La dérive des continents, quinze ans après

Groupe *Lycée-Université* de l'Irem de Strasbourg [1]

Résumé : Un article d'un groupe de l'Irem de Strasbourg, paru en 1995 et intitulé *La dérive des continents*, faisait le constat d'un écart grandissant entre l'enseignement au lycée et l'enseignement à l'université. Quinze ans après nous reprenons ce travail pour voir si les deux continents se sont rapprochés ou au contraire encore éloignés. La comparaison des programmes, des méthodes d'enseignement et d'évaluation nous permet de conclure que les deux mondes se sont indéniablement rapprochés.

Mots-clés : Curriculum, liaison lycée-université, méthode d'enseignement, programme d'enseignement, système scolaire.

Introduction

En 1995 paraissait dans les revues Repères et L'Ouvert un article intitulé *La dérive des continents* ([1]), rédigé par un groupe de l'Irem de Strasbourg. Ce groupe y étudiait la liaison entre le lycée et le DEUG. Près de quinze années se sont écoulées et le lycée comme l'université ont évolué. Les continents se sont peut-être rapprochés ou au contraire éloignés davantage. L'objet de ce texte est de faire le point sur les pratiques et les programmes actuels en mathématiques dans la filière scientifique du lycée et la première année de licence de mathématiques à l'université.

Nous y décrivons et comparons les programmes de mathématiques des terminales S et de la première année de licence de mathématique (L1) . Nous expliquons succinctement les conditions d'études au lycée et à l'université. Chaque fois qu'à notre sens une évolution majeure a eu lieu, nous la soulignons en prenant comme point de comparaison les remarques faites en 1995 par les auteurs de *La dérive des continents.*

1. L'enseignement secondaire, la filière S

Les élèves n'ayant pas choisi la voie professionnelle commencent leurs années de lycée par la classe de seconde qui est une classe dite « de détermination ». Durant cette année scolaire un élève suit actuellement quatre heures de cours de mathématiques dont une heure de module en demi-classe et, s'il est en difficulté, une heure supplémentaire d'aide individualisée en groupe de huit élèves maximum. À l'issue de la seconde, les élèves (ou leurs parents) formulent des vœux d'orientation. Dans les lycées d'enseignement général, trois filières sont proposées : littéraire (L), économique et sociale (ES) et scientifique (S). Un élève de seconde a également la possibilité d'opter pour une voie technologique : STI (technologies industrielles), STG (technologies de la gestion) et STL (technologies de laboratoire) sont les

1. Ont participé aux travaux de ce groupe : François Dreyfuerst, Claude Mitschi, Hélène Tanoh, Christine Vespa, Marc Wambst et Dominique Weil.

principales possibilités. La décision d'orientation incombe au proviseur du lycée, sur proposition du conseil de classe. La décision est évidemment motivée par le niveau de l'élève, mais elle peut aussi être influencée par un besoin conjoncturel de gestion des flux.

Dans les faits, on constate que la section S est plus que jamais la « voie royale ». Il s'agit davantage d'une filière « générale » ne fermant aucune porte, que d'une véritable filière scientifique. Les mathématiques restent la matière principale (avec le plus fort coefficient au baccalauréat), mais souvent hélas la moins appréciée des élèves. En effet, certains de ceux qui y sont inscrits n'ont pas de projet particulier, voire de goût ou d'aptitude pour les mathématiques ou les sciences en général. La forte proportion de matières non scientifiques permet d'ailleurs d'obtenir le baccalauréat scientifique avec des notes très médiocres en mathématiques.

1.1. Les conditions d'études

L'horaire hebdomadaire pour un élève de première S est actuellement de 4 heures de cours en classe entière et 1 heure de module en demi-classe. Pour la classe de terminale S, il est de 4 heures 30 de cours et 1 heure de module. En terminale, les élèves ayant choisi les mathématiques comme enseignement de spécialité ont 2 heures supplémentaires. Nous ne pouvons que constater une diminution du nombre d'heures de mathématiques. À titre de comparaison, en 1995, un élève de terminale S suivait 9 heures de mathématiques par semaine. Cette diminution a également touché tous les niveaux inférieurs, tant au lycée qu'au collège.

Les classes de lycée ont un effectif oscillant le plus souvent entre 24 et 40 élèves (dans certaines situations très particulières, les effectifs peuvent baisser en-dessous de 20) et sont de niveau hétérogène. Dans certaines classes de terminale S les élèves sont regroupés selon leur spécialité (mathématiques, physique-chimie ou sciences de la vie et de la terre), mais les établissements sont parfois amenés à réunir plusieurs spécialités dans une même classe.

1.2. Les programmes

Les programmes officiels de lycée sont en général directifs. Ainsi la fonction exponentielle doit maintenant être définie comme solution de l'équation différentielle $f' = kf$, solution introduite à l'aide de la méthode d'Euler. L'enseignant reste libre de choisir la manière d'introduire la fonction logarithme. Les professeurs de lycée ont toutefois une grande marge de liberté dans l'organisation de leur enseignement et en particulier de sa progression.

Par ailleurs, le cours semble reprendre de l'importance et les démonstrations une place privilégiée dans celui-ci, grâce notamment à l'introduction de la « Restitution Organisée des Connaissances » (ROC), qui a fait son apparition en 2005 dans l'épreuve du baccalauréat. Il s'agit d'inciter l'élève à apprendre le cours en lui demandant de rédiger certaines démonstrations faites en classe. Enfin, il semble que les programmes à venir accorderont une place plus importante à l'algorithmique.

Concernant le contenu des programmes de mathématiques au lycée, nous décrivons ceux qui étaient en vigueur au cours de l'année scolaire 2008/2009, et sur lesquels ont travaillé tous les étudiants qui entrent ou entreront en L1 jusqu'en 2011 inclus [2]. Donnons-en, pour commencer, les grandes lignes :

— Fonctions numériques d'une variable réelle. Fonctions de référence : affine, carré, cube, racine carrée, sinus, cosinus, tangente, exponentielle, logarithme népérien, fonctions puissances.

— Dérivation et application à l'étude des variations, à la recherche d'extrema, tangente, méthode d'Euler. Théorème des valeurs intermédiaires (essentiellement dans le cas d'une fonction continue strictement monotone.)

— Calculs de limites (suites et fonctions), théorèmes de comparaison, asymptotes.

— Calcul intégral, primitive, calcul d'aire, intégration par parties, intégration et ordre. Équations différentielles $y' = ay$ et $y' = ay + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

— Suites numériques, suites arithmétiques et géométriques, somme des termes. Suites monotones, bornées. Suites adjacentes. Toute suite croissante et majorée converge. Démonstration par récurrence.

— Géométrie classique et repérée dans le plan et dans l'espace. Calcul vectoriel, produit scalaire. Applications aux calculs de distances et d'angles. Équations de plan. Représentations paramétriques d'une droite dans l'espace. Barycentre, homogénéité et théorème du barycentre partiel. Applications à des problèmes de concours. Caractérisations barycentriques des droites, des segments et des plans.

— Nombres complexes. Formes algébrique et trigonométrique. Application à la géométrie. Caractérisation des translations, des homothéties et des rotations. Équation du second degré à coefficients réels. Formule de Moivre. Équation paramétrique d'un cercle.

— Statistiques descriptives et simulation. Loi des grands nombres. Adéquation à une loi équirépartie.

— Probabilité sur un ensemble fini. Variables aléatoires, espérance et variance. Combinaisons. Loi binomiale. Formule du binôme. Formule des probabilités totales. Probabilités conditionnelles. Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples de lois continues (uniforme et exponentielle).

Les élèves suivant l'enseignement de spécialité mathématique (moins d'un quart des élèves de terminale S) abordent en plus les points suivants :

— Arithmétique. Divisibilité, pgcd, congruences, Théorèmes de Bézout, Gauss et Fermat (version la plus simple), théorème de décomposition en facteurs premiers.

— Etude des similitudes planes. Caractérisation par $z' = az + b$ et $z' = a\bar{z} + b$.

— Exemples de surfaces.

Détaillons le programme d'analyse. L'étude des suites et des fonctions est motivée par la résolution de problèmes issus aussi bien des mathématiques que des autres disciplines : elle n'est pas une fin en soi. Les fonctions étudiées sont des fonctions numériques d'une variable réelle, sans paramètre et, la plupart du temps,

2. Pour plus de détails on trouvera les programmes complets sur le site *eduscol* du ministère de l'éducation nationale (voir [2]).

définies sur un intervalle. On peut noter que les problèmes mettant en jeu des fonctions trigonométriques sont rares au baccalauréat et, de fait, on en étudie rarement en terminale (par manque de temps). La continuité n'est abordée que pour permettre d'énoncer certains théorèmes (valeurs intermédiaires et existence de primitives). Démontrer qu'une fonction donnée est continue n'est pas un objectif du programme. Toutes les indications nécessaires à l'étude d'une suite sont données dans l'énoncé, mis à part le cas des suites arithmétiques ou géométriques. Citons quelques exemples classiques, de difficulté croissante :

— Déterminer une équation de la tangente au graphe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0. Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$. Démontrer que pour tout réel x, on a $e^x \geq x + 1$. Interpréter graphiquement ce résultat.

— Démontrer que pour tout réel $x > 0$, on a $\ln x < \sqrt{x}$ (on pourra étudier les variations de $\ln x - \sqrt{x}$). En déduire que pour tout $x > 1$, on a $0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}$. Déterminer la limite de $\frac{\ln x}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

— On pose $I_0 = \int_0^1 e^{-x}dx$ et $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx$ pour tout entier naturel $n \geq 1$. Calculer I_0 et I_1. Démontrer $0 \leq x^n e^{-x} \leq x^n$ pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout $x \in [0, 1]$. En déduire $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. Quelle est la limite de I_n lorsque n tend vers $+\infty$?

— On admet l'existence d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et solution de l'équation différentielle $y' = y$ qui vérifie $f(0) = 1$. Démontrer $f(x) \neq 0$ pour tout x (on pourra étudier les variations de la fonction h définie par $h(x) = f(x)f(-x)$).

Les élèves ont de grandes difficultés à manipuler des inégalités. Par exemple, les deux exercices *encadrer* a^2 *lorsque* $-1 < a < 2$ ou *démontrer par récurrence que l'on a* $u_n \in [0, 1]$ *lorsque* $u_0 \in [0, 1]$ *et* $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$ ont un taux de réussite faible. Cependant, lorsque les indications nécessaires sont fournies par l'énoncé, l'exploitation de l'étude des variations d'une fonction pour obtenir des inégalités est un travail familier, bien compris par une majorité d'élèves.

En dehors des théorèmes de comparaison, les calculs de limites sont peu développés. Pour calculer la limite en $+\infty$ de xe^{-x^2} un élève se contentera souvent de dire que *l'exponentielle l'emporte* et que la limite est donc 0.

En géométrie, la résolution de problèmes tient une place essentielle. Les élèves devraient être entraînés à choisir l'outil le plus pertinent (propriétés des configurations, calcul vectoriel, calcul barycentrique, transformations, nombres complexes, géométrie analytique). Cette capacité est cependant rarement évaluée. Les structures algébriques sous-jacentes ne sont étudiées ni dans la partie obligatoire, ni en enseignement de spécialité (toutes les indications nécessaires sont données dans le cas où un élève aurait à étudier la composée de deux similitudes). Lors de l'étude des nombres complexes on revient sur les formules de trigonométrie (somme et duplication) mais les formules d'Euler ne sont pas au programme. Il en est de même des racines carrées d'un nombre complexe et des racines n-ièmes de l'unité. La résolution de systèmes linéaires est au programme, en lien avec la géométrie, donc limitée de fait à des systèmes 3×3. La méthode du pivot de Gauss ne figure pas au programme et il faut reconnaître que les élèves ont pour la plupart des difficultés à mener les calculs jusqu'au bout.

En ce qui concerne la statistique et les probabilités, on peut penser que dans l'esprit des concepteurs du programme la partie statistique s'inscrit dans l'éducation à la citoyenneté. En classe de seconde, un huitième du temps doit y être consacré, la sensibilisation aux phénomènes aléatoires étant abordée par le biais de simulations effectuées par les élèves sur leurs calculatrices ou à l'aide d'un logiciel. En première, le lien entre statistique et probabilités est abordé à travers l'énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres. En terminale, le paragraphe *adéquation à une loi équirépartie* est une brève introduction à la problématique des tests.

Comme les élèves ne disposent pas du vocabulaire et des symboles de la théorie des ensembles, le formalisme de la théorie des probabilités ne les met pas à l'aise : modéliser une situation à l'aide d'un arbre de probabilités est une activité bien maîtrisée par la plupart d'entre eux, mais beaucoup ont du mal à faire le lien avec les formules classiques ; la confusion entre probabilité d'une intersection et probabilité conditionnelle est fréquente à l'écrit, et certainement aussi dans leur esprit.

La définition des coefficients binomiaux, leurs premières propriétés et la formule du binôme sont au programme. Toutefois les problèmes de dénombrement ne sont pas étudiés pour eux-mêmes, mais en relation avec les probabilités.

1.3. L'évaluation

Nous terminons notre description de l'enseignement au lycée par quelques remarques sur l'évaluation. Celle-ci prend souvent la forme de contrôles de deux heures, d'épreuves de « Bac blanc » de quatre heures et de « devoirs maison » à un rythme moyen d'un devoir de mathématiques toutes les deux semaines.

L'épreuve de mathématiques du baccalauréat a également évolué depuis 1995. Nous avons déjà évoqué l'apparition de la « restitution organisée des connaissances ». De manière générale, on abandonne les problèmes longs et très guidés au profit d'exercices plus courts mais plus ouverts. Ainsi la distinction entre « les exercices » et « le problème » a disparu. L'épreuve consiste généralement à résoudre quatre, parfois cinq, exercices d'importance comparable.

2. L'enseignement supérieur, la licence de mathématiques

Depuis l'adoption du système de Bologne, les universités françaises déclinent leurs diplômes en termes de licence (bac+3), master (licence+2) et doctorat (on parle du sytème LMD). Le cursus d'études s'articule en semestres. Il faut acquérir six semestres pour obtenir une licence puis quatre autres pour un master. Les différentes matières sont appelées UE (Unités d'Enseignement). Chacune d'elles, en cas de réussite, donne lieu à la délivrance de Crédits européens. Ainsi l'acquisition d'un semestre permet d'acquérir 30 crédits, celle de la licence 180 crédits.

Cette réforme des diplômes a donné lieu à d'autres modifications de l'organisation des études, en particulier dans les premières années de licence. Elle a en même temps créé de grandes différences d'organisation d'une université à l'autre. Nous décrirons ici les études en première année de licence de mathématiques à l'Université de Strasbourg.

Tout bachelier, quelle que soit la mention de son baccalauréat, peut de plein droit s'inscrire en première année de licence à l'université. Les enseignements de première année sont identiques pour la licence d'informatique et la licence de mathématiques. Au moment du passage en deuxième année un étudiant peut choisir librement de poursuivre en informatique ou en mathématiques.

Nous observons depuis quelques années un recul des effectifs en licence de mathématiques. Celle-ci doit faire face à une désaffection à l'égard des sciences en général, mais aussi à la concurrence des filières sélectives comme les classes préparatoires, les IUT et même les BTS. Il n'est pas rare de voir des étudiants s'inscrire à l'université faute de mieux car ils n'ont pas été admis dans ces filières.

Depuis 2009 l'Université de Strasbourg participe au programme *d'Orientation active* du portail *Admission post-bac.* Par l'intermédiaire de ce portail, il est expliqué aux lycéens faisant le vœu de s'inscrire en première année de notre licence malgré de mauvais résultats en mathématiques et en physique en terminale, ou n'ayant pas suivi la filière S, que leurs chances de réussite sont faibles, voire nulles.

Signalons également la création d'une filière *Mathématiques et Physique Approfondies* (MPA) qui est, au sein de la licence de mathématique, un parcours renforcé en vue de l'accès aux grandes écoles par la voie universitaire, de l'admission dans un magistère et de l'accès aux préparations aux agrégations de mathématiques ou de physique. Cette filière est sélective, l'admission se faisant sur dossier, également par l'entremise du portail *Admission post-bac.*

Dans la suite, nous nous contenterons de décrire la licence de mathématiques hors parcours MPA. Pour ce dernier les conditions d'études et les programmes sont les mêmes que ceux de la licence « ordinaire », si ce n'est que les exigences y sont plus fortes en mathématiques et que les enseignements d'informatique y sont remplacés par de la physique [3].

2.1. Les conditions d'études

L'article de 1995 décrivait les études à l'université en termes de cours magistraux en amphithéâtre. Ceci a considérablement changé. Les effectifs ayant baissé, il a été possible d'adoucir le passage du lycée à l'université. L'enseignement de première année est principalement dispensé sous forme de *cours intégrés.* Cela signifie que les étudiants d'une promotion sont répartis en groupes de trente à quarante. Dans chaque matière, un groupe est suivi par un enseignant qui dispense à la fois le cours et les travaux dirigés.

Depuis la rentrée 2008, l'UFR [4] de mathématique et d'informatique de l'Université de Strasbourg a mis en place un système de « semestrialisation totale » en licence, dans lequel les cours sont (presque) tous répétés chaque semestre. Dans les faits, un étudiant n'ayant pas acquis le semestre 1 lors des examens de janvier, devra suivre à nouveau les cours des UE non acquises à la rentrée semestrielle de février. Il pourra les compléter par certains cours du semestre 2. Ce nouveau

3. Les descriptifs officiels de ces diplômes sont disponibles sur le site de l'UFR de mathématique et d'informatique : http ://mathinfo.unistra.fr

4. Unité de Formation et de Recherche, autrement dit, la *Faculté.*

système remplace le système dit de « progression » adopté par l'université lors du passage au LMD et qui permettait à un étudiant n'ayant pas acquis un semestre de s'inscrire au semestre suivant et même à l'année suivante dans certains cas. Ce système n'était pas adapté aux mathématiques car il menait les étudiants en difficultés à l'échec. En effet, surchargés de travail, ceux-ci n'arrivaient pas à acquérir des UE de l'année supérieure ni même, le plus souvent, à rattraper celles de l'année précédente.

De plus, depuis la rentrée 2009, les étudiants les plus faibles en mathématiques peuvent bénéficier d'un *semestre tampon* ou *semestre 0*. Ils sont repérés par un test d'entrée auquel sont soumis tous les étudiants *primo-entrants* en première année de licence de mathématiques et informatique. Le semestre 0 est identique au semestre 1, à l'exception des enseignements de mathématiques qui sont remplacés par un enseignement intitulé *Mathématiques S0* où l'on reprend une partie du programme de mathématiques de terminale S. Les étudiants réussissant le semestre avec cet aménagement se voient délivrer le Diplôme d'université *Propédeutique en mathématiques*. On espère que, soit ces étudiants se réorienteront à l'issue du semestre, par exemple en IUT, soit ils auront acquis les bases nécessaires à la poursuite normale d'un semestre 1 en janvier.

Enfin, les étudiants des deux premières années de licence peuvent assister à des séances hebdomadaires *de tutorat* ou *d'étude* durant lesquelles un enseignant de mathématiques est à leur disposition pour les aider dans leur travail personnel (résolution d'exercices ou lecture des cours).

La grande difficulté de la première année consiste à assimiler un grand nombre de notions et à acquérir la pratique d'un raisonnement mathématique rigoureux. L'étudiant ne dispose pour cela que de douze semaines d'enseignement par semestre.

Bien que l'abandon des cours magistraux ait rapproché les enseignants des étudiants et que la part du contrôle continu soit devenue plus importante, les étudiants sont moins encadrés que les élèves de lycée ou de classe préparatoire. Une certaine autonomie et du travail personnel sont nécessaires pour réussir. Les étudiants sont soumis à une assez grande pression du fait de la courte durée des semestres d'enseignement, de la fréquence du contrôle continu et de l'obligation de passer une session d'examen à la fin de chaque semestre. Ils sont, de plus, confrontés à un saut conceptuel inattendu pour la plupart d'entre eux. Dès la première année, l'enseignement met l'accent sur le raisonnement logique et l'abstraction. Les théorèmes sont démontrés et la compréhension du cours est testée lors des examens.

Par ailleurs, pour beaucoup d'étudiants s'ajoutent à ces difficultés celles de nouvelles conditions de vie, loin de leur famille. Certains de nos étudiants sont dans la nécessité matérielle d'occuper un emploi salarié et doivent alors jongler entre les horaires de travail et ceux de cours. Ces étudiants arrivent rarement à dégager suffisamment de temps pour le travail personnel et ont beaucoup de peine à réussir leurs examens.

Les deux tableaux ci-dessous récapitulent les différentes matières enseignées en première année de licence de mathématiques et d'informatique et donnent, pour chacune d'elles, la forme du cours, l'horaire total, l'horaire hebdomadaire et le coefficient attribué pour le calcul de la note d'examen du semestre.

SEMESTRE 1 :

UE	**Type d'enseignement**	**Horaire semestriel**	**Horaire hebdo-madaire**	**Coef-ficient**
Analyse S1	Cours intégré	60 h	5 h	6
Algèbre S1	Cours intégré	60 h	5 h	6
Informatique S1 (algorithmique et programmation)	Cours intégré	38 h plus 22 h de TP	5 h	6
Physique S1 (mécanique)	Cours intégré	42 h	3 h 30	3
Langues S1	Cours intégré en centre de ressources	24 h	2 h	3
Méthodologie du travail universitaire	Cours intégré	12 h	6 séances de 2 h	3
Certificat informatique et internet (C2i)	Séances tuteurées	20 h	2 h	3

On peut remarquer que les coefficients des différentes UE ne correspondent pas à leur nombre d'heures d'enseignement et encore moins à l'importance que l'on attribuerait a priori aux différentes matières. Ces coefficients sont imposés par des règles de l'université qui stipulent que le nombre de crédits européens attribués par UE doit être égal au coefficient de celle-ci et à un multiple de 3.

Semestre 2 :

UE	Type d'enseignement	Horaire semestriel	Horaire hebdomadaire	Coefficient
Analyse S2	Cours intégré	60 h	5 h	6
Algèbre S2	Cours intégré	60 h	5 h	6
Informatique S2 (algorithmique et programmation)	Cours intégré	38 h plus 22 h de TP	5 h	6
Option S2 à choisir entre — *Géométrie* — *Informatique* — *Modélisation* — *Physique* — *Économie*	Cours intégré	36 h	3 h	3
Langues S2	Cours intégré en centre de ressources	24 h	2 h	3
Projet professionnel personnel	Cours et travaux dirigés	10 h		3
UE de découverte	Cours	20 h	1 h 30	3

Comme nous l'avons souligné plus haut, l'ensemble des enseignements est réparti sur deux fois 12 semaines de cours seulement. Selon ses options du second semestre, l'étudiant aura de 10 à 13 heures de mathématiques par semaine, et de 5 à 8 heures d'informatique, de 3 h 30 à 6 h 30 de physique, et de 4 h 30 à 7 heures d'enseignements non disciplinaires. Au total, cela fait 22 h 30 de cours par semaine, sur 24 semaines.

A titre de comparaison, les élèves de classes préparatoires (CPGE section MPSI) ont 30 heures de cours par semaine dont 12 heures de mathématiques sans compter les heures d'interrogation (« colles »), le tout sur 36 semaines, **soit exactement 50% d'heures de cours de plus qu'un étudiant de première année de licence de mathématiques et informatique !**

2.2. Les programmes de la première année au regard des programmes de première et terminale

Contrairement aux programmes du lycée, les programmes de licence ne sont pas nationaux. Même si l'on enseigne approximativement les mêmes choses durant les deux premières années dans les différentes universités, les approches sont laissées à l'entière initiative des enseignants, qui d'ailleurs concevront leurs examens en conséquence. Les programmes des cours sont sciemment succincts et il n'y a aucun document d'accompagnement. Lors d'un changement d'enseignant, l'approche peut changer du tout au tout. Dans le cas des cours intégrés, c'est l'équipe d'enseignants qui se concerte pour faire des choix pédagogiques similaires et préparer des épreuves de contrôle des connaissances communes.

Enfin, le grand nombre d'enseignants et le découpage en UE font paraître les différents cours comme cloisonnés de sorte que les étudiants perdent de vue l'unité des mathématiques.

Nous décrivons et commentons ci-dessous les contenus des UE *algèbre* S1, *analyse* S1, *algèbre* S2 et *analyse* S2. Notons que l'UE *méthodologie du travail universitaire* est également disciplinaire. On y travaille des notions transversales : structure des textes mathématiques, définitions, démonstrations, rédaction *etc.*

Programme d'algèbre du semestre 1

Algèbre linéaire (25 h)

— Pivot de Gauss sur des tableaux, application à la résolution des systèmes linéaires. Notion de variable libre, nombre de solutions.
En terminale S on est amené à résoudre des systèmes jusqu'à la dimension 3×3 *mais uniquement en liaison avec des problèmes de géométrie analytique.*

— Notation matricielle, calcul matriciel (somme, produit), inversion d'une matrice carrée à l'aide de la méthode du pivot. Réinterprétation des systèmes en terme de produits de matrice et vecteur.
La notation matricielle est introduite de façon anecdotique seulement en spécialité mathématiques de la filière ES. Elle n'est pas vue en terminale S.

— Déterminant pour les matrices de dimension 2 et 3, formules de Cramer.
Ces formules ne sont pas au programme du lycée.

— Équation cartésienne de droites et de plans, étude de leurs intersections.
Cette partie du programme est entièrement traitée en terminale S. De fait, elle est souvent éludée en première année de licence.

Arithmétique de $\mathbb{Z}$ (25 h)

— Définition d'un anneau, notion de divisibilité. Etude de $\mathbb{Z}$: plus grand commun diviseur, plus petit commun multiple, division euclidienne, théorèmes de Bézout et de Gauss, théorèmes de résolution des équations diophantiennes de la forme $ax + by = c$. Décomposition en produit d'entiers premiers.
Ce point fait partie du programme de l'enseignement de spécialité en mathématiques suivi par certains élèves de terminale S. Les notions de pgcd, ppcm, les théorèmes de Gauss et de Fermat y sont énoncés.

— Définition d'une relation d'équivalence. Congruences. Définition des anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (on n'introduit pas la notion d'ensemble quotient en toute généralité). Inversibilité des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, théorème chinois.
Ces notions ne sont pas au programme du lycée.

Polynômes (10 h)

— Définition de l'anneau des polynômes d'une variable à coefficients dans un corps, division euclidienne, racines et factorisation. Décomposition en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ (on rappelle que les nombres complexes ont été traités au début du cours d'analyse).
Au lycée, les polynômes n'apparaissent que sous la forme de fonctions polynomiales. L'égalité de deux polynômes n'est abordée que sous forme de condition suffisante d'égalité des coefficients. De plus, un élève n'est pas censé savoir que, si α est racine d'un polynôme, celui-ci se factorise par $(X-\alpha)$.

Dans la pratique, la plupart des enseignants commencent le cours d'algèbre par une introduction à la logique, bien que ce point ne soit plus explicitement spécifié dans le programme (nous comparons avec le programme du DEUG de 1995). Des notions de logique et de théorie des ensembles sont également abordées en cours de méthodologie. Un texte « mode d'emploi » traitant des ensembles, des connecteurs logiques et de leurs différents emplois ainsi que de la structure du discours mathématique est distribué aux étudiants à cette occasion.

Programme d'algèbre du semestre 2

Cette partie du programme est entièrement nouvelle pour les étudiants issus de terminale.

— Définition d'un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, sous-espaces vectoriels. Exemples : $\mathbb{K}^n$, $M_{n,p}(\mathbb{K})$; espaces de fonctions ; espaces de polynômes, espaces fonctionnels.

— Familles libres, génératrices, bases. Lien entre liberté et déterminant pour les familles de n vecteurs dans $\mathbb{K}^n$ $(n=2,3)$.

— Dimension, dimension d'un sous-espace vectoriel. Description des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ $(n=0,...,3)$.

— Opérations sur les sous-espaces vectoriels : somme, intersection. Supplémentaire, somme directe. Liens avec la dimension.

— Applications linéaires. Structure d'espace vectoriel sur $\mathcal{L}(E,F)$, composition d'applications linéaires. $\mathcal{L}(E)$ est un anneau.

— Exemples d'applications linéaires : projecteurs, symétries. Rotations dans le plan. Exemples d'endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$: dérivations, produits.

— Noyau, image d'une application linéaire. L'application linéaire φ est injective si et seulement si $\mathrm{K}er(\varphi)=0$.

— Rang d'une application linéaire, théorème du rang.

— Matrice d'une application linéaire relativement à des bases de E et F. L'application $\mathcal{L}(E,F)\to M_{n,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Matrice d'une composée d'applications linéaires.

— Automorphisme linéaires de E : critères équivalents pour que $f \in \mathcal{L}(E)$ soit inversible (rang, noyau). L'inverse de f est alors dans $\mathcal{L}(E)$. Le groupe $GL(E)$.

— Matrices inversibles : critères pour qu'une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ soit inversible (rang, noyau). Le groupe $GL_n(\mathbb{K})$. Lien avec $GL(E)$.

— Changement de base : matrices de passage, effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire.

Programme d'analyse du semestre 1

Les points étoilés (*) sont abordés en section S au lycée.

Les nombres complexes

— Vocabulaire*, écriture cartésienne de l'inverse*, calculs*, produits remarquables*, binôme de Newton*, résolutions d'équations* et de systèmes linéaires*.

— Conjugué*, module*, interprétation géométrique dans le plan orienté*, forme trigonométrique*, règles de calcul associées*, notation exponentielle*, formules d'Euler et de Moivre*, linéarisation de $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$.

— Racines carrées (forme cartésienne et trigonométrique), équations du second degré dans $\mathbb{C}$, racines n-ièmes. Applications à la trigonométrie élémentaire.

Seule la résolution des trinômes de degré 2 à coefficients réels est traitée en terminale. En particulier, on n'y parle pas de racine n-ième.

Analyse réelle

— Relation d'ordre total dans un ensemble non vide. Majorant, minorant, plus grand et plus petit élément ; illustration dans $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$. Définition de la borne sup (inf). Exemples et contre-exemples dans $\mathbb{Q}$.

— Intervalles de $\mathbb{R}$*, valeur absolue d'un réel (*cette notion disparaît du nouveau programme de seconde*), inéquations, encadrements*. $\mathbb{R}$ est archimédien, partie entière d'un réel, densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

— Les suites réelles. Exemples, sens de variation, convergence*. Suites géométriques*. Propriétés liées à l'ordre (théorèmes de comparaison)*. Opérations sur les suites*. Suites adjacentes*, suites monotones bornées*, suites extraites.

— Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Généralités : ensemble de définition*, sens de variation sur un intervalle*, extremum* local (*les extrema considérés au lycée sont soit globaux, soit sur des intervalles bornés*), fonctions majorées*, minorées*, représentation dans le plan*.

Limites à l'infini*, en un point*. *La limite en un point est utilisée au lycée sans être réellement définie.* Cas des fonctions monotones bornées.

Continuité en un point, caractérisation séquentielle, prolongement par continuité. Continuité sur un intervalle*, théorème des valeurs intermédiaires* : *ce théorème est admis en terminale S*. Image d'un segment. Cas des fonctions strictement monotones* (forme de l'intervalle image). Continuité de la bijection réciproque.

En terminale, le cas des fonctions continues strictement monotones est souvent rencontré. La lecture du tableau de variation est admise comme preuve de l'existence et de l'unicité d'une solution d'une équation $f(x) = a$.

Application : existence d'un point fixe et suites récurrentes.

Des études de suites définies par une récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ *sont traitées en terminale.*

— Dérivabilité. Définition de la dérivabilité en un point*, sur un intervalle* ; tangente en un point de la courbe*. Opérations sur les fonctions dérivables*.

— Théorème de Rolle et des accroissements finis. Application au sens de variation des fonctions sur un intervalle. Étude de fonctions. Inégalité des accroissements finis. Application à la convergence de suites récurrentes.
L'inégalité de la moyenne est vue en terminale.

— Dérivabilité de la bijection réciproque d'une fonction dérivable. Applications à la définition et à l'étude des fonctions $\arcsin, \arccos, \arctan$. Fonctions hyperboliques et réciproques.
On peut remarquer ici que ces fonctions ne sont pas introduites au lycée, où même les fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ *ne sont pas étudiées de manière systématique.*

— Convexité.

Programme d'analyse du semestre 2

— Développements limités (DL). Dérivées successives. Formules de Taylor.
Au lycée, on aborde les développement à l'ordre 1, en relation avec la dérivée et la méthode d'Euler.

— Formule de Taylor-Young au voisinage d'un point. Formules de Mac-Laurin. Application aux fonctions standard. Notation de Landau.

— Développements limités en un point. Définition. Exemple de fonction admettant un DL en un point sans vérifier les hypothèses de Taylor-Young. Opérations sur les DL. Application aux études locales de fonctions.

— Développements asymptotiques en $\frac{1}{x}$ au voisinage de l'infini : définition, exemples, application aux études de branches infinies d'une courbe.
L'élève de terminale doit être capable de déterminer les asymptotes verticales ou horizontales ainsi que de prouver qu'une droite donnée est une asymptote oblique.
Application aux études de suites.

— Calcul intégral* (*l'intégrale est définie comme une aire en terminale S*). Intégrale de Riemann, propriétés de l'intégrale* (*l'intégration par parties est au programme de la terminale S*). Théorème de la moyenne*. Calcul de primitives*. Application aux sommes de Riemann et aux suites dont le terme général est une intégrale.

L'étude d'une suite définie par une intégrale, généralement $u_n = \int_0^n f(t)dt$, est un exercice classique de terminale S, d'ailleurs plutôt perçu comme difficile par les élèves.
Application à la résolution d'équations différentielles simples (linéaires, à variables séparables...) ou s'y ramenant. *En terminale S, on résout les équations linéaires du premier ordre à coefficients constants.*

2.3. Le contrôle des connaissances

Rappelons que les enseignements sont regroupés par semestre. A l'issue de chaque semestre un jury composé d'enseignants du semestre délibère sur l'acquisition de celui-ci. L'étudiant acquiert un semestre lorsqu'il obtient une moyenne générale supérieure à 10. Lorsque le semestre n'est pas acquis, l'étudiant garde le bénéfice des UE pour lesquelles il a obtenu une note supérieure ou égale à 10.

Les notes des UE sont elles-mêmes des moyennes de notes de contrôle continu et/ou de notes d'épreuves d'examen terminal. Les examens terminaux prennent généralement la forme d'une épreuve écrite de deux heures. Les épreuves de contrôle continu sont plus variées : « devoirs maison », courtes interrogations écrites spécifiques à un groupe, épreuves écrites régulières communes à la promotion.

En comparant à la situation de 1995, nous constatons que le contrôle continu a pris une place plus importante en licence. Les pratiques tendent à se rapprocher de celles du lycée et vont même au delà puisqu'en première année les matières de mathématiques sont sanctionnées uniquement par du contrôle continu.

Le taux de réussite au premier semestre 2008 a été de 33%. Si l'on retranche à l'effectif des étudiants celui des étudiants absents aux examens, le taux de réussite réel s'élève à 47%. Notons que ce semestre n'avait pas bénéficié des mesures décrites plus haut : l'orientation active, le semestre 0, les séances tuteurées.

En guise de conclusion ...

Les continents ont-ils inexorablement poursuivi la dérive annoncée, avec une certaine inquiétude, en 1995 ? Peut-être pas ...

Certes, étudier les mathématiques à l'université représente toujours un changement fondamental auquel l'enseignement secondaire ne prépare que partiellement les élèves pour diverses raisons : d'une matière parmi d'autres au lycée, les mathématiques deviennent le sujet d'étude principal en licence de mathématiques-informatique ; par ailleurs, certains outils techniques comme les méthodes de calcul ne sont pas toujours bien maîtrisés (*tempus fugit* ...) tandis que certaines notions conceptuelles (formalisme des ensembles, bases solides de la logique) ne font pas à proprement parler partie du bagage du bachelier arrivant en licence.

Cependant, les deux mondes se sont indéniablement rapprochés. L'enseignement des mathématiques dans le secondaire a commencé à réhabiliter la démonstration, préparant ainsi mieux le terrain pour les cours dispensés à l'université. Depuis quelques années, les étudiants de première année de licence semblent d'ailleurs moins perplexes de voir la place fondamentale qu'elle prend dans un cours de mathématiques. De son côté, l'université a fait des efforts pour rapprocher les cours de première année de ce que les étudiants ont connu au lycée, par la mise en place de cours intégrés et une évaluation tenant compte du contrôle continu. La forme restant familière, les étudiants peuvent en principe mieux se concentrer sur le fond.

Ce constat nous rend prudemment optimistes : les choses semblent moins préoccupantes que le titre d'il y a quinze ans le laissait entendre. Il reste que nous regrettons tous la diminution régulière du nombre d'heures d'enseignement de mathématiques dans le secondaire.

Toutefois, même si les continents se rapprochent, les habitants de chacun d'eux ignorent souvent ce qui se passe de l'autre côté de l'océan. Combien d'enseignants du supérieur ou du secondaire se contentent de leurs souvenirs de lycée ou d'université ? Nous ne pouvons qu'encourager chacun à aller à la rencontre de ses collègues de « l'autre rive ».

Nous pourrions, par exemple, conseiller à nos collègues enseignants dans les premières années de licence de prendre connaissance des programmes de première et terminale S, d'autant plus que ceux-ci sont actuellement en train de changer, et de consulter quelques manuels scolaires ainsi que les sujets récents de baccalauréat.

Les enseignants du secondaire pourraient peut-être profiter des manifestations organisées par l'université en direction des lycéens (visites dans les lycées, Journées des universités, Journées « portes ouvertes », ...) pour rencontrer leurs collègues du supérieur. Nous avons découvert, lors des séances de travail de notre groupe Irem, combien il était profitable de se parler plus souvent.

Bibliographie

[1] L. Blasco, A. Didierjean, C. Kahn, V. Kharlamov, B. Koch, D. Weil (1995), La dérive des continents, *Repères* **20**, 61–70 et *L'Ouvert* **78**, 48–58.

[2] Ministère de l'éducation nationale (2001), Programme de l'enseignement des mathématiques en classe terminale de la série scientifique, `http://www.education.gouv.fr/bo/2001/hs4/default.htm`

[3] UFR de mathématique et d'informatique (2009), Programme des licences de sciences, mention mathématiques et parcours MPA, `http://mathinfo.unistra.fr`

François Dreyfuerst, Lycée Stanislas de Wissembourg
Claude Mitschi , Université de Strasbourg
Hélène Tanoh, Lycée Blaise Pascal de Colmar
Christine Vespa, Université de Strasbourg
Marc Wambst, Université de Strasbourg
Dominique Weil, Lycée International de Strasbourg