercle, les nommer, montrer les formules, proposer les exercices d'application.

Réflexions pour la formation des enseignants

L'analyse des recherches portant sur les difficultés en apprentissage de la géométrie nous montre l'importance du développement progressif et harmonieux de la visualisation, du langage géométrique et du raisonnement, lesquels participent à la construction des concepts géométriques et à la résolution de problèmes. Quant à la performance de nos étudiants au niveau de la visualisation, de l'identification des propriétés géométriques, de la conceptualisation, de l'imagination spatiale, de l'abstraction et de la résolution de problèmes géométriques, elle n'est certes pas élevée, surtout en début de la formation. Les activités telles que la classification de figures ou la résolution de problèmes continuent de constituer un obstacle chez certains même à la fin de formation.

L'enseignement de la géométrie à l'école primaire exige de l'enseignant une mise en œuvre d'une multitude de connaissances susceptibles de développer les aptitudes et les connaissances spatiales des élèves. Pour pouvoir atteindre ces objectifs,

l'enseignant lui-même doit posséder ces aptitudes et avoir connaissance de cet environnement. Pour ce qui est des objectifs géométriques de la formation didactique à l'enseignement primaire, nous pensons qu'elle doit présenter une organisation qui mette l'accent sur la « manière » d'apprendre et dans laquelle les étudiants seront amenés à revivre le développement progressif de concepts géométriques. En formation, la focalisation sur des contenus géométriques particuliers posant problème aux élèves s'avère insuffisante compte tenu du faible niveau de préparation géométrique des futurs maîtres. Pour être à l'aise dans leur enseignement, les futurs enseignants ont besoin d'un système cohérent de connaissances géométriques et non d'une collection de savoirs géométriques particuliers.

Comment organiser la formation didactique à l'enseignement de la géométrie de telle sorte qu'il y ait chez les futurs enseignants une progression de niveaux de la pensée géométrique et une appropriation et mise en œuvre des concepts didactiques ? Cette question suppose la recherche d'un équilibre dans l'articulation entre les savoirs géométriques et les activités géométriques et entre les savoirs géométriques et la pratique enseignante.

Bibliographie

BATTISTA, M.T., WHEATLEY, G.H. & TALSMA, G. (1982), The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in preservice elementary teachers, Journal for Research in Mathematics Education, **13**, 332–340. In S. I. Brown, T. J. Cooney & D. Jones, Mathematics teacher education, in W. Robert Houston (ed.), *Handbook of Research on Teacher Education*, 1990, New York: Macmillan.

BAUERSFELD, H. (1994), Réflexions sur la formation des maîtres et sur l'enseignement des mathématiques au primaire, *Revue des sciences de l'éducation*, **20(1)**, 175–198.

BISHOP, A.J. (1980), Spatial ability and mathematics education, *Studies in Mathematics Education*, **11**, 257–269.

BISHOP, A.J. (1989), Review of visualization in mathematics education, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, **11(1)**, 7–16.

BROUSSEAU, G. (2000), *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire : l'étude de l'espace et de la géométrie*, [En ligne]. http://dipmat.math.unipa.it/~grim/brousseau_geometrie_03.pdf. 8 (Page consultée le 15 mai 2002).

BROWN, S.I., COONEY, T.J. & JONES, D. (1990), Mathematics teacher education, In W. Robert Houston (ed.), *Handbook of Research on Teacher Education*, 1990, New York: Macmillan, 639–657.

BURGER, W. & SHAUGHNESSY, J. (1986), Characterizing the van Hiele Levels of Development in Geometry, *Journal for Research in Mathematics Education*, **17**, 31–48.

BURTON, J., DETHEUX-JEHIN, M. et FAGNANT, A. (1997), *Comment les enseignants évaluent-ils la géométrie au premier degré secondaire ?*, Liège : Service de Pédagogie expérimentale de l'Université.

CAPPONI, B. et LABORDE, C. (1995), Modélisation à double sens, Dans R. Noirfalise et M.-J. Perrin-Glorian, *Actes de la VIIIe École didactique d'été*, Saint-Sauves d'Auvergne, France, 265–272.

CLEMENTS, K. (1982), Visual imagery and school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, **2 (2 &3)**, 2-–9, 33–38.

CLEMENTS, D. & BATTISTA, M. (1992), Geometry and Spatial Reasoning, In D. Grows, (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, NewYork: Macmillan Publishing Co., 1992.

DUVAL, R. (1992), Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ?, *Petit x*, **31**, IREM de Grenoble, 37–61.

DUVAL, R. (1995), Sémiosis et pensée humaine : registre sémiotique et apprentissages intellectuels, Berne : Peter Lang.

EKIMOVA, E. et PORTUGAIS, J. (2001), L'emploi de manuels scolaires et du référentiel des compétences par de futurs enseignants en enseignement de la géométrie au primaire, *Actes du colloque de GDM*, Montréal, 94–119.

EKIMOVA, E. (2005), *Une approche de formation didactique à l'enseignement de la géométrie au primaire*, Thèse de Doctorat, Université de Montréal.

FENNEMA, E. & FRANKE, M.L. (1992), Teachers' knowledge and its impact, In D.A. Grows (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and learning*, New York: The National Council of Teachers of Mathematics, 147–164.

FENNEMA, E. & SHERMAN, J. (1978), Sex-related differences in mathematics achievement and related factors: a further study, *Journal for Research in Mathematics Education*, **9**, 189–203.

FISCHBEIN, E. (1987), *Intuition in Science and Mathematics*, Dortrecht, The Netherlands: D. Reidel Publishing Company.

FISCHBEIN, E. (1993), The theory of figural concepts, *Educational Studies in mathematics*, **24(2)**, 139–162.

FUYS, D., GEDDES, D. & TISCHLER, R. (1988), The van Hiele Model of Thinking in Geometry Among Adolescents, *Journal for Research in Mathematics Education Monograph*, **3**, Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

GARDNER, H. (1983), *Forms of mind. The theory of multiple intelligence*, New York: Basic Books.

GINTHER, J.L., PIGGE, F. & GIBNEY, T.C. (1987), Three decade comparison of elementary teachers' mathematics courses and understandings, *School Science and Mathematics*, 587–597.

GRAEBER, A., TIROSH, D. & GLOVER, R. (1986), Perservice teachers' beliefs and performance on measurement and partitive division problems, In G. Lappan & R. Even (Eds.), *Proceedings of the Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, East Lansing, MI : Michigan State University, 262–267.

GUAY, R.B. & MCDANIEL, E. (1977), The relationship between mathematics achievement and spatial abilities among elementary school children, *Journal of research in Mathematics Education*, **8**, 211–215.

GUTIÉRREZ, A., JAIME, A. & FORTUNY, J.M. (1991), An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels, *Journal for Research in Mathematics Education*, **22(3)**, 237–251.

HERSHKOWITZ, R. (1989), Visualization in geometry – Two sides of the coin. *Focus on learning problems in mathematics*, **11**, 61–76.

HERSHKOWITZ, R., BEN-CHAIM, D., HOYELES, C., LAPPAN, G., MITCHELMORE, M. & VINNER, S. (1990), Psychological aspects of learning geometry, In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition. A research synthesis by the International group for the Psychology of mathematics Education*, Cambridge, MA: Cambridge University press, 70–95.

HOFFER, A. (1983), Van Hiele-based research, in *Acquisition of mathematics concepts and processes* (Eds. R. Lesh & M. Landau), Academic Press, New York, USA, 205–227.

KABANOVA-MELLER, E.N. (1959), Positive and negative abstraction in the process of solving geometry problems, Institute of Psychology, Academy of Pedagogical Sciences of the RSFSR, *Published in Reports (Doklady) of the Academy of Pedagogical Sciences of the RSFSR*, **1**, Translated by Joan W. Teller, 3l–34.

KABANOVA-MELLER, E.N. (1970), The role of the diagram in the application of geometric theorems, In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, **4**, Chicago: University of Chicago, 7–49.

KRUTETSKII, V.A. (1976), *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*, Chicago: University of Chicago press.

LABORDE, C. (1988), L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, **9(3)**, 337–364.

LABORDE, C. (1994), Les rapports entre visuel et géométrie dans un EIAO, Dans M. Artigue, R. Gras, C. Laborde et P. Tavignot (dir.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*, Grenoble : La Pensée Sauvage, 387–394.

LANDA, L.N. (1955), *The Psychology of Forming Methods of Reasoning*, (dissertation), Moscow.

LEINHARDT, G. (1988), Expertise in instructional lessons: An example from fractions, In D. Grows, T. Cooney & D. Jones (Eds.), *Perspectives on research on effective mathematics teaching*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 47–66.

MAYBERRY, J. (1983), The Van Hiele levels of geometry thought in undergraduate preservice teachers, *Journal for Research in Mathematics Education*, **14**, 50–59.

PORTER, A. (1989), A curriculum out of balance. The abc of elementary school mathematics, *Educational Researcher*, **18**, 9–15.

PRESMEG, N.C. (1986b), Visualization in high-school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, **6**, 42–46.

RUBINSHTEIN, S.L. (1958), *Bowing Consciousness*, Moscow.

VAN HIELE, P.M. (1986), *Structure and Insight: A theory of MathematicsEducation*, Academic Press Inc., London.

VAN HIELE, P.M. (1959/1984), The child's thought and geometry, In D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writing of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*, Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education, 1985, 243–252, (ERIC Document reproduction Service n. 289 697).

VAN HIELE-GELDOF, D. (1957/1984), The didactics of geometry in the lowest class of secondary school, In D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writing of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele*, Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education, 1985, 1–214, (ERIC Document reproduction Service n. 289 697).

VERGNAUD, G. (1991), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques*, **10(2-3)**, 133–170.

VERGNAUD, G. (2001), Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance, *Actes du colloque de GDM*, Montréal.

VINNER, S. & HERSHKOWITZ, R. (1980), Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts, *4th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley.

VLADIMIRSKII, G.A. (1949), The Experimental Basis of a System and Methodology of Exercises in the Development of Spatial Imagination, *Proceedings of the APS*, **27**.

WIRSZUP, I. (1976), Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry, In J. L. Martin & D. A. Bradbard. (Eds.), *Space and geometry, Papers from a research workshop*, Athens, GA: University of Georgia, Georgia Center for the Study of Learning and Teaching Mathematics, 75–97. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 132 033).

YAKIMANSKAYA, I.S (1959), Individual differences in solving geometry problems on proof, Institute of Psychology, Academy of Pedagogical Sciences of the

RSFSR, Published in *Reports (Doklady) of the Academv of Pedagogical Sciences of the RSFSR*, **1**, 3l–34. (Translated by Joan W. Teller).

YAKIMANSKAYA, I.S. (1971), The development of spatial concepts and their role in the mastery of elementary geometric knowledge, In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, ***5***, 145–168, Chicago: University of Chicago.

ZHURAVLEV, B.B. (1950), Mathematical Vision, *Mathematics in the School*, **5**.

ZYKOVA, V.I. (1955), Essays oh the Psychology of Mastering Elementary Geometric Knowledge, Moscow, 1955. Of the Institute of Psychology, Academy of Pedagogical Sciences of the RSFSR. Published in *Report (Doklady) of Academy of Pedagogical Sciences of the RSFSR*, 1958, **3**, 49–54. Translated by Linda Norwood.

ZYKOVA, V.I. (1969), Operating with concepts when solving geometry problems, In J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.), *Soviet studies in the psychology of learning and teaching mathematics*, **1**, 93–148, Chicago: University of Chicago.

HELENA BOUBLIL-EKIMOVA
Université Laval
Département d'études sur
l'enseignement et l'apprentissage
Québec, Canada, G1V 0A
helena.boublil@fse.ulaval.ca

CAROLINE BULF

LE RÔLE DE LA SYMÉTRIE DANS LA NATURE DU TRAVAIL GÉOMÉTRIQUE DES TAILLEURS DE PIERRE ET DES ÉBÉNISTES

Abstract. The role of symmetry in the geometrical nature of work of stone-cutter and cabinetmacker. Through interviews with stone tailors and cabinet markers, we studied the nature of the treatment of the concept of symmetry. This study shows that the symmetries identified orient the craftsman's gestures towards a large list of techniques relatively rooted. The gestures of a craftsman may come from teaching's residue, contextual adaptation, knowledge or references to expertise. The entanglement of all these factors is such that we can give the concept of symmetry, a status that reflects all these influences : this means that the symmetry is not a familiar concept or a scientific concept, to use the terminology of Vygotsky, but rather refers to an intermediate concept that reflects all these influences, a concept that is "naturalized".

Résumé. A partir d'entretiens-actions auprès de tailleurs de pierre et d'ébénistes, nous avons étudié la nature du traitement du concept de symétrie. Cette étude montre que les symétries repérées orientent leurs gestes vers des répertoires de techniques relativement figés. Les gestes des artisans peuvent provenir de résidus d'enseignement, d'une adaptation au contexte, d'un savoir ou savoir-faire de référence. L'intrication de ces facteurs est telle que l'on peut accorder au concept de symétrie un statut qui rend compte de toutes ces influences, c'est-à-dire un statut non pas de concept familier ou de concept scientifique, pour reprendre la terminologie de Vygotski mais plutôt un concept intermédiaire qui rend compte de toutes ces influences, autrement dit un concept « naturalisé ».

Mots-clés. Didactique des mathématiques, géométrie euclidienne, symétrie, transformations du plan, Espaces de Travail Géométrique (ETG), tailleur de pierre, ébéniste.

Introduction

Cette recherche s'inscrit dans une recherche plus générale sur les effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège (Bulf, 2008). Si on réfère à Vergnaud (1991), l'étude des processus de conceptualisation se réalise à partir de l'observation et de l'analyse de la conduite d'individus en action[1] dans des situations requérant le fonctionnement du concept étudié, ici la symétrie. Tel est le cas des situations professionnelles des artisans tailleurs de pierre et ébénistes, dans une

[1] « Au fond de l'action, la conceptualisation » (Vergnaud, 1996).

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 5, p. 119 – 146.
© 2010, IREM de STRASBOURG.

problématique pratique[2] (au sens de Berthelot et Salin, 1992) soumise à des contraintes professionnelles (telles que l'efficacité, le temps, le coût, le matériel, *etc.*). Le contexte de l'artisanat offre a priori un contexte privilégié pour observer le concept de symétrie dans une perspective non mathématique et dans l'action. On peut même supposer que les artisans tailleurs de pierre et ébénistes sont en quelque sorte des « experts » du concept de symétrie d'un point de vue lié à leur profession que nous chercherons à préciser : leur pratique concerne le plus souvent la réalisation de motifs symétriques qui ornent notre vie quotidienne.

1. Cadre théorique et questions de recherche

1.1 Les paradigmes géométriques et les Espaces de Travail Géométrique

Nous faisons référence au cadre de Houdement et Kuzniak (2006) des paradigmes géométriques et des Espaces de Travail Géométrique (ETG) car ce support théorique nous permet de prendre en compte la spécificité géométrique du travail de l'artisan et son rapport avec la réalité. Inspirés par la définition de paradigme selon Kuhn et des travaux de Gonseth sur les différents modes de pensée tels que l'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif, Houdement et Kuzniak ont catégorisé ces modes de pensées selon des paradigmes dits géométriques, qui se caractérisent par leur rapport à la réalité :

- **La géométrie I** (GI) ou « géométrie naturelle » a pour source de validation la réalité, le sensible. […] la géométrie I correspond déjà à un effort d'abstraction du réel, dans la mesure où la pensée sélectionne pour s'exercer certains aspects des objets s'ils sont matériels ou les traduit en schémas, comme par exemple des figures simples (cercles, carrés…). L'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif s'exercent sur des objets matériels, ou matérialisés, grâce à la perception ou la mise en œuvre d'expériences mécaniques réelles comme le pliage, le découpage ou leur pendant virtuel. En ce sens, la géométrie d'Euclide n'est pas de la géométrie I.
- **La géométrie II** (GII) ou « géométrie axiomatique naturelle » : dans cette géométrie, la source de validation se fonde sur les lois hypothético-

[2] « Nous avons désigné par *problématique pratique* le type de rapport caractéristique d'une famille de problèmes spatiaux non didactiques (…) les situations correspondantes sont essentiellement des situations d'action. (…) la *vérification* du résultat obtenu se fait sous le mode de l'évidence et de l'instant. Si la solution n'est pas satisfaisante, le sujet va l'ajuster au résultat attendu par une suite de corrections immédiates, sans se soucier de porter un regard réflexif sur la méthode utilisée initialement pour l'obtenir. » (Berthelot R. et Salin M.-H., 2000-2001, 14–15).

> déductives dans un système axiomatique aussi précis que possible. Mais le problème du choix des axiomes se pose. La relation avec la réalité subsiste encore dans cette géométrie, dans la mesure où elle s'est constituée pour organiser les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux. L'axiomatisation proposée est certes une formalisation, mais elle n'est pas formelle car ici la syntaxe n'est pas coupée de la sémantique qui renvoie à la réalité. D'où la conservation du qualificatif naturelle ». (Houdement et Kuzniak, 2006, 180–181).

S'ajoute à cette catégorisation la notion d'Espace de Travail Géométrique (ETG) pour décrire plus finement l'activité géométrique, que la simple distinction GI-GII ne permet pas, en général, d'appréhender (schéma 1) :

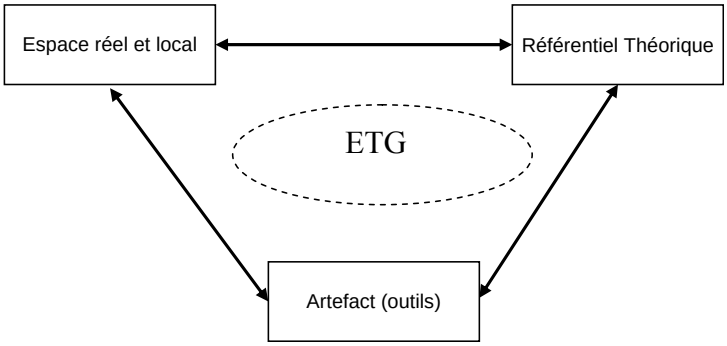


Schéma 1 : définition de l'Espace de Travail Géométrique.

L'« espace réel et local » désigne l'ensemble des objets matérialisés (il peut s'agir par exemple du support matériel de l'artisan, comme le bloc de pierre chez le tailleur de pierre ou la surface du bois chez l'ébéniste) ; le pôle « artefacts » rassemble les outils et instruments mobilisés par l'artisan et enfin la composante dite « référentiel théorique » définit le système logico-déductif dans lequel s'organisent le(s) modèles(s) théoriques et les objets mathématiques en jeu. Cette description de l'Espace de Travail Géométrique fait émerger l'idée d'adaptation des trois pôles qui le définissent : ces derniers s'adaptent au statut du géomètre, au but que celui-ci s'est fixé et de l'institution dans laquelle le géomètre s'inscrit. On peut d'ores et déjà supposer que le paradigme dominant dans lequel s'inscrit l'ETG de l'artisan est un paradigme GI (car il répond à une problématique pratique et non une problématique de la géométrie au sens de Berthelot et Salin (1992)).

1.2. La dimension cognitive de l'ETG

Nous supposons que l'articulation des différents pôles de l'ETG fait écho à ce que Vergnaud entend par conceptualisation : « ce que j'entends par conceptualisation, c'est l'identification des objets du monde, de leurs propriétés, relations et transformations, que cette identification résulte d'une perception directe ou quasi-directe, ou d'une construction » (Vergnaud, 2007, p. 342). Vergnaud place au cœur du processus de conceptualisation la notion de représentation du réel, révélée à travers l'activité humaine. Il s'inspire de la notion de schème[3] proposée par Piaget pour décrire l'organisation de la conduite d'un sujet dans une situation donnée. La notion d'invariants opératoires (Vergnaud, 1991) constitutifs du schème, permet alors de décrire l'articulation entre les pôles de l'ETG et le plan cognitif :

- les concepts-en-acte sont les éléments ou notions qui peuvent être pertinents ou non pertinents, qui sont mis en jeu et se révèlent naturellement lors de l'activité mathématique observée. Leur fonction est d'abord une fonction de sélection qui est de retenir de la situation présentée ce qui est nécessaire et suffisant à l'atteinte du but ;
- les théorèmes-en-acte sont les propositions tenues pour vraies sur le réel, qui sont vraies ou fausses, mises en place instinctivement, et suite aux interactions avec le milieu.

Une analyse de l'activité des artisans en terme d'invariants opératoires permet de faire le lien entre les pôles de l'ETG qui décrivent l'activité mathématique observée (l'espace réel et local, les artefacts, le référentiel théorique) et le plan cognitif associé (perception, construction, raisonnement) : cela permet de mettre en évidence l'adéquation entre ces deux plans notamment à travers des théorèmes-en-acte qui peuvent parfois être erronés. La notion d'invariant opératoire (dont concept-en-acte, théorème-en-acte) permet donc d'atteindre les concepts mathématiques mobilisés à travers le comportement humain au cours de l'activité géométrique observée et d'aboutir ainsi à une description possible de la conceptualisation en jeu.

1.3. Questions de recherche sur la généricité et spécificité de la géométrie des tailleurs de pierre et des ébénistes

Notre travail de recherche interroge la nature de la géométrie et sa place dans l'espace de travail des artisans, notamment à travers l'étude du concept de

[3] Vergnaud enrichit la notion de schème et définit le schème comme « l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situation donnée. Le schème fonctionne comme un tout : c'est une totalité dynamique fonctionnelle, une sorte de module finalisé par l'intention du sujet et structuré par les moyens qu'il utilise pour atteindre son but » (Merri, 2007) (Vergnaud, 1991, 1996).

symétrie. En effet, la géométrie à laquelle font référence des professionnels tels que les tailleurs de pierre ou les ébénistes dans leur pratique prend ses racines dans la géométrie euclidienne. On peut trouver des traces de cette géométrie dans les *ouvrages de référence* de ces différents corps de métiers tels que l'ouvrage intitulé *Traité d'ébénisterie* de Chanson (1988) ou l'ouvrage intitulé *Tracés d'Atelier et géométrie* (Tome 1 et Tome 2) de Ricaud (1999)[4]. Ces ouvrages proposent en particulier des « problèmes » et leur résolution est donnée sous forme de « planches » qui listent des « théorèmes » et « propositions » (voir annexe1 pour un extrait de ces ouvrages). Nous cherchons à caractériser la généricité et la spécificité de la géométrie qui est en jeu dans la pratique des artisans ; pour cela nous cherchons donc à caractériser l'Espace de Travail Géométrique *personnel* des artisans qui est celui que l'artisan s'approprie selon ses connaissances mathématiques, ses capacités cognitives, son expérience et la contingence. Cette problématique est directement liée à des questions de recherche concernant la place de la dialectique GI-GII dans la progression du raisonnement en géométrie. En effet nous situons a priori la pratique effective des tailleurs de pierre dans un paradigme GI à travers le concept de symétrie qui n'y est pas utilisé sous sa forme mathématique, c'est-à-dire en tant que transformation du plan.

La question principale à laquelle nous tenterons de répondre dans cet article est donc : quelle est la nature du concept de symétrie dans un paradigme a priori exclusivement GI, et quelle est sa place dans l'espace de travail géométrique personnel de l'artisan (ETG) ?

1.4. Apport des recherches sur le rôle des mathématiques en voie professionnelle

Ces dernières années, quelques recherches se sont intéressées aux mathématiques dans l'enseignement professionnel (Bessot et Laborde, 2005) (Laborde et Pastré, 2005) (Straesser, 2000, 2007) (Romo Vazquez, 2009) ou aux mathématiques dans l'activité professionnelle (Noss, Hoyles et Pozzi, 2000) (Williams et Wake, 2007). Bessot et Laborde ont analysé les activités de lecture-tracé du bâtiment, en particulier les activités de contrôle. Les auteurs ont observé cette situation dans une institution de formation professionnelle avec des élèves de BEP en atelier. Les auteurs ont dans un premier temps décrit l'activité observée en termes de procédures, puis à partir de leurs observations et des formulations des élèves, elles ont dégagé certains invariants dans l'activité observée « dans les termes d'une géométrie en acte en se référant à la géométrie euclidienne ». Elles mettent ainsi en évidence l'existence d'objets géométriques analogues à ceux de la géométrie euclidienne, que l'on peut exprimer en termes de concepts-en-acte et théorèmes-en-

[4] Ces ouvrages ont été ceux principalement cités par les artisans interrogés dans cette recherche.

acte et définissent ainsi une véritable « géométrie en acte des tracés, instrumentée et contrainte par le système de cotes ». Noss et al. ont analysé les mathématiques impliquées dans des contextes professionnels très différents : ceux des employés de banque, des infirmières et des pilotes. Leur activité mathématique commune consiste à minimiser la marge d'erreur. Les auteurs nous rapportent alors que les savoirs mathématiques repérés par les professionnels portent sur des savoirs relativement élémentaires. Ils fonctionnent de façon locale, contextualisés, avec un fort niveau d'implicite dans les modèles utilisés et ayant une connexion étroite avec les outils. Les savoirs mathématiques visibles dans les pratiques sont ceux dérivés des savoirs scolaires. Ils utilisent le symbolisme mathématique conventionnel et les représentations usuelles tels que : nombres, représentations graphiques, tables, formules, *etc*. ainsi que des concepts, méthodes et techniques scolaires qui ont été quelquefois adaptées à la contingence ou routinisées[5] par la pratique. D'autres recherches montrent que les mathématiques dans la pratique fonctionnent comme des « boîtes noires » (Straesser, 2000) ou comme des « mathématiques cristallisées » (Williams et Wake, 2007) : « les concepts et procédures mathématiques sont si intégrés dans la pratique et le fonctionnement du monde du travail qu'ils ne sont plus perçus comme quelque chose de spécifique par rapport aux mathématiques ». Elles ne surgissent qu'en cas de difficulté : « breakdown », qui signifie que le professionnel se retrouve en difficulté (voire régresse) lorsque la situation est légèrement différente de celle qu'il a l'habitude de résoudre.

2. Objectif de la recherche et méthodologie associée

2.1. Approcher l'ETG des artisans : des entretiens-actions dans les ateliers

D'après les travaux de Bessot et Laborde (2005), nous supposons que la pratique des tailleurs de pierre et des ébénistes peut s'exprimer à travers des invariants opératoires qui renvoient à une géométrie en acte. Aussi, dans le but de rendre compte de ces invariants opératoires, composants de l'activité des tailleurs de pierre et ébénistes, nous avons choisi de mener des entretiens exploratoires semi directifs à partir de photos de motifs de la Cathédrale Notre Dame de Paris, révélant différents cas de symétries (tableau 3). Les questions portent principalement sur le tracé du motif et sa réalisation, en revenant de façon insistante sur une demande de justification des techniques et de l'usage des instruments, et des moyens de contrôle de l'action (ainsi que sur la justification des moyens de contrôle). Il s'agit d'une situation d'action évoquée afin de faire parler et donc réfléchir les artisans sur leur pratique. Comme Bessot et Laborde le rappellent : « moins une tâche est problématique, plus les actions pour la réaliser

[5] Nous entendons par « routinisé » (ou « routinier ») le caractère habituel d'une tâche, qui relève d'un acte mécanique acquis notamment par l'expérience.

sont transparentes et donc difficiles à expliciter » (Bessot et Laborde, 2005). Pour faciliter l'explicitation des actions, nous avons choisi de réaliser l'entretien dans l'atelier de chacun des artisans : ils se retrouvent ainsi dans leur environnement familier et peuvent alors s'appuyer et enrichir leur discours par de courtes démonstrations effectives avec leurs propres outils (dont le large spectre est souvent une spécificité de leur profession).

2.2. L'ETG personnel des artisans et les ETG idoine et de référence

Une caractérisation de l'ETG personnel des tailleurs de pierre et ébénistes passe par une recherche de ses influences. Pour cela nous faisons référence aux différents types d'ETG que l'on peut également identifier (Houdement et Kuzniak, 2006, 188–189) :

- l'ETG de référence est « l'espace de travail défini de manière idéale en fonction des seuls critères mathématiques ». Nous désignons ici l'ETG de référence comme étant celui proposé par les Eléments d'Euclide et qui s'inscrit donc sans ambiguïté dans un paradigme GII (car les problématiques abordées sont de l'ordre de « problématique de la géométrie[6] » au sens de Berthelot et Salin) ;
- l'ETG idoine est l'ETG de référence qui doit être « aménagé et organisé pour devenir un espace de travail effectif et idoine dans une institution donnée avec une fonction définie. […] le choix de l'adjectif idoine suppose que cet espace est bien conçu et opérationnel pour les questions qu'on pose dans cette institution ». Nous supposons alors que la géométrie décrite dans les *ouvrages de référence* cités précédemment décrivent une géométrie conçue pour répondre aux questions que se pose l'institution des artisans tailleurs de pierre et ébénistes ; c'est donc en ce sens que nous supposons que les ouvrages de référence sont une trace de l'ETG idoine des pratiques des tailleurs de pierre (et peuvent aussi être des traces d'un d'enseignement antérieur), et s'inscrit donc dans un rapport dialectique entre GI et GII (car cet ETG idoine rend plutôt compte d'une « problématique spatio-

[6] « Nous désignons par *problématique de la géométrie* les problèmes qui font spécifiquement appel aux connaissances permettant de maîtriser les questions de consistance théorique du discours sur l'espace, questions qui caractérisent l'émergence historique d'une géométrie de la démonstration chez les grecs » (Berthelot et Salin, 2000-2001, p. 11).

géométrique[7] » au sens de Berthelot et Salin car le lien y est encore fort avec l'ETG de référence : la géométrie euclidienne).

D'après le modèle proposé par Kuzniak (2009, p. 77) l'ETG de référence et l'ETG idoine influencent directement l'ETG personnel ; nous proposons donc une version adaptée de ce modèle dans le cas de l'ETG personnel de l'artisan (d'un point de vu générique) (voir schéma 2).

Notre méthodologie d'analyse se base donc sur une analyse de la conduite des tailleurs de pierre dans les termes d'une géométrie en acte (ETG personnel) que nous caractériserons à travers une comparaison des ouvrages de référence (ETG idoine) et des éléments d'Euclide (ETG de référence). L'un des objectifs de ce papier est de mettre en évidence l'intrication complexe entre ces différentes influences, l'expérience propre de l'artisan et la contingence mais aussi de montrer comment le concept de symétrie est un facteur déterminant de l'adaptation de la conduite de l'artisan.

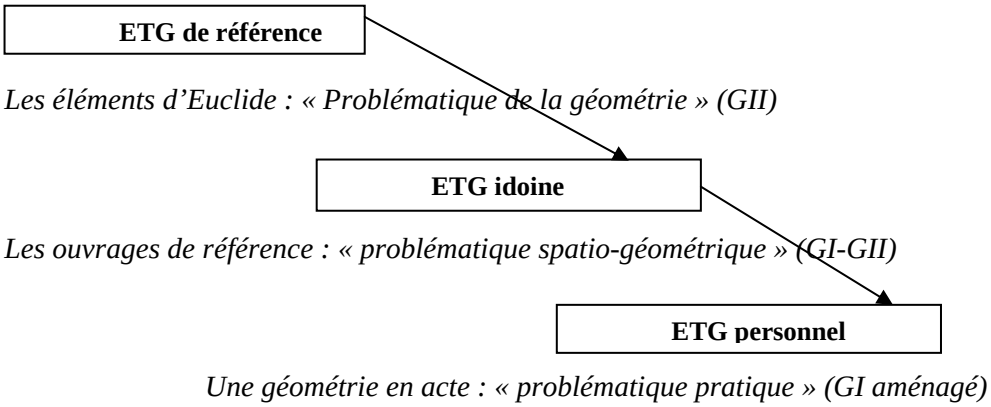


Schéma 2 : Modèle adapté des liens entre les différents ETG
(dans le cas particulier de la pratique des tailleurs de pierre et ébénistes)

[7] « Nous nommons *spatio-géométrique* la modélisation de l'espace par des connaissances issues du savoir géométrique. Cette modélisation d'un espace s'accompagne la plupart du temps de représentations de cet espace dans l'espace d'une feuille de papier, représentations qui conservent une partie plus ou moins importante des propriétés de l'espace représenté (schéma, croquis, dessins, plans, *etc.*) » (*ibidem*, p. 12)

2.3. Les tâches choisies

Des tâches routinières[8]

Nous avons demandé aux artisans comment ils s'y prendraient pour reproduire chaque motif présenté[9] (tableau 3). La question est volontairement posée sous peu de contraintes afin de laisser l'artisan libre de choisir ses propres contraintes. De plus, le motif révèle dans chacune des figures des éléments semblables qui se répètent dans le plan ; ces derniers sont parmi les plus courants dans les situations de restauration, de création, ou encore de simple copie (que ce soit en taille de pierre ou en ébénisterie). Nous mettons ainsi l'artisan dans une situation[10] (et donc dans des contraintes) qui lui est familière.

Une tâche « hors contrat » : la trisection de l'angle

La dernière tâche proposée aux artisans est celle de la trisection de l'angle : après avoir dessiné un angle quelconque (aigu et ouvert) sur une feuille de papier, j'ai demandé à l'artisan comment il le diviserait en trois parties égales. Cette tache est clairement une tâche anecdotique car elle ne fait pas partie des tâches routinières de l'artisan au même titre que celles annoncées précédemment (et dont l'analyse est développée dans le paragraphe suivant). Vérifier l'existence théorique d'une solution à la règle non graduée et au compas[11] ne fait pas partie du « contrat professionnel » car l'artisan ne se situe pas dans une « problématique de la géométrie » au sens de Berthelot et Salin. Cependant il existe des solutions « adaptées » de ce problème si l'on se situe dans « une problématique pratique » ; nous avons donc proposé cette tâche dans le but d'observer les adaptations dont fait preuve l'artisan dans ce type de situation « hors contrat ».

---

[8] Nous rappelons que nous entendons par « routinier » (ou « routinisé ») le caractère habituel d'une tâche, qui relève d'un acte mécanique acquis notamment par l'expérience.

[9] Je commençais l'entretien par : « Si vous aviez à reproduire ce type de motif, comment feriez-vous ? » Je complétais ensuite les questions en fonction des précisions demandées par l'artisan qui généralement demandait s'il ne disposait que de la photo (dans ce cas il s'agirait de faire un agrandissement) ou du motif d'origine (dans ce cas, il faut faire un « relevé »). Comme nous le verrons par la suite, dans les deux cas, la préparation au calque est prépondérante et se fera donc soit directement sur la photo soit sur le motif d'origine. Toute l'analyse qui suit est valable dans les deux cas, et se concentre donc sur cette préparation des tracés.

[10] Le terme de situation est employé dans cet article dans un sens beaucoup plus large que celui employé par Brousseau dans la théorie des situations des didactiques. Le terme de situation désigne ici la tâche que j'ai donnée à résoudre à l'artisan mais aussi l'ensemble de tous les éléments qui la caractérisent (support matériel, outils à disposition, *etc*.).

[11] Notons que les ouvrages de référence consultés indiquent « diviser un angle en deux et en trois » : (Ricaud, 1999, 94–95).

Analyse mathématique et degré de complexité

Pour chacune des figures à reproduire (tableau 3), l'analyse mathématique présentée dans ce paragraphe consiste à déterminer les transformations du plan qui laissent invariantes la figure considérée puis de définir le degré de complexité de ces figures :

Figure 1 :
la fleur de Lys.

Figure 2 :
rotation d'ordre 4.

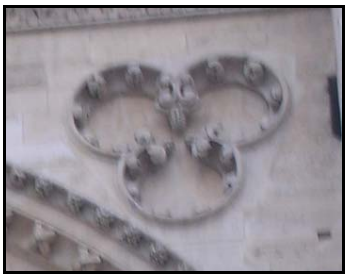


Figure 3 :
le trèfle.

Tableau 3. Extrait des figures proposées aux artisans.

- La figure 1 dite de la *fleur de Lys* est globalement invariante par symétrie axiale d'axe vertical dans le sens de la gravité, suggéré par la tige *centrale* et le centre du cercle situé à sa base ;
- la figure 2 est globalement invariante par symétrie centrale de centre le centre de la figure et par rotation de même centre dont une mesure de l'angle peut être $\pi/2$ [π] ;
- nous appelons *volute simple* le motif qui est globalement invariant par symétrie centrale (ou rotation de mesure d'angle π[π] (on reconnaît plusieurs volutes simples dans la figure 2) ;
- la figure 3 (dite *trilobe*) est une figure globalement invariante par rotation de centre le centre de la figure et d'angle $2\pi/3$[π] et par symétrie axiale (3 axes possibles) ;

Nous définissions le degré de complexité pour chaque figure d'une part par le nombre et le type de transformations qui laissent globalement invariante la figure et d'autre part par la nature de sa composition (la nature des motifs, leur enchevêtrement, *etc.*). Précisons que le degré de complexité que nous accordons à une figure peut être différent de celui que les artisans donneraient. En particulier, nous considérons la figure 1 comme la figure la moins complexe par rapport à celles présentées car d'après nos critères, seule la symétrie axiale laisse la figure globalement invariante et l'axe de symétrie est médian et vertical. De plus, le motif de la fleur de Lys est un motif largement répandu dans la taille de pierre ou

l'ébénisterie. La figure 2 n'est pas un motif symétrique par symétrie axiale : nous qualifions cette figure de plus complexe car les motifs sont plus intriqués et se répètent (notamment à partir d'un quart de la figure) par rotation. La figure 3 est également plus complexe que la figure 1 car elle peut être décomposée par symétrie axiale et rotation mais les rosaces ou les trilobes sont également des motifs courants de la taille de pierre ou de l'ébénisterie[12].

Analyse de la tâche de reproduction du point de vue des artisans

D'après les différentes tâches de reproduction proposées, deux démarches sont possibles :

- avoir à disposition le motif répété (la moitié, le tiers ou le quart selon la figure considérée) à une échelle accessible ; on suppose alors que la technique du calque ou du gabarit va être la plus sollicitée ;
- n'avoir à disposition que cette photo comme modèle, on peut alors supposer que l'artisan va chercher à tracer le motif répété et dispose alors de techniques propres à son corps de métier (taille de pierre ou ébénisterie) pour retracer les courbes et volutes qui composent les différentes figures considérées.

De plus, le degré de complexité évoqué dans le paragraphe précédent implique une prise d'information pouvant être plus spécifique selon la figure, et donc implique des moyens différents pour y parvenir, c'est ce qui fait l'objet de l'analyse a posteriori présenté dans le paragraphe suivant.

3. Analyse du rôle de la symétrie axiale dans l'organisation de l'ETG personnel des artisans

L'analyse a posteriori des tâches de reproduction effectuées par les artisans rencontrés porte principalement sur l'identification des transformations du plan en acte : l'enjeu des entretiens porte sur le rôle joué par la symétrie axiale et les concepts qui la caractérisent. Rappelons que nous nous intéressons à l'Espace de Travail Géométrique personnel de l'artisan, dans ses relations avec le concept de symétrie au travers de l'organisation des tracés et de l'instrumentation sollicitée.

---

[12] Bien que ces modèles soient tirés de modèles spécifiques de la taille de pierre (car viennent directement de Notre de Dame de Paris), ces motifs sont également courant en taille de bois (le lecteur est invité à consulter les ouvrages de références cités dans la bibliographie car on y trouve des chapitres entiers consacrés aux tracés de volute et à ceux du trilobe ou encore des rosaces).

Nous nous sommes entretenu avec quatre tailleurs de pierre (nous noterons TP_i, $i=1$ à 4) et trois ébénistes (TB_i, pour Tailleur de Bois : $i = 1$ à 3) dans leurs ateliers ; précisons d'ores et déjà la spécificité de certains d'entre eux : TB1 est ébéniste pratiquant beaucoup de marqueterie, TB2 est ébéniste et TB3 a eu une formation d'ébéniste mais se définit maintenant comme une sculpteur sur bois uniquement (car il ne travaille que l'ornementation). Ce paragraphe décrit la mise en place de l'Espace de Travail Géométrique des ces différents artisans aux formations et spécificités diverses. Notre travail de recherche s'applique donc à considérer et analyser ces diverses pratiques : nous avons veillé (dans la mesure du possible) à éclairer certaines de nos analyses étant donnée la spécificité évoquée de certains artisans.

Le corpus sur lequel se fonde notre analyse regroupe les retranscriptions de tous les entretiens dont certains extraits sont donnés dans le développement de cet article, quelques photos et vidéos, ainsi que le recueil des dessins et figures réalisés lors des entretiens. Comme déjà annoncé, nous avons développé une approche similaire à celle de Bessot et Laborde, c'est-à-dire qu'à partir de nos observations et de leurs formulations, nous avons dégagé certains invariants opératoires des actions évoquées « dans les termes d'une géométrie en acte en se référant à la géométrie euclidienne » (Bessot et Laborde, 2005). Comme nous l'avons déjà décrit dans la partie 2.2., un moyen choisi pour décrire l'ETG personnel des artisans rencontrés est de le comparer avec certains éléments de l'ETG idoine dont on trouve des traces dans les ouvrages de référence et l'ETG de référence qui est celui décrit par les Eléments d'Euclide.

Tout d'abord, les artisans rencontrés commencent toujours par « préparer » leur espace personnel en déterminant les repères extra-figure (le support et le cadre de la figure sont indépendants de la figure) qui supporteront la figure. Les repères intra-figure (dépendants de la figure) « structurent » la figure de manière la plus adaptée d'après l'artisan, au problème pratique posé. Chaque artisan s'approprie la situation en construisant oralement et dans la pratique son ETG personnel qui décrit le rapport particulier entre :

- la figure donnée ;
- l'environnement dont l'artisan dispose ;
- et l'artisan.

Nous proposons, pour commencer, une analyse spécifique de l'activité évoquée par les tailleurs de pierre que nous avons rencontrés dans le cas des figures proposées dans le tableau 3.

3.1. Structuration de l'espace et déconstruction de la figure chez les tailleurs de pierre

Nous commençons d'abord par présenter l'ETG personnel des tailleurs de pierre rencontrés pour cette étude ; le cas des ébénistes sera relaté plus particulièrement à la partie 4. Dans tous les cas observés, le premier rapport est celui de la perception « d'un œil entraîné». Puis, les tailleurs de pierre cherchent un référentiel pour situer le motif dans un autre ensemble :

> (à propos du motif 1) TP1 : « Il faut que j'aie les dimensions, pour pouvoir me dire dans quel cadre ça rentre et dans quel bloc capable : j'entends par là les dimensions maximales de l'ouvrage, une fois que j'ai les dimensions par rapport à un axe ou des cotes. (…) Il est inscrit dans une surface plane. (…) Pour vérifier que le motif est bien cadré sur cet axe et que j'ai le bon axe. (…) c'est-à-dire on trace un trait droit, qui sera l'axe, on prend les dimensions capables, on prend les contours, ensuite on reprend les cotes déterminantes, et ça va nous déterminer l'emplacement du motif (…) donc l'axe vertical me permet de faire une symétrie correcte, en fait, c'est une croix, ça cale quelque chose, je ne sais pas comment vous expliquer ça, c'est une cible en fait. Si je trace la même croix sur un morceau de pierre et que je la fixe au calque à cet endroit, ça me permet de caler les choses. »

La symétrie axiale apparaît ici comme un repère topographique essentiel dans la réalisation de ce « cadre » qui détermine la surface travaillée. L'axe de symétrie sert de repère de mesure (et constitue l'origine de ce repère) et se comporte comme un véritable outil puisqu'il « cale quelque chose ». La contrainte réelle de l'espace (en 3D) est permanente et l'épaisseur nécessaire du bloc de pierre et la nature de celle-ci sont des éléments importants qui conditionnent le reste du travail. Le motif doit être situé « par rapport » à un autre ensemble et non pas aléatoirement : il doit être « bien » situé. Cet espace détermine alors le support de l'ETG réel et personnel du tailleur de pierre. Ce dernier peut ensuite s'appliquer à la déstructuration du motif (à partir des éléments intra-figure). Les tailleurs de effectuent alors un travail de reconnaissance des objets connus (cercle, carré…). Et plus généralement, ils recherchent « des rythmes, des régularités » mesurables, comme le montre l'extrait suivant, à propos de la figure 2 :

> TP2 : « Il y a un point central, il y a des lignes de convergence, il y a un cercle par ici. (…) Il suffit de partir d'un carré comme ceci ».

La reconnaissance d'éléments symétriques et d'axes de symétrie apparaît comme systématique et consciente chez le tailleur de pierre :

> (toujours à propos de la figure 3) TP4 : « C'est simple, tout motif a un axe».

On retrouve la volonté de construire une esquisse d'un système de mesure analogue à un système de coordonnées de type cartésien. Ils recherchent des axes dits

« cibles » qui sont orthogonaux (paire d'axe horizontal et vertical) et sont clairement utilisés comme repères de mesures. Finalement, ils mettent en évidence les caractéristiques, les « régularités » qui révèlent les invariances de la figure d'abord par symétrie axiale. C'est une préparation souvent nécessaire à la construction du calque, outil prépondérant chez les tailleurs de pierre, et qui amène donc l'artisan à certains invariants opératoires propres à cette préparation. L'ETG s'habille progressivement dans le but de devenir l'ETG *personnel* du tailleur de pierre. Mais quels sont les moyens mis en œuvre pour réaliser cette structure ?

3.2. Mise en œuvre de l'ETG : répertoire d'objets de référence et de postulats

– **Le point** est cité dans la pratique par les tailleurs de pierre en tant que repère de mesure (« cote », « épure ») ou en tant que support de construction (point d'intersection d'arcs de cercle) ou encore est reconnu comme un point particulier (« le point de centre » d'un cercle). Dans les ouvrages de référence la définition proposée, *« le point n'a pas de dimension, il n'est pas mesurable »*, est une définition proche de celle des Eléments d'Euclide : *« un point est ce qui n'a pas de partie (indivisible) »* ;

– **la droite** est citée en tant que « ligne », « trait » ou « axe » et sera support de mesure (pour mesurer le milieu par exemple), support de position (repère visuel en donnant une « structure » comme explicité précédemment) ou encore support de construction (construire un angle droit par exemple). Dans le tracé des tailleurs de pierre, une droite est définie par deux points, ils admettent donc implicitement le postulat 1 du livre premier d'Euclide : *« de tout point à tout point on peut tracer une ligne droite »*. Il y a également toutes les déclinaisons de droites : parallèles, perpendiculaires, tangentes, sécantes et confondues, qui sont remarquées, recherchées et construites par les artisans. Dans les ouvrages de référence, la droite est *« une succession de points se déplaçant dans une même direction »* (et le plan est *« engendré par le déplacement ininterrompu d'une droite »)* (Ricaud, 1999), cette définition est basée sur le mouvement, considération naturellement très prégnante chez les artisans ;

– **le cercle** est également cité par les artisans en tant que « rond », « courbe » ou « arc ». Il est utilisé en tant que support de construction (les points sont des « croisés d'arc »), ou comme repère de mesure via le compas (report de distance par petits arcs de cercle). Il est également support de structure d'un autre motif ou figure (cercle inscrit ou circonscrit : fig. 3) ou simple ornementation. D'après leur tracé et le discours associé, il suffit :

  – **d'un centre et d'un rayon** pour définir un cercle, TP4 : « Toujours un axe et un point de centre dans un cercle ». La formulation de ce théorème-en-acte par les artisans correspond au postulat 3 du livre premier d'Euclide : *«*

avec tout point comme centre et tout rayon, on peut tracer une circonférence »I ;

– **ou de trois points**, TP1 : « Si on prend trois points, il n'y a qu'un arc qui passe par ces trois points». De même, ce théorème-en-acte correspond au théorème de géométrie : « par trois points non en ligne droite on peut faire passer une circonférence et une seule » (Hadamard, 1988) ; on retrouve ces définitions du cercle dans les ouvrages de référence.

Les artisans « disposent » ainsi d'un certain nombre de « postulats » du type d'Euclide définissant des objets de référence géométriques et les relations entre eux. Etant donné que les éléments sont visibles dans le discours des artisans - les formulations étant proches de celles relevées dans les ouvrages de référence - on peut supposer que ces connaissances en acte sont soit des traces d'un enseignement antérieur, soit le fruit d'une conception intuitive qui peut venir de situations qu'ils ont déjà rencontrées. Certains énoncés sont tenus pour vrais par l'artisan car ils se vérifient par perception ou construction immédiate. Par exemple, à propos de l'existence et de l'unicité d'un cercle à partir de trois points, un tailleur de pierre explique :

TP1 : « C'est logique… j'arrive pas… j'ai pas de théorie, je perçois.

C : Il ne peut pas y avoir un deuxième arc ?

TP1 : Ben ça sera le même !

C : Il ne peut pas y en avoir un autre ?

TP1 : Ben par superposition, il peut y avoir autant d'arcs que vous voulez, mais comment dire, il ne peut pas y avoir, passant par ces trois points, un autre… Si le rayon qui passe par ces trois points est de 10, on pourra pas faire passer un arc avec un rayon de 2. »

3.3. Mise en œuvre de l'ETG : techniques routinisées

L'ETG personnel de l'artisan tailleur de pierre se construit à partir de son « œil entraîné », de la mise en œuvre d'une instrumentation spécifique (fil à plomb, réglé[13], perroquet[14], compas, calque, *etc*.) et de l'application de certaines techniques géométriques, comme par exemple la technique de la médiatrice pour tracer un système de mesures comme l'illustre cet extrait à propos de la figure 1 :

---

[13] Un réglé ou règle : « Toute baguette ou latte parfaitement rectiligne, graduée ou non, utilisée pour le tracé de traits droits. » (Une particularité du réglé est qu'il n'y a pas de bords contrairement à la règle ordinaire graduée de l'écolier).

[14] Un perroquet : « Règle plate incurvée, utilisée pour tracer de longues courbes ». Ces définitions proviennent de l'ouvrage de J. VIGAN (1994) Dictionnaire général du bâtiment, Le petit Dicobat, Rig-Orangis : Arcanture.

> « C : Comment vous tracez ce deuxième axe ?
>
> TP1 : Alors soit je prends une équerre et un réglé qui va remplir entre les deux colonnes, soit même chose, je reprends à l'endroit où les axes vont se croiser et je reprends le milieu d'un segment compris sur l'axe vertical de symétrie et je reprends un coup de compas à égale distance des deux côtés, j'écarte le compas un peu plus grand que le centre. »

Il obtient ainsi deux axes orthogonaux pour « caler » sa figure de manière instrumentée : soit en mesurant avec un réglé, soit avec le compas tout en appliquant la technique de construction de la médiatrice. Il s'agit de « mathématiques visibles » (Noss et al., 2000) car certains des artisans me confirment qu'il s'agissait d'une technique de l'école (certains me prenaient même à partie : « vous savez… ») que l'on retrouve dans leur ouvrage de référence : *« tracer une perpendiculaire au milieu AB. Avec une ouverture de compas un peu plus grande que la moitié de AB et en prenant successivement comme centre A et B, tracer les deux arcs mn et nm. La corde des deux arcs mn coïncide avec la perpendiculaire cherchée »* (Chanson, 1988, p. 18). La technique de la médiatrice permet de répondre à plusieurs tâches courantes des tracés de tailleurs de pierre (ou ébénistes), comme par exemple :

- trouver le milieu d'un segment ;
- tracer un couple de droites perpendiculaires ;
- retrouver le centre d'un cercle.

Cette technique reprise par presque tous les artisans observés pour répondre au moins à l'une de ces tâches est clairement une routine, mais semble avoir un domaine de validité limité. En effet, dans le cas des techniques disponibles pour retrouver un centre de cercle, un même tailleur de pierre se souvient de la technique de la médiatrice pour tracer un milieu ou un angle droit mais ne va pas jusqu'au bout de la technique pour en déduire le tracé du centre d'un arc de cercle donné alors qu'il commence bien par tracer la médiatrice à partir de deux points de ce cercle :

> TP1 : « Je vais prendre un segment [la corde] ; je vais trouver son milieu, soit par cote soit par croisé d'arc avec le compas [technique de la médiatrice]. Je prends la pointe de mon compas sur un côté que j'aurai déterminé ; j'envoie à l'œil plus loin que la moitié ; je trace un arc de cercle, la même chose sur l'autre point et je rejoins forcément, clac. (…) Et là-dessus je peux retrouver mon rayon… mais je ne me souviens plus très bien…. »

Il finit par chercher à « tâtons » avec le compas le centre sur la médiatrice. On assiste à ce que Noss et Hoyles qualifient de *breakdown*, lorsqu'on tente d'ouvrir

les *boîtes noires,* c'est-à-dire que l'artisan se retrouve dans une situation difficile car il cherche à expliquer la technologie d'une technique[15] routinisée et finalement va se contenter de la méthode « essais-erreurs », autrement dit à « tâtons ». Il s'agit de mathématiques visibles mais la raison mathématique semble opaque car l'artisan tente de nous faire comprendre que *« le centre appartient toujours à la médiatrice d'une corde »* qui fait écho à une forme d'axiome cristallisé que l'on retrouve dans le manuel de référence (Chanson, 1988, p. 14), *théorème 23 : « la perpendiculaire élevée au milieu d'une corde passe par le centre »,* puis *« tracer deux cordes quelconques et élever les perpendiculaires au milieu de ces cordes. L'intersection des perpendiculaires nous donne le centre recherché. C'est une application du théorème 23 ».* L'enchaînement ne se fait pas toujours mais l'origine de son utilisation dans la pratique vient donc vraisemblablement d'un enseignement antérieur.

4. Le concept de symétrie, fondateur et organisateur de la conduite

Nous élargissons maintenant la présentation de nos analyses en considérant également dans cette partie le cas des ébénistes. Dans des situations plus complexes comme le cas des rotations d'ordres 3 et 4 (fig. 2 et 3 tableau 3), les artisans s'adaptent et reconstruisent la figure proposée afin de retrouver une situation connue : ils reconstruisent la situation pour exhiber un (ou des) cas simple(s) de symétrie axiale. Ils procèdent donc à la reconnaissance et la mise en place des repères intra- et extra- figures, à la reconnaissance d'objets de référence inscrits ou circonscrits à la figure, au tracé d'axes (de symétrie, ou autres axes particuliers) et vérifient la conservation par superposition :

> (à propos de la figure 2) TP1 : « Alors vu que c'est symétrique, enfin pas symétrique, mais régulier, c'est un rythme régulier, en fait <u>si mon point de centre</u> est ici, je vais hop <u>prendre ce rayon et tracer un cercle</u> » (…) Bon imaginons je vais appeler 1, 2, 3 et 4 ; et puis a, b, c et d. Par exemple 1 devient a et b, donc l'autre ainsi de suite. (…) Il y a un <u>rythme carré</u> en décalé. Je vais <u>chercher cet angle</u> ; je trace <u>donc mes perpendiculaires</u> sur mon premier rythme puis le deuxième (…) s'il est à reproduire <u>par rapport à un point de centre</u>, il suffit que je reproduise cette première partie <u>par rapport à un axe</u>. **C'est toujours par rapport à un axe.** Enfin moi je travaille toujours par rapport à un axe, enfin sur deux perpendiculaires. (…) Ça

[15] Notre référence à la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard se limite à l'utilisation des termes *technique* et *technologie*, parfaitement appropriés à notre discours : « La technique τ est la manière de faire, d'accomplir et de réaliser des tâches t relevant d'un type de tâche T. (…) la technologie θ est un discours rationnel (le logos) sur la technique τ (la tekhnê) ayant pour objet de justifier *rationnellement* la technique τ (…). » (Chevallard, 1999, 224–227)

tourne par rapport à un point de centre, je vais tracer toutes les lignes nécessaires pour faire tourner toutes les structures du motif ».

4.1. Le cas de la symétrie centrale (*une volute simple*)

L'analyse de l'activité des artisans dans le cas de reproduction d'une volute simple (motif qui constitue par exemple la figure 2) qui est invariante par symétrie centrale permet de mettre en évidence des théorèmes-en-acte intéressants et révélateurs de l'influence de la symétrie axiale sur la pratique des artisans. Nous proposons dans les deux prochains paragraphes l'analyse de deux théorèmes en acte intéressants observés auprès de deux ébénistes parmi ceux rencontrés. Nous mettrons en évidence en quoi la spécificité de leur profession peut être à l'origine de ces théorèmes en acte.

- **Symétrie centrale vue comme composée de deux symétries orthogonales**

TB1 (à propos d'une volute simple) : « On est obligé de développer une première fois puis d'inverser pour qu'il se retrouve complètement à l'opposé »

La symétrie centrale est interprétée (et mimée) comme composée de deux symétries axiales dont les axes sont : un horizontal puis un vertical dans un même plan. On retrouve le rôle prépondérant de cette paire d'axes, signifiants de la composée de deux symétries axiales. On « développe » en deux temps : il s'agit de la succession de deux « dépliages ». Ce schème met en relation les concepts-en-acte de conservation, d'invariance globale et d'orientation. On peut faire l'hypothèse que l'origine de cette conception vient d'une technique propre à l'ébénisterie : la marqueterie. En effet, cette technique consiste à reproduire un motif issu d'une fine tranche de bois par « développement » en 3D (puisqu'on plie et déplie une feuille de bois) en suivant des composées de symétries axiales d'axe horizontal ou vertical, ou des composées de translation (développement 2D), ou encore des composées de symétries axiales et translations, autrement dit des symétries glissées. Ainsi, dans le cas de la volute simple, on retrouve les gestes quotidiens et routiniers associés à ceux de la marqueterie, qui est une spécificité de l'ébénisterie, d'où la mise en œuvre naturelle de composées de symétries axiales. L'ébéniste est partie intégrante du système et nous décrit une géométrie qui s'anime autour de lui.

- **Symétrie centrale vue comme un demi-tour**

TB3 (toujours à propos d'une volute simple) : « Ah oui. Elle est pas symétrique. Ah ben il faut tourner autour de l'axe, c'est tout. Pas besoin de faire l'autre côté. A ce moment-là, pas besoin de faire l'autre côté : je prends ça et je tourne comme ça et je la fais ici, c'est une histoire de pivotage, ça reste un axe comme celui du compas.

C : [en me parlant à moi-même en prenant des notes] : Retournement du calque…
TB3 : Euh non j'appellerai pas ça un retournement, c'est un pivotement. Pour moi un retournement c'est ça [il mime le retournement d'une feuille comme pour la symétrie axiale]. Et j'ai fait la figure à l'envers. Pivotement, ça ne fait pas très français, je ne sais pas quel mot il faudrait employer… rotation autour de l'axe, rotation de la feuille ou rotation en opposition. »

Pour lui, cette transformation n'est pas *symétrique* (on suppose qu'il entend symétrique dans le sens où ce n'est pas symétrique par rapport à un axe contenu dans le même plan). Il conçoit la symétrie centrale comme une rotation de centre le « centre » de la volute et d'angle π, mais non pas explicitement autour d'un point, mais autour d'un axe, perpendiculaire au plan de la volute : « comme le compas ». Il situe son ETG en 3D (de la même manière qu'un tailleur de pierre passe en 3D avec le fil à plomb pour repérer la verticale normale au plan). TB3 associe une fois de plus ses gestes à la transformation (tout comme TB1 et la technique de la marqueterie). On peut faire l'hypothèse que cela vient d'une « mémoire gestuelle ». Cet artisan dispose en fait d'un répertoire de tâches et de techniques routinisées mais aussi des «gestes routinisées », notamment avec le compas, qu'il adapte selon le type de tâches, car il est sculpteur de bois, et ne réalise pas autant de marqueterie que TB1, qui lui est ébéniste.

4.2. Le cas particulier de la trisection de l'angle : une situation de *breakdown*

- **Théorème-en-acte issu du schème de bidécomposabilité[16]**

Un des ébénistes explique qu'il diviserait d'abord en douze, en traçant de manière itérative des bissectrices d'angles et « comme trois est un diviseur de douze, j'aurai ma trisection » :

TB1 : « On divise en 2 avant, je diviserais en 12 et je prendrais 4 parties de 12.

C : Comment vous faites pour diviser en 12 ?

TB1 : Ben c'est un multiple de 3.

C : Oui mais comment vous faites pour arriver à 12 ?

TB1 : Ben je divise en 2, puis je redivise en 2, ça me donne 4 et si je divise en 2… [Il se rend alors compte que ça ne marche pas… après quelques instants]… Bon ben je prendrais mon rapporteur une fois de plus ! »

On peut faire l'hypothèse que cette stratégie vient des schèmes de la symétrie axiale : décomposer en deux parties égales (ici deux demi-plans). La bissectrice est

[16] Ce schème, que nous appelons donc schème de bidécomposabilité, consiste à décomposer la figure - ou la configuration - proposée en deux parties superposables.

alors un axe de symétrie. Leur gestuelle quotidienne (telle que le pliage/dépliage issue de la marqueterie, le calque/décalque et la manipulation du compas) semble concourir à la mise en œuvre de cette stratégie qui semble finalement assez naturelle. Elle peut également être une trace altérée d'un enseignement antérieur ; on trouve dans les ouvrages de référence des problèmes du type « *diviser une droite en 2, 4, 8, 16 etc. segments égaux* » : « *Prendre une ouverture de compas un peu plus grande que la moitié de la droite, et tracer de A comme centre, un arc en c, en faire autant de B comme centre. Descendre la perpendiculaire de c sur la droite. Procéder de même entre mA et mB pour trouver les points n et n' et ainsi de suite* » (Chanson, 1988, p. 16). On retrouve cette technique « institutionnalisée » d'itérations de division par deux. L'existence d'une solution au problème n'est pas remise en cause : seulement, comme pour la technique de la corde, l'artisan pense que s'il n'y arrive pas c'est parce qu'il ne sait pas ; il s'adapte donc, car la réalisation de la trisection reste pour lui toujours possible et il se résout à utiliser des outils moins « exacts » tels que le rapporteur ou la règle graduée. Vérifier l'existence théorique d'une solution à la règle non graduée et au compas[17] ne fait pas partie du « contrat professionnel » ; et il est clair que l'on peut réaliser la trisection d'un angle au rapporteur. La réalité rend alors possible tout problème de construction grâce à l'existence avérée d'outils de mesure adaptés. Notons que la trisection de l'angle est possible par pliage (annexe 2).

- **Un théorème-en-acte issu de la confusion entre grandeurs : *diviser un segment en n parties égales équivaut à diviser un angle en n parties égales***

TB3 : « Il faut faire une ligne. C'est comme les assemblages en *queue d'aronde* pour les tiroirs, donc on fait une ligne, alors comment ça marche déjà… Oui ici on va reporter mettons trois traits au compas et ici on va faire trois parallèles, c'est ça ? Heu… non… il faut arriver ici à partager une ligne en trois … Il faut partir de là… il faut partir de celle du bout, de la troisième, et ensuite on fait des parallèles. Vous n'avez pas compris ? (…) C'est un problème de répartition, pour les balustrades ou les escaliers, c'est pareil. »

Il s'agit d'une autre stratégie inspirée de la conservation des longueurs par la projection de droites parallèles (application du théorème de Thalès). Il s'agit de « mathématiques visibles » ou résidus altérés d'enseignements et de pratiques. L'explication est erronée (du fait que la trisection de l'angle n'est pas possible à la règle et au compas) et la confusion principale est l'association spontanée de grandeurs différentes (ici : longueur de segment/ surface angulaire) associée à une restitution inexacte du théorème de Thalès. Dans les ouvrages de référence on trouve de manière détaillée la technique dite de la : « *division d'un segment de*

[17] Rappelons que les ouvrages de référence consultés proposent le problème : « diviser un angle en deux et en trois » : (Ricaud, 1999, 94–95).

droite [ab] en 7 parties égales (méthode valable pour toute autre division) : du point a, tracer une oblique (ax) suivant un angle quelconque y du point a, et à l'aide d'un compas réglé approximativement à 1/7ème de (ab), porter sur (ax) 7 divisions égales (1 à 7). Joindre le point (7) au point (b) ; positionner le grand côté d'une équerre sur (7b) et appliquer une règle sous le petit côté de l'équerre. Maintenir fermement la règle et, en faisant glisser l'équerre vers la gauche, descendre les points 6 à 1 sur ab. Les points 1' à 6' divisent ab en 7 parties égales » (Ricaud, 1999, p. 34).

Ce type de confusion renvoie à ce que Schneider (1991) appelle « l'obstacle de l'hétérogénéité des dimensions [qui] rend compte de ces conceptions mêlant des grandeurs de dimensions distinctes (des solides avec des surfaces ou des surfaces avec des lignes). En gros, cet obstacle consiste en glissements inconscients et indus entre le domaine des grandeurs et celui de leurs mesures » (ibidem, p. 241) ; pour certains des artisans rencontrés : partager un angle en *n* parties égales revient à partager un segment opposé qui délimite la surface angulaire en *n* parties égales. De manière plus générale, ce type d'obstacle est liée à une conception du solide (resp. une surface) comme un assemblage, un agrégat de surfaces (resp. de segments) ; un solide (resp. une surface) comme engendré par le mouvement d'une surface (resp. d'un segment) (Schneider, 1991, p. 252) ; et rappelons (partie 3.2.) que c'est exactement sous cette forme que sont définis les éléments de la géométrie plane dans les ouvrages de référence des artisans : *« la **droite** : elle se définit par une succession ininterrompue de points en se déplaçant dans une même direction. (…) le **plan** : figure plane engendrée par le déplacement ininterrompu, sur un même plan, d'une droite. (…) un **volume** peut être engendré par le déplacement d'un plan »* (Ricaud, 1999, p. 9).

Une autre technique qui rend compte de cette confusion des grandeurs est développée par TB2 : il « ferme » l'angle donné, et obtient ainsi un triangle dont il divise le côté opposé à l'angle, en mesurant. Puis, il joint le sommet opposé avec les points marquant les tiers du segment. On peut induire de cette technique un théorème-en-acte un peu différent : *dans un triangle, on divise un angle en n parties égales en divisant en n parties égales le côté opposé.*

Lors de la réalisation de la tâche de la trisection de l'angle, on constate que les artisans ont à leur disposition un répertoire de tâches et un répertoire de techniques mais que ces dernières semblent relativement figées. Ici, la tâche reconnue par les artisans est « diviser en n parties égales » et les techniques correspondantes sont :

- soit diviser par deux de manière successive ;
- soit la technique de Thalès et la projection par parallèles.

La question de l'adaptation des objets en jeu dans la situation rencontrée ne se pose pas, d'où une restitution qui peut être erronée. On parle alors de « mathématiques cristallisées » (Straesser, 2007, p. 179). L'impossibilité de la tâche produit alors un *breakdown* et révèle l'inefficacité de la technique. On retrouve un phénomène semblable dans les situations dites a-didactiques : l'élève se rend compte que ses connaissances anciennes sont inadaptées au problème et l'adaptation au milieu va générer la construction de nouvelles connaissances (rappelons que Berthelot et Salin développe la thèse que la problématique pratique constitue un obstacle didactique à l'instauration des autres problématiques (1992, p. 127)). Ici, le but de la situation n'implique pas une telle adaptation car la solution « exacte » (théorique) du problème est masquée par l'existence d'une solution pratique (et le problème n'est pas posé dans un but « didactique »). En effet, les artisans ont finalement réalisé la tâche en mesurant l'angle à l'aide d'un rapporteur et en divisant par trois sa mesure (ou en ajustant les précédentes techniques décrites précédemment). Les artisans ont bien sûr conscience de l'existence d'une sphère GII mais celle-ci ne leur semble pas adaptée à leurs problèmes « pratiques » : TP1 : « Tout est mathématique. (…) Il y a toujours moyen mathématiquement de trouver ce qu'il y a à faire. »

5. Conclusion : une géométrie en acte organisée mais figée

5.1. Vers une théorie de l'approximation dans la pratique

La mise en pratique de connaissances géométriques acquises au cours d'un enseignement antérieur et les connaissances acquises au cours de l'expérience propre de l'artisan sont fortement intriquées. Autrement dit, les liaisons existantes entre les deux ont été polies par la pratique. On ne peut définir l'origine de certains postulats tirés de leurs discours qui accompagnent leur geste : comme par exemple *« par trois points passe un unique cercle »* ou *« un point de centre et un rayon suffisent pour définir un cercle »*. La formulation est semblable à celle de leurs ouvrages de référence de géométrie mais l'explication se fait de manière pragmatique. Leurs techniques de tracé, pour construire une droite orthogonale (verticale) ou un milieu ou un centre, sont dérivées de techniques de constructions géométriques telles que celle de la médiatrice, de la bissectrice ou encore de certains théorèmes de projection de droites, d'intersection des médiatrices de cordes, *etc.* Ces techniques se retrouvent dans leurs manuels de référence mais ont été tellement routinisées dans leur pratique qu'elles ne sont pas adaptables à des situations un peu différentes (comme celle de la trisection d'un angle).

L'Espace de Travail Géométrique *personnel* de l'artisan se décrit comme l'interaction entre l'espace réel, les modèles théoriques et les artefacts. L'ensemble des objets de référence, des tâches et des techniques semble figé et est sollicité quel

que soit l'espace local en jeu ; cet espace est décomposé et déstructuré. L'ensemble des outils permettant cette réalisation est dense et très spécifique au corps du métier (comme par exemple le recours au perroquet pour trouver le centre d'un arc de cercle). Cette très forte instrumentalisation semble accentuer alors le phénomène de cristallisation et condamne l'existence « des boîtes noires ».

L'ETG personnel est centré sur l'artisan ; son point de vue est une autre composante importante qui oriente ses gestes. Il évolue dans une géométrie intuitive, mesurable, manipulable, en mouvement, dans un paradigme GI « sophistiqué ». Il ne semble se détacher du système uniquement en situation de breakdown. Les artisans mettent alors au point des « stratégies d'ajustement » : ils approchent le résultat recherché par des techniques qui leur sont familières et qui leur donnent un résultat satisfaisant dans la pratique. On assiste à une volonté de « théoriser » leur Espace de Travail Géométrique pour le rendre le plus efficace possible et le plus proche de la solution exacte possible, d'où le détournement de certaines techniques mathématiques à des fins pratiques.

5.2. Le concept de symétrie comme principe organisateur dans l'action

Les invariants opératoires propres à la symétrie axiale se retrouvent dans tous les répertoires d'objets géométriques, de tâches et de techniques. Le schème de bidécomposabilité se révèle être le plus prégnant. La déstructuration des figures rencontrées ici a impliqué un vaste réseau de droites largement dominé par la recherche d'axes de symétrie dont le statut est variable (origine de mesure, repère de position, pli, frontière…). La recherche des « rythmes réguliers » est le moteur organisateur de l'ETG des artisans. Le concept de conservation étant induit, leur moyen de contrôle repose sur le principe de superposition des parties « semblables ». Ces invariants opératoires, caractéristiques de la symétrie axiale (bidécomposabilité et axes) se retrouvent alors adaptés dans les situations des rotations d'ordre 3, 4 et même dans le cas de la symétrie centrale, mais peuvent conduire à un retour à des méthodes plus « naïves » (« essais-erreurs »). Dans tous les cas, il s'agit d'une géométrie dynamique animée par une mémoire gestuelle dont les invariants opératoires laissent présager une théorie de l'ajustement. L'intrication des objets de référence, des postulats et des techniques tirés des apprentissages précédents des artisans ou de leurs propres conceptions nous incite à penser que le concept de symétrie auquel ils réfèrent n'est ni une conception experte du concept familier (c'est-à-dire d'un point de vue géométrique : uniquement vue comme la répétition d'un motif par rapport à une droite) ni une conception antagoniste à une conception scientifique (c'est-à-dire comme une transformation du plan dans lui-même) mais plutôt comme un concept intermédiaire, que l'on pourrait qualifier de « naturalisé ». Ce type de concept fait écho au « concept pragmatique » que Pastré (2002) définit dans le cadre de la didactique professionnelle, par son caractère organisateur qui se construit dans

l'usage et qui présente une dimension sociale. Il nous resterait à approfondir une telle approche notamment au niveau méthodologique et à observer des situations professionnelles « réelles » et non pas « fictives », comme cela a été le cas dans nos entretiens-actions.

5.3. Perspectives dans l'institution scolaire

Cette étude a révélé l'influence fondamentale de la symétrie axiale dans la construction de l'Espace de Travail Géométrique *personnel* de l'artisan qui se situe dans une GI « sophistiquée », du fait qu'il gère l'approximation par des techniques mathématiques cristallisées et routinisées dans la pratique. On distingue justement la rupture entre GI et GII par cette gestion de l'approximation. Le collège cherche à détacher l'élève de cette GI en reniant cette approximation (même efficace). L'élève doit « démontrer » et ses réponses doivent être exactes. Quelle est alors l'adaptation et l'organisation des signifiés du concept de symétrie (bidécomposabilité, conservation, invariance, *etc*.) dans une géométrie qui ne se veut plus figée mais au contraire qui tend vers GII ? Il s'agit alors maintenant d'étudier les ETG personnels des élèves, ce qui est l'objet du reste de notre thèse (Bulf, 2008).

Bibliographie

BERTHELOT, R. et SALIN, M-H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans l'enseignement obligatoire.* Thèse de doctorat, université de Bordeaux 1.

BERTHELOT, R. et SALIN, M-H. (2000-2001), L'enseignement de la géométrie au début du collège – Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x,* **56,** 5–34.

BESSOT, A. et LABORDE, C (2005), *Vers une modélisation d'une géométrie en acte dans les activités de lecture-tracé du bâtiment*. In : C. CASTELA & C. HOUDEMENT (Eds.) (39–76) Paris : Éditions ARDM et IREM de Paris 7.

BULF, C. (2008), *Étude des effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collège*, thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Irem Paris 7.

CHEVALLARD, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques,* **19-2**, 221–266.

EUCLIDE, (1994), *Les éléments d'Euclide, traduction et commentaires de B. Vitrac* Paris : PUF.

HADAMARD, J. (1898), *Géométrie Plane - leçons de géométrie élémentaires*, Sceaux : Éditions Jacques Gabay 1988.

HOUDEMENT, C. et KUZNIAK, A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **11**, 175–193.

KELLER, O. (2004), *Aux origines de la géométrie : le paléolithique et le monde des chasseurs cueilleurs*, Paris : Vuibert.

KELLER, O. (2006), *La figure et le monde, Une archéologie de la géométrie : peuples paysans sans écriture et premières civilisations*, Paris : Vuibert.

KUZNIAK, A. (2009), *Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de scolarité obligatoire en France* in : A. GAGATSIS., A. KUZNIAK, E. DELIYIANNI, L. VIVIER (EDS.) *Chypre et France recherche en didactique des mathématiques* (71–90) Lefkosia : University of Cyprus.

LABORDE, C. et PASTRE, P. (2005), *Activités et formation professionnelles : simulations informatiques comme aide à la conceptualisation*. Grenoble : Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier.

MERRI, I. (dir.) (2007), *Activité humaine et conceptualisation, questions à Gérard Vergnaud,* Toulouse : Presse Universitaire du Mirail.

NOSS R., HOYLES C. et POZZI S. (2000), *Working knowledge: Mathematics in use*, in: BESSOT A & RIDGWAY J. *Education for Mathematics in the workplace*, Mathematics Education Library Kluwer Academic Publishers, **24**, 17–35.

PASTRE, P. (2002), L'analyse du travail en didactique professionnelle, *Revue française de Pédagogie*, **138**, janvier-février-mars, 9–17.

CAROLINE BULF
Université de Bordeaux
Laboratoire LACES, Équipe DAESL (France)
caroline.bulf@u-bordeaux4.fr

Annexe 1 (extrait des ouvrages de référence) : Chanson, 1998, p. 9

Planche 5

LE CERCLE

Fig. 1 – Problème : Retrouver le centre d'un cercle.

Tracer deux cordes quelconques et élever les perpendiculaires au milieu de ces cordes.
L'intersection des perpendiculaires nous donne le centre recherché. C'est une application du théorème 23 pl. 2.

Fig. 2 – L'équerre à centrer représente une perpendiculaire élevée au milieu d'une corde AB. Elle nous évite tout le tracé de la figure précédente.

Fig. 3 – L'équerre à centrer de cette figure est basée sur le théorème suivant :
« Deux tangentes au périmètre d'un cercle et issues d'un même point sont égales ».
La bissectrice de l'angle formé par ces deux tangentes passe donc par le centre du cercle.

Fig. 4 – Le même problème peut se résoudre également avec une équerre de dessinateur. C'est la réciprocité du théorème 16 pl. 2.

Fig. 5 – Ce théorème nous permet également la vérification d'une cannelure demi-circulaire :
Faire glisser les côtés de l'angle droit sur les arêtes A et B. Le sommet C de l'angle droit doit toujours rester en contact avec le fond de la cannelure.

TRACÉS DE CERCLES OU ARCS DE CERCLES

Fig. 6 – Problème : Tracer un arc de cercle passant par trois point A, B, C.

Joindre AB et BC.

Élever la perpendiculaire au milieu de ces deux droites, leur intersection nous donne le centre O du cercle dont le périmètre passe par A B et C (voir théorème 23 pl. 2).

Fig. 7 – Tracer un arc de cercle passant par A, B, C, dont le centre est inaccessible.

Fixer deux règles ensemble suivant l'angle ABC. Faire glisser cet angle de façon à ce que les chants des deux règles restent en contact avec A et C. Le sommet de l'angle décrit alors l'arc de cercle cherché (voir théorème 25 pl. 2).

Fig. 8 – Problème : Tracer le cercle circonscrit à un triangle ABC.

Le centre du cercle circonscrit est donné par le point de rencontre des perpendiculaires élevées sur le milieu de chaque côté du triangle (voir *fig.* 29 pl. 1).

Fig. 9 – Problème : Tracer le cercle inscrit dans un triangle.

Le centre du cercle inscrit est donné par le point de rencontre des bissectrices des angles du triangle (voir *fig.* 29 pl. 1).

Fig. 10 – Problème : Tracer à main levée un arc de cercle passant par A, B, C.

Joindre AB et BC.
De A et de C comme centres, tracer deux arcs de cercle égaux.
Sur chacun de ces arcs de cercle et à partir de O porter des petits arcs égaux comme l'indique la figure. Pour l'arc de centre A, nous baptiserons ces points par des chiffres en-dessous de O et par des lettres au-dessus. Pour l'arc de centre C, en chiffres au-dessus et lettres en-dessous.

Annexe 2 : la trisection de l'angle

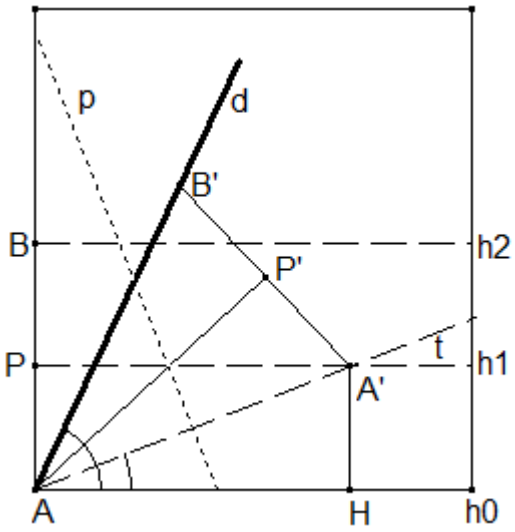
« La trisection de l'angle est en revanche réalisable en pliant une feuille de papier, par une construction due à Hisashi Abe (1980), qu'illustre la figure ci-contre :

• On trace la droite *d* passant par le coin A de la feuille de sorte qu'elle forme, avec le bord inférieur *h*0 de la feuille, l'angle à couper en trois.

• Deux bandes horizontales de même largeur (arbitraire) sont tracées en bas de la feuille (ceci peut se faire facilement par pliage.) On appelle *h*1 et *h*2 les nouvelles droites qui les délimitent.

• Il faut maintenant plier la feuille le long d'un pli *p* de sorte que le coin A se trouve déplacé sur la droite *h*1 (en un point A'), en même temps que le point B (intersection du bord gauche avec la droite *h*2) se trouve déplacé sur la droite *d* en un point B'.

• La droite *t* passant par A et A' est alors la trisectrice de l'angle donné: l'angle formé par *h*0 et *t* vaut 1/3 de l'angle formé par *h*0 et *d*. La démonstration est simple : par symétrie autour de la droite p le milieu P de AB donne le milieu P' de A'B' et, de même que A'P est perpendiculaire à AB, on a AP' qui est perpendiculaire à A'B'. Les deux triangles rectangles P'A'A et P'B'A sont donc égaux.



D'autre part soit H la projection orthogonale de A' sur h0. Puisque les triangles HAA' et PA'A sont égaux comme moitiés d'un même rectangle et que les triangles PA'A et P'AA' sont aussi égaux par symétrie autour de p, il en résulte que les triangles HAA' et P'AA' sont égaux. Par conséquent l'égalité des trois triangles HAA', P'AA' et P'AB' montre que les segments AP' et AA' partagent bien l'angle dAh0 en trois angles égaux ».

(Jean Aymes, *Ces problèmes qui font les mathématiques (la trisection de l'angle)*, publication de l'A.P.M.E.P. n°70)

VIVIANE DURAND-GUERRIER, CARL WINSLØW & HIROAKI YOSHIDA

A MODEL OF MATHEMATICS TEACHER KNOWLEDGE AND A COMPARATIVE STUDY IN DENMARK, FRANCE AND JAPAN

Abstract. A model for mathematics teacher knowledge based on the anthropological theory of didactics is presented together with a methodological discussion of how to *assess* such knowledge in practice. To this end we propose a concrete method involving "hypothetical teacher tasks" and individual as well as collaborative work of the teachers to be assessed. This discussion is illustrated by a small scale comparative study of how future lower secondary mathematics teachers (just about to graduate) from Denmark, France and Japan approach two hypothetical teacher tasks (related to teaching geometry and arithmetics).

Résumé. Un modèle des connaissances de l'enseignant des mathématiques et une étude comparative du Danemark, de la France et du Japon. Nous présentons un modèle pour décrire les connaissances des enseignants des mathématiques, avec une discussion méthodologique de son application pour évaluer les connaissances en pratique. Nous proposons une méthode concrète impliquant un travail individuel et collectif des enseignants évalués sur des « tâches hypothétiques d'enseignant ». Cette discussion est illustrée par une étude à petite échelle, où nous comparons le travail de futurs enseignants de collège (à la fin leur formation) sur deux tâches hypothétiques d'enseignant relevant de l'enseignement de la géométrie et de l'arithmétique).

Mots-clés. Connaissances professorales, comparaison internationale, similarité, Thalès, formation des enseignants, Danemark, France, Japon, théorie anthropologique du didactique.

> And, upon the whole, a proof of a person's having knowledge is (…) the ability to teach; and for this reason we consider art, rather than experience, to be a science; for the artist can, wehereas the handicraftsmen cannot, convey instruction. (Aristotle, 1991, 13).

1. Introduction

What does a mathematics teacher need to know, and how should preservice education prepare future teachers? These two questions are closely related, as preservice education remains the main form of teacher education in most countries in the world. Indeed, the two questions are increasingly raised in an international perspective, as a consequence of the increasing interest in international comparison of school mathematics performance. And in fact the two questions are within the core of a *domain where many of the unresolved issues that were prevalent 25 years ago remain unresolved* (Alter and Pradl, 2006, 42). A recent American report on

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 15, p. 147 – 172.
© 2010, IREM de STRASBOURG.

teacher education research asserts the "relative thinness" of existing research, and suggests in particular that *research on teacher preparation defines more precisely the questions that need to be addressed and the data that need to be gathered* (ECS, 2003, 7).

We believe that a central part of this "black hole" (Altar and Pradl, 2006) of teacher education research is a lack of dependable models and methods to describe and assess teacher knowledge. This study is made to contribute, for the case of mathematics teacher education, to fill this gap. We deliberately use the term "knowledge", rather than e.g. competencies or skills, because we focus here on possible contributions of pre-service education – not on what could be gained by experience, in service training and so on. This does not mean that our interest is limited to knowledge in the academic, official sense. Even pre-service education may develop experience-based knowledge of teaching through various forms of practice integrated in the educational program, and of course students have beliefs about teaching which come from their own experience as pupils. But in this study we do not envisage the full complexity of the link between initial education and teaching. Our primary focus is on explicit knowledge that newly formed teachers can mobilise in front of a "hypothetical" teaching situation. In fact, we did this study in three rather different settings (Denmark, France, Japan) in an attempt to eliminate the idiosyncracies of local educational systems and cultures. Local conditions can, of course, not be ignored in general and in practice; but in this study we deliberately attempt to go beyond them.

The paper presents three distinct but interrelated parts:

- a theoretical model for mathematics teacher knowledge based on the anthropological theory of didactics initiated by Y. Chevallard;
- a methodology for assessing mathematics teacher knowledge based on what we call *hypothetical teachers tasks*, exemplified by two tasks related to two particular domains of mathematics teacher knowledge;
- results from a comparative study using these tasks, involving 30 graduating teacher students in Denmark, France and Japan (the countries of the authors, representing quite different systems of training lower secondary teachers).

Regarding the last point, the data for Denmark and France were briefly discussed by Winsløw and Durand-Guerrier (2007), in connection to a broader comparison of their teacher education systems. In this paper we provide a detailed analysis of the data for three countries based on a more precise model for teacher knowledge that we now proceed to explain.

2. Mathematics teacher knowledge: the anthropological approach

It is widely acknowledged that teachers need to know the contents they are teaching, and that they need to know more than this. The folklore wisdom is that teachers need to know some more of the related contents – usually, more of the relevant scholarly disciplines – than the students (although *how* much is often debated). It is also usually admitted that one may and should know something about teaching, at least from experience; this kind of knowledge is sometimes called *pedagogy*. Indeed, a number of teacher education programmes have the relevant academic discipline(s) as the main course, and "pedagogy" (sometimes labelled education, educational psychology or the like) for dessert.

This state of affairs subsists despite rather well established tendencies in research that seem to suggest a different approach. In a much quoted paper, Shulmann (1986) advocates that in addition to content knowledge in the regular form, the teacher needs two supplementary forms of it: *pedagogical content knowledge* about how to teach the contents, and *curricular knowledge* concerning the educational programmes and materials for teaching a given set of contents. The most important insight here is not, perhaps, the categorisation, but the stipulation that the essential of teacher knowledge is a *teaching-oriented extension, or deepening, of plain content knowledge*. In the last 20 years, this idea has been quite influential in the anglophone research literature on mathematics education and in particular on mathematics teacher knowledge (for two prominent examples, see Ball, 1991, Ma, 1999). Another important emerging idea is that general theories and concepts related to teaching methods become more useful, and take on (new) meaning, when they are used in the context of specific subject matter contexts (see e.g. Ball and Bass, 2000).

These ideas seem close to a relatively well-established tradition in continental-European didactics, namely the *didactical study of particular contents* (what the Germans call *Stoffdidaktik*). Here, the structure and uses of school mathematics are studied in great detail in view of improving the corresponding teaching (textbooks, classroom activities, problems *etc*.). Besides such an "a priori analysis" of the mathematical contents, studies in this tradition are often supported and driven by extensive experimental interventions (cf. e.g. Brousseau, 1997). It is interesting to note that a similar emphasis on didactically driven study of the contents to be taught, as a crucial step in so-called *lesson studies*, is found in Japan (cf. eg. Shimizu, 1999, 112).

However, in order to assess mathematics teacher knowledge in a systematic and controlled way – even if this will necessarily be in partial and "local" ways – we need a more precise model of *what is assessed*, i.e. an operational *epistemological* model for what mathematics teachers need to be able to do. As the above discussion suggests, this will include – or even start with – an activity oriented

model of *mathematical* knowledge, and it will also have to include other aspects of the conditions for the teachers' work. To make it useful in a comparative setting, we must also be able to take institutional and cultural constraints into account, if not for other reasons, then in order to assess parts of teacher knowledge which can said to be relatively independent of such constraints.

To answer this need, we are convinced that the recent developments in anthropological theory of didactics (hereafter abbreviated ATD) furnish a promising basis. While the ATD literature (e.g. Chevallard, 1999; Bosch and Gascòn, 2002) should of course be consulted for a fuller account, we now explain the notions from ATD as we use them in this paper.

The central idea of ATD is to model human activity as responses to *types of tasks*, such as found in daily life (e.g. cook an egg) or scholarly subjects (e.g. find the product of two given integers). An important companion to a type of task is a *technique* or method to carry out the task. The technique is often enforced by a tacit routinisation of a frequently encountered task, but it could also be an object of explicit instruction. More generally, it is an important characteristic of human activity to allow for coherent discourse about tasks and techniques (called *technology*), and in some cases to organise these discourses in *theories* that make explicit the understandings and justifications underlying technology and techniques. For instance, an instruction on how to perform a multiplication integers belongs to a technology, while the systematic discussion of why the multiplication methods works is within the domain of theoretical discourse. A *punctual mathematical organisation* or *praxeology* consists of these four elements: a type of task, a technique, a technology and a theory, where each element corresponds to the previous one.

Notice that any *description* of a praxeology will by definition be situated at the technological or theoretical level; indeed, task types and techniques belong as phenonema to the level of practice and they are often based on tacit knowledge. A technique for multiplication that involves "pencil and paper" may look more explicit than one which is based on the operation of an abacus or a handheld calculator, but *a priori* they are both observable activities which *can* be described and justified in different ways, but need not be. Thus the *practice block* (task type, technique) may exist independently of the *techno-theoretical block* (technology, theory). Also, in many instances, a person enacting a praxeology, such as cooking eggs or multiplying integers, may enact some technology, such as simple instructions, while having no wider theory to explain the practice.

Human practices are interrelated and *organised*. Isolated practices, called *punctual organisations*, contain just one type of task, but they very often team up in *local organisations* which are characterised by employing a common technology (such as a system of language and symbolism related to a set of practices in arithmetics).

In the presence of a theory, local organisations may be further unified in *regional organisations* which are collections of praxeologies sharing a common theory (e.g., a theory of arithmetics). In fact, *mathematical organisations* (abbreviated MO) are often highly structured and stratified in principle, while it is still possible and common for users to enact them only at the punctual or local level. To the analyst, a *reference model* – i.e. a description of a regional mathematical organisation – may then be useful to describe and analyse the practices observed. A good example of this, in the context of mathematical organisations enacted in Spanish highschool, is given by Barbé et al. (2005).

While we have many good examples of how to analyse mathematical organisations using the above theory, its use in the context of *teaching practices* remains less developed. Bosch and Gascòn (2002) suggests that teaching practices should be considered as *didactical organisations* (abbreviated DO), where the task types refer to tasks of the teacher. Such a task type could be, for instance, *plan a lesson on multiplication of two-digit integers.* As the example suggests, a DO may be closely and explicitly related to a MO, and such a DO can be viewed *essentially as an answer to the question "How does one establish a MO* [for students]*"* (Bosch and Gascòn, 2002, 35). In general, mathematics teacher knowledge is then enacted in DOs, with the knowledge being *articulated* in their techno-theoretical blocks.

As a matter of fact, the literature does not provide us with extensive examples of descriptions of DOs, and even less examples of their use in analysing or developing teaching practice. Moreover, if the concept of DO is to include all aspects of the mathematics teachers' practice, not all punctual DOs can be related directly to a MO. Evidently, organising and managing a classroom imply, at least to some extent, techniques and perhaps also technology and theories which are transversal to the MOs enacted. And even if we restrict ourselves to didactical task types directly related to a MO, a local DO could be structured in quite different ways, above all with respect to the place of the tasks in a sequence of teaching activities, such as lesson planning, teachers' tasks related to different phases of classroom teaching (sometimes called *didactical moments*), homework grading, and so on. Notice that these categories are in themselves particular to DOs and "transversal" to MOs.

With this, we are thus back to the discussion at the beginning of the section, in the following sense: how do MOs and DOs interact? Here is our model, in short: a local DO consists of a family of punctual DOs, which in a teaching activity will be enacted consecutively in time. We can think, for instance, of a local DO as a model of the teachers' activity in relation to a sequence of lessons which he considers as a "whole"; the common technology relates to the aims of such a teaching unit. Some of the task types (defining the punctual DOs) relate directly to a MO, for instance a DO task type may be to construct a question for students that will enable them to

work on the MO. The teacher employs, to solve the task of a given punctual DO, a technique which is at least potentially *explained* by the overarching technology; the latter will then also refer to the MO in case the task type is related to it.

The students' work on a particular MO may in practice co-exist with several other activities which they are supposed to enact (including organisations transposed from other scientific disciplines, but also "behavioral organisations" such as manners of interaction among students and teachers). The idealisation – and reduction of complexity – which we want to make in this study, is to assess mathematics teacher knowledge while minimising the impact of other aims and constraints of teaching than those pertaining to the learners enaction of certain MOs. That is, we want to describe and assess primarily those parts of DOs which are related directly to certain MOs. This suggests that the "concrete setting of teaching" for the DO has to be replaced with a simplified, "hypothetical" local DO.

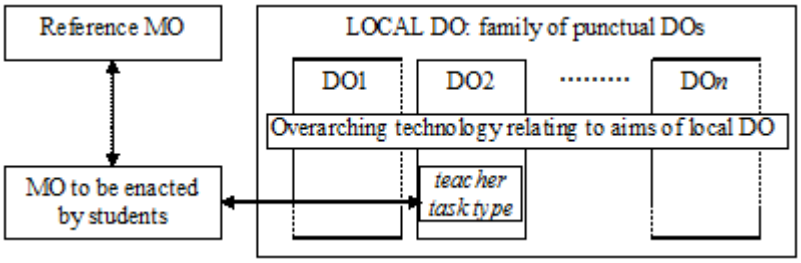


Fig. 1: A teaching sequence of punctual DOs, some of which relate directly to a MO. The analysis of the punctual DO employs a reference model of the local MO.

In a sense, one can *observe* DOs directly, through their plain enaction, in teaching activity. We have already explained why this is not suitable in this study, where we want a clear picture of teacher students' reactions to identical and simplified teacher tasks. It is important to note that what we can then record is just the respondents' *technology* and perhaps *theory* as probed by a *description* of these tasks. On the other hand, the interaction among *teachers* is an important real-life channel for the development and exchange of didactical technology (and to some extent, theory). This kind of interaction can be enabled by arranging teacher students' discussion of the tasks, rather than getting their "answers" in writing or in individual interviews. And from this complex discourse, we can then try to extract the key techniques which they are likely to use in an interaction with students or other forms of actual teaching activity.

We pause here to emphasise the current impossibility to build reference models for empirical research on DOs which are precise regarding the techno-theoretical block. This is true even for work within a single country, and *a forteriori* in a comparative study. By contrast, constructing operational reference models may be

an almost trivial task for a MO (cf. above). This illustrates the current lack, for the teaching profession, of a common *professional language* and of widely known and acknowledged theoretical models; in short, for shared, dependable teacher knowledge.

To assess mathematics teacher knowledge outside of the classroom, we will then present pairs of respondents with certain tasks coming from a punctual DO that is situated in a hypothetical context, which is however susceptible of being recognised as meaningful by the respondents (and, in a wider sense, actually be so). The analysis of responses to such tasks will necessitate the construction of reference models of both MO and DO (the latter being mainly focused on didactical techniques). We present two examples of this procedure in the next section, and results from use of them in the following section.

3. Hypothetical teacher tasks: two cases

The two tasks used in this study are the same as those published in (Winsløw & Durand-Guerrier, 2005, appendix; for the sake of completeness they are reprinted in this section). We now present a thorough analysis of them, using the theoretical model presented in the previous section. Notice that they are both in the context of lower secondary school, and relate to different major regional MOs which are taught in most countries at this level (geometry, algebra).

3.1. Teaching similarity or proportions (HTT1)

The hypothetical teacher task (HTT1, cf. below) centers around a *mathematical task* of the following type:

> T_1: given a triangle Δ with sides a, b, c known, and a number $a'>0$, find b' and c' such that the triangle with side lengths a', b' and c' is similar to Δ.

> In fact, the student task contained in HTT1 is a variant of T_1, where the mathematical notions *triangle* and *similar* are concealed in a "real world" setting: what is given is the distances (3,3,4) between three points on an aereal photo, and the corresponding points on a magnification – which is implicitly a similar figure – to be constructed, in which the longest distance (corresponding to the side which is 4 on the photo) is also given. While the recognition that three distinct points corresponds to a triangle is probably rather straightforward, some students may not recognise the theoretical concept of similar triangles in this task, but rather a special case of T_1:

> T_{11}: given a triangle Δ with sides a, b, c known, and a number $a'>a$, find b' and c' such that the triangle with side lengths a', b' and c' is a "magnification" of Δ.

HTT 1 (translated from the Danish/French/Japanese versions used in the study)

You assign the following task to your 8th grade pupils:

An aerial photo is used to draw a map. To begin with, three points are marked on the photo; the distances between these points are 4 cm, 3 cm, and 3 cm. The map must be slightly larger than the photo: the longest distance between the three points should be 6 cm on the map. What should the other two distances be on the map?

Some pupils answer: "5 cm and 5 cm"; others say: "4.5 cm and 4.5 cm".

First task for the teacher (*to be solved individually within 10 minutes*)

Analyse the solutions. What would you do as teacher in this situation? Please take notes.

Second task for the teacher (*to be solved in conversation with the other teacher student, 20 min.s*) Please, discuss your ideas with respect to using this situation to further the pupils' learning.

In both cases the technique to solve this task is

τ_1 : first compute $k = a'/a$, then b' can be found as kb, and c' as kc.

Notice that τ_1 is just a implicit form of "action", which – when described, as above – becomes already part of a technology. The technology could also be an explanation of the kind

θ : in similar triangles, the ratios of corresponding sides are equal:

$$a'/a = b'/b = c'/c.$$

This technology may relate a number of other practice blocks, corresponding to task types such as

T_{12}: given two different triangles, determine if they are similar.

T_{13}: as T_1, but with a quadrilateral (τ_3 involving subdivision into two triangles).

Finally, the *theory* involved in justifying θ and developing its relations with other technologies, could be the

Θ : theory of proportions in Euclidean geometry (including Thales' theorem).

but this is by no means uniquely determined by the previous elements; less "formal" arguments about similar figures might also form a theoretical background for θ. And, particular at more advanced levels, one could find technologies akin to θ within a geometrical theory of linear maps M: $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ (in fact $n = 1$ sufficces, but $n = 2$ is also relevant). Indeed, the formulation of the task for the pupils leaves this quite open, but in working with HTT1, respondents will situate it within some kind of technology that also implicitly suggests a background theory of some kind.

With such a choice of θ and Θ, the quadruple (T_1, τ_1, θ, Θ) forms a punctual MO corresponding to T_1, and a local MO is then a family (T_i, τ_i, θ, Θ) where θ enables the articulation of all the practice blocks (T_i, τ_i). It is not given beforehand if the hypothetical DO aims just at the punctual MO determined by T_1, or if it may have a larger scope with the local MO determined by θ, or even the regional MO determined by Θ.

The didactical type of tasks, to which HTT1 belongs, leaves this open. We may describe this task type as follows:

T_1*: given different student responses to a task of type T_1, determine what to do as a teacher to make students learn.

The openness of HTT1 can be interpreted as the object of the verb "learn": are we talking about a technique like τ_1 (punctual MO, where the tasks could be varied within T_1), about the technology θ (local MO, where the variation is over practice blocks), or even the regional MO where different technologies within the scope of a theory Θ could be involved? However, T_1* has another kind of constraint, which is characteristic of "critical didactical decisions" in the classroom: that of *didactical time* (Chevallard, 1991). Respondents are likely to think of what can be done for the students learning within a lesson, in a broad sense; thus an uncontrolled variation within the scope of a theory Θ may not lead to a pertinent *didactical* technique to activate for T_1*. Indeed, it seems necessary to address the fact that some students did not provide a correct answer to the given task of type T_1; in particular, to identify a technique that could led to the false answer, such as

τ_1^- : first compute $k = a' - a$, then b' can be found as $b + k$, and c' as $c + k$,

which, by explicitation and generalisation, corresponds to the mathematically incorrect technology

θ^- : in similar triangles, the differences of corresponding sides are equal:

$$a' - a = b' - b = c' - c.$$

A possible aim of variying the tasks could then be to confirm if some students apply τ_1^- , to have them formulate something like θ^-, and finally convince them (through appropriate tasks) that θ^- is errouneous in the sense that triangles constructed using τ_1^- are in fact not similar. One might also think of ways to demonstrate that θ^- is not compatible with Θ.

This leads us to some of the *didactical* techniques that could be applied to solve tasks of the type T_1*. To describe and motive these techniques, we first formulate some concrete elements of teachers' reflection about the students' answers to the task (of type T_1); they relate in rather directly to the teachers' command of (T_1, τ_1, θ, Θ):

S_1: Identify correct student answer, 4.5 cm, e.g. by using τ_1 (no explicit technology).

S_2: Identify correct student answer, 4.5 cm, stating that it is consistent with θ (possibly without explicit link to theory justifying θ).

S_3: Identify correct student answer, 4.5 cm, stating that it is consistent with θ, and refer to appropriate theory (e.g. "Thales theorem") to justify the principle of θ.

S_4: Identify wrong student answer, 5 cm, e.g. using τ_1 (no explicit technology needed).

S_5: Identify wrong student answer, 5 cm, stating that it is consistent with a "technology" like θ^- (possibly without giving an example or theoretical reason to reject θ^-).

S_6: Identify wrong student answer, 5 cm, stating that it is consistent with θ^-, and give an example or theoretical reason to reject θ^-.

These elements of solution come out of – and help to recognise – the following elements of didactical techniques (some of which can clearly be generalised beyond T_1*):

τ_{10}*: find answer to pupils' task (here, recognised in solution elements S_1 and S_4).

τ_{11}*: identify appropriate technology for the students' task (here, S_2),

τ_{12}*: identify the techniques and technologies that could underlie the wrong answers (here, S_5),

τ_{13}*: identify reasons to reject the technology leading to the wrong answers (here, S_6),

τ_{14}*: identify reasons to accept the appropriate technology (here, S_3).

Notice that τ_{11}* and τ_{12}* both presuppose τ_{10}* in the sense that identifying technology requires knowing a technique. Likewise, τ_{13}* presuppose τ_{12}*, and τ_{14}* presuppose τ_{11}*.

To proceed in class, some of the following techniques may then be proposed. They are based on the teachers' broader grasp of the MO, and aim to develop the students' understanding of it at different levels:

τ_{15}*: present several explanations (technologies, examples, reasonings) to the pupils.

τ_{16}*: organise a class discussion about the two solutions, to have students realise what is the correct answer.

τ_{17}*: have pupils work on more instances of T_1.

τ_{18}*: actively and explicitly base activities on students' knowledge and previous experience with this or related local MOs.

τ_{19}*: actively and explicitly make use of different forms of representation (diagrams, tables, formulae *etc*.) in activities or presentation related to θ.

τ_{19a}*: organise some activity with technology (geometry software, to work on similarity – with the given or with other examples).

These "techniques for action" depend heavily on τ_{10}*,…, τ_{14}*. For instance, τ_{17}* could mean just to provide a number of exercises allowing pupils to train τ_1; but in the presence of τ_{13}* it could mean carefully selected examples that would allow the pupils to realise that θ^- is false.

A *technique* τ_1* to solve a task of type T_1* such as HTT1 could then be described a subset of {τ_{10}*,.., τ_{19}*, τ_{19a}*}; it may of course involve other partial techniques, but the above are the elements we have found most crucial and which we use in our actual coding of solutions. A *didactical technology* θ* for describing such techniques has just been presented, even within the setting of a theoretical framework (ATD, cf. section 2). As we mentioned in Sec. 2, the technology found in teachers' discussions about T_1 is likely to be different and to exhibit considerable

variations, but it will still contain elements that can be meaningfully identified with the techniques above. For instance, a major technological component in explaining the above techniques is related to *how the pupils' understandings is addressed* – does the technology enable to go beyond the recognition of right and wrong answers (and even methods)? How precisely can different approaches to T_1* be described and assessed? And, of course, for the latter question, on what theoretical basis? Just to cite one possible source of techno-theoretical component corresponding to (T_1*, τ_1*), we mention Brousseau's discussion of the "puzzle situation" (Brousseau, 1997, 177ff).

HTT 2 (translated from the Danish/French/Japanese versions used in the study)
Your pupils are working in class (grade 9). They encounter at some point the need to calculate the expression $(-2)(x-3)$ to produce the expression $-2x+6$. A pupil, whom you know to be rather gifted, calls on you and says: "look, I have arrived at this" [he points the expression
$-2x + (-2)\cdot(-3)$
in his notes]. "I know the last term should be 6. But then I began to doubt – why is it so?"

The lesson is about to end. You decide to postpone the question until the lesson tomorrow, and say: "Yes, that's a good question. Let us come back to that tomorrow".

<u>Teacher task</u> (*to be discussed in pairs of teacher students, in 20 minutes*)**.** Imagine you are in the teachers' lounge, and discuss the problem with your colleague: how could you make this question an opportunity to learn?

3.2. Reviewing negative numbers: a tedious "gap" (HTT2)

The question posed by the gifted pupil in HTT2 is one that could in principle come up as negative numbers and their arithmetics is introduced, in many countries several years before the hypothetical context (grade 9). The pupil perhaps asked it then, but did not understand or accept the explanation he got. This was the case of the French author Stendhal:

> Imagine how I felt when I realized that no one could explain to me why minus times minus yields plus… Mr. Chabert, whom I pressed hard, was embarrassed. He repeated the very lesson that I objected to and I read in his face what he thought: "It is but a ritual, everybody swallows this explanation. Euler and Lagrange, who certainly knew as much as you do, let it stand. We know you are a smart fellow… It is clear that you want to play the role of an awkward person… It took me a long

> time to conclude that my objections to the theorem: *minus times minus is plus* simply did not enter M. Chabert's head, that M. Dupuy will always answer with a superior smile, and that mathematical luminaries that I approached with my question would always poke fun at me. (quoted in this translation by Hefendehl-Hebeker, 1991, p. 27).

The pupil of HTT2 is now in ninth grade; would he get a satisfactory answer to his question? If he does not, will he give up his interest in mathematics, like the hero of Stendhals autobiographic memories cited above? We don't know; the 9th grader is fictive. But certainly the question arises in similar ways to many pupils, and continues to haunt even some adults, like Stendhal. What should the teacher know to go beyond repeating his lesson?

As before, let us first analyse the MO to which the teacher task relate. At the basis we have the task type

> T_2: Determine the product of two negative numbers which comes with the well known technique.
>
> τ_2: just compute the product of the corresponding positive numbers, which in fact may be carried out rather automatically.

An official technology is

> θ : For any real numbers a and b one has $(-a)\cdot(-b) = ab$.

A theoretical environment Θ for this statement could be any axiomatic theory of the arithmetic of the reals, the main ingredient in a formal proof being the distributive and commutative laws (see e.g. τ_{25}* below). In particular, this is likely to be the essence of the "lesson" which Stendhal (cf. quote above) would not accept. Indeed, the *if-then* nature of a theorem in an axiomatic theory – where the truth of all statements is relative to some a priori "arbitrary" axioms – is not easily digested in grade 9. This is not only because mathematics is usually not presented that way at the level of 9th grade, but also because the "lesson" it likely to treat Θ in a partially implicit way – perhaps presenting the axioms as "evident rules", or just use them implicitly. More crucially, there does not seem to exist convincing intuitive explanations for this rule, unlike what is the case for most common arithmetic principles like the distributive law (e.g. use areas of rectangles) or $-(-a) = a$ (e.g. use "sign corresponds to reflection in 0 on the number line"). And finally, there does not seem to be simple applications in real life of *products* of two negative numbers, unlike products which have a positive factor (could be though of as repeated addition *etc*.)

Considering the use of explanations and reasonings adapted to the pupil, we are therefore approaching the demanding *didactical* task type.

T_2*: A pupil masters (T_2, τ_2) but asks you why that technique is correct. Determine how to make use of this question as an opportunity to learn.

As in T_1* it is open what is the object of the verb "learn", in particular what technology and possibly theory related to (T_2, τ_2) the teacher should make use of. This should be determined from the hypothetical context. In this task the subject of "learn" is also open: *who* could or should learn from this, just the pupil asking the question, or the whole class?

Despite the difficulties of exhibiting a convincing justification of θ at the given level, we can nevertheless think of the following didactical techniques, some of which make use of the fact that the pupil seems convinced that

$$(-2)\cdot(x-3) = -2x + (-2)\cdot(-3);$$

but in other cases the same techniques could be used after checking that the pupils accept such uses of the distributive law. The first concern direct mathematical explanations of θ, aimed at the questioning pupil or the whole class:

τ_{21}*: explanation using "number patterns", e.g. look at $n\cdot(-3)$ for $n = 2,1,0,\ldots$

τ_{22}*: explanation by drawing lines, e.g. $y = -2x$, when the pupil is convinced this is the equation of a real line (then drawing first the halfline for $x > 0$ forces $-2x$ to be positive for $x < 0$).

τ_{23}*: explanation based on "parenthesis magic", such as

$$(-2)\cdot(-3) = -(2\cdot(-3)) = -(-6) = 6$$

τ_{24}*: present a more or less complete proof based on the distributive law, e.g. as follows:

$$0 = 2\cdot(3-3) = 2\cdot 3 + 2\cdot(-3) = 6 + 2\cdot(-3); \text{ so } 2\cdot(-3) = -6;$$

and as

$$0 = (2-2)\cdot(-3) = 2\cdot(-3) + (-2)\cdot(-3),$$

we conclude that $6 = (-2)\cdot(-3)$.

τ_{24a}*: explanation based on the equation $(-2)\cdot(x-3) = -2x + (-2)\cdot(-3)$, e.g. as follows:

when $x = 3$ the left hand side is 0 and so

$$6 = 2x = (-2)\cdot(-3).$$

τ_{25}*: circular or otherwise inconvincing explanations, e.g. inappropriate real life explanations (such as "twice you remove a deficit of 3€ from my

account"), travelling forth and back on the number line with negative speed, *etc*.

τ_{25a}*: explanations appealing explicitly to external authority – of the teacher ("trust me"), of convention ("this rule is used by everyone"), of technology ("try out what your calculator says") *etc*.

τ_{25b}*: after proposing τ_{25}* and/or τ_{25a}*, realising the insufficiency of the technique.

Notice that the last three techniques are not really related to the MO described before, and could be used as a way to cover a poor understanding of it. But of course, a teacher may also honestly think that the pupil can not learn anything on this question, except that mathematics contains conventions which one just has to accept.

To proceed in class, some of the following techniques may then be proposed. They are based on the teachers' broader understanding of the MO, and aim to develop the students' understanding of it at different levels:

τ_{26}*: present several explanations (technologies, examples, reasonings) to pupils.

τ_{27}*: organise a class discussion in order to have pupils find explanations or otherwise explore.

τ_{27a}*: have pupils work on more examples of T_2, for example based on τ_{21}*.

τ_{27b}*: organise some activity with technology (calculators, spreadsheet…) to explore the arithmetics of negative numbers, for example based on τ_{21}*.

τ_{28}*: actively and explicitly base activities on students' knowledge and previous experience with this or related local MOs.

τ_{29}*: actively and explicitly make use of different forms of representation (diagrams, tables, formulae *etc*.) for example based on τ_{22}*.

In practice, the techniques mentioned above may be just partial in the sense that they do not in themselves enable a reasonable solution to T_2*. For instance, a teacher may express her intention to present several explanations (and even justify it e.g. with reference to different styles of learning), but be unable to do so in the concrete case.

Besides discussing the different techniques for responding to T_2*, some more specific features of HTT1 may be discussed by teacher students, e.g. whether the question should be taken up just with the inquiring pupil, or with the whole class.

3.3. A tentative quantitative measure based on the above

A full presentation of the techniques developed by respondents (among those designated above) provides rather detailed information, but as some techniques are more appropriate than others – and some are decisively faulty – we may try to summarise the overall performance by designating points to techniques in the following manners:

2 points: the technique is entirely appropriate and could contribute to pupil learning;

1 point: the technique might be appropriate and could possibly contribute to pupil learning;

0 point: the technique is not approproate and could not further pupil learning (attributing 0 points for such a technique is of course debatable, and amounts to counting only appropriate techniques, without "punishing" faulty ones).

While the techniques proposed can be rather objectively identified in the students teachers' discussion, any assignment of points is of course somewhat normative.

In Fig.2-3 is our suggestion for such an assignment. Notice that we have assigned 0 point to τ_{25}* and τ_{25a}*, which are potentially causing obstacles to pupils learning, but as τ_{25b}* *always* comes with one of these and tend to neutralise this effect, the latter has been assigned 1 point (it may be that teachers who, in virtue of τ_{25b}*, realise the defaults of τ_{25}* and τ_{25a}*, may finally avoid them and use other techniques).

	τ_{10}*	τ_{11}*	τ_{12}*	τ_{13}*	τ_{14}*	τ_{15}*	τ_{16}*	τ_{17}*	τ_{18}*	τ_{19}*	τ_{19a}*
Points	1	2	2	2	2	1	1	1	2	1	1

Fig. 2a: Tentative grading of techniques for T_1*.

	τ_{21}*	τ_{22}*	τ_{23}*	τ_{24}*	τ_{24a}*	τ_{25}*	τ_{25a}*	τ_{25b}*	τ_{26}*	τ_{27}*	τ_{27a}*	τ_{27b}*	τ_{28}*	τ_{29}*
Points	1	1	1	2	2	0	0	1	1	1	1	1	2	1

Fig. 2b: Tentative grading of techniques for T_2*.

One objection which could be raised to such a grading is that teacher student pairs who develop a wide range of possibly mediocre techniques would get more points than ones who develop a single, appropriate plan for intervention in the situation. However, in the setting of the tasks, exploring a richer variety of (potentially appropriate) techniques would, indeed, seem an indicator for the quality of didactical interventions they might, eventually, be able to implement.

4. A small-scale comparative study

We now present the results of a comparative study in Denmark, France and Japan, based on HTT1 and HTT2 and the coding and assessment schemes explained in Sec. 3. The two tasks are about mathematics teaching at the lower secondary level – more precisely, grade 7 and 9 respectively – and it is affirmed that the two tasks corresponds to programs and common teaching pratice in the involved countries and at the indicated grade level. In this study, respondents were students who were very close to obtaining, or had just obtained, the degree that enables them to take up a position as teacher in grade 7 through 9 at schools in the respective countries.

We had 5 pairs of teacher students (a total of 10 respondents) do the two tasks in each country. With such a small sample, it did not make sense to aim for formal representativity across institutions in each country; and in fact, all 10 students in each country graduated, or were about to graduate, from the same institution. While they were all in larger cities, there is no reason to believe that these institutions are special or significantly different from other institutions responsible for teacher training in those countries – except on two points: (1) the Danish and Japanese institutions are "upper end" in the sense that they are sought by relatively well performing students; (2) while an equal number of male and female respondents participated in Denmark and France, only females participated in Japan. In all three countries, participation was voluntary, but the sample of volunteers within the institution was quite arbitrary and noone refused to participate. Indeed, it is our impression that the 10 teacher students in each country can be considered, together, a reasonably "average" sample for the total target population within their institution. However, we readily admit that some of the variables mentioned should be controlled better in a large scale sample, and that the somewhat loose control of them here (in part enforced by pratical circumstances) does imply some reservation as to the significance of our results.

Tasks and oral introductions were translated from English or French into each of the two other languages involved (Danish and Japanese), and in general we made every effort to provide the same conditions for all 15 pairs: *verbatim* the same introduction, the same time slots allowed, paper and pencils available and a nice, quiet room, and of course, no further intervention on our part. The discussions were taperecorded, resumed and coded by one of the authors, and checked by at least one more author (only one author understands Danish, so here the checking for the Danish pairs was based on a translation). An example of coding for one pair is included in Appendix 1. The written materials produced by the teachers (during the first 10 minutes for HTT1, and possibly during discussions) were collected as supplementary evidence.

The coding corresponds to the didactical techniques presented in Sec. 3. We may then summarise the results for each country as the *number of pairs who, in their*

discussion, explicitly proposed each of these techniques (without clearly rejecting them in the sequel). This is shown in Fig. 3a-b. These tables contain a significant amount of information about *what* techniques the teacher students develop during their discussions. Our stipulation that these techniques give a reasonable picture of the contents of these conversations can, of course, only be controlled by examining them in more detail; but we point out that while most of the techniques were identified *a priori*, we did carefully consider if something significant turned up unexpectedly, and in fact added one technique (namely τ_{24a}*) to our original list, based on the data.

HTT1	τ_{10}*	τ_{11}*	τ_{12}*	τ_{13}*	τ_{14}*	τ_{15}*	τ_{16}*	τ_{17}*	τ_{18}*	τ_{19}*	τ_{19a}*
DK	4	3	3	2	0	0	3	4	1	0	2
F	5	5	5	5	1	5	3	3	3	1	3
JP	5	5	5	3	0	4	3	4	1	0	2

Fig. 3a: Number of teacher pairs proposing the didactical techniques while discussing HTT1.

HTT2	τ_{21}*	τ_{22}*	τ_{23}*	τ_{24}*	τ_{24a}*	τ_{25}*	τ_{25a}*	τ_{25b}*	τ_{26}*	τ_{27}*	τ_{27a}*	τ_{27b}*	τ_{28}*	τ_{29}*
DK	0	0	0	1	0	5	5	3	3	1	0	0	2	1
F	4	0	4	2	2	1	4	4	3	0	0	0	5	0
JP	0	1	4	1	1	4	1	5	5	1	2	0	2	0

Fig. 3b: Number of teacher pairs proposing the didactical techniques while discussing HTT2.

Let us point out just a few things which can be read out of the two tables:

(1) All pairs, except one Danish, identify correctly the right and wrong student answers in HTT1.

(2) All French pairs identify principles behind those answers, and want to provide several explanations of them to pupils. One pair even provide a theoretical reference (Thales' theorem). All Japanese pair explicitly state a principle behind the correct answer.

(3) The Danish pairs all propose little else than inappropriate explanations of $(-2)\cdot(-3) = 6$ (all propose both τ_{25}* and τ_{25a}*) and 3 recognise that they are inappropriate; also, most of the French and all of the Japanese pairs

propose such explanations, but these pairs recognise their insufficiency and they also develop alternative techniques.

Activities based on information technology are not developed by any pairs for HTT2, while some pairs in all countries consider this for HTT 1 (τ_{19a}*).

In order to gain a more immediate overview of the data, we used the grading scheme from Sec. 3.3 to calculate for each country the total number of points obtained by the five pairs, on each task. The result is shown in Fig. 4a and visualised in Fig. 4b.

Points	HTT1	HTT2
DK	31	13
F	58	33
JP	46	26

Fig. 4a: Overall score in the two tasks, for the 10 students of each country.

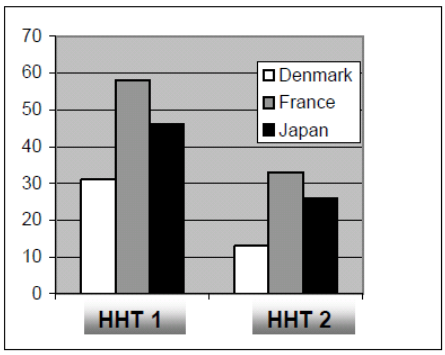


Fig. 4b: Graphical representation of scores as indicated in Fig. 5.

As is particularly clear in Fig. 4b, there is a common pattern for HTT1 and HTT2, even if the task types are rather different, not only in mathematical contents but also in terms of the hypothetical context. We want in particular to point out two general tendencies:

- with respect to developing more appropriate techniques, the French students do somewhat better than the Japanese students, and both groups are significantly ahead of the Danes;
- in all three countries, the overall "performance" is more satisfactory for HTT1 than for HTT2 (notice that although the sum of points for the two tasks can clearly not be compared directly, it seems evident that more appropriate techniques are proposed for HTT1).

While above-mentioned the reservations caused by methodology makes it inappropriate to consider the absolute scores as certain and representative measures for teacher students' performance on the two tasks, we affirm that these two *tendencies* reflect very well our overall assessment of our data for the three countries.

5. Discussion of the results

Teacher education is undergoing frequent reforms in many countries, often with little evidence to support change. This is not only true at the global, institutional level, but also more locally in the choice and organisation of courses in the teacher education programme. Thus, there are many reasons why it is interesting to investigate the impact of different forms of teacher education on teachers' capacities for teaching. Here, we wish to briefly discuss possible causal relations between

(1) the didactical organisations (particularly techniques) proposed for HTT1 and HTT2 by student teachers (close to graduation), and

(2) the context, contents and structure of their mathematics teacher education.

In Sec. 4 we have presented some data for (1); we will now say a little about (2) – at a fairly global level – and then discuss to what extent it may be seen as a cause for (1).

The formal assets of the education of lower secondary mathematics teachers are in several ways similar in Japan and France, when compared to Denmark. In Denmark, the whole training takes place in teacher training colleges, which are non-research institutions that are independent from universities. There, teachers are prepared to teach four different subjects, and the time allowed for the study of mathematics (integrated subject matter and didactics) is 0,7 years out of a total study time of 4 years (cf. Elle, 1996, 1999, for a more detailed description).

In Japan teacher education programme is 4 years, which are followed by a year of induction with reduced teaching load; in France the teacher education programme takes 5 years, but the final year comprises considerable teaching practice at a school, along with courses at the teacher education institute (cf. Pimm et al., 2003, chap. 5-6 for more information on teacher induction in Japan and France). In Japan, the induction year takes place after the students has graduated (and left) the university; otherwise it does bear some similarity to the fifth in France. But we chose our respondents to be around the end of the *official pre-service programme* (of 4 years in Japan, and 5 years in France). In both Japan and France, the training takes place in universities (or, for parts of the two final years in France, at teacher education institutes affiliated to the university). In both countries the studies begins with an extensive course program in "academic" mathematics (about 2 years in Japan, more than 3 years in France), followed by courses on pedagogy and didactics in the final years; and in both countries, mathematics teachers are prepared to teach just this one subject. Thus, while teachers in Japan and France receive university courses on advanced mathematics together with students preparing for other professions, Danish teacher students have a program of their own; as far as mathematics is concerned, it aims specifically and almost

exclusively at a deepened knowledge of the subject as it is taught in school (in fact, primary as well as lower secondary level; there is no institutional distinction among these levels in Denmark, as a further contrast to the French and Japanese model).

In all three countries, there is some practice built into the program. It is usually spread throughout the four years of study in Denmark, while it is placed at the end of the French and Japanese programs. An overview of the space each element has in the study programs of the three countries is given in Fig. 5. Notice that "other" refers to the three other disciplines chosen by students in the Danish programme, while in the Japanese programme it refers courses meant to develop the general culture of the students (e.g. courses in English, history of education, citizenship *etc*.). We also note that in Denmark, a new teacher training programme is expected to be launched in 2007, and what is described here is the programme which our respondents had (almost) completed.

As mentioned in Sec.2, the techno-theoretical blocks of DOs – notably at the level of theory – differs considerably among countries and even institutions within a country. It seems to us that in all three countries, it is even difficult to recognise strong theoretical grounds among the students trained within a single institution. However, those tendencies we do see are quite likely to be caused from different contents in the element "didactics of mathematics" – such as occasional references to the theory of didactical situations (Brousseau, 1997) in France, to a recently developed system of mathematical competences in Denmark (Niss, 2002), and to the official curriculum and teaching aims in all three countries. The Japanese teacher students are particularly explicit in referring to national standards of mathematics instruction (cf. JSME, 2000) corresponding to the grade levels which are indicated in the tasks.

	Mathe-matics	**Didactics of mathematics**	**General ed. (pedagogy)**	**Teaching practice**	**Other**
DENMARK	0,7		0,7	0,6	2,0
FRANCE	3,7	0,4	0,3	0,6	-
JAPAN	2,2	0,2	0,4	0,2	1,0

Fig. 5: Study time (in years) for different subjects in the lower secondary teacher education programmes of the three countries.

When it comes to the DO techniques proposed by students (cf. Fig. 3), the tendency of Japanese and French pairs to attack the MO task with more appropriate methods, and to do so with the attention of *explaining* things to students, could well be seen as an effect of their rather extensive experience from university

mathematics courses. The Danish pairs are fairly explicit about general principles they want to pursue: e.g. to make pupils work on more examples, for HTT1, or providing several explanations, as for HTT2. In the latter case, this explicitness occurs among 3 pairs in spite of a *de facto* lack of just one appropriate explanation. It could perhaps be linked to the relative extensive training in general pedagogy and to their broader subject matter horizon; indeed, their discussions involve more use of terms and ideas from general education.

It is well known that the degree of "deep understanding of fundamental mathematics" among experienced teachers does not depend directly on the amount of academic mathematics courses in their pre-service education (cf. in particular Ma, 1999, for a striking study in this direction). However this could to a large extent be explained by factors that do not affect our respondents, such as the conditions at schools for teachers' continued intellectual development (cf. e.g. Stiegler and Hiebert, 1999). It may therefore not be seem surprising that the Danish pairs – with their much shorter training in mathematics – exhibit fewer (if any) appropriate didactical techniques related directly to techno-theoretical blocks of the MOs. However, we checked that both the product rule for negative integers and similarity of plane figures had been addressed during the courses in mathematics and didactics of mathematics which the 10 Danish students had followed.

In a sense, given the difference in terms of formal training in mathematics, it could look more surprising that *all* fifteen pairs seemed quite uncertain in dealing with the theoretical level of the MO related to HTT2; after all, the French students had almost 4 years of advanced mathematics courses, and both Japanese and French students have had courses on axiomatic algebra. But the punctual organisation of (negative) integer multiplication is not likely to be explicitly addressed in the last year of teacher training; and apparently, the students do not link it with the courses they had on algebra. Whether they will ever make such links would then depend on conditions that could help them do so after they start teaching, such as in-service training or collaboration with more experiences teachers.

6. Conclusion

The anthropological approach provided a theoretical framework to situate "teacher knowledge", corresponding to teachers tasks, with respect to mathematical knowledge which are aimed at in mathematics teaching and the corresponding types of tasks that their pupils work with. In particular, teachers' task types may refer to mathematical organisations which are to be worked on by the pupils, and rather precisely defined parts of the teachers' techniques to solve these tasks may then be studied through "simplified" tasks within a hypothetical context. Here, reference models of the related mathematical organisation are important to describe the didactical techniques.

Our empirical study, using two hypothetical teachers' tasks, show that certain systematic differences of the teacher education systems in France, Japan and Denmark can indeed explain some overall differences in the teacher students' performance on the tasks. Our method is based on a small number of carefully analysed conversations among pairs of teacher students about the two teachers' tasks; it presents itself as an alternative, even at larger scales, to questionnaire surveys which does not allow for spontaneous teacher interaction, and the present study could be merely seen as a first attempt to use and justify this method.

We note that even if with more data, we cannot infer directly from teacher students' performance on HTTs to the way students will eventually solve similar (or other) didactical tasks, and even less to the learning of their pupils. We can also not predict what results we would get with experienced mathematics teachers in the three countries as respondents; indeed, this would depend also on factors as induction and other in-service learning opportunities offered in each country. Our next step will be to extend our study to such respondents.

References

ALTER, M & PRADL, G. (2006), How, Exactly, Are Teachers Best Prepared? *Education Week*, **25 (41)**, 42–43.

ARISTOTLE (1991), *Metaphysics*. Translation by J. McMahon. New York: Prometheus books. Original in Greek, probably around 330 B.C.

BALL, D.L. (1991), Research on teaching mathematics: Making subject matter knowledge part of the equation. In J. Brophy (ed.) *Advances in research on teaching*, **2 (1-48)**, Greenwich CT: JAI Press.

BALL, D. & BASS, H (2000), Interweaving Content and Pedagogy in Teaching and Learning to Teach: Knowing and Using Mathematics, In J. Boaler (Ed), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning*. Westport: Ablex Publishing.

BARBÉ, J., BOSCH, M., ESPINOZA, L. et GASCÓN, J. (2005), Didactic restrictions on teachers practice - the case of limits of functions at spanish high schools, *Educational Studies in Mathematics*, **59 (1-3)**, 235–268.

BROUSSEAU, G. (1997), *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

BOSCH, M. et GASCÓN, J. (2002), Organiser l'étude, 2. Théories et empiries, *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage, 23–40.

CHEVALLARD, Y. (1991), *La transposition didactique : Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble, La Pensée Sauvage, Editions.

CHEVALLARD, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **12(1)**, 73–112.

ECS, Education Commission of the States (2003).

Eight questions on teacher preparation: what does the research say? a summary of the findings, Denver, USA: ECS.

ELLE, B. (1996), Teacher education in Denmark. In: T. Sander et al. (eds), *Teacher education in Europe. Evaluation and perspectives*, 69–99. National Reports prepared for a European Evaluation Conference, Universität Osnabrück, 1995.

ELLE, B. (1999), Teacher education in Denmark – updating the SIGMA report of 1996. *TNTEE publications*, **2** (2), Umeå: University of Umeå.

HEFENDEHL-HEBEKER, L. (1991), Negative numbers: Obstacles in their evolution from intuitive to intellectual constructs, *For the learning of mathematics*, **11 (1)**, 26–32.

HENRY, M. (2000), Evolution and Prospects of Preservice Secondary Mathematics Teacher Edcuation in France, *Journal of Mathematics Teacher Education*, **3**, 171–179.

JSME (Japanese Society of Mathematics Education, 2000). *Mathematics program in Japan.* Tokyo.

MA, L. (1999), *Knowing and teaching elementary mathematics.* Mahwah NJ: Erlbaum Publ.

NISS, M. and HØJGAARD-JENSEN, T. (2002), *Kompetencer og matematiklæring: ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark.* Copenhagen: Danish Ministry of Education.

E. BRITTON, L. PAINE, D. PIMM (eds), *Comprehensive teacher induction*. Dordrecht: Kluwer.

SHIMIZU, Y. (1999), Aspects of mathematics teacher education in Japan: focusing on the teachers' roles. *Journal of Mathematics Teacher Education*, **2**, 107–116.

STIEGLER, J. & HIEBERT, J. (1999), *The Teaching Gap*, New York: The Free Press.

WINSLØW, C. & DURAND-GUERRIER, V. (2007), Education of lower secondary mathematics teachers in Denmark and France: A comparative study of characteristics of the systems and their products, *Nordic Studies in Mathematics education*, **12 (2)**, 5–32.

Appendix 1. Coding example

Below is the outline of a session on HTT1 with the corresponding coding inserted. The students' real names are replaced by A and B.

A would like to ask the students how they found their results. B identifies first the additive (τ_{12}*), and then the multiplicative principle (τ_{11}*). A wants to have a discussion on these (τ_{16}*). They both clearly agree that the "ratio" (multiplication) is the right principle (τ_{10}*) and proceed to discuss how to get the students to understand that it is so. They want to find a "concrete activity" (with physical objects) but don't find one. B then suggests that using triangles with very different sides, one could produce more tasks that clearly shows the additive principle wrong; B shows a 1, 10, 10 triangle (drawn during separate preparation) to illustrate this idea (τ_{13}*, τ_{17}*). They discuss rather vague ideas of how this example could be related to some reality the students are familiar with. B suggests using overheads and measuring on the screen, using different distances between slide and projector, but they abandon the idea as "it would be difficult in practice". B then suggests using a computer to experiment with magnifications of the "map" [they mean the aerial photo of the task] "once it has been scanned in" (τ_{19a}*). Finally they discuss other aspects of geometry and maps that are only not related to the task.

VIVIANE DURAND-GUERRIER
Université de Montpellier 2, France
vdurand@math.univ-montp2.fr

CARL WINSLØW
Université de Copenhague, Danemark
winslow@ind.ku.dk

HIROAKI YOSHIDA
Université d'Ochanomizu, Japon
yoshida@is.ocha.ac.jp

LAURENT VIVIER

UN MILIEU THÉORIQUE POUR LA NOTION DE TANGENTE DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

Resumen. Un medio teórico para la noción de tangente en la enseñanza segundaria. En Francia, en clases de grado 11, la introducción de la derivación se apoya fuertemente en la consideración de rectas tangentes a una curva ¡Pero la noción de tangente no es definida en forma general! Investigadores en didáctica de las matemáticas abordaron este problema. Una de sus conclusiones fue la necesitad de enseñar la noción de tangente para, después, utilizarla en la introducción de la noción de derivada. Con un punto de vista didáctico e histórico, esbozaremos una solución al problema de enseñanza planteado. Al adaptar el método de René Descartes, se define fácilmente la noción de tangente a las curvas algebraicas. Esta etapa parece importante para cambiar las concepciones de muchos de los estudiantes, que tienen una idea global, y no local, de la tangente. Luego, una introducción de la nueva noción de derivación es posible a partir de la noción de tangente, cuando la tangente ha adquirido el estatuto de objeto matemático.

Résumé. En France, en classes de première, l'introduction de la dérivation s'appuie fortement sur la notion de tangente à une courbe. Mais, hormis le cas très spécial des cercles, aucune notion de tangente n'a été définie au préalable ! Des chercheurs en didactique des mathématiques ont déjà abordé ce problème. Une de leurs conclusions fut la nécessité d'enseigner la notion de tangente pour, ensuite, l'utiliser afin d'introduire la notion de dérivée. Avec un point de vue didactique et historique, nous esquissons une solution à ce problème de l'enseignement des mathématiques. En adaptant la méthode de René Descartes, on définit facilement une notion de tangente pour les courbes algébriques. Cette étape paraît importante pour changer les conceptions de nombreux élèves qui ont souvent une vision globale, et non locale, de la tangente. Une introduction de la dérivation utilisant la notion de tangente devient alors possible puisque la tangente a acquis un statut d'objet mathématique.

Mots-clés. Tangente, courbes algébriques, étude locale, calcul approché, nombre dérivé, enseignement secondaire.

Cette recherche est issue d'une conférence donnée à l'occasion du *Tercer Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo* qui s'est tenu à Saltillo (Mexique) les 12 et 13 novembre 2009.

Introduction

Nous étudions dans cet article la notion de tangente dans l'enseignement secondaire. Nous nous intéressons essentiellement à l'enseignement de la notion de tangente, qui est problématique, et à un bref historique de la notion de tangente qui

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 15, p. 173 – 199.
© 2010, IREM de STRASBOURG.

permet de proposer des pistes pour résoudre le problème pointé dans l'enseignement.

La première partie dresse un état des lieux de l'enseignement de la notion de tangente en France. Nous constatons que les conclusions de chercheurs en didactique des mathématiques, datant de plusieurs dizaines d'années, sont toujours d'actualité. En particulier, reprenant les travaux de Castella (1995), nous avons proposé un test qui permet de montrer que, avant d'aborder le chapitre sur la dérivation, la notion de tangente est problématique même en classe de première scientifique (grade 11). Ceci n'a rien d'étonnant puisque seules les tangentes aux cercles font l'objet d'un enseignement avant la classe de première. Le problème majeur est que la notion de tangente a un statut pour le moins ambigu dans cette classe de première : les tangentes ne sont réellement définies qu'avec le nombre dérivé mais c'est un travail sur les tangentes qui permet d'introduire la dérivation. Le problème est patent : on ne peut pas se servir d'une notion qui n'a pas été construite auparavant et pour laquelle les conceptions *intuitives* sont loin d'être adéquates.

Dans les trois parties suivantes, afin de résoudre ce problème dans l'organisation des enseignements, nous esquissons les grandes lignes d'un enseignement alternatif de la notion de tangente qui correspond à un milieu théorique au sens de Bloch (2002). Il n'y a pas de bouleversement du curriculum, mais une vision intermédiaire constituée par les tangentes aux courbes algébriques. La proposition d'enseignement que nous faisons dans cet article n'a pas encore été testée, elle se situe en amont d'une nécessaire étude expérimentale.

Plus précisément, en deuxième partie nous discutons de certains points didactiques et historiques afin de baliser le nouvel enseignement que nous envisageons. L'introduction et le développement de la notion de tangente aux courbes algébriques en lien avec les connaissances anciennes – c'est-à-dire les tangentes aux cercles – constituent l'objet de la troisième partie. Enfin, la quatrième partie propose quelques pistes pour élaborer une nouvelle introduction de la dérivation en s'appuyant fortement sur la notion de tangente ainsi construite.

1. Les tangentes dans l'enseignement

1.1. La classe de quatrième

En France, la notion de tangente apparaît en classe de quatrième (grade 8), au collège. Il s'agit de définir la tangente en un point d'un cercle. Les six manuels scolaires étudiés proposent tous ces deux conceptions de la tangente d'un cercle :

C1 : Une droite qui n'a qu'un seul point d'intersection avec le cercle.

C2 : Une droite perpendiculaire au rayon en un point du cercle.

Toutefois, le statut de ces conceptions diffère selon les manuels : les manuels Phare, Transmath et Bréal optent pour C1 comme définition de la tangente en un cercle, C2 étant énoncée comme une propriété ; le manuel Diabolo fait exactement l'inverse, C2 en définition et C1 en propriété ; les manuels Triangle et Dimathème n'institutionnalisent que C2 bien que C1 soit présente, soit en remarque soit dans une activité d'introduction. Il n'y a donc pas de définition faisant l'unanimité mais l'importance de ces deux conceptions de la tangente se dégage nettement. On comprend l'intérêt de C2 pour le travail en géométrie et le lien entre C1 et une conception antique (cf. le livre III des *Éléments* d'Euclide). Seule C2 est à mobiliser pour résoudre les tâches géométriques proposées par les manuels. De fait, C1 ne sert que dans les activités d'introduction où la visualisation est prépondérante. Ces activités d'introduction proposent une esquisse de coordination entre ces deux conceptions, coordination toujours basée sur la visualisation – notons que dans Phare le rôle de la visualisation est réduite.

En prenant le cadre des paradigmes géométriques (Houdement & Kuzniak, 2000, 2006 ; Kuzniak 2009), on peut interpréter C1 comme une définition de la tangente dans le paradigme de la Géométrie I et C2 comme une définition de la tangente dans le paradigme de la Géométrie II.

Finalement, ces deux conceptions C1 et C2 ont une utilité très locale. C2 ne se généralise[1] pas et C1 ne se généralise qu'aux coniques.

1.2. La classe de première scientifique

Pendant presque trois ans il n'y a rien de nouveau sur le sujet. La notion de tangente réapparaît dans le cours sur les dérivées, en classe de première (grade 11). Le choix d'étudier la classe de première scientifique est double : la notion de tangente à une courbe est une notion importante car récurrente dans les cursus scientifiques et cela permet de considérer d'emblée les élèves les plus en phase avec les mathématiques enseignées.

Dans le programme de la classe de première scientifique, la tangente n'apparaît que dans un paragraphe qui fait référence à une définition subordonnée à la dérivabilité. Il est précisé que la notion de dérivée doit être introduite par une approche cinématique ou graphique. Nous délaissons l'approche cinématique puisque, en liaison avec les programmes de sciences physiques, on doit se limiter aux mouvements rectilignes. Ainsi, la notion de tangente ne peut y apparaître. Pour

[1] Nous restons dans le cadre de l'enseignement secondaire : la géométrie euclidienne où l'on considère un unique produit scalaire.

l'approche graphique, le programme spécifie une possibilité d'utiliser l'informatique pour faire des zooms sur une courbe.

Le contenu des manuels scolaires[2] varie très peu. Après un chapitre sur la parabole et les fonctions du second degré – avec parfois un exercice sur les tangentes à une parabole mobilisant la conception C1 –, vient le chapitre sur la dérivation. Comme introduction de cette dernière, on note systématiquement les trois approches suivantes : cinématique, graphique avec zooms et graphique avec limite des sécantes. Dans le cours, on trouve bien entendu la définition des tangentes aux courbes pour les fonctions dérivables comme il est précisé dans le programme. Il y a un problème d'enchaînement. La notion de dérivée s'appuie fortement sur la notion de tangente. Or, c'est à partir de la dérivation que l'on définit la tangente[3] !

Il y a également, sans aucun lien avec le cours sur les fonctions, un chapitre sur le cercle avec notamment les équations de cercle. On y retravaille la notion de tangente aux cercles, avec la conception C2 du collège, à l'aide du produit scalaire. Les manuels ne se soucient guère de la nouvelle notion de tangente qui est développée dans le chapitre sur la dérivation.

On voit apparaître, après les conceptions *antiques*, C1 et C2 du collège, deux nouvelles conceptions institutionnelles de la notion de tangente :

C3 : limite des sécantes en un point de la courbe.

C4 : droite passant par un point d'une courbe dont la pente est le nombre dérivé.

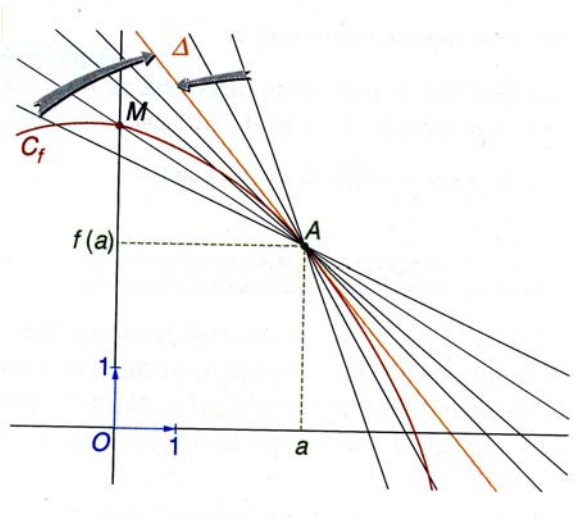
Cette approche C3 par limite de droites, qui fait l'unanimité dans les manuels, n'est pas explicitement au programme, n'est pas opérationnelle, ne permet pas de résoudre des problèmes et sera abandonnée dès l'introduction du nombre dérivé. Elle a une unique valeur ostensive pour introduire la tangente dans le but de faire le lien entre sa pente et la limite du taux d'accroissement – C3 semble jouer le même rôle ostensif que C1 au collège. La figure 1 montre ce que l'on trouve dans les manuels en France.

Mais alors la droite (*OA*) de la figure 1 n'est pas une sécante à la courbe ! On voit qu'implicitement, et localement, le terme « sécante » a changé de sens puisque la définition simple et intuitive « une droite qui coupe » est abandonnée au profit de définition implicite « une droite passant par deux points de la courbe » – cette dernière définit plutôt une corde.

---

[2] Les manuels étudiés sont : Bréal, Déclic, Fractale, Indice, Math'x et Repère.

[3] Il est à préciser qu'il n'est *a priori* pas nécessaire de définir mathématiquement la notion de tangente à une courbe avant le chapitre sur la dérivation. On peut en effet penser qu'une idée intuitive de cette notion suffisamment correcte et opérationnelle pourrait suffire.



« En bougeant le point *M* vers *A*, la sécante tend vers la tangente. »
(Déclic 1re S, page 71)

Figure 1

1.3. Les conceptions de la notion de tangente

Le chapitre sur la dérivation marque une rupture avec les apprentissages des années précédentes. Or, la notion de tangente n'a été travaillée que sur les cercles. On appuie donc l'enseignement des dérivées sur des conceptions *intuitives* de la notion de tangente. Au-delà du problème flagrant de la rigueur mathématique, on ne peut manquer de penser que les conceptions intuitives des élèves s'inspirent pour une large part des conceptions C1 et C2. Ces dernières sont inadéquates pour l'analyse. De plus, on appuie l'introduction de la dérivation sur C3 qui risque fort d'être loin des conceptions initiales des élèves. Car enfin, pourquoi C3 apparaîtrait-elle spontanément ?

Dans l'enseignement français, on voit donc apparaître quatre conceptions institutionnelles de la notion de tangente : les conceptions du cadre géométrique, C1 et C2, et les conceptions du cadre analytique, C3 et C4. Celles-ci forment deux groupes dont les liens ne sont jamais travaillés. Il y a une nette déconnexion du contenu mathématique relatif au cadre dans lequel on considère la notion de tangente. Cette déconnexion pourrait être réinterprétée en terme de déconnexion des praxéologies (Barbé, Bosch, Espinoza & Gascón, 2005). En particulier, on ne montre pas que la nouvelle notion, avec la dérivation, généralise la définition de la tangente au cercle.

Les élèves n'ont en général qu'une conception très partielle, et souvent fausse, de la notion de tangente. Les études de Sierpinska (1985), Vinner (1991) et de Castella (1995) ont montré une grande disparité de conceptions. En particulier, la

« perception globale » C1, sous-tendue par la tangente au cercle, est fréquente et tenace[4].

Nous avons repris le test au centre de l'étude de Castella (1995) qui proposait une courbe et une droite et demandait si la droite était tangente ou non. Ce nouveau test (cf. annexe A) propose une courbe et un point et demande de tracer la tangente et, si ce n'est pas possible, d'expliquer pourquoi. Le test proposé est ainsi proche du test élaboré par Vinner (1991). Trois classes de première scientifique, dans trois villes différentes, ont été concernées, soit 88 élèves. Le test, d'une durée de 20 minutes, s'est déroulé en octobre 2009, avant tout enseignement de la dérivation – sauf pour les redoublants à l'effectif très faible.

Les premiers résultats montrent un grand nombre d'élèves ayant des conceptions erronées sur la notion de tangente (cf. annexe B) :

- 33% ont des conceptions liées au cercle (C2) : soit il est écrit qu'il est impossible de tracer une tangente car il ne s'agit pas d'un cercle, soit une perpendiculaire à un rayon imaginaire est tracée ;
- 27% ont une conception globale (C1) ;
- 28% pointe l'impossibilité de tracer une tangente à une portion rectiligne ;
- 27% de cas particuliers disparates.

Bien entendu ces conceptions ne s'excluent pas et il est fréquent de constater des associations et même des contradictions. Néanmoins, plus de la moitié des élèves (51%) ont des conceptions de la notion de tangente conformes à l'enseignement du collège (C1 ou C2) et, finalement, seul 22% des élèves ont des conceptions qui semblent adéquates dans le cadre graphique. Ainsi, l'introduction de la dérivation par les tangentes ne peut être raisonnablement envisagée que pour environ un cinquième des élèves des classes scientifiques.

On constate qu'aucun élève ne montre spontanément la conception C3 par la limite des sécantes. Tout au plus un élève s'en approcherait puisqu'il donne à voir une sécante avec deux points proches (cf. annexe B-*e*). En fait, l'utilisation du terme « sécante » est largement problématique. Outre le problème pointé précédemment à propos de la figure 1, si *M* est un point de la courbe n°6 proche de *K*, peut-on dire que (*KM*) est une sécante ?

Même si le cas d'une courbe ayant une portion rectiligne n'est pas envisagé dans les manuels, cette approche C3 ne peut que renforcer l'obstacle de la tangente à une courbe rectiligne. Du point de vue mathématique, pour approcher la notion de

[4] Elle est renforcée par les manuels qui proposent de déterminer, avant le chapitre sur la dérivation, les tangentes aux paraboles.

dérivée on utilise la notion de tangente, mais comme cette dernière n'est pas définie, pour approcher la notion de tangente on utilise la limite dans l'espace projectif réel de dimension 1. Cette fuite en avant n'est pas raisonnable et nous ne pouvons que constater que cette approche C3 n'est pas pertinente pour le problème qui nous occupe.

Ainsi, non seulement 4/5 des élèves de l'étude n'ont pas des conceptions adéquates pour profiter de l'introduction de l'analyse proposée dans l'enseignement, mais en plus on utilise une nouvelle conception C3 qui renforce les obstacles. Il y a des problèmes importants à régler, et il faut les régler avant de plonger les élèves dans le grand océan de l'analyse. Pour cela, nous partirons essentiellement de la conception C1 vue au collège, et nous élaborerons un milieu théorique dont l'aboutissement sera C4. Dans ce processus, nous utiliserons une conception intermédiaire qui permettra de donner une existence mathématique consistante à la notion de tangente qui généralise C1 et C2. Nous délaissons, pour les nombreuses raisons invoquées ci-dessus, la conception C3.

2. Balises pour un enseignement alternatif des tangentes

Avant d'expliciter notre proposition alternative pour l'enseignement de la tangente et de la dérivation, nous exposons trois points de vue qui nous ont guidés.

2.1. Le projet AHA

Pour résoudre les problèmes dans l'apprentissage de l'analyse, le projet AHA (Approche Heuristique de l'Analyse) se propose de repenser l'enseignement de l'analyse dans sa globalité. Il s'agit d'un projet ambitieux proposé par des chercheurs en didactique. Un manuel et un guide méthodologique ont été publiés en 1999.

En ce qui concerne l'enseignement des tangentes et conformément aux recherches en didactique mentionnées en section 1, les auteurs du projet proposent un travail sur cette notion avant l'entrée dans l'analyse. Ils s'appuient sur la partie affine d'un polynôme en 0 : la tangente en $(0,y_0)$ à la courbe représentative de la fonction polynomiale $f(x)=y_0+y_1x+x^2g(x)$ a pour équation $y=y_0+y_1x$. Cette technique d'obtention des tangentes n'est pas généralisée, ni à des courbes plus générales, ni à des points d'abscisses non nuls. On travaille certes sur la notion de tangente, mais cette notion n'a toujours pas reçu de définition mathématique. Seule la mention d'une droite qui « frôle la courbe » est donnée, expression non définie mathématiquement et qui ne pourra être reprise pour une courbe rectiligne. De plus, le lien avec une approximation affine n'est pas si évident. En effet, si $1-x \approx 1-x+x^2+x^3$ au voisinage de zéro comme il est écrit en page 56 (AHA, 1999), il en est de même de beaucoup d'autres applications affines, à moins de mieux préciser le

signe « ≈ ». Le recours à une « meilleure approximation affine » poserait d'autres problèmes comme l'a précisé Perrin-Glorian (1999).

Toutefois, hormis ce point précis concernant la notion de tangente, ce projet est d'un grand intérêt et nos préoccupations sont très proches de celles du projet AHA :

- donner des problèmes à résoudre : c'est essentiel pour entrer dans le processus d'apprentissage même si nous n'abordons pas ce point dans cet article ;
- proposer un travail intermédiaire dans le cadre algébrique : c'est le cœur de notre proposition (cf. section suivante) ;
- délaisser la conception globale C1 pour une conception locale en étudiant le cas d'un polynôme du troisième degré (Schneider 1991, 2001) : nous nous inspirerons de ce point en section 3.2 ;
- appui sur le développement historique en plaçant les limites au cœur du processus (AHA, 1999) : nous nous appuierons également sur l'histoire des mathématiques, mais en prenant une référence délaissée par les auteurs du projet AHA.

2.2. Les jeux local/global et calcul exact/calcul approché

Maschietto (2002, 2004) a mis en place des séances d'enseignement utilisant des zooms sur une courbe exploitant ainsi les idées de Tall (1985). Elle met en évidence l'importance du jeu entre les points de vue local et global que cela induit. Regardons un premier exemple de zooms exploitant les potentialités des logiciels de tracés de courbes. Nous utilisons ici le logiciel *GeoGebra* pour la courbe d'équation $y = 2x^3 - x^2 - x + 1$ au point $A(1,1)$.

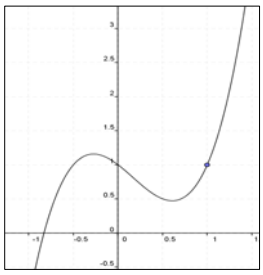


Figure 2-a : grille 0,5×0,5.

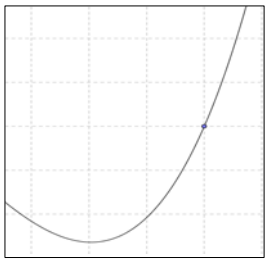


Figure 2-b : grille 0,05×0,05.

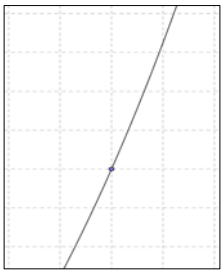


Figure 2-c : grille 0,02×0,02.

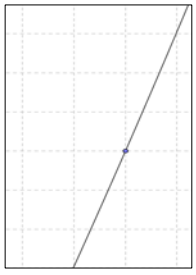


Figure 2-d : grille 0,01×0,01.

On voit apparaître, après neuf zooms centrés sur le point indiqué en figure 2-*a*, une droite en Figure 2-*d* – une propriété des courbes nommée *micro-linéarité* dans Maschietto (2002, 2004). Il est ainsi possible de déterminer, au point indiqué, l'équation de la tangente – une des tâches données aux élèves par Maschietto.

On peut également tracer la tangente de manière très satisfaisante à l'aide du logiciel : la droite est tracée en tirets entre le point initial marqué par un petit disque et un autre point marqué par une croix (figure 2-*d'*). Puis, après des zooms inverses, on peut revenir à la fenêtre initiale qui fait désormais apparaître la courbe et sa tangente (cf. les figures 2-*d'* à 2-*a'*).

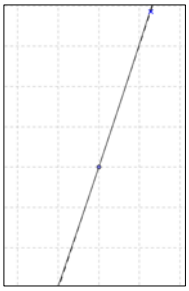


Figure 2-d' : grille 0,01×0,01.

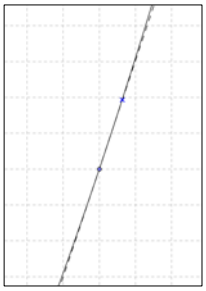


Figure 2-c' : grille 0,02×0,02.

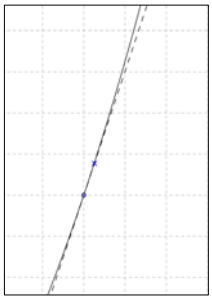


Figure 2-b' : grille 0,05×0,05.

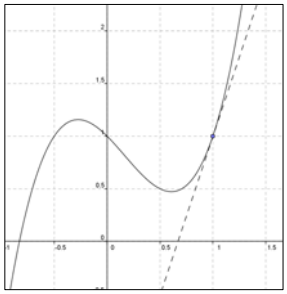


Figure 2-a' : grille 0,5×0,5.

Ce jeu entre le local et le global, comme le pointe Maschietto, est essentiel pour comprendre la notion de tangente. Une tangente, c'est un objet global (voir la figure 2-*a'*) dont la définition est locale (voir la figure 2-*d'*). À ce propos, on ne peut manquer de citer Perrin-Glorian (1999) lors de la conclusion de son étude sur les approximations affines des courbes : « La tangente est vraiment une notion locale ! […] La seule utilisation vraiment adéquate de l'ordinateur pour faire apparaître naturellement la tangente serait de faire des zooms jusqu'à voir la courbe devenir droite. »

Ce jeu entre les points de vue local et global est également essentiel pour entrer dans l'analyse comme le préconise la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques en France dirigée par Kahane (2002). Il y est par ailleurs spécifié l'importance des ordres de grandeur dans le calcul, ordres de grandeur qui constituent un nouveau jeu entre calcul exact et calcul approché.

Outre les zooms dont nous nous servirons pleinement, nous nous appuierons sur ces deux points : le jeu local/global et le jeu calcul exact/calcul approché.

2.3. Un bref éclairage historique

Un éclairage historique permet de mieux cerner ce que peut être une proposition alternative pour l'enseignement des tangentes et de la dérivation. Lorsque l'on met en regard l'enchaînement des notions enseignées et des notions telles qu'elles apparaissent dans l'histoire, on se rend compte qu'il manque une étape du déroulement historique : les travaux de Descartes. Descartes (1637) définit une classe de courbes pour lesquelles on dispose d'une méthode de détermination des tangentes. C'est une avancée décisive qui dépasse largement la petite classe des coniques. La méthode de Descartes est entièrement algébrique et facilement compréhensible. Sa méthode s'appuie pour l'essentiel sur la conception antique C1, mais du point de vue local. Nous y reviendrons dans la partie suivante.

La méthode de Fermat permet également de trouver facilement les tangentes aux courbes algébriques – voir par exemple (Barbin, 2006) ou (Cercle d'Histoire des Sciences, 1999). Mais elle est difficile à expliquer puisque, de fait, elle est déjà en grande partie dans l'analyse. En effet, l'*adégalisation* consiste à faire comme si la courbe et la tangente étaient confondues et ce n'est pas un hasard si sa méthode s'adapte pour certaines courbes transcendantes comme la cycloïde contrairement à la méthode de Descartes (Cercle d'Histoire des Sciences, 1999). Pour reprendre les termes de Chevalard (1999), on peut dire que la méthode de Fermat est une *technique* algébrique dont la *technologie* est analytique. C'est donc une méthode qui donne les résultats attendus mais qui ne permet ni de comprendre pourquoi elle fonctionne ni, surtout, de définir convenablement une tangente à une courbe. Par ailleurs, Fermat ne donne pas, contrairement à Descartes, une classe de courbes pour laquelle sa méthode permet de déterminer les tangentes.

Nous ne développons pas les points de vue de Newton et de Leibniz qui ont permis l'émergence de l'analyse (voir par exemple Barbin, 2006). Nous précisons seulement quelques points sur lesquels nous nous appuierons. Leibniz se place en opposition à Descartes en critiquant la faible portée des seules courbes *géométriques*. Mais, en voulant définir les tangentes pour une vaste classe de courbes, Leibniz s'inscrit finalement dans la logique cartésienne. Plus spécifiquement, la détermination des tangentes montre également des similitudes entre les travaux de Descartes et de Leibniz. Ils se basent tous deux sur le même principe : en un point d'une courbe donnée, il passe plusieurs droites qui constituent un faisceau de droites concourantes, la tangente est l'une de ces droites qui a une propriété particulière. Cette propriété est le cœur des travaux de Leibniz comme de Descartes sur les tangentes. Tout le problème est donc un problème de caractérisation et de sélection d'une droite parmi les sécantes où, bien entendu, la nature de la courbe joue un rôle central.

Nous tenons à préciser que dans la suite, une *sécante* à une courbe est une droite qui passe par un point de la courbe, point où l'on veut déterminer la tangente. En

particulier, l'approche C3, par « la limite des sécantes », omniprésente dans les manuels d'enseignement actuel semble totalement absente des travaux du XVIIe siècle – même si certaines conceptions de Newton (1740) s'en approchent. En outre, caractériser une droite parmi les sécantes permet d'éviter un des problèmes posés par la conception C3 que Sierpinska (1985) mentionne en citant des élèves : « Quand on arrivera au point [*A*] on n'aura plus qu'un seul point, mais par un seul point on peut mener beaucoup de droites. » Nous proposons dans la partie suivante de considérer le problème *par le bon bout* : on n'a effectivement qu'un seul point pour la tangente, caractérisons donc la tangente dans ce faisceau de droites concourantes.

3. Les tangentes aux courbes algébriques : constitution d'un milieu théorique

Avant d'entrer dans l'analyse, nous allons dans cette section construire une notion de tangente qui dépasse largement les seuls cercles (sans se restreindre aux coniques comme par exemple en Italie ou en Grèce). L'idée est la même que celle de Ibarra et Velásquez (2007) : faire émerger d'abord les concepts dans le cadre algébrique avant d'entrer dans le cadre analytique.

Le choix des courbes algébriques n'est pas un hasard car nous disposons de méthodes simples d'obtention des tangentes comme la méthode de Descartes. À l'origine, cette méthode consiste à rechercher un cercle tangent à une courbe. Il est tout de même plus simple de chercher directement une droite comme le propose dès 1849 Florimond de Beaune (Barbin, 2006 p. 216). La technique est simple à comprendre et simple à mettre en œuvre. En particulier, il n'y a aucune notion nouvelle à incorporer au curriculum. On se sert pleinement de l'algèbre enseignée jusqu'au grade 11 : équations de courbes, calcul algébrique, équations, systèmes de deux équations. Il faudrait toutefois appuyer sur certaines de ces notions comme les équations de courbes – sans forcément se restreindre aux cercles – et la factorisation par $x–a$ d'un polynôme de racine a.

Nous développons sur des exemples trois points-clé de notre proposition. Pour d'autres exemples montrant la portée de la méthode de Descartes nous référons à Vivier (2006, 2010) où, outre les coniques, les cas suivants sont envisagés et traités : point double, point de rebroussement, demi-tangentes, points isolé.

3.1. La méthode : l'exemple de la fonction carrée

Considérons une parabole, la plus simple des courbes algébriques après la droite. Pour déterminer la tangente à $y = x^2$ en un point $A(a,a^2)$, nous caractérisons la tangente parmi les droites qui passent par A. Nous considérons donc les sécantes en A qui ont une équation de la forme $y = k(x–a)+a^2$.

1. On forme le système des deux équations pour identifier les points d'intersection : $y = x^2$; $y = k(x–a)+a^2$

2. On écrit l'équation donnant les abscisses des points d'intersection :

$$x^2 = k(x–a)+a^2$$

On factorise l'équation par $x–a$ puisque $x=a$ est nécessairement une solution :

$$(x–a)\cdot(x+a–k) = 0$$

3. On obtient deux solutions $x = a$ et $x = k–a$ correspondant à deux points d'intersection entre la courbe et une droite passant par A (cf. figure 3). Comme on veut la tangente, il faut qu'il n'y ait qu'un seul point d'intersection. En identifiant le deuxième point d'intersection au premier, on trouve $a = k–a$ soit $k = 2a$.

On obtient alors une équation de la tangente : $y = 2a(x\text{-}a)+a^2$

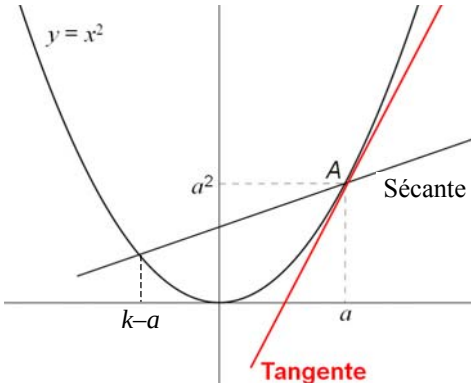


Figure 3

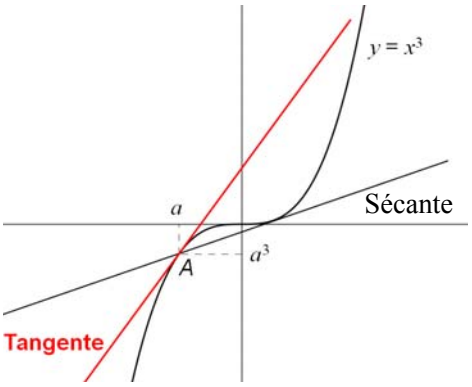


Figure 4

Avant d'aller plus loin, faisons plusieurs remarques :

- On s'appuie sur la notion C1 du collège, donc cet exemple de la parabole ne requiert aucune nouvelle conception des tangentes de la part des élèves. Il n'y a rien de nouveau, toutes les notions nécessaires sont enseignées en classe de seconde (grade 10) ;
- on obtient la tangente par la recherche d'une solution double ;

- la forme fonctionnelle des droites passant par A a l'intérêt de montrer que seul le paramètre k est à déterminer pour trouver la tangente parmi les droites du faisceau ;
- la forme fonctionnelle a l'inconvénient de ne pas prendre en compte les droites *verticales*. À ce propos on pourra faire remarquer que le point d'intersection entre la parabole et la droite d'équation $x=a$ mène à un point d'intersection qui n'est pas double, ce qui justifie *a posteriori* la forme fonctionnelle. Pour faciliter la compréhension, il serait préférable de revenir sur ce point au moment de déterminer les tangentes aux cercles ;
- le point 3 peut être abrégé puisqu'il revient exactement à annuler le second facteur lorsque $x=a$. Cette remarque simplifie la méthode, puisqu'il n'est pas nécessaire de déterminer toutes les solutions à l'équation ainsi formée, et augmente l'efficacité de la méthode pour les courbes de degré 3 ou plus, puisqu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre les équations algébriques.

3.2. Vers une conception locale : l'exemple de la fonction cube

Plus généralement, les courbes de la forme $y=f(x)$ où f est un polynôme mènent toujours à la recherche d'une solution au moins double. On obtient par ailleurs la formule de dérivation des polynômes (cf. Vivier, 2010). En particulier, pour une équation comme $y = x^3$, la technique algébrique est identique :

1. Système : $y = x^3$; $y = k(x-a)+a^3$.
2. Équation et factorisation : $(x-a).\ [x^2+ax+a^2-k] = 0$.
3. Annulation du deuxième facteur : $a^2+a.a+a^2-k = 0$ et obtention du coefficient directeur de la tangente : $k = 3a^2$.

Même si, ici encore, on pourrait déterminer toutes les solutions de l'équation, on comprend l'intérêt d'abréger le point 3 comme nous le proposons en annulant le deuxième facteur, sans chercher tous les points d'intersection. Cela évite en outre de devoir considérer des solutions imaginaires. Dans le cadre d'un enseignement effectif, il faudrait bien entendu guider un peu les élèves pour la factorisation et surtout donner une valeur au paramètre a.

Comme l'a déjà signalé le groupe AHA, cet exemple est important : on montre que la tangente peut très bien recouper la courbe en un autre point. Le troisième point d'intersection s'obtient en prolongeant le tracé de la tangente sur la figure 4 (voir aussi l'Annexe B-*b*). La propriété qui permet de définir et d'obtenir les tangentes est donc locale ce qui permet de se dégager de la conception rudimentaire C1.

Dans certains pays, ce type de démarche est parfois enseignée pour les coniques (comme en Italie ou en Grèce). Les élèves ont alors des réflexes : poser le système et annuler le discriminant Δ de l'équation qui résulte du système, sans factorisation (Maschietto, 2004). Mais cette technique reste d'une portée bien restreinte car elle ne peut s'appliquer qu'aux courbes algébriques de degré au plus 2. Or, il ne faut surtout pas s'arrêter aux coniques car ce sont des courbes pour lesquelles la conception globale C1 est valide. Il faut s'en écarter pour, entre autres, comprendre que la notion de tangente est une notion locale.

3.3. Le cas du cercle ou le problème de la généralisation

Nous présentons ici cette technique pour le cas du cercle, un cas important pour l'enseignement. Le cas générique est un peu complexe car il nécessite de distinguer le cas particulier des points où les tangentes sont *verticales*. Nous traitons donc le cas du cercle en deux temps avec un cercle centré en l'origine du repère.

Déterminons la tangente au cercle de centre $O(0,0)$ de rayon r au point $A(a,b)$. Nous utilisons ci-dessous pleinement l'identité $a^2+b^2 = r^2$.

1. Système : $x^2+y^2 = a^2+b^2$; $y = k(x-a)+b$
2. Équation et factorisation : $x^2+[k(x-a)+b]^2 = a^2+b^2$

$$\Rightarrow (x-a)\cdot[x+a+k^2(x-a)+2kb] = 0$$

3. Annulation du deuxième facteur : $a+a+k^2(a-a)+2kb = 0 \Rightarrow k = a/b$.

Mis à part le début avec la substitution de l'expression de y dans l'équation du cercle, tout est identique aux cas précédents.

Une fois trouvée la valeur de k, et donc la tangente, on peut alors montrer le théorème vu au collège. Le produit scalaire $\overrightarrow{OA}\cdot\vec{u}$, où $\vec{u}=(1,k)$ est un vecteur directeur de la tangente en A, permet d'obtenir facilement l'orthogonalité entre le rayon et la tangente. On entre alors dans une perspective de généralisation.

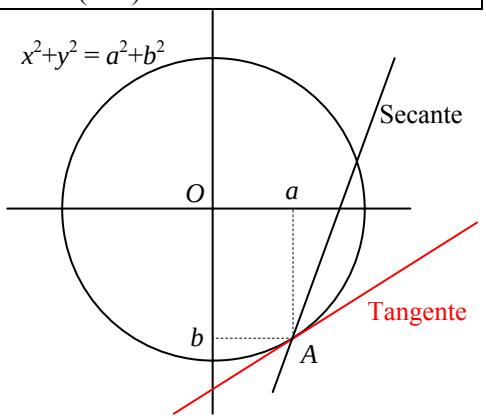


Figure 5

Toutefois, lorsque b=0, la méthode semble mise en défaut. En fait, ce que l'on vient de montrer c'est qu'aucune droite non parallèle à l'axe des ordonnées n'est

tangente au cercle au point *B*. Ainsi, s'il y a une tangente, ce ne peut être que la droite d'équation $x = a$. Faisons à nouveau la méthode :

1. Système : $x^2+y^2 = a^2$; $x = a$
2. Équation et factorisation : $a^2+y^2 = a^2 \Rightarrow y^2 = 0$

Le point 3. est inutile, on obtient ici un unique point double d'intersection entre la droite candidate, d'équation $x = a$, et le cercle : c'est donc bien la tangente.

3.4. Le milieu théorique des tangentes

Le cas particulier précédent – les tangentes *verticales* aux cercles – peut paraître abstrait[5] mais il est important pour deux raisons. D'une part il justifie la méthode de recherche des tangentes qui s'appuie sur les équations fonctionnelles des sécantes – donc en délaissant volontairement les droites *verticales* – et, d'autre part, elle permet de mettre l'accent sur l'importance d'obtenir un point d'intersection d'ordre au moins 2. On peut alors faire un retour sur le cas de la parabole où l'intersection avec une droite parallèle à son axe de symétrie ne donne qu'un point d'intersection simple.

La méthode présentée provient d'une étude mathématique, épistémologique et historique de la notion de tangente. Elle a été élaborée à partir de l'identification de connaissances génériques que possèdent des élèves de fin de première année du lycée. Ainsi, nous avons élaboré un milieu théorique (Bloch, 2002) pour la notion de tangente aux courbes algébriques. Plus précisément, le savoir visé par ce milieu théorique est constitué par la définition mathématique de la tangente qui émerge de ce premier travail algébrique : *Une tangente est une sécante qui forme une intersection d'ordre de multiplicité au moins 2 avec la courbe*.

Les trois exemples proposés peuvent être organisés en un jeu dont l'entrée est possible à partir des connaissances des acteurs et des conceptions initiales. Il semble toutefois que, comme dans (Bloch, 2000, chapitre 6, page 279) des interventions du professeur soient nécessaires pour certains points comme la mise en évidence des nécessaires solutions doubles, l'obtention d'une tangente *verticale* à un cercle ou la forme algébrique adéquate d'une sécante.

L'élaboration d'un scénario d'enseignement et d'un milieu expérimental *a priori* (Bloch, 2002) avec une analyse *a priori* restent à faire. Il s'agira en particulier de bien préciser les rétroactions attendues dans l'objectif de faire évoluer les conceptions des acteurs de la notion de tangente. En particulier, nous signalons ci-dessous les principales variables de la situation :

[5] On pourrait d'ailleurs s'en dispenser puisque l'on a une caractérisation géométrique des tangentes indépendante du repère considéré.

- la possible contextualisation des activités (dans le cas d'une contextualisation, il faut alors se poser la question de la présence ou non d'un repère) ;
- le choix du type de courbes avec en particulier les deux types principaux : courbes de fonctions $y=f(x)$ et courbes implicites $f(x,y)=0$. Le premier type principal donne lieu à plusieurs autres choix de variables : fonctions polynômes (dont, notamment, le degré est à préciser), fonctions homographiques, fonctions avec une racine carrée, etc. Précisons que le deuxième type principal ne peut tout à fait être absent à cause des cercles ;
- le choix des points où déterminer la tangente (notamment pour la fonction cube – afin de faciliter la visualisation du fait que la tangente et la courbe se recoupent – ou pour les cercles – afin de proposer, ou non, un point où la tangente est *verticale*). Il est par ailleurs possible d'envisager un point générique pour certaines courbes simples comme la parabole.

3.5. Le cas particulier des tangentes aux droites

La méthode présentée peut s'appliquer à toutes les courbes algébriques. Néanmoins, la solution n'est pas forcément double et il peut y avoir plusieurs solutions pour le paramètre k comme pour les points multiples ou les demi-tangentes (Vivier, 2006, 2010). Mais malgré la grande portée de cette méthode[6], il n'est sans doute pas utile d'étudier des courbes plus complexes de cette manière algébrique. L'étude est évidemment intéressante et riche, mais il ne faut pas perdre de vue notre objectif : nous voulons préparer le terrain à une introduction de l'analyse et non pas développer un enseignement parallèle. En particulier, si la définition de la tangente que nous venons de donner suffit largement pour le travail envisagé, il faudrait l'adapter de cette manière pour poursuivre l'étude des courbes dans le cadre algébrique : *Les sécantes en un point A d'une courbe algébrique forment une intersection de même ordre de multiplicité v, sauf pour au plus v d'entre elles qui forment une intersection d'ordre de multiplicité strictement supérieur à v. Ces dernières sont appelées tangentes en A à la courbe*. (Cf. (Vivier, 2010) pour une justification de ce résultat.)

En revanche, comme nous l'avons constaté en section 1, un travail spécifique sur la tangente à une *courbe rectiligne* est nécessaire. Cherchons ainsi la tangente à la *courbe* d'équation $ax+by+c = 0$ au point $A(x_A,y_A)$. Nous supposons ici que b n'est pas nul afin de ne pas avoir à distinguer deux cas.

[6] La détermination de k revient à déterminer les racines d'un polynôme en k. Le calcul exact de k n'est donc pas toujours possible.

1. Système : $ax+by+c = 0$ $\qquad$ $y = k(x-x_A)+y_A$
2. Équation (obtenue par substitution) : $ax+bk(x-x_A)+by_A+c = 0$
Comme $by_A+c = -ax_A$, on obtient : $ax+bk(x-x_A)-ax_A = 0 \Rightarrow (x-x_A)\cdot(a+bk) = 0$
3. Annulation du deuxième terme : $a+bk = 0 \Rightarrow k = -a/b$.

L'annulation du second facteur pour $x=x_A$ est un peu étrange puisque x n'apparaît pas dans ce deuxième terme et que l'équation disparaît pour cette valeur de k. Mais, si l'on s'en tient à la méthode, on a su déterminer la tangente à une droite. Notons qu'il n'y a ici aucune adaptation de la méthode. En revanche, l'explication de la méthode est bien différente des autres cas envisagés : on passe d'un point simple d'intersection pour les sécantes à une infinité de points d'intersection pour la tangente dont la multiplicité reste mystérieuse – car le degré $-\infty$ du polynôme nul n'explique rien. Il s'agit d'un cas très particulier.

Bien évidemment, le cas des tangentes aux droites est à considérer après un premier travail sur des fonctions simples (comme les fonctions polynômes, les fonctions homographiques, *etc*.).

4. Une introduction de l'analyse

L'objectif de cette section n'est pas d'élaborer un milieu théorique pour le nombre dérivé. Notre objectif est plutôt d'exposer les grandes lignes d'un possible déroulement permettant d'aboutir au nombre dérivé à partir de la notion de tangente afin de justifier la pertinence de notre proposition avec le curriculum actuel du lycée.

Après le travail algébrique exposé en section 3 sur la notion de tangente, nous pouvons nous appuyer sur les trois points suivants pour aboutir à la limite du taux d'accroissement :

- la tangente a une véritable consistance mathématique ;
- la notion de tangente est perçue comme locale ;
- pour déterminer l'équation d'une tangente il n'y a qu'un paramètre à déterminer pour la caractériser parmi les sécantes.

En reprenant l'idée de la commission Kahane (2002), nous proposons un changement de cadre pour entrer dans une perspective de calcul approché. On peut par exemple donner une courbe tracée dans un repère en leur demandant de

déterminer l'équation de la tangente en un point donné[7]. Le premier travail, pour s'approprier la tâche, peut se faire sur papier.

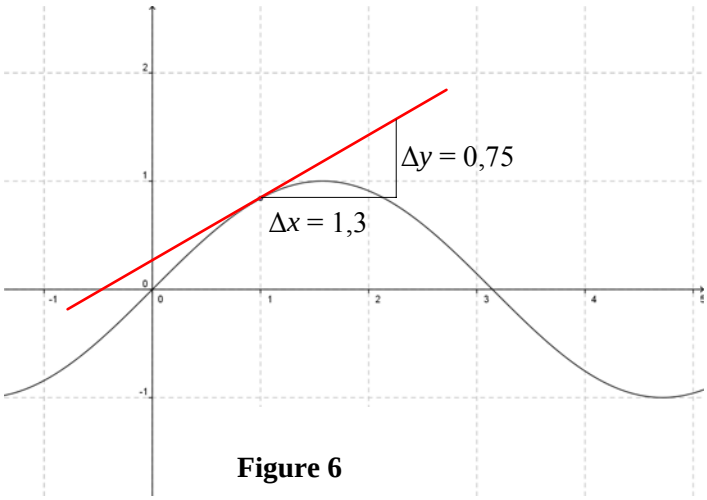


Figure 6

Par exemple, pour la courbe de la fonction sinus en $x = 1$, on trace la tangente de la manière la plus précise possible pour ensuite déterminer son équation fonctionnelle à l'aide des coordonnées relevées dans le repère (cf. figure 6 où, pour simplifier la tâche, le repère est gradué en cm). On trouve $k \approx 0{,}75/1{,}3 \approx 0{,}58$.

L'important ici est le processus de détermination de k et notamment l'utilisation du triangle rectangle. La technique utilisée est très approximative car elle demande de tracer « à vue d'œil » une tangente, puis de mesurer les côtés perpendiculaires d'un triangle rectangle pour ensuite calculer la pente de la tangente.

Le problème de l'approximation de la technique étant posé, il est alors possible d'utiliser l'informatique pour améliorer la précision des résultats. À l'aide des zooms on peut avoir un triangle rectangle de plus en plus petit et donc avoir une précision de plus en plus grande pour k puisque le tracé de la tangente est de plus en plus précis (le calcul de $\Delta y/\Delta x$ est entièrement géré par l'informatique). L'adaptation des triangles rectangles aux zooms successifs constitue une grande différence avec le problème de la disparition de ces triangles que montre Schneider (1991) dans une conception de type C3.

[7] Il faut noter que ce type de tâche apparaît dans les manuels pour un calcul approché d'un nombre dérivée, mais ces tâches sont bien isolées.

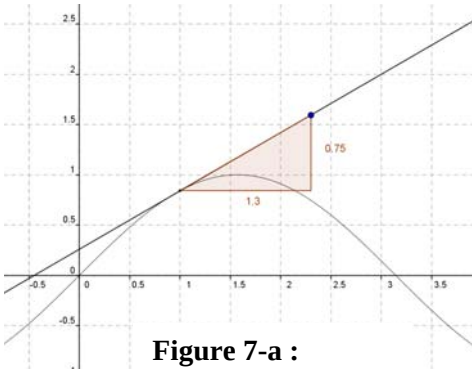


Figure 7-a :
k ≈ 0,75/1,3 ≈ 0,58.

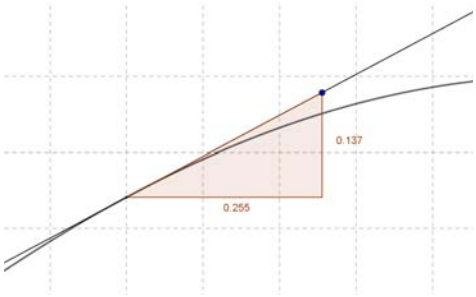


Figure 7-b :
k ≈ 0,137/0,256 ≈ 0,537.

Figure 7-c :
k ≈ 0,00196/0,00363
≈ 0,54046.

L'estimation par le quotient $\Delta y/\Delta x$ devient plus précise au fur et à mesure des zooms jusqu'à ce que la courbe coïncide avec sa tangente en figure 7-*c* (figure à rapprocher des figures 2-*d* et 2-*d'*). Dans les trois cas présentés en figures 7, on se rapproche de la valeur exacte de la pente de la tangente (cos(1) ≈ 0,540302) en jouant également sur la précision des valeurs affichées par le logiciel.

Notons toutefois que cette méthode est limitée car, une fois que la courbe est représentée sur l'écran par une droite (figures 2-*d*, 2-*d'* et 7-*c*), des zooms supplémentaires ne permettent plus d'améliorer la précision. Mais le principe de faire des zooms pour avoir une valeur meilleure pour la pente *k* permet de lier le problème de la précision du calcul approché du paramètre *k* avec le jeu local/global. Les deux principes analytiques suivants peuvent ainsi émerger :

– le triangle caractéristique de Leibniz apparaît et montre que l'on peut localement considérer que courbe et tangente sont confondues (voir à ce propos (Tall, 1985)),

– affiner les valeurs approchées pour déterminer une valeur exacte est, dans le principe, proche du concept de limite.

Ainsi, avec le deuxième point, la valeur exacte recherchée pour le paramètre k est la *limite* du quotient $\Delta y/\Delta x$ qui est, en utilisant le premier point, la limite du taux d'accroissement au point considéré[8].

On aboutit donc au nombre dérivé, ce qui était l'objectif. Mais on a bien plus :

– le lien entre tangente et dérivée est une conséquence de la construction mathématique (au moins pour les courbes algébriques) et non une affirmation à la rigueur mathématique douteuse,

– on dispose des dérivées des polynômes et d'autres fonctions simples avant l'enseignement de la notion de limite (Vivier, 2010).

Notons enfin qu'il s'agit d'une véritable généralisation aux courbes non algébriques. En particulier, pour notre exemple, le système $y=\sin(x)$; $y=k(x-1)+\sin(1)$ donne lieu à une équation inexploitable du point de vue algébrique.

Conclusion

Dans cette étude et contrairement aux programmes du lycée, nous avons considéré que la notion de tangente constituait un véritable savoir. Nous avons donc élaboré un milieu théorique pour ce savoir mathématique. Le passage proposé par les courbes algébriques avant d'entrer dans l'analyse nous paraît essentiel, car cela permet d'avoir à disposition une vraie notion de tangente avant d'aborder l'analyse. De plus, l'enchaînement proposé distingue clairement les deux étapes : 1- les tangentes et 2- les dérivées, alors que dans l'enseignement actuel les deux objets sont introduits en même temps.

Les perspectives ouvertes par ce travail nous semblent particulièrement riches. Il conviendra en premier lieu de tester notre proposition de manière effective. Mais il ne faut pas oublier le problème de l'épistémologie des professeurs : cette conception alternative de la notion de tangente est peu connue et est souvent regardée avec suspicion comme nous avons pu le constater lors de conférences en lycée. Cet enseignement peut être proposé dès la classe de seconde, mais il nous semble préférable de le réserver à la classe de première avant, en classe de terminale, de véritablement entrer dans l'analyse. Une expérimentation est en cours au Mexique en formation continue de professeurs de lycée. Cette première

[8] Il s'agit évidemment d'un point délicat. C'est pour cette raison que nous ne prétendons pas aboutir à la constitution d'un milieu théorique pour le nombre dérivé. En particulier, un travail préalable sur la notion de limite nous paraît crucial.

expérimentation permet de limiter les problèmes liés à l'utilisation de l'algèbre, problèmes qu'il conviendra de ne pas négliger pour des lycéens. Notons que pour ce public d'enseignants, les conceptions de la notion de tangente ne sont pas totalement adéquates (voir par exemple (Biza, Nardi & Zachariades, 2008)).

On pourrait développer l'approche algébrique des courbes par la recherche du rayon de courbure. On peut en effet travailler sur la puissance d'un point par rapport à un cercle tangent dont le centre se situe donc sur la normale : le cercle osculateur s'obtient, comme pour la tangente, en factorisant – le point de contact donne une solution – puis en annulant un deuxième facteur. L'ordre 2 et l'étude de la convexité sont ainsi à portée. Malheureusement, le traitement algébrique est plus long, même dans le cas simple d'une parabole.

Nous ne nous sommes pas attardés sur les applications de la notion de tangente en focalisant notre attention sur les liens forts entre tangente et dérivée. Ces liens sont escamotés dans l'enseignement alors qu'ils peuvent constituer un fort point d'appui. Mais toute cette étude n'a de sens que si la notion de tangente est motivée, si elle permet effectivement de résoudre des problèmes. C'est important pour l'entrée dans le processus que nous proposons, même si, ultérieurement, la dérivation se révélera être un outil plus puissant. On pourra pour ce point se référer au projet AHA et à (Vivier, 2006).

Enfin, on ne peut passer sous silence la question qui est sous-jacente à beaucoup d'études et que nous n'avons qu'effleurée ici : *qu'est-ce qu'une courbe ?* Cette question pose de grandes difficultés aux étudiants, à tous les niveaux. La question est difficile car elle n'appelle pas une réponse, mais des réponses.

Bibliographie

Groupe AHA (1999), *Vers l'infini pas à pas, Approche Heuristique de l'Analyse – Guide méthodologique*, De Boeck Wesmael.

ANDREU IBARRA, M. & RIESTRA VELAZQUEZ, J. A. (2007), Et si nous en restions à Euler et Lagrange ? Mise à l'essai d'un enseignement d'analyse à des étudiants non mathématiciens en début d'études supérieures, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **12**.

BARBIN, E. (2006), *La révolution mathématique du XVIIe siècle*, Ellipses.

BARBÉ, Q., BOSCH, M., ESPINOZA, L. & GASCÓN, J. (2005), Didactic restrictions on the teacher's practice, The case of limits of functions in spanish hight school, *Educational Studies in Mathematics*, **59**.

BIZA, I., NARDI, E. & ZACHARIADES, T. (2008), Persistent images teacher beliefs about visualisation: the tangent at an inflection point, *Proceedings of PME 32 and PME-NA XXX*, Morelia – México.

BLOCH, I. (2002), Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations, *Actes de la 11e École d'été de didactique des mathématiques 21-30/08/2001*, Corps – France, La Pensée Sauvage.

BLOCH, I. (2000), L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université. *Thèse*, Université Bordeaux I.

CASTELA, C. (1995), Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **15(1)**.

CERCLE D'HISTOIRE DES SCIENCES – IREM DE BASSE-NORMANDIE (1999), *Aux origines du calcul infinitésimal*, Ellipses.

CHEVALLARD, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19(2)**.

DESCARTES, R. (1637), *La géométrie*, Editions Jacques Gabay, réédition de 1991, Téléchargeable à http://gallica.bnf.fr.

HOUDEMENT, C., KUZNIAK, A. (2000), Formation des maîtres et paradigmes géométriques, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, **20(1)**.

HOUDEMENT, C., KUZNIAK, A. (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **11.**

KAHANE, J.-P. (2002), *Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Odile Jacob.

KUZNIAK, A. (2009), *Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de la scolarité obligatoire en France*, in Chypre et France, Recherche en didactique des mathématiques, GAGATSIS, A., KUZNIAK, A. DELIYIANNI, E. & VIVIER, L. éditeurs. Lefkosia, Chypre 2009.

MASCHIETTO, M. (2002), Quelques éléments de l'étude de la transition algèbre.analyse au lycée, *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques 21-30 août 2001*, la Pensée Sauvage éditions.

MASCHIETTO, M. (2004), Le jeu entre point de vue local et point de vue global en analyse : une ingénierie didactique à visée diagnostique au niveau première, *Actes du colloque de Mulhouse 8-9 mars 2002*, IREM de Strasbourg.

NEWTON, I. (1740), La méthode des fluxions, et les suites infinies, par M. le chevalier Newton, traduction de Buffon, téléchargeable à http://gallica.bnf.fr.

PERRIN-GLORIAN, M.-J. (1999), La tangente est-elle vraiment la droite qui approche le mieux la courbe au voisinage d'un point ?, *Repères IREM*, **34**.

SCHNEIDER, M. (1991), Quelques difficultés d'apprentissage du concept de tangente, *Repères IREM*, **5**.

SCHNEIDER, M. (2001), Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques – à propos d'un enseignement des limites au secondaire, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, **21(1.2)**.

SIERPINSKA, A. (1985), Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, **6(1)**.

TALL, D. (1985), Chors, Tangents and the Leibniz Notation, *Mathematics Teaching*, **112**, 48–52.

VINNER, S. (1991), The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, in *Advanced Mathematical Thinking*, Edited by David Tall, Mathematics Education Library, Kluwer, Academic Publishers, **5**, 65–81.

VIVIER, L. (2006), *La Géométrie analytique*, Le Pommier, collection *Quatre à Quatre*.

VIVIER, L. (2010), La noción de tangente en la enseñanza segundaria, *Actes du Tercer Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo*, Saltillo – México, 12-13/11/2009, À paraître.

LAURENT VIVIER
Université Paris-Diderot, Laboratoire de Didactique André Revuz, France
Université d'Orléans – IUFM Centre Val de Loire, France
laurent.vivier@univ-orleans.fr

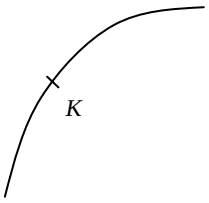
Annexe A. Le test proposé

Pour chacune de ces courbes, est-il possible de tracer une tangente au point K ?

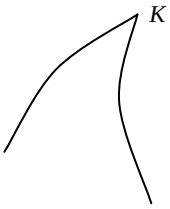
- si oui, tracez cette tangente,

- si non, expliquez rapidement pourquoi (écrivez à côté de la courbe).

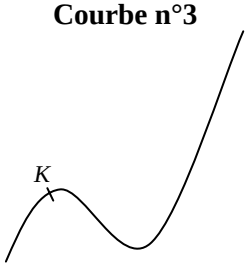
Courbe n°1



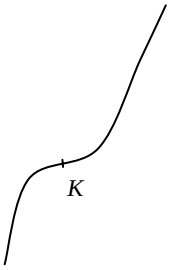
Courbe n°2



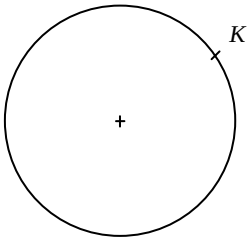
Courbe n°3



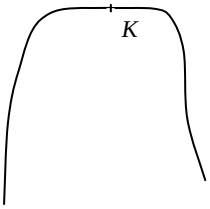
Courbe n°4



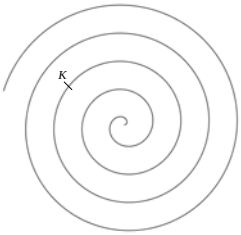
Courbe n°5



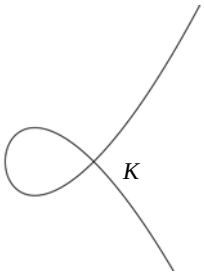
Courbe n°6



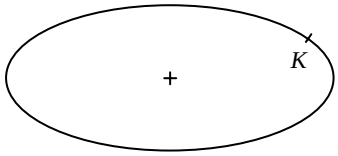
Courbe n°7



Courbe n°8



Courbe n°9

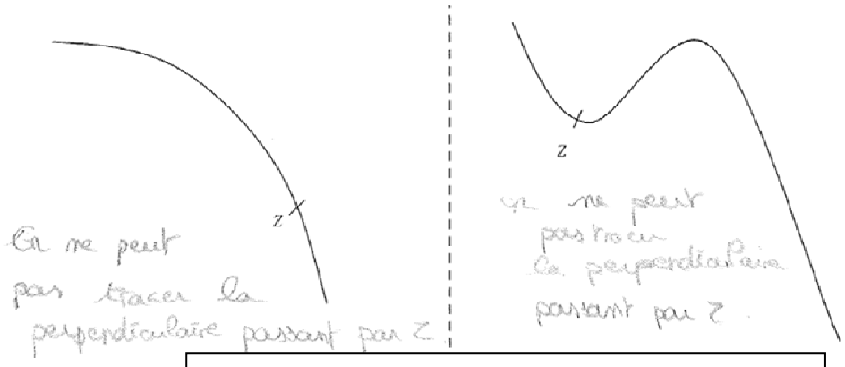


Les courbes, réduites ici à 50%, étaient réparties en deux pages (courbes 1 à 4 et courbes 5 à 9). Pour éviter les influences entre deux élèves voisins, le même test était proposé avec un point *Z* avec des courbes dans un ordre différent (1-3-5-6-8 pour la première page et 7-2-4-9 pour la seconde). Ces « courbes *Z* » sont formées sur le modèle des « courbes *K* » avec de légères différences (des symétries ou des rotations) exceptée pour l'homologue de la courbe n°8 qui est une courbe *en huit*.

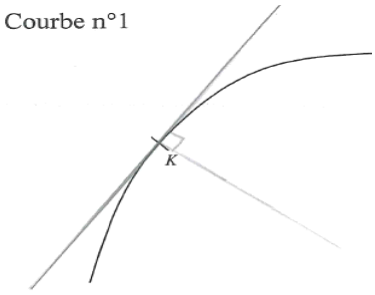
Les courbes n°2 et n°8 ne sont pas prises en compte dans les pourcentages donnés en section 1.

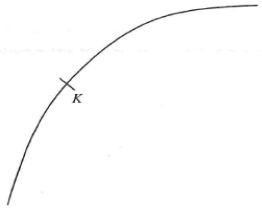
Annexe B. Quelques exemples de conceptions intuitives des élèves

a– Conceptions liées au cercle (C2)



On ne peut pas tracer la perpendiculaire passant par *Z*.

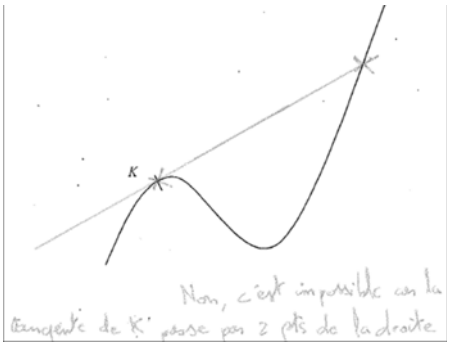




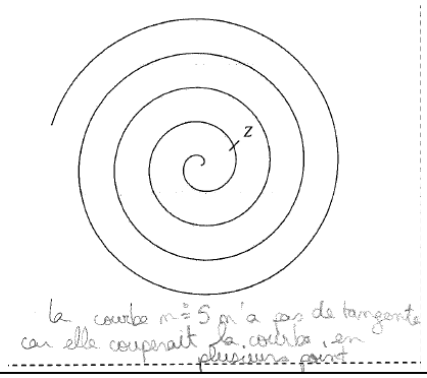
Non, ce n'est pas un cercle.

Non, ce n'est pas un cercle

b– Conception globale (C1)

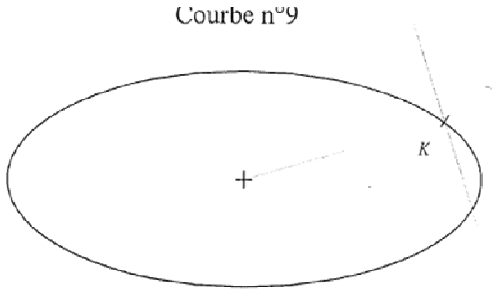


Non, c'est impossible car la tangente de *K* passe par 2 points de la droite.



La courbe n°5 n'a pas de tangente car elle couperait la courbe en plusieurs points.

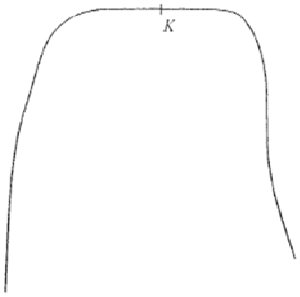
c– Conceptions C1 et C2 simultanées

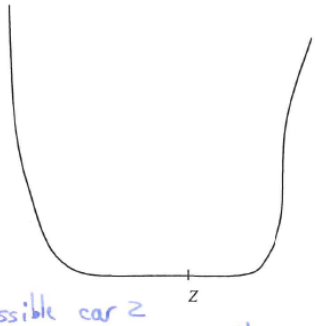


Non
Ce n'est pas possible car la tangente coupera la courbe en 2 points sur la même courbe.

Non ce n'est pas possible car la tangente coupe-rait la courbe en 2 points sur la même courbe.

d– Impossibilité de tracer une tangente à une portion rectiligne





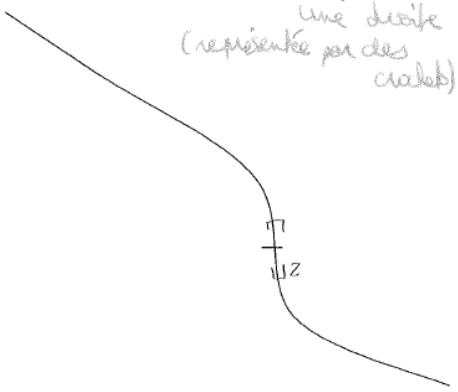
Non, car K est sur une droit.

Impossible car Z est sur une courbe avec l'allure d'un segment.

Non, car *K* est sur une droite.

Impossible car *Z* est sur une courbe avec l'allure d'un segment

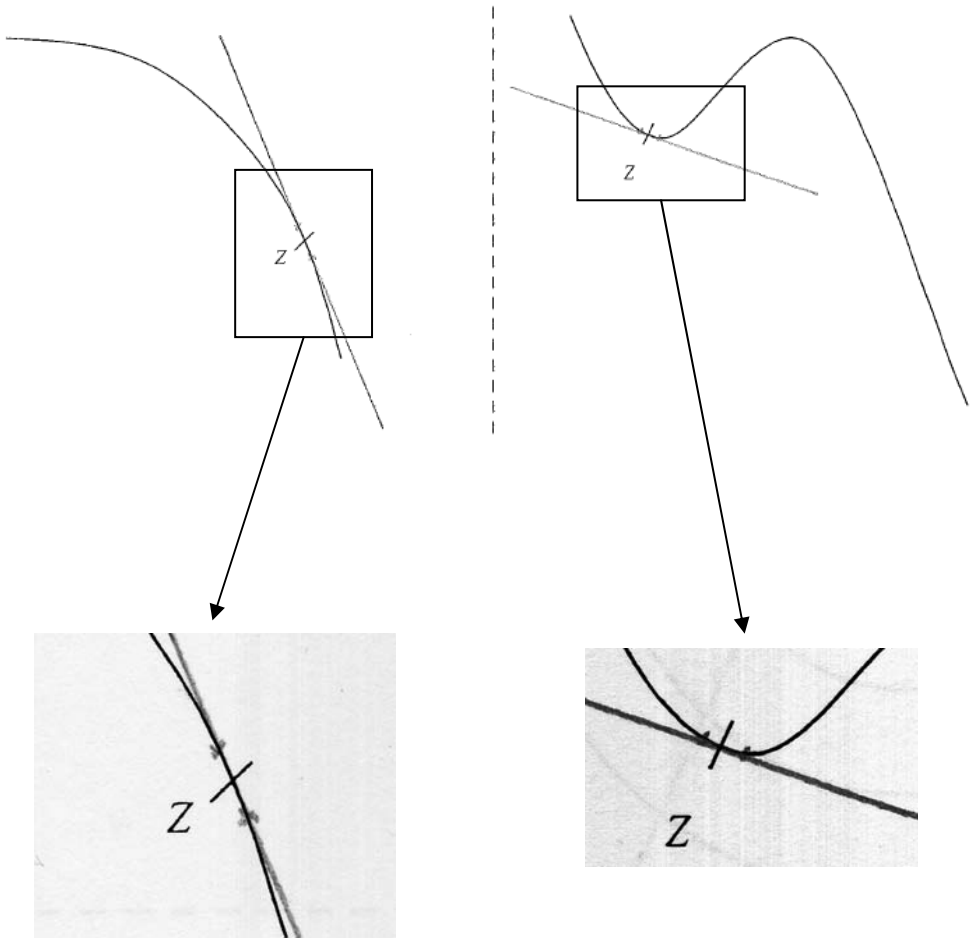
non, car Z se trouve sur une partie de la courbe qui est une droite (représentée par des crochets).



Non, car *Z* se trouve sur une partie de la courbe qui est une droite (représentée par des crochets).

<u>*e*– La conception proche de C3</u>

La tangente est tracée à partir de deux points proches de *Z* et situés de part et d'autre du point *Z* (cf. Sierpinska, 1985).



AVENILDE ROMO VÁZQUEZ

PROJETS D'INGÉNIERIE : ÉTUDE D'UNE ACTIVITÉ PRATIQUE DANS LA FORMATION D'INGÉNIEURS

Abstract. Engineering Projects: Study of a practical activity in engineering education. This text is based on the Romo's thesis (2009), the center of which being the place of mathematics in three projects belonging to mathematics training for prospective engineers. Learning involves solving linear differential equations with constant coefficients, equipped by the Laplace transform, the last phase (determination of the original) having two variants (with or without convolution). The didactic transposition is partly determined by the aims of teaching (learning effects are the goal, but other influences are critical and, in a course of vocational training, we may not neglect the institutional references. The computer resources available today raise the question of praxeology really useful: What knowledge is empowering management of parameters and interpretation of software outputs? What is the contribution of elements of knowledge for effective use of treatment by simulation?

Résumé. Ce texte s'appuie sur la thèse de Romo (2009), dont le cœur est la place des mathématiques dans la réalisation de trois projets d'ingénierie, en formation mathématique des ingénieurs. Cette formation comporte la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants, outillée par la transformée de Laplace et dont la dernière phase (détermination de l'originale) possède deux variantes (avec ou sans produit de convolution). La transposition didactique est pour une part déterminée par les visées de l'enseignement : Il s'agit d'obtenir un apprentissage, mais d'autres influences sont déterminantes et, dans un cursus de formation professionnelle, on ne peut négliger les références institutionnelles. Les moyens informatiques aujourd'hui disponibles posent la question de la praxéologie réellement utile : Quels savoirs outillent la gestion des paramètres et l'interprétation des productions du logiciel ? Quelle est la contribution des éléments de savoir à un usage efficace du traitement par simulation ?

Mots-clés. Formation des ingénieurs, transformée de Laplace, transposition, praxéologie.

1. Introduction

Ce texte s'appuie sur ma thèse de didactique des mathématiques (Romo-Vázquez, 2009) consacrée à la formation mathématique des ingénieurs. Le contexte spécifiquement étudié dans ce travail est celui de l'Institut Universitaire Professionnalisé (IUP) d'Evry. Cette structure recrute essentiellement des étudiants qui ont choisi depuis leur entrée dans le supérieur une orientation technique. La formation est caractérisée par une liaison étroite avec le monde de l'entreprise, dimension qui se traduit notamment par un dispositif particulier, dit des projets d'ingénierie : chaque groupe d'étudiants doit proposer une réponse à une commande présentées comme venant d'un monde professionnel, laboratoire ou entreprise ; les

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 15, p. 201 – 218.
© 2010, IREM de STRASBOURG.

problèmes posées sont véritablement ouverts. Le cœur de la thèse porte sur l'étude de la place des mathématiques dans la réalisation de trois de ces projets. L'un d'entre eux confronte les étudiants à un problème d'asservissement d'un système continu ; le traitement proposé s'appuie sur le logiciel Matlab qui permet une démarche d'ajustement par essais-erreurs. Les techniques utilisées ont un fort arrière-plan mathématique mais, en cohérence avec les résultats des travaux de Noss, Hoyles et Pozzi (2000), Bissell (2000, 2002), Kent et Noss (2002), les savoirs mathématiques en jeu n'y apparaissent pas explicitement. Il a donc fallu engager un véritable travail de reconstitution pour les mettre à jour. Ceci a introduit dans le champ de l'étude plusieurs cours consacrés à la transformation de Laplace et à son utilisation dans la résolution des équations différentielles linéaires : un cours de mathématiques sur les Fonctions Holomorphes proposé dans un groupe d'écoles d'ingénieurs (Ecoles des Mines)[1], au niveau L3 (troisième année d'enseignement supérieur) ; deux cours[2] d'automatique de niveau L2, l'un disponible en ligne s'adresse aux étudiants de Génie Electrique et Informatique Industrielle des Instituts Universitaires Technologiques (IUT, formation universitaire courte de techniciens supérieurs), l'autre est proposé dans le cadre d'une Licence (formation universitaire en 3 ans) de Sciences et Technologie pour l'Ingénieur. Des différences notables sont apparues entre ces textes ; l'étude approfondie sur les transpositions auxquelles la transformée de Laplace donne lieu dans tels cours a fait l'objet d'un autre article que j'ai écrit avec Corine Castela, à paraître dans la revue Recherches en Didactique des Mathématiques. Dans la présente communication, je me concentrerai sur l'analyse d'une tâche développée au sein d'un projet. L'intention est de montrer comment les tâches relevant du projet demandent d'adapter les techniques rendues disponibles par l'institution d'enseignement. Du même, je montrerai comment l'automatique (discipline intermédiaire) et le logiciel jouent un rôle prépondérant dans ces adaptions.

Dans cet article, après une rapide présentation du cadre théorique, nous présentons l'analyse des projets et plus particulièrement l'analyse de la tâche concernant l'asservissement d'un moteur à courant continu. Celle-ci constitue un exemple d'une praxéologie qui fait intervenir des éléments mathématiques dans une activité pratique. Des transpositions sont opérées sur ces éléments, principalement par l'automatique (discipline intermédiaire), pour les rendre fonctionnelles dans le cadre du projet.

---

[1] Ces écoles ne relèvent pas de l'université ; la plupart de leurs étudiants, recrutés par concours, sont issus d'un cycle d'étude en 2 ans, tout à fait spécifique, les Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles, dont l'enseignement est essentiellement théorique et très ambitieux. A la suite, un cycle d'étude de 3 ans mène au diplôme d'ingénieurs.

[2] Le cours d'automatique de l'IUP a été également étudié mais c'est un texte très succinct destiné à être complété oralement peu propice à l'illustration de notre propos.

2. Cadre théorique : La théorie Anthropologique du Didactique

Ce travail s'inscrit dans la Théorie Anthropologique du Didactique, qui propose un modèle épistémologique dans lequel toute activité humaine « consiste à *accomplir une tâche t* d'un certain *type T*, au moyen d'une certaine *technique τ, justifiée* par une *technologie* θ qui permet en même temps de la *penser*, voire de la *produire*, et qui à son tour est *justifiable* par une théorie Θ. En bref, toute activité *met en œuvre* une organisation qu'on peut noter [*T*/τ/θ/Θ] et qu'on nomme *praxéologie*, ou *organisation praxéologique ».* (Chevallard, 2002, p. 3)

2.1. La circulation interinstitutionnelle des praxéologies et les phénomènes de transposition

Chevallard (1999) insiste sur le fait que les praxéologies, comme les savoirs, circulent depuis l'institution qui les a produites vers d'autres institutions qui les perçoivent comme utiles à leur fonctionnement. Mais cette dynamique interinstitutionnelle s'accompagne de phénomènes de transformation :

> "Les conditions imposées par l'écologie de *I* [institution importatrice] font alors que la praxéologie désirée ne pourra y être reproduite *à l'identique*, mais qu'elle subira, dans ce "transfert", diverses modifications adaptatives : on parlera donc, non de transfert, mais de *transposition* de *I'* [institution de production] à *I*." (Chevallard 1999, p. 231)

Dans le contexte spécifique de la thèse et particulièrement de l'étude des projets, nous avons considéré que les praxéologies mathématiques circulent entre différentes institutions avant de rentrer un jeu dans les projets. Ces institutions sont :

- P(M) : institution de production des savoirs mathématiques,
- P(DI) : institution de production des savoirs intermédiaires[3],

A l'intérieur de l'IUP, institution de formation, existent plusieurs sous-institutions :

- E(M) : institution d'enseignement de savoirs mathématiques,
- E(DI) : institution d'enseignement de savoirs intermédiaires
- Ifp : des stages en entreprise ou projets, les projets correspondant à un dispositif de formation qui essaye de reproduire à la fois les conditions de la pratique et celles de la recherche-développement liées aux savoirs intermédiaires.

[3] Ce modèle est un modèle simplifié puisque par exemple, il existe plusieurs disciplines intermédiaires impliquées dans la formation des ingénieurs.

Nous présentons ici, différents parcours que ces praxéologies peuvent suivre pour passer de l'institution de productrice de savoirs mathématiques, notée P(M) dans la suite, aux projets (Ifp dans la suite) :

P(M)→E(M)→Ifp

De l'institution de production de savoirs mathématiques à l'enseignement de mathématiques et de ce dernier au projet.

P(M)→E(M)→E(DI)→Ifp

De l'institution de production de savoirs mathématiques à l'enseignement de mathématiques, de cet enseignement à l'enseignement de disciplines intermédiaires et de ce dernier au projet.

P(M)→P(DI)→E(DI)→Ifp

De l'institution de production de savoirs mathématiques à l'institution de production de savoirs intermédiaires, de celle-ci à l'enseignement de disciplines intermédiaires et de ce enfin au projet.

3. L'analyse de projets d'ingénierie : le cas de l'asservissement d'un moteur à courant continu

Dans cette partie, je m'intéresse à un projet d'ingénierie dans lequel des praxéologies venant de la disciplinaire intermédiaire automatique sont en jeu pour réaliser l'asservissement d'un moteur. Ce projet peut être considéré comme la dernière étape du parcours didactique de ces praxéologies mathématiques au sein du curriculum de formation proposé par l'IUP. Nous présentons d'abord l'organisation du dispositif des "Projets d'ingénierie" et la méthodologie utilisée par Romo (2009) pour étudier le travail réalisé dans ces projets. Ensuite, dans le cas du projet intégrant une situation d'asservissement, nous donnons quelques éléments concernant l'approche développée par les étudiants. Nous terminons en évoquant les remarques critiques d'un expert sur la solution proposée de façon à donner une idée de la distance entre le contexte de la formation et la réalité des pratiques professionnelles.

3.1. Les projets d'ingénierie

A l'IUP d'Evry, les projets sont réalisés par des groupes d'étudiants de quatrième année. Le dispositif vise à reconstituer les conditions d'une entreprise. Un professeur de l'IUP joue le rôle d'un client qui adresse à un bureau d'études une commande, définie par un cahier des charges précis. Un groupe d'étudiants est responsable du traitement de la commande, il doit élaborer de manière autonome une proposition. En même temps, par certains aspects, les projets se rapprochent du monde de la recherche. Les sujets incluent des questions véritablement ouvertes, y

compris pour le professeur-client, même si celui-ci joue également un rôle de conseiller épisodique dans le cours du travail. La production finale et le processus d'élaboration se développent conjointement. Les étudiants doivent donc organiser et planifier leur travail, rechercher des solutions, ce qui suppose qu'ils adaptent, voire développent, leurs connaissances académiques dans une perspective professionnelle.

Le projet est évalué suivant deux points de vue qui associent les exigences du monde du travail et celles de l'institution de formation. Le client doit être convaincu que la solution technologique trouvée est la meilleure. Mais l'évaluation est aussi académique : les étudiants présentent leur travail devant un jury composé de professeurs universitaires. Ce jury évalue l'ingéniosité avec laquelle les étudiants utilisent les connaissances qui leur ont été enseignées à l'IUP.

Les projets sont réalisés en 5 semaines, en deux phases. A la fin de la première phase (2 semaines), les étudiants rédigent un rapport intermédiaire dans lequel ils présentent leur interprétation de la commande et la solution technologique qu'ils ont choisie parmi celles que le travail préparatoire leur a fait rencontrer. Dans la seconde phase, le pré-projet est développé sous forme d'un produit concret.

3.2. La méthodologie de la recherche

Dans le cadre de mon travail de thèse, j'ai réalisé deux séries d'observations des projets, réparties sur deux années, en utilisant une méthodologie d'immersion. Pendant la première phase du projet, des données ont été recueillies auprès des étudiants et des clients-conseillers, par des interviews et des questionnaires. A l'issue de cette phase, ont été recueillis les données institutionnelles, les cahiers des charges, les rapports intermédiaires ainsi que les documents utilisés par les étudiants au cours de leur recherche. Ceci m'a permis d'acquérir, à partir de ma culture de mathématicienne-didacticienne, une certaine familiarité avec les projets. Néanmoins, cette première approche était insuffisante pour mener à bien une étude pertinente.

Une sélection a donc été opérée pour la seconde phase, de façon à pouvoir atteindre une compréhension plus approfondie et plus précise, puis à développer les analyses visées. Trois projets ont été choisis à partir des rapports intermédiaires et des questionnaires, suivant deux critères : 1) la présence de connaissances mathématiques explicites ; 2) le domaine du projet (aéronautique, mécanique, électronique, *etc*.). Pour chacun de ces projets, la seconde phase de travail des étudiants a été suivie, jusqu'à la soutenance finale au cours de laquelle les étudiants présentent leur solution à un jury. Des entretiens ont été réalisés avec les équipes ainsi qu'avec chaque étudiant. Le corpus de données ainsi rassemblé sur chaque projet constituait donc une base substantielle pour l'analyse.

3.2.1. L'analyse praxéologique des projets

Dans le cadre théorique de la recherche, il a été décidé d'identifier les praxéologies mathématiques utilisées par les étudiants au cours de leur travail, c'est-à-dire les types de tâches et les techniques en jeu. Mais l'analyse des techniques des étudiants s'est révélée très difficile du fait de l'existence de nombreux raccourcis dans les documents recueillis (rapport intermédiaire et autres). En particulier, bien qu'une très grande partie du travail ait impliqué des tâches mathématiques, les étudiants ne considéraient pas comme prioritaire de les présenter et encore moins de les justifier. De plus, l'usage de logiciels a souvent permis de contourner le travail mathématique. Il a donc fallu se livrer à une reconstruction des techniques et technologies impliquées. Pour ce faire, deux sources ont été sollicitées : 1) l'analyse des cours des disciplines intermédiaires (ou Sciences de l'ingénieur) et 2) le point de vue d'ingénieurs experts. Ce travail s'est substitué à l'analyse *a priori* qui joue un rôle important dans la recherche en didactique française. Les praxéologies mathématiques en jeu dans un projet ainsi reconstruites, il devenait alors possible à une didacticienne des mathématiques, de comparer les productions des étudiants avec celles des experts, sur le plan des techniques choisies et des discours technologiques associés.

Dans cet article, je présente l'analyse d'une tâche rencontrée dans l'un des projets, celle de l'asservissement du moteur à courant continu. Elle fait intervenir la notion de transformée de Laplace ainsi que la fonction de transfert, cette dernière est une notion relevant de l'automatique. Cette tâche, semble un bon exemple pour montrer l'imbrication de praxéologies mathématiques à d'autres savoirs comme ceux de la discipline intermédiaire.

3.2.2. La transformée de Laplace dans l'enseignement mathématique

La transformée de Laplace est un élément technologique qui intervient dans la réalisation de la tâche d'asservissement d'un moteur dans le projet. Cette transformée est l'objet d'enseignement dans le cours de mathématiques ainsi que dans le cours d'automatique. Dans le cadre de la thèse, j'ai analysé un cours de mathématiques, le cours de fonctions holomorphes produit à l'Ecole de Mines de Nancy et trois cours d'automatique. Ceci, afin de mettre en évidence les phénomènes transpositifs qui sont opérés sur la transformée de Laplace en jeu dans le projet. La transformée de Laplace est définie dans le cours de mathématiques, mentionné précédemment, de la manière suivante :

« **Définition 5.3** *Soit f une fonction de* L^+ *et* $\sigma(f)$ *son abscisse de convergence (cf Définition 5.1). On appelle Transformée de Laplace de f et on note L(f) (ou F quand il n'y aura pas d'ambiguïté), la fonction de la variable complexe définie pour tout p tel que* $\mathbb{R}e(\mathrm{p}) > \sigma(f)$ *par*

$$L(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt \qquad (5.3) \text{ » (p. 58)}$$

Cette transformée est ainsi définie sur le demi-plan complexe défini par $\mathbb{R}e(p) > \sigma(f)$ pour lequel la convergence de l'intégrale impropre est assurée. La classe L^+ était définie, précédemment dans le cours, formellement de la manière suivante :

« **Définition 5.2** *On notera L^+ la classe des fonctions f : $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vérifiant*

- *f est nulle sur $\mathbb{R}^-$*
- *f est à croissance au plus exponentielle en $+\infty$*
- *f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$* » (p. 58)

Dans ce cours, différentes propriétés sont elles aussi identiques à celles présentées dans les cours d'automatique et le même langage est utilisé pour les identifier : décalage, retard, changement d'échelle, transformée d'une dérivée. Dans chaque cas, elles sont démontrées en suivant la même technique. Celle-ci consiste à prouver d'abord que la fonction f considérée dans chacune d'elles appartient bien à la classe de fonctions L^+, puis à invoquer ensuite les propriétés des intégrales généralisées et des techniques de calcul comme changement de variable et intégration par parties pour justifier les formules obtenues. En revanche, les calculs eux-mêmes ne sont pas détaillés. On a donc, même si les propriétés sont identiques et formulées dans les mêmes termes, une présentation sensiblement différente : toujours concise mais où l'accent est mis sur l'existence des objets manipulés et les principes qui vont permettre le bon fonctionnement des calculs plus que sur les calculs eux-mêmes. Je me limiterai dans cette communication à présenter la propriété de la transformée d'une dérivée :

3.2.3. Transformée d'une dérivée

Soit f une fonction de L^+, dérivable, et supposons que sa dérivée soit encore dans L^+ (c'est presque toujours le cas, mais une fonction comme $f(t) = \cos(e^{t^2})$ fournit un contre-exemple) avec la même abscisse de convergence : $\sigma(f) = \sigma(f')$. Supposons également que f possède une limite à droite en 0 que nous noterons $f(0^+)$. Alors on a immédiatement grâce à une intégration par parties (comme $f \in L^+$, on a $f(t)e^{-pt} \to 0$ quand $t \to +\infty$ dès que $\mathbb{R}e(p) > \sigma(f)$)

$$L(f')(p) = pL(f)(p) - f(0^+) \qquad (5.12)$$

En réitérant la formule précédente, on montre par récurrence que si $f \in L^+$ est telle que $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ sont toutes des fonction de L^+ alors

$$L(f^{(n)})(p) = p^n L(f)(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f'(0^+) - \ldots - pf^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)$$

Enfin, si f_1 désigne la primitive de la fonction f qui s'annule en 0, on tire immédiatement de la formule 5.12

Pour p tel que $\mathbb{R}e(p) > \sigma(f)$

$$f_1(t) = \int_0^t f(s)ds \Rightarrow L(f_1)(p) = \frac{L(f)(p)}{p}$$ » (p. 60)

3.2.4. La fonction de transfert

La fonction de transfert est un autre élément technologique qui intervient dans la tâche de l'asservissement du moteur à courant continu. Cette notion à forte contenu mathématique est étudiée dans le cours d'automatique intitulée : *Introduction à l'automatique des systèmes linéaires*[4]. Elle est y présentée de la manière suivante :

Fonction de Transfert

a) Equation différentielle

Les systèmes physiques sont le plus souvent régis par des équations différentielles linéaires à coefficients constants du nième ordre du type :

$$b_n \frac{d^n y}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \ldots + b_1 \frac{dy}{dt} + b_0 y = a_m \frac{d^m u}{dt^m} + \ldots + a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u$$

Exemple : équation différentielle du 1er ordre : $T\frac{dy}{dt} + y = u$

b) Fonction de transfert

Si on applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle, en supposant que les conditions initiales son nulles, la fraction rationnelle liant la sortie $Y(p)$ à l'entrée $U(p)$ est la fonction de transfert du système.

$$L\left(\frac{dy}{dt}\right) = p.Y(p) \Rightarrow L\left(\frac{d^2 y}{dt}\right) = p^2.Y(p) \Rightarrow \ldots \Rightarrow L\left(\frac{d^n y}{dt}\right) = p^n.Y(p)$$

$$\Rightarrow b_n p^n Y(p) + \ldots + b_1 pY(p) + b_0 Y(p) = a_m p^m U(p) + \ldots + a_1 pU(p) + a_0 U(p)$$

$$Y(p) = H(p).U(p) = \frac{a_m.p^m + \ldots + a_1 p + a_0}{b_n.p^n + \ldots + b_1 p + b_0}.U(p)$$

(Introduction à l'automatique des systèmes linéaires, 7–8.)

[4] Ce cours est fait au sein de l'IUP.

Ces éléments, permettront de mieux comprendre le rôle de la transformée de Laplace tant dans la disciplinaire intermédiaire que dans le projet.

3.3. La transformée de Laplace dans un problème d'asservissement concret

Le but du projet est de concevoir un dispositif permettant l'étude des phénomènes aérodynamiques liés au mouvement d'une voiture. Il s'agit donc de concevoir un tapis roulant permettant de reproduire la vitesse de la voiture sur le sol et ainsi de mener à bien l'étude aérodynamique sur une maquette d'automobile placée dans une soufflerie (figure 3).

Figure 3 : La soufflerie.

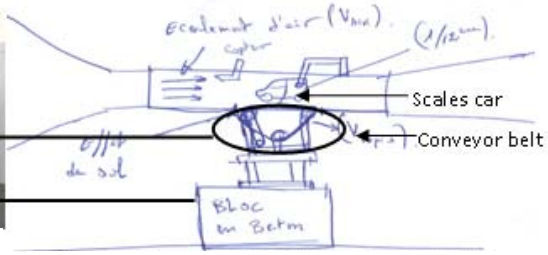


Figure 4 : Représentation du projet par les étudiants.

Le tapis roulant est actionné par un moteur électrique : la tâche principale est de contrôler la vitesse du moteur afin de pouvoir assurer au plancher défilant une vitesse égale à celle de l'écoulement d'air dans la soufflerie.

Nous présentons en premier lieu la reconstruction de la technique et de la technologie puis celles de l'étudiant.

3.3.1. Technique reconstruite

La transformée de Laplace est en jeu pour obtenir, à partir des équations différentielles, un second modèle mathématique immédiatement converti sous forme de schéma bloc. Ce schéma est l'interface adaptée à l'utilisation du logiciel qui permet une étude du moteur par simulation commode et efficace, le logiciel prenant en charge la résolution des équations.

Le modèle mathématique

Les équations différentielles modélisant les fonctionnements électrique et mécanique sont :

Fonctionnement électrique $u(t) = e(t) + Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt}$ [5]

[5] *u(t)* tension de commande du moteur, *e(t)* force électromotrice du moteur, *R* résistance d'induit, *i(t)* courant de l'induit, *L* inductance de l'induit ;

Fonctionnement mécanique $C_m(t) - C_r(t) = J\dfrac{d\omega(t)}{dt} + f\omega(t)$

Les fonctionnements électrique et mécanique sont liés par deux équations. Chacune contient une constante de flux et de couple k ($e(t) = k\omega(t)$ et $C_m(t) = ki(t)$

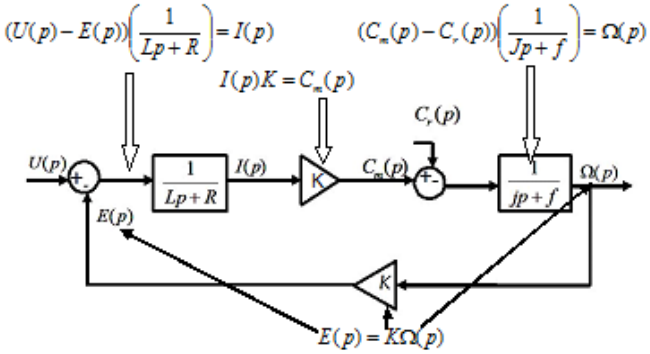
Nous appliquons ensuite la transformée de Laplace à chaque équation :

$$I(p) = \frac{U(p) - E(p)}{R + Lp} \quad (1) \qquad \Omega(p) = \frac{C_m(p) - C_r(p)}{Jp + f} \quad (2)$$

$$E(p) = K\Omega(p) \quad (3) \qquad I(p)K = C_m(p) \quad (4)$$

Construction du schéma bloc

Ces équations permettent de construire le schéma bloc suivant (cf. p. 23) dans lequel chaque élément des équations est représenté :



Simulation à l'aide du logiciel Matlab

La simulation du moteur dans le logiciel Matlab requiert la reproduction du « schéma bloc ». Celle-ci est faite par l'intermédiaire de l'option Simulink qui est conçue pour faciliter l'importation directe des éléments du schéma bloc, par le biais de différents menus.

Une fois que le schéma bloc est reproduit, il faut entrer des paramètres (ici *K*, *L*, *R*, *J* et *f*) que l'on peut faire varier ou fixer à des valeurs liées aux caractéristiques propres des systèmes en jeu, choisir la fonction d'entrée et interpréter la fonction de sortie.

$C_m(t)$ couple moteur, $C_r(t)$ couple résistant, *J* moment d'inertie du moteur, *f* coefficient de frottement visqueux, $\omega(t)$ vitesse angulaire du moteur.

3.3.2. Technologie reconstruite

Les éléments technologiques qui permettent le passage des équations différentielles au schéma bloc, comme signalé plus haut sont la transformée de Laplace et la fonction de transfert. On peut noter qu'en mobilisant cette notion, les équations (1) et (2) mentionnées ci-dessus deviennent des équations de transfert dans le « schéma bloc » :

$$\frac{I(p)}{U(p)-E(p)}=\frac{1}{Lp+R}\text{, donc } H(p)=\frac{1}{Lp+R}$$

$$\frac{\Omega(p)}{C_m(p)-C_r(p)}=\frac{1}{jp+f}\text{, donc } H_1(p)=\frac{1}{jp+f}$$

Les transformées à calculer pour chacune des équations sont très simples. Pour trouver la fonction de transfert $\Omega(p)/U(p)$ de l'ensemble du « schéma bloc », il faut revenir aux équations (1), (2), (3) et (4), qui sont lues dans le « schéma bloc » de droite à gauche, c'est-à-dire de la sortie vers l'entrée du système comme on peut le voir dans l'Annexe 1. Les calculs algébriques effectués débouchent sur un élément simple du second ordre, dont l'originale peut être trouvé par lecture inverse de la table des transformées usuelles. Ce travail mathématique est pris en charge par le logiciel Matlab (option Simulink) lorsque l'utilisateur a rentré les paramètres du système et une fonction d'entrée.

3.3.3. Technique et technologie de l'étudiant

Dans le rapport intermédiaire produit par le groupe d'étudiants, les étapes qui rendent possibles l'utilisation de Matlab ne sont pas détaillées. Pendant l'entretien individuel avec l'étudiant qui, dans le groupe, a été particulièrement chargé de cette partie du travail, celui-ci donne des précisions qui permettent de reconstituer à la fois la technique utilisée et les éléments technologiques par lesquels cet étudiant justifie ce qu'il fait.

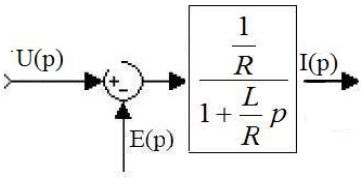
L'étudiant débute la description en expliquant que trois modélisations du moteur (à courant continu) sont possibles, électrique, mécanique et schéma bloc. Il présente les équations différentielles correspondant aux deux premières en insistant sur le sens physique des différents termes :

> "En fait, on divise en deux parties, une partie montrant $e(t,\Omega,\Phi_T)$) qui concerne purement la force électromotrice du moteur, la force qui génère la rotation du moteur ; cette partie là génère un couple, le couple moteur qui fait tourner le moteur et cette partie (montrant $Ri_{ind}(t)+L\frac{di_{ind}}{dt}$) là génère un

couple résistif. La résistance, ce n'est pas exactement un couple mais du côté mécanique on peut dire ça…" (Romo 2009, p. 175)

Puis il explique comment il passe des équations différentielles au schéma bloc. On peut penser que le type de tâches en question est pour lui assez routinier pour qu'il n'ait pas besoin d'expliciter les intermédiaires qui font intervenir la transformée de Laplace : "on a vu ça en cours d'asservissement, en cours d'électrotechnique aussi, mais on l'utilise souvent". Néanmoins, sollicité par l'interviewer, il peut développer un discours de justification appuyé sur la transformation de Laplace :

A propos de l'équation électrique $u(t) = e(t,\Omega,\Phi_T) + RI_{ind}(t) + L\frac{di_{ind}}{dt}$ qui se traduit schématiquement par :



il dit :

"Quand on met un schéma bloc comme celui-là, ça veut dire que la tension de sortie e est divisée par X(p)[6], donc $\frac{I(p)}{X(p)} = \frac{\frac{1}{R}}{1+\frac{L}{R}p}$ et ça c'est ce qui modélise ce qu'on a. […].

Par exemple, si on prend celle-là (montrant $u(t) - e(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt}$) et si on applique la transformée de Laplace on aura *U(p) – E(p) = RI(p)+LpI(p)*, si on fait par exemple ça -factoriser *I(p)*- on aura *I(p)(R+Lp) = U(p) – E(p),* donc ça veut dire que $\frac{U(p)-E(p)}{I(p)} = R + Lp$ et si on fait l'inverse, on aura $\frac{I(p)}{U(p)-E(p)} = \frac{1}{R+Lp}$, et si on multiplie ici et ici par $1/R$ (montrant le

[6] Il substitue *X(p)* désignation usuelle de la transformée d'une fonction d'entrée x(t) à U(p).

numérateur et le dénominateur de la fraction) $\dfrac{I(p)}{U(p)-E(p)} = \dfrac{\frac{1}{R}}{1+\frac{L}{R}p}$ […]

donc cette équation là elle est modélisée par cette partie là." (*ibidem,*176–177)

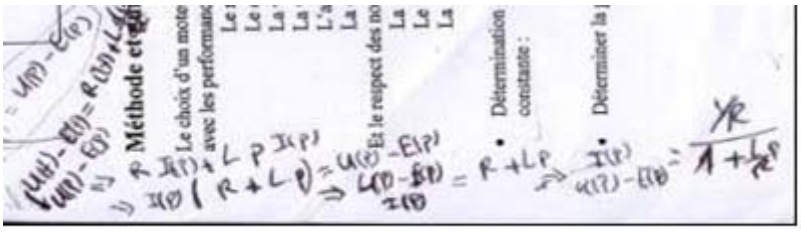


Figure 5 : Traces écrites accompagnants les explications.

L'accent est mis sur la succession des calculs algébriques. La transformation de Laplace intervient comme un opérateur symbolique dont l'opérationnalité repose sur la linéarité (implicite) et sur la propriété relative à la dérivation, que l'étudiant utilise dans les deux sens :

"Là on a $U(p) = E(p) + I(p)R + LpI(p)$ et le *pI(p)* si on le transforme, on fait la transformée inverse Laplace on obtient la dérivée de la fonction temporelle." (*ibidem* p. 177)

3.3.4. A propos de l'étude par simulation

Lors de l'entretien, l'étudiant explique ce que l'on peut faire à l'aide du logiciel en travaillant soit sur les paramètres, soit sur la fonction d'entrée, les paramètres étant fixés (dans son cas pour un moteur donné, les valeurs des 5 paramètres peuvent être calculées ou sont données par le fournisseur). Ainsi, ayant fixé les paramètres $K = 3,\ L = 2,\ R = 5,\ J = 3,\ f = 4$, il applique une rampe y = 3x.

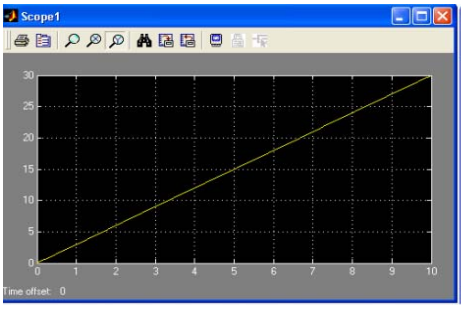


Figure 6a : Fonction d'entrée.

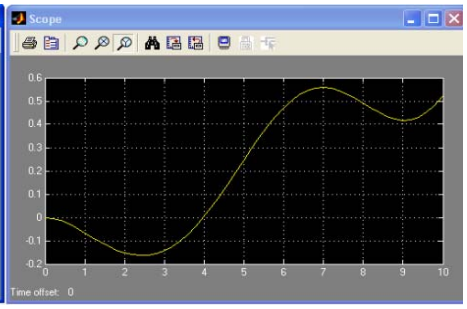


Figure 6b : Fonction de sortie.

A propos des deux représentations fournies par Matlab, il dit :

> "C'est l'entrée, la fonction d'entrée et comme on a dit, si la fonction d'entrée c'est la tension et la fonction sortie, c'est le courant, on peut faire ça pour mieux visualiser [montre les graphiques, figures 6a et 6b].
>
> […] Là [référence à la figures 6a et 6b], tu peux déduire plein de choses, tu peux savoir le courant de sortie à une certaine tension d'entrée, tu peux voir ailleurs comment le système se comporte en fonction d'une certaine tension…" (*ibidem*, p. 460)

On voit clairement l'économie représentée par l'existence du logiciel. Le déroulement de l'entretien n'a pas permis de savoir si l'étudiant était capable de calculer lui-même la fonction de sortie pour les fonctions d'entrée usuelles. Par ailleurs, l'essentiel du travail de simulation ayant été accompli, dans la deuxième phase du projet, entre l'entretien et la soutenance, il n'a pas été possible d'en savoir plus sur les techniques utilisées pour guider le choix des paramètres puis l'interprétation des sorties.

Lors de la soutenance, les étudiants ont présenté la simulation pour une fonction d'entrée en échelon d'un dispositif muni d'un régulateur de vitesse, ce qui complexifie le schéma bloc obtenu.

3.3.5. Point de vue de l'expert

Nous avons sollicité l'avis d'un expert, ingénieur de terrain expérimenté. Dans les limites d'une telle consultation isolée, celle-ci met très fortement en avant les décalages entre le traitement proposé et la réalité du monde professionnel d'aujourd'hui. Nous présentons ici quelques unes des critiques avancées. L'expert considère tout d'abord que la modélisation du moteur sous la forme de « schéma bloc » est surtout dotée d'un intérêt pédagogique, dans une logique de discipline académique :

> "Ce schéma permet de formaliser chaque composant (moteur, correcteur, régulateur, *etc*.) et d'évaluer donc le comportement de l'ensemble. Cependant, le « schéma bloc » est utilisé dans le monde industriel seulement dans l'espace direct et sans utiliser la transformée de Laplace". (Romo 2009, p. 189)

Les techniques mises en place par les étudiants présentent des limites car celles-ci ne permettent pas d'aborder la non linéarité des systèmes présents dans le milieu professionnel ; par ailleurs, les constantes de temps sont aujourd'hui telles que les phases transitoires peuvent être négligées :

> "On ne cherche plus à étudier le système en entier par ces méthodes, qui sont à la fois complexes et réductrices : elles ne permettent pas de traiter les non-linéarités intrinsèques aux composants ou voulues créées par le logiciel). On

> vérifie la cohérence des variables entrant et sortant de chaque bloc ainsi que l'échelle des grandeurs de ces variables.
>
> Dans presque tous les cas pratiques on se place dans des conditions telles que les variations de phase, les constantes de temps, les irrégularités de la réponse en fréquence sont assez faibles pour qu'une étude fine (Laplace ou Fourier) soit inutile.
> […] Si on souhaite qu'un système accélère en 200 m/s on choisit un actionneur dont la constante de temps (au sens de la transformée de Laplace) est dix fois plus faible et peut être négligée." (*ibidem*, p. 189)

Le décalage entre les techniques utilisées dans le projet et celles de la pratique professionnelle concerne également l'utilisation du logiciel Matlab. Pour ce dernier, le professionnel affirme :

> "L'emploi de Matlab est limité au monde de la recherche, il est très peu utilisé dans le monde industriel, même dans les bureaux d'études".

Il reconnaît toutefois que l'option Simulink du logiciel Matlab utilisé dans le projet permet

> "à un ingénieur d'études pointilleux, de valider des projets pour lesquels on a de toute façon pris des marges de sécurité suffisantes pour que les résultats soient connus par avance".

Dans ce sens, le travail de simulation, avec "bricolage des paramètres" proposé par l'étudiant lors de l'entretien, avec une rampe comme fonction d'entrée, est considéré comme ce qui s'approche le plus de la réalité et ce d'autant que "dans tous les cas pratiques on s'interdit les échelons […] les fonctions dérivées de toutes ces variables ont des conséquences sur les systèmes réels. Une dérivée infinie ou presque serait souvent destructrice". (*ibidem,* p. 190)

4. Conclusion

Dans ce texte, je me suis intéressée à présenter des éléments issus de l'analyse d'un dispositif innovateur, celui de projets d'ingénierie dans le cadre d'une formation d'ingénieurs. L'analyse du projet ici évoqué m'a permis de mettre en évidence une praxéologie de l'asservissement de vitesse qui fait intervenir des éléments mathématiques dans les diverses modélisations et les passages entre celles-ci. Ces passages sont opérés par différentes transformations sur les modèles : du modèle mathématique (équation différentielle) au « schéma bloc » puis au travail sur le logiciel Matlab à l'aide de paramètres. Ces transformations sont associées à un travail mathématique spécifique, qui est mis en évidence par les techniques et technologies reconstruites à partir du travail effectué par les étudiants et de l'analyse du cours d'automatique.

Les équations différentielles fonctionnent comme modèles « types » et la transformée de Laplace comme outil pour effectuer le passage entre ces équations et le « schéma bloc ». La fonction de transfert est une notion hautement mathématisée, rendue disponible par l'enseignement d'automatique, la transformée de Laplace est un élément technologique associé à cette notion qui permet la simulation sur le logiciel Matlab. Le travail sur ce logiciel ne demande pas l'utilisation de ces éléments mathématiques, car l'affichage de la fonction de sortie pour chaque fonction d'entrée et la disponibilité d'éléments pour reproduire le « schéma bloc » remplacent le travail de l'utilisateur et restent à la charge du logiciel. Le « schéma bloc » et le modèle mathématique associé sont ainsi des outils d'interface entre un environnement papier-crayon et un environnement logiciel ; entre un modèle mathématique et la simulation ; et donnent la possibilité à l'utilisateur de passer de l'un à l'autre pour réaliser différentes tâches.

On peut se demander, dans quelle mesure, une telle connaissance des praxéologies embarquées dans le logiciel contribuent-elle à l'utilisation plutôt aisée que cet étudiant fait de ce logiciel, au niveau de la schématisation nécessaire à l'entrée des données, du choix des paramètres et de l'interprétation des résultats ? Je n'ai aucune réponse à cette question. Par ailleurs, la consultation d'un expert venant du monde professionnel a surtout mis en avant le décalage entre les praxéologies enseignées et utilisées par les étudiants et celles qui sont en œuvre sur le terrain, compte tenu des ressources disponibles et des contraintes subies.

Les quelques éléments extraits de cette thèse font clairement apparaître combien les moyens informatiques aujourd'hui disponibles posent d'une manière encore différente la question de la praxéologie réellement utile : Quels savoirs outillent la gestion des paramètres et l'interprétation des productions du logiciel ? Quelle est la contribution des éléments de savoirs envisagés précédemment à un usage efficace du traitement par simulation ?

Enfin je ne peux pas prétendre avoir traité la question cruciale du décalage entre institution de formation et réalités professionnelles, crûment rappelé par l'avis très critique de l'expert de terrain sur la réalisation des étudiants dans le projet évoqué.

Je soulève certains questions qui sont autant d'appels à des recherches ultérieures, je voudrais conclure à insistant sur la nécessité absolue, pour mener à bien de tels travaux, d'associer des compétences extrêmement variées concernant les différentes disciplines académiques en jeu, leurs approches didactiques et épistémologiques et leurs utilisations dans les mondes professionnels.

Références

BISSELL, C.C. (2000), Telling tales (models, stories and meanings, *For the learning of mathematics*, 20(3), 3–11.

BISSELL, C.C. (2002), Histoires, héritages et herméneutique (la vie quotidienne des mathématiques de l'ingénieur, *Annales des Ponts et Chaussées*, **107-8**, 4–9.

CAMARENA, P. (1999), Las funciones generalizadas en ingenería. Construcción de una alternativa didáctica, serie Investigaciones, *Anuies*, México.

CASTELA, C. (2008a), Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **28(2)**, 135–182.

CASTELA, C. (2008b), La noción de praxeología, un instrumento de la Teoría Antropológica de lo Didáctico posiblemente útil para la Socioepistemología? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, **22**. México, DF (Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A.C.), 1195–1206.

CASTELA, C & ROMO-VAZQUEZ, A (à paraître), Des mathématiques á l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs, *Recherches en Didactique des Mathématiques*.

CHEVALLARD, Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique (Perspectives apportées par une approche anthropologique), *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **12(1)**, 73–112.

CHEVALLARD, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **19(2)**, 221–266.

KENT, P. & NOSS, R. (2002), The mathematical components of engineering expertise (The relationship between doing and understanding mathematics), *Proceedings of the IEE Second Annual Symposium on Engineering Education (Professional Engineering Scenarios 2)*, 39/1–39/7, London UK.

NOSS, R., HOYLES, C. & POZZI, S. (2000), Working knowledge (Mathematics in use, In Bessot, A. & Ridgway, J. (Eds), *Education for Mathematics in the workplace*, 17–35, Dordrecht (Kluwer Academic Publishers.

ROMO VÁZQUEZ, A. (2009), *La formation mathématique des futurs ingénieurs*, Thèse, Université Denis Diderot Paris 7.

Avenilde ROMO VAZQUEZ
Cicata-IPN México DF
avenilderv@yahoo.com.mx

Annexe

Considérons le cas où $C_r(t) = 0$.
On commence par l'équation (2) :

$$\Omega(p) = C_m(p)\frac{1}{jp+f} = I(p)K\frac{1}{jp+f} = \big(U(p)-E(p)\big)\left(\frac{1}{Lp+R}\right)\left(\frac{K}{jp+f}\right)$$

$$= \left(\frac{U(p)-E(p)}{Lp+R}\right)\left(\frac{K}{Jp+f}\right) = \frac{(U(p)-\Omega(p)K)K}{(Lp+R)(Jp+f)}$$

d'où :

$$\frac{\Omega(p)(Lp+R)(Jp+f)}{K} = U(p)-\Omega(p)K$$

$$\Omega(p)\left[\frac{(Lp+R)(Jp+f)}{K}+K\right] = U(p)$$

Et finalement : $$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{K}{(Lp+R)(Jp+f)+K^2}$$

que l'on retranscrit sous la forme $\dfrac{\Omega(p)}{U(p)} = \dfrac{K/K^2+Rf}{1+\dfrac{JR+Lf}{K^2+Rf}p+\dfrac{Lj}{K^2+Rf}p^2}$.

Pour se ramener à un système de second ordre on peut reconnaître une expression de la forme : $\dfrac{K}{1+2\xi\dfrac{p}{\omega_n}+\left(\dfrac{p}{\omega_n}\right)^2}$

avec $\omega_n = \sqrt{\dfrac{K^2+Rf}{LJ}}$ et $\xi = \dfrac{1}{2}\omega_n\left(\dfrac{JR+Lf}{\sqrt{LJ(K^2+Rf)}}\right)$

et de cette manière trouver la transformée inverse de F(p) :

$$f(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{1+\dfrac{2z}{\omega_0}p+\dfrac{1}{\omega_0}p^2}\right] = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-z^2}}e^{-z\omega_0 t}\sin(\omega_0\sqrt{1-z^2}\,t)$$

KUZNIAK ALAIN

NOTE DE LECTURE SUR L'OUVRAGE DE GUEUDET & TROUCHE RESSOURCES VIVES

LE TRAVAIL DOCUMENTAIRE DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES

L'ouvrage collectif « Ressources vives » dirigé par Ghislaine Gueudet et Luc Trouche regroupe dix-huit contributions d'auteurs très différents tant par leurs thèmes de recherches que par leurs références théoriques. D'entrée, il faut souligner le remarquable travail d'édition des deux directeurs pour aboutir à un ouvrage particulièrement bien présenté et organisé. D'autre part, l'ouvrage est entièrement en français, grâce aux traductions effectuées par Gueudet et Trouche, ce qui devrait permettre à tous les lecteurs francophones d'avoir accès à l'ensemble des contributions et ainsi à des travaux de chercheurs étrangers de premier plan.

Le titre très large et relativement indéterminé de l'ouvrage est précisé par un sous-titre en rapport avec les recherches actuelles des deux directeurs de la publication : le travail documentaire des professeurs de mathématiques. De ce fait, l'ouvrage envisage les ressources disponibles et mises en système par l'enseignant pour développer son cours de mathématiques. Le thème est des plus vastes et des plus foisonnants, de ce foisonnement l'ouvrage témoigne et le mérite des auteurs est grand pour avoir articulé de manière cohérente les diverses contributions. Pour cela, Gueudet et Trouche ont divisé l'ouvrage en quatre chapitres : sources et ressources du professeur ; ressources des professeurs, dimensions collectives ; ressources pour et par le curriculum ; ressources du professeur et action didactique. Pour faire cette note de lecture, j'ai lu linéairement l'ouvrage mais, comme les auteurs le signalent, d'autres lectures sont possibles. Les ouvrages collectifs invitent au butinage, aux parcours en diagonale avec des retours en arrière. La variété et la richesse des outils convoqués récompensent largement le lecteur de son parcours, mais sollicitent aussi ses capacités d'adaptation tant les écarts théoriques apparaissent importants entre les différents chercheurs. Je reviendrai sur ce point caractéristique et en partie problématique de la recherche didactique actuelle.

La question des ressources

Tout au long de l'ouvrage, le fil conducteur est le terme *ressource* dont les définitions et les usages fluctuent au gré des articles. Cette variation est logique et consubstantielle au terme lui-même si l'on adopte le point de vue de l'utilisateur qui décide *in fine* de ce qu'il va considérer comme ressource pour supporter son travail. L'ouvrage introduit plusieurs regards et plusieurs acteurs, à commencer par celui d'un professeur enseignant dans une classe et dont la préoccupation première est de

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 15, p. 219 – 223.
© 2010, IREM de STRASBOURG.

trouver puis d'organiser des ressources pour faire son cours. Il s'agit là de ce que Gueudet et Trouche appellent précisément le travail documentaire du professeur. Pour eux (p. 57) :

> [il faut entendre par ressources] tout ce qui est susceptible de re-sourcer le travail des professeur. Ainsi, une ressource est un artefact : un produit de l'activité humaine, élaboré pour s'inscrire dans une activité finalisée, ou un composant de l'artefact. Le professeur interagit avec des ensembles de ressources ; celles-ci sont travaillées, (adaptées, révisées, organisées...) au cours de processus articulant étroitement conception et mise en œuvre : c'est l'ensemble de ce travail que nous nommons travail documentaire.

La vision introduite ici s'appuie sur les travaux antérieurs de Trouche sur les genèses instrumentales pour aboutir à la notion de document comme synthèse de ressources recombinées et de schèmes d'utilisation (p. 59). Cette genèse documentaire s'inscrit dans une perspective de professionnalisation pour le professeur de mathématiques. Quel rôle les mathématiques vont-elles jouer dans ce processus défini ici de manière bien générale et non spécifique ? Quel sens attribuer à la professionnalisation ?

L'article de Chevallard et Cirade vient utilement interroger la notion de profession en la remettant en cause pour le métier de professeur. En s'appuyant sur la notion de semi-profession, introduite par Etzioni (1969), Chevallard et Cirade donnent comme perspective aux professeurs de passer du statut de semi-profession à celui de profession. Selon eux, cela nécessite le développement d'un ensemble de ressources déterminées par les praxéologies mathématiques, didactiques et « pour la profession ». Ce développement d'un ensemble de praxéologies sera-t-il suffisant pour donner un cadre de référence commun pour le travail de professeur ou bien la vision du professeur bidouilleur de ressources sans cesse en adaptation n'est-elle pas une composante essentielle du métier d'enseignant ? D'autre part, comment se fera l'assimilation par la profession de cet ensemble de ressources, l'article de Remillard, attire l'attention sur la diversité des comportements des professeurs américains confrontés aux ressources qui leur étaient proposées dans la continuité de l'effort d'harmonisation créé par les standards du NCTM. Ces derniers visaient, mais dans un tout autre sens que celui évoqué par Chevallard et Cirade, à constituer une culture mathématique et didactique commune pour les professeurs américains de mathématiques dans un pays où chaque établissement (ou presque) peut développer son propre parcours d'enseignement. Dans l'article de Remillard, le professeur apparaît, dans un premier temps singulièrement passif, puisque, pour voir la manière dont les enseignants avaient accès aux ressources curriculaires, le chercheur a d'abord construit son cadre théorique sur des éléments de l'analyse filmique. La finalité d'une séance de cinéma pour un spectateur semble pourtant *a priori* bien différente de celle d'un professeur qui regarde un ensemble de

ressources pour préparer son enseignement. Cette première impression est ensuite corrigée par l'article puisque les descriptions envisagées par l'auteur montrent diverses manières et formes d'engagement des professeurs relatives à la lecture des documents. Pourquoi lit-il ? Quelles parties, lit-il ? Quand, lit-il ? Quel lecteur est-il ? Certains professeurs lisent des fiches toutes prêtes, d'autres recherchent des scénarios, certains des idées et enfin il en est qui rejettent la ressource proposée.

Retour au numérique

L'intérêt nouveau et particulier pour les ressources utilisées par le professeur vient certainement de la révolution de l'information qui a accompagné l'apparition des ordinateurs et la numérisation des données. S'en est suivi une prolifération des sources en tout genre et des modes de production des sources pour l'enseignement. Le travail collaboratif lancé par un groupe de professeurs autour de Sesamath en est certainement la version la plus spectaculaire. Des articles s'intéressent justement à ces formes de travail collaboratif du point de vue de ceux qui y participent (Gueudet & Trouche) mais aussi du point de vue de la nature du contenu (Bruillard). Dans un article sur les manuels à l'ère numérique, Bruillard pose quelques questions cruciales sur ce type de produits élaborés collégialement et diffusés en accès libre sur internet. Qui garantit la validation et la légitimité de ces nouveaux supports notamment dans le cas crucial des contenus non rencontrés par les enseignants de mathématiques dans leur cursus universitaire initial ? Quelle influence a la machine sur ces contenus de savoir ? Va-t-il y avoir de nouvelles manières de penser et d'organiser les données comme l'avait inspiré l'imprimerie pour les listes et les tableaux ou des nouveaux curriculums comme avec l'apparition du stylo qui avait simplifié l'apprentissage de l'écriture ? Toutes ces questions invitent à relire l'ouvrage de Goody (1979) sur la raison graphique, où est montrée l'importance de l'écriture pour introduite des nouvelles formes de structuration (listes, tableaux) comme supports (ressources ?) de nouvelles formes de pensée. Bachimont invite à une réinterpréation du numérique dans un cadre plus large et montre, en creux, la nécessité d'une approche sémiotique du numérique. Avec d'autres visées, plus didactiques, Mariotti privilégie un cadre théorique, dit de la médiation sémiotique, où l'artefact est considéré comme la ressource support de cette médiation.

Et la relation aux mathématiques ?

Dans son titre, l'ouvrage privilégie le professeur de mathématiques et c'est de son travail qu'il s'agit dans la plupart des articles. Les observations de classes (Forest et Mercier), les décisions didactiques (Trgalova), les modes de pensée mis en évidence sont reliés à cette discipline même si les articles faisant explicitement et de manière problématique référence à un contenu mathématique ne sont qu'au nombre de deux, mais à chaque fois fort intéressant. Nous avons déjà évoqué le premier, celui de Chevallard et Cirade, qui s'intéresse aux manques mathématiques

dans les connaissances professionnelles du professeur et où il est visible que même dans un domaine qui semble bien couvert par les études universitaires comme celui des ensembles de nombres, la profession ignore certains points cruciaux pour l'enseignement des propriétés numériques, notamment ce qui concerne l'approximation. Cela peut conduire les professeurs à énoncer des propriétés fausses pour mieux servir leur propos pédagogique de mise en garde par rapport aux artefacts.

Quant à l'article de Vandebrouck, il s'attache à l'évolution des énoncés de problèmes donnés dans le cadre de la démarche expérimentale au Lycée par deux professeurs qui ont deux profils bien différents et une gestion de l'informatique qui aboutit à des formulations de problèmes en rapport avec leur conception générale de l'enseignement. Vandebrouck parvient à donner en peu de pages des informations sur un contenu mathématique non trivial et dans le même temps il présente une analyse de démarches de professeurs.

Les cadres théoriques

Le parti-pris des deux directeurs a été de contacter une grande variété de chercheurs pour bien faire ressortir l'intérêt de s'attacher à cette idée de ressources dont nous avons vu la souplesse d'emploi dans les recherches. De ce fait, l'ouvrage est particulièrement riche et stimulant par la diversité des usages et des points de vue dont il témoigne. Le versant négatif de cette richesse est sans doute le trop plein de cadres théoriques différents qui sont mobilisés tout au long de ces 372 pages. Dans leur introduction, Gueudet & Trouche en signalent déjà huit en utilisant parfois le mot d'approche, parfois celui de théorie.

Pour l'information du lecteur, donnons en une liste partielle :

> La théorie de l'apprentissage situé de Lave et Wenger et la théorie des communautés de pratique
>
> La théorie anthropologique du didactique (TAD) de Chevallard.
>
> La théorie des situations didactiques (TSD) de Brousseau.
>
> La théorie de l'action conjointe de Sensevy.

A ces théories s'ajoutent des approches et des modèles

> Approche sémiotique et médiation sémiotique.
>
> Double approche ergonomique et didactique.
>
> Approche instrumentale et approche documentaire du didactique.
>
> Le modèle des niveaux d'activités proposés par Margolinas.

Le modèle GOA introduit par Winslow pour étudier les modes de production de l'enseignement.

Le modèle ck¢ de Balacheff.

Aurait-il été possible d'être plus sélectif ? Comment faire pour lancer une réelle dynamique des résonances entre tous ces auteurs dont certains sont parfois bien loin du monde de la didactique des mathématiques ? Il y a sans doute là un grand travail à produire dans le futur ; en faire la démonstration était certainement dans les intentions des auteurs, dont l'ouverture sur toutes ces approches est certainement l'un des points les plus notables de l'ouvrage.

Bibliographie

GUEUDET, G. et TROUCHE, L. (2010), *Ressources vives. Le travail documentaire des professseurs en,mathématiques,* Presses Universitaires de Rennes.

ETZIONI, A. (1969), *The semi-professions and their organization: Teachers, Nurses, SocialWorkers,* New York: The free press.

GOODY, J. (1979), *La raison graphique. La domestication de la pensée sauvage,* Paris : Éditions de minuit.

INFORMATIONS AUX AUTEURS

Les Annales de didactique et de sciences cognitives sont une revue annuelle éditée par l'IREM de Strasbourg, Université Louis Pasteur. Elle a été fondée en 1988 par R. Duval et F. Pluvinage.

La revue publie des articles de recherches propres à développer et à stimuler la réflexion sur l'enseignement des mathématiques en direction de tous les types de publics : écoliers, lycéens, étudiants et adultes en formation. Les présentations de recherches concernant la formation initiale et continue des enseignants et sur l'enseignement dans des contextes socioculturels variés sont les bienvenues.

Les articles peuvent être de nature théorique en relation étroite avec une expérimentation dans le cadre d'un enseignement. Ils peuvent être aussi des comptes rendus d'une expérience d'enseignement appuyée sur un cadre théorique explicite. Les domaines théoriques de références sont issus de la didactique des mathématiques. Lorsqu'ils s'insèrent dans une problématique d'enseignement des mathématiques, les travaux peuvent aussi prendre appui sur la psychologie cognitive et sur la linguistique.

Les articles ne doivent généralement pas dépasser vingt pages mais exceptionnellement ils peuvent être plus longs et permettre ainsi à l'auteur de développer un point de vue original et émergeant dans le champ de recherche. Il est aussi possible de présenter une synthèse des recherches menées dans un domaine particulier de la didactique des mathématiques. Les articles proposés sont soumis à un arbitrage avant publication. Le cas échéant, des demandes de modifications, aménagements ou compléments des textes présentés seront adressées aux auteurs.

La langue de la revue est le français. Des articles peuvent être publiés dans d'autres langues (notamment anglais et espagnol) ; ils seront alors précédés d'une présentation analytique rédigée en français par l'auteur ou par l'équipe de rédaction.

Les articles proposés pour publication dans les *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* de l'IREM de Strasbourg peuvent être transmis sous forme de documents attachés à des messages électroniques. Il convient d'adresser ces messages à l'un des rédacteurs en chef, à l'adresse électronique indiquée ci-après.

Un modèle d'article au format des Annales se trouve sous forme de fichier *word* à l'adresse URL :

http://irem/data/publi/annales/templates/modele_annales_didactiques.doc

Après ouverture et enregistrement sous un nouveau nom, il permet d'introduire par copier-coller aux emplacements appropriés, en respectant les fontes de caractères et les tailles :

- le nom de l' (des) auteur(s) ;
- le titre complet ;
- le titre éventuellement abrégé, figurant dans l'en-tête des pages impaires ;
- le bloc “abstract – résumé - mots clés” ;
- le texte proprement dit de l'article proposé ;
- la bibliographie sous forme normalisée (s'inspirer du modèle où apparaissent les différents cas pour la présentation des références).

Pour composer un article sans utiliser le modèle, par exemple en recourant à LaTeX, voici des précisions sur le format des pages et les caractères utilisés.

Feuille A4 portrait, avec les marges suivantes :

Haut :	3 cm
Bas :	8 cm
Gauche :	4 cm
Droite :	4 cm
Reliure :	0 cm
En tête :	2 cm
Pied de page :	7 cm

Caractères :

- Auteur(s) en première page : Arial 12 points, gras, petite capitale, Centré ;
- Titre en première page : Arial 14 points, petite capitale, Centré ;
- Abstract – Résumé - Mots clés : Times New Roman 10 points ;
- En-tête : Arial 9 points ;
- Corps de texte : Times New Roman 11 points.

Pour la pagination d'un article proposé, commencer par le numéro 1.

Adresses électroniques :

- pour des commandes de volumes mailto :
  `bibirem@math.u-strasbg.fr`
- pour des propositions d'articles mailto :

`kuzniak@math.jussieu.fr`
`francois.pluvinage@math.unistra.fr`