ILIADA ELIA

L'UTILISATION D'IMAGES DANS LA RESOLUTION DE PROBLEMES ADDITIFS : QUEL TYPE D'IMAGES ET QUEL RÔLE ?

Abstract. Using pictures for solving additive problems: what kind of pictures and what role? – The majority of the research on additive problems has revealed two kinds of obstacles: the first is related to the position of the data in the scenario described by the text stating the problem and, second, to the distinction between positive or negative transformations of the data. This paper presents a large scale research about the difficulties in solving additive problems and the role of pictures in this kind of problem solving. In particular, we examine the case of the second class of additive structure problems proposed by Vergnaud: measure-transformation-measure or change problems. We have proposed to 1447 pupils of Primary Schools (grade 1 to grade 3) in Cyprus problems in verbal expression or in verbal expression accompanied with an informational picture. The analysis of the results based on the implicative statistical analysis proves that there is an influence of the type of representation and of the structure of the problem on problem solving. We discuss the theoretical and didactical implications of the findings of this research.

Résumé. Deux types d'obstacles ont été mis en évidence dans la majorité des recherches sur les problèmes additifs. Le premier est lié à la position des données dans l'énoncé, le second tient aux transformations des données, à opérer dans le sens positif ou négatif. L'article présente une recherche à grande échelle sur les difficultés dans la résolution de problèmes additifs et le rôle des images pour cette résolution. Nous examinons plus particulièrement la seconde catégorie de problèmes additifs distinguée par Vergnaud : mesure-transformation-mesure ou problèmes de changements. Nous avons proposé à 1447 élèves des trois premières années d'école primaire à Chypre des problèmes soit sous forme de texte, soit sous forme de texte accompagné d'une information figurale. L'analyse des résultats découlant de l'analyse statistique implicative démontre que le type de représentation et la structure du problème influent sur la résolution. Nous discutons les implications théoriques et didactiques des résultats de cette recherche.

Mots clés. École primaire, problèmes additifs, résolution de problème, images.

---

1. Introduction

La complexité que la plupart des problèmes additifs présente pour les élèves contraste fortement avec la simplicité des opérations arithmétiques à utiliser. Vouloir expliquer cette complexité par le fait que ces opérations porteraient sur les entiers relatifs, et non pas seulement sur les entiers naturels, ne dit en rien comment faire entrer les élèves dans la compréhension et la résolution de ces problèmes.

ANNALES de DIDACTIQUES et de SCIENCES COGNITIVES, volume 14, p. 5 – 29.
© 2009, IREM de STRASBOURG.

Vergnaud (1995) est le premier à en avoir montré la complexité. Prenant en compte la nature des données, il a distingué trois grandes catégories de problèmes. Toutes les recherches ont alors montré qu'il y avait deux obstacles difficiles à surmonter pour beaucoup d'élèves : la prise en compte de la position des données dans le scénario décrit par l'énoncé, spécialement lorsque la donnée manquante est en position initiale, et la distinction entre le sens positif ou négatif d'une transformation et les deux opérations arithmétiques, spécialement lorsque toutes les données sont des transformations.

Pour permettre aux élèves de surmonter ces obstacles, le recours à ce qu'on appelle de manière très générale les « images », c'est-à-dire des représentations iconiques, des schémas, *etc.*, s'est imposé. En évoquant des situations « concrètes » familières, elles servent d'appui à la compréhension d'une présentation verbale ou même permettent d'éviter les difficultés d'un énoncé. Ainsi les manuels de l'école primaire à Chypre utilisent beaucoup une présentation par images dans l'introduction de notions et de problèmes (Elia, Gagatsis & Gras, 2006). Le problème didactique qui se pose est alors double. D'une part, il s'agit de déterminer quelles images peuvent remplir un rôle d'aide dans l'apprentissage de la résolution des problèmes additifs. De nombreuses recherches se sont engagées dans cette direction en proposant notamment une classification de types d'images (Carney & Levin, 2002 ; Elia & Philippou, 2004 ; Gagatsis & Elia, 2004). D'autre part, il s'agit d'examiner si les images proposées apportent réellement une aide pour résoudre non seulement les problèmes dans lesquels la donnée manquante est en position finale mais également ceux relatifs aux autres situations, en particulier ceux où la donnée est une transformation négative alors que l'opération arithmétique à effectuer est une addition et inversement.

Pour apporter des éléments de réponse à ces deux problèmes didactiques concernant le rôle des images dans la résolution des problèmes additifs, nous avons entrepris un grand travail d'enquête auprès de 1447 élèves des trois premiers niveaux de l'école primaire à Chypre. Pour cela, nous avons procédé, dans certaines classes des trois niveaux, à des séquences d'enseignement centrées sur l'utilisation d'un type particulier d'images, que nous avons appelées « informationnelles » parce que celles ci présentent toutes les données concrètes (Elia, 2005; Elia, Gagatsis & Demetriou, 2007), ainsi que, dans d'autres, sur une utilisation de la droite numérique. Dans cet article nous nous proposons d'analyser la signification des résultats obtenus et d'en discuter la portée pour les deux problèmes didactiques que l'utilisation des images soulève.

Pour cela, il nous faudra d'abord revenir sur la manière de laquelle on aborde habituellement ces deux problèmes. La question fondamentale est celle des correspondances et des non correspondances entre le type d'image choisi et les différents aspects constituant la complexité des problèmes additifs. Autrement dit, l'interprétation des résultats dépend de l'analyse de la relation entre les caractéristiques du type de représentation choisi et les composantes sémantiques et numériques des données d'un problème additif. Dans quelle mesure les images utilisées permettent-elles de reconnaître et de distinguer toutes les composantes à prendre en compte dans la résolution des problèmes additifs ? C'est pourquoi nous commencerons par l'analyse des composantes sémantiques et numériques constitutives des problèmes additifs.

Nous présenterons ensuite les résultats obtenus dans notre enquête, en nous limitant à ceux concernant l'utilisation des images informationnelles qui présentent toutes les données concrètes. Nous verrons à la fois leur apport et leur limite.

L'interprétation de la portée de ces résultats nous ramènera évidemment à la complexité des problèmes additifs et à la question des conditions pour qu'un type de représentation, quel qu'il soit, permette de reconnaître et d'en prendre en compte les différentes composantes (Duval, 2006). Cela relève d'une discussion théorique qui dépasse les conclusions des analyses statistiques, lesquelles restent nécessairement restreintes au corpus des données recueillies et au type des tâches qui ont permis de les recueillir. Nous consacrerons la troisième partie à cette discussion.

2. La complexité des problèmes additifs et des images utilisées

Les problèmes de mathématiques qui se présentent sous la forme de problèmes posés à partir de la réalité ont une complexité spécifique. Les difficultés que les élèves rencontrent face à ce genre de problème ne peuvent s'expliquer ni par celles des propriétés et des outils mathématiques à utiliser, ni par celles de la lecture de l'énoncé. Cela apparaît d'une manière paradoxalement évidente avec les problèmes les plus élémentaires et les plus concrets qui soient, les problèmes additifs à une opération. Analyser ce qui fait la complexité de ces problèmes est la condition pour pouvoir interpréter les productions des élèves et identifier les facteurs permettant d'apprendre à les résoudre.

Les éléments constitutifs d'un problème sont ses données. Elles se présentent sous deux formes. D'une part celles qui sont explicitement données pour initialiser le traitement mathématique de résolution. D'autre part celle à laquelle doit conduire la résolution, qui est généralement présentée dans la question, et que nous appellerons la donnée manquante. En effet, dans le contexte d'une description mathématique complète, ou suffisante, d'une situation réelle, la donnée manquante du problème est interchangeable avec les données fournies. Car selon la donnée que l'on supprime dans cette description mathématiquement suffisante, on fabrique des problèmes qui peuvent être plus ou moins différents quant à la procédure de résolution mais qui restent les mêmes quant au processus de description mathématique de la situation réelle et même quant aux outils mathématiques utilisés (Duval, 2003, p. 23).

Il y a une variation considérable dans la présentation des données d'un problème. Pour certains problèmes elles peuvent être présentées à l'état brut, telles qu'on les trouve dans la vie réelle. Mais elles peuvent également être présentées par des représentations sémiotiquement hétérogènes : images, schémas, symboles, description linguistiques. Et cela pose un double problème, celui sémiotique de la correspondance, ou non, entre ces différents types de représentation et celui, cognitif, d'une reconnaissance par l'élève de la même donnée à travers des représentations différentes.

Les trois aspects à envisager pour saisir la complexité des problèmes additifs sont décrits ci-après. Il n'est peut-être pas inutile de souligner que la notion de donnée, comme élément constitutif de ce genre de problèmes, est irréductible à la notion générale d'information. En effet, les données des problèmes considérés comportent presque toujours deux dimensions sémantiques qui sont indissociables, bien que la présentation des données conduise souvent à les faire apparaître sous la forme de deux informations séparées. Ces deux informations sont distinctes et sémantiquement indépendantes :

- l'une sur la transformation ou l'état exprimée par le verbe porteur d'une information numérique ou une relation : « gagne 3 », « perd 4 », « plus grand que 4 », « j'avais 4 » ;
- l'autre sur la place de cette transformation ou relation ou de cet état dans le scénario décrit « à la première partie », « en tout », « hier » …

La compréhension mathématique des phrases de l'énoncé (c'est-à-dire la compréhension permettant de résoudre le problème) exige que l'on considère ces deux informations comme étant une seule et même donnée du problème. Si on ne le fait pas, on est conduit à convertir pour toutes les catégories de problèmes :

« gagne 3 » en « + 3 »

« perd 4 » en « — 4 »

ce qui conduit à une bonne réponse pour certaines catégories de problèmes et à une erreur systématique pour les autres catégories de problèmes et ce qui rend incompréhensible l'explication de la solution (même par de futurs enseignants de primaire qui n'on pas fait de math !).

Autrement dit chaque donnée du problème est composé par un couple de deux informations

{à la seconde, perd 4} {hier, j'avais 4} {le premier est plus grand que 4}

C'est ce que Duval appelle les deux dimensions sémantiques d'une donnée de problème (Duval, 2005).

En outre, la référence à une situation de la réalité implique que l'on donne des informations qui ne sont pas pertinentes du point de vue d'une description mathématique de cette situation.

2.1. La complexité relative au choix des données par rapport au traitement mathématique à effectuer

En se référant à la nature des données prises en compte dans un problème additif et, également à la place de la donnée manquante à retrouver, G. Vergnaud a montré que tous les problèmes additifs ne présentaient pas la même complexité pour les élèves (Vergnaud, 1995).

La nature des données porte sur le fait qu'elles sont des mesures ou qu'elles se réfèrent à une transformation dont il faut reconnaître la valeur positive ou négative mais qu'il ne faut pas confondre avec l'opération arithmétique à effectuer. Ainsi, pour un problème additif à une seule opération, on a trois catégories de problèmes additifs. En excluant les deux cas extrêmes où toutes les données sont soit des mesures soit des transformations, nous avons celui où nous avons une transformation et deux mesures selon l'ordre « mesure (état), transformation, mesure (état) ».

Lorsque l'une des données est une transformation, l'ordre des données devient important et la place de la donnée manquante à retrouver (la mesure initiale, la transformation ou la mesure finale) s'avère être aussi un facteur important de difficulté. **Car, alors, la place de la donnée manquante intervient dans le choix de l'opération à faire : addition ou soustraction.** De nombreuses études ont montré qu'à tous les niveaux du primaire, les problèmes portant sur la recherche de la mesure finale sont les plus facilement réussis et que ceux portant sur la mesure initiale sont ceux qui s'avèrent systématiquement les plus difficiles (Adetula, 1989 ; Nesher et al., 1982).

En nous limitant à la catégorie intermédiaire définie par Vergnaud (1995) et en prenant en compte la place de la donnée manquante à retrouver, on peut donc distinguer six types de problèmes additifs (Figure 1). Deux de ces types de problèmes, Pc et Na, se situent aux extrêmes d'une échelle de complexité, telle qu'on peut l'observer régulièrement auprès d'élèves de niveaux différents.

On peut voir sur le tableau de la Figure 1 que la transformation ne doit pas être confondue avec l'opération arithmétique, le choix de celle-ci dépendant autant de la place de la donnée manquante que de la transformation. Pour certains types de problèmes on peut même observer une non congruence entre la transformation et l'opération arithmétique.

1. Valeur de la transformation en tant que donnée	***Positive (b>0) :*** *(P)*			***Négative (b<0) :*** *(N)*		
2. Position de la donnée manquante à retrouver	*Quantité initiale (a)*	*Transformation (b)*	*Quantité finale (c)*	*Quantité initiale (a)*	*Transformation (b)*	*Quantité finale (c)*
3. Opération arithmétique avec les deux données	Soustraction	Soustraction	Addition	Addition	Soustraction	Soustraction
Codage des types de problème	Pa	Pb	Pc	Na	Nb	Nc

Figure 1 : Les six types de problèmes additifs pour la catégorie « mesure, transformation, mesure ».

2.2. La complexité relative au choix de la représentation des données du problème

Les problèmes additifs, comme la plupart des autres problèmes, sont proposés aux élèves sous la forme d'un **énoncé**. La prédominance de la présentation verbale tient aux deux contraintes propres à l'élaboration de ce genre de problème. Tout d'abord il faut décrire la situation réelle à laquelle renvoient les données choisies. Ensuite, il est nécessaire de formuler la question qui fixe l'objectif de la résolution, par exemple, retrouver la troisième donnée manquante.

Cependant, la similitude des énoncés pour des types de problèmes différents (Figure 1) peut être un obstacle. Aussi pour ne pas subordonner la compréhension du problème à la compréhension de son énoncé, on accompagne souvent les énoncés avec une image illustrant un aspect de la situation évoquée ou les données du problème. Car on considère comme évident que les images doivent faciliter la compréhension des énoncés de problème verbaux et, par suite, leur résolution des problèmes. Il suffit d'ouvrir les manuels d'enseignement primaire. Mais ici la gamme des images possibles est très large et il est nécessaire de distinguer différents types de représentations auxiliaires. Le critère le plus souvent retenu est le rôle que l'image est supposée devoir jouer pour la compréhension de l'énoncé.

Carne et Levin (2002), par exemple, distinguent cinq fonctions que les images peuvent remplir pour faciliter la compréhension d'un texte. Les images décoratives qui ont peu de relation avec le texte, les images évocatrices qui illustrent une partie du texte, les images organisatrices qui fournissent un schéma relatif au contenu du texte, les images interprétatives pour clarifier un point difficile du texte et les images transformationnelles destinées à améliorer le rappel de l'information au cours de la réflexion. Cette classification purement fonctionnelle semble cependant difficile à utiliser pour les énoncés de problèmes.

Par exemple l'image accompagnant l'énoncé de problème suivant est-elle décorative ou évocatrice ?

> *Dans un bus il y avait initialement 8 passagers. D'autres passagers sont montés lors d'un arrêt. On en a alors compté 14 en tout. Combien de passagers sont montés lors de l'arrêt ?*

Si on considère la situation concrète globale du problème, l'image est évocatrice. Mais si on considère que seules les données du problème sont importantes — et alors il faut oublier qu'il s'agit de passagers montant ou descendant lors d'un arrêt, ce qui revient à considérer l'évocation d'une situation concrète comme inutile — l'image est décorative. En fait la distinction entre image décorative et image évocatrice est non pertinente pour les énoncés de problèmes. De même on peut s'interroger sur les images organisatrices. Les schémas ternaires, et cependant unidimensionnels, de Vergnaud (1995) seraient dans cette classification des images organisatrices. Mais peut-on encore parler d'image si on s'en tient à l'opposition générale entre icone et symbole ? Ces schémas qui n'ont aucune relation de ressemblance avec les différentes situations concrètes évoquées dans les problèmes additifs ne peuvent pas être considérés comme des images.

En nous appuyant sur des observations antérieures faites dans le cadre de l'enseignement primaire à Chypre, sur le rôle des images dans la résolution de problèmes additifs (Elia & Philippou, 2004 ; Gagatsis & Elia, 2004 ; Elia et al., 2007), nous avons été conduit à distinguer, outre les schémas de Vergnaud (1995), le recours à trois types d'images possibles : les images décoratives, ou évocatrices, les images matériau qui représentent quelques unes des données et qui peuvent servir de support à une opération de comptage, et les images que nous appellerons informationnelles qui présentent toutes les données concrètes. Ce sont ces dernières qui vont retenir notre attention parce qu'elles sont plus complètes et plus opératoires que les précédentes. Nous les avons appelées « images informationnelles » (Elia, 2005 ; Elia et al., 2007) mais nous aurions pu aussi bien les appeler « séquence des données » (Figure 2) puisqu'elles présentent deux des trois données constituant ce type de problème et qu'elles marquent également la place de la donnée manquante à retrouver (l'image vide).

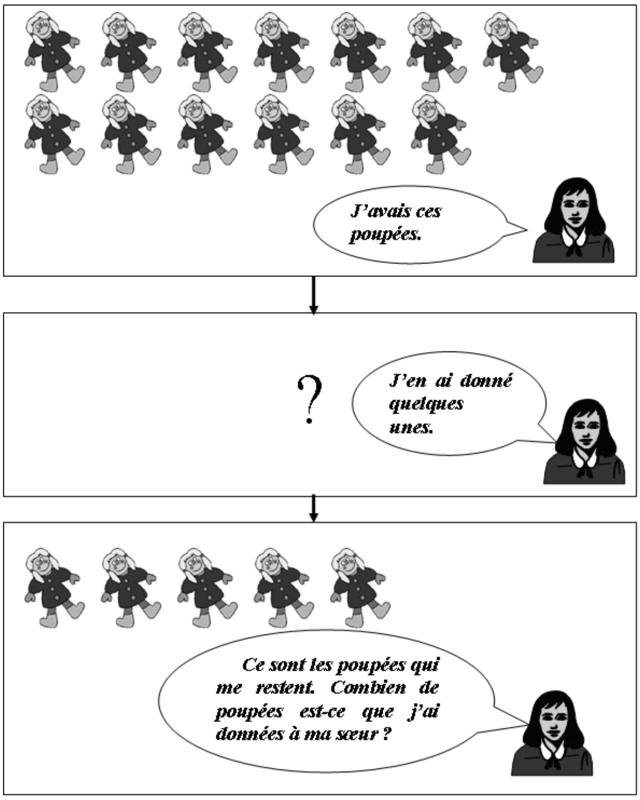


Figure 2 : Image informationnelle pour un problème additif de type Nb.

Les deux images qui présentent les deux données nécessaires pour retrouver la troisième **sont doublement iconiques**. Non seulement elles représentent des poupées, mais elles représentent une **COLLECTION FINIE** de poupées. C'est évidemment sous cet aspect de collection finie d'items qu'elles sont intéressantes pour la résolution, puisqu' elles servent de support pour une opération de comptage (Brissiaud, 1989). **L'image vide ne présente pas une donnée du problème mais seulement la position de la donnée manquante à retrouver dans le scénario de la micro histoire racontée.**

Il est donc important de ne pas confondre les deux types d'images. Deux représentent des collections finies et également une place dans le scénario de la micro histoire et l'image vide représente seulement une position. Ainsi, dans la figure 2, on peut inverser les positions de deux collections finies, sans changer la position de l'image vide, ce qui change le sens de la transformation et fait passer d'un problème de Type Nb à un problème de type Pb. Ce changement peut être mineur dans la mesure où l'opération arithmétique reste la même.

Les légendes insérées sous forme de bulle comme dans une bande dessinée sont en partie redondantes. On remarquera que la question insérée dans la légende de la troisième image aurait aussi bien pu l'être dans l'image vide.

Nous pouvons donc avoir pour les six types de problèmes additifs de la figure 1 deux types différents de présentation : l'une purement verbale et l'autre sous forme d'une séquence d'images informationnelles (Figure 3).

Représentation verbale	**V (Pa)**	**V (Pb)**	**V (Pc)**	**V (Na)**	**V (Nb)**	**V (Nc)**
Représentation iconique	**I (Pa)**	**I (Pb)**	**I (Pc)**	**I (Na)**	**I (Nb)**	**I (Nc)**

Figure 3 : Variation dans la représentation des données de problèmes additifs.

2.3. Le problème des correspondances entre les contenus de deux représentations différentes des mêmes données

Nous avons en fait des représentations différentes des données : sous la forme iconique d'une collection finie, sous la forme d'une écriture décimale de nombres et sous la forme verbale indiquant s'il s'agit d'une mesure ou d'une transformation. Ces trois formes sont-elles équivalentes, c'est-à-dire interchangeables ? Par exemple peut-il y avoir une image d'une transformation ou celle-ci ne requiert-elle le recours au langage ou l'emploi d'un symbole ? Les observations suivantes nous permettront de mieux comprendre le problème.

Bruno D'Amore et ses collaborateurs ont proposé à 47 enfants de 5 ans dans les écoles maternelles de Bologne, Castel San Pietro, un problème additif de type VNc avec l'énoncé suivant (Baldisseri et al., 1994) :

Greta a reçu six ballons. Deux ballons éclatent. Combien de ballons lui reste-t-il ?

Vingt-cinq enfants ont seulement dessiné les ballons ou leur schématisation par des cercles (Figure 4).

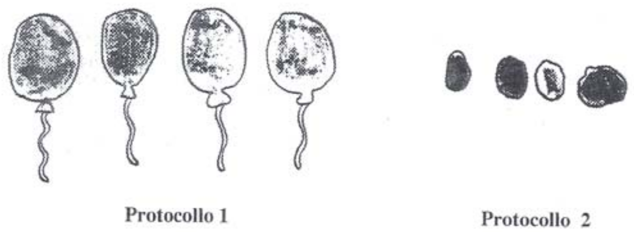


Figure 4 : Représentations schématisées des seules données numériques.

Ces enfants se sont donc focalisés sur l'aspect collection finie et ont produit leur réponse sous cette forme, comme si cette représentation concrète avait servi de support pour le traitement. On voit ici en quoi le recours aux images dans les problèmes additifs peut être intéressant : il induit et guide une procédure de traitement par comptage. Cette procédure réussit évidemment pour des petits nombres et pour des problèmes toutes les données ne sont pas des transformations. Mais d'autres (16) ont aussi dessiné le personnage de l'histoire (Greta) avec des ballons (Figure 5).

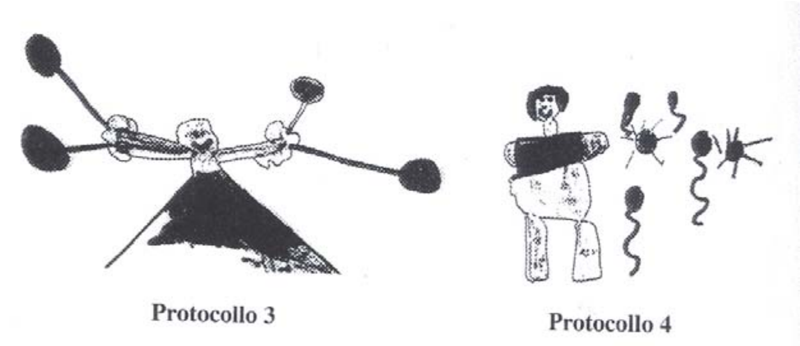


Figure 5 : Deux représentations iconiques des données dans leur contexte « réel ».

La réponse intéressante est évidemment celle du Protocollo 4 (Figure 5), car elle est un essai pour représenter une transformation négative. Il y a d'une part des rayons qui entourent pour signifier l'éclatement de deux ballons et d'autre part deux autres ballons qui ne semblent pas avoir éclaté puisque leurs fils pendent. Or les rayons relèvent ici d'un codage qui est purement conventionnel. De manière iconique cela pourrait aussi bien représenter deux étoiles. Il aurait été intéressant de voir ce qui aurait été produit avec un énoncé suivant :

Greta a reçu six ballons. Elle perd deux ballons. Combien de ballons lui reste-t-il ?

Cet exemple permet de voir à la fois l'utilité et les limites des images pour la résolution de problèmes additifs. Dans la mesure où elles représentent des collections finies d'objets, schématisés ou non, elles permettent d'effectuer un comptage des collections qui correspondent aux données. Elles permettent donc en ce sens de résoudre certains types de problèmes additifs. Mais elles ne permettent pas de représenter des transformations sans qu'elles soient codées par un symbole commun ou par un symbole purement contextuel. Le tableau suivant (Figure 6) montre la complexité sémio-cognitive sous-jacente à l'utilisation de données de type transformation :

Les dimensions sémantiques d'une transformation	Représentation iconique (image)	Représentation symbolique	Désignation ou description verbale
1. **QUANTITÉ**	Une collection finie ○ ○ ○ ○	Écriture décimale (4) ou marque biffant une autre représentation	Dénomination orale : « quatre »
2. **SENS D'ACCROISSEMENT OU DE DIMINUTION**		entier positif (+4) ou négatif (- 4)	Verbes antonymes : gagner/perdre, donner/recevoir…

Figure 6 : Les représentations possibles d'une donnée de type « transformation ».

Lorsque l'on veut représenter les données d'un problème par des images, il n'y a donc que deux solutions pour signifier une transformation. La première consiste à recourir à un codage conventionnel, ce qui revient à introduire un symbole sur **une image** ou insérer une précision verbale (Duval, 2005). L'autre solution consiste à la représenter par **deux images**, l'un correspondant à l'état antérieur de la transformation et l'autre à l'état final. C'est alors par **la différence entre ces deux images** que la transformation se trouve indirectement représentée. Dans les séquences d'images informationnelles que nous avons données aux élèves, nous avons utilisé ces deux types de moyens.

3. Une expérience d'utilisation des images informationnelles en classe

L'objectif de cette expérience était d'évaluer l'apport didactique de la représentation iconique des données des problèmes additifs par rapport à leur représentation verbale dans un énoncé. Comme nous l'avons vu, le recours à ce type de représentation doit répondre à deux exigences minimales : présenter les deux données explicites de manière à servir de support à une opération de comptage et montrer la place de la donnée manquante par rapport aux deux données explicites. Notre expérience s'est limitée à la deuxième catégorie de problèmes additifs, celle où une seule de ces trois données constituant le problème est de type « transformation ».

Cette expérience a été faite à trois niveaux, avec des élèves de 6-7 ans, 7-8 ans et 8-9 ans dans 20 classes d'écoles primaires de Chypre. Son objectif était l'introduction de représentations auxiliaires pour résoudre les différents types de problèmes additifs. Elle ne s'est pas limitée à la seule utilisation des images informationnelles mais elle portait également sur le recours à la droite numérique. Cependant, la présentation des données par une séquence d'images étant une pratique inhabituelle dans l'enseignement, nous avons prévu une séquence particulière d'enseignement pour familiariser les jeunes élèves avec cette présentation des problèmes additifs.

3.1. Une séquence d'enseignement pour introduire les élèves à ce type de représentation

Cette séquence s'est déroulée sur cinq séances de 40 minutes chacune, au cours d'une semaine. Elle a été faite par des enseignants qui avaient préalablement suivi une formation sur les objectifs et l'organisation de l'expérience. L'introduction de ce type de représentation s'est faite en deux étapes.

Dans une première étape les élèves ont travaillé successivement avec trois présentations différentes des données pour les six types de problèmes additifs distingués plus haut (Figure 1). Les problèmes étaient chaque fois introduits en suivant l'ordre de difficulté croissante déterminé par la place de la donnée manquante, c'est-à-dire Pc, Nc, Pb, Nb, Pa, Na.

– **L'utilisation d'une présentation matérielle des données.**

  Les élèves disposaient d'objets manipulables (des cubes) et d'une boîte. Au fur et à mesure de l'indication verbale des données d'un problème, les élèves mettaient ou enlevaient des cubes. Cela devait inciter à distinguer, dans la transformation, d'une part la quantité de cubes et d'autre part le sens du changement de la quantité. Les élèves ont été ensuite invités à comparer les problèmes sur lesquels ils avaient travaillé pour déterminer ce que leurs résolutions avaient de commun.

– **La séquence d'images informationnelles.**

  L'enseignant l'introduit à l'aide d'un projecteur, ce qui permet de s'arrêter sur chacune des trois images. Une description verbale de chacune des trois images en relation avec les problèmes additifs déjà vus dans la phase précédente est alors sollicitée.

– **Présentation de l'énoncé seul.**

  A partir des énoncés, l'enseignant tente de faire prendre conscience des correspondances avec les deux présentations précédentes.

Dans une deuxième étape, trois activités ont été proposées centrées sur l'interprétation des images informationnelles.

– **Une activité des rangements possibles de trois images :** Pour chacun des rangements possibles en une séquence, une description verbale du problème correspondant était demandée (travail individuel).

– **Des tâches de reconnaissance :** Parmi plusieurs énoncés, identifier celui qui correspond à une séquence d'images informationnelles donnée. Une justification du choix était demandée (Voir le diagramme 1 de l'appendice comme exemple de cette activité).

– **Des tâches centrées sur le contenu verbal des bulles et la nature des données :** Les images permettent de représenter les quantités, la séquence d'images permet de représenter la place de la donnée manquante. Mais la nature de la donnée (mesure ou transformation) ainsi que le sens de la transformation (augmentation ou diminution de la quantité) sont indiquées verbalement dans les bulles. Pour que l'attention des élèves se centre sur cette deuxième dimension sémantique des données et non pas sur la première représentée de façon iconique par des collections, deux tâches ont été proposées. Les élèves devaient eux-mêmes remplir l'une des bulles sur la séquence d'images (Voir le diagramme 2 de l'appendice). Ensuite après avoir échangé leur séquence avec d'autres élèves, ils devaient résoudre le problème. Une deuxième tâche consistait à transformer directement un énoncé de problème en fonction d'une bulle.

3.2. Un questionnaire pour évaluer l'apport didactique des séquences d'images informationnelles

Au terme de l'expérience nous avons fait passer un questionnaire aux élèves des trois niveaux qui avaient suivi cette séquence d'enseignement, ainsi qu'à des élèves d'autres classes qui n'avaient pas suivi cette séquence d'enseignement

Groupe 1 **Contrôle**			Groupe 2 **Expérimental**		
Classes A (6-7 ans)	Classes B (7-8 ans)	Classes C (8-9 ans)	Classes A (6-7 ans)	Classes B (7-8 ans)	Classes C (8-9 ans)
275	219	252	114	116	127

Figure 7 : Répartition de la population ayant passé le questionnaire.

Le tableau de la Figure 7 présente la répartition des élèves ayant passé le questionnaire. Le questionnaire présentait les six types de problèmes additifs (Figure 1) avec une variation sur la modalité de présentation : énoncé ou séquence d'images informationnelles (Figure 3).

4. Résultats et analyse des résultats du questionnaire

Nous allons d'abord présenter les résultats en fonction des pourcentages de réussites (Figure 8), puis leur analyse à partir de l'analyse des similarités de I.C. Lerman (Lerman, 1981) et l'analyse statistique implicative de R.Gras (version 3.5 du logiciel CHIC) (Gras, Briand & Peter, 1996 ; Gras et al., 1996 ; Gras, Peter et Philippé, 1997)

4.1. Les résultats

Type de problème	Niveaux	Nb.	VPa %	VNa %	VPb %	VNb %	VPc %	VNc %	IPa %	INa %	IPb %	INb %	IPc %	INc %
Groupe 1 **Contrôle**	6-7 ans	*275*	25,5	28,0	27,3	38,2	68,4	51,3	14,9	26,2	21,1	27,6	56,4	53,1
	7-8 ans	*219*	63,3	68,9	69,3	73,3	90,0	74,1	43,0	48,6	49,4	60,6	75,3	83,3
	8-9 ans	*252*	77,0	81,7	81,7	86,1	94,0	90,5	66,3	62,7	68,3	74,6	82,5	87,3
Groupe 2 **Expérim.**	6-7 ans	*114*	45,6	40,4	48,2	50,9	71,9	52,6	32,5	31,6	39,5	42,1	62,3	62,3
	7-8 ans	*116*	75,9	75,9	80,2	76,7	94,0	83,6	64,7	52,6	69,8	72,4	81,9	87,1
	8-9 ans	*127*	85,0	83,5	85,8	89,8	95,3	92,9	79,5	71,7	80,3	80,3	92,1	87,4

Figure 8 : Pourcentages de réussites.

Pour faciliter la lecture de ce tableau d'occurrences rappelons l'analyse et le codage des six types de problèmes additifs (Figure 9).

	Transformation positive	Transformation négative
Place de la donnée manquante ***a** (initial)* ***c** (final)*	P ***a*** soustraction P ***b*** soustraction P ***c*** addition	N ***a*** addition N ***b*** soustraction N ***c*** soustraction

Figure 9 : Codage des problèmes du questionnaire.

Nous avons donc quatre séries d'occurrences de réussites pour les six types de problèmes additifs : en modalité verbale avec les élèves du groupe contrôle, puis avec ceux du groupe expérimental, ensuite avec en modalité image avec les élèves du groupe contrôle, puis avec ceux du groupe expérimental. La comparaison de ces quatre séries d'occurrences nous permet de faire les premières observations suivantes.

(1) La place de la donnée manquante reste le facteur dominant dans la difficulté des problèmes additifs. On relève les scores les plus faibles pour Pa et Na dans les deux modalités de présentation, V et I. Cependant cela ne semble presque plus

jouer, en modalité verbale, pour les élèves de 8-9 ans ayant suivi la séquence d'enseignement.

(2) Les taux de réussite pour la présentation verbale sont nettement plus élevés pour le groupe expérimental que pour le groupe contrôle. Cela est particulièrement net avec les élèves de 6-7 ans et avec ceux de 7-8 ans.

(3) Mais les taux de réussites pour la présentation par image restent inférieurs dans le groupe expérimental à ceux de la présentation verbale.

(4) Les taux de réussites pour la présentation par image sont supérieurs dans le groupe expérimental à ceux du groupe contrôle, du moins pour les élèves de 6-7 ans et ceux de 7-8 ans. Ils diminuent fortement pour les élèves de 8-9 ans.

Niveau	6-7 ans		7-8 ans		8-9 ans	
Groupe	Contrôle	*Expér.*	Contrôle	*Expér.*	Contrôle	*Expér.*
0-19 %	IPa	-	-	-	-	-
20-39 %	IPb, VPa, INa, VPb, INb, VNa, VNb	*INa, IPa*	-	-	-	-
40-59 %	VNc, INc, IPc	*IPb, VNa, INb, VPa, VPb, VNb, VNc*	IPa, INa, IPb	*INa*	-	-
60-79 %	VPc	*IPc, INc, VPc*	INb, VPa, VNa, VPb, VNb, VNc, IPc	*IPa, IPb, INb, VPa, VNa, VNb*	INa, IPa, IPb, INb, VPa	*INa*
80-100%	-	-	INc, VPc	*VPb, IPc,VNc, Inc, VPc*	VNa, VPb, IPc, VNb, INc, VNc, VPc	*IPa, IPb, INb, VNa, VPa, VPb, INc, VNb, IPc, VNc, VPc*
N	275	*114*	219	*116*	252	*127*

Figure 10 : Évolution du taux des réussites en fonction des niveaux.

La présentation du taux des réussites en fonction des niveaux (Figure 10) met en évidence ces premières observations. La comparaison des niveaux permet de faire trois nouvelles observations :

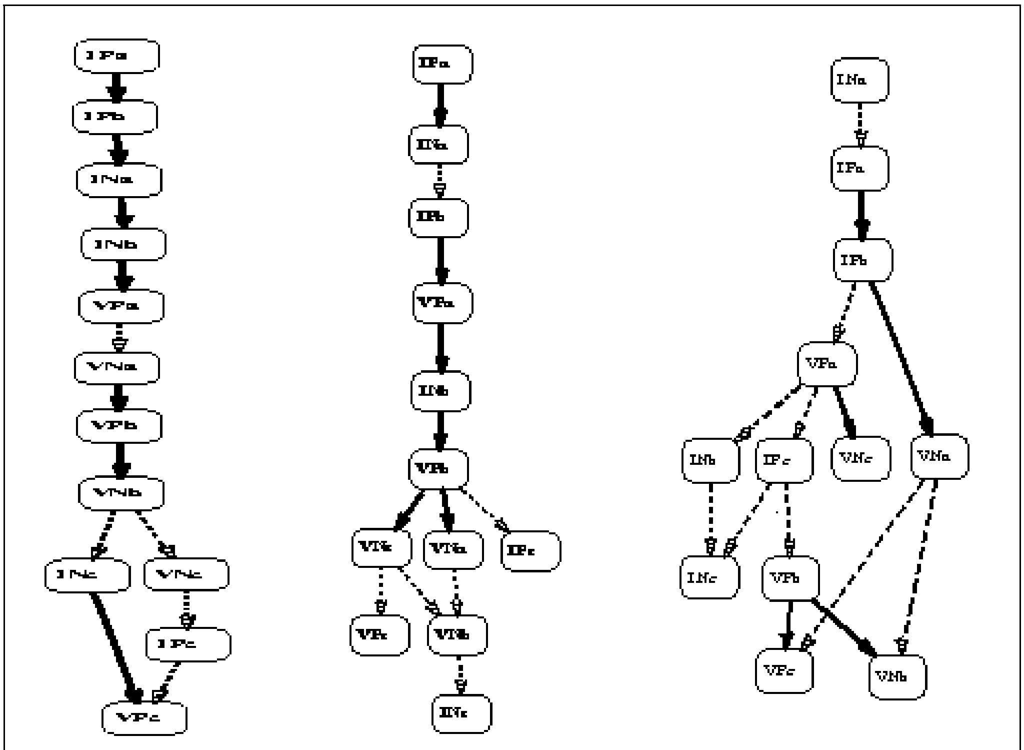
(5) On peut remarquer que, pour les deux premiers niveaux, l'enseignement a permis une augmentation du taux de réussites pour la plupart des problèmes. Cela se traduit par un passage dans la tranche supérieure des taux de réussite.

(6) Cela est moins net pour les élèves de 7-8 ans puisque, pour la plupart des types de problèmes additifs, on est déjà dans la tranche supérieure des taux de réussite.

(7) Il y a une plus grande difficulté de la modalité image par rapport à la modalité verbale lorsque la donnée manquante correspond à l'état initial du scénario.

4.2. Ce que l'analyse implicative met en évidence dans ces résultats

Les réponses des six groupes d'élèves ont été soumises à une analyse implicative.



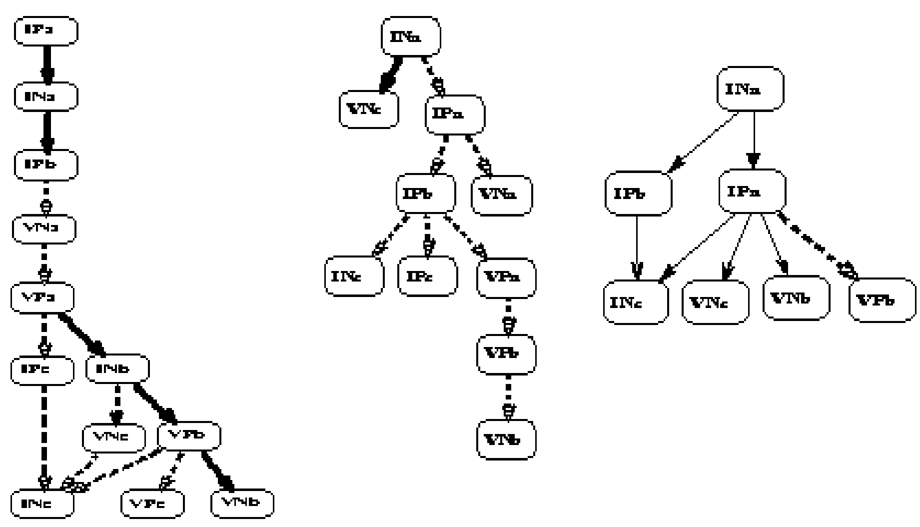
A. 6-7 ans	B. 7-8 ans	C. 8-9 ans

Figure 11 : Les diagrammes implicatifs des réponses du groupe contrôle.

Nous pouvons comparer les graphes d'implication d'une part pour les réponses du groupe contrôle (Figure 11) et d'autre part pour les réponses du groupe expérimental (Figure 12).

(8) Il faut se rappeler ici que les taux de réussites les plus faibles ont été enregistrés pour la modalité image, avec les élèves du groupe contrôle. Il n'est donc pas étonnant que les élèves ayant réussi aux problèmes de type Pa, Pb, Na, dans la modalité de présentation image informationnelle, sans avoir bénéficié de l'introduction à leur utilisation, aient aussi réussi fortement aux autres types de problèmes dans la modalité de présentation verbale. Les taux de réussites des élèves de 7-9 ayant été plus élevés (entre 66% et 87%) que ceux des élèves plus jeunes, expliquent la différence du chemin d'implications.

(9) Le point intéressant est l'inversion d'ordre entre les problèmes Pa et Na lorsqu'on passe du niveau 6-7 ans à celui de 7-8 ans. Pour comprendre ce phénomène il ne faut pas oublier le phénomène de non congruence qui surgit entre le sens de la transformation et l'opération arithmétique à effectuer (Figures 1 et 9). L'image, qui présente des collections et induit de ce fait la continuation du comptage sur les deux collections d'objets, favoriserait l'opération d'addition. Cela peut expliquer un score de réussite plus grand pour le problème Na que pour le problème Pa chez les plus jeunes élèves (6-7 ans).



A. 6-7 ans	B. 7-8 ans	C. 8-9 ans

Figure 12 : Les diagrammes implicatifs des réponses du groupe expérimental.

La comparaison de ces diagrammes implicatifs avec les précédents permet de faire deux nouvelles observations.

(10) Les deux problèmes Pa et Pb, même après une séquence d'enseignement spécifique, restent relativement plus difficiles que les autres et, par suite, la

réussite à ces problèmes reste la plus discriminante pour la réussite aux autres types de problèmes quelle que soit la modalité de présentation.

(11) C’est pour le niveau des élèves de 7-8 ans que l’apport des images semble le plus spectaculaire.

4.3. Discussion : rôle et apport de l’utilisation d’une séquence d’images informationnelles dans la résolution de problèmes additifs ?

La comparaison des réponses obtenues à chacun des trois niveaux et dans deux conditions différentes d’introduction, l’une après enseignement spécifique et l’autre sans enseignement, nous ont permis de faire plusieurs observations. Elles convergent sur trois points qui paraissent essentiels non seulement pour la question du rôle des images dans la résolution de problèmes additifs, mais également sur ce qui fait la difficulté réelle de certains types de problèmes additifs.

L’apport des images dans la résolution des problèmes change selon le niveau. On ne peut donc pas donner une réponse unique qui couvrirait tout le curriculum de l’enseignement primaire. L’apport est important pour les élèves de 6-7 ans et plus encore pour ceux de 7-8 ans, mais il semble devenir négligeable avec les élèves de 8-9 ans, du moins si on le rapporte au coût d’enseignement de son introduction.

L’apport de la représentation utilisée dans notre expérience tient à ce qu’on associe deux types d’images différents correspondant à deux aspects différents des données du problème. Comme on peut le voir dans le tableau ci-dessous (Figure 13), les caractéristiques respectives de ces deux types d’image sont d’une part la représentation de collections finies qui sert de support à un comptage direct et, d’autre part, l’image vide qui permet de bien mettre en évidence la place de la donnée manquante. C’est l’image vide qui semble avoir joué un rôle décisif, au moins pour tous les problèmes dans lesquels la donnée manquante ne concerne pas l’état initial. Les élèves plus jeunes (6-7 ans) semblent avoir été moins sensibles que les élèves de 8-9 ans à l’image vide et avoir appliqué directement l’opération de comptage sur les deux images représentant des collections finies.

Il reste cependant le fait que le taux de réussites pour la présentation verbale des données reste presque toujours supérieur à celui de la présentation par des images, même si cette dernière permet avec une amélioration importante des réussites avec les plus jeunes élèves. Nous retrouvons ici **le problème de la limite des représentations iconiques concernant le sens des transformations**, évoqué plus haut (Figure 6). Et cette question devient cruciale pour les problèmes de la troisième catégorie de Vergnaud (1995) dans laquelle toutes les données du problème sont de type transformation.

4.4. Quelle généralisation de ces résultats pour toutes les catégories de problèmes additifs ?

Cette expérience a porté sur les problèmes dans lesquels une seule des trois données était une transformation. Le type des images utilisées peut-il aussi constituer un apport pour les problèmes additifs dans lesquels les trois données sont de type transformation ? Ou ce type d'image doit-il être transformé ? Ou encore, la limite des images que nous venons de constater signifierait-elle l'échec du recours à d'autres types de représentations (schémas, diagrammes) ?

<table>
<tr><td>Représentation visuelle</td><td colspan="4">Composantes sémantiques et numériques des problèmes additifs</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">Position des données</td><td colspan="2">Congruence ou non congruence</td></tr>
<tr><td>les deux quantités</td><td>la quantité manquante</td><td>Sens de la transformation : positif ou négatif</td><td>Opération sur les quantités données Addition ou soustraction</td></tr>
<tr><td>Deux images donnant chacune une collection finie</td><td>1</td><td></td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td>Une image vide</td><td></td><td>1</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Bulle fixant VERBALEMENT le sens de la transformation</td><td></td><td></td><td colspan="2">1
donner, gagner, perdre...</td></tr>
</table>

Figure 13 : Correspondances entre la séquence d'images informationnelles et les composantes des problèmes additifs.

L'apport d'une représentation visuelle pour la résolution des problèmes additifs tient à ce qu'elle permet de **montrer séparément les différentes composantes sémantiques et numériques qui constituent les problèmes additifs**. Le tableau ci-dessus (Figure 13) permet de voir à la fois les deux apports d'une séquence d'images informationnelles et aussi ses deux limites. D'une part l'image des deux collections est un support pour l'opération choisie et d'autre part l'image vide montre la position dans le scénario du problème. Mais elle ne permet pas de faire prendre conscience de deux distinctions essentielles :

– celle entre le sens de la transformation et l'opération choisie. Elle reste dans l'équivocité des expressions verbales « donner, gagner ...» qui indiquent le sens de la transformation mais qui induisent aussi, à tort ou à raison, le choix d'une opération. Or comme nous l'avons vu plus haut (Figure 1) une addition peut être associée à une transformation négative et inversement une soustraction peut l'être à une transformation positive. Rien ne permet donc de distinguer soit à partir de l'expression verbale, soit à partir des images, le sens de la transformation et l'opération arithmétique à effectuer ;
– celle entre la position des données et le sens de la transformation. Ainsi dans les problèmes donnés aux élèves au cours de cette expérience il suffit parfois d'inverser la position des deux collections données, sans modifier leur quantité pour changer le sens de la transformation. Certes, on peut dire que la séquence des trois images assigne *ipso facto* une position à chacune. Mais en réalité deux des trois images dans cette séquence **montrent à la fois une collection finie et la position de cette donnée.** Or l'aspect collection finie l'emporte visuellement et opératoirement sur l'aspect position, qui est pourtant tout aussi important pour la compréhension et donc la résolution du problème.

La prise de conscience de ces deux distinctions devient nécessaire pour résoudre les problèmes dans lesquels toutes les données sont de type transformation. Quel type de représentation visuelle peut favoriser cette prise de conscience chez les élèves ?

La première condition à remplir est de séparer d'une part la position des données et les données dans leur double aspect (quantité et sens d'une transformation). Notre expérience montre les limites non seulement du type d'images que nous avons utilisée mais de toute représentation unidimensionnelle comme celle par exemple des schémas de G. Vergnaud (Duval, 2005). Une représentation visuelle pertinente pour faire entrer dans la résolution des problèmes additifs doit être bidimensionnelle.

La seconde condition à remplir est de faire utiliser par déplacement le sens de la transformation avant même d'effectuer une opération de comptage ou d'effectuer l'une des deux opérations arithmétiques. Il ne s'agit donc plus d'utiliser les images pour faire effectuer des comptages de collections mais pour effectuer des déplacements orientés. Naturellement ces déplacements ne sont pas effectués sur la même droite graduée, mais à chaque fois sur une nouvelle droite graduée, parallèle à la première, pour garder en évidence les positions de chaque donnée (Duval, 2005). Ce type de représentation bidimensionnelle a été conçu, et expérimenté dans des classes par R. Damm (1992).

5. Conclusion

Les expériences sur le rôle des images dans la résolution des problèmes additifs ont été faites avec des élèves des trois premières années de l'enseignement primaire. Les images utilisées ont été des images de collection d'objets et une image vide marquant la position de la donnée manquante dans le scénario du problème. Enfin les expériences ont porté uniquement sur les problèmes dans lesquelles une seule des données est une transformation, et non pas les trois.

Les observations qui résultent directement de ces expériences montrent à la fois un apport des images utilisées et leurs limites. L'apport a été net avec les plus jeunes élèves, plus fortement marqué avec les élèves de 7-8 ans, mais moindre avec ceux de 8-9 ans. Il semble que les élèves de 7-8 ans aient été plus attentifs à l'image vide marquant la place de la donnée manquante que les élèves de 6-7 ans qui semblent surtout n'avoir pris en compte que les images de collection appelant une activité de comptage. La première limite des images utilisées tient au fait qu'elles ne représentaient pas tous les composantes des données des problèmes et qu'il fallait donc tenir compte des indications verbales accompagnant chaque image. Il n'est donc pas surprenant que les performances pour la présentation des problèmes par des images n'aient jamais été supérieures à celles pour la présentation par un énoncé, même pour la population des élèves ayant participé à des séances pour travailler sur ces deux présentations des problèmes additifs. La deuxième limite tient à ce que les images de collections d'objets n'ont pas rendu visible aux yeux des élèves l'importance de la position de chacune des trois données dans le scénario des problèmes.

Quelle est la portée de ces différents résultats au regard du problème plus général du rôle des images ou d'autres types de représentation dans la résolution des problèmes additifs ? Cette question se pose à la fois pour obtenir des réussites systématiques non seulement avec les problèmes dans lesquels la donnée manquante correspond à la position initiale dans le scénario du problème, mais aussi avec les problèmes dans lesquels les trois données sont de type transformation.

Parmi les résultats de cette expérience, les plus intéressants sont ceux qui concernent les limites des images utilisées. Elles mettent en évidence deux conditions pour que les images ou autres représentations utilisées puissent réellement aider les élèves à résoudre tous les problèmes additifs et non pas seulement certains d'entre eux. Tout d'abord les images ou les représentations choisies doivent permettre de distinguer toutes les composantes constitutives des problèmes additifs. Ensuite, les images ou les représentations doivent présenter séparément chacune des composantes, car elles doivent permettre aux élèves de bien voir l'égale importance de la position des données, indépendamment de leur nature, et de bien distinguer le sens d'une transformation et l'opération à effectuer. En d'autres termes, une image ne peut jouer un rôle dans la résolution des problèmes additifs que dans la mesure où elle s'articule avec toutes les composantes sémantiques et numériques des données d'un problème, et où elle permet à la fois de les reconnaître et de les utiliser. Peu ou pas de matériel, images ou schémas, ni celui actuellement utilisé dans l'enseignement ni celui pris en compte dans les recherches sur la résolution des problèmes additifs, répond à ces exigences minimales.

Il ne s'agit pas de partir d'une classification des images quelle qu'elle soit, et de chercher ensuite quel type peut jouer un rôle dans la résolution des problèmes. Il faut, au contraire, partir de toutes les composantes intervenant non pas dans une catégorie particulière de problème mais dans les trois catégories, pour pouvoir construire le diagramme permettant de les faire manipuler par les élèves sans risque de confusion. Le recours à des images concrètes est pédagogiquement nécessaire pour susciter l'intérêt des enfants, mais il n'apporte rien pour la résolution des problèmes. La présentation de telles images ne peut didactiquement se faire qu'en superposition au diagramme des composantes de n'importe quel problème additif.

Références

BALDISSERI, F., D'AMORE, B., FASCINELLI, E., FIORI, M., GASTALDELLI, B., & GOLINELLI, P. (1994), Les ballons de Greta. In A. Gagatsis (éditeur), *Didactique des Mathématiques,* Thessaloniki: ERASMUS ICP-93-2001-11, 571–578.

BRISSIAUD, R. (1989), *Comment les enfants apprennent à calculer,* Paris : Éditions Retz.

CARNEY, R. N., & LEVIN, J. R. (2002), Pictorial illustrations still improve students' learning from text, Educational Psychology Review, **14(1),** 101–120.

DAMM, R. (1992), *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte,* Thèse, U.L.P. Strasbourg.

DUVAL, R. (2003), Décrire, visualiser ou raisonner : quels « apprentissages premiers » de l'activité mathématique ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **8**, 13–62.

DUVAL, R. (2005), Linguaggio, simboli, immagini, schemi...In quale modo intervengono nella comprensione in matematica e altrove? *Bolletino dei docenti di matematica*, **50**, 19–39.

DUVAL, R. (2006), A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics,* **61(1-2)**, 103–131.

ELIA, I., & PHILIPPOU, G. (2004), The functions of pictures in problem solving. In M. Johnsen Høines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, **2**, Bergen University College, Norway, 327–334.

ELIA, I. (2005), Immagini e modelli geometrici nella risoluzione di problemi di tipo additivo, *La matematica e la sua didattica,* **3**, 337–355.

ELIA, I., GAGATSIS, A., & DEMETRIOU, A. (2006), The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems, *Learning and Instruction*, **17**, 658–672.

ELIA, I., GAGATSIS, A., & GRAS, R. (2006), La « magie » et le pouvoir de l'image pour les petits enfants : application dans la résolution des problèmes du type additif, *Scientia Paedagogica Experimentalis,* **43**, 89–114**.**

GAGATSIS, A., & ELIA, I. (2004), The effects of different modes of representations on mathematical problem solving. In M. Johnsen Høines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, **2**, Bergen University College, Norway, 447–454.

GRAS, R. and ALS. (1996), *L'Implication Statistique*, *Collection associée à Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

GRAS, R., BRIAND, H., & PETER, P. (1996), Structuration sets with implication intensity. In E. Diday, Y. Lechevallier & O. Opitz (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Ordinal and Symbolic Data Analysis - OSDA 95*. Paris: Springer.

GRAS, R., PETER, P., & PHILIPPÉ, J. (1997), *Implicative Statistical Analysis, Proceedings of IFCS 96*, Tokyo: Springer-Verlag.

LERMAN, I.C. (1981), *Classification et analyse ordinale des données.* Paris : Dunod.

VERGNAUD, G. (1995), Problems of additive structures. In A. Gagatsis (Ed.), *Didactics of Mathematics: Theory and Research*, Thessaloniki: Art of Text (in Greek), 63–91.

Iliada ELIA
Iliada Ilia <iliada@ucy.ac.cy>
Centre for Educational Research and Evaluation,
Institut Pédagogique de Chypre
Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education

Appendice

Exemples de tâches proposées aux élèves du groupe expérimental