

DE L'ORTHOGONALITÉ AU PARALLÉLISME

Nicole BOPP et Michel ÉMERY

Je n'aimais point cette manière d'opérer sans voir ce qu'on fait, et il me semblait que résoudre un problème de géométrie par les équations, c'était jouer un air en tournant une manivelle.

ROUSSEAU, *Les Confessions*

Résumé : Comment des va-et-vient de solutions nous ont amenés à faire évoluer l'énoncé d'un problème de géométrie euclidienne vers une question de géométrie affine.

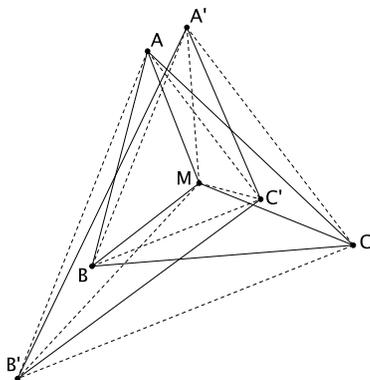
Mots-clés : aire, aire orientée, homothétie, parallélisme, orthocentre, triangle, hexagone, polygone, produit extérieur, produit vectoriel, Thalès.

1. Passage d'un problème à un autre

Un jour de novembre 2008, croisant N. B.¹ dans le couloir de l'IREM de Strasbourg, J.-P. F. lui demande : « Connaitrais-tu une démonstration géométrique de la propriété suivante ? »

PROBLÈME 1. — Soient ABC un triangle et M un point du plan du triangle n'appartenant pas aux droites portant les côtés du triangle. On désigne par A' , B' et C' respectivement les orthocentres des triangles MBC , MCA et MAB .

Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont même aire.



Ce résultat avait été récemment (re)découvert par Louis RIVOALLAN en manipulant un logiciel de géométrie dynamique. Il en proposait au bulletin vert de l'APMEP une démonstration (voir [2]), que J.-P. F. était en train de relire.

Il aurait été surprenant que N. B. ait dans sa poche une solution à un problème de géométrie inconnue de J.-P. F. Elle en parla à M. É., rencontré dans un couloir

1. Les protagonistes de cette histoire sont Nicole BOPP (N. B.), Michel ÉMERY (M. É.), Jean-Pierre FRIEDELMEYER (J.-P. F.), Louis RIVOALLAN et Marc ROUX.

de l'IRMA², et dès lors commença une collaboration par correspondance, chacun répondant au dernier message de l'autre par une remarque ou une amélioration. Nous n'avons jamais travaillé ensemble sur cette question comme le font souvent les mathématiciens, en réfléchissant tout haut à deux devant le même tableau noir, probablement parce que nous n'accordions guère d'importance à ce sujet ; et nos échanges, parfois relancés par des messages de J.-P. F., n'étaient pas réguliers, s'espaçant de quelques heures à quelques semaines : de temps en temps, on prenait le loisir de réfléchir un peu au dernier courrier reçu, et, si l'inspiration venait, on y répondait. Voici quelques étapes de notre cheminement dont le point de départ était le problème 1.

1.a. Premières solutions

Prenant le point M comme origine de tous les vecteurs, notre première démonstration faisait intervenir des produits scalaires, des produits extérieurs, l'expression de l'aire d'un triangle à l'aide de produits extérieurs (nous y reviendrons plus bas) et des calculs trigonométriques, culminant avec la formule

$$\text{aire}(A'B'C') = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta + \text{tg } \gamma}{\text{tg } \alpha \text{ tg } \beta \text{ tg } \gamma} \text{aire}(ABC),$$

où α est l'angle $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$, etc. Pour pouvoir conclure, on est conduit à remarquer que $\alpha + \beta + \gamma = 0 \pmod{2\pi}$ entraîne $\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta + \text{tg } \gamma = \text{tg } \alpha \text{ tg } \beta \text{ tg } \gamma$. Ça marche, mais ça ne donne vraiment pas l'impression d'avoir compris de quoi il retourne !

L'intervention bien laborieuse de toute cette trigonométrie suscita une seconde solution, plus expéditive, inspirée du début de la première, et évitant produits scalaires et trigonométrie pour ne garder que les produits extérieurs. Rappelons que, dans le plan euclidien orienté, le produit extérieur de deux vecteurs u et v est le nombre réel $u \wedge v$ indifféremment défini par les propriétés équivalentes suivantes :

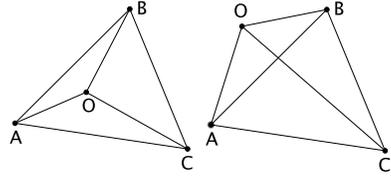
- $u \wedge v$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur u et v ;
- $u \wedge v = \|u\| \|v\| \sin(u, v)$;
- si R désigne la rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$, $u \wedge v = (Ru) \cdot v = -u \cdot (Rv)$;
- $u \wedge v$ est linéaire en u , linéaire en v , antisymétrique ($v \wedge u = -u \wedge v$; en particulier, $u \wedge u = 0$) et $u \wedge v = 1$ si (u, v) est une base orthonormée directe ;
- le produit vectoriel de u et v dans un espace tridimensionnel contenant le plan vaut $(u \wedge v) k$, où k est le vecteur unitaire normal au plan et choisi selon la règle du tire-bouchon.

Les produits extérieurs sont par excellence l'outil algébrique approprié aux calculs d'aires. L'aire orientée d'un triangle ABC est la moitié de l'aire orientée du parallélogramme construit sur \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} , et vaut donc $\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. En prenant une origine O dans le plan et en notant $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$ et $\overrightarrow{OC} = c$, l'aire devient $\frac{1}{2} (b - a) \wedge (c - a)$; en utilisant bilinéarité et antisymétrie de \wedge pour mettre un peu d'ordre, on a finalement

$$\text{aire}(ABC) = \frac{1}{2} (a \wedge b + b \wedge c + c \wedge a).$$

2. L'IREM de Strasbourg occupe une (petite) partie du bâtiment de l'IRMA (Institut de Recherche Mathématique Avancée), aussi les couloirs se croisent-ils.

Cette formule peut s'interpréter ainsi : l'aire orientée de ABC est égale à la somme des aires orientées des triangles OAB , OBC et OCA .



Voici notre deuxième solution. Les orthocentres A' , B' et C' sont bien définis car le point M n'appartient pas aux côtés du triangle. Comme A' (resp. B') est l'orthocentre de MBC (resp. MAC), le vecteur $\overrightarrow{BA'}$ (resp. $\overrightarrow{AB'}$) est orthogonal à (MC) ; ces deux vecteurs $\overrightarrow{BA'}$ et $\overrightarrow{AB'}$ sont donc parallèles, d'où $\overrightarrow{AB'} \wedge \overrightarrow{BA'} = 0$.

Gardant le point M comme origine (c'était le choix permettant les calculs dans la première solution), et posant

$$a = \overrightarrow{MA}, \quad b = \overrightarrow{MB}, \quad c = \overrightarrow{MC} \quad \text{et} \quad a' = \overrightarrow{MA'}, \quad b' = \overrightarrow{MB'}, \quad c' = \overrightarrow{MC'},$$

l'égalité $\overrightarrow{AB'} \wedge \overrightarrow{BA'} = 0$ s'écrit $(b' - a) \wedge (b - a') = 0$; en développant, on en tire

$$a' \wedge b' = a \wedge b - a \wedge a' + b \wedge b'.$$

Par permutation circulaire on a de même

$$\begin{aligned} b' \wedge c' &= b \wedge c - b \wedge b' + c \wedge c', \\ c' \wedge a' &= c \wedge a - c \wedge c' + a \wedge a'. \end{aligned}$$

En additionnant ces trois égalités, six termes disparaissent et il reste

$$a' \wedge b' + b' \wedge c' + c' \wedge a' = a \wedge b + b \wedge c + c \wedge a,$$

c'est-à-dire 2 aire $(A'B'C')$ = 2 aire (ABC) . □

1.b. D'autres problèmes

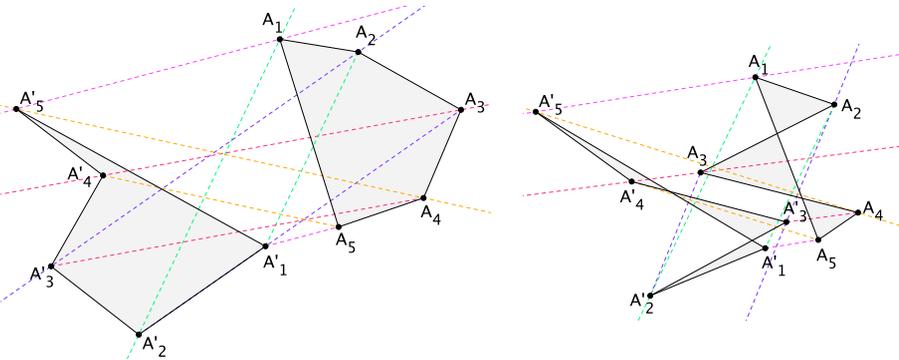
Cette histoire aurait pu s'arrêter là, puisque quelque temps après parut l'article de RIVOALLAN ([2]). Notre première démonstration était essentiellement la même que l'une de celles qu'il proposait (annexe 1, page 56), ce qui montre qu'elle tombe assez naturellement sous la plume (ou le bâton de craie); et notre deuxième solution était proche de celle proposée par J.-P. FRIEDELMEYER et M. ROUX, les relecteurs de son article (annexe 3, page 59), ce qui montre que la précédente donne vraiment envie qu'on la simplifie. De plus, entre temps, J.-P. F. avait déniché l'énoncé du problème 1 dans le *Traité de géométrie* ([3], page 504) de ROUCHE et COMBEROUSSE. Plus précisément l'énoncé figure, sans indication aucune, dans l'exercice 9 de la note III *Sur la géométrie récente du triangle*, à partir de l'édition de 1891 (la première édition date 1864).

De notre côté aussi, nous avons entre temps un peu progressé. La seconde démonstration a deux qualités : elle est courte, et on n'y comprend rien, c'est un pur calcul. Elle donne donc envie de voir ce qu'elle cache; et lorsqu'on la regarde, quatre remarques s'imposent.

1) Choisir le point M comme origine ne sert à rien : une fois établi le parallélisme de (BA') et (AB') , le calcul peut se faire avec n'importe quelle origine O au lieu de M .

2) Ainsi éliminé des calculs, le point M n'intervient plus que pour fournir le parallélisme de (BA') et (AB') . On peut donc s'en passer complètement, il suffit de postuler que (BA') et (AB') sont parallèles, ainsi que les deux autres paires analogues. Le calcul effectué ci-dessus montre donc que *si un hexagone a ses trois paires de côtés opposés parallèles, les aires (et même les aires orientées) des deux triangles obtenus en prenant un sommet sur deux sont égales*.

3) Le même calcul montre plus généralement, et tout aussi facilement, une propriété analogue pour des polygones à nombre pair de sommets : *si, dans le plan, $2n$ points $A_1, \dots, A_n, A'_1, \dots, A'_n$ vérifient les n relations de parallélisme $(A_1A'_2) \parallel (A'_1A_2)$, $(A_2A'_3) \parallel (A'_2A_3)$, et ainsi de suite jusqu'à $(A_nA'_1) \parallel (A'_nA_1)$, les deux polygones $A_1A_2 \dots A_n$ et $A'_1A'_2 \dots A'_n$ ont même aire orientée*.



Ces polygones sont quelconques, pouvant avoir de nombreux croisements ; l'aire orientée est la somme des aires de chaque région du plan délimitée par le polygone, chaque terme étant multiplié par le nombre (positif, nul ou négatif) de tours qu'effectue le polygone autour de la région correspondante. Cette aire étant donnée par la formule

$$\text{aire}(A_1A_2 \dots A_n) = \frac{1}{2} (a_1 \wedge a_2 + a_2 \wedge a_3 + \dots + a_n \wedge a_1),$$

le calcul fait pour $n = 3$ s'étend immédiatement à n quelconque.

4) Enfin, le calcul peut se faire à 3 dimensions, le produit extérieur devenant le produit vectoriel habituel ; il peut même s'étendre en dimension n quelconque, le produit extérieur étant alors à valeurs dans un espace de dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$, et la manipulation algébrique restant inchangée. (Cet espace à $n(n-1)/2$ dimensions est l'ensemble des éléments de surface bidimensionnels dans l'espace à n dimensions.) Le résultat subsiste sous la forme suivante : *si, dans l'espace, les trois paires de côtés opposés d'un hexagone sont parallèles, les deux triangles obtenus en prenant un sommet sur deux sont dans des plans parallèles et ont des aires (orientées) égales*.

Ces remarques vont être développées, en commençant par la seconde, qui ramenait le problème 1 au problème 2 ci-dessus, dont il est un cas particulier.

PROBLÈME 2. — Soient A, B, C, A', B' et C' six points dans le plan tels que $(AB') \parallel (A'B)$, $(BC') \parallel (B'C)$ et $(CA') \parallel (C'A)$. Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ ont même aire.

Le problème se trouvait ainsi transformé en une question de géométrie affine, et non plus euclidienne. En effet, bien que l'aire d'un triangle — ou de toute autre figure — ne soit pas une notion affine, les relations linéaires entre aires, par exemple les égalités entre aires, sont affines.

L'apparence plus simple et la plus grande généralité de cette nouvelle formulation permettaient d'en espérer une solution géométrique. Comme nous allons le voir, de telles solutions existent, mais nous n'en connaissons aucune qui soit pleinement satisfaisante : à des degrés divers, chacune garde un parfum plus ou moins prononcé de produit vectoriel et de sa linéarité.

Bien que J.-P. F. ne soit pas encore parvenu à la localiser dans cette jungle qu'est l'immense littérature sur la géométrie élémentaire, il serait très surprenant que cette propriété des hexagones à côtés parallèles soit nouvelle, d'autant plus que, comme nous l'avons dit plus haut, le cas particulier des trois orthocentres est connu depuis longtemps. Il est curieux aussi que ce soit ce cas particulier, et non le cas général plus simple, qui ait été redécouvert grâce à l'ordinateur.

D'après J.-P. F. une explication des raisons pour lesquelles le problème posé par ROUCHÉ et COMBEROUSSE se restreignait au cas des orthocentres pourrait être celle-ci : six points vérifiant les hypothèses du problème 2 sont sur une même conique (d'après la réciproque du théorème de Pascal) ; ceci évoque aussitôt le théorème de Brianchon-Poncelet selon lequel *l'orthocentre d'un triangle inscrit dans une hyperbole équilatère se trouve toujours sur cette hyperbole*. C'est ainsi que l'on retrouve l'orthocentre du problème initial. Le problème 1 se résout donc analytiquement de façon très simple en choisissant un repère porté par les asymptotes d'une hyperbole équilatère passant par les sommets du triangle ABC et le point M , ce qui est toujours possible comme le montre l'article ([1]) de J.-P. FRIEDELMEYER et M. ROUX.

2. Solutions géométriques du problème 2

2.a. Cas où l'hexagone $AB'CA'BC'$ est convexe

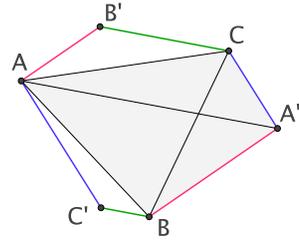
Cette démonstration repose uniquement sur les deux propriétés suivantes.

- (P_1) Soit MNP un triangle et P' un point de la droite parallèle à (MN) passant par P . Les triangles MNP et MNP' ont même aire.
- (P_2) Si deux polygones du plan ont des intérieurs disjoints alors l'aire de leur réunion est égale à la somme de leurs aires.

Bien sûr ce sont les hypothèses de parallélisme du problème 2 qui nous ont incités à utiliser la propriété (P_1). Quant à la propriété (P_2) son utilisation va de soi mais pose de redoutables problèmes de position que nous avons évacués ici en supposant l'hexagone convexe.

Démonstration (cas convexe). Pour alléger l'écriture, nous noterons MNP l'aire du triangle MNP . Grâce à la convexité on voit que

$$\begin{aligned}
 AA'B + AA'C &= ABC + A'BC \\
 BB'C + BB'A &= ABC + B'CA \\
 CC'A + CC'B &= ABC + C'AB .
 \end{aligned}$$



En sommant ces trois égalités on obtient

$$AA'B + AA'C + BB'C + BB'A + CC'A + CC'B = 2ABC + \text{aire de l'hexagone}.$$

En échangeant A et A' , B et B' , et C et C' , on a aussi

$$AA'B' + AA'C' + BB'C' + BB'A' + CC'A' + CC'B' = 2A'B'C' + \text{aire de l'hexagone}.$$

Mais puisque les droites (AB') et (BA') sont parallèles on a

$$AA'B = BB'A' \text{ et } BB'A = AA'B'$$

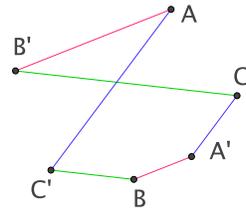
et de même (par permutation circulaire)

$$\begin{aligned}
 BB'C &= CC'B' \text{ et } CC'B = BB'C' \\
 CC'A &= AA'C' \text{ et } AA'C = CC'A' .
 \end{aligned}$$

Ceci permet de conclure à l'égalité des aires des triangles ABC et $A'B'C'$ puisque

$$2ABC + \text{aire de l'hexagone} = 2A'B'C' + \text{aire de l'hexagone} . \quad \square$$

Il n'est pas facile de généraliser cette démonstration dans *tous* les cas (comme ci-contre par exemple) car justement il faudrait arriver à faire la liste des différents cas.

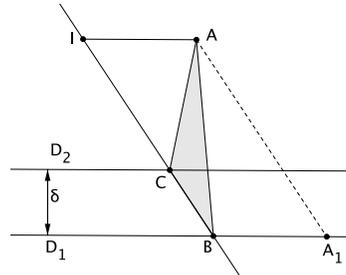


C'est en cherchant à utiliser la propriété (P_1) , qui ne dépend pas de la position relative des points, que l'on arrive à réduire le problème 2 à un autre dont la solution ne dépend pas du cas de figure. Et c'est en faisant *bouger* une partie de la figure que nous avons résolu ce problème.

2.b. Réduction du problème 2

LEMME. — Soient D_1 et D_2 deux droites parallèles distinctes ; appelons δ la distance entre ces deux droites. Soient B (resp. C) un point de D_1 (resp. D_2) et A un point du plan ; appelons I le point intersection de la droite (BC) avec la parallèle à D_1 et D_2 issue de A (le point I existe car $\delta > 0$).

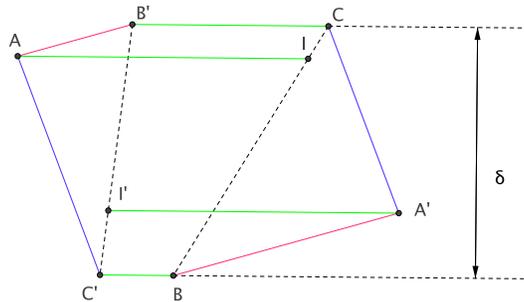
L'aire du triangle ABC vaut $\frac{1}{2} \delta AI$.



Démonstration du lemme. Introduisons le point A_1 intersection de D_1 avec la parallèle à (BC) passant par A . Puisque (AA_1) est parallèle à (BC) , l'aire du triangle ABC est aussi celle du triangle A_1BC , c'est-à-dire $\frac{1}{2} \delta A_1B$. Pour conclure, il ne reste qu'à remplacer la longueur A_1B par AI , qui lui est égale car A_1AIB est un parallélogramme. \square

Réduction du problème 2. Le cas où $A' = A, B' = B$ et $C' = C$ est trivial, ainsi que celui où les six points sont alignés (les aires des triangles sont nulles). En éliminant ces deux cas, on peut, sans perdre en généralité, supposer B et B' distincts puis supposer que C n'appartient pas à la droite (BB') . En d'autres termes on peut supposer que les points B, B' et C ne sont pas alignés. On note alors δ la distance de B à la droite $(B'C)$. C'est la distance entre $(B'C)$ et sa parallèle passant par B (qui est la droite (BC')) sauf dans le cas où $B = C'$.

La droite parallèle à $(B'C)$ passant par A rencontre (BC) en un point I ;
de même, la droite parallèle à $(B'C)$ passant par A' rencontre $(B'C')$ en un point I' .



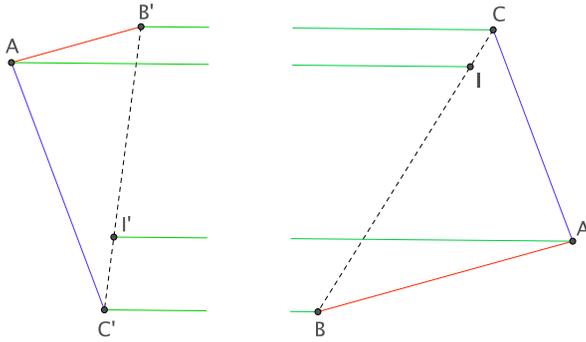
Le lemme dit que l'aire de ABC est $\frac{1}{2} \delta AI$ et que celle de $A'B'C'$ vaut $\frac{1}{2} \delta A'I'$. Pour résoudre le problème 2, il suffit donc de montrer que les longueurs AI et $A'I'$ sont égales ; nous allons plus précisément établir que $\vec{A'I'} = -\vec{AI}$.

Nous avons donc ramené la résolution du problème 2 à celle du problème 3, qui est lui aussi une question de géométrie affine.

PROBLÈME 3. — Soient A, B, C, A', B' et C' six points dans le plan tels que $(AB') \parallel (A'B), (BC') \parallel (B'C)$ et $(CA') \parallel (C'A)$. On suppose en outre que les points B, B' et C ne sont pas alignés et l'on note I et I' les intersections des parallèles à $(B'C)$ passant par A et A' avec respectivement les droites (BC) et $(B'C')$. Montrer que $\vec{A'I'} = -\vec{AI}$.

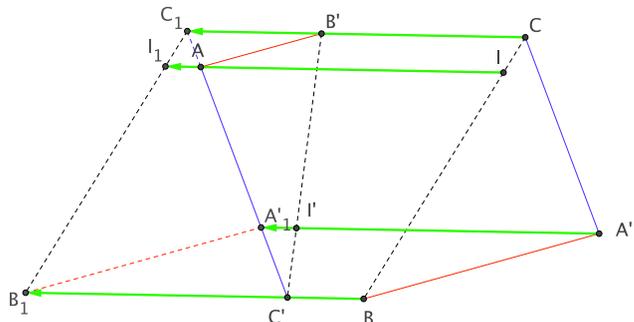
2.c. Réduction du problème 3 à un cas particulier

Pour résoudre le problème 3, l'idée est que les trois hypothèses de parallélisme restent satisfaites lorsque l'on déforme la figure en faisant subir aux trois points A', B et C une translation parallèle à $(B'C)$ et (BC') . Ces trois points sont déplacés en bloc alors que A, B' et C' restent immobiles ; et le point I se déplace avec le bloc $A'BC$, tandis que I' ne bouge pas. La somme $\vec{A'I'} + \vec{AI}$ reste donc constante, et pour montrer qu'elle était initialement nulle, il suffit de montrer qu'elle l'est après la déformation.



Parmi les translations possibles, il faut maintenant en choisir une qui simplifie le problème ; plusieurs possibilités s'offrent immédiatement à l'esprit. On peut par exemple amener le point B sur C' ; le lecteur pourra s'amuser à traiter ce cas. Une autre possibilité est d'amener A' sur la droite $(B'C')$; la résolution se ramène alors à établir que *si, aux hypothèses du problème 3, on ajoute l'alignement de A' , B' et C' , les points A , B et C sont eux aussi alignés*. On est alors incité à passer de la géométrie affine à la géométrie projective. Pour cela on remplace les trois hypothèses de parallélisme par l'hypothèse unique que les trois intersections sont alignées (elles l'étaient auparavant sur la droite à l'infini) ; et une simple application du théorème de Pappus donne la conclusion souhaitée. Une troisième possibilité consiste à choisir la translation de façon à amener le point A' sur la droite (AC') ; on est ainsi ramené au cas où les droites (AC') et (CA') sont confondues ; c'est ce cas que nous allons traiter.

Voici la figure dans ce cas. Les lettres A'_1, B_1, C_1 et I_1 indiquent la position des points A', B, C et I après la translation parallèle à (BC') qui a amené A' sur la droite (AC') .



2.d. Résolution du problème 3

Supposons donc les droites (AC') et $(A'C)$ confondues. On peut supposer en outre que le point B n'appartient pas à la droite (AC') car en ce cas les six points A, B, C, A', B' et C' seraient alignés.

Les hypothèses de parallélisme entraînent l'existence d'une homothétie ou d'une translation \mathcal{F} envoyant le triangle $A'BC'$ sur le triangle $AB'C$. Considérons

l'homothétie \mathcal{H}_C de centre C envoyant A sur C' et donc I sur B ;

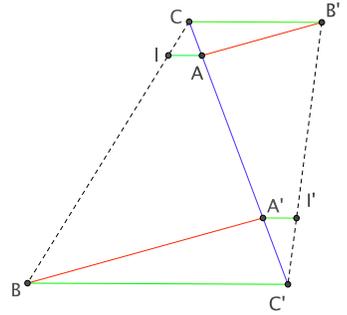
l'homothétie $\mathcal{H}_{C'}$ de centre C' envoyant C sur A' et donc B' sur I' .

La composée $\mathcal{H}_{C'} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{H}_C$ envoie A sur A' et I sur I' .

L'application vectorielle associée (qui est scalaire) est identique à celle associée à $\mathcal{H}_C \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{H}_{C'}$, qui envoie C sur C' et C' sur C . On en déduit que $\mathcal{H}_C \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{H}_{C'}$ et donc $\mathcal{H}_{C'} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{H}_C$ sont des symétries centrales ce qui implique

$$\vec{AI'} = -\vec{AI} .$$

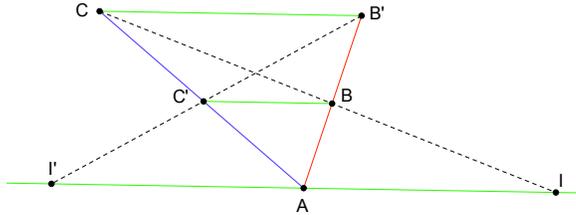
□



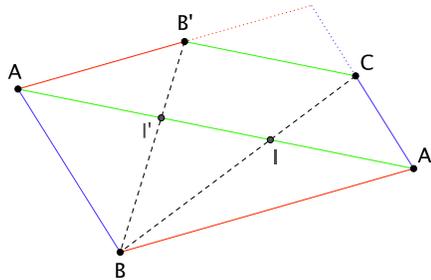
2.e. Des cas particuliers

Certains cas particuliers du problème 3 peuvent donner lieu à des exercices de collège ou lycée (applications du théorème de Thalès). En voici trois dans un ordre croissant de difficulté.

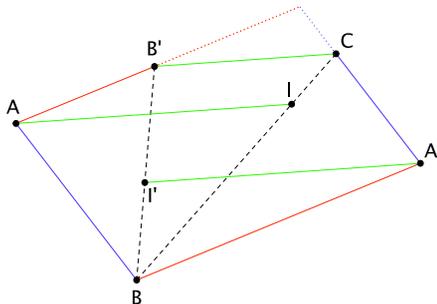
1. $A' = A$.



2. $C' = B$ et $(B'C) \parallel (AA')$.



3. $C' = B$. Ce cas est celui déjà évoqué plus haut.



3. Généralisation du problème 2 à l'espace

Comme nous l'avons signalé plus haut, la solution algébrique du problème 1 s'écrit de la même façon dans un espace de dimension trois ou plus, le même calcul fournissant la même égalité $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{A'B'} \wedge \vec{A'C'}$. En dimension trois, le produit extérieur devient le produit vectoriel et c'est maintenant une égalité entre vecteurs ; en dimensions plus grandes, ce serait une égalité entre tenseurs. L'égalité entre les normes de ces vecteurs ou tenseurs signifie que les deux triangles ont même aire, et l'égalité en direction, que les plans de ces triangles sont parallèles. (De plus, ces vecteurs ou tenseurs ayant même sens, les aires orientées des triangles sont les mêmes.) Nous avons ainsi été conduits à un nouvel énoncé :

PROBLÈME 4. — *Soient A, B, C, A', B' et C' six points de l'espace tels que $(AB') \parallel (A'B)$, $(BC') \parallel (B'C)$ et $(CA') \parallel (C'A)$. Montrer que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont situés dans des plans parallèles et ont même aire.*

Comme dans le cas plan, il était tentant d'en chercher une solution géométrique ; et, leurrés par l'analogie avec la démonstration algébrique qui donne simultanément le résultat en toutes dimensions, nous avons cherché à adapter à l'espace les constructions géométriques qui marchent dans le plan, bricolant des parallélogrammes et des homothéties dans un cadre tridimensionnel. Il nous a fallu quelque temps avant de réaliser que ce n'est pas la démonstration qui passe du plan à l'espace, mais bien le résultat lui-même.

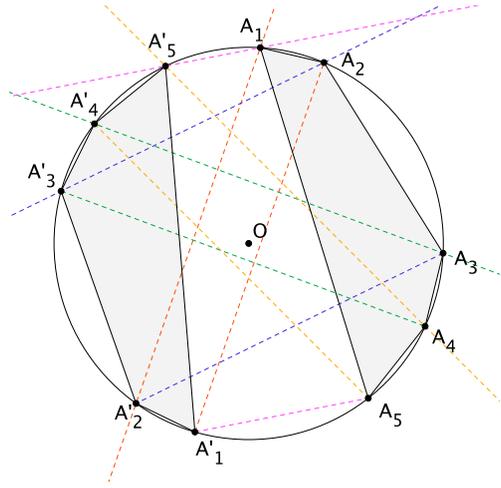
En effet, l'hypothèse du problème 4 est que les côtés opposés de l'hexagone (spatial) $AB'CA'BC'$ sont parallèles. Cette propriété se préserve évidemment par projection, et, en utilisant le résultat connu dans le cas bidimensionnel, on en déduit aussitôt que les projections des triangles ABC et $A'B'C'$ sur n'importe quel plan ont même aire. En projetant sur des plans perpendiculaires à l'un des triangles, il est facile d'en conclure ensuite que ces triangles sont dans des plans parallèles, et enfin qu'ils ont même aire.

4. Annexe : cas particulier de $2n$ points cocycliques

Nous avons vu comment la démonstration algébrique du problème 1 conduit à énoncer le problème 2 et à le généraliser à plus de six points. C'est en manipulant un logiciel de géométrie dynamique pour faire les figures correspondantes que nous avons été amenés à poser le problème ci-dessous. Son intérêt provient du fait qu'il peut être résolu en faisant uniquement appel aux propriétés élémentaires des isométries planes.

PROBLÈME 5. — *On se donne $n + 1$ points A_1, A_2, \dots, A_n et A'_1 sur un cercle \mathcal{C} . Pour $j \in \{2, \dots, n\}$ on construit successivement les points A'_j appartenant à l'intersection de \mathcal{C} et de la parallèle à $(A'_{j-1}A_j)$ passant par A_{j-1} . Montrer que le point A'_n appartient aussi à la parallèle à $(A_nA'_1)$ passant par le point A_1 et que le polygone $A'_1A'_2 \cdots A'_n$ se déduit du polygone $A_1A_2 \cdots A_n$ par une rotation.*

Les deux polygones ont alors évidemment la même aire et nous obtenons ainsi, dans un cas particulier, une résolution géométrique de la généralisation à $2n$ points du problème 2.



Cas où $n = 5$.

Solution. Pour $j \in \{2, \dots, n\}$, les cordes $A_{j-1}A'_j$ et $A'_{j-1}A_j$ étant parallèles ont même médiatrice (celle-ci passe par le centre O du cercle \mathcal{C}). Notons σ_j la réflexion ayant pour axe cette médiatrice. Elle échange donc le point A_j avec le point A'_{j-1} et le point A'_j avec le point A_{j-1} . Considérons enfin l'isométrie $f = \sigma_n \circ \sigma_{n-1} \circ \dots \circ \sigma_2$ qui agit ainsi sur les points A_1 et A'_1 .

$$\begin{aligned} A_1 &\xrightarrow{\sigma_2} A'_2 \xrightarrow{\sigma_3} A_3 \cdots \cdots \xrightarrow{\sigma_n} A_n \text{ ou } A'_n \\ A'_1 &\mapsto A_2 \mapsto A'_3 \cdots \cdots \mapsto A_n \text{ ou } A'_n \end{aligned}$$

- *Cas où n est pair.* Dans ce cas f , composée d'un nombre impair de réflexions, est elle-même une réflexion. Comme $f(A_1) = A'_n$ et $f(A'_1) = A_n$, les droites $(A_1A'_n)$ et (A'_1A_n) , qui sont orthogonales à l'axe de la réflexion f , sont bien parallèles.
- *Cas où n est impair.* Dans ce cas f est une rotation (de centre O) telle que $f(A_1) = A_n$ et $f(A'_1) = A'_n$.

Considérons la réflexion σ qui fixe O et envoie A_1 sur A'_1 . Comme $f \circ \sigma$ est une réflexion et donc une involution on a

$$f \circ \sigma = \sigma \circ f^{-1} \text{ d'où } f \circ \sigma \circ f = \sigma .$$

Or l'image par $f \circ \sigma \circ f$ du point A'_1 est égale à $f(\sigma(A'_1)) = f(A_1) = A_n$. On en déduit que les droites $(A_1A'_n)$ et (A'_1A_n) , qui sont orthogonales à l'axe de la réflexion σ , sont bien parallèles.

Considérons dans les deux cas la rotation ρ de centre O qui envoie A_1 sur A'_1 et démontrons par récurrence que $\rho(A_j) = A'_j$ pour $j \in \{2, \dots, n\}$. Supposons donc que $\rho(A_k) = A'_k$ pour k tel que $1 \leq k < n$. Comme σ_{k+1} échange A_{k+1} avec A'_k et A_k avec A'_{k+1} , on a

$$\sigma_{k+1} \circ \rho^{-1} \circ \sigma_{k+1}(A_{k+1}) = \sigma_{k+1} \circ \rho^{-1}(A'_k) = \sigma_{k+1}(A_k) = A'_{k+1} .$$

Or, comme ci-dessus, on a

$$\rho \circ \sigma_{k+1} = \sigma_{k+1} \circ \rho^{-1} \text{ d'où } \sigma_{k+1} \circ \rho^{-1} \circ \sigma_{k+1} = \rho .$$

On en déduit que $\rho(A_{k+1}) = A'_{k+1}$ ce qui montre que le polygone $A'_1 A'_2 \cdots A'_n$ est l'image par la rotation ρ du polygone $A_1 A_2 \cdots A_n$. \square

Bibliographie

- [1] Jean-Pierre FRIEDELMEYER & Marc ROUX (2010), Orthocentre, cercle d'Euler et hyperbole équilatère, *à paraître*.
- [2] Louis RIVOALLAN (2009), Orthocentres et aires, *Bulletin de l'APMEP* **480**, 54–60.
- [3] Eugène ROUCHÉ & Charles de COMBEROUSSE (1900), *Traité de géométrie*, Gauthier-Villars, Paris (réimpression en 1997 aux éditions Jacques Gabay).

Nicole BOPP et Michel ÉMERY
IRMA
bopp@math.unistra.fr
emery@math.unistra.fr