Entre mathématiques et littérature : les nombres de Queneau

Vanessa Vallet

Résumé : *La belle Hortense*, roman de Jacques Roubaud, comporte, en plus de l'histoire purement littéraire, un fondement mathématique. Nous en relevons différents indices et montrons en quoi un nombre assez conséquent d'empreintes numériques s'unifient autour des nombres de Queneau. À l'aide de l'arithmétique élémentaire nous donnons deux caractérisations de ces nombres.

Mots-clés : Arithmétique, littérature, nombre de Queneau, nombre de Sophie Germain, Jacques Roubaud.

Ce travail est la reproduction, quelque peu modifiée, de mon mémoire de première année de magistère de mathématiques, soutenu en 2009 à l'université de Strasbourg sous la direction de Michèle Audin.

Introduction

Tout comme Hortense [1], à vingt-deux ans, je consacre une partie de mon été à la rédaction d'un mémoire, celui-là même que vous êtes en train de lire. Et tout comme pour l'inspecteur Blognard [2], il s'agit aujourd'hui pour nous de résoudre une affaire. Non pas celle de la Terreur des Quincaillers dont est chargé d'enquête ce dernier dans le livre de Jacques Roubaud, mais celle de l'organisation de cette œuvre qu'est *La belle Hortense*.

Notre tâche consiste ainsi à relever dans ce roman tous les indices mathématiques et littéraires potentiellement utiles, en vue de les analyser et de les comparer avec l'espoir que ces traces laissées par l'auteur, unique suspect dont il ne nous reste plus qu'à déterminer le mobile et surtout le plan d'action, lèveront une partie du voile sur la structure de cet « acte » d'écriture.

Il est en effet indéniable que ce récit comporte, en plus de l'histoire purement littéraire, un fondement mathématique, une sorte de trame qui apparaît çà et là et que nous allons tenter de mettre en lumière. Plus précisément, nous montrerons en quoi un nombre assez conséquent d'empreintes numériques s'unifient autour des nombres de Queneau et donnent, plus ou moins discrètement, une valeur ajoutée à l'histoire elle-même.

1. Hortense est l'héroïne de *La belle Hortense*, [6].
2. Anselme Blognard est également un personnage de ce livre.

1. Sextine et permutation

Pour commencer, intéressons-nous au protagoniste qu'est Alexandre Vladimirovitch, le chat de Mme Eusèbe[3], qui très rapidement attire l'attention. En effet, d'une part un chapitre, le troisième, lui est entièrement dédié ; d'autre part, et c'est là la raison la plus importante de notre intérêt, le récit de ses amours fait l'objet d'une narration particulière, une sorte d'histoire dans l'histoire écrite avec une typographie caractéristique puisqu'en italique, à la fin de certains chapitres bien choisis, ce qui le met de manière très explicite en valeur. Mais attardons-nous davantage sur le choix de ces chat-pitres.

La belle Hortense est constituée de
- vingt-huit chapitres,
- trois entre-deux chapitres qui permettent de les répartir par groupes de sept chapitres,
- un après-dernier chapitre, qui se situe, comme son nom l'indique, après le dernier chapitre, c'est-à-dire après le vingt-huitième.

Ceux dont la fin est consacrée à Alexandre Vladimirovitch sont
- le premier entre-deux-chapitres,
- les chapitres 9 et 11,
- le deuxième entre-deux-chapitres,
- les chapitres 18, 23 et 26.

Alors pourquoi cette suite bien précise de nombres ? Pour répondre à cette question, considérons les origines poldèves d'Alexandre Vladimirovitch : la principauté de Poldévie compte six héritiers, de sorte qu'a été mis en place un ingénieux processus de succession[4], grâce à une permutation dont le Premier Prince, Arnaut Danieldzoï, aurait eu l'idée. Derrière ce nom poldévisé par Jacques ROUBAUD se dissimule clairement le poète provençal du Moyen-Âge, Arnaut DANIEL, de l'œuvre duquel il nous reste à ce jour peu de choses, si ce n'est le célèbre poème suivant, accompagné ici d'une traduction littérale due à Jacques ROUBAUD [7].

Ce poème, composé de six strophes de six vers chacune (sans prendre en compte les trois derniers vers qui constituent un envoi, sorte de signature du poète), utilise en tout et pour tout six « mots-rimes » — intra, ongla, arma, verja, oncle, cambra — qui sont repris à chaque strophe dans un ordre différent. C'est précisément sur cette particularité de la rime que va porter notre étude et non pas sur la métrique elle-même.

Dans un premier temps, on associe à chaque mot-rime un nombre en fonction de sa place dans la première strophe. Puis on identifie chaque vers au mot-rime qui le termine. De sorte que si l'on parle du vers p de la strophe q, il s'agit en fait du vers de la strophe q qui se termine par le mot-rime p, c'est-à-dire le mot-rime se trouvant en p-ième position dans la première strophe.

On peut ainsi définir une permutation qui à chaque mot-rime d'une strophe associe son image dans la strophe suivante, autrement dit le mot-rime situé au

3. Edwige Eusèbe, de son vrai prénom Bertrande, fait aussi partie de ce roman : avec son mari, elle tient une épicerie.
4. Voir la citation en page 21.

Lo ferm voler qu'el cor m'intra
no'm pot ges becs escoissendre ni ongla
de lauzengier qui pert per mal dir s'arma ;
e pus no l'aus batr'ab ram ni verja,
sivals a frau, lai on non aurai oncle,
jauzirai joi, en vergier o dins cambra.

Quan mi sove de la cambra
on a mon dan sai que nulhs om non intra
— ans me son tug plus que fraire ni oncle —
non ai membre no'm fremisca, neis l'ongla,
aissi cum fai l'enfas devant la verja :
tal paor ai no'l sia prop de l'arma.

Del cor li fos, non de l'arma,
e cossentis m'a celat dins sa cambra,
que plus mi nafra'l cor que colp de verja
qu'ar lo sieus sers lai ont ilh es non intra :
de lieis serai aisi cum carn e ongla
e non creirai castic d'amic ni d'oncle.

Anc la seror de mon oncle
non amei plus ni tan, per aquest'arma,
qu'aitan vezis cum es lo detz de l'ongla,
s'a lieis plagues, volgr'esser de sa cambra :
de me pot far l'amors qu'ins el cor m'intra
miels a son vol c'om fortz de frevol verja.

Pus floric la seca verja
ni de n'Adam foron nebot e oncle
tan fin'amors cum selha qu'el cor m'intra
non cug fos anc en cors no neis en arma :
on qu'eu estei, fors en plan o dins cambra,
mos cors no's part de lieis tan cum ten l'ongla.

Aissi s'empren e s'enongla
mos cors en lieis cum l'escors'en la verja,
qu'ilh m'es de joi tors e palais e cambra ;
e non am tan paren, fraire ni oncle,
qu'en Paradis n'aura doble joi m'arma,
si ja nulhs hom per ben amar lai intra.

Arnaut tramet son chantar d'ongl'e d'oncle
a Grant Desiei, qui de sa verj'a l'arma,
son cledisat qu'apres dins cambra intra.

La ferme volonté qui au cœur m'entre
ne peut ni langue la briser ni ongle
de médisant qui perd à mal dire son âme
n'osant le battre de rameau ni de verge
sinon en fraude là où je n'ai nul oncle
je jouirai de ma joie en verger ou chambre

Quand je me souviens de la chambre
où pour mon mal je sais que nul homme n'entre
mais tous me sont pires que frère ou qu'oncle
tremblent tous mes membres jusqu'à l'ongle
ainsi que fait l'enfant devant la verge
tant j'ai peur de n'être assez sien dans mon âme

Ah que je sois sien dans le corps non dans l'âme
et qu'elle m'accueille en secret dans sa chambre
plus me blesse le cœur que coup de verge
d'être son serf qui là où elle est n'entre
toujours je serai près d'elle comme chair et ongle
n'écoutant aucun reproche d'ami ni oncle

Jamais la sœur de mon oncle
je n'aimerai tant ou plus par mon âme
aussi proche qu'est le doigt de l'ongle
s'il lui plaisait je voudrais être de sa chambre
il peut faire de moi l'amour qui en mon cœur entre
à son gré comme homme un fort de faible verge

Depuis qu'a fleuri la sèche verge
que du seigneur Adam sont nés neveu et oncle
un amour qui comme celui qui dans mon cœur entre
je ne crois qu'il a été en corps ni âme
où qu'elle soit sur la place ou dans la chambre
mon cœur sera moins loin que l'épaisseur d'un ongle

Qu'ainsi s'enracine devienne ongle
mon cœur en elle comme écorce en la verge
elle m'est de joie tour et palais et chambre
je n'aime tant frère parent ni oncle
en paradis aura double joie mon âme
si jamais homme, d'avoir aimé y entre

Arnaut envoie sa chanson d'ongle et d'oncle
pour plaire à celle qui de sa verge à l'âme
son Désiré son prix entre en sa chambre

même vers, mais dans la strophe d'après : cela permet de déduire les mots-rimes d'une strophe à partir de ceux de la précédente. En particulier, dans le poème d'Arnaut Daniel, la permutation en question est la suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cette permutation régit non seulement le passage de la première à la deuxième strophe, mais également plus généralement le passage de n'importe quelle strophe à celle qui la suit. Et il y a plus encore car lorsqu'on l'itère une sixième fois, et pas avant, on retrouve exactement l'enchaînement initial des mots-rimes : σ est donc d'ordre 6.

On retrouve d'ailleurs dans cette permutation la loi qui régit la succession des princes poldèves comme nous la décrit Roubaud :

> *L'ordre de préséance parmi les Princes était modifié à chaque génération, suivant une permutation fixée immuablement depuis le XIII^e siècle [...] : le fils aîné du Premier Prince Régnant devenait deuxième dans l'ordre hiérarchique [...], l'héritier (ou héritière) du deuxième quatrième, le troisième passait en sixième position, le quatrième en cinquième et le cinquième devenait second ; quant au successeur du Sixième Prince (fille ou garçon), il se retrouvait premier ; de cette façon [...] chaque famille occupait successivement chaque place dans la hiérarchie. L'ordre initial, celui du Premier Prince (Arnaut Danieldzoï), était rétabli au bout de six générations.*

Il y a certes une petite « erreur », si l'on peut employer ce terme, sûrement intentionnelle, mais qui ne perturbe pas notre raisonnement dans la mesure où l'on retrouve quelques autres petites incohérences au fil du texte, et où celle-ci se résout aisément en remplaçant « second » par « troisième ». A cela s'ajoute le fait que le XIII^e siècle correspond effectivement à l'époque d'Arnaut DANIEL. Et c'est sans compter l'analogie frappante entre la structure de ce poème et celle de la chaconne de Telemann, morceau que choisit de jouer à l'occasion de l'inauguration de la chapelle poldève son organiste, le père Sinouls [5], qui évoque lui-même son originalité en ces termes :

> *C'est une chaconne en trente-six variations, mais au lieu de varier simplement la mélodie, comme d'habitude [...], il utilise en fait six morceaux mélodiques pratiquement indépendants, puis il les fait tourner les uns après les autres d'une manière d'ailleurs assez compliquée mais fort plaisante, ça met en valeur tous les jeux, mais le plus fort, c'est qu'il s'arrête juste au moment où, s'il continuait, on retrouverait la mélodie de départ.*

Cela nous conforte dans la pensée que cette permutation joue un rôle prépondérant au sein du roman : il semble que nous soyons sur la bonne voie !

Vient dès lors l'idée de considérer la permutation σ_n suivante, appelée *permutation spirale*, appartenant à $\mathfrak{S}_n$, le groupe des bijections de $\{1,\dots,n\}$ dans lui-même et définie comme suit :

$$\begin{cases} \sigma_n(2p) = p\,, \\ \sigma_n(2p+1) = n-p\,. \end{cases}$$

Cette permutation σ_n est en effet une généralisation à n quelconque de la permutation structurant le poème d'Arnaut DANIEL (pour $n=6$, on a bien $\sigma_6=\sigma$). C'est Raymond QUENEAU [6] qui l'avait suggérée en se demandant si, pour n'importe quel entier n, on pouvait construire un tel poème, s'appuyant sur le fait que, pour tous k et $i \in \{1,\dots,n\}$ l'image $\sigma_n^k(i)$ correspondrait au mot-rime concluant le vers i de la strophe $k+1$.

5. Le nom du *Père Sinouls*, personnage du récit, est d'ailleurs, à un r près, une anagramme de *Pierre Lusson*, grand ami de Jacques ROUBAUD et auteur d'une théorie du rythme.

6. L'écrivain Raymond QUENEAU, auteur d'*Exercices de style*, est un des fondateurs de l'*Oulipo*, où, par l'élaboration de contraintes, mathématiques et littérature se rencontrent. C'est à l'Oulipo qu'il a exposé cette idée, qui a été reprise dans diverses publications de ce groupe.

Considérons le groupe $G_n = \{id, \sigma_n, \sigma_n^2, \dots\}$ engendré par σ_n que l'on appelle le groupe de Queneau-Daniel. C'est un sous-groupe du groupe $\mathfrak{S}_n$ des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$. On note $|G_n|$ le nombre d'éléments de G_n.

Répondre à la question de QUENEAU revient à chercher les entiers n tels que $|G_n| = n$ ou, ce qui est équivalent, tels que σ_n soit d'ordre n c'est-à-dire

$$\sigma_n^n = id \text{ et si } 0 < k < n, \text{ alors } \sigma_n^k \neq id$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\sigma_n^n = id \text{ et si } 0 < k < n, \text{ alors il existe un } i \in \{1, \dots, n\} \text{ tel que } \sigma_n^k(i) \neq i.$$

En effet, si $|G_n| \geq n$, cela implique que l'on peut construire (au moins) n strophes dont l'enchaînement des n mots-rimes soit toujours différent. Leur succession dans le poème prendra alors la forme suivante :

$$\begin{array}{ccccc}
1^{\text{re}} \text{ strophe} & 2^{\text{e}} \text{ strophe} & 3^{\text{e}} \text{ strophe} & \cdots & n^{\text{e}} \text{ strophe} \\
\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sigma_n(1) \\ \sigma_n(2) \\ \vdots \\ \sigma_n(n) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sigma_n^2(1) \\ \sigma_n^2(2) \\ \vdots \\ \sigma_n^2(n) \end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix} \sigma_n^{n-1}(1) \\ \sigma_n^{n-1}(2) \\ \vdots \\ \sigma_n^{n-1}(n) \end{pmatrix}
\end{array}$$

En particulier, si $|G_n| = n$ exactement, le poème identifié à ses mots-rimes sera en quelque sorte unique à permutation des strophes près. Dans ce cas n sera appelé un *nombre de Queneau* ; le poème en résultant, quant à lui, sera désigné par le terme n-ine ou encore *quenine* d'ordre n.

Par exemple, 6 est un nombre de Queneau, comme nous l'avons vu. Le nombre 3 est lui aussi un nombre de Queneau, les ordres successifs de trois mots-rimes étant $1, 2, 3$, puis $3, 1, 2$ et enfin $2, 3, 1$, avant de retrouver l'ordre de départ.

2. Une première caractérisation des nombres de Queneau

L'étude mathématique qui suit est essentiellement basée sur les articles [1] et [2]. Nous supposons que $n \geq 2$. Aussi, σ_n étant une bijection de $\{1, \dots, n\}$ dans lui-même, on peut considérer son inverse δ_n. Poétiquement, cela revient à partir de la dernière strophe :

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 2x \leq n\,, \\ 2n + 1 - 2x & \text{sinon, c'est-à-dire pour } n < 2x \leq 2n\,. \end{cases}$$

Dans ce cas, on peut considérer les entiers modulo $2n+1$, de sorte que l'on a, pour tout x,

$$\delta_n(x) \equiv \pm 2x \; [2n + 1]\,.$$

Autrement dit, modulo $2n + 1$, δ_n est la multiplication par ± 2. On en déduit par récurrence l'itéré i-ième

$$\delta_n^i(x) \equiv \pm 2^i x \; [2n + 1]\,.$$

À partir de cette petite propriété, on peut déjà établir une première condition nécessaire pour qu'un entier n soit un nombre de Queneau.

Proposition. *Si n est un nombre de Queneau, alors σ_n est un cycle.*

Avant de passer à la démonstration, voici un exemple de permutation d'ordre n (ici $n = 6$) qui n'est pas un cycle.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Cette permutation est le produit de trois cycles que l'on écrit ainsi

$$\sigma = (1)(2\ 3)(4\ 5\ 6)\,.$$

Démonstration

- Commençons par remarquer que, pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$, on a les équivalences

$$\sigma \text{ est d'ordre } n \Longleftrightarrow \sigma^{-1} \text{ est d'ordre } n\,,$$
$$\sigma \text{ est un cycle } \Longleftrightarrow \sigma^{-1} \text{ est un cycle }\,.$$

  Pour démontrer la seconde équivalence (la première est évidente) on suppose que σ est un cycle d'ordre p contenant un élément a et on note

$$\sigma = \Big(a, \sigma(a), \sigma^2(a), \ldots, \sigma^{p-1}(a)\Big)\,.$$

  En appliquant successivement σ^{-1} à l'égalité $a = \sigma^p(a)$ on obtient les égalités $\sigma^{-1}(a) = \sigma^{p-1}(a)$, $\left(\sigma^{-1}\right)^2(a) = \sigma^{p-2}(a)$, $\ldots$, $\left(\sigma^{-1}\right)^{p-1}(a) = \sigma(a)$ et pour finir $\left(\sigma^{-1}\right)^p(a) = a$ d'où l'on déduit que σ^{-1} est un cycle d'ordre p qui s'écrit

$$\sigma^{-1} = \Big(a, \sigma^{p-1}(a), \sigma^{p-2}(a), \ldots, \sigma(a)\Big)\,.$$

- La proposition à démontrer est donc équivalente au résultat ci-dessous

  Si la permutation δ_n est d'ordre n alors c'est un cycle.

  Comme l'expression de $\delta_n = \sigma_n^{-1}$ est plus simple à utiliser que celle de σ_n, c'est ce résultat que nous démontrerons.

- Comme toute permutation, δ_n se décompose en produit de cycles disjoints (voir [3] page 14) que l'on peut écrire ainsi

$$\delta_n = d_1 d_2 \cdots d_k \text{ où } d_j \text{ est un cycle d'ordre } |d_j|\ (j = 1, \ldots, k,)\,.$$

  D'une part l'ordre de δ_n est le ppcm des $|d_j|$ et, d'autre part, les d_j sont des cycles disjoints qui permutent $|d_j|$ éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Puisque, par hypothèse, l'ordre de δ_n est n on obtient

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{k} |d_j| \leqslant n = \operatorname{ppcm}\left(|d_j|\right)\,.$$

- Quitte à permuter les cycles, notons d_1 le cycle qui contient 2. Par définition de δ_n on a $\delta_n(1) = 2$ (car n est supposé $\geqslant 2$) et comme l'ordre de d_1 est $|d_1|$ on obtient
$$\delta_n(1) = 2 = \delta_n(2)^{|d_1|} \text{ ce qui implique } 1 = \delta_n(2)^{|d_1|-1} .$$
En utilisant l'expression explicite de δ_n on a alors
$$1 \equiv \pm 2^{|d_1|} \; [2n+1] .$$
- On en déduit que pour tout $x \in \{1, \ldots, n\}$ on a
$$\delta_n^{|d_1|}(x) \equiv 2^{|d_1|} x \equiv \pm x \; [2n+1] .$$
Une famille de représentants de $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ est donnée par les entiers $\{-n, -(n-1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-1, n\}$. Comme x appartient à $\{1, \ldots, n\}$, $-x$ appartient à $\{-n, \ldots, -1\}$ et ne peut donc pas être congru à x modulo $2n+1$. Comme $\delta_n^{|d_1|}(x)$ appartient lui aussi à $\{1, \ldots, n\}$, on en déduit que
$$(**) \qquad \forall x \in \{1, \ldots, n\} \; \delta_n^{|d_1|}(x) = x .$$
- Revenons à la décomposition de δ_n en cycles. La formule $(**)$ implique que l'ordre de chacun de ces cycles divise $|d_1|$ d'où
$$n = \mathrm{ppcm}\,(|d_j|) = |d_1| .$$
Or nous savons par $(*)$ que
$$n \geqslant |d_1| + \sum_{j=2}^{k} |d_j| .$$
Ceci implique que, pour $j \geqslant 2$, tous les $|d_j|$ sont nuls et donc que δ_n est égal au cycle d_1. L'inverse de la permutation spirale et donc la permutation spirale elle-même est bel et bien un cycle. □

Nous pouvons donc à ce stade éliminer tous les entiers qui ne vérifient pas la condition selon laquelle σ_n doit être un cycle (d'ordre n).

Exemple. 4 *n'est pas un nombre de Queneau.*

En effet : $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1,4,2)(3)$ qui n'est pas un cycle puisque composé de deux cycles à supports disjoints. L'entier 4 n'est par conséquent pas un nombre de Queneau : il n'existe pas de *catherines* !

Néanmoins, le caractère cyclique des permutations « quenesques » ne s'arrête pas là, puisqu'on dispose même de l'équivalence suivante :

Théorème. *L'entier n est un nombre de Queneau si et seulement si σ_n est un cycle (de longueur n).*

Démonstration : Il ne nous reste plus qu'à prouver la proposition réciproque. Supposons pour cela que σ_n est un cycle :

- s'il est de longueur n, alors il est d'ordre n et donc n est un nombre de Queneau,
- s'il est de longueur $< n$, alors il est d'ordre $< n$ et donc n n'est pas un nombre de Queneau. $\square$

Mais revenons-en à la sextine d'Arnaut DANIEL. Lorsque l'on observe plus précisément les mots-rimes et l'ensemble des places qu'occupe chacun d'eux, on remarque que sur la totalité du poème un mot-rime n'est jamais deux fois au même endroit d'une strophe. Surgit alors la question suivante : tous les poèmes construits avec un nombre de Queneau possèdent-ils cette particularité ? Autrement dit, est-ce une conséquence du fait que σ_n est un cycle ? Voire une équivalence ? Ou bien est-ce fortuit que cela se passe ainsi pour l'entier 6 ?

Pour répondre à ces interrogations, il convient d'étudier les itérées de σ_n, leur caractère cyclique et surtout l'existence ou non, pour elles, de points fixes.

Remarque. De manière générale, pour toute permutation σ et quel que soit l'entier $k \neq 0$ ou 1, le fait que σ est un cycle n'implique pas que σ^k est un cycle. Autrement dit, σ peut très bien être un cycle sans que toutes ses puissances en soient.

Exemple. $\sigma = (1,2,3,4)$ est un cycle mais $\sigma^2 = (1,2,3,4)(1,2,3,4) = (1,3)(2,4)$ se décompose en deux cycles disjoints, donc n'est pas un cycle. D'ailleurs plus généralement encore, si n est pair, $n = 2k$, alors tout cycle σ d'ordre n est tel que σ^k est d'ordre 2 et de longueur n, de sorte que σ^k n'est jamais un cycle, puisque l'ordre d'un cycle est toujours égal à sa longueur !

On a toutefois la conséquence suivante :

Lemme. *L'entier n n'est pas un nombre de Queneau si et seulement si il existe un $p \in \{1,\dots,n-1\}$ pour lequel σ_n^p admette un point fixe.*

Démonstration : Vu le théorème précédent, n est un nombre de Queneau si et seulement si σ_n est un cycle d'ordre n, c'est-à-dire une permutation circulaire de $\{1,\dots,n\}$. C'est équivalent à ce que $\{1,\dots,n\} = \{1,\sigma_n(1),\dots,\sigma_n^{n-1}(1)\}$. C'est-à-dire que pour tout k dans $\{1,\dots,n\}$, il existe un unique p dans $\{0,\dots,n-1\}$ tel que $k = \sigma_n^p(1)$, autrement dit tel que le mot-rime k se trouve au vers 1 dans la strophe $p+1$. Or en fait

$$\begin{aligned}\{1,\sigma_n(1),\dots,\sigma_n^{n-1}(1)\} &= \{2,\sigma_n(2),\dots,\sigma_n^{n-1}(2)\}\\ &= \dots\\ &= \{n,\sigma_n(n),\dots,\sigma_n^{n-1}(n)\}.\end{aligned}$$

De sorte que l'on peut écrire que n est un nombre de Queneau si et seulement si

$$\forall i \in \{1,\dots,n\}, \forall k \in \{1,\dots,n\}, \exists! p \in \{0,\dots,n-1\} \text{ tel que } k = \sigma_n^p(i). \tag{1}$$

En particulier, pour $k = i$, comme $i = \sigma_n^0(i)$, il vient que pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ et tout $p \in \{1,\dots,n-1\}$ on a $i \neq \sigma_n^p(i)$, c'est-à-dire que σ_n^p n'admet pas de point fixe pour $p \in \{1,\dots,n-1\}$.

- Ainsi n nombre de Queneau implique que pour tout $p \in \{1, \dots, n-1\}, \sigma_n^p$ n'admet pas de point fixe. Soit, par contraposée : si il existe $p \in \{1, \dots, n-1\}$ pour lequel σ_n^p admet un point fixe, alors n n'est pas un nombre de Queneau.
- Réciproquement, supposons que n ne soit pas un nombre de Queneau. Alors vu (1),

$$\begin{cases} \exists i \in \{1, \dots, n\}, \exists k \in \{1, \dots, n\} \\ \exists\ p \text{ et } q \in \{1, \dots, n-1\} \text{ avec } p \neq q \end{cases} \quad \text{tels que } k = \sigma_n^p(i) = \sigma_n^q(i)\,.$$

En supposant $p > q$, on a ainsi $\sigma_n^{p-q}(i) = i$ avec p et $q \in \{0, \dots, n-1\}$ d'où $p - q \in \{1, \dots, n-1\}$. Donc il existe $r = p - q \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $\sigma_n^r(i) = i$ avec $i \in \{0, \dots, n\}$, c'est-à-dire tel que σ_n^r admette un point fixe.□

Corollaire. *L'entier n est un nombre de Queneau si et seulement si σ_n est un cycle de longueur n, ce qui équivaut également à ce qu'aucun des σ_n^p n'ait de point fixe, et ce pour tout $p \in \{1, \dots, n-1\}$.*

Appelons *orbite poétique d'un mot-rime* l'ensemble des vers où se trouve ce mot sur l'ensemble des strophes. L'orbite, au sens de σ_n, d'un mot-rime, identifié au vers auquel il se situe dans la première strophe du poème, est l'ensemble des mots-rimes qui se trouvent à ce vers sur l'ensemble des strophes.

Or le fait que ni σ_n, ni ses composées successives σ_n^p n'admettent de point fixe signifie que, « poétiquement », l'orbite de chacun des vers contient, sur l'ensemble du poème, tous les mots-rimes en un seul exemplaire, c'est-à-dire encore que chaque mot-rime se trouve une et une seule fois à un endroit donné de la strophe dans l'ensemble du poème.

Et par conséquent, n est un nombre de Queneau si et seulement si cette caractéristique structurelle du poème est réalisable, ce qui répond à notre questionnement précédent : toutes les n-ines possèdent cette particularité, et si elles ne la possèdent pas, alors d'ordre n sont-elles une quenine ? Que nenni !

Toutefois, la quête des nombres de Queneau par l'observation de σ_n et de ses composées se révèle être assez fastidieuse dès lors que n devient trop grand. Pour pallier ce petit problème, il existe un autre théorème qui les caractérise : c'est justement l'objet du paragraphe qui suit que d'aboutir à sa démonstration.

3. Caractérisation des nombres de Queneau

Commençons par une condition nécessaire au fait qu'un entier n soit un nombre de Queneau et qui résulte encore une fois de la propriété initiale de δ_n.

Théorème [1]. *Si n est un nombre de Queneau, alors $2n + 1$ est premier.*

Démonstration : Supposons que n soit un nombre de Queneau et que $2n + 1$ ne soit pas premier. Il existe alors $q > 1$ avec $q \neq 2n + 1$ tel que q divise $2n + 1$. Or $G_n = \langle \sigma_n \rangle = \langle \delta_n \rangle$, de sorte que les raisonnements précédents concernant les mots-rimes et leur position restent valable pour δ_n : cela revient à identifier $1, 2, \dots, n$ aux vers de la dernière strophe, plutôt qu'à ceux de la première, et à « remonter » le poème.

Soit donc m appartenant à l'orbite de q. Cela a un sens, car comme q divise $2n+1$, q est nécessairement $\leq n$, d'où $\delta_n(q)$ et par conséquent l'orbite de q sont bien définis. Il existe ainsi $k \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $m = \delta_n^k(q)$, ce qui implique l'existence de $e \in \{0,1\}$ tel que $m \equiv (-1)^e 2^k q\ [2n+1]$. C'est-à-dire que $2n+1$ divise $m-(-1)^e 2^k q$. Or par hypothèse, q divise $2n+1$, donc q divise $m-(-1)^e 2^k q$, d'où q divise m.

Par conséquent, m appartient à l'orbite de q implique que q divise m, c'est-à-dire que dans l'orbite de q se trouvent uniquement des multiples de q. Or $1,\ldots,q-1$ ne sont pas des multiples de q, donc n'appartiennent pas à son orbite qui n'est donc pas complète dans la mesure où elle ne contient pas tous les mots-rimes. $\square$

Conséquence. Si n est un nombre de Queneau, alors $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ est le corps fini à $2n+1$ éléments. Son groupe des inversibles, noté $(\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z})^*$, est quant à lui cyclique d'ordre $2n$ (voir [3]).

Rappel. Un corps fini à q éléments étant donné, on appelle *racine primitive de l'unité* tout générateur du groupe des inversibles, groupe cyclique de cardinal $q-1$, c'est-à-dire tout élément d'ordre $q-1$ de ce groupe.

Théorème [2]. *Si $2n+1$ est premier, alors n est un nombre de Queneau si et seulement si*
- *soit 2 est d'ordre $2n$ dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$, c'est-à-dire 2 est racine primitive,*
- *soit n est impair et 2 est d'ordre n dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$.*

Rappel. Dire que l'élément 2 est d'ordre p dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ signifie que $\bar{2}^p = \bar{1}$ et que $\bar{2}^k \neq \bar{1}$ pour tout $k \in \{1,\ldots,p-1\}$, autrement dit $2^p \equiv 1\ [2n+1]$, mais $2^k \not\equiv 1\ [2n+1]$ pour tout k tel que $0 < k < p$.

Démonstration :

- Supposons que n soit un nombre de Queneau. Comme 2 est différent de 0, 2 est dans $(\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z})^*$ de sorte que l'ordre de 2 divise l'ordre de ce groupe, à savoir $2n$. Par conséquent, les seuls ordres possibles pour 2, différents de n et de $2n$, sont strictement inférieurs à n.

  Supposons ainsi que 2 est d'ordre $j < n$, d'où $2^j \equiv 1\ [2n+1]$. Or on a $\delta_n^j(2) \equiv \pm 2^j.2\ [2n+1]$, donc $\delta_n^j(2) \equiv \pm 2\ [2n+1]$. Il y a alors deux cas à distinguer :

  ∗ Si $\delta_n^j(2) \equiv +2\ [2n+1]$, alors $\delta_n^j(2) = 2$ étant donné l'expression de δ_n qui est la suivante :

  $$(2) \qquad \delta_n(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 2x \leq n \\ 2n+1-2x & \text{sinon, c'est-à-dire pour } n < 2x \leq 2n. \end{cases}$$

  De sorte que l'orbite de 2 contient au plus $j < n$ éléments, donc n'est pas complète, ce qui est en contradiction avec le fait que n est un nombre de Queneau.

  ∗ Sinon, dans l'autre cas, $\delta_n^j(2) \equiv -2\ [2n+1]$, donc vu (2), on a en fait $\delta_n^j = 2n+1-2 = 2n-1$. Or $1 \leq \delta_n^j(x) \leq n$, d'où $1 \leq 2n-1 \leq n$ soit $1 \leq n$ et $n \leq 1$ d'où $n = 1$, une contradiction puisque nous avons supposé $n \geq 2$.

Par conséquent, dans les deux cas, on aboutit à une contradiction : 2 ne peut être d'ordre $j < n$, donc 2 est d'ordre $\geq n$, c'est-à-dire d'ordre n ou $2n$ dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$.

Vu le théorème, il ne nous reste donc plus qu'à exclure le cas $n = 2p$ pair et 2 d'ordre n dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$.

Supposons qu'il en soit ainsi. Cela implique $2^{2p} \equiv 1\ [2n+1]$, c'est-à-dire $(2^p)^2 \equiv 1\,[2n+1]$ d'où $2^p \equiv \pm 1\,[2n+1]$. Or si on avait $+1$, cela impliquerait que 2 est d'ordre p modulo $2n+1$, absurde car il est d'ordre $2p$, donc nécessairement $2^p \equiv -1\,[2n+1]$. Il s'ensuit que $\delta_n^p(2) \equiv \pm 2^p 2\,[2n+1] \equiv \pm 2\,[2n+1]$. Et dans l'étape précédente, à la seconde $*$, nous avons vu que $\delta_n^p(2) \equiv -2\,[2n+1]$ impliquait $n = 1$ qui n'est bien sûr pas pair.

La seule possibilité est donc $\delta_n^p(2) \equiv 2\ [2n+1]$, soit $\delta_n^p(2) = 2$. Mais alors l'orbite de 2 par δ_n ne contient au plus que $p = \frac{n}{2} < n$ éléments distincts et donc n ne serait pas un nombre de Queneau. Par conséquent le cas $n = 2p$ et 2 d'ordre n est impossible.

- Prouvons désormais la condition suffisante en supposant vérifiées les hypothèses en question. Soit ω le cardinal de la plus petite orbite des éléments de $\{1, \ldots, n\}$ par δ_n. On note u cet élément de sorte que l'orbite de u est égale à $\{u, \delta_n(u), \ldots, \delta_n^{\omega-1}(u)\}$. Il suffit alors de montrer que $\omega = n$ auquel cas n sera un nombre de Queneau.

  On a $\delta_n^\omega(u) = u$, d'où $\delta_n^\omega(u) \equiv u\ [2n+1]$. Or $\delta_n^\omega(u) \equiv \pm 2^\omega u\ [2n+1]$, d'où $u \equiv \pm 2^\omega u\ [2n+1]$. Et $2n+1$ étant supposé premier, $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ est un corps dans lequel tout élément non nul est inversible. En particulier, comme $u \in \{1, \ldots, n\}, \bar{u} \neq \bar{0}$ est inversible. Par conséquent, $1 \equiv \pm 2^\omega\ [2n+1]$, c'est-à-dire $2^\omega \equiv \pm 1\ [2n+1]$. Deux cas sont alors à distinguer :

  * Si $2^\omega \equiv 1\ [2n+1]$, alors $\omega \geq \text{ordre}(2)$. Or par hypothèses, $\text{ordre}(2) \geq n$, donc $\omega \geq n$. Mais $\omega \leq n$ car δ_n est à valeurs dans $\{1, \ldots, n\}$. Donc $\omega = n$.
  * Si $2^\omega \equiv -1\ [2n+1]$, alors
    - Soit l'ordre de 2 est $j = 2n$, ce qui implique que $2^n \equiv -1\,[2n+1]$. Or $2^\omega \equiv -1\,[2n+1]$, d'où $2^{n+\omega} \equiv 1\,[2n+1]$, donc $2n | n+\omega$. Mais $\omega \leq n$, d'où $n + \omega \leq n + n = 2n$. Donc nécessairement $n = \omega$.
    - Soit l'ordre de 2 est $j = n$, avec n impair. Comme $2^\omega \equiv -1\ [2n+1]$, cela implique que $(2^\omega)^2 \equiv 1\ [2n+1]$, soit $2^{2\omega} \equiv 1\ [2n+1]$. Par conséquent n, ordre de 2, divise 2ω. Comme n est impair, le lemme de Gauss entraîne que n divise ω. D'où $n \leq \omega$ or $\omega \leq n$. Donc finalement $n = \omega$. □

Exemple. 9 est un nombre de Queneau, contrairement à 8.
En effet :

* Pour $n = 8$: $2n+1 = 17$ est premier, mais $2^4 = 16 \equiv -1\,[17]$, d'où $2^8 \equiv 1\,[17]$, de sorte que 2 est d'ordre 8 modulo 17. A fortiori, 2 n'est pas d'ordre $2n = 16$ modulo $2n+1$ d'où il s'ensuit que 8 n'est pas un nombre de Queneau.
* Pour $n = 9$: $2n+1 = 19$ est aussi premier et $2^4 = 16 \equiv -3\ [19]$, $2^5 \equiv -6\ [19]$, $2^6 \equiv -12\ [19] \equiv 7\ [19]$, $2^7 \equiv -5\ [19]$, $2^8 \equiv -10\ [19]$, $2^9 \equiv -20\ [19] \equiv -1\ [19]$ d'où $2^{18} \equiv 1\ [19]$. Ceci montre que 2 est d'ordre $2n = 18$ modulo $2n+1$, 9 est par conséquent un nombre de Queneau.

Dans *La belle Hortense*, le Narrateur insinue d'ailleurs cette remarque lorsque, cherchant dans *Le Journal* la suite d'un article concernant l'Affaire qui se trouve ne pas être à la page indiquée, il écrit :

> *je conclus qu'il devait y avoir une erreur de numérotation, que le 8 devait être un 6 ou encore un 9.*

Corollaire [2]. *Si $2n+1$ est premier, alors n est un nombre de Queneau si et seulement si*

- *soit 2 est d'ordre $2n$ dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ et $n \equiv 1$ ou $2\,[4]$,*
- *soit 2 est d'ordre n dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ et $n \equiv 3\,[4]$.*

Remarque. Pour $n \in \mathbb{N}$ impair, écrivons $n = 2p+1$. Alors :

$$n = 2p+1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{soit } p = 2q, \text{ c'est-à-dire } n = 4q+1 \\ \text{soit } p = 2q+1, \text{ c'est-à-dire } n = 4q+3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow n \equiv 1 \text{ ou } 3\,[4].$$

Conséquence : Les différences entre le corollaire et le théorème se traduisent en les termes suivants

a) 2 est d'ordre $2n$ dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ est incompatible avec $n \equiv 0\,[4]$ et $n \equiv 3\,[4]$.

b) 2 est d'ordre n dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ est incompatible avec $n \equiv 1\,[4]$.

Rappel (voir [8, page 15]). Soit p un nombre entier. On dit que 2 *est un carré modulo p* s'il existe un entier x tel que

$$2 \equiv x^2\,[p].$$

On peut caractériser les nombres premiers p pour lesquels c'est le cas ainsi : si p est un nombre premier différent de 2 alors

$$2 \text{ est un carré modulo } p \Longleftrightarrow p \equiv \pm 1\,[8].$$

Démonstration du corollaire : Cela revient à démontrer les conséquences *a*) et *b*).

a) Supposons d'une part que 2 est d'ordre $2n$ dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$, ce qui implique $2^n \equiv -1\,[2n+1]$. D'autre part, si on suppose $n \equiv 0\,[4]$, alors $2n+1 \equiv 1\,[8]$; ou si on suppose $n \equiv 3\,[4]$, alors $2n+1 \equiv 7 \equiv -1\,[8]$. Dans les deux cas, 2 est un carré de $(\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z})^*$. Donc il existe $x \in (\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z})^*$ tel que $2 \equiv x^2\,[2n+1]$ d'où $2^n \equiv x^{2n}\,[2n+1]$.

Mais $x \in (\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z})^*$, donc son ordre divise le cardinal du groupe, à savoir $2n$, de sorte que $x^{2n} \equiv 1\,[2n+1]$; il s'ensuit que $2^n \equiv 1\,[2n+1]$. Par conséquent, l'ordre de 2 est au plus n, donc $< 2n$. Les deux hypothèses sont donc bel et bien incompatibles.

b) Supposons d'une part $n \equiv 1\,[4]$, alors $2n+1 \equiv 3\,[8]$. Donc 2 n'est pas un carré modulo $2n+1$, c'est-à-dire un carré de $(\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z})^*$ ($\star$). Supposons d'autre part que 2 est d'ordre n dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$, alors $2^n \equiv 1\,[2n+1]$. Mais on a aussi supposé que $n \equiv 1\,[4]$, c'est-à-dire $n = 4k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$. D'où $2^{1+4k} \equiv 1\,[2n+1]$. Cela implique $2^{1+4k}2 \equiv 2\,[2n+1]$ c'est-à-dire $2^{2+4k} \equiv 2\,[2n+1]$, soit encore $(2^{1+2k})^2 \equiv 2\,[2n+1]$. Par conséquent 2 est un carré modulo $2n+1$, ce qui est incompatible avec ($\star$). $\square$

Remarque. Un cas particulier du corollaire précédent est que si $n \equiv 0\ [4]$, alors n n'est jamais un nombre de Queneau.

On peut ainsi déterminer tous les nombres de Queneau. Voici en particulier la liste, donnée par J.-D. DUMAS dans [2], de tous les nombres de Queneau inférieurs à 1000, $^\diamond$ indiquant que 2 est d'ordre n dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$:

1	2	$3^\diamond$	5	6	9	$11^\diamond$	14	18	$23^\diamond$	26	29	30	33
$35^\diamond$	$39^\diamond$	41	50	$51^\diamond$	53	65	69	74	81	$83^\diamond$	86	89	90
$95^\diamond$	98	$99^\diamond$	105	113	$119^\diamond$	$131^\diamond$	134	$135^\diamond$	146	$155^\diamond$	158	173	174
$179^\diamond$	$183^\diamond$	186	189	$191^\diamond$	194	209	210	221	230	$231^\diamond$	233	$239^\diamond$	$243^\diamond$
245	$251^\diamond$	254	261	270	273	278	281	293	$299^\diamond$	$303^\diamond$	306	309	$323^\diamond$
326	329	330	338	350	354	$359^\diamond$	$371^\diamond$	$375^\diamond$	378	386	393	398	410
$411^\diamond$	413	414	$419^\diamond$	426	429	$431^\diamond$	438	441	$443^\diamond$	453	470	473	$483^\diamond$
$491^\diamond$	$495^\diamond$	509	$515^\diamond$	$519^\diamond$	530	$531^\diamond$	$543^\diamond$	545	554	558	561	$575^\diamond$	585
593	606	$611^\diamond$	614	$615^\diamond$	618	629	638	$639^\diamond$	641	645	650	$651^\diamond$	653
$659^\diamond$	$683^\diamond$	686	690	713	$719^\diamond$	$723^\diamond$	725	726	741	$743^\diamond$	746	749	$755^\diamond$
761	765	$771^\diamond$	774	$779^\diamond$	$783^\diamond$	785	$791^\diamond$	$803^\diamond$	809	810	818	$831^\diamond$	833
834	846	866	870	873	$879^\diamond$	$891^\diamond$	893	$911^\diamond$	$923^\diamond$	930	933	$935^\diamond$	938
$939^\diamond$	950	953	965	974	$975^\diamond$	986	989	993	998				

Et ce n'est pas tout. Revenons-en à *La belle Hortense*, car il est l'heure de mettre ces connaissances arithmétiques au profit de notre enquête sur les numéros des chat-pitres (9, 11, 18, 23, 26)... qui apparaissent au grand jour dans cette table des nombres de Queneau : les voilà enfin démasqués !

Par ordre croissant, il manque certes parmi les chat-pitres le numéro 14 qui pourtant est un nombre de Queneau. On peut alors penser à juste titre que ce nombre a dû se perdre quelque part dans le livre. On le retrouve effectivement à un autre endroit où il n'est vraisemblablement pas à sa place, puisque « l'inauguration de la rue de l'Abbé-Migne eut lieu, comme prévu, le 14 octobre, deuxième dimanche du mois », « le lendemain, lundi 14 octobre, il pleuvait » et « le jeudi 18, ça y était » : le second 14 semble égaré en mauvais lieu, ou plus exactement, en mauvaise date.

Un autre indice nous confirme d'ailleurs que les nombres de Queneau sont légion dans ce livre, particulièrement lorsqu'il s'agit de la Poldévie et de l'Affaire. Pour illustration, c'est en ces termes qu'est décrite l'édition de la Patrologie financée par les Princes poldèves :

> *Si on pense qu'il y avait dans chaque volume six fois vingt-six onces d'or, neuf émeraudes, onze rubis, quatorze diamants de dix-huit carats chacun, ça fait une jolie somme !*

On retrouve là encore foule d'entiers de Queneau !

Enfin, on aurait pu éventuellement se douter, avant toute cette analyse, qu'il s'agissait de nombres de Queneau, dans la mesure où ROUBAUD fait référence à cet auteur à plusieurs reprises : lors de la description de la Bibliothèque, Hortense est supposée avoir envie de lire le roman *Pierrot mon ami* [4] ou plus loin, dans une intervention du Lecteur, ce dernier reconnaît l'avoir lui-même lu ; Eusèbe marmonne « Ça bichebiche mézigue, ça bichebiche beaucoup », expression toute droite extraite de *Loin de Rueil* [5].

Ceci dit, il existe également une autre conséquence du corollaire qui permet de repérer certains nombres de Queneau encore plus rapidement.

Définition. Un nombre premier p est un nombre premier de Sophie Germain si $2p+1$ est aussi un nombre premier.

Cette mathématicienne française (1776-1831) a en effet démontré, pour les nombres premiers vérifiant cette propriété, un résultat se rapprochant du grand théorème de Fermat, leur léguant ainsi son nom.

Proposition [1]. *Les nombres premiers de Sophie Germain sont des nombres de Queneau.*

Démonstration : Le premier nombre premier de Sophie Germain est $n = 2$ (car $2n+1 = 5$ est premier) : c'est aussi un nombre de Queneau, σ_2 étant la transposition $(1, 2)$, forcément cyclique.

Soit désormais n un nombre premier de Sophie Germain différent de 2, n est donc impair. On a ainsi $n \equiv 1$ ou $3\,[4]$, de sorte que, vu le corollaire, il suffit de discuter sur l'ordre de 2 dans $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ pour montrer que n est un nombre de Queneau. Or n étant un nombre premier de Sophie Germain, $2n + 1$ est aussi premier. Il s'ensuit, comme nous l'avons déjà fait remarquer précédemment, que l'ordre de 2 modulo $2n + 1$ divise $2n$: c'est donc $2n$, n ou 2, étant donné que n est premier. Mais 2 est d'ordre 2 dans $\mathbb{Z}/(2n + 1)\mathbb{Z}$ implique $2^2 = 4 \equiv 1\ [2n + 1]$, c'est-à-dire que $2n + 1$ divise 3, soit $n = 1$, ce qui est en contradiction avec n premier. Par conséquent 2 est d'ordre n ou $2n$ modulo $2n + 1$.

Étudions dès lors les deux cas qui se présentent :

– Si $n \equiv 1\,[4]$, vu la conséquence *b*), 2 n'est pas d'ordre n, il est donc d'ordre $2n$.
– Si $n \equiv 3\,[4]$, vu la conséquence *a*), 2 n'est pas d'ordre $2n$, il est donc d'ordre n.

Ceci montre, en vertu du corollaire, que n est un nombre de Queneau. □

Exemple. Nous avons déjà dit que 3 est un nombre de Queneau. Étant donné que $n = 3$ est un nombre premier tel que $2n + 1 = 7$ l'est aussi, 3 est un nombre premier de Sophie Germain. Nous pouvons par conséquent, si nous ne sommes pas à ce point tiraillés par la faim que notre esprit ne puisse se concentrer, écrire quelque *ter(r)ine*, à l'instar de celle qui suit.

Ce matin-là, il se leva de bonne heure
Et sur ses fruits découpés, en contemplant le banc
De coraux, saupoudra du sucre de canne.

Puis le vieillard, à l'aide de sa canne,
Comme il sentait venir son heure,
S'assit tranquillement sur un banc

Jusqu'à ce que la vue d'un banc
De poissons lui fît penser à sa canne
À pêche et comprendre que ce n'était pas l'heure !

Nous avons désormais une et même plusieurs méthodes pour identifier les nombres de Queneau. Mais quel en est le nombre ? Une esquisse de réponse nous est fournie par le mathématicien allemand Emil Artin (1898-1962) au travers d'une conjecture datant de 1927, dont un cas particulier peut s'exprimer ainsi :

Conjecture d'Artin. *Au moins 37% des entiers n tels que 2n+1 soit premier sont des nombres de Queneau.*

Il y aurait donc une infinité de nombres de Queneau...

Mais nous sommes soucieux de respecter les personnages du roman de ROUBAUD, en particulier Mme Yvonne qui confie ses craintes à son mari : « — Arsène, lui dit-elle, la pensée de ces espaces infinis m'effraye ». Aussi allons-nous dorénavant nous concentrer à nouveau sur les cycles qui, tournant en rond, n'ont aucune raison de diverger vers des univers inconnus et angoissants, voire dantesques [7].

4. Des cycles aux spirales

Jusqu'à présent, concernant les nombres de Queneau, les quenines qui en résultent et leur impact dans *La belle Hortense*, nous avons évoqué et tenté de répondre aux questions : qui ? quoi ? où ? comment ? combien ? Mais reste la question : pourquoi ? Oui, pourquoi Jacques ROUBAUD a-t-il choisi de s'intéresser en particulier aux nombres de Queneau ?

Il aurait tout à fait pu définir une autre permutation, employer certains entiers bien précis s'y référant et permettre ainsi l'élaboration de ce que l'on pourrait alors nommer des « roubines » d'ordre n.

En effet, pour obtenir la caractéristique structurelle présente dans le texte d'Arnaut DANIEL et dont on a discuté dans la première partie, il suffit que la permutation choisie soit un cycle pour que cela fonctionne. Par exemple, le cycle $(1, 2, \ldots, n)$ tout simplement répond aux exigences. Cela est dû au fait que cette construction repose sur un raisonnement purement mathématique et que mathématiquement, tous les cycles d'ordre n sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$ (voir [3, p. 15]). Autrement dit, ils se valent tous dans la mesure où le nom des éléments permutés n'a pas d'importance, le principe essentiel étant que l'on envoie chaque élément sur celui qui le suit, quel que soit sa désignation.

Rappel. Soit G un groupe, g_1 et $g_2 \in G$. On dit que g_1 est *conjugué* à g_2 s'il existe $h \in G$ tel que $g_1 = hg_2h^{-1}$.

Propriété. *Tous les cycles d'ordre n sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$, c'est-à-dire que, étant donnés deux cycles $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n$, il existe $\delta \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma_1 = \delta\sigma_2\delta^{-1}$.*

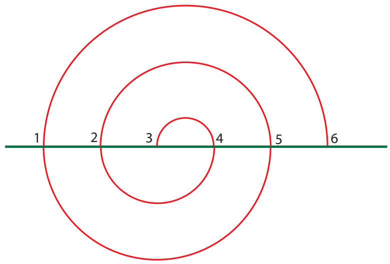
Mais cette conjugaison des n-cycles ne peut pas se transcrire en littérature, où c'est justement l'ordre de succession des mots-rimes qui donne son sens au poème : le choix d'une permutation particulière en constitue par conséquent le fondement.

Observons donc de plus près la permutation à l'œuvre dans le roman de ROUBAUD et dans la sextine d'Arnaut DANIEL, à savoir σ_6, afin d'en déterminer la spécificité :

$$\sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Petit clin d'œil à Dante, qui reconnut dans ses écrits les qualités poétiques d'Arnaut DANIEL.

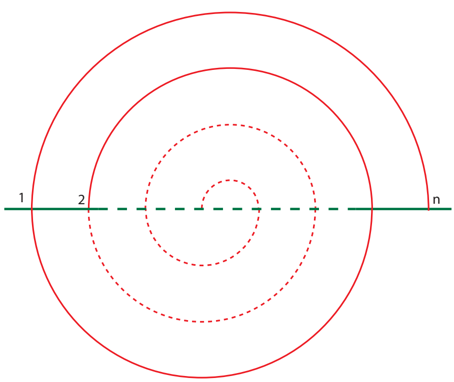
On remarque ainsi que, si l'on inscrit les chiffres de 1 à 6 dans cet ordre sur une droite, la spirale que l'on peut construire débutant à 6 et passant par chacun d'eux suit précisément l'ordre de succession des images par σ_6 de $\{1, \ldots, n\}$, c'est-à-dire $\sigma_6(1) = 6$, puis $\sigma_6(2) = 1$,... et enfin $\sigma_6(6) = 3$. En d'autres termes, si on lit les chiffres dans l'ordre dans lequel ils apparaissent le long de la spirale (ici 615243), on trouve les images de (123456) par σ_6. C'est ce que montre le dessin suivant :



On comprend alors mieux pourquoi le roman de ROUBAUD est truffé d'allusions aux spirales et aux escargots. Cela donne toute sa signification au fait qu'avec le processus institutionnel de succession des princes « tout demeurait conforme à la figure emblématique des Poldèves qui est l'hélice, et satisfaisant pour leur animal sacré qui est l'escargot » et que c'est « la Grande Course d'Escargots qui [en] avait, disait-on, donné à Arnaut Danieldzoï l'idée décisive ». Enfin pour ne citer que quelques autres exemples, les trente-six quincailleries cambriolées décrivent géographiquement une spirale, toutes victimes d'un criminel qui suspend en spirale au plafond une série de casseroles et dérobe une statuette représentant une Vénus poldève portant dans ses bras un escargot. Et c'est sans compter la marque de fabrique dont sont tatoués tous les princes poldèves, à savoir encore un escargot...

Quant à la sextine d'Arnaut DANIEL, la spirale, puisque représentant la permutation σ_6, donne en fait l'enchaînement des mots-rimes au sein d'une même strophe, ceux-ci étant identifiés par rapport à leur ordre dans la strophe précédente.

C'est même en s'appuyant sur cette spirale que l'on a pu généraliser σ_6 à n quelconque. En effet, pour un n fixé, la spirale prend la forme suivante...



... à partir de laquelle il apparaît clairement, en « remplissant » dans un premier temps les images des nombres impairs, puis dans un second celle des nombres pairs, que

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & n-1 & n \\ n & 1 & n-1 & 2 & n-2 & 3 & n-3 & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

D'où l'on déduit la forme générale de σ_n, à savoir celle annoncée au début :

$$\begin{cases} \sigma_n(2p) = p \\ \sigma_n(2p+1) = n-p. \end{cases}$$

Ce n'est ainsi pas innocemment que σ_n est appelée permutation *spirale* : quel que soit l'entier n, on peut dessiner cette spirale, ce qui est cohérent avec le fait que σ_n est définie pour tout n, mais il est seulement certains entiers pour lesquels cette permutation se trouve être un cycle, ceux-là même qui sont dits nombres de Queneau.

Cependant, même pour les entiers qui ne sont pas des nombres de Queneau, il est toujours possible de créer des poèmes avec une structure analogue à celle des quenines : il suffit pour cela de définir une permutation qui soit cyclique pour ces nombres. Pour ne citer qu'un exemple, voici celle développée par Jacques Roubaud et Georges Perec afin de remédier au fait que 10 n'est pas un nombre de Queneau, à savoir la *perecquine*, notée π_n, appartenant à $\mathfrak{S}_n$ et qui vérifie

$$\pi_n(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 2x \leq n \\ 2x-(n+1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Conclusion

Notre enquête sur *La belle Hortense* n'est à ce jour certes pas aboutie, mais nous sommes toutefois parvenue à sonder certains de ses mystères.

Par notre étude de la Poldévie, ses princes et ses animaux — chats et escargots — nous avons en effet mis en lumière leurs liens avec la sextine d'Arnaut Daniel, la permutation qui structure cette dernière ainsi que sa généralisation à n quelconque. D'où notre intérêt — à l'origine littéraire, mais qui se transforme rapidement en curiosité purement mathématique — pour la recherche des nombres de Queneau et de leur caractérisation, d'abord à l'aide des cycles puis grâce aux corps finis, afin de déterminer les entiers n de Queneau et pouvoir ainsi construire le cas échéant une n-ine ou *quenine* d'ordre n, c'est-à-dire un poème s'appuyant sur la construction qui résulte de σ_n. Une permutation dont la singularité est d'ailleurs de représenter indirectement une spirale, motif auquel il est souvent fait allusion dans l'œuvre.

En dépit de ces révélations, le roman ne nous a sans conteste pas encore livré tous ses secrets. Certains indices nous sont restés imperméables, par exemple la présence de multiples références à d'autres ouvrages, en particulier, comme il s'agit ici d'une histoire de Prince et de chats, les extraits à la fois du *Petit Prince* et du *Chat qui s'en va tout seul*. Et c'est sans compter la récurrence acharnée du nombre 53 (qui d'ailleurs est un nombre premier de Sophie Germain, et donc de Queneau) :

mis en parallèle des quatre groupes de sept chapitres et des trois cent soixante-six volumes de la *Patrologie*[8], il pourrait évoquer le temps (une année bissextile compte trois cent soixante-six jours, régulièrement cinquante-trois semaines, les mois se composant généralement de quatre semaines de sept jours).

En tous les cas, mêmes si certaines questions restent en suspens (après tout, il s'agit également d'une énigme policière où subsiste toujours un soupçon de mystère), il est manifeste que le fondement arithmétique de cette œuvre lui confère une dimension supplémentaire qui permet à Jacques Roubaud d'enrichir encore un peu plus son roman, en suggérant par des figures de style mathématiques ce que l'on tait par les termes habituels. Le langage des nombres apparaît donc ici comme une Renaissance — terme qui revient très fréquemment dans le récit — du langage des mots, une sorte de complémentarité qui donne un nouveau souffle à la littérature.

Et pour qu'en cette fin, vous ne restiez pas sur votre faim, voici une petite *terrine*, juste pour le plaisir de savourer encore quelques instants avec vous...

La châtelaine, du haut de sa tour,
Pour que son poème entre dans la mesure,
N'a de cesse de recompter le nombre de ses pieds.

De même, du bout de ses mains et de ses pieds
Le potier façonne à l'aide de son tour
L'objet qui prend vie au fur et à mesure.

Oui, l'art n'aura jamais de commune mesure,
Car dans l'océan des possibles nous n'aurons jamais pied
Et de l'imagination nous ne ferons jamais le tour.

Remerciements

Tous mes remerciements à Laura Pallez et Claire Parizel qui m'ont fait découvrir l'Oulipo, cette belle collaboration des mathématiques et de la littérature et qui, sans le savoir, m'ont insufflé le thème de ce mémoire.

Je tiens également à remercier les membres de ma famille qui m'ont soutenue dans mon travail et se sont émerveillés de ce qu'ils comprenaient ou non...

Un très grand merci à Michèle Audin qui m'a accompagnée dans cette aventure en m'apportant toute l'aide dont j'avais besoin, que ce soit au niveau de mes questionnements mathématiques qu'en ce qui concerne les obstacles que je rencontrai dans ma découverte de LaTeX, sans compter les innombrables idées et connaissances dont elle me fit part.

Bibliographie

[1] Monique Bringer (1969) Sur un problème de Raymond Queneau, *Math. & Sci. hum.* **27**, 13–20.

8. Ouvrage dont l'abbé Migne est l'auteur et au nom duquel une rue est inaugurée.

[2] Jean-Guillaume DUMAS (2008) Caractérisation des quenines et leur représentation spirale, *Math. & Sci. hum.* **184**, 9–23.

[3] Daniel PERRIN (1996) *Cours d'algèbre,* Ellipses.

[4] Raymond QUENEAU (1942) *Pierrot mon ami*, Gallimard, Paris (disponible en Folio).

[5] Raymond QUENEAU (1944) *Loin de Rueil,* Gallimard, Paris (disponible en Folio).

[6] Jacques ROUBAUD (1985) *La belle Hortense,* Ramsay (disponible en Points Seuil).

[7] Jacques ROUBAUD (2008) *La fleur inverse,* Architecture du verbe, Les Belles lettres, Paris.

[8] Jean-Pierre SERRE (1970) *Cours d'arithmétique,* Presses Universitaires de France, Paris.

Vanessa VALLET
vanessa.vallet@etu.unistra.fr