ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

Revue internationale de didactique des mathématiques

Rédacteurs en chef : ALAIN KUZNIAK & FRANÇOIS PLUVINAGE

IREM de Strasbourg
Université de Strasbourg

Volume 14 **2009**

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
ISSN 0987 - 7576

Rédacteurs en chef

ALAIN KUZNIAK
Département de mathématiques
IUFM d'Orléans-Tours
72 rue du Fg de Bourgogne
45000 Orléans
alain.kuzniak@orleans-tours.iufm.fr

FRANÇOIS PLUVINAGE
IREM de Strasbourg
7 Rue René Descartes
67084 Strasbourg
pluvin@math.u-strasbg.fr

Comité de rédaction

ALAIN BRONNER – Montpellier
VIVIANE DURAND-GUERRIER – Lyon
RAYMOND DUVAL – Lille
ATHANASIOS GAGATSIS – Chypre
FERNANDO HITT – Canada
CATHERINE HOUDEMENT – Rouen
MICHALIS KOURKOULOS – Crète
GUY NOËL – Mons
LUIS RADFORD – Canada
JEAN-CLAUDE RÉGNIER – Lyon
CARL WINSLOW – Danemark
MONCEF ZAKI – Maroc

Responsable de publication

PHILIPPE NUSS – Directeur de l'IREM de Strasbourg

Mise en page

ALEXANDRA CARMINATI – IREM de Strasbourg

Éditeur

IREM de Strasbourg
Université de Strasbourg
7, rue René Descartes
F - 67084 Strasbourg CEDEX
Tel. (33) 03 90 24 01 30
Fax (33) 03 90 24 01 65
Bibliothèque : (33) 03 90 24 01 61
http://irem.u-strasbg.fr
irem@math.u-strasbg.fr

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
VOLUME 14 – 2009

SOMMAIRE

ÉDITORIAL 2

Iliada ELIA (Chypre)
L'utilisation d'images dans la résolution de problèmes additifs : quels types d'images et quel rôle ?..... 5

Catherine HOUDEMENT (France)
Une place pour les problèmes pour chercher 31

Valériane PASSARO (Canada)
Obstacles à l'acquisition du concept de covariation et l'introduction de la représentation graphique en deuxième secondaire 61

Georges TOUMA (Canada)
Une étude sémiotique sur l'activité cognitive d'interprétation 79

Christian SILVY, Antoine DELCROIX (France)
Site mathématique d'une ROC : une nouvelle façon d'interroger un exercice ? 103

Khedidja KOUIDRI (Algérie)
Problèmes de l'enseignement de l'intégration au début de l'université en Algérie 123

Moncef ZAKI, Zahid ELM'HAMEDI (Maroc)
Éléments de mesures pour un enseignement des tests statistique 153

Charlampos LEMONIDIS, Ioannis PANAGIOTOPOULOS, Konstantinos NIKOLANTONAKIS (Grèce)
Les enseignants grecs face aux problèmes réalistes – Les caractéristiques des enseignants qui influencent les réponses réalistes 195

Lucie DeBlois (Canada)
Les contextes et les besoins à l'origine de la recherche collaborative..... 213

INSTRUCTIONS POUR LES AUTEURS 231

ÉDITORIAL

Une préoccupation commune à plusieurs des articles de ce volume est celle des représentations en mathématiques. C'est pour l'enseignement mathématique un problème majeur qui a surgi dès lors qu'il n'est apparu ni souhaitable, ni possible d'inscrire cet enseignement dans un paradigme structuraliste. Mais l'institution scolaire ne pouvait pas, faute d'études suffisamment approfondies sur le sujet, le prendre en compte pour adapter les programmes d'enseignement, alors même que le besoin de propositions pour une formation mathématique adaptée à la demande sociale et culturelle était urgent. Sa réponse a donc été pragmatique, s'appuyant sur l'expérience des uns, le savoir des autres, les désirs des uns et des autres. Si les résultats qui en ont découlé ont pu être assez satisfaisants en termes de formation mise en place, certaines questions clés étaient restées sans réponse. Ainsi, convient-il de mettre en place un enseignement des nombres réels pour toute la population, ou seulement pour la partie de la population qui se destine à des études techniques ou scientifiques ? Et quelle progression adopter pour cet enseignement ? Une autre question a surgi en France très récemment, quand une réforme de programmes envisagée pour la classe de Seconde (première année des lycées français) a suscité des réactions par rapport à une place de la géométrie jugée très insuffisante dans les propositions soumises à concertation. Mais quelle géométrie privilégier ? Plutôt celle des figures ou celle des transformations comme les symétries axiales ?

Des commissions de spécialistes (mathématiciens, didacticiens des mathématiques, professeurs de mathématiques et d'autres disciplines utilisatrices de mathématiques, membres des corps d'inspection) se sont réunies et ont écouté des intervenants extérieurs au monde de l'enseignement pour élaborer des textes d'orientation. En France, cela a été le cas de la commission qui a été dirigée par Jean-Pierre Kahane et dont les documents produits, consultables sur le site de la Société Mathématique de France, mériteraient d'être davantage connus encore qu'ils ne le sont actuellement. Mais de tels documents s'appuient par le force des choses sur ce qui a déjà été étudié. Dans bon nombre de cas, des réponses ne peuvent pas être élaborées sur la base de la concertation ou de la compilation de l'existant, elles demandent de nouvelles expérimentations, de nouvelles recherches.

Certes les articles de ce volume n'ont pas la prétention d'épuiser le sujet. Ils veulent plus modestement poser quelques briques d'un édifice de connaissances, tant théoriques qu'expérimentales, empiriques dirait-on dans certains pays, nécessaires pour donner aux représentations la place exacte qui leur revient pour que puisse se construire une formation mathématique solide mais ouverte, cohérente mais adaptable. Les contributions au présent volume des Annales nous sont venues d'Algérie, de Chypre, du Canada, de la France, de la Grèce et du Maroc.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 14, p. 3 – 4.
© 2009, IREM de STRASBOURG.

La convergence de préoccupations semblables dans divers pays du monde est sans aucun doute une condition sine qua non pour que les études entreprises soient fructueuses. Mais convergence ne signifie pas uniformité comme le colloque EMF (Espace Mathématiques Francophone) l'a encore montré. Ce colloque a réuni à Dakar plus de trois cents participants venant de la plus large communauté possible d'enseignants et de chercheurs concernés par l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Seul congrès international dans le domaine dont le français est la langue officielle, EMF a montré le dynamisme et la richesse des recherches en didactique dans l'univers francophone et une petite partie de ces réflexions figurera, nous l'espérons, dans le prochain numéro de la revue.

Comme thème central du colloque figurait la réflexion sur les enjeux de société et de formation qui se posent à l'enseignement des mathématiques en relation avec la question du développement. Il n'est pas question ici de résumer l'ensemble de ce colloque mais uniquement de vérifier, cette fois encore, que nombre de préoccupations apparaissent communes malgré la diversité des contextes de développement. Ainsi, dans tous les pays, la réduction drastique du nombre d'étudiants s'engageant dans des filières scientifiques conduit les chercheurs à s'interroger sur ce que certains considèrent comme une désaffection pour les mathématiques, désaffection d'autant plus préoccupante et paradoxale que les besoins de la société en personnel maitrisant les mathématiques n'ont jamais été aussi forts. Les étudiants préfèrent s'engager dans des filières plus séduisantes mais sans débouchés et de ce point de vue la situation sénégalaise illustre ce malaise quand la majorité des étudiants s'engagent dans des études littéraires alors que leur pays souffre d'un déficit considérable de scientifiques et de techniciens. Cette désaffection touche naturellement aussi les enseignants qui, dans les pays africains, se trouvent confrontés à des classes surchargées et à des salaires jugés insuffisants.

La nature et les contenus de l'enseignement des mathématiques peuvent-ils être tenus pour responsables de cet état de fait ? La question mérite d'être posée, au moment où de grandes évaluations internationales permettent d'apercevoir des distinctions fortes dans les finalités accordées à l'enseignement des mathématiques. Il ne s'agit plus de former au raisonnement une petite élite soigneusement sélectionnée mais de permettre à la plus grande partie de la population de comprendre l'usage qui peut être fait des mathématiques dans la vie professionnelle et quotidienne. Dans une conférence qui fut une des plus achevées qu'il ait été donné aux participants d'entendre, le professeur Paulus Gerdes du Mozambique a brillamment montré comment il articulait la riche tradition culturelle et artisanale africaine avec un enseignement des mathématiques en prise avec le monde réel et la recherche. Il reste à approfondir ce que peut être ce genre de voie dans les pays du Nord en donnant une âme et un sens fort à toute activité mathématique.

Alain KUZNIAK & François PLUVINAGE

ILIADA ELIA

L'UTILISATION D'IMAGES DANS LA RESOLUTION DE PROBLEMES ADDITIFS : QUEL TYPE D'IMAGES ET QUEL RÔLE ?

Abstract. Using pictures for solving additive problems: what kind of pictures and what role? – The majority of the research on additive problems has revealed two kinds of obstacles: the first is related to the position of the data in the scenario described by the text stating the problem and, second, to the distinction between positive or negative transformations of the data. This paper presents a large scale research about the difficulties in solving additive problems and the role of pictures in this kind of problem solving. In particular, we examine the case of the second class of additive structure problems proposed by Vergnaud: measure-transformation-measure or change problems. We have proposed to 1447 pupils of Primary Schools (grade 1 to grade 3) in Cyprus problems in verbal expression or in verbal expression accompanied with an informational picture. The analysis of the results based on the implicative statistical analysis proves that there is an influence of the type of representation and of the structure of the problem on problem solving. We discuss the theoretical and didactical implications of the findings of this research.

Résumé. Deux types d'obstacles ont été mis en évidence dans la majorité des recherches sur les problèmes additifs. Le premier est lié à la position des données dans l'énoncé, le second tient aux transformations des données, à opérer dans le sens positif ou négatif. L'article présente une recherche à grande échelle sur les difficultés dans la résolution de problèmes additifs et le rôle des images pour cette résolution. Nous examinons plus particulièrement la seconde catégorie de problèmes additifs distinguée par Vergnaud : mesure-transformation-mesure ou problèmes de changements. Nous avons proposé à 1447 élèves des trois premières années d'école primaire à Chypre des problèmes soit sous forme de texte, soit sous forme de texte accompagné d'une information figurale. L'analyse des résultats découlant de l'analyse statistique implicative démontre que le type de représentation et la structure du problème influent sur la résolution. Nous discutons les implications théoriques et didactiques des résultats de cette recherche.

Mots clés. École primaire, problèmes additifs, résolution de problème, images.

1. Introduction

La complexité que la plupart des problèmes additifs présente pour les élèves contraste fortement avec la simplicité des opérations arithmétiques à utiliser. Vouloir expliquer cette complexité par le fait que ces opérations porteraient sur les entiers relatifs, et non pas seulement sur les entiers naturels, ne dit en rien comment faire entrer les élèves dans la compréhension et la résolution de ces problèmes.

ANNALES de DIDACTIQUES et de SCIENCES COGNITIVES, volume 14, p. 5 – 29.
© 2009, IREM de STRASBOURG.

Vergnaud (1995) est le premier à en avoir montré la complexité. Prenant en compte la nature des données, il a distingué trois grandes catégories de problèmes. Toutes les recherches ont alors montré qu'il y avait deux obstacles difficiles à surmonter pour beaucoup d'élèves : la prise en compte de la position des données dans le scénario décrit par l'énoncé, spécialement lorsque la donnée manquante est en position initiale, et la distinction entre le sens positif ou négatif d'une transformation et les deux opérations arithmétiques, spécialement lorsque toutes les données sont des transformations.

Pour permettre aux élèves de surmonter ces obstacles, le recours à ce qu'on appelle de manière très générale les « images », c'est-à-dire des représentations iconiques, des schémas, *etc*., s'est imposé. En évoquant des situations « concrètes » familières, elles servent d'appui à la compréhension d'une présentation verbale ou même permettent d'éviter les difficultés d'un énoncé. Ainsi les manuels de l'école primaire à Chypre utilisent beaucoup une présentation par images dans l'introduction de notions et de problèmes (Elia, Gagatsis & Gras, 2006). Le problème didactique qui se pose est alors double. D'une part, il s'agit de déterminer quelles images peuvent remplir un rôle d'aide dans l'apprentissage de la résolution des problèmes additifs. De nombreuses recherches se sont engagées dans cette direction en proposant notamment une classification de types d'images (Carney & Levin, 2002 ; Elia & Philippou, 2004 ; Gagatsis & Elia, 2004). D'autre part, il s'agit d'examiner si les images proposées apportent réellement une aide pour résoudre non seulement les problèmes dans lesquels la donnée manquante est en position finale mais également ceux relatifs aux autres situations, en particulier ceux où la donnée est une transformation négative alors que l'opération arithmétique à effectuer est une addition et inversement.

Pour apporter des éléments de réponse à ces deux problèmes didactiques concernant le rôle des images dans la résolution des problèmes additifs, nous avons entrepris un grand travail d'enquête auprès de 1447 élèves des trois premiers niveaux de l'école primaire à Chypre. Pour cela, nous avons procédé, dans certaines classes des trois niveaux, à des séquences d'enseignement centrées sur l'utilisation d'un type particulier d'images, que nous avons appelées « informationnelles » parce que celles ci présentent toutes les données concrètes (Elia, 2005; Elia, Gagatsis & Demetriou, 2007), ainsi que, dans d'autres, sur une utilisation de la droite numérique. Dans cet article nous nous proposons d'analyser la signification des résultats obtenus et d'en discuter la portée pour les deux problèmes didactiques que l'utilisation des images soulève.

Pour cela, il nous faudra d'abord revenir sur la manière de laquelle on aborde habituellement ces deux problèmes. La question fondamentale est celle des correspondances et des non correspondances entre le type d'image choisi et les différents aspects constituant la complexité des problèmes additifs. Autrement dit,

l'interprétation des résultats dépend de l'analyse de la relation entre les caractéristiques du type de représentation choisi et les composantes sémantiques et numériques des données d'un problème additif. Dans quelle mesure les images utilisées permettent-elles de reconnaître et de distinguer toutes les composantes à prendre en compte dans la résolution des problèmes additifs ? C'est pourquoi nous commencerons par l'analyse des composantes sémantiques et numériques constitutives des problèmes additifs.

Nous présenterons ensuite les résultats obtenus dans notre enquête, en nous limitant à ceux concernant l'utilisation des images informationnelles qui présentent toutes les données concrètes. Nous verrons à la fois leur apport et leur limite.

L'interprétation de la portée de ces résultats nous ramènera évidemment à la complexité des problèmes additifs et à la question des conditions pour qu'un type de représentation, quel qu'il soit, permette de reconnaître et d'en prendre en compte les différentes composantes (Duval, 2006). Cela relève d'une discussion théorique qui dépasse les conclusions des analyses statistiques, lesquelles restent nécessairement restreintes au corpus des données recueillies et au type des tâches qui ont permis de les recueillir. Nous consacrerons la troisième partie à cette discussion.

2. La complexité des problèmes additifs et des images utilisées

Les problèmes de mathématiques qui se présentent sous la forme de problèmes posés à partir de la réalité ont une complexité spécifique. Les difficultés que les élèves rencontrent face à ce genre de problème ne peuvent s'expliquer ni par celles des propriétés et des outils mathématiques à utiliser, ni par celles de la lecture de l'énoncé. Cela apparaît d'une manière paradoxalement évidente avec les problèmes les plus élémentaires et les plus concrets qui soient, les problèmes additifs à une opération. Analyser ce qui fait la complexité de ces problèmes est la condition pour pouvoir interpréter les productions des élèves et identifier les facteurs permettant d'apprendre à les résoudre.

Les éléments constitutifs d'un problème sont ses données. Elles se présentent sous deux formes. D'une part celles qui sont explicitement données pour initialiser le traitement mathématique de résolution. D'autre part celle à laquelle doit conduire la résolution, qui est généralement présentée dans la question, et que nous appellerons la donnée manquante. En effet, dans le contexte d'une description mathématique complète, ou suffisante, d'une situation réelle, la donnée manquante du problème est interchangeable avec les données fournies. Car selon la donnée que l'on supprime dans cette description mathématiquement suffisante, on fabrique des problèmes qui peuvent être plus ou moins différents quant à la procédure de résolution mais qui restent les mêmes quant au processus de description

mathématique de la situation réelle et même quant aux outils mathématiques utilisés (Duval, 2003, p. 23).

Il y a une variation considérable dans la présentation des données d'un problème. Pour certains problèmes elles peuvent être présentées à l'état brut, telles qu'on les trouve dans la vie réelle. Mais elles peuvent également être présentées par des représentations sémiotiquement hétérogènes : images, schémas, symboles, description linguistiques. Et cela pose un double problème, celui sémiotique de la correspondance, ou non, entre ces différents types de représentation et celui, cognitif, d'une reconnaissance par l'élève de la même donnée à travers des représentations différentes.

Les trois aspects à envisager pour saisir la complexité des problèmes additifs sont décrits ci-après. Il n'est peut-être pas inutile de souligner que la notion de donnée, comme élément constitutif de ce genre de problèmes, est irréductible à la notion générale d'information. En effet, les données des problèmes considérés comportent presque toujours deux dimensions sémantiques qui sont indissociables, bien que la présentation des données conduise souvent à les faire apparaître sous la forme de deux informations séparées. Ces deux informations sont distinctes et sémantiquement indépendantes :

- l'une sur la transformation ou l'état exprimée par le verbe porteur d'une information numérique ou une relation : « gagne 3 », « perd 4 », « plus grand que 4 », « j'avais 4 » ;
- l'autre sur la place de cette transformation ou relation ou de cet état dans le scénario décrit « à la première partie », « en tout », « hier » …

La compréhension mathématique des phrases de l'énoncé (c'est-à-dire la compréhension permettant de résoudre le problème) exige que l'on considère ces deux informations comme étant une seule et même donnée du problème. Si on ne le fait pas, on est conduit à convertir pour toutes les catégories de problèmes :

« gagne 3 » en « + 3 »

« perd 4 » en « — 4 »

ce qui conduit à une bonne réponse pour certaines catégories de problèmes et à une erreur systématique pour les autres catégories de problèmes et ce qui rend incompréhensible l'explication de la solution (même par de futurs enseignants de primaire qui n'on pas fait de math !).

Autrement dit chaque donnée du problème est composé par un couple de deux informations

{à la seconde, perd 4} {hier, j'avais 4} {le premier est plus grand que 4}

C’est ce que Duval appelle les deux dimensions sémantiques d’une donnée de problème (Duval, 2005).

En outre, la référence à une situation de la réalité implique que l’on donne des informations qui ne sont pas pertinentes du point de vue d’une description mathématique de cette situation.

2.1. La complexité relative au choix des données par rapport au traitement mathématique à effectuer

En se référant à la nature des données prises en compte dans un problème additif et, également à la place de la donnée manquante à retrouver, G. Vergnaud a montré que tous les problèmes additifs ne présentaient pas la même complexité pour les élèves (Vergnaud, 1995).

La nature des données porte sur le fait qu’elles sont des mesures ou qu’elles se réfèrent à une transformation dont il faut reconnaître la valeur positive ou négative mais qu’il ne faut pas confondre avec l’opération arithmétique à effectuer. Ainsi, pour un problème additif à une seule opération, on a trois catégories de problèmes additifs. En excluant les deux cas extrêmes où toutes les données sont soit des mesures soit des transformations, nous avons celui où nous avons une transformation et deux mesures selon l’ordre « mesure (état), transformation, mesure (état) ».

Lorsque l’une des données est une transformation, l’ordre des données devient important et la place de la donnée manquante à retrouver (la mesure initiale, la transformation ou la mesure finale) s’avère être aussi un facteur important de difficulté. **Car, alors, la place de la donnée manquante intervient dans le choix de l’opération à faire : addition ou soustraction.** De nombreuses études ont montré qu’à tous les niveaux du primaire, les problèmes portant sur la recherche de la mesure finale sont les plus facilement réussis et que ceux portant sur la mesure initiale sont ceux qui s’avèrent systématiquement les plus difficiles (Adetula, 1989 ; Nesher et al., 1982).

En nous limitant à la catégorie intermédiaire définie par Vergnaud (1995) et en prenant en compte la place de la donnée manquante à retrouver, on peut donc distinguer six types de problèmes additifs (Figure 1). Deux de ces types de problèmes, Pc et Na, se situent aux extrêmes d’une échelle de complexité, telle qu’on peut l’observer régulièrement auprès d’élèves de niveaux différents.

On peut voir sur le tableau de la Figure 1 que la transformation ne doit pas être confondue avec l’opération arithmétique, le choix de celle-ci dépendant autant de la place de la donnée manquante que de la transformation. Pour certains types de

problèmes on peut même observer une non congruence entre la transformation et l'opération arithmétique.

1. Valeur de la transformation en tant que donnée	***Positive (b>0) :*** *(P)*			***Négative (b<0) :*** *(N)*		
2. Position de la donnée manquante à retrouver	*Quantité initiale (a)*	*Transfor-mation (b)*	*Quantité finale (c)*	*Quantité initiale (a)*	*Transfor-mation (b)*	*Quantité finale (c)*
3. Opération arithmétique avec les deux données	Sous-traction	Sous-traction	Addition	Addition	Soustrac-tion	Soustrac-tion
Codage des types de problème	Pa	Pb	Pc	Na	Nb	Nc

Figure 1 : Les six types de problèmes additifs pour la catégorie « mesure, transformation, mesure ».

2.2. La complexité relative au choix de la représentation des données du problème

Les problèmes additifs, comme la plupart des autres problèmes, sont proposés aux élèves sous la forme d'un **énoncé**. La prédominance de la présentation verbale tient aux deux contraintes propres à l'élaboration de ce genre de problème. Tout d'abord il faut décrire la situation réelle à laquelle renvoient les données choisies. Ensuite, il est nécessaire de formuler la question qui fixe l'objectif de la résolution, par exemple, retrouver la troisième donnée manquante.

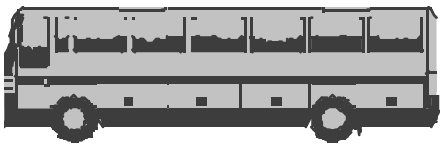
Cependant, la similitude des énoncés pour des types de problèmes différents (Figure 1) peut être un obstacle. Aussi pour ne pas subordonner la compréhension du problème à la compréhension de son énoncé, on accompagne souvent les énoncés avec une image illustrant un aspect de la situation évoquée ou les données du problème. Car on considère comme évident que les images doivent faciliter la compréhension des énoncés de problème verbaux et, par suite, leur résolution des problèmes. Il suffit d'ouvrir les manuels d'enseignement primaire. Mais ici la gamme des images possibles est très large et il est nécessaire de distinguer différents types de représentations auxiliaires. Le critère le plus souvent retenu est le rôle que l'image est supposée devoir jouer pour la compréhension de l'énoncé.

Carne et Levin (2002), par exemple, distinguent cinq fonctions que les images peuvent remplir pour faciliter la compréhension d'un texte. Les images décoratives

qui ont peu de relation avec le texte, les images évocatrices qui illustrent une partie du texte, les images organisatrices qui fournissent un schéma relatif au contenu du texte, les images interprétatives pour clarifier un point difficile du texte et les images transformationnelles destinées à améliorer le rappel de l'information au cours de la réflexion. Cette classification purement fonctionnelle semble cependant difficile à utiliser pour les énoncés de problèmes.

Par exemple l'image accompagnant l'énoncé de problème suivant est-elle décorative ou évocatrice ?

> *Dans un bus il y avait initialement 8 passagers. D'autres passagers sont montés lors d'un arrêt. On en a alors compté 14 en tout. Combien de passagers sont montés lors de l'arrêt ?*



Si on considère la situation concrète globale du problème, l'image est évocatrice. Mais si on considère que seules les données du problème sont importantes — et alors il faut oublier qu'il s'agit de passagers montant ou descendant lors d'un arrêt, ce qui revient à considérer l'évocation d'une situation concrète comme inutile — l'image est décorative. En fait la distinction entre image décorative et image évocatrice est non pertinente pour les énoncés de problèmes. De même on peut s'interroger sur les images organisatrices. Les schémas ternaires, et cependant unidimensionnels, de Vergnaud (1995) seraient dans cette classification des images organisatrices. Mais peut-on encore parler d'image si on s'en tient à l'opposition générale entre icone et symbole ? Ces schémas qui n'ont aucune relation de ressemblance avec les différentes situations concrètes évoquées dans les problèmes additifs ne peuvent pas être considérés comme des images.

En nous appuyant sur des observations antérieures faites dans le cadre de l'enseignement primaire à Chypre, sur le rôle des images dans la résolution de problèmes additifs (Elia & Philippou, 2004 ; Gagatsis & Elia, 2004 ; Elia et al., 2007), nous avons été conduit à distinguer, outre les schémas de Vergnaud (1995), le recours à trois types d'images possibles : les images décoratives, ou évocatrices, les images matériau qui représentent quelques unes des données et qui peuvent servir de support à une opération de comptage, et les images que nous appellerons informationnelles qui présentent toutes les données concrètes. Ce sont ces dernières qui vont retenir notre attention parce qu'elles sont plus complètes et plus opératoires que les précédentes. Nous les avons appelées « images informationnelles » (Elia, 2005 ; Elia et al., 2007) mais nous aurions pu aussi bien

les appeler « séquence des données » (Figure 2) puisqu'elles présentent deux des trois données constituant ce type de problème et qu'elles marquent également la place de la donnée manquante à retrouver (l'image vide).

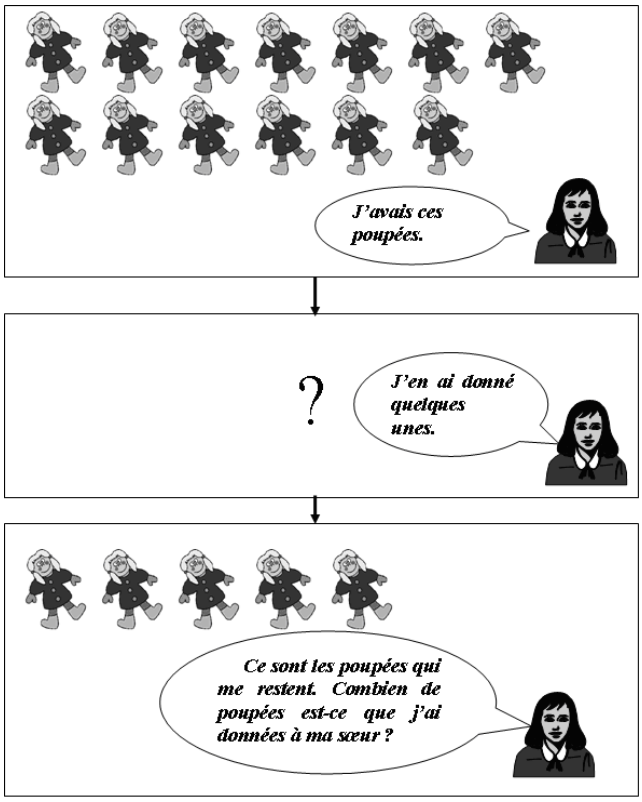


Figure 2 : Image informationnelle pour un problème additif de type Nb.

Les deux images qui présentent les deux données nécessaires pour retrouver la troisième **sont doublement iconiques**. Non seulement elles représentent des poupées, mais elles représentent une **COLLECTION FINIE** de poupées. C'est évidemment sous cet aspect de collection finie d'items qu'elles sont intéressantes pour la résolution, puisqu' elles servent de support pour une opération de comptage (Brissiaud, 1989). **L'image vide ne présente pas une donnée du problème mais seulement la position de la donnée manquante à retrouver dans le scénario de la micro histoire racontée.**

Il est donc important de ne pas confondre les deux types d'images. Deux représentent des collections finies et également une place dans le scénario de la micro histoire et l'image vide représente seulement une position. Ainsi, dans la figure 2, on peut inverser les positions de deux collections finies, sans changer la

position de l'image vide, ce qui change le sens de la transformation et fait passer d'un problème de Type Nb à un problème de type Pb. Ce changement peut être mineur dans la mesure où l'opération arithmétique reste la même.

Les légendes insérées sous forme de bulle comme dans une bande dessinée sont en partie redondantes. On remarquera que la question insérée dans la légende de la troisième image aurait aussi bien pu l'être dans l'image vide.

Nous pouvons donc avoir pour les six types de problèmes additifs de la figure 1 deux types différents de présentation : l'une purement verbale et l'autre sous forme d'une séquence d'images informationnelles (Figure 3).

Représentation verbale	**V (Pa)**	**V (Pb)**	**V (Pc)**	**V (Na)**	**V (Nb)**	**V (Nc)**
Représentation iconique	**I (Pa)**	**I (Pb)**	**I (Pc)**	**I (Na)**	**I (Nb)**	**I (Nc)**

Figure 3 : Variation dans la représentation des données de problèmes additifs.

2.3. Le problème des correspondances entre les contenus de deux représentations différentes des mêmes données

Nous avons en fait des représentations différentes des données : sous la forme iconique d'une collection finie, sous la forme d'une écriture décimale de nombres et sous la forme verbale indiquant s'il s'agit d'une mesure ou d'une transformation. Ces trois formes sont-elles équivalentes, c'est-à-dire interchangeables ? Par exemple peut-il y avoir une image d'une transformation ou celle-ci ne requiert-elle le recours au langage ou l'emploi d'un symbole ? Les observations suivantes nous permettront de mieux comprendre le problème.

Bruno D'Amore et ses collaborateurs ont proposé à 47 enfants de 5 ans dans les écoles maternelles de Bologne, Castel San Pietro, un problème additif de type VNc avec l'énoncé suivant (Baldisseri et al., 1994) :

Greta a reçu six ballons. Deux ballons éclatent. Combien de ballons lui reste-t-il ?

Vingt-cinq enfants ont seulement dessiné les ballons ou leur schématisation par des cercles (Figure 4).

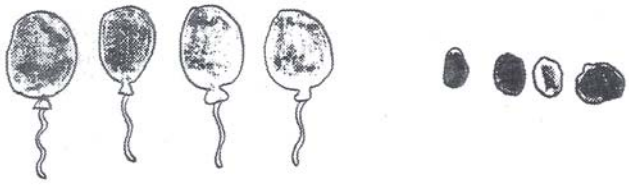


Figure 4 : Représentations schématisées des seules données numériques.

Ces enfants se sont donc focalisés sur l'aspect collection finie et ont produit leur réponse sous cette forme, comme si cette représentation concrète avait servi de support pour le traitement. On voit ici en quoi le recours aux images dans les problèmes additifs peut être intéressant : il induit et guide une procédure de traitement par comptage. Cette procédure réussit évidemment pour des petits nombres et pour des problèmes toutes les données ne sont pas des transformations. Mais d'autres (16) ont aussi dessiné le personnage de l'histoire (Greta) avec des ballons (Figure 5).

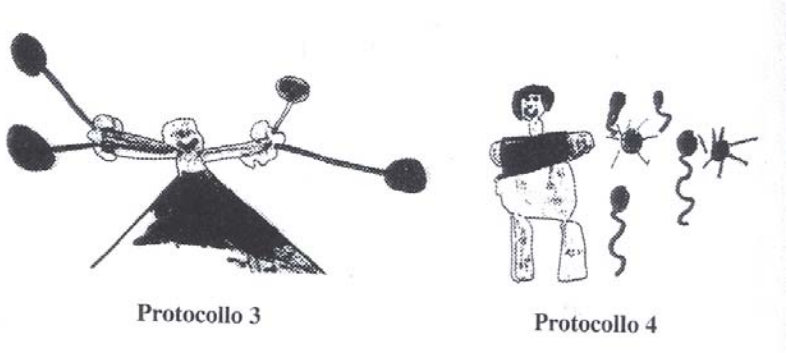


Figure 5 : Deux représentations iconiques des données dans leur contexte « réel ».

La réponse intéressante est évidemment celle du Protocollo 4 (Figure 5), car elle est un essai pour représenter une transformation négative. Il y a d'une part des rayons qui entourent pour signifier l'éclatement de deux ballons et d'autre part deux autres ballons qui ne semblent pas avoir éclaté puisque leurs fils pendent. Or les rayons relèvent ici d'un codage qui est purement conventionnel. De manière iconique cela pourrait aussi bien représenter deux étoiles. Il aurait été intéressant de voir ce qui aurait été produit avec un énoncé suivant :

Greta a reçu six ballons. Elle perd deux ballons. Combien de ballons lui reste-t-il ?

Cet exemple permet de voir à la fois l'utilité et les limites des images pour la résolution de problèmes additifs. Dans la mesure où elles représentent des collections finies d'objets, schématisés ou non, elles permettent d'effectuer un comptage des collections qui correspondent aux données. Elles permettent donc en ce sens de résoudre certains types de problèmes additifs. Mais elles ne permettent pas de représenter des transformations sans qu'elles soient codées par un symbole commun ou par un symbole purement contextuel. Le tableau suivant (Figure 6) montre la complexité sémio-cognitive sous-jacente à l'utilisation de données de type transformation :

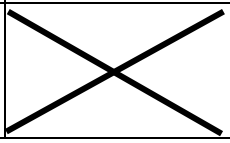
Les dimensions sémantiques d'une transformation	Représentation iconique (image)	Représentation symbolique	Désignation ou description verbale
1. **QUANTITÉ**	Une collection finie ○ ○ ○ ○	Écriture décimale (4) ou marque biffant une autre représentation	Dénomination orale : « quatre »
2. **SENS D'ACCROISSEMENT OU DE DIMINUTION**		entier positif (+4) ou négatif (- 4)	Verbes antonymes : gagner/perdre, donner/recevoir…

Figure 6 : Les représentations possibles d'une donnée de type « transformation ».

Lorsque l'on veut représenter les données d'un problème par des images, il n'y a donc que deux solutions pour signifier une transformation. La première consiste à recourir à un codage conventionnel, ce qui revient à introduire un symbole sur **une image** ou insérer une précision verbale (Duval, 2005). L'autre solution consiste à la représenter par **deux images**, l'un correspondant à l'état antérieur de la transformation et l'autre à l'état final. C'est alors par **la différence entre ces deux images** que la transformation se trouve indirectement représentée. Dans les séquences d'images informationnelles que nous avons données aux élèves, nous avons utilisé ces deux types de moyens.

3. Une expérience d'utilisation des images informationnelles en classe

L'objectif de cette expérience était d'évaluer l'apport didactique de la représentation iconique des données des problèmes additifs par rapport à leur représentation verbale dans un énoncé. Comme nous l'avons vu, le recours à ce type de représentation doit répondre à deux exigences minimales : présenter les deux données explicites de manière à servir de support à une opération de comptage et montrer la place de la donnée manquante par rapport aux deux données explicites. Notre expérience s'est limitée à la deuxième catégorie de problèmes additifs, celle où une seule de ces trois données constituant le problème est de type « transformation ».

Cette expérience a été faite à trois niveaux, avec des élèves de 6-7 ans, 7-8 ans et 8-9 ans dans 20 classes d'écoles primaires de Chypre. Son objectif était l'introduction de représentations auxiliaires pour résoudre les différents types de problèmes additifs. Elle ne s'est pas limitée à la seule utilisation des images informationnelles mais elle portait également sur le recours à la droite numérique. Cependant, la présentation des données par une séquence d'images étant une

pratique inhabituelle dans l'enseignement, nous avons prévu une séquence particulière d'enseignement pour familiariser les jeunes élèves avec cette présentation des problèmes additifs.

3.1. Une séquence d'enseignement pour introduire les élèves à ce type de représentation

Cette séquence s'est déroulée sur cinq séances de 40 minutes chacune, au cours d'une semaine. Elle a été faite par des enseignants qui avaient préalablement suivi une formation sur les objectifs et l'organisation de l'expérience. L'introduction de ce type de représentation s'est faite en deux étapes.

Dans une première étape les élèves ont travaillé successivement avec trois présentations différentes des données pour les six types de problèmes additifs distingués plus haut (Figure 1). Les problèmes étaient chaque fois introduits en suivant l'ordre de difficulté croissante déterminé par la place de la donnée manquante, c'est-à-dire Pc, Nc, Pb, Nb, Pa, Na.

- **L'utilisation d'une présentation matérielle des données.**

  Les élèves disposaient d'objets manipulables (des cubes) et d'une boîte. Au fur et à mesure de l'indication verbale des données d'un problème, les élèves mettaient ou enlevaient des cubes. Cela devait inciter à distinguer, dans la transformation, d'une part la quantité de cubes et d'autre part le sens du changement de la quantité. Les élèves ont été ensuite invités à comparer les problèmes sur lesquels ils avaient travaillé pour déterminer ce que leurs résolutions avaient de commun.

- **La séquence d'images informationnelles.**

  L'enseignant l'introduit à l'aide d'un projecteur, ce qui permet de s'arrêter sur chacune des trois images. Une description verbale de chacune des trois images en relation avec les problèmes additifs déjà vus dans la phase précédente est alors sollicitée.

- **Présentation de l'énoncé seul.**

  A partir des énoncés, l'enseignant tente de faire prendre conscience des correspondances avec les deux présentations précédentes.

Dans une deuxième étape, trois activités ont été proposées centrées sur l'interprétation des images informationnelles.

- **Une activité des rangements possibles de trois images :** Pour chacun des rangements possibles en une séquence, une description verbale du problème correspondant était demandée (travail individuel).

- **Des tâches de reconnaissance :** Parmi plusieurs énoncés, identifier celui qui correspond à une séquence d'images informationnelles donnée. Une justification du choix était demandée (Voir le diagramme 1 de l'appendice comme exemple de cette activité).
- **Des tâches centrées sur le contenu verbal des bulles et la nature des données :** Les images permettent de représenter les quantités, la séquence d'images permet de représenter la place de la donnée manquante. Mais la nature de la donnée (mesure ou transformation) ainsi que le sens de la transformation (augmentation ou diminution de la quantité) sont indiquées verbalement dans les bulles. Pour que l'attention des élèves se centre sur cette deuxième dimension sémantique des données et non pas sur la première représentée de façon iconique par des collections, deux tâches ont été proposées. Les élèves devaient eux-mêmes remplir l'une des bulles sur la séquence d'images (Voir le diagramme 2 de l'appendice). Ensuite après avoir échangé leur séquence avec d'autres élèves, ils devaient résoudre le problème. Une deuxième tâche consistait à transformer directement un énoncé de problème en fonction d'une bulle.

3.2. Un questionnaire pour évaluer l'apport didactique des séquences d'images informationnelles

Au terme de l'expérience nous avons fait passer un questionnaire aux élèves des trois niveaux qui avaient suivi cette séquence d'enseignement, ainsi qu'à des élèves d'autres classes qui n'avaient pas suivi cette séquence d'enseignement

Groupe 1 **Contrôle**			Groupe 2 **Expérimental**		
Classes A (6-7 ans)	Classes B (7-8 ans)	Classes C (8-9 ans)	Classes A (6-7 ans)	Classes B (7-8 ans)	Classes C (8-9 ans)
275	219	252	114	116	127

Figure 7 : Répartition de la population ayant passé le questionnaire.

Le tableau de la Figure 7 présente la répartition des élèves ayant passé le questionnaire. Le questionnaire présentait les six types de problèmes additifs (Figure 1) avec une variation sur la modalité de présentation : énoncé ou séquence d'images informationnelles (Figure 3).

4. Résultats et analyse des résultats du questionnaire

Nous allons d'abord présenter les résultats en fonction des pourcentages de réussites (Figure 8), puis leur analyse à partir de l'analyse des similarités de I.C. Lerman (Lerman, 1981) et l'analyse statistique implicative de R.Gras (version 3.5 du logiciel CHIC) (Gras, Briand & Peter, 1996 ; Gras et al., 1996 ; Gras, Peter et Philippé, 1997)

4.1. Les résultats

Type de problème	Niveaux	Nb.	VPa %	VNa %	VPb %	VNb %	VPc %	VNc %	IPa %	INa %	IPb %	INb %	IPc %	INc %
Groupe 1 **Contrôle**	6-7 ans	*275*	25,5	28,0	27,3	38,2	68,4	51,3	14,9	26,2	21,1	27,6	56,4	53,1
	7-8 ans	*219*	63,3	68,9	69,3	73,3	90,0	74,1	43,0	48,6	49,4	60,6	75,3	83,3
	8-9 ans	*252*	77,0	81,7	81,7	86,1	94,0	90,5	66,3	62,7	68,3	74,6	82,5	87,3
Groupe 2 **Expérim.**	6-7 ans	*114*	45,6	40,4	48,2	50,9	71,9	52,6	32,5	31,6	39,5	42,1	62,3	62,3
	7-8 ans	*116*	75,9	75,9	80,2	76,7	94,0	83,6	64,7	52,6	69,8	72,4	81,9	87,1
	8-9 ans	*127*	85,0	83,5	85,8	89,8	95,3	92,9	79,5	71,7	80,3	80,3	92,1	87,4

Figure 8 : Pourcentages de réussites.

Pour faciliter la lecture de ce tableau d'occurrences rappelons l'analyse et le codage des six types de problèmes additifs (Figure 9).

	Transformation positive	Transformation négative
Place de la donnée manquante ***a*** *(initial)* ***c*** *(final)*	P ***a*** soustraction P ***b*** soustraction P ***c*** addition	N ***a*** addition N ***b*** soustraction N ***c*** soustraction

Figure 9 : Codage des problèmes du questionnaire.

Nous avons donc quatre séries d'occurrences de réussites pour les six types de problèmes additifs : en modalité verbale avec les élèves du groupe contrôle, puis avec ceux du groupe expérimental, ensuite avec en modalité image avec les élèves du groupe contrôle, puis avec ceux du groupe expérimental. La comparaison de ces quatre séries d'occurrences nous permet de faire les premières observations suivantes.

(1) La place de la donnée manquante reste le facteur dominant dans la difficulté des problèmes additifs. On relève les scores les plus faibles pour Pa et Na dans les deux modalités de présentation, V et I. Cependant cela ne semble presque plus

jouer, en modalité verbale, pour les élèves de 8-9 ans ayant suivi la séquence d'enseignement.

(2) Les taux de réussite pour la présentation verbale sont nettement plus élevés pour le groupe expérimental que pour le groupe contrôle. Cela est particulièrement net avec les élèves de 6-7 ans et avec ceux de 7-8 ans.

(3) Mais les taux de réussites pour la présentation par image restent inférieurs dans le groupe expérimental à ceux de la présentation verbale.

(4) Les taux de réussites pour la présentation par image sont supérieurs dans le groupe expérimental à ceux du groupe contrôle, du moins pour les élèves de 6-7 ans et ceux de 7-8 ans. Ils diminuent fortement pour les élèves de 8-9 ans.

Niveau	6-7 ans		7-8 ans		8-9 ans	
Groupe	Contrôle	*Expér.*	Contrôle	*Expér.*	Contrôle	*Expér.*
0-19 %	IPa	-	-	-	-	-
20-39 %	IPb, VPa, INa, VPb, INb, VNa, VNb	*INa, IPa*	-	-	-	-
40-59 %	VNc, INc, IPc	*IPb, VNa, INb, VPa, VPb, VNb, VNc*	IPa, INa, IPb	*INa*	-	-
60-79 %	VPc	*IPc, INc, VPc*	INb, VPa, VNa, VPb, VNb, VNc, IPc	*IPa, IPb, INb, VPa, VNa, VNb*	INa, IPa, IPb, INb, VPa	*INa*
80-100%	-	-	INc, VPc	*VPb, IPc,VNc, Inc, VPc*	VNa, VPb, IPc, VNb, INc, VNc, VPc	*IPa, IPb, INb, VNa, VPa, VPb, INc, VNb, IPc, VNc, VPc*
N	275	*114*	219	*116*	252	*127*

Figure 10 : Évolution du taux des réussites en fonction des niveaux.

La présentation du taux des réussites en fonction des niveaux (Figure 10) met en évidence ces premières observations. La comparaison des niveaux permet de faire trois nouvelles observations :

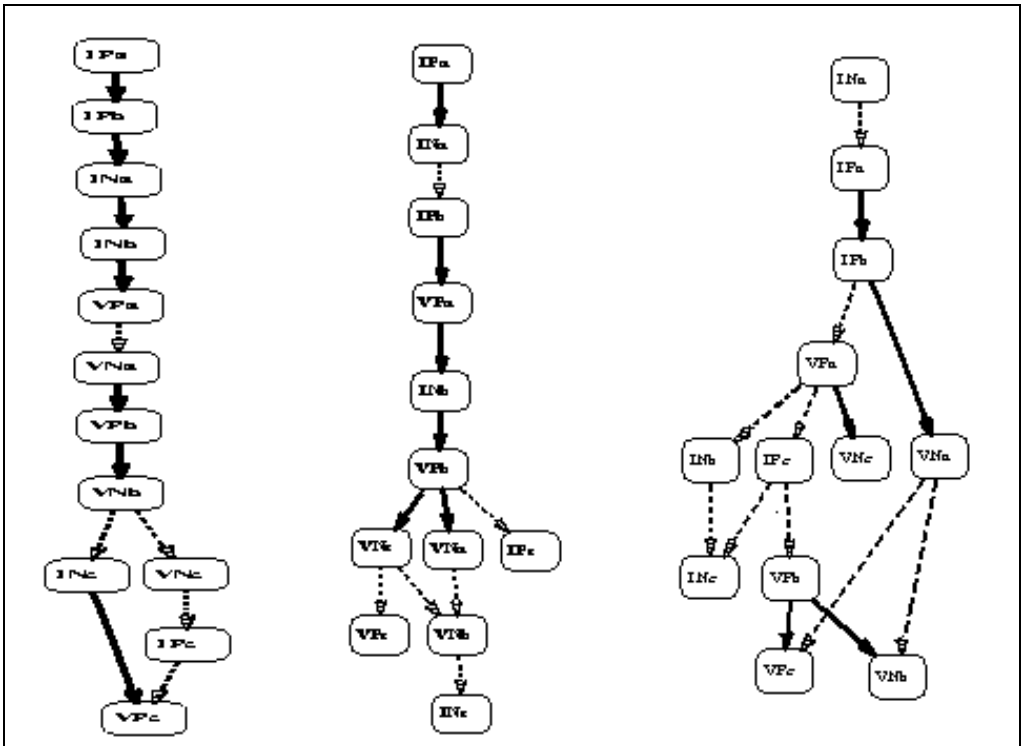
(5) On peut remarquer que, pour les deux premiers niveaux, l'enseignement a permis une augmentation du taux de réussites pour la plupart des problèmes. Cela se traduit par un passage dans la tranche supérieure des taux de réussite.

(6) Cela est moins net pour les élèves de 7-8 ans puisque, pour la plupart des types de problèmes additifs, on est déjà dans la tranche supérieure des taux de réussite.

(7) Il y a une plus grande difficulté de la modalité image par rapport à la modalité verbale lorsque la donnée manquante correspond à l'état initial du scénario.

4.2. Ce que l'analyse implicative met en évidence dans ces résultats

Les réponses des six groupes d'élèves ont été soumises à une analyse implicative.



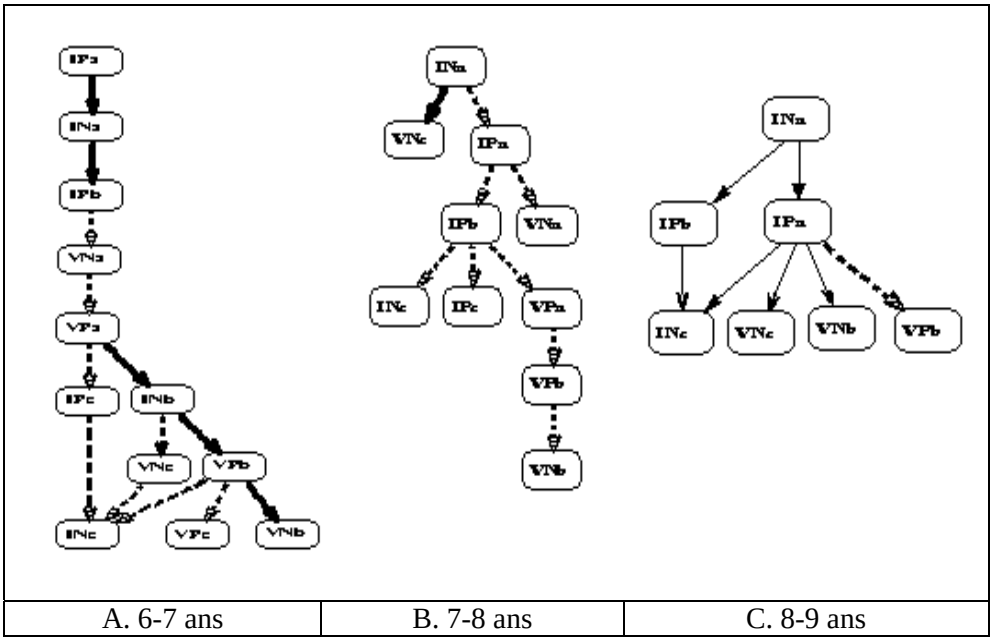
A. 6-7 ans	B. 7-8 ans	C. 8-9 ans

Figure 11 : Les diagrammes implicatifs des réponses du groupe contrôle.

Nous pouvons comparer les graphes d'implication d'une part pour les réponses du groupe contrôle (Figure 11) et d'autre part pour les réponses du groupe expérimental (Figure 12).

(8) Il faut se rappeler ici que les taux de réussites les plus faibles ont été enregistrés pour la modalité image, avec les élèves du groupe contrôle. Il n'est donc pas étonnant que les élèves ayant réussi aux problèmes de type Pa, Pb, Na, dans la modalité de présentation image informationnelle, sans avoir bénéficié de l'introduction à leur utilisation, aient aussi réussi fortement aux autres types de problèmes dans la modalité de présentation verbale. Les taux de réussites des élèves de 7-9 ayant été plus élevés (entre 66% et 87%) que ceux des élèves plus jeunes, expliquent la différence du chemin d'implications.

(9) Le point intéressant est l'inversion d'ordre entre les problèmes Pa et Na lorsqu'on passe du niveau 6-7 ans à celui de 7-8 ans. Pour comprendre ce phénomène il ne faut pas oublier le phénomène de non congruence qui surgit entre le sens de la transformation et l'opération arithmétique à effectuer (Figures 1 et 9). L'image, qui présente des collections et induit de ce fait la continuation du comptage sur les deux collections d'objets, favoriserait l'opération d'addition. Cela peut expliquer un score de réussite plus grand pour le problème Na que pour le problème Pa chez les plus jeunes élèves (6-7 ans).



A. 6-7 ans	B. 7-8 ans	C. 8-9 ans

Figure 12 : Les diagrammes implicatifs des réponses du groupe expérimental.

La comparaison de ces diagrammes implicatifs avec les précédents permet de faire deux nouvelles observations.

(10) Les deux problèmes Pa et Pb, même après une séquence d'enseignement spécifique, restent relativement plus difficiles que les autres et, par suite, la

réussite à ces problèmes reste la plus discriminante pour la réussite aux autres types de problèmes quelle que soit la modalité de présentation.

(11) C'est pour le niveau des élèves de 7-8 ans que l'apport des images semble le plus spectaculaire.

4.3. Discussion : rôle et apport de l'utilisation d'une séquence d'images informationnelles dans la résolution de problèmes additifs ?

La comparaison des réponses obtenues à chacun des trois niveaux et dans deux conditions différentes d'introduction, l'une après enseignement spécifique et l'autre sans enseignement, nous ont permis de faire plusieurs observations. Elles convergent sur trois points qui paraissent essentiels non seulement pour la question du rôle des images dans la résolution de problèmes additifs, mais également sur ce qui fait la difficulté réelle de certains types de problèmes additifs.

L'apport des images dans la résolution des problèmes change selon le niveau. On ne peut donc pas donner une réponse unique qui couvrirait tout le curriculum de l'enseignement primaire. L'apport est important pour les élèves de 6-7 ans et plus encore pour ceux de 7-8 ans, mais il semble devenir négligeable avec les élèves de 8-9 ans, du moins si on le rapporte au coût d'enseignement de son introduction.

L'apport de la représentation utilisée dans notre expérience tient à ce qu'on associe deux types d'images différents correspondant à deux aspects différents des données du problème. Comme on peut le voir dans le tableau ci-dessous (Figure 13), les caractéristiques respectives de ces deux types d'image sont d'une part la représentation de collections finies qui sert de support à un comptage direct et, d'autre part, l'image vide qui permet de bien mettre en évidence la place de la donnée manquante. C'est l'image vide qui semble avoir joué un rôle décisif, au moins pour tous les problèmes dans lesquels la donnée manquante ne concerne pas l'état initial. Les élèves plus jeunes (6-7 ans) semblent avoir été moins sensibles que les élèves de 8-9 ans à l'image vide et avoir appliqué directement l'opération de comptage sur les deux images représentant des collections finies.

Il reste cependant le fait que le taux de réussites pour la présentation verbale des données reste presque toujours supérieur à celui de la présentation par des images, même si cette dernière permet avec une amélioration importante des réussites avec les plus jeunes élèves. Nous retrouvons ici **le problème de la limite des représentations iconiques concernant le sens des transformations**, évoqué plus haut (Figure 6). Et cette question devient cruciale pour les problèmes de la troisième catégorie de Vergnaud (1995) dans laquelle toutes les données du problème sont de type transformation.

4.4. Quelle généralisation de ces résultats pour toutes les catégories de problèmes additifs ?

Cette expérience a porté sur les problèmes dans lesquels une seule des trois données était une transformation. Le type des images utilisées peut-il aussi constituer un apport pour les problèmes additifs dans lesquels les trois données sont de type transformation ? Ou ce type d'image doit-il être transformé ? Ou encore, la limite des images que nous venons de constater signifierait-elle l'échec du recours à d'autres types de représentations (schémas, diagrammes) ?

Représentation visuelle	Composantes sémantiques et numériques des problèmes additifs			
	Position des données		**Congruence ou non congruence**	
	les deux quantités	la quantité manquante	Sens de la transformation : *positif ou négatif*	Opération sur les quantités données *Addition ou soustraction*
Deux images donnant chacune une **collection finie**	1			**1**
Une **image vide**		**1**		
Bulle fixant *VERBALEMENT* *le sens de la transformation*			**1** *donner, gagner, perdre...*	

Figure 13 : Correspondances entre la séquence d'images informationnelles et les composantes des problèmes additifs.

L'apport d'une représentation visuelle pour la résolution des problèmes additifs tient à ce qu'elle permet de **montrer séparément les différentes composantes sémantiques et numériques qui constituent les problèmes additifs**. Le tableau ci-dessus (Figure 13) permet de voir à la fois les deux apports d'une séquence d'images informationnelles et aussi ses deux limites. D'une part l'image des deux collections est un support pour l'opération choisie et d'autre part l'image vide montre la position dans le scénario du problème. Mais elle ne permet pas de faire prendre conscience de deux distinctions essentielles :

- celle entre le sens de la transformation et l'opération choisie. Elle reste dans l'équivocité des expressions verbales « donner, gagner ...» qui indiquent le sens de la transformation mais qui induisent aussi, à tort ou à raison, le choix d'une opération. Or comme nous l'avons vu plus haut (Figure 1) une addition peut être associée à une transformation négative et inversement une soustraction peut l'être à une transformation positive. Rien ne permet donc de distinguer soit à partir de l'expression verbale, soit à partir des images, le sens de la transformation et l'opération arithmétique à effectuer ;
- celle entre la position des données et le sens de la transformation. Ainsi dans les problèmes donnés aux élèves au cours de cette expérience il suffit parfois d'inverser la position des deux collections données, sans modifier leur quantité pour changer le sens de la transformation. Certes, on peut dire que la séquence des trois images assigne *ipso facto* une position à chacune. Mais en réalité deux des trois images dans cette séquence **montrent à la fois une collection finie et la position de cette donnée.** Or l'aspect collection finie l'emporte visuellement et opératoirement sur l'aspect position, qui est pourtant tout aussi important pour la compréhension et donc la résolution du problème.

La prise de conscience de ces deux distinctions devient nécessaire pour résoudre les problèmes dans lesquels toutes les données sont de type transformation. Quel type de représentation visuelle peut favoriser cette prise de conscience chez les élèves ?

La première condition à remplir est de séparer d'une part la position des données et les données dans leur double aspect (quantité et sens d'une transformation). Notre expérience montre les limites non seulement du type d'images que nous avons utilisée mais de toute représentation unidimensionnelle comme celle par exemple des schémas de G. Vergnaud (Duval, 2005). Une représentation visuelle pertinente pour faire entrer dans la résolution des problèmes additifs doit être bidimensionnelle.

La seconde condition à remplir est de faire utiliser par déplacement le sens de la transformation avant même d'effectuer une opération de comptage ou d'effectuer l'une des deux opérations arithmétiques. Il ne s'agit donc plus d'utiliser les images pour faire effectuer des comptages de collections mais pour effectuer des déplacements orientés. Naturellement ces déplacements ne sont pas effectués sur la même droite graduée, mais à chaque fois sur une nouvelle droite graduée, parallèle à la première, pour garder en évidence les positions de chaque donnée (Duval, 2005). Ce type de représentation bidimensionnelle a été conçu, et expérimenté dans des classes par R. Damm (1992).

5. Conclusion

Les expériences sur le rôle des images dans la résolution des problèmes additifs ont été faites avec des élèves des trois premières années de l'enseignement primaire. Les images utilisées ont été des images de collection d'objets et une image vide marquant la position de la donnée manquante dans le scénario du problème. Enfin les expériences ont porté uniquement sur les problèmes dans lesquelles une seule des données est une transformation, et non pas les trois.

Les observations qui résultent directement de ces expériences montrent à la fois un apport des images utilisées et leurs limites. L'apport a été net avec les plus jeunes élèves, plus fortement marqué avec les élèves de 7-8 ans, mais moindre avec ceux de 8-9 ans. Il semble que les élèves de 7-8 ans aient été plus attentifs à l'image vide marquant la place de la donnée manquante que les élèves de 6-7 ans qui semblent surtout n'avoir pris en compte que les images de collection appelant une activité de comptage. La première limite des images utilisées tient au fait qu'elles ne représentaient pas tous les composantes des données des problèmes et qu'il fallait donc tenir compte des indications verbales accompagnant chaque image. Il n'est donc pas surprenant que les performances pour la présentation des problèmes par des images n'aient jamais été supérieures à celles pour la présentation par un énoncé, même pour la population des élèves ayant participé à des séances pour travailler sur ces deux présentations des problèmes additifs. La deuxième limite tient à ce que les images de collections d'objets n'ont pas rendu visible aux yeux des élèves l'importance de la position de chacune des trois données dans le scénario des problèmes.

Quelle est la portée de ces différents résultats au regard du problème plus général du rôle des images ou d'autres types de représentation dans la résolution des problèmes additifs ? Cette question se pose à la fois pour obtenir des réussites systématiques non seulement avec les problèmes dans lesquels la donnée manquante correspond à la position initiale dans le scénario du problème, mais aussi avec les problèmes dans lesquels les trois données sont de type transformation.

Parmi les résultats de cette expérience, les plus intéressants sont ceux qui concernent les limites des images utilisées. Elles mettent en évidence deux conditions pour que les images ou autres représentations utilisées puissent réellement aider les élèves à résoudre tous les problèmes additifs et non pas seulement certains d'entre eux. Tout d'abord les images ou les représentations choisies doivent permettre de distinguer toutes les composantes constitutives des problèmes additifs. Ensuite, les images ou les représentations doivent présenter séparément chacune des composantes, car elles doivent permettre aux élèves de bien voir l'égale importance de la position des données, indépendamment de leur

nature, et de bien distinguer le sens d'une transformation et l'opération à effectuer. En d'autres termes, une image ne peut jouer un rôle dans la résolution des problèmes additifs que dans la mesure où elle s'articule avec toutes les composantes sémantiques et numériques des données d'un problème, et où elle permet à la fois de les reconnaître et de les utiliser. Peu ou pas de matériel, images ou schémas, ni celui actuellement utilisé dans l'enseignement ni celui pris en compte dans les recherches sur la résolution des problèmes additifs, répond à ces exigences minimales.

Il ne s'agit pas de partir d'une classification des images quelle qu'elle soit, et de chercher ensuite quel type peut jouer un rôle dans la résolution des problèmes. Il faut, au contraire, partir de toutes les composantes intervenant non pas dans une catégorie particulière de problème mais dans les trois catégories, pour pouvoir construire le diagramme permettant de les faire manipuler par les élèves sans risque de confusion. Le recours à des images concrètes est pédagogiquement nécessaire pour susciter l'intérêt des enfants, mais il n'apporte rien pour la résolution des problèmes. La présentation de telles images ne peut didactiquement se faire qu'en superposition au diagramme des composantes de n'importe quel problème additif.

Références

BALDISSERI, F., D'AMORE, B., FASCINELLI, E., FIORI, M., GASTALDELLI, B., & GOLINELLI, P. (1994), Les ballons de Greta. In A. Gagatsis (éditeur), *Didactique des Mathématiques*, Thessaloniki: ERASMUS ICP-93-2001-11, 571–578.

BRISSIAUD, R. (1989), *Comment les enfants apprennent à calculer*, Paris : Éditions Retz.

CARNEY, R. N., & LEVIN, J. R. (2002), Pictorial illustrations still improve students' learning from text, Educational Psychology Review, **14(1),** 101–120.

DAMM, R. (1992), *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte*, Thèse, U.L.P. Strasbourg.

DUVAL, R. (2003), Décrire, visualiser ou raisonner : quels « apprentissages premiers » de l'activité mathématique ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **8**, 13–62.

DUVAL, R. (2005), Linguaggio, simboli, immagini, schemi...In quale modo intervengono nella comprensione in matematica e altrove? *Bolletino dei docenti di matematica*, **50**, 19–39.

DUVAL, R. (2006), A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, **61(1-2)**, 103–131.

ELIA, I., & PHILIPPOU, G. (2004), The functions of pictures in problem solving. In M. Johnsen Høines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, **2**, Bergen University College, Norway, 327–334.

ELIA, I. (2005), Immagini e modelli geometrici nella risoluzione di problemi di tipo additivo, *La matematica e la sua didattica*, **3**, 337–355.

ELIA, I., GAGATSIS, A., & DEMETRIOU, A. (2006), The effects of different modes of representation on the solution of one-step additive problems, *Learning and Instruction*, **17**, 658–672.

ELIA, I., GAGATSIS, A., & GRAS, R. (2006), La « magie » et le pouvoir de l'image pour les petits enfants : application dans la résolution des problèmes du type additif, *Scientia Paedagogica Experimentalis*, **43**, 89–114**.**

GAGATSIS, A., & ELIA, I. (2004), The effects of different modes of representations on mathematical problem solving. In M. Johnsen Høines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, **2**, Bergen University College, Norway, 447–454.

GRAS, R. and ALS. (1996), *L'Implication Statistique, Collection associée à Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage.

GRAS, R., BRIAND, H., & PETER, P. (1996), Structuration sets with implication intensity. In E. Diday, Y. Lechevallier & O. Opitz (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Ordinal and Symbolic Data Analysis - OSDA 95*. Paris: Springer.

GRAS, R., PETER, P., & PHILIPPÉ, J. (1997), *Implicative Statistical Analysis, Proceedings of IFCS 96*, Tokyo: Springer-Verlag.

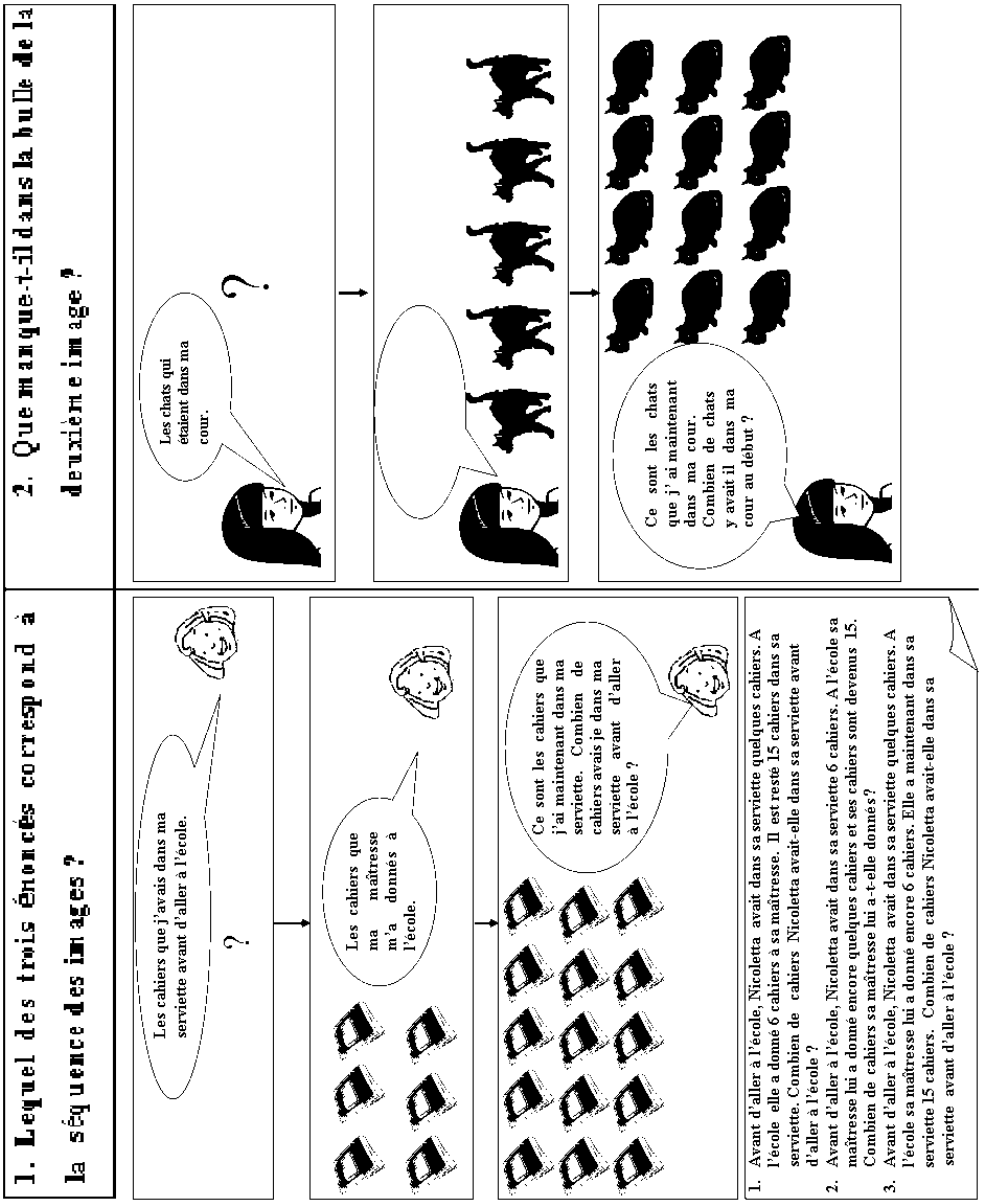
LERMAN, I.C. (1981), *Classification et analyse ordinale des données.* Paris : Dunod.

VERGNAUD, G. (1995), Problems of additive structures. In A. Gagatsis (Ed.), *Didactics of Mathematics: Theory and Research*, Thessaloniki: Art of Text (in Greek), 63–91.

Iliada ELIA
Iliada Ilia <iliada@ucy.ac.cy>
Centre for Educational Research and Evaluation,
Institut Pédagogique de Chypre
Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education

Appendice

Exemples de tâches proposées aux élèves du groupe expérimental



CATHERINE HOUDEMENT

UNE PLACE POUR LES PROBLÈMES POUR CHERCHER

Abstract. Problem solving as investigation activity in French primary school - The French curriculum 2002 for primary school (students 6 to 11) emphasised a category of problems as support of an investigation activity, aiming at the development of mathematical exploration ability. What kind of ability and/or what type of problems is concerned by this theme? In the facts (report of French Ministerial Education Authority 2006) selected problems and class lessons on this theme are very different, mathematical impact on students seems to be very weak. This text studies a priori the potentiality of such theme in the mathematics teaching and proposes criteria to choose adapted problems. These propositions may be considered as orientations for next research.

Résumé. Les programmes de 2002 mettent en avant les problèmes, notamment des problèmes dits « pour chercher» (MEN 2005). Que cache ce terme ? Le rapport IGEN 2006 rapporte que lors des séances de résolution de 'problèmes pour chercher', les problèmes choisis et les pratiques de classe sont très variés et d'impacts potentiels auprès des élèves très différents. Les séances semblent généralement mettre en jeu peu de mathématiques. Dans les programmes 2008 (MEN 2008). L'expression problèmes « pour chercher » a disparu. Ce texte pose des jalons pour une clarification des intentions d'apprentissage liées aux séances de résolution de 'problèmes pour chercher' et des critères de choix de ces problèmes. Il propose des orientations pour des recherches à venir.

Mots-clés. Problèmes, problèmes pour chercher, école primaire, validation, raisonnement, modèle.

Introduction

Les programmes de 2002 de l'école primaire (6-11 ans) mettent en avant les problèmes, notamment ceux dits « pour chercher » (MEN 2005). Certains comprennent cela comme une invitation à faire des « rallyes », à lancer des « défis », à introduire de l'extraordinaire dans la classe de mathématiques par exemple par le biais d'énigmes récoltées sans analyse critique (et parfois même sans intention mathématique) dans maint ouvrage ou sur maint site. Quand la séance fait partie de l'ordinaire de la classe, elle est parfois ponctuelle, sans véritable enjeu, comme le montre notamment le rapport de l'Inspection Générale (IGEN 2006).

Les programmes 2008 citent l'apprentissage de la résolution de problèmes comme faisant partie des mathématiques à enseigner (MEN 2008 p. 18 et 22) ; mais l'expression « pour chercher » associée à problèmes a disparu.

ANNALES de DIDACTIQUES et de SCIENCES COGNITIVES, volume 14, p. 31 – 59.
© 2009, IREM de STRASBOURG.

Les interprétations des ‘problèmes pour chercher’ posent donc question : un des reproches souvent entendu est leur contribution trop faible à des apprentissages mathématiques.

Cet article se propose d’abord de légitimer la place de certains de ces problèmes dans l’enseignement compte tenu de leurs potentialités. En effet les ‘problèmes pour chercher’ peuvent être des prétextes à mettre en jeu des connaissances mathématiques et à augmenter la culture mathématique des élèves. À ce titre (réinvestir des connaissances mathématiques), ils ont une place dans l’enseignement des mathématiques ; restent à déterminer leur spécificité et leurs apports.

Il s’agit aussi de questionner la possibilité d’une organisation de ces problèmes (voire d’une praxéologie au sens de Chevallard 1999) notamment en cherchant à regrouper les problèmes par type, à pointer les ‘techniques’ dont ils pourraient relever ; à préciser le discours à tenir sur ces techniques.

Remarquons cependant le caractère paradoxal de cette entreprise : il est d’usage de construire une technique pour d’un type de tâches routinier ; de quelle routinisation pourrait il s’agir concernant les ‘problèmes pour chercher’ ? Nous verrons plus loin notre proposition : elle a à voir, entre autres, avec des types de raisonnement. Et quid de la technologie, discours sur la technique ? Nous faisons l’hypothèse que la technologie en jeu ne fournirait pas là la justification mathématique de la technique, mais plutôt un certain mode d’emploi de la technique (technologie pratique versus technologie théorique).

En résumé ce texte vise à enrichir la réflexion sur les problèmes pour la formation des professeurs des écoles. L’étude se limite cependant à l’étude de problèmes numériques ou à traitement numérique. Elle peut être lue comme un texte d’orientations pour des recherches à mener.

Après avoir donné quelques éléments du contexte actuel, l’article, gardant comme horizon l’augmentation de connaissances mathématiques, identifie trois objectifs possibles pour les ‘problèmes pour chercher’ : réinvestissement de savoirs, apprentissage de raisonnements, apprentissage de validations. A partir d’une liste d’exemples fournis par les manuels, il propose une classification des ‘problèmes pour chercher’ en fonction de modes de raisonnements. Cette étude permet de préciser les potentialités de tels problèmes et des critères d’organisations possibles, dont un nouveau critère, lié à la modélisation.

1. Motiver et situer la réflexion

1.1 Un objet déjà ancien dans les programmes

La question inhérente à chaque programme est celle des connaissances mathématiques visées pour les élèves. Pour les professeurs, elle est indissociable de celle des problèmes que les élèves devraient savoir résoudre. Mais comment définir ces problèmes ? Comment organiser l'apprentissage de leur résolution ?

Les recherches sur le *problem solving* ne sont pas récentes. Déjà en 1985 Kilpatrick proposait une rétrospective de 25 ans de recherches sur l'enseignement et l'apprentissage de la résolution de problèmes et s'intéressait à différents types de problèmes (*various meanings of problems* Kilpatrick 1985 p. 8).

Les 'problèmes pour chercher' ont une place particulière dans l'enseignement français : initialisés en France par Glaeser (Glaeser 1976), valorisés dès les années 1980 sous le nom de *problèmes ouverts (*voire *situations-problèmes*[1]), ils ont donné lieu à de multiples interprétations et expérimentations (pour des élèves de 11 à 15 ans), dans les IREM, en particulier celui de Lyon (Arsac & al. 1988) ; ils se sont poursuivis notamment par les *narrations de recherche* (par exemple Bonafé & al. 2002). Ce qui est en jeu dans ces séances c'est l'attention portée au processus de recherche de l'élève plus qu'à la production de la réponse et l'accompagnement de l'enseignant visant à développer des « attitudes »….. L'équipe ERMEL (pour les élèves d'école primaire, de 6 à 11 ans) de l'INRP a produit un certain nombre d'écrits sur ce type de problèmes, soit intégrés dans des aides pédagogiques numériques par niveau d'école primaire (Ermel post 1991), soit plus spécifiques visant un travail des élèves sur l'argumentation (Ermel 1999).

A l'école primaire, cette attention au processus de recherche dans les problèmes existe dans les programmes depuis 1985 ; en 1995 apparaît l'expression « véritables problèmes de recherche ». Les programmes 2002 inventent un libellé : *Problèmes pour chercher* et leur consacrent un chapitre entier des *Documents d'accompagnement* (2005, pages 7 à 14) : ils font donc l'hypothèse –implicite- d'une « forme » spécifique pour ces problèmes. Ce chapitre ne précise pas la forme de ces problèmes, mais donne un objectif spécifique des séances qui leur sont liées, par rapport aux autres séances qui font intervenir des problèmes : « *problèmes centrés sur le développement des capacités à chercher : en général pour ces problèmes, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte* » (MEN 2005 p. 7). Les Programmes 2002 distinguent ainsi des types de problèmes selon la fonction qu'ils ont dans le projet du professeur, les autres fonctions étant :

[1] Nous n'en dirons pas plus sur la signification de ces deux expressions : elles ont eu des sens très différents depuis 1980. C'est d'ailleurs sans doute à cause de son ambiguïté que l'expression 'situation-problème' a disparu de tous les programmes de mathématiques.

construire des nouvelles connaissances (exigibles en fin de cycle), les exercer et/ou les réinvestir, mobiliser plusieurs connaissances déjà travaillées (problèmes plus complexes). Ils précisent que l'expression ' problèmes pour chercher' correspond à une exploitation spécifique des problèmes : « *développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique : émettre des hypothèses et les tester, faire et gérer des essais successifs, élaborer une solution originale et en éprouver la validité, argumenter* » (*Documents d'application des programmes* Mathématiques 2002, cycle 3, page 7). Avec les ' problèmes pour chercher', il ne s'agit donc pas uniquement de chercher. Les compétences citées doivent certes être à l'oeuvre dans toute activité mathématique pratiquée par l'élève. Mais il est vrai que l'injonction (présente dans les programmes depuis 1985) de faire passer tous les enseignements de mathématiques par le filtre des problèmes est encore très mal comprise.

Cette explicitation des « Problèmes pour chercher » interpelle différents acteurs (professeurs d'école, inspecteurs, formateurs...) ou collaborateurs plus occasionnels (didacticiens, mathématiciens) de l'enseignement primaire qui en questionnent les différentes interprétations (transpositions) et s'interrogent sur la légitimité de ce qui semble être devenu un « objet » d'enseignement dans les programmes de mathématiques.

Chez les didacticiens, se rencontrent des points de vue radicalement opposés. Rapidement deux exemples : D. Grenier et C. Payan et l'équipe de *Maths à Modeler* (Grenier & Payan 2003, Godot K. 2006) prônent la nécessité de situations spécifiques pour accéder aux *savoirs transversaux* qui permettent « *d'entrer dans une démarche mathématique* » et développent, aussi pour le primaire, des séquences dédiées à de « *vrais problèmes de la recherche* » (Gravier & al. 2008 p. 53). Au contraire, A. Mercier s'élève contre la présence dans les programmes de « '*problème pour chercher', alors qu'il n'y a, en le cherchant, rien à trouver que le système d'enseignement ait identifié*. » (Mercier A. 2008 p. 107)

Certaines questions sont donc cruciales : Quelle place, quelle fonction ont de tels problèmes (de telles séances autour de problèmes) dans l'institution ordinaire de l'école ? Qu'apprennent-ils ? Comment doit on les organiser pour qu'ils apprennent des 'choses' aux élèves ? Quelles sont ces 'choses' ? Quel est le rôle du professeur dans cet apprentissage ?

1.2. Un rapide regard sur les pratiques

Les sources de problèmes qui se disent « pour chercher » ou que les professeurs utilisent comme tels abondent, notamment sur la toile, sous la rubrique Défis mathématiques, Rallyes. Les dispositifs organisant un jour par an des compétitions entre équipes d'élèves de classes différentes participent pour les professeurs au traitement de cet objet du programme (et parfois se résument à cela).

Un rapport de l'Inspection Générale de juin 2006 (IGEN MEN 2006) fait état des dérives que suscite le traitement en classe de cet objet. Il souligne fort justement la maladresse de l'expression ' problème pour chercher' qui produit un effet de brouillage : cette expression est simplement considérée comme synonyme de problème pour lequel la résolution n'est pas automatique, sans même considérer les connaissances mathématiques requises pour comprendre et traiter le problème. Dans cet esprit, il conseille, pour les problèmes en général, une typologie en quatre parties : « *Problèmes à une opération, avec étapes intermédiaires explicites, avec étapes intermédiaires trouvées par l'élève, plus complexes*. » On sait les limites d'un tel classement : par exemple Vergnaud (Vergnaud 1990) a montré qu'à contexte identique, des problèmes ternaires (deux nombres donnés, un troisième à trouver) relevant de la même opération et des mêmes nombres, ne présentaient pas tous la même facilité de raisonnement

Le rapport souligne l'inadaptation de la gestion de classe associée à un tel objet à enseigner. Les professeurs restent démunis face aux questions pratiques suivantes : comment exploiter de façon constructive les erreurs des élèves, relativiser des procédures lourdes, valoriser des procédures efficaces, conclure efficacement la séance dans un cadre mathématique ? Ces remarques sont renforcées par les recherches de Priolet (Priolet 2008, partie 3, chapitre 3) qui, grâce à une enquête auprès de professeurs des écoles (CE2, 8-9 ans) repère l'existence, au moins une fois par semaine, d'une séance de résolution de problèmes, mais constate l'hétérogénéité (en temps, organisation et contenu) des mises en œuvre de la recherche.

Le rapport s'interroge finalement sur les objectifs de la présence d'un tel objet d'enseignement dans les programmes de mathématiques du primaire.

Il est donc nécessaire de mieux cerner les raisons d'êtres de ces objets dans les programmes, d'en chercher les motivations, de construire des éléments de typologie….

1.3. Quelle motivation pour ces problèmes ?

Les problèmes dits pour chercher sont souvent justifiés (Arsac & al. 1988, Gravier & al. 2008) par le fait de permettre à l'élève de mener lui-même une partie de l'activité mathématique réelle du mathématicien, celle qui consiste à tâtonner, chercher, recommencer pour avancer, sans viser l'acquisition d'une connaissance notionnelle à plus ou moins long terme, ce dont se chargent les problèmes spécifiquement pensés à ces fins, comme ceux que la Théorie des Situations (Brousseau, 1970-1980) a permis de construire. En quelque sorte, ils offriraient une liberté et une gratuité que Glaeser (Glaeser 1976) avait déjà pointées.

Mais justement cette liberté et cette gratuité n'est elle pas antinomique de l'avancée des apprentissages, qui suppose qu'un savoir doit émerger explicitement (grâce à l'institutionnalisation du professeur) des situations étudiées ? Cela pose la question de l'existence dans les mathématiques scolaires de connaissances difficiles à institutionnaliser, qu'il faut cependant avoir construites pour faire des mathématiques, et donc qu'on n'acquerrait que par frayage.

En effet ces 'problèmes pour chercher' (tels qu'ils sont ordinairement proposés, isolés, avec une question déjà donnée) ne sont pas épistémologiquement fondés : si les mathématiciens résolvent des problèmes, c'est pour produire des résultats (concepts ou méthodes) qui font avancer la théorie qu'ils étudient. Or les 'problèmes pour chercher' des programmes ne visent pas de contenu mathématique, mais une certaine transversalité ; tels que décrits dans les Documents d'Accompagnement 2005, ils restent un 'objet d'enseignement' aux contours flous.

Pourtant dans d'autres pays, ils sont revendiqués, y compris par des didacticiens, justement parce qu'ils motivent, de façon externe, les apprentissages mathématiques. DaPonte (DaPonte 2007) insiste sur le côté effectivement formateur des 'problèmes pour chercher', notamment pour la participation des élèves (et donc comme une raison d'apprendre des mathématiques) et le développement de compétences transversales (capacités d'expression, d'échange, de collaboration). Il modère cependant leur impact pour mettre en réseau des connaissances, sauf pour les élèves forts.

En résumant, il pourrait, semble-t-il, s'installer un certain accord sur les **motivations externes** (aux mathématiques) des problèmes pour chercher.

- Donner un meilleur aperçu des positions respectives du professeur et des élèves vis-à-vis des apprentissages :
  - préciser un aspect du métier d'élève, pas seulement exécuteur, mais aussi contrôleur et initiateur ; on sait que cette conception du métier d'élève (agir, essayer, se tromper, contrôler) n'est pas dominante, que ce soit au cycle 3 ou plus tard ;
  - aider aussi le professeur à être d'abord un accompagnateur dans la recherche de la vérité (de la réponse exacte), pas uniquement celui qui sanctionne la réponse ou révèle la solution.
- Initier des démarches collaboratives moyennant des dispositifs adaptés : par exemples les rallyes mathématiques des origines se contentaient de faire travailler les élèves par équipes sur une liste de problèmes déterminée ; la modification qui consiste à doter chaque problème d'un quota de points qui affecte positivement le total de l'équipe en cas de

réussite et négativement en cas d'échec, amène les élèves à changer leur rapport à la réponse (l'équipe doit être sure que la réponse trouvée est correcte) et à mobiliser l'équipe pour contrôler les raisonnements produits. Bien entendu ces dispositifs de rallyes gagnent à être accompagnés de séances plus ordinaires autour de tels problèmes.

Ces motivations externes ne sont pas négligeables, mais qu'en est-il des **motivations internes** aux mathématiques ? Moyennant l'hypothèse de travail raisonnable « pour qu'il y ait apprentissage, il est nécessaire qu'il n'y ait pas seulement des tâche isolées », quelle progression prévoir, quels problèmes choisir ? Et bien sur, quelles séances mener autour de ces problèmes ?[2]

2. Quelques hypothèses de travail

S'intéresser à un objet d'enseignement amène d'abord à questionner sa légitimité a priori. Sans rentrer dans une recension des divers travaux qui se sont intéressés à la question[3], un consensus existe sur le fait que les problèmes ont globalement deux fonctions dans l'enseignement : contribuer à construire des connaissances mathématiques dans une dynamique connaissances – savoirs, fonction particulièrement pointée par les approches didactiques (Brousseau 1990, Conne 1992, Douady 1986) et faire fréquenter une partie de l'activité du mathématicien, chercher, valider, fonction mise en avant par des mathématiciens (Glaeser 1976) épistémologues, des praticiens chercheurs (IREM de Lyon dès 1988) et des chercheurs (équipe *Maths à Modeler* de Grenoble).

Nous souhaiterions compléter par deux autres apports. Julo (Julo 1995, 2002) insiste particulièrement sur le rôle que jouerait la mémoire des problèmes résolus dans la résolution de nouveaux problèmes. Il fait l'hypothèse qu'il existe trois types de structures en mémoire, qu'il appelle schémas de problèmes à la suite de certains cognitivistes. Les schémas de type 'cas' seraient formés des traces sémantiques en mémoire de problèmes particuliers ; la théorie des situations, par les situations fondamentales, viserait une installation de tels problèmes, en contrôlant la qualité de leur adaptation au savoir visé. Les schémas de type 'regroupement' fonctionneraient avec des critères de surface et de nature pragmatique (par exemple les problèmes d'achats et dépenses). Enfin le troisième type, les schémas de type 'abstrait', s'appuierait sur des analogies structurales (analogie relationnelle au sens de Vergnaud 1990, procédure de résolution, outil de modélisation).

---

[2] Mais cette dernière question sera à peine traitée ici.

[3] Pour un aperçu des travaux liés à la résolution de problèmes numériques en primaire, voir Priolet (2008).

Sous ces hypothèses, les ‘problèmes pour chercher’ contribueraient à enrichir les schémas du premier type (par l’expérience de construction d’un raisonnement non automatique) et du troisième type. Mais comment déclencher la possibilité d’une mémorisation de tels problèmes réussis ? Peut-être par une rencontre organisée avec de tels problèmes, en les présentant aux élèves regroupés selon certains critères[4] (que nous développerons par la suite) ? En l’état actuel des connaissances, nous ne pourrons aller plus loin, les recherches restent ouvertes.

Le second apport de type réflexif concerne la problématique des enjeux ignorés d’apprentissage développée à l’IUFM de Haute Normandie autour de C. Castela (Castela 2008). Prenant appui sur les hypothèses de praticiens chercheurs (IREM, INRP, mais pas seulement) de bénéfices pour les élèves de séances bien pensées de ‘problèmes pour chercher’, il se pourrait que réfléchir aux types de connaissances effectives déclenchées par de telles séances et lister les conditions de ces déclenchements mettent à jour des connaissances ignorées (des professeurs et même des chercheurs), non simplement institutionnalisables[5], que possèderaient certains élèves et qui seraient très utiles (voire nécessaires) pour les apprentissages mathématiques ordinaires (Houdement 2006). On expliciterait ainsi la niche didactique des ‘problèmes pour chercher’. Là encore les recherches restent ouvertes.

3. Vers des éléments de légitimité internes aux mathématiques

S’intéresser à des activités permettant aux élèves d’avoir une activité de recherche suppose que soit définie ce qu’on appelle recherche : dans cet article ce terme désignera le fait qu’à l’échelle de la classe, le traitement du problème ne relève pas (ou pas encore pour certains problèmes) d’un traitement automatique. Il ne s’agit pas d’un exercice d’application ou encore de la juxtaposition de plusieurs questions d’application.

Légitimer de telles activités suppose de leur conférer une certaine potentialité d’apprentissage ; de quels apprentissages s’agirait –il ? Nous en proposons trois sortes que nous développerons : réinvestissement de savoirs en jeu, apprentissage de raisonnements, apprentissage de validation.

Quelle méthodologie avons-nous employée pour nourrir notre réflexion ? Nous avons pris appui sur des propositions effectives de tels problèmes dans les ouvrages pédagogiques de cycle 3 (fin de l’école primaire, élèves de 8 à 11 ans). La liste des problèmes retenus figure en annexe 1, avec leurs références en annexe 2. Nous

[4] une façon de décliner le dispositif de multi-présentation, expérimenté par Julo (Julo 2002) et repris par Nguala (Nguala 2005).
[5] non référencées ni à des technologies, ni à des théories (au sens de Chevallard 1999).

avons tenté de rechercher des critères d'organisation a priori (compte tenu de nos hypothèses de travail) et a posteriori (en nous laissant surprendre) de ces problèmes. C'est ainsi que notre étude fera apparaître une quatrième potentialité d'apprentissage : celui de la modélisation, qui nous fera porter un nouveau regard sur des problèmes plus classiques.

L'étude faite reste très modeste et exploratoire : elle ne prend pas en compte ici les gestions associées : type de consigne, support, variantes et variables, travail individuel ou en groupe, temps de recherche, de synthèse, conclusion, éléments à institutionnaliser ; elle délimite des potentialités, à mettre ensuite à l'épreuve… Elle se veut un point de départ pour des recherches à venir.

3.1. Les savoirs en jeu dans les problèmes

Il semble raisonnable de conserver comme problèmes 'pour chercher' des problèmes qui mettent en jeu un répertoire de savoirs relativement disponibles : à la fin de l'école primaire (cycle 3, 8 à 11 ans), les savoirs en jeu des problèmes candidats devraient tous se situer globalement en amont de la proportionnalité.

Mais il serait légitime que de tels problèmes permettent vraiment de **réinvestir des connaissances mathématiques** apprises ou en cours d'apprentissage. A priori des problèmes ne faisant pas appel à des savoirs mathématiques, relevant de l'anecdote ou de l'astuce, devraient rester exceptionnels. Les problèmes retenus comme tels auront donc d'abord une fonction de réinvestissement et a priori (c'est-à-dire à l'échelle du répertoire didactique de la classe) une résolution non immédiate[6]. Attention, cela ne signifie pas que l'outil le plus général pour résoudre le problème est un savoir visé du niveau de classe où se donne le problème.

3.2. Les raisonnements

Quels raisonnements pour l'école ?

Nous prenons comme synonyme de *raisonnement*, comme Ermel 1999, toute suite organisée d'inférences conduisant à une conclusion ; l'inférence consistant en la production d'informations nouvelles à partir d'informations déjà là et de connaissances avérées en mémoire. Il s'agit là d'un point de vue cognitif.

A. Weil-Barais (Weil-Barais 1993, p. 526) recense plusieurs formes de raisonnement. Elle qualifie les uns de non canoniques (ils ne suivent pas des règles bien définies), tels le raisonnement par analogie (une conclusion est tirée par ressemblance, il s'agit souvent d'un raisonnement heuristique), le raisonnement en contexte (une sorte de reconnaissance de forme qu'appliqueraient les experts).

[6] ce qui n'exclut pas que certains élèves, « plus forts » les résolvent presque immédiatement.

Nous y ajoutons le raisonnement par induction où une loi générale est tirée de l'examen de cas particuliers. Cette approche contient bien sur des analogies avec la mémoire des problèmes sous forme de schémas, pointée par Julo (Julo 2002).

Weil-Barais distingue deux types de raisonnements canoniques : le raisonnement déductif et le raisonnement expérimental, qu'elle nomme aussi raisonnement par test d'hypothèses. Ces deux types de raisonnement peuvent être légitimement travaillés par les élèves d'école primaire.

Le raisonnement déductif est directement associé aux mathématiques (comme moyen et comme but), notamment sous les formes diverses que sont l'implication logique (contraposée et contre-exemple), le raisonnement par disjonction des cas, le raisonnement par l'absurde, le raisonnement par récurrence[7]. A l'école primaire, il semble raisonnable d'exclure les deux derniers.

Le raisonnement expérimental est un raisonnement conditionnel à trois aspects : énoncé des hypothèses, recherche d'informations pour mettre à l'épreuve les hypothèses, traitement des informations. La recherche et le traitement d'informations peuvent relever de protocoles complexes (notamment des expérimentations) ; mais nous le verrons à l'œuvre dans des cas plus simples qui s'approchent d'un raisonnement par disjonction des cas.

Nous y ajoutons une autre forme de raisonnement canonique, lié à la sémiotisation : celui pris en charge par les règles de fonctionnement des écritures mathématiques (ici les écritures arithmétiques voire algébriques) : par exemple 45 x 32 = 1440 nous permet de savoir que 4500 x 320 = 1440000. Ce raisonnement sera placé dans les raisonnements déductifs.

La résolution de problèmes pourrait être une occasion de **rencontrer des modes de raisonnement** différents pour ouvrir une palette de possibles : déduction plus ou moins complexe, puissance des écritures arithmétiques voire algébriques, raisonnement expérimental y compris dans les mathématiques.

Quelques exemples pour illustrer

« *Si 25 tables pèsent 300 kg ; quel est la masse d'une table ?* » est un problème simplement calculable au cycle 3, il fait partie du répertoire des problèmes dont on vise le traitement automatique au cycle 3. Il n'a pas lieu de figurer dans les problèmes 'pour chercher'.

Une déduction simple (nous la nommerons D1) correspondrait au texte suivant : « *Pour un malabar et un croissant Fatma a payé 1 € 5 c. Pour deux croissants, Lucas a payé 1 € 60 c. Trouve combien coûte un malabar.* » (problème 11,

[7] Ce qui ne signifie pas que toutes ces formes sont exploitables à l'école.

annexe 1) : il existe dans ce texte un sous problème simplement calculable (le prix d'un malabar), première étape de la réponse.

Par contre nous dirons que le problème « *Le mobilier de l'école. Une entreprise a expédié trois chargements de 300 kg chacun pour équiper en mobilier une école. Le premier chargement contient 15 tables et 30 chaises. Le second contient 25 tables. Le troisième contient 10 tables, 20 chaises et 5 armoires. Combien pèse une chaise, une table, une armoire ?* (problème 1)» relève d'une déduction plus complexe : il contient la possibilité d'une déduction simple (la masse d'une table), mais qu'il faut isoler et construire par juxtaposition d'informations textuelles séparées dans le texte initial (la masse de 25 tables n'est pas indiquée à côté de la phrase qui mentionne 25 tables, il faut la déduire par traitement de l'information donnée en début d'énoncé). Nous qualifierons le raisonnement dans de tels problèmes de raisonnement D2. Le lecteur peut s'étonner que nous qualifiions de déduction non simple ce qui peut lui apparaître comme une simple reformulation : il trouvera des éléments dans ce sens dans Gueudet, Le Poche (Gueudet, Le Poche 2006) notamment les difficultés rencontrées par des élèves de cycle 3 pour trouver par quoi commencer.

Il nous semble possible de repérer un niveau D3 de déduction lorsqu'il s'agit de combiner des informations pour accéder à un texte simplement calculable « *Une sucette et 2 petites brioches coûtent 2 €. 5 sucettes et 2 petites brioches coûtent 4 €. Quel est le prix d'une sucette ? Quel est le prix d'une petite brioche ?* (problème 12)» : on pourrait aussi considérer que plus d'une déduction est nécessaire.

Remarquons que ce problème peut aussi démarrer par des essais sur le prix d'un objet et ajustement en fonction des contraintes : si la sucette coûte 1 euro, la brioche coûte 0,50 euro ; cela n'est pas conforme à la deuxième somme annoncée ; donc la sucette coûte moins d'un euro ; *etc*. Mais, pour ce problème, le raisonnement expérimental n'est pas très efficace.

Dans les propositions de problèmes pour chercher, il semble légitime d'inclure des problèmes déductifs au sens D1, mais aussi D2 et D3. La complexité du traitement (donc le temps de recherche) peut aussi être liée au nombre d'informations : il est alors nécessaire de savoir trouver parmi toutes ces informations celles susceptibles par déduction de produire une réponse permettant d'avancer dans le problème. Ce qui est en jeu est alors la capacité simultanée à planifier (construire les questions intermédiaires), à reformuler le texte et à repérer la déduction à mobiliser (qui se réduit souvent à un calcul). Il est vrai que ce qui se cache sous la reformulation peut se révéler plus complexe qu'il n'y parait, même pour les problèmes additifs (Damm 1992).

Les élèves d'école primaire peuvent ne pas mettre en œuvre de raisonnement déductif économique, notamment par manque de connaissances et/ou de système symbolique efficace. Ils peuvent par contre développer un raisonnement expérimental (ou par test d'hypothèses). On sait bien que, encore au cycle 3, même pour des problèmes additifs (ceux de type état-transformation-état avec recherche de l'état initial), certains élèves (8-10 ans) simulent l'action, testent des valeurs pour l'état initial, bien avant d'appliquer à l'état final la transformation inverse (Fayol 1990, p. 160).

Bien sûr un des objectifs de l'école est d'augmenter la faculté des élèves à traiter déductivement le maximum de problèmes, notamment en multipliant les rencontres avec de tels problèmes et en valorisant les résolutions déductives possibles avec le répertoire de la classe. Mais compte tenu de l'adaptabilité du raisonnement expérimental (et de son universalité dans les sciences, même si la nature de l'expérimentation à construire diffère), il semble intéressant de conserver, dans les mathématiques, des problèmes qui resteront à raisonnement expérimental pour tous les élèves : les problèmes relevant d'un système de deux équations à deux inconnues (cf. problèmes 2 et 16 de la liste) répondent à ce souci.

A tout niveau d'enseignement donné, la rencontre avec deux types de problèmes, ceux prétexte à une démarche déductive ET ceux qui nécessiteraient par exemple un test d'hypothèses, serait une façon de parcourir un spectre large de raisonnements. Bien entendu souvent ces types de raisonnement sont très imbriqués…

Le problème 4 « *Deux lettres différentes représentent deux chiffres différents. S vaut 2, il n'y a pas de 9, M est plus grand que T : MOI + TOI= NOUS* » nous fournit un bon exemple de problème à raisonnement mixte, reposant sur des connaissances du répertoire de cycle 3. La recherche sera plus ou moins longue selon le type de déductions. En voici un exemple : le texte donne S et exclut 2 pour les autres lettres ; des connaissances sur la numération (somme de 2 chiffres, au maximum 8) permettent de déduire que N égale 1 ; restent les chiffres 3 à 8 disponibles pour les autres lettres ; puisque S, chiffre des unités de 2 I, est égal à 2, I remplace 1 ou 6 (par connaissance de la numération), donc 6 (par déduction). O ne peut valoir 4 car la valeur 9 est exclue pour U, chiffre des unités de 2 O ; ni 5 car U ne peut être égal à 1 : O égale donc 3, 7 ou 8 ; restent au maximum 3 possibilités à tester dont une seule résiste : 836+536=1372.

3.3. Valider les réponses, valider les raisonnements

Une autre question reste latente : celle de la validation des réponses à ces problèmes. La résolution de tels problèmes est l'occasion d'engager les élèves dans un rapport à la vérité. Peut-on, à l'occasion de telles activités, institutionnaliser des éléments de validation de façon à conduire l'élève à prendre en charge lui-même la

validation de sa réponse, ou du moins à en contrôler certains éléments ? Existe-t-il des problèmes plus prétextes à une discussion sur la validation que d'autres ? La question de la validation peut elle être une question prétexte à la résolution de problèmes 'pour chercher' ? Peut-on organiser les problèmes selon le type de contrôle de la réponse qu'ils permettent ?

Il existe certes des études didactiques fines sur le processus de preuve initialisées par Balacheff (Balacheff 1987) en France, mais elles ne sont pas adaptées à la plupart des problèmes concernés par notre étude (sauf problème 15, versus collège).

La réponse aux problèmes relevant de raisonnements déductifs pourra en général faire l'objet d'un contrôle par calcul et par soumission aux différentes contraintes de l'énoncé, ce à quoi le professeur peut habituer les élèves. La réponse résultant d'une recherche exhaustive repose sur la vérification que la méthode utilisée a parcouru l'ensemble des cas possibles. H. Péault (Péault 1992) avait déjà examiné cette question des différents types de validation, notamment pour enrichir la liste des problèmes qu'il proposait dans les rallyes mathématiques du Maine et Loire, dont un des enjeux était la discussion sur la validité de la réponse fournie, puisque toute réponse fausse enlevait des points.

En revanche, certains problèmes peuvent être prétextes à la construction d'un véritable processus de preuve.

Par exemple, si on propose de répartir 45 jetons dans deux boîtes vertes et quatre boîtes rouges comme dans le problème 21, le fait de ne trouver aucune réponse ne peut pas clore le problème : encore faut-il transformer ce fait en la certitude qu'il n'existe aucune solution, notamment par des considérations de parité.

Autre exemple, le problème 15 : la recherche de trois entiers consécutifs dont la somme est 48, 87, 120 est vérifiable par le calcul de la somme des trois entiers trouvés ; il est possible, au cycle 3, de prouver que 99 et 56 ne sont pas décomposables comme sommes de trois entiers consécutifs en exhibant un encadrement par deux nombres décomposables « successifs ». Mais le problème retourné (Bloch 2005), c'est-à-dire la recherche des nombres décomposables en sommes de trois entiers consécutifs n'est pas vérifiable (au sens mathématique) à l'école primaire, car elle relève d'une preuve algébrique (collège) : les multiples de trois fournissent tout au plus une solution non réfutable à l'école primaire. Un tel problème avec ces différentes questions peut être propice à discussion sur ce qu'est une preuve en mathématiques et permettre de distinguer une preuve intellectuelle de preuves empiriques (Balacheff 1987) (mais plutôt au collège).

Par l'étude de ces quelques exemples (notamment 21 et 15), on entrevoit tout l'intérêt de tels problèmes[8], notamment ceux dont il est possible de modifier les variables pour conduire à des nombres de solutions différents (une solution, aucune ou plusieurs), visant le passage d'une validation de la réponse à la construction d'un processus de preuve, un des enjeux du passage école collège.

Le problème 22 est particulièrement décrit dans Ermel 1999 (pages 102 à 117), avec toutes ses variantes pour construire littéralement des théorèmes arithmétiques faisant avancer vers la réponse. Ce problème relève d'un traitement collectif en classe, fermement piloté par le professeur.

4. Analyse de la liste

Examinons maintenant comment la liste de problèmes en annexe (proposables à des élèves de 8 à 11 ans) résiste à ces trois critères. Rappelons que ce que nous proposons correspond à une analyse préalable.

Concernant le raisonnement sous-jacent, considérons d'abord ceux qui relèvent plutôt d'un raisonnement déductif ; il nous faut évaluer la complexité de la « reformulation » permettant d'accéder à une déduction simple. Il nous semble qu'un premier groupe (D1) se compose des problèmes 5, 7, 11 ; le second groupe (D2) des problèmes 1, 6, 17, 18 (juxtaposer informations numériques et dessin permet d'avancer), 20, 24. Le troisième groupe (D3) comporterait les problèmes 12 (par combinaison d'informations données se forme la possibilité d'une déduction simple, quatre sucettes pour deux euros) ; 3 (idem : grâce à Léa et Jo, la zone B vaut 6 points) ; 10 ; 14 ; (par reformulation), 23 (par un schéma).

Certains problèmes, compte tenu du répertoire de connaissances des élèves du cycle 3, relèvent plutôt d'un raisonnement expérimental ou mixte : ainsi les problèmes 2 et 16 (système de 2 équations à 2 inconnues), 4, 8, 13, 15, 21, 22. Les problèmes 10, 12, 20, 23 peuvent aussi être traités par essais.

Bien sûr ce choix de regroupement peut être discuté : il peut paraître simpliste suite par exemple aux recherches déjà faites sur des énoncés courts de problèmes additifs (par exemple Damm 1992) : il faut le prendre comme une première approche, sans omettre que d'autres éléments peuvent jouer sur la complexité (par exemple la congruence de l'énoncé avec le (les) traitement(s) arithmétique(s), *etc*.).

Les savoirs mathématiques en jeu dans les problèmes cités ci-dessus se limitent à des connaissances sur la numération, les quatre opérations et la proportionnalité, comme peut rapidement le vérifier le lecteur. A ce titre ils fonctionnent potentiellement comme des réinvestissements de connaissances supposées

[8] La gestion du groupe classe reste la partie immergée (et le restera dans cet article).

acquises. Mais, pour certains d'entre eux, d'autres connaissances, autres que mathématiques, sont nécessaires pour avancer dans la résolution (et contrôler la réponse).
Certains s'appuient en effet sur une référence forte à la réalité, au fonctionnement pragmatique du contexte du problème. Par exemple le problème 17 nécessite de savoir qu'il est d'usage que d'autres personnes que commandant de bord et copilote soient assis dans le cockpit. La référence au réel est aussi essentielle dans le problème 8. Elle est aussi à l'œuvre dans le problème 24, mais ce problème ne fait pas fonctionner de contenu mathématique du cycle 3 ; un tel problème devrait rester anecdotique. Le problème 9, qui met en jeu des connaissances sur les multiples de 7, nécessite de connaître les règles d'usage du calendrier et de représentation de l'année[9]. Le problème 13 relève d'une démarche expérimentale au cycle 3 et doit être aussi contrôlé par la réalité évoquée ; mais ce problème n'est pas très intéressant dans la mesure où les erreurs (mauvais film des transvasements) ne permettent pas d'avancer vers la solution ; il n'est donc pas susceptible de la construction d'une procédure plus économique à ce niveau de classe.

Concernant la validation des résultats, un contrôle par vérification de la conformité aux informations données est possible pour un certain nombre de problèmes : ainsi les problèmes 1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 12, 15, 16, 20, 21, 23. Certains exigent le contrôle du nombre de réponses (2 et 16, unicité ; 21 multiplicité) de l'impossibilité de réponse (15), de l'exhaustion de la recherche (22). Tous ces contrôles se situent sur le plan mathématique, ils correspondent à ce que nous appelons (Houdement 2006) des contrôles syntaxique (organisation et transformation formelle des écritures) et sémantique (mathématisation des informations, par exemple 6 rangées de 13 correspond à 6 x 13).

Mais tous les problèmes ne se contentent pas de ces seuls contrôles. Nous retrouvons la nécessité d'une référence à la réalité. Par exemple le problème 9 se valide, au cycle 3, par consultation de documents de référence. Le problème 18 nécessite de repérer les bonnes longueurs sur le dessin pour les affecter des données 8 cm et 11 cm. Sans solides connaissances pragmatiques, le problème 19, malgré une forme simple et une solution intuitive, nécessite une validation complexe sur les plans sémantique et syntaxique (deux fonctions linéaires en jeu pour modéliser remplissage et vidage). Ce problème n'est d'ailleurs pas accessible à des élèves de cycle 3.

Ainsi certains problèmes nécessitent ce que nous appelons un contrôle pragmatique (Houdement 2006) plus poussé (confrontation au réel, aux conventions, irréfutabilité de la réponse dans le domaine d'expérience) ou plus généralement des connaissances pragmatiques, nécessaires à la recherche de la réponse, que nous

[9] ou peut être une occasion de les expliciter.

avons déjà citées. Ces connaissances pragmatiques sont très souvent indispensables aux élèves de primaire pour des problèmes classiques à l'école primaire, même si leur nécessité n'émerge souvent que lors des problèmes de proportionnalité : en effet la résolution correcte d'un problème à contexte réalité évoquée et dit 'de quatrième proportionnelle' nécessite de savoir que la relation qui lie les grandeurs du domaine d'expérience est une relation de proportionnalité.

En résumé, les trois critères choisis, savoirs mathématiques en jeu du répertoire de la classe, raisonnements potentiels à l'œuvre, contrôles efficaces et enseignables semblent opérationnels pour organiser la liste de problèmes. Un nouveau critère a émergé suite à l'étude, lié à la mobilisation de connaissances pragmatiques pour guider (et contrôler) le choix des modèles mathématiques à associer aux problèmes évoquant la réalité. Ce choix est en effet routinier dans la plupart des problèmes proposés, c'est un des objectifs de l'école de le rendre également routinier dans la plupart des problèmes numériques ternaires. Mais peut-il être objet d'apprentissage plus systématique ?

5. L'apprentissage de modèles

Envisageons donc la question de la résolution de problèmes numériques comme la mobilisation, voire la construction de modèles qui les rendent calculables.

Nous prendrons la notion de modèle au sens où Fischbein la définit (Fischbein 1990) « *Given two systems, A and B, B may be considered a model of A, if, on the basis of a certain isomorphism between A and B, a description or a solution produced in terms of A may be reflected, consistently, in terms of B and vice versa.* » (Fischbein 1990 p. 23). Cette définition est très large et regroupe modèles mentaux et matériels. Nous nous intéressons ici pour leur fonction heuristique aux modèles mentaux explicites, qu'ils soient primitifs ou élaborés. Certains sont construits lors de la résolution (voir plus loin l'étude du problème 16 en école primaire), d'autres (par exemple les écritures arithmétiques) sont mobilisés automatiquement.

Une écriture arithmétique est un modèle élaboré qui a été enseigné (dans le cadre des mathématiques). Un dessin, épurant la situation de départ en respectant certaines contraintes, sera un modèle s'il possède un caractère génératif ; les dessins figuratifs, supports possibles de raisonnement des jeunes élèves, sont ainsi souvent des pré-modèles (par leur caractère local, non généralisable à d'autres contextes). Pour qu'un dessin devienne modèle, il serait nécessaire qu'ils aient des vertus génératives.

Cette question du potentiel génératif d'un dessin est d'importance à l'école : l'enfant de CP perd beaucoup de temps à dessiner le personnage du problème avec tous ses attributs, il doit apprendre à n'en garder que les éléments liés à la question

posée pour lui conférer un pouvoir génératif. Un des apprentissages de cycle 2 est celui d'une transformation (épuration) raisonnée du dessin en un schéma fonctionnel pour raisonner. Cet apprentissage n'est pas terminé au cycle 3 : des élèves devant dessiner des cubes colorés dans une phase heuristique s'appliquent à colorier, alors que d'autres symbolisent la couleur par une croix (dans Exemple de mise en place d'un problème pour chercher : le pavé bicolore Hersant 2006 p. 51).

Plus tard avec l'enrichissement du répertoire didactique, un modèle peut être un réseau de connaissances mathématiques (par exemple modèle additif, multiplicatif, modèle de la proportionnalité…) qu'il s'agit alors de mobiliser avec son domaine de validité.

Dans cet article, nous laissons de côté la question de la genèse chez l'apprenant des modèles mathématiques (dans le domaine numérique les quatre opérations et la proportionnalité) émergeant d'un équilibre entre problèmes à résoudre, invariants opératoires et éléments sémiotiques (langage, écritures mathématiques) (Vergnaud 1990). Prenons juste l'exemple de « *Thierry vient de jouer deux parties de billes. A la seconde partie, il a perdu 7 billes. Quand il compte ses billes à la fin, il s'aperçoit qu'il a gagné en tout 5 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?* ». La difficulté de résolution est connue (ce problème est échoué à 75% en $6^{ème}$ (Vergnaud 1986 p. 36), il est nécessaire de modéliser (par le langage ou des schémas) les relations entre les collections de billes, autrement dit les parties. Cette modélisation est emblématique des raisonnements liés aux problèmes additifs de composition de transformations.

Nous ne nous intéressons qu'à leur mobilisation dans des nouveaux problèmes.

« Petite modélisation »

Un des critères de choix des problèmes pour chercher (ou complexes) et indirectement une façon de les regrouper pourrait être leur potentialité de création de modèles non encore rencontrés dans l'enseignement.

- Prenons l'exemple du problème 16, une histoire de poules et de lapins (Pluvinage 2008), trois types de raisonnement peuvent lui être associés : un raisonnement algébrique supporté par la traduction du problème en système de deux équations à deux inconnues (non disponible en fin de primaire), un raisonnement arithmétique par test d'hypothèses, une mise en schéma avec une tête représentée par un rond et une patte représentée par un trait. Le dessin de toutes les têtes suivi d'une distribution raisonnée des pattes (par exemple 2 pattes par tête d'abord, puis une nouvelle distribution de 2 pattes supplémentaires jusqu'à épuisement) donne la réponse : ce dernier dessin serait un modèle au sens où nous l'avons défini plus haut. Bien entendu cette représentation sera susceptible de devenir un modèle

s'il est construit comme génératif, donc si l'élève a l'occasion de rencontrer plusieurs fois ce type de problèmes (système de 2 équations à 2 inconnues potentiellement lié à un tel schéma) ;

– de même les problèmes 20 et 23 peuvent s'appuyer sur trois types de raisonnements : algébrique, arithmétique par test d'hypothèses et géométrique par l'utilisation de segments mesurés.

Il nous semble intéressant, grâce à des rencontres régulières avec des problèmes pour chercher relevant de schémas voisins, de mettre les élèves en face de raisonnements potentiellement liés à des « démarches modélisantes » (Pluvinage 2008).

« Grande modélisation »

Nous ne pouvons pas ne pas citer un autre type de problèmes, plus ambitieux, étudié dans certaines équipes de recherche en didactique des mathématiques. Les *situations recherche* du projet *Maths à modeler* (par exemple Godot 2006, Gravier & al. 2008) ont les caractéristiques suivantes : un point de départ facilement compréhensible par l'élève, une situation non formalisée en termes mathématiques (« *c'est la situation qui amène l'élève au cœur des mathématiques* ») ; des méthodes de résolution non désignées ; une, plusieurs ou aucune solution.

Ces caractéristiques là sont déjà celles de bon nombre de problèmes pour chercher (par exemple le problème 21 selon le nombre de jetons et la série de boîtes peut avoir plusieurs solutions ou aucune solution). La spécificité des *situations recherche* réside dans le fait que les sous-problèmes liés à la question initiale et qui peuvent donner lieu à des tâches très différentes, ne sont pas fixés au préalable, ils sont placés sous la responsabilité des élèves, sous le contrôle des enseignants qui veille à leur faisabilité. Certaines situations sont fondées par un jeu avec un support matériel qui joue alors le rôle d'une aide à la formulation d'hypothèses et à leur validation.

Ces dispositifs présentent de grandes potentialités, ils permettent notamment de modéliser différents aspects d'un jeu pour mieux y jouer ou hiérarchiser sa complexité. Ils demandent cependant une bonne maîtrise mathématique et didactique de la part du professeur qui les installe dans sa classe : dans les travaux cités, c'est d'ailleurs toujours un « matheux » qui gère la séance. Mais ces recherches nous confortent dans l'importance de développer en classe une autonomie dans la construction et la résolution de questions.

Domaine de validité d'un modèle

Mais, plus généralement, et cela ouvrirait une nouvelle perspective pour les 'problèmes pour chercher' du moins en France, on peut s'interroger sur l'apprentissage d'un sens critique des modèles appris. Est il licite d'appliquer tel

modèle intuitivement mobilisé ? Quelle sensibilité au contexte développer ? Quel contrôle par le réel (pragmatique) mettre en place ?

Prenons l'exemple classique suivant : « *38 personnes décident de partir en voiture ; une voiture peut transporter 5 personnes ; de combien de voitures ont elles besoin ?* » Il est usuel que les élèves donnent comme réponse le quotient par défaut. C'est un des rares exemples dans les habitudes françaises où l'élève est amené à questionner la pertinence d'un modèle (celui du quotient par défaut). Verschaeffel qualifie cet énoncé de *problematic item* (**Pi)** par rapport au suivant : « *nombre de sachets pleins si on empaquette 38 objets par paquets de 5* » qu'il qualifie de *standard item* **(Si).**

Verschaeffel (par exemple Verschaeffel 2000) étudie parallèlement les réussites à des *standard items* **Si** (validations pragmatique et sémantique en correspondance) et aux *problematic items* **Pi** (problèmes dont la validation pragmatique invalide le modèle intuitif) de même contexte, tels que :

- Peter organise une fête. Il invite tous ses amis : 8 garçons et 4 filles. Combien d'amis invite–il ? **Si**
- Charles a 5 amis et Georges 6 amis. Ils décident d'organiser une fête à deux et d'inviter tous leurs amis. Combien d'amis invitent- ils? **Pi**
- Paul a acheté 5 planches de 2 m de long chacune. Combien peut-il faire de planches de 1 m? **Si**
- Paul a acheté 4 planches de 2,5 m de long. Combien peut-il faire de planches de 1 m? **Pi**

Il montre la difficulté qu'ont les sujets à bloquer pour les Pi l'utilisation du modèle intuitif. Verschaeffel parle même à ce sujet d'un phénomène de *suspension de sens commun*, résistant même aux mises en garde. Burgermeister et Coray (Burgermeister et Coray 2008) ont étudié ce même phénomène très récemment pour des élèves de 12-13 ans (et travaillé finement sur le processus de contrôle) à l'occasion de problèmes de recherche de quatrième grandeur, relevant de modèles additifs (problèmes pseudo- proportionnels) ou linéaires.

Pourtant la culture citoyenne devrait comporter aussi cette capacité à choisir ou rejeter tel modèle pour tel problème et contrôler certes syntaxiquement et sémantiquement, mais aussi pragmatiquement les problèmes. Dans l'usage français, seules les validations syntaxique et sémantique sont prises en compte. Il nous faudrait aussi prendre en compte la dimension pragmatique, de façon non anecdotique[10], dans nos enseignements. Les séances autour de 'Problèmes pour

[10] On sait que le faire de façon anecdotique conduit à une rupture du contrat tacitement passé avec les élèves et reste peu significatif et peu efficace : c'est « l'âge du capitaine ».

chercher' pourraient nous fournir de telles occasions de construire une vigilance nouvelle face à des *problematic items*, vigilance qui engagerait vers un contrôle pragmatique dès les petites classes. Il serait utile de développer des recherches sur l'intégration de *problematic items* dans les séances dévolues à la résolution de problèmes.

6. Conclusion

Notre ambition était de clarifier les objectifs assignés des 'problèmes pour chercher' pour l'apprentissage de mathématiques, en considérant par cette dénomination les problèmes autres que ceux qui engagent vers des connaissances nouvelles (problèmes d'introduction) ou les entraînent et les exercent (problèmes d'application ou exercices) et de poser les jalons d'une organisation de ces problèmes 'autres'.

Tout problème donné à l'école doit engager des connaissances mathématiques, soit parce qu'elles seront sous peu pointées comme savoirs (CONNE 1992) et exercées, soit parce qu'elles sont supposées déjà là, suite au processus d'enseignement. Les problèmes dont il est question dans cet article sont au moins du second type.

Par exemple, en CP, un problème de commande de gommettes conditionnées par bandes de 5 gommettes pour « habiller » une fleur est déjà légitime dans la mesure où il réinvestit le nombre : il apprend aussi à distinguer les grandeurs des nombres qui les mesurent (2 bandes, c'est aussi 10 gommettes alors que 2 n'est pas 5) et contribue[11] à l'apprentissage de la numération décimale (2 dizaines, c'est aussi 20). Il peut faire entrer dans *une démarche modélisante* en apprenant à faire des dessins épurés. Bien sûr, il est nécessaire que les professeurs des écoles qui le choisissent pour un travail en classe aient bien été informés de ces objectifs pour l'exploiter dans ce sens. Comme le rappelle Mercier « *pour enseigner, un professeur doit être capable d'identifier la part d'apprentissage nécessaire qui se manifeste à travers les pratiques de ses élèves* » (Mercier 2008 p. 111)

Les perspectives de recherche liées aux 'problèmes pour chercher' apparaissent multiples. Dans un premier temps, il semblerait utile de mieux comprendre ce qui se joue au niveau des élèves : mesurer l'impact que pourraient avoir sur la culture mathématique des élèves des rencontres organisées avec des problèmes selon :

1. les raisonnements potentiels à l'œuvre, plus complexes qu'inférer une seule déduction : combiner plusieurs déductions, combiner des informations aboutissant à des déductions licites, élaborer un raisonnement expérimental,

[11] à long terme et moyennant d'autres accompagnements

2. les types de contrôles efficaces et enseignables ; les confrontations avec des validations diverses, notamment celles qui engagent dans une dynamique de preuve ;
3. les inférences plus ou moins nécessaires de connaissances pragmatiques, y compris pour critiquer l'application d'un modèle intuitif ;
4. l'intégration d'une démarche modélisante ;
5. le tout dans la perspective d'une culture scientifique, pour éviter notamment que les problèmes n'apparaissent qu'une fin en soi (Zawojewski & Lesh 2003 p. 324).

Il y a fort à parier que ces études rendent nécessaire une coopération plus forte qu'elle n'existe actuellement en France entre cognitivistes et didacticiens des mathématiques.

Annexe 1 : Liste de problèmes cycle 3 étudiés

1) Le mobilier de l'école : Une entreprise a expédié trois chargements de 300 kg chacun pour équiper en mobilier une école. Le premier chargement contient 15 tables et 30 chaises. Le second contient 25 tables. Le troisième contient 10 tables, 20 chaises et 5 armoires. Combien pèse une chaise, une table, une armoire ?

2) Luc et Marc lancent chacun trois fléchettes dans une cible (dessin cible à deux zones). Luc met deux flèches au centre et une dans la couronne, il obtient 22 points. Marc obtient 17 points avec une fléchette au centre et deux dans la couronne. Quelles sont les valeurs des zones ?

3) Jo, Léa et Toto ont lancé des flèches sur la même cible (dessin de trois fois la même cible à trois zones : A centre puis couronne B puis couronne C). Jo : 33 points avec 2A, 5C ; Léa : 39 points avec 2A, 1B, 5C ; Toto : 18 points avec 2B, 2C. Nombre de points que chaque zone permet de marquer.

4) Deux lettres différentes représentent deux chiffres différents. S vaut 2, il n'y a pas de 9, M est plus grand que T : MOI + TOI= NOUS (en colonne).

5) Neuf chercheurs d'or dont le chef se répartissent 180g, le chef prenant une double part. Combien de grammes d'or recevra le chef ?

6) Dimitri, Thierry, Oscar comptent leurs billes à la fin de la partie. Sandrine en a presque 100. Oscar en a le quart de Sandrine. Thierry en a le tiers d'Oscar. Et Dimitri en a la moitié de Thierry. Combien en ont-ils à eux quatre ?

7) Paul a pesé ensemble deux dictionnaires identiques et trois livres de mathématiques eux aussi identiques. La balance marque 3 kg 300 g. Valérie lui a pesé cinq livres de mathématiques identiques à ceux de Paul. La balance marque 1 kg 500g. Quel est le poids d'un dictionnaire ?

8) Un sac contient 12 bonbons rouges et 8 bonbons verts. Mais ces bonbons sont enveloppés d'un papier doré si bien qu'on ne peut pas voir leur couleur en les prenant. Combien de bonbons Laurent Outan doit-il prendre au minimum pour être sur d'en avoir deux de la même couleur ? De couleurs différentes ?

9) Nous sommes lundi 11 juin 2007. Dans 70 jours, nous serons le… ?

10) Dans la tirelire de Juan, il n'y a que des pièces de 10 centimes, de 20 centimes et de 50 centimes. Il y a autant de pièces de chaque sorte ; en tout cela représente 8 €. Combien de pièces de chaque sorte ?

11) Pour un malabar et un croissant Fatma a payé 1 € 5 c. Pour deux croissants, Lucas a payé 1 € 60 c. Trouve combien coûte un malabar.

12) 1 sucette et 2 petites brioches coûtent 2 €. 5 sucettes et 2 petites brioches coûtent 4 €. Quel est le prix d'une sucette ? Quel est le prix d'une petite brioche ?

13) Lucie veut prendre 4 litres d'eau dans un récipient. Elle ne possède que deux pots, l'un pouvant contenir 3 litres, l'autre pouvant contenir 5 litres. En utilisant seulement ces deux pots, explique comment elle peut mesurer 4 litres.

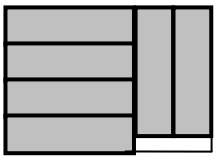
14) Dans la classe du Cours Moyen de Werner, tout le monde est sportif ! Lorsqu'on demande « qui fait de l'athlétisme ? », 16 mains se lèvent ; à la question « Qui fait du basket ? », 10 mains se lèvent. Chaque élève a levé la main au moins une fois, et quatre élèves ont levé la main deux fois. Combien la classe compte-elle d'élèves ?

15) Trouve trois nombres entiers consécutifs dont la somme est 48 ; 87 ; 120 ; 97 ; 612… (99, 3429, 56) ET donne des nombres qui sont la somme de trois nombres entiers consécutifs et des nombres qui ne peuvent pas être la somme de trois nombres entiers consécutifs. Justifie ta réponse.

16) Combien y a t il de poules et de lapins dans votre ferme ? Tu vas le trouver toi-même : lorsque je rassemble toutes les poules et les lapins de la ferme, il y a en tout 25 têtes et 64 pattes.

17) Un avion gigantesque contient 150 places assises en première classe, 400 en seconde et 4 dans le cockpit. L'équipage qui doit rester assis au décollage et à l'atterrissage, est composé d'un commandant de bord, un copilote, 8 hôtesses et 6 stewards. Combien l'avion peut-il prendre de passagers ?

18) Sur une plaque de carton rectangulaire de 8 cm sur 11 cm. Kid a dessiné des vignettes rectangulaires toutes identiques.



Sur ce schéma on indique comment il s'y est pris.
Calcule les dimensions d'une vignette.

19) Antoine ouvre à fond le robinet et remplit la baignoire en 3 minutes. Bain pris, il la vide en 6 minutes. Cléopâtre fait alors couler son bain, mais elle laisse la vidange ouverte. Au bout de combien de temps la baignoire commence-t-elle à déborder ?

20) Deux fûts contiennent ensemble 2800 litres de cidre. On a tiré 300 litres de l'un et 100 litres de l'autre. Il reste alors la même quantité dans chaque fût. Quelle est la contenance de chaque fût ?

21) Tu disposes de deux boites vertes, trois boites rouges et 50 jetons. Il faut mettre les 50 jetons dans les boites ; aucune boite ne doit être vide et il doit y avoir le même nombre de jetons dans les boîtes de la même couleur.

22) Pour le nombre 10, quel est le plus grand produit possible des termes d'une de ses décompositions additives ? Même question pour le nombre 14.

23) Le pépiniériste a vendu ce matin ce matin 420 arbres ; des poiriers, des cerisiers, et des pommiers. Il a vendu 45 poiriers de plus que de cerisiers ; 30 pommiers de plus que de cerisiers. Combien d'arbres de chaque espèce a-t-il vendus ?

24) Je dois scier un petit tronc d'arbre en six morceaux. Il me faut une minute pour le scier en deux morceaux. Combien de temps pour le scier en six morceaux ?

Annexe 2 : Références de la liste de problèmes

ERMEL (post 1995), Apprentissages mathématiques et résolution de problèmes CE2, CM1, CM2. Hatier.

TOUSSAINT, N., FROMENTIN, J. (2006), *Fichier Évariste École,* APMEP, **175**.

(1995) *Les récréations mathématiques d'Évariste et de Sophie*. Éditions Pôles.

Revue *Grand N* IREM de Grenoble.

Cap maths CE2 (2002) *Cap maths* CM1 (2003) *Cap maths* CM2 (2004) Editions Hatier.

Euromaths CE2 (2003) *Euro Maths* CM1 (2006) *Euro Maths* CM2 (2006) Editions Hatier.

Pb.	*Ouvrage*
1	*ERMEL* CM2 et *Grand N* 77
2	*Euro CM1* p198
3	*Cap CM1* p194
4	*Evariste* 61
5	*Evariste* 98
6	*Evariste* 62
7	*Cap CM1* p194
8	*Evariste* 54

Pb.	*Ouvrage*
9	*ERMEL CM* t 1 1981 p44
10	*Cap CM1* p178
11	*Cap CM1* p178
12	*Cap CM2* p100
13	*Grand N* 60 p44
14	*Récré* p19
15	*Euro CM1* p161 *CM2* p194
16	*Cap CM1* p113

Pb.	*Ouvrage*
17	*Récré* p44
18	*Euro CM2* p161
19	*Récré* p45
20	*Euro CM2* p121
21	*Euro CM1* p198
22	*ERMELCM1* p74
23	*Euro CM2* p31
24	*Evariste* 59

Bibliographie

ARSAC, G., GERMAIN, G., & MANTE, M. (1988), *Problème ouvert et situation problème,* Lyon : IREM de Lyon.

ARTIGUE M. & HOUDEMENT, C. (2007), Problem solving in France: didactic and curricular perspectives, *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik,* **39**, 365–382.

BALACHEFF, N. (1987), Processus de preuve et validation, *Educational Studies in Mathematics,* **18**, 147–176.

BONAFÉ, F., CHEVALIER, A., COMBES, M.C. et alii. (2002), *Les narrations de recherche de l'école primaire au lycée*, IREM de Montpellier.

BROUSSEAU, G. (1970-1990, édition 1998), *Théorie de situations didactiques*, 25–43, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BLOCH, I. (2005), Dimension adidactique et connaissance nécessaire. Un exemple de « retournement » d'une situation, *Sur la théorie de situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage, 143–152.

BURGERMEISTER, P. & CORAY, M. (2008), Processus de contrôle en résolution de problèmes dans le cadre de la proportionnalité des grandeurs, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **28/1**, 63–107.

CASTELA, C. éd. (2008), Contribution à une approche didactique des implicites scolaires : la problématique des enjeux cachés d'apprentissage, *Les Cahiers de L'IUFM* **7**, Université de Rouen : publication de l'IUFM.

CHAPPAZ, J. & MICHON, F. (2003), Il était une fois la boîte du pâtissier, *Grand N,* **72**, 19–32.

CHARNAY, R. (2006), Rallyes mathématiques : quel intérêt ? *Grand N,* **78**, 53–62.

CHEVALLARD, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **19/2**, 221–266.

CONNE, F. (1992), Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **12/2-3**, 221–270.

COPPÉ, S. & HOUDEMENT, C. (2002), Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire, *Grand N,* **69**, 53–63.

DAMM, R. (1992) *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension des énoncés,* Thèse. Strasbourg : ULP.

DA PONTE, J.P (2007), Investigations and explorations in the mathematics classroom. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik,* **39,** 419–430.

DOUADY, R. (1986), Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des mathématiques*, **7/2**, 5–32.

DUPUIS, C. & GRUGNETTI, L. (2003), Le nez de Pinocchio, un problème de mathématiques «inverse», *Grand N*, **72**, 33–40.

ERMEL (1977 à 1982), *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire (CP au CM2)*, Paris : Hatier.

ERMEL (post 1991), *Apprentissages numériques et résolution de problèmes (CP au CM2)*, Paris : Hatier.

ERMEL (1999), *Vrai ? Faux ?... On en débat*. Paris : INRP.

FAYOL, M. (1990), *L'enfant et le nombre*, Lausanne : Delachaux et Niestlé.

FISCHBEIN, E. (1990), The autonomy of Mental. *For the Learning of Mathematics*, **10.1**, 23–30.

GLAESER, G. (1976), *Le livre du problème. Pédagogie de l'exercice et du problème*, Paris : Éditions CEDIC (seconde édition).

GODOT, K. (2006), La roue aux couleurs : une situation recherche pour apprendre à chercher dès le cycle 3, *Grand N*, **78**, 31–52.

GRAVIER, S., PAYAN, C. & COLLIARD, M.N. (2008), Maths à modeler. Pavages par des dominos, *Grand N*, **82**, 53–68.

GRENIER, D. & PAYAN, C (2003), Situations de recherche en classe. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2002*, Paris : IREM de Paris 7, 189–203.

GR IREM ELEM BESANÇON (2005), La conduite en classe d'une situation de recherche : un exercice périlleux, *Grand N*, **76**, 65–74.

GRAND N (2003), N°spécial *Points de départ*, IREM de Grenoble.

GUEUDET, G. & LE POCHE, G. (2006), Séquences de résolution de problèmes complexes, *Grand N*, **77,** 35–54.

HERSANT, M. (dir) (2006), *Des problèmes pour chercher à l'école primaire*, IUFM des Pays de la Loire et IREM de Nantes.

HOUDEMENT, C. (1998), Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes, *Grand N*, **63**, 59–77.

HOUDEMENT, C. (2003), La résolution de problèmes en question, *Grand N*, **71**, 7–23.

HOUDEMENT, C. (2006), Trouver ou ne pas trouver : ce qui peut faire la différence entre élèves dans la résolution de problèmes arithmétiques ordinaires… *Cahier DIDIREM*, **54**, IREM de Paris 7.

IGEN MENESR (juin 2006) *L'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école primaire*. En ligne sur http://www.education.gouv.fr/cid4172/l-enseignement-des-mathematiques-au-cycle-3-de-l-ecole-primaire.html (consulté le 10-04-09).

JULO, J. (1995), *Représentation de problèmes et réussite en mathématiques*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

JULO, J. (2002), Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, **69**, 31–52.

KILPATRICK, J. (1985), A Retrospective Account of the Past 25 Years of Research on Teaching Mathematical Problem Solving. In Silver E.A (ed) (1985) *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving.* Mahwah NJ (USA) : Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

LÉPINE, L. (1996), Tout problème ouvert n'engage pas nécessairement une bonne recherche, *Grand N*, **60,** 43–55.

MEN (2005), Les problèmes pour chercher. *Documents d'accompagnement Mathématiques*, SCEREN CNDP.

MEN (2008), Horaires et programmes de l'enseignement primaire, BO spécial n°3, 19 juin 2008.

MERCIER, A. (2008), Une question curriculaire de l'enseignement élémentaire des mathématiques : la 'résolution de problèmes', In MEN-DGESCO *Actes du séminaire national sur les mathématiques à l'école primaire* (nov.2007).

NGUALA, J.B. (2005), La multiprésentation, un dispositif d'aide à la résolution de problèmes, *Grand N*, **76**, 45–63.

PÉAULT, H. (1992), Vers une pratique collective des mathématiques, *Grand N*, **51**, 5–65.

PLUVINAGE, F. (2008), Préalables à une analyse didactique de l'emploi des modèles. In Kuzniak, Parzysz, Vivier (eds) *Du monde réel au monde mathématique*, Cahier DIDIREM, **58**, Paris : IREM de Paris 7.

PRIOLET, M. (2008), *Enseignement et apprentissage de la résolution de problèmes mathématiques. Le cas des problèmes numériques au cycle 3 de l'école primaire française. Approches didactique et ergonomique*, Thèse de l'Université de Lyon 2.

THOMAS, Y. (2007), Gommettes et étiquettes, des problèmes pour chercher. *Grand N*, **80**, 29–42.

TOUSSAINT, N. & FROMENTIN, J. (2006), *Fichier Evariste Ecole*, Brochure APMEP, **175.**

VERSCHAFFEL, L., GREER, B. & DE CORTE, E. (2000), *Making sense of word problems*, Lisse (Netherlands): Swets & Zeitlinger Publishers.

VERGNAUD, G. (1986), Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques, *Grand N*, **38**, 21–40.

VERGNAUD, G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **10/2.3,** 133–170.

WEIL-BARAIS A. (1993), *L'homme cognitif*, Paris : PUF.

ZAWOJEWSKI J.S & LESH R. (2003), Models and Modeling Perspective on Problem Solving. In Lesh & Doerr (eds) *Beyond Constructivism***.** Mahwah NJ (USA): Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 317–336.

CATHERINE HOUDEMENT
IUFM de Haute-Normandie, Université de Rouen. DIDIREM
catherine.houdement@univ-rouen.fr

VALÉRIANE PASSARO

OBSTACLES À L'ACQUISITION DU CONCEPT DE COVARIATION ET L'INTRODUCTION DE LA REPRÉSENTATION GRAPHIQUE EN DEUXIÈME SECONDAIRE

Abstract. Students' difficulties for acquiring covariation concept and using graphical representation in grade 8 – Our research concerns the conversions between the registers of representation implied at the time of the passage of a functional situation to a graph. We are interested more particularly in the perception of covariation between two magnitudes by the students in grade 8. A teaching sequence has been created in order to introduce Cartesian graph to these students and to collect spontaneous representations about covariation. Our analysis principally puts in evidence the characteristics of these representations, as well as the degree of perception of the covariation by the students. It permits us to come to certain conclusions in relation to the passage to official representation: the Cartesian graph.

Résumé. Notre recherche concerne les conversions entre les registres de représentation impliquées lors du passage d'une situation fonctionnelle à un graphique. Dans ce cadre, nous nous intéressons plus particulièrement à la perception du concept de covariation entre deux grandeurs par les élèves du premier cycle du secondaire (13-14 ans). C'est par l'intermédiaire d'une séquence d'enseignement minutieusement conçue que nous avons recueilli les représentations spontanées d'élèves à propos du concept de covariation. Notre analyse met principalement en évidence les caractéristiques de ces représentations, ainsi que le degré de perception de la covariation par les élèves. Elle nous permet de tirer certaines conclusions relativement au passage à la représentation officielle : le graphique cartésien.

Mots clés. Fonctions, covariation, registre de représentation, graphique, représentations spontanées ou fonctionnelles.

1. Introduction

C'est de la considération des difficultés éprouvées par les élèves du secondaire, les étudiants de collège et d'universités et même par les enseignants relativement au concept de fonction, ainsi que de l'importance de ce concept dans le programme de formation de l'école québécoise que sont nés nos intérêts de recherche. La consultation de plusieurs recherches portant sur le concept de fonction (Monk, 1992 ; Janvier, 1993 ; Beichner, 1994 ; Carlson, 1998 ; Hitt, 1998, 2003) nous a permis de constater qu'une multitude de difficultés étaient reliées aux transferts entre modes de représentation, particulièrement les passages entre la situation

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 14, p. 61 – 77.
© 2009, IREM de STRASBOURG.

(mots ou dessin) et le graphique[1]. Une analyse plus détaillée du type d'obstacle rencontré lors de ces transferts nous a permis de mettre en évidence l'importance de la compréhension du concept de covariation[2] entre deux grandeurs (*voir* Hitt et Passaro, 2007).

2. Programme de formation de l'école québécoise et manuels scolaires

L'étude des fonctions en mathématiques occupe une place importante dans le programme de formation de l'école québécoise (niveau secondaire). Au premier cycle du secondaire, les élèves sont initiés à la représentation graphique d'une relation entre deux grandeurs. Le programme (MELS, 2003) indique qu'ils doivent pouvoir effectuer une « représentation globale d'une situation par un graphique » (p. 253). À ce niveau, on ne parle pas encore de l'étude des fonctions, mais la plupart des situations présentées par les manuels sont fonctionnelles. Au deuxième cycle du secondaire, le travail sur les fonctions devient explicite. Les élèves sont amenés à faire une étude approfondie de plusieurs modèles de variation et pour cela ils doivent travailler à l'aide des divers modes de représentation.

Le concept de covariation quant à lui n'est pas mentionné dans ce dit programme. Il n'est pas non plus abordé clairement dans les manuels scolaires. On peut trouver, en effet, quelques éléments témoignant d'une certaine préoccupation pour la covariation comme l'illustre la citation suivante : « Généralement, dans une situation, l'une des variables réagit aux variations de l'autre. » (Carrousel mathématique 3, 1995), mais ceux-ci occupent une place minime. Ainsi, il ne semble pas que l'importance de la covariation soit considérée, or, nous sommes convaincus que sa compréhension est préalable aux transferts entre les modes de représentation « situation » et « graphique ».

3. La conceptualisation via la coordination des registres de représentation sémiotiques

Puisque nous nous intéressons au développement du concept de covariation ainsi qu'aux conversions entre les modes de représentation « situation » et « graphique », nous avons choisi de nous appuyer sur le cadre théorique de Duval (1988, 1993) portant sur les registres de représentation sémiotiques. Cette

[1] Nous nous basons ici sur les modes de représentations, ainsi que sur le tableau de traduction entre ceux-ci, établis par Janvier, Girardon, Morand (1993) et utilisés dans le programme de formation de l'école québécoise (MEQ, 1994).

[2] Nous entendons par « covariation » l'idée selon laquelle lorsque deux grandeurs sont mises en relation de manière à ce que l'une dépende de l'autre, la variation de la grandeur conséquente dépend de la variation de grandeur prédominante.

théorie soutient à la fois les fondements de l'expérimentation, ainsi que de l'analyse des données.

D'abord Duval (1993) parle de représentation sémiotique par opposition à la représentation mentale. Il définit la représentation sémiotique comme étant une production « constituée par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement » (p. 2), alors que, pour lui, la représentation mentale ne recouvre que les images et conceptions qu'un individu peut avoir sur un objet ou une situation. La représentation sémiotique ne peut pas non plus être restreinte à l'extériorisation de la représentation mentale car elle est plus que cela. Elle est non seulement un moyen de communication avec l'extérieur, mais aussi un élément clé dans l'activité cognitive de la pensée. En effet, elle a, entre autres, les fonctions d'objectivation (expression privée ou construction interne qui permet à l'individu la reconnaissance d'un objet) et de traitement pour lequel les représentations mentales sont insuffisantes. Ainsi, la représentation sémiotique est à la base du fonctionnement cognitif de la pensée humaine. Duval exprime cette idée en précisant que « si on appelle *sémiosis* l'appréhension, ou la production, d'une représentation sémiotique, et *noésis* l'appréhension conceptuelle d'un objet, il faut affirmer que la *noésis* est inséparable de la *sémiosis* » (p. 3). Ainsi, pour lui il n'y a pas de *noésis* sans *sémiosis* ce qui signifie que la conceptualisation d'un objet n'est possible que si un processus d'appréhension ou de production d'une représentation sémiotique a eu lieu.

Il ajoute cependant que « pour qu'un système sémiotique puisse être un registre de représentation, il doit permettre trois activités cognitives fondamentales liées à la *sémiosis* » (p. 4). La première activité est celle de la formation d'une représentation identifiable. En fait, la concrétisation de la représentation doit être reconnaissable par l'humain qui en connaît les règles de fonctionnement. Par exemple, la grammaire est une règle du registre de la langue naturelle permettant aux individus de communiquer entre eux. La seconde activité est celle du traitement. Le traitement est la transformation de la représentation dans le registre même où elle a été formée. En fait, le traitement est une activité se déroulant à l'intérieur d'un même registre sémiotique. La représentation n'est pas exactement répétée, mais plutôt modifiée de manière, par exemple, à témoigner de la transformation d'une situation ou à mettre l'accent sur un aspect différent d'une même situation. La troisième activité est la conversion de la représentation dans un autre registre que celui d'où elle provient. Par exemple, « la *description* est la conversion d'une représentation non verbale (schéma, figure, graphe) en une représentation linguistique » (p. 5). Cette dernière activité est sans doute la plus problématique car il n'existe pas toujours de règles de conversions possibles et lorsqu'il y en a, leur

importance est négligée. Cette négligence est certainement l'une des sources des difficultés éprouvées par des élèves lors de tâches de conversion.

En tenant compte des caractéristiques établies par Duval, nous avons, d'une part, vérifié qu'il existait bel et bien un registre « graphique » au sein duquel le graphique cartésien constitue la représentation identifiable, et, d'autre part, établi que la situation pouvait être constituée de deux registres complémentaires, les registres « figural » et « verbal » (*voir* Passaro, 2007). Ainsi, les transferts entre les modes de représentation « graphique » et « situation » impliquent des conversions entre ces trois registres. Ces conversions ne sont cependant pas des activités évidentes puisqu'il n'existe pas de *congruence*[3] entre les divers registres. Nous avons donc tenté d'éclairer la démarche de conversion à l'aide de l'identification d'éléments signifiants[4]. Puisque nous nous intéressons aux situations de covariation entre deux grandeurs, nous avons répertorié les éléments signifiants en lien, entre autres, avec 1) la distinction des deux grandeurs et 2) la considération du lien de dépendance entre ces deux grandeurs. Nous considérons ainsi que l'activité de conversion consiste à établir le parallèle entre les éléments signifiants préalablement identifiés des registres mis en jeu.

4. Méthodologie de l'expérimentation

L'importance précédemment établie des éléments signifiants dans l'activité de conversion entre registres de représentation nous a mené à nous questionner sur l'identification de ces éléments par les élèves. Nous avons décidé d'évaluer la perception de la covariation avant que ne soit effectuée l'étude des fonctions. C'est pourquoi nous avons ciblé des élèves de deuxième année du premier cycle du secondaire (13-14 ans) et que nous avons intégré notre évaluation à une séquence d'enseignement visant l'introduction de la représentation graphique. Cette

---

[3] La congruence est définie par Duval (1993) à l'aide de trois critères :

- La possibilité d'une correspondance « sémantique » des éléments signifiants : à chaque unité signifiante simple de l'une des représentations, on peut associer une unité signifiante élémentaire.
- L'univocité « sémantique » terminale : à chaque unité signifiante de la représentation de départ, il ne correspond qu'une seule unité signifiante élémentaire dans le registre de la représentation d'arrivée.
- L'organisation des unités signifiantes : les organisations respectives des unités signifiantes des deux représentations comparées conduit à y appréhender les unités en correspondance sémantique selon le même ordre dans les deux représentations. (pp. 12-13).

[4] Duval parle distinctement *d'unités signifiantes* et de *variables visuelles* selon les registres considérés. Nous avons regroupé ces éléments sous l'appellation *éléments signifiants* pour éviter d'alourdir le texte.

séquence a donc été proposée à des élèves de deux écoles de Montréal (3 groupes que nous avons pu identifier comme académiquement faible, moyen et fort).

Afin d'évaluer cette perception de la covariation par les élèves, nous leur avons présenté une situation-problème dans laquelle deux grandeurs étaient mises en relation puis nous leur avons demandé de réaliser plusieurs tâches. Un travail collaboratif avec les enseignants des groupes d'élèves ciblés a mené à l'élaboration de deux versions de la situation-problème assez semblables mais présentant tout de même des différences significatives pour le chercheur. C'est pourquoi nous présenterons uniquement l'une des deux versions ainsi que les résultats relatifs au travail sur cette situation par deux groupes d'élèves ayant le même enseignant (le groupe C composé d'élèves qualifiés comme académiquement faibles et le groupe B composé d'élèves qualifiés comme académiquement moyens). Voici donc l'énoncé de la situation-problème :

Le rallye

« *Lors d'un rallye organisé par l'école, vous devez vous rendre à 5 endroits précis dans le quartier. Dans l'ordre, vous devez aller : à la piscine Père-Marquette, au jardin communautaire Père-Marquette, à l'école Saint-Étienne, à l'Éco-centre Petite-Patrie et finalement à l'école Madeleine de Verchères. Votre point de départ et d'arrivée est l'intersection des rues Bellechasse et Marquette. ATTENTION : Vous devez absolument passer par les trottoirs (vous devez ressortir de chaque endroit et reprendre le trottoir à chaque fois).* » (Une carte du quartier est jointe)

Il est à noter que le contexte choisi est familier aux élèves concernés puisqu'il s'inspire d'une activité scolaire à laquelle ils ont réellement participé.

Les élèves eurent à répondre à trois questions (*voir en Annexe* le document fourni aux élèves). En résumé, ces questions les amenaient à :

1. choisir un trajet sur la carte du quartier permettant de passer par tous les lieux imposés par l'énoncé ;
2. produire une description écrite sur l'étude de la covariation entre deux grandeurs mises en relation (ce sont ici « la distance parcourue sur le trajet » et « la distance à vol d'oiseau à l'école ») ;
3. produire une représentation visuelle du phénomène précédemment décrit.

Pour répondre à chacune de ces questions, les élèves devaient d'abord réaliser un travail individuel, puis un travail collaboratif (équipes de 3 ou 4 élèves) pour finalement partager leurs réponses avec l'ensemble du groupe sous forme d'une discussion dirigée par l'enseignant.

Pour pouvoir décrire en mots la covariation, les élèves devaient d'abord identifier les deux grandeurs ainsi que leur lien de dépendance (la distance parcourue est la

grandeur indépendante et la distance à vol d'oiseau la grandeur dépendante). L'intérêt d'étudier la variation de la distance à vol d'oiseau étant discutable, nous nous attendions à ce que certains élèves mettent de côté cette grandeur.

Puis ils devaient repérer ces grandeurs sur la figure (en les concrétisant, par exemple, par des segments) de manière en visualiser la variation.
Pour ce qui est du passage au registre graphique, les critères imposés par l'énoncé devaient guider les élèves sur la piste d'une représentation permettant de montrer rapidement la covariation des grandeurs. L'obstacle majeur nous apparaissait ici de faire abstraction de la situation réelle au profit des grandeurs et de leur relation.

Dans cet article, nous nous limitons à présenter la synthèse de l'analyse des productions individuelles recueillies suite au travail des élèves sur les questions 2 et 3.

5. Analyse des représentations spontanées des élèves

Nous rappelons que notre analyse des productions des élèves avait pour objectif d'évaluer la perception de la covariation par l'intermédiaire de l'identification d'éléments signifiants. Ces derniers permettent, entre autres, la distinction des deux grandeurs et la considération du lien de dépendance entre ces deux grandeurs. Nous avons donc cherché à retrouver des traces de l'identification de ces éléments signifiants dans les descriptions écrites et les représentations visuelles produites par les élèves.

Lors de la réalisation de la première tâche, les élèves ont eu l'occasion de comprendre et s'approprier la situation. À la fin de cette étape, l'enseignant les amenait à choisir un trajet commun pour la classe de manière à ce que tous les élèves réalisent les tâches suivantes à partir de ce trajet. La seconde tâche amenait d'abord les élèves à produire des descriptions écrites individuelles. L'analyse de ces dernières s'est avérée ardue du fait de la piètre qualité de la rédaction écrite. Néanmoins, nous avons réussi à faire ressortir certaines tendances. D'abord, dans certaines descriptions, les deux grandeurs apparaissent clairement (*voir* figure 1), alors que d'autres ne présentent que la distance à vol d'oiseau, soit la grandeur dépendante (*voir* figure 2).

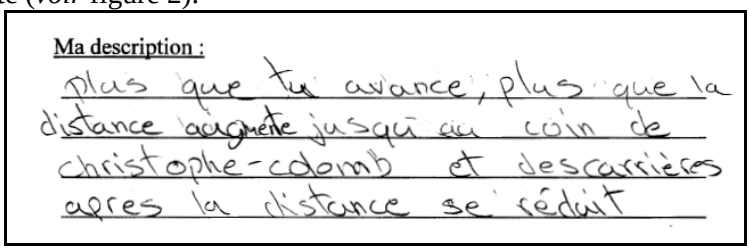

Ma description :
plus que tu avance, plus que la distance augmente jusqu'au coin de christophe-colomb et des carrières après la distance se réduit

Figure 1 : Description de l'élève A-AP.

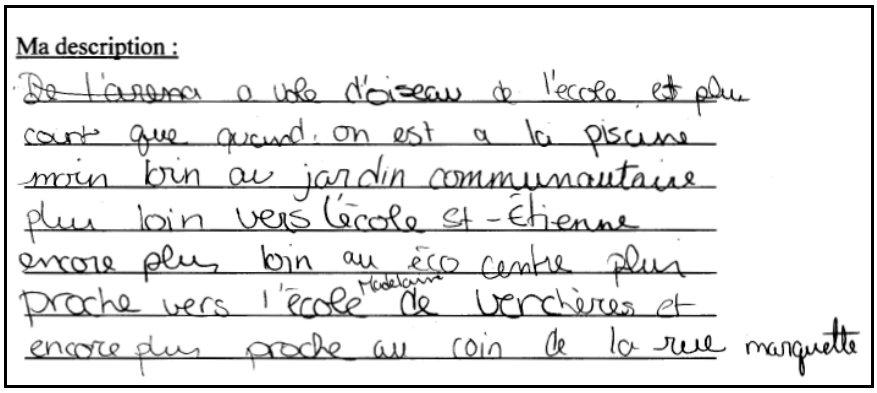


Figure 2 : Description de l'élève A-AP.

Il est bien évident que seuls les élèves ayant distingué les deux grandeurs peuvent établir le lien de dépendance entre celles-ci. Ainsi, peu de descriptions présentent les éléments signifiants témoignant de la considération du lien de dépendance. Le tableau 1 récapitule les résultats compilés pour la perception des éléments signifiants d'après les descriptions écrites.

	Groupe C	**Groupe B**
Pourcentage des élèves ayant distingué les deux grandeurs observées	70% (19 sur 27)	35% (8 sur 23)
Pourcentage des élèves ayant établi une relation de dépendance entre les deux grandeurs observées	26% (7 sur 27)	0% (0 sur 23)

Tableau 1 : Perception des éléments signifiants d'après les descriptions individuelles.

Il est surprenant de constater que d'après le tableau 1, les descriptions des élèves plus faibles témoignent d'un meilleur discernement des éléments signifiants. Nous avons cherché à comprendre pourquoi, en analysant les facteurs contextuels ayant influencé les résultats. Il est alors ressorti que les élèves du groupe C, moins sûrs d'eux, avaient davantage posé de question lors de l'explication des consignes par l'enseignant. Ce dernier a donc inévitablement fourni plus d'informations aux élèves du groupe C qu'à ceux du groupe B.

Suite à cela, les élèves, placés en équipes de 3 ou 4, devaient produire une description d'équipe à partir des descriptions individuelles. À ce stade, nous nous attendions à ce que les élèves partagent, discutent, débattent, *etc*. Dans les faits, il y a eu très peu d'échanges dans le groupe C et peu dans le groupe B. Les élèves ont

spontanément échangé leurs descriptions afin que tous les membres de l'équipe en prennent connaissance, puis après un consensus, ont choisi la meilleure production pour en faire leur description d'équipe. Bien que cette activité ait eu pour objectif de permettre aux élèves d'évoluer à l'aide du partage avec les pairs, nous n'avons pas relevé de progression notoire. Par contre, lorsque l'enseignant a repris les descriptions d'équipe de manière à construire la description de la classe, les échanges ont été plus fructueux. Évidemment, les interventions de l'enseignant ont joué un rôle déterminant puisque celles-ci ont guidé les élèves vers une description assez complète.

L'étape suivante dans le déroulement de la séquence d'enseignement (3ème question) amenait les élèves à produire des représentations visuelles. Cette démarche nous a permis de recueillir ce que nous avons appelé les *représentations spontanées ou fonctionnelles* (voir Hitt, 2003, 2006, 2007) des élèves à propos du phénomène de covariation entre deux grandeurs dans des registres « figural » et « graphique ». Il est d'abord intéressant d'observer la variété de représentations proposées. En effet, les élèves devaient faire preuve d'imagination pour être capables de présenter visuellement le phénomène de covariation.

Une première analyse de ces représentations nous a permis d'effectuer une classification selon le niveau d'abstraction. Nous avons retenu 3 niveaux principaux, les voici accompagnés chaque fois d'un exemple tiré des productions d'élèves du groupe C (élèves faibles) :

– Niveau 0 : la représentation est une reproduction partielle du plan sur laquelle la situation est figurée. Elle présente le tracé du trajet, ainsi que les endroits d'arrêt du rallye. Des détails visuels, n'ayant pas de rôle à jouer dans la relation entre les grandeurs observées, sont conservés.

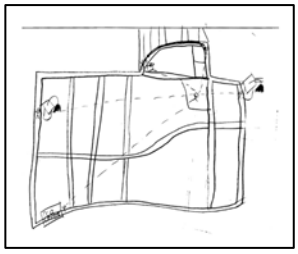


Figure 3 : Représentation visuelle de l'élève D-AM.

– Niveau 1a : la représentation est une schématisation du trajet du rallye. Elle présente le tracé du trajet, mais celui-ci a été simplifié de manière à mettre en évidence les grandeurs observées. Il reste uniquement des traces des détails visuels n'ayant pas de rôle à jouer dans la relation entre les grandeurs observées.

Figure 4 :
Représentation visuelle de l'élève C-AM.

– Niveau 1b : la représentation est une schématisation du trajet du rallye avec une réorganisation des informations connues de la situation. Elle fait abstraction des détails visuels et s'efforce de présenter uniquement les informations relatives aux deux grandeurs observées. Ainsi la représentation reste bidimensionnelle, mais le tracé du trajet apparaît sans référence au plan.

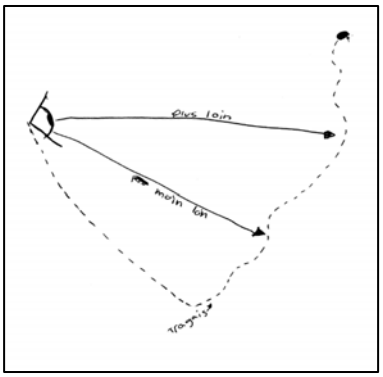


Figure 5 : Représentation visuelle de l'élève C-FT.

– Niveau 2 : la représentation présente la relation de dépendance entre les grandeurs observées. Tous les éléments visuels de la situation de départ ont disparu, seules les grandeurs et la relation entre celles-ci sont présentées.

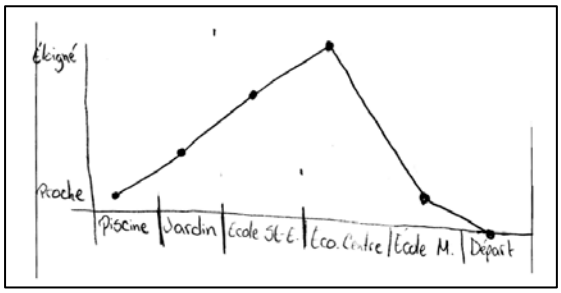


Figure 6 : Représentation visuelle de l'élève B-AVR.

Il est à noter qu'afin de réaliser cette classification, nous nous sommes intéressés aux moyens visuels mobilisés par les élèves pour tenter de représenter l'information, et non à l'exactitude de cette information. Le tableau 2 présente la compilation des résultats pour les deux groupes en ce qui concerne les niveaux d'abstraction des représentations visuelles.

Niveau d'abstraction	Groupe C Nombre de productions	Groupe B Nombre de productions
Niveau 0	8	0
Niveau 1	11 (1a : 8, 1b : 3)	10 (1a : 6, 1b : 4)
Niveau 2	2	1
Aucune production ou production ininterprétable	6	12
Nombre total d'élèves	27	23

Tableau 2 : Classification des représentations spontanées (registre « figural » ou « graphique »).

La lecture du tableau 2 permet d'abord de constater que certains élèves n'ont pas vraiment proposé de représentation visuelle. Dans le groupe C, cela concerne moins du quart de la classe, alors que dans le groupe B c'est plus de la moitié de la classe. Ainsi, les élèves plus faibles ont moins hésité à se lancer et à « dessiner ». Cependant, dans ce dernier groupe, 8 élèves proposent des représentations de niveau 0, ce qui montre qu'en fait ils ont tendance à simplement reproduire le schéma de la situation. Par contre, dans le groupe B, la plupart des représentations se situent au niveau 1. Ainsi, on pourrait se risquer à conclure que les élèves moyens sont plus habiles que les faibles en ce qui a trait à l'abstraction et que par le fait même, ils auront plus de facilité à construire et comprendre la représentation officielle abstraite visée.

Une seconde analyse de ces représentations, nous a permis de dégager les éléments signifiants identifiés et représentés par les élèves. D'abord, il est ressorti que la distinction entre les deux grandeurs n'apparaissait pas systématiquement puisque plusieurs élèves (9 élèves dans le groupe C et 4 dans le groupe B) ne représentent qu'une seule des deux grandeurs (le plus souvent la distance à vol d'oiseau, c'est à dire la grandeur dépendante). Ainsi, l'identification du lien de dépendance fût encore moins présente, puisque pour qu'il y ait dépendance, il faut deux grandeurs. Il est aussi évident que la représentation de la dépendance nécessitait l'atteinte d'un certain niveau d'abstraction – d'où l'intérêt de la classification des représentations selon le niveau d'abstraction présentée précédemment – et c'est pourquoi nous nous attendions à ce que cela constitue une difficulté pour les élèves. Finalement, le tableau 3 présente les résultats des éléments représentés par les élèves dans un registre visuel (« figural » ou « graphique »).

	Groupe C	**Groupe B**
Pourcentage des élèves ayant distingué les deux grandeurs observées	19% (5 sur 27)	30% (7 sur 23)
Pourcentage des élèves ayant établi une relation de dépendance entre les deux grandeurs observées	4% (1 sur 27)	4% (1 sur 23)

Tableau 3 : Perception des éléments signifiants d'après les représentations visuelles.

En comparant les tableaux 2 et 3, nous remarquons que le changement de registre a beaucoup nuit aux élèves du groupe C. Les élèves du groupe B quant à eux ont maintenu des résultats assez faibles.

Ainsi, cette analyse des représentations spontanées des élèves dans divers registres (« verbal », « figural » et « graphique ») nous informe sur le degré de perception des éléments signifiants de la situation par ceux-ci. D'après les descriptions écrites, il apparaît que plus de la moitié des élèves semblent identifier et distinguer les deux grandeurs (27 élèves sur 50), mais que moins du quart (7 élèves sur 50) établit une relation de dépendance entre ces deux grandeurs. Les représentations visuelles quant à elles témoignent d'une moins bonne perception de ces mêmes éléments signifiants puisque seulement 12 élèves représentent visuellement les deux grandeurs considérées et 2 réussissent à représenter la dépendance. Évidemment, il est clair que la conversion vers un registre visuel a constitué un obstacle majeur et qu'il serait insensé de ne pas le considérer.

6. Conclusions

Dans le cadre de l'étude du concept de fonction, la représentation d'une situation par un graphique apparaît problématique. Le cadre théorique de Duval (1988, 1994) concernant les registres de représentation sémiotiques nous a permis d'émettre des hypothèses quant à l'activité de conversion d'un registre à l'autre. Selon nous, à la base de cette conversion réside l'identification d'éléments signifiants propres à chaque registre. Pour ce qui est du passage de la représentation figurale d'une situation à un graphique cartésien, ces éléments signifiants permettent, entre autres, d'identifier les grandeurs mises en jeu ainsi que le lien de dépendance entretenu par ces deux grandeurs et sont donc inévitablement reliés au concept de covariation.

Nous avons donc proposé une séquence d'enseignement ayant pour objectif de faire travailler des élèves de deuxième secondaire (13-14 ans) sur une situation dans laquelle on s'intéresse à la covariation entre deux grandeurs et de les amener à représenter visuellement cette covariation.

L'expérimentation dans le milieu scolaire nous a permis de recueillir les représentations spontanées d'élèves dans plusieurs registres de représentation (« verbal », « figural » et « graphique »). L'analyse des productions des élèves a fait ressortir principalement deux points importants. D'une part, la perception des éléments signifiants relativement à l'identification des deux grandeurs (ici ce sont des expressions précises dans le texte ainsi que des distances séparant deux points sur la figure) et la considération du lien de dépendance entre celles-ci n'est pas une activité simple et naturelle. D'autre part, la représentation de ces éléments dans un registre graphique constitue une difficulté notoire. Ainsi, il nous apparait clairement que les difficultés relatives à la compréhension et la représentation du concept de covariation devraient être considérées lors de l'enseignement des fonctions.

Finalement, dans l'optique de l'introduction de la représentation officielle, le graphique cartésien, nous avons analysé le niveau d'abstraction des représentations spontanées des élèves dans un registre figural. Nous avons constaté pour le cas étudié que le niveau d'abstraction atteint par ces dernières peut être loin de celui de la représentation officielle. Il n'est donc pas surprenant que les élèves aient de la difficulté à comprendre et utiliser cette représentation dès son introduction.

Annexe

PRÉSENTATION CONDENSÉE DU CAHIER DE L'ÉLÈVE DES GROUPES B ET C

Page 1

Le rallye

Lors d'un rallye organisé par l'école, vous devez vous rendre à 5 endroits précis dans le quartier. Dans l'ordre, vous devez aller : à la **piscine Père-Marquette**, au **jardin communautaire Père-Marquette**, à **l'école Saint-Étienne**, à **l'Éco-centre Petite-Patrie** et finalement à **l'école Madeleine de Verchères**. Votre **point de départ** et d'arrivée est l'intersection des **rues Bellechasse et Marquette.**

ATTENTION : Vous devez absolument passer par les trottoirs (vous devez ressortir de chaque endroit et reprendre le trottoir à chaque fois).

Question 1 : *Choix d'un trajet*

Trace le chemin que tu emprunterais sur la carte du quartier suivante en respectant l'ordre indiqué par l'énoncé (ATTENTION : IL FAUT TE FIER À LA CARTE).

PLACER ICI LE PLAN QUI EST REPRODUIT EN PAGE SUIVANTE

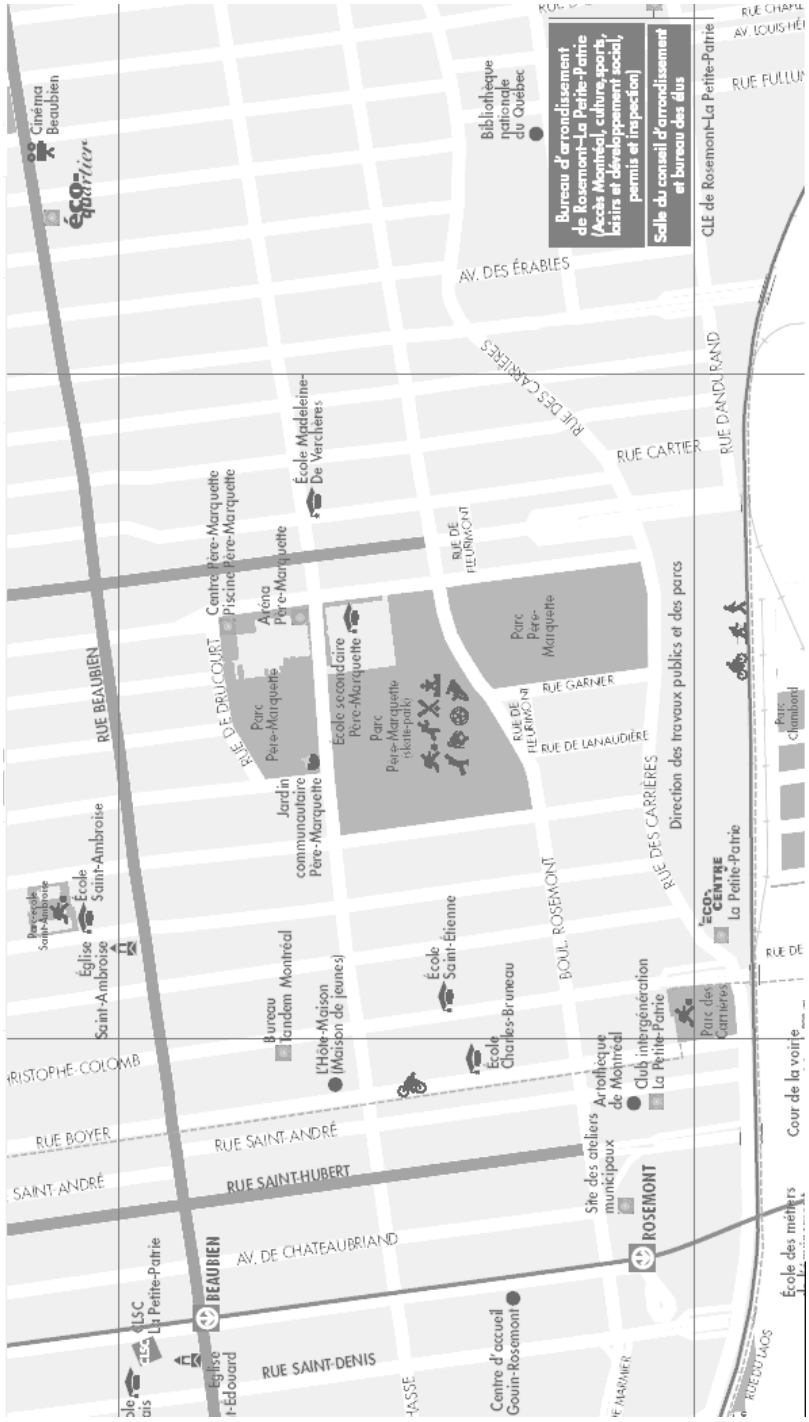
Page 2

Compare ton trajet avec celui des autres membres de ton équipe. Choisissez le trajet de l'équipe en tenant compte des trajets de chacun et tracez-le dans le CAHIER DE L'ÉQUIPE.

Reproduis ci-dessous le trajet choisi par la classe.

PLACER ICI LE PLAN QUI EST REPRODUIT EN PAGE SUIVANTE

Pour répondre aux questions qui suivent, tu dois travailler sur le trajet choisi par la classe.


Cinéma Beaubien
Bibliothèque nationale du Québec
Bureau d'arrondissement de Rosemont–La Petite-Patrie (Accès Montréal, culture, sports, loisirs et développement social, permis et inspection)
Salle du conseil d'arrondissement et bureau des élus
CLE de Rosemont–La Petite-Patrie
AV. DES ÉRABLES
RUE DES CARRIÈRES
RUE CARTIER
RUE DANDURAND
RUE BEAUBIEN
RUE DE DRUCOURT
Centre Père-Marquette Piscine Père-Marquette
Aréna Père-Marquette
École Madeleine-De Verchères
Parc Père-Marquette
Jardin communautaire Père-Marquette
École secondaire Père-Marquette
Parc Père-Marquette (skate-park)
RUE DE FLEURIMONT
RUE GARNIER
RUE DE LANAUDIÈRE
Direction des travaux publics et des parcs
ÉCO-CENTRE La Petite-Patrie
Parc des Carrières
BOUL. ROSEMONT
École Saint-Ambroise
Église Saint-Ambroise
Bureau Tandem Montréal
L'Hôte-Maison (Maison de jeunes)
École Saint-Étienne
École Charles-Bruneau
Artothèque de Montréal
Club intergénération La Petite-Patrie
Site des ateliers municipaux
ROSEMONT
RUE BOYER
RUE SAINT-ANDRÉ
RUE SAINT-HUBERT
AV. DE CHÂTEAUBRIAND
BEAUBIEN
RUE SAINT-DENIS
Centre d'accueil Gouin-Rosemont
Cour de la voirie
École des métiers

Page 3

Question 2 : *Description du phénomène*

Le directeur de l'école veut être sûr que vous ne vous éloignerez pas trop de l'école. Pour le rassurer, vous devez vous intéresser aux 2 grandeurs suivantes : **la distance que vous allez parcourir depuis le point de départ** et **la distance à « vol d'oiseau » qui vous sépare de l'école**.

a) Lorsqu'une de ces grandeurs change, l'autre réagit. **Décris comment ça se passe** tout au long du trajet (du départ à l'arrivée).

Ma description : …

b) Compare ta description avec celle des autres membres de ton équipe. Composez la description de l'équipe en tenant compte des descriptions de chacun. Un membre de l'équipe écrit cette description dans le CAHIER DE L'ÉQUIPE.

c) Après la présentation des descriptions de chaque équipe, la classe a composé la description suivante : …

Description globale : …

Identification de certains points repères et de phases : …

Page 4

Question 3 : *À la recherche d'une nouvelle représentation visuelle de la situation*

Lorsque vous avez expliqué au directeur comment varie la distance à l'école lorsque la distance parcourue augmente, il a trouvé vos explications très longues. Il vous demande donc de trouver **un moyen plus rapide de lui montrer ce qui se passe**. Il voudrait aussi que ce moyen soit **visuel** car c'est aussi moins long à interpréter.

Finalement, il demande que la représentation visuelle proposée lui permette de **comparer rapidement plusieurs distances à l'école**. De cette manière, selon où sont rendus les différents groupes d'élèves, il pourra savoir lequel est le plus proche de l'école (« à vol d'oiseau »)

a) Dans l'énoncé, repère les 3 critères à respecter :
Critère 1 : …
Critère 2 : …
Critère 3 : …

b) Propose une représentation visuelle organisée qui répond au mieux à toutes ces exigences.

Remet ensuite ce travail à ton enseignant.

Bibliographie

BEICHNER, R. (1994), Testing student interpretation of kinematics graphs. *American journal of physics*, **62**, 750–762.

CARLSON, M. (2002), Physical enactment: a powerful representational tool for understanding the nature of covarying relationships**,** In F. Hitt (Ed.), *Representations and mathematics visualization*, Special issue of PME-NA and Cinvestav-IPN, 63–77.

CARLSON, M. (1998), A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *CBMS Issues in Mathematics Education*, **7**, American Mathematical Society.

DUVAL, R. (1988), Graphiques et équations : l'articulation de deux registres, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* **1**, IREM de Strasbourg.

DUVAL, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **5**, IREM de Strasbourg.

DUVAL, R. (2006), A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics,* **61**, Springer 2006, 103–131.

HITT, F. (1998), Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **6**, IREM de Strasbourg.

HITT, F. (2003), Le caractère fonctionnel des représentations, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*,**8,** IREM de Strasbourg, 255–271.

HITT, F. (2006), Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example : The concept of limit, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **11**, IREM de Strasbourg, 253–268.

HITT, F. (2007), Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éditeurs), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* Éditorial Hermes, 65–88.

HITT, F., et PASSARO, V. (2007), De la résolution de problèmes à la résolution de situations problèmes : le rôle des représentations spontanées. *Actes de la Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (CIEAEM-59), Dobogókö, Hongrie, juillet, 2007, 117–123.

JANVIER, C. (1993), Les graphiques cartésiens : des traductions aux chroniques. *Les représentations graphiques dans l'enseignement et la formation*, Les sciences de l'éducation, C.E.R.S.E Université de Caen.

JANVIER, C. (1983), Représentation et compréhension, Un exemple : le concept de fonction. *Bulletin de l'AMQ,* Association Mathématique du Québec.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION, DU LOISIR ET DU SPORT, (2003), *Programme de formation de l'école québécoise, Enseignement secondaire 1er cycle, Domaine de la mathématique* : Gouvernement du Québec, 223–264.

MONK, S. (1992), The concept of function aspects of epistemology and pedagogy. In Ed Dubinsky, Guershon Harel (Eds.), *MAA notes and reports series*, 175–194.

PASSARO, V. (2007), « Étude expérimentale sur le développement du concept de covariation entre deux grandeurs révélé par une analyse des représentations spontanées d'élèves du premier cycle du secondaire », Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Montréal.

VALÉRIANE PASSARO
Université du Québec, Montréal
passaro.valeriane@uqam.ca

GEORGES TOUMA

UNE ÉTUDE SÉMIOTIQUE SUR L'ACTIVITÉ COGNITIVE D'INTERPRETATION

Abstract. A Semiotic Study of the Cognitive Activity of Interpretation – This article presents the results of a semiotic study of the cognitive activity of interpretation (Touma, 2008). The results reveal that algebraic modeling of physical phenomena requires students to reach not only the coordination stage (Duval, 1995) but also the interpretation stage (Touma, 2008). If not, the students will not have access to the conceptual contents of mathematical representations of the physical phenomena.

Keywords. Algebraic modeling, semiotics, coordination, interpretation.

Résumé. Nous présentons dans cet article les résultats d'une étude sémiotique sur l'activité cognitive d'interprétation (Touma, 2008). Les résultats de cette recherche nous révèlent qu'une modélisation algébrique de phénomènes physiques exige des élèves qu'ils atteignent non seulement le stade de la coordination au sens de Duval (1995) mais aussi le stade de l'interprétation au sens de Touma (2008). Sinon, les élèves n'auront pas accès au contenu conceptuel d'une représentation mathématique d'un phénomène scientifique.

Mots-clés. Modélisation algébrique, sémiotique, coordination, interprétation.

---

1. Introduction

Depuis au moins une décennie, l'une des intentions principales des programmes des ministères de l'éducation québécoise et ontarienne est de favoriser la démarche scientifique de l'élève durant une activité de laboratoire en sciences. Selon le Ministère de l'Éducation québécois (MEQ, 2004), l'enseignement des sciences doit privilégier des situations d'apprentissage contextualisées, ouvertes et intégratives, débouchant sur des activités diversifiées afin de donner un sens concret aux objets d'études, d'éveiller l'intérêt et de favoriser la démarche scientifique de l'élève. Dans ces situations, l'élève est amené à «*jouer un rôle d'investigation lors d'une expérimentation en laboratoire,…*» (MEQ 2004, p. 272). Pour ce faire, et tel qu'exigé aussi par le Ministère de l'Éducation ontarien (2005), l'élève est appelé à communiquer, à analyser et à interpréter à l'aide du langage mathématique les résultats de ses propres expérimentations.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 14, p. 79 – 101.
© 2009, IREM de STRASBOURG.

2. Situation problématique dans les écoles et les collèges

En sciences comme en mathématiques, la mise en œuvre des deux nouveaux programmes de formation des écoles québécoises et ontariennes révèle des aspects paradoxaux quant aux attentes qu'elle soulève.

- Ces deux programmes demandent aux élèves d'expérimenter des phénomènes physiques, de recueillir des données, de les représenter sur un graphique, de les analyser, de les interpréter[1] et de les modéliser algébriquement ;
- cependant, ces programmes n'incluent aucune méthode en mathématiques permettant aux élèves de comprendre et de justifier tout le processus de modélisation algébrique.

En mathématique, la méthode traditionnelle, utilisée au secondaire et collégial par les élèves et les enseignants, consiste en l'utilisation des calculatrices programmables ou des tableurs afin d'obtenir automatiquement la courbe la mieux ajustée aux données expérimentales. Cette méthode ne leur permet pas de comprendre le rationnel mathématique sous-jacent qui y est utilisé puisqu'il est de niveau universitaire. Beaufils (1993, p. 124) confirme ces constatations en notant que : «*Si l'alternative centrée sur les méthodes modernes de modélisation relève d'une épistémologie plus satisfaisante en ce qui concerne la relation théorie/expérience, elle reste problématique au niveau de l'enseignement secondaire dès lors qu'elle se place sur un plan quantitatif et mathématique. Elle ne peut en effet être mise en œuvre de façon immédiate du fait, en particulier, de la limitation de la complexité des modèles mathématiques et des méthodes informatiques*». Dans sa thèse, Richoux (2000, p. 153) a mentionné que les stratégies d'enseignement observées chez les enseignants «*comportent pour la plupart une 'confrontation' entre des résultats expérimentaux et un modèle théorique […] et les incertitudes sur les mesures, sur les valeurs des paramètres obtenus pourtant 'un des outils privilégiés pour cette confrontation' (Guillon, 1995, p. 117), ne sont ni prises en compte ni même évoquées*». Elle précise ensuite, «*obtenir une courbe avec un palier, une droite qui passe par l'origine, une valeur ayant le bon ordre de grandeur suffit pour valider l'accord modèle - résultats expérimentaux […] la confrontation se réduit à une comparaison à vue entre résultats expérimentaux et théoriques*» (Richoux, p. 154).

[1] Curriculum de l'Ontario de la 10ième à la 12ième année (élèves de 13 à 17 ans), p. 36. Programme de formation de l'école québécoise, vision systémique de liens interdisciplinaires, p. 326.

3. Idée de la recherche

La population à laquelle nous nous intéressons est constituée d'élèves de la première année du CEGEP au Québéc(Classe terminale en France), qui n'ont pas de connaissance en mathématiques appliquées et en statistique, ou n'en ont tout au moins pas assez pour effectuer des régressions linéaires et non linéaires sur des données empiriques issues d'une expérience de laboratoire. Les solutions pratiques qui s'offrent à nous a priori sont alors de deux ordres :

1) inclure dans le curriculum mathématique les méthodes de régressions linéaires et non linéaires ;
2) nier le caractère stochastique des données empiriques.

Ces deux solutions ne sont toutefois pas satisfaisantes. La première solution serait inconcevable puisqu'elle fait appel à des concepts et méthodes en mathématiques appliquées et en statistiques qui nous paraissent trop avancées pour les niveaux secondaire et collégial. La deuxième solution réduit l'analyse mathématique à une simple superposition d'une courbe symbolique que l'on place approximativement sur l'ensemble de points formés par les données empiriques ce qui se traduit trop souvent par des applications de formules n'ayant guère de sens pour les élèves et ne leur laissant aucun rôle dans la saisie cognitive de la modélisation algébrique en jeu. En occultant ainsi chez l'élève l'analyse et la construction des objets mathématiques, on réduit ses capacités de compréhension, de généralisation et de transfert de ses savoir-faire en mathématiques vers l'étude d'autres phénomènes scientifiques. Ces habiletés cognitives sont nécessaires à l'élève pour qu'il puisse expliciter et communiquer les résultats de ses propres investigations scientifiques. L'élève devrait être à même de trouver ou d'optimiser son équation et lui associer une marge d'incertitude. Pour ce faire, nous avons développé et conçu une nouvelle méthode de régression linéaire et non linéaire, la Régression Graphico-Statistique (RGS, Touma, 2006). Contrairement à la méthode traditionnelle de Gauss-Legendre (moindres carrés), les connaissances préalables et nécessaires à la compréhension de la méthode RGS sont de niveau secondaire et collégial. RGS a été validée et publiée dans la thèse de doctorat de l'auteur de cet article à l'Université de Montréal. Nous allons par la suite présenter une étude didactique relative à l'impact de l'utilisation de la méthode RGS sur l'activité cognitive d'interprétation (Touma, 2008).

4. Considérations théoriques sur la modélisation, l'interprétation et la déduction

4.1. Modélisation scientifique

Plusieurs didacticiens dont Dupin (1999), Johsua (1999), Martinand (1992, 1994), Nonnon (1986) et Orange (1997) ont enrichi la définition et la dynamique de la modélisation scientifique. Malgré la diversité des points de vue, des nuances et des ajouts, ces chercheurs s'entendent bien que le processus de modélisation est composé de deux phases essentielles à la pensée scientifique : l'induction et la déduction. Nous avons regroupé plusieurs éléments apparentés à l'induction et à la déduction qui sont déduits des travaux de ces chercheurs :

- dans la phase inductive, en interaction avec un phénomène réel en sciences, l'élève identifie les variables en jeu et prédit ensuite leur interaction sous forme d'une hypothèse qui sera à son tour formalisée dans un schème de contrôle de variables lui permettant ainsi de planifier l'expérimentation. À partir des résultats recueillis, l'élève pourra dégager alors une loi ou plusieurs. Ensuite, la synthèse explicative de ces lois lui permettra de construire un modèle ou une théorie ;
- dans la phase déductive, l'élève tente, avec ce modèle, de répondre à une question donnée reliée au phénomène de départ. Ensuite, il formule des propositions ou des effets qui permettront non seulement d'expliquer et de répondre à la question, mais aussi de déduire et de prédire des résultats de l'expérience. Afin de valider le modèle construit dans la phase inductive, c'est-à-dire de l'infirmer ou de le confirmer, l'élève compare les résultats prédits et déduits avec des données provenant de la réalité, des données nouvelles tirées par exemple d'une nouvelle expérience où l'on aurait modifié la variable indépendante.

En nous référant aux travaux de ces chercheurs, nous pouvons illustrer l'activité de modélisation mathématique durant le processus de modélisation scientifique des phénomènes scientifiques par la figure 1.

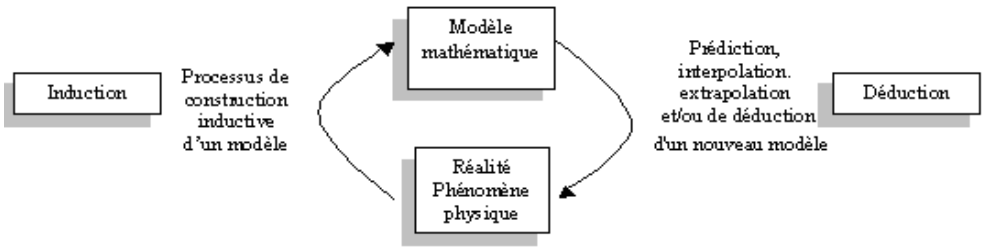


Figure 1 : Modélisation mathématique des phénomènes scientifiques.

Nous considérons que ces deux phases ne sont pas parfaitement disjointes comme la figure 1 pourrait le laisser croire. À l'intérieur d'une phase inductive, lors de la formulation d'une hypothèse, nous pouvons aussi avoir recours à la déduction : c'est le raisonnement hypothético-déductif qui met à profit des lois supposées vraies, ou des relations déjà étudiées, pour élaborer de nouvelles suppositions ou inductions. Dans la phase inductive de l'activité de modélisation mathématique, l'élève construit le modèle mathématique correspondant au phénomène scientifique. Cette activité consiste donc à transformer la représentation sémiotique des données expérimentales en une représentation sémiotique qui correspond à un objet mathématique. Dans la phase déductive, l'élève valide son modèle à partir des activités de prédiction, d'interpolation, et/ou de déduction d'un nouveau modèle.

4.2. Registre sémiotique

Pour Duval (1995), l'analyse des difficultés relatives à la conceptualisation, au développement du raisonnement scientifique et de l'activité cognitive de construction et de validation d'un modèle mathématique d'un phénomène scientifique par l'élève fait face à trois phénomènes inter reliés. Le premier est celui de la «*diversification des registres de représentation sémiotique*» (Duval, 1995, p. 21) dont chacun pose des problèmes et des questions d'apprentissage spécifiques. Le deuxième est celui de la « *différenciation entre représentant et représenté* » (Duval, 1995, p. 22). Le troisième phénomène est celui de la « *coordination entre les différents registres*» (Duval, 1995, p. 22). Selon la théorie des registres sémiotiques, ces trois phénomènes sont engendrés par quatre activités cognitives liées à la sémiosis : la formation de représentations dans un registre sémiotique, le traitement, la conversion et la coordination des représentations. En didactique des mathématiques, plusieurs recherches ont démontré que, pour qu'une représentation donne à l'élève accès à l'objet mathématique qu'elle symbolise et à son concept, il doit absolument réussir ces quatre activités cognitives fondamentales à la sémiosis. Les recherches de Touma (2008) montrent que la réussite de ces quatre activités cognitives sur un objet mathématique en sciences expérimentales est nécessaire mais qu'elle ne suffira pas à l'élève pour accéder à son contenu conceptuel. Selon cet auteur, l'élève doit réussir les activités cognitives d'interprétation inductive et déductive (Touma, 2008) sur cet objet mathématique considéré dans un contexte de sciences expérimentales.

4.2.1. Formation de représentations dans un registre sémiotique

L'activité cognitive de formation de représentations est essentielle à la réussite de la modélisation mathématique en sciences expérimentales. En effet, elle permettra à l'élève de reconnaître le registre sémiotique auquel la représentation des données expérimentales appartient (registre numérique, registre graphique, *etc*.) et ce, grâce

aux règles de conformité de ce registre. Toutefois, cette reconnaissance n'implique pas nécessairement, ni la compréhension de ce que cette représentation dénote, ni son utilisation ni son exploitation en mathématiques et en sciences expérimentales. D'autres types d'activités cognitives sont nécessaires dont le traitement, la conversion, la coordination et l'interprétation (Touma, 2008) pour permettre une compréhension, une utilisation et une exploitation efficace de cet objet en mathématique et en sciences expérimentales. Où se situent-elles les activités de traitement, de conversion, de coordination et d'interprétation dans le processus de modélisation mathématique d'un phénomène scientifique ?

4.2.2. Activité de traitement

Durant la phase inductive de la modélisation mathématique des phénomènes scientifiques, l'objet mathématique sera construit à partir des données expérimentales. Dans cette phase, l'élève est amené à transformer la représentation des données expérimentales en une représentation sémiotique, qui corresponde à un objet mathématique. Notons que même si cette activité de transformation se faisait à l'intérieur du même registre de départ, elle ne pourrait pas être une activité de traitement puisque cette dernière requiert a priori un objet mathématique. Il est important de noter aussi que dans la phase inductive, il est possible que l'élève ait recours à une activité de traitement sur un objet mathématique pour construire le modèle mathématique en question. La validation de l'objet mathématique construit dans la phase inductive se ferait dans la phase déductive de la modélisation mathématique des phénomènes scientifiques. Dans cette phase, une ou plusieurs activités de traitement sur cet objet construit seront possibles (exemple : déduction d'un nouveau modèle algébrique à partir d'une activité de traitement sur l'objet construit). Il est donc important que l'élève puisse réussir l'activité cognitive de traitement pour accomplir avec succès la modélisation mathématique des phénomènes scientifiques.

4.2.3. Activité de conversion

La conversion est une activité cognitive permettant la transformation d'une représentation, d'un objet, d'une situation ou d'une information dans un registre, en une autre qui représente le même objet, situation ou information de départ, cette fois, dans un registre différent. Contrairement à l'activité cognitive de traitement, la conversion s'opère à l'extérieur du registre et de la représentation de départ. Il en est ainsi par exemple pour le passage d'une équation algébrique d'une droite à sa représentation graphique dans le plan cartésien ou, inversement pour passer du registre graphique au registre algébrique, de la mise en évidence de la correspondance entre l'angle formé par la droite avec l'axe des abscisses et son coefficient directeur, entre l'ordonnée à l'origine et le terme constant.

Comme dans le cas d'une activité cognitive de traitement, la conversion requiert à priori un objet mathématique sur lequel l'élève exercera une transformation de la représentation de cet objet. Donc, dans la phase inductive, la construction d'un modèle mathématique ne peut pas être considérée une activité de conversion puisque l'objet mathématique est inconnu a priori et qu'il sera construit à partir de la représentation sémiotique des données expérimentales. Cependant, dans les deux phases d'induction et de déduction, il est possible que l'élève recoure à une activité de conversion sur un objet mathématique pour construire et valider le modèle mathématique en question.

4.2.4. Interprétation inductive d'un modèle mathématique

Dans un article publié dans la revue Annales et Sciences cognitives (Touma, 2008), nous avons défini l'activité de construction inductive d'un modèle mathématique en sciences expérimentales par le processus cognitif avec lequel l'élève construit un objet conceptuel mathématique (droite, parabole, *etc*.) à partir d'une représentation sémiotique (un nuage de point expérimentaux) d'un phénomène en sciences expérimentales. Ce processus de construction requiert un changement de cadre de rationalité. En effet, la représentation d'un phénomène physique s'inscrit au départ dans le cadre de rationalité de la physique (figure 5). Dans ce contexte, cette représentation n'est pas a priori celle d'un objet mathématique. Ceci est dû aux caractères probabiliste et discontinu des données expérimentales (figure 2). Il faut donc opérer un transfert et une construction dans un cadre de rationalité mathématique (figure 2). Cette construction consiste à transformer et à interpréter sous forme mathématique cet ensemble de couples de points informe et polymorphe du domaine expérimental.

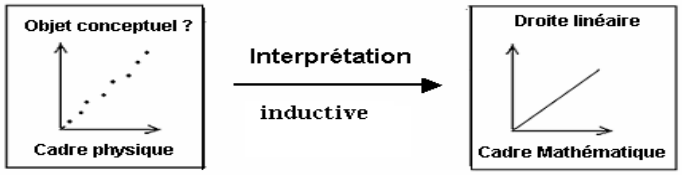


Figure 2 : Interprétation inductive.

Cette activité cognitive de transformation n'est pas prise en compte par Duval (1995). Comme nous l'avons mentionné, elle n'est, selon nous, ni une activité de conversion ni une activité de traitement puisque, selon Duval (1995), un traitement ou une conversion requiert a priori un objet conceptuel pour pouvoir transformer sa représentation sémiotique soit dans le même registre sémiotique de départ (traitement), soit dans un autre (conversion). Pour distinguer cette activité de transformation des deux activités cognitives de traitement et de conversion au sens de Duval (1995), nous l'avons désigné par interprétation inductive (Figure 3a).

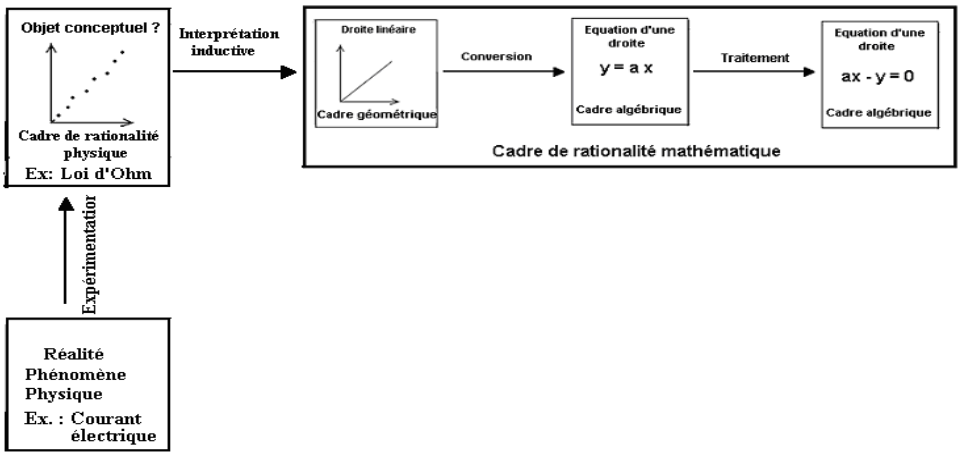


Figure 3a : Interprétation inductive.

4.3. Interprétation déductive d'un modèle mathématique

En sciences expérimentales, très souvent, les quantités et les variables auxquelles nous nous intéressons ne se prêtent pas directement à la mesure expérimentale. Ainsi, il faut les calculer ou les prédire à partir du modèle mathématique et de l'objet conceptuel construit dans la phase inductive. Pour ce faire, nous devons d'abord avoir accès au contenu conceptuel ou au concept de cet objet mathématique. Cependant, il ne suffit plus de parvenir au stade de coordination au sens de Duval, c'est-à-dire de pouvoir mettre en correspondance les unités signifiantes des différentes représentations sémiotiques de cet objet (Touma, 2008). Nous devons aussi être capables de les mettre en correspondance avec les propriétés, les caractéristiques des objets phénoménaux et les conditions expérimentales parce que souvent ces derniers agissent sur la représentation sémiotique du modèle mathématique correspondant (Touma, 2008). Cette activité de mise en correspondance est nécessaire pour la validation des prédictions et la cohérence interne du modèle mathématique. Pour distinguer cette activité de transformation des deux activités cognitives de traitement et de conversion au sens de Duval (1995), nous l'avons désigné par interprétation déductive.

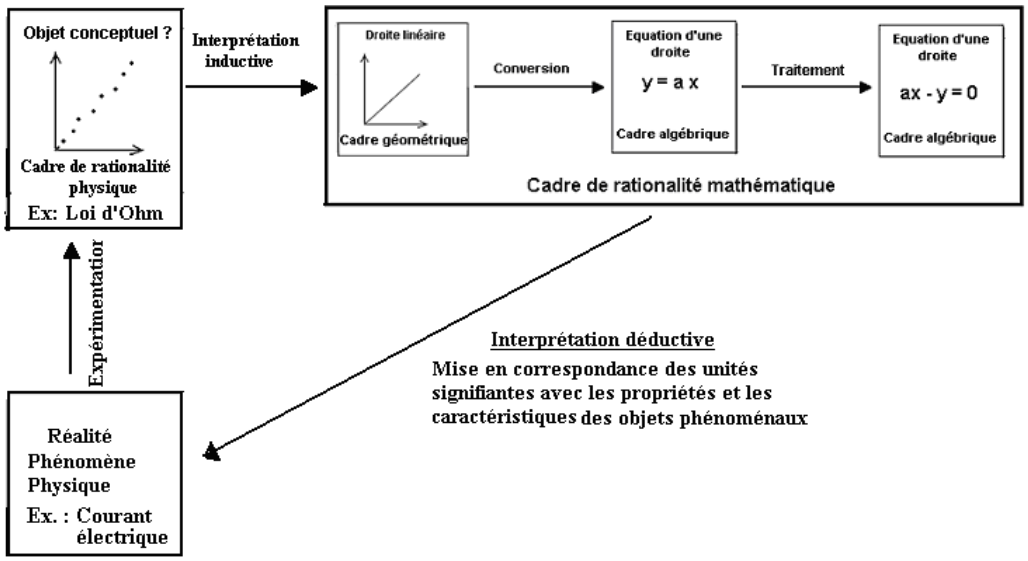


Figure 3b : Interprétation déductive.

5. Régression Graphico-Statistique

Nous voulons permettre aux élèves d'effectuer et de réussir l'activité cognitive d'interprétation des phénomènes scientifiques en utilisant les ressources visuelles et graphiques de l'ordinateur. Nous avons développé et conçus une nouvelle méthode informatisée à interface humaine, la Régression Graphico-Statistique (RGS, 2006). Contrairement aux méthodes traditionnelles de Gauss-Legendre qui sont programmées et utilisées automatiquement dans les calculatrices et logiciels, le niveau des connaissances préalables à la compréhension de la méthode RGS reste très élémentaire. Nous allons par la suite présenter brièvement le logiciel RGS.

5.1. Régression Graphico-Statistique (RGS)

Le module de Régression Graphico- Statistique comporte essentiellement trois fenêtres (figure 4) : la fenêtre graphique, la fenêtre des écarts ; la fenêtre d'histogramme

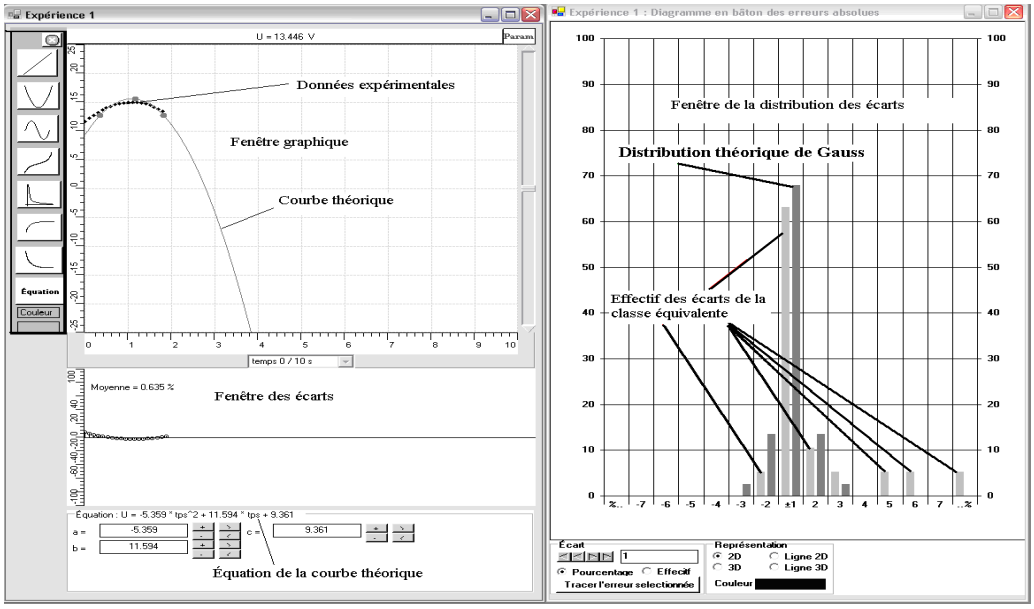


Figure 4 : Les fenêtres du module RGS.

5.1.1. Fenêtre Graphique

Dans la fenêtre graphique, l'élève aura initialement :

- paramétré l'expérience, c'est-à-dire, choisi les variables, le nombre des données, la fréquence d'échantillonnage afin de déclencher l'acquisition des données ;
- visualisé sous forme graphique l'interaction entre les différentes variables ;
- visualisé sous forme d'un tableau les données expérimentales.

Afin de choisir le type d'équation avec lequel l'élève modélise algébriquement cette interaction de variables, nous avons créé une barre d'outils sur laquelle nous retrouvons des fonctions prédéfinies telles que : les fonctions du premier degré, les polynomes du second degré, du troisième degré, les fonctions rationnelles, sinusoïdales et exponentielles. Nous lui avons aussi donné la possibilité de définir n'importe quelle fonction algébrique en cliquant sur le bouton équation.

5.1.2. Fenêtre des écarts

La fenêtre des écarts consistera à visualiser les écarts entre la courbe théorique et les données expérimentales afin de les réduire et les minimiser le plus possible. Notons que les écarts seront calculés en pourcentage de l'échelle de mesure de la

variable à l'étude. Les points expérimentaux qui se trouvent en dessous de la courbe théorique auront un écart négatif tandis que ceux qui se trouvent en dessus de la courbe théorique auront un écart positif. L'échelle par défaut de la fenêtre des écarts est de –100% à 100%. Pour mieux visualiser les écarts, nous allons donner la possibilité de les dilater, c'est-à-dire de réduire l'échelle des écarts (figure 4). Notons que la représentation graphique des écarts dans cette fenêtre est le résultat d'un traitement sur la représentation graphique des écarts dans la fenêtre graphique. Ainsi, pour que l'étudiant puisse accéder au contenu conceptuel dans cette fenêtre, il doit réussir et comprendre cette activité de traitement.

5.1.3. Fenêtre d'histogramme

La fenêtre de l'histogramme permet la distribution des écarts en les groupant en classes. Nous avons centré la distribution des écarts à zéro. Les valeurs des intervalles de classes négatives correspondront, en valeur absolue, aux écarts des points expérimentaux situés en dessous de la courbe. Les valeurs des intervalles de classes positives correspondront aux écarts des points situés en dessus de la courbe. Attendu qu'en général les incertitudes de mesures en sciences expérimentales se situent en deçà de 10% de leurs valeurs, nous avons partitionné l'ensemble des valeurs des écarts en 15 intervalles]-∞, -7s[, [-7s, -6s[, [-6s, -5s[, [-5s, -4s[, [-4s, -3s[, [-3s, -2s[, [-2s, -s[, [-s, s[, [s, 2s[, [2s, 3s[, [3s, 4s[, [4s, 5s[, [5s, 6s[, [6s, 7s[, [7s, ∞[, où s est un nombre à trouver et appeler «écart», de façon que le pourcentage d'écarts situés dans chaque intervalle diffère peu du pourcentage théorique issu d'une loi normale de moyenne nulle et d'écart type s. La fréquence des écarts est par défaut en pourcentage du nombre de points expérimentaux. Nous avons aussi délimité cinq colonnes représentant la distribution théorique de Gauss. La colonne centrale correspond aux 68% des points expérimentaux qui se trouvent théoriquement à plus ou moins un écart (±s) de la courbe, les deux premières colonnes symétriques à coté correspondent chacune aux 13,5% des points dont l'écart à la courbe est compris entre s et 2s ou –2s et –s, et les deux dernières colonnes symétriques correspondent chacune aux 2,5% (environ) des points dont l'écart à la courbe est compris entre 2s et 3s ou –3s et –2s.

Ainsi, en même temps que l'on ajuste la courbe théorique sur les points expérimentaux, les écarts entre la courbe théorique et les données expérimentales se répartissent dynamiquement dans les classes correspondantes. Il s'agira alors de diminuer, au fur et à mesure, le rayon s de l'intervalle central et ajuster ensuite les paramètres de la courbe pour optimiser son équation algébrique. Il s'agira donc de trouver les paramètres de l'équation qui minimisent le plus possible cet intervalle et qui distribuent le plus normalement possible les effectifs des écarts. C'est par ces actions effectuées de manière itérative que nous allons progressivement optimiser la fonction symbolique. Notons que, le cas échéant, l'intervalle de classe ainsi trouvé fournira une estimation valable de l'écart-type, soit l'incertitude sur la

valeur prédictive de la fonction symbolique que l'on vient de déterminer. Par cette méthode, les points singuliers (ou aberrants) de cette expérience seront ceux qui correspondent aux classes se trouvant à l'extérieur des colonnes grises foncées, au-delà de 3 fois l'erreur type. On a donné la possibilité de les repérer graphiquement sur le nuage de points expérimentaux.

Notons que la représentation graphique des écarts dans cette fenêtre est le résultat d'une conversion de la représentation graphique des écarts dans les deux fenêtres graphique et dans la fenêtre des écarts. Ainsi, pour que l'étudiant puisse accéder au contenu conceptuel dans cette fenêtre, il doit non seulement comprendre cette activité de conversion mais aussi de parvenir au stade de la coordination entre les différentes représentations graphiques des écarts.

Ainsi, pour que l'élève réussisse l'activité de modélisation algébrique d'un phénomène physique par la méthode RGS, il doit :

a) Ajuster une fonction symbolique

Avec la fenêtre graphique, il devrait être capable de superposer visuellement un modèle fonctionnel symbolique sur les données empiriques, remplaçant ainsi le modèle empirique constitué des points associés aux données empiriques par un autre modèle mathématique sous forme d'une relation algébrique.

b) Réduire les écarts entre la fonction et les données expérimentales

Avec la fenêtre des écarts, il devrait être capable de réduire les écarts entre la courbe symbolique et les points expérimentaux. C'est-à-dire de mieux ajuster la fonction symbolique sur les données empiriques en minimisant ces écarts.

c) Optimiser la fonction symbolique

Avec la fenêtre de distribution des écarts, il devrait être capable d'optimiser ces ajustements en tenant compte de leur distribution statistique ce qui lui permet de prendre en compte l'occurrence des points expérimentaux pour optimiser le modèle mathématique et déterminer les points aberrants ou singuliers.

6. Expérimentation

En France, l'Expérimentation Assistée par Ordinateur (ExAO) fait partie du programme de formation en sciences expérimentales au lycée depuis plus de 10 ans et dans tous les collèges[2] à partir de l'année 2003. Pour obtenir le baccalauréat français, plusieurs cohortes des élèves en sciences subissent un examen officiel du

[2] Les collèges français correspondent, rappelons le, aux écoles secondaires québécoises.

ministère de l'Éducation française en ExAO. Ainsi, ces élèves doivent nécessairement apprendre et s'approprier les systèmes ExAO durant les dernières années de collège et les trois années de lycée. Nous pouvons donc dire que ces élèves ont déjà une bonne expérience en l'utilisation des logiciels éducatifs dédiés à l'ExAO. Par contre, ils effectuaient la modélisation algébrique de leurs données avec la méthode traditionnelle c'est-à-dire en utilisant les calculatrices programmables ou des logiciels de traitement dédié à la physique pour obtenir automatiquement la meilleure courbe. Pour toutes ces raisons, nous avons choisi le collège français Marie de France, situé à Montréal, pour effectuer notre expérimentation. Pour ce faire, nous avons choisi 24 élèves (17-18 ans). Voici leur description :

- tous les sujets n'avaient pas encore utilisé la méthode RGS pour exercer l'activité d'interprétation ;
- tous les sujets ont déjà suivi un cours théorique sur la charge du condensateur avec leurs professeurs ;
- tous les sujets n'avaient pas encore expérimenté en laboratoire la charge du condensateur ;
- tous les sujets avaient déjà étudié les notions statistiques suivantes : histogramme, moyenne, mode, médiane, écart-type ;
- tous les sujets avaient déjà étudié les fonctions exponentielles ;
- tous les sujets avaient déjà réalisé différentes expériences avec le matériel ExAO en effectuant l'acquisition des données avec le logiciel Visuel Orphy et l'ancienne version du logiciel MicrolabExAO développé et conçu au Laboratoire de Robotique Pédagogique de l'Université de Montréal ;
- tous les sujets transféraient les données expérimentales du logiciel Visuel Orphy[3] ou de l'ancienne version du logiciel MicrolabExAO[4] vers le logiciel Régressi ou vers Excel pour y effectuer automatiquement la modélisation algébrique ;
- tous les sujets ont assisté à une introduction et une explication de quinze minutes sur l'utilisation des différentes fenêtres du module RGS.

[3] Visuel Orphy est un logiciel d'acquisition de données pour les sciences expérimentales développé en France par la compagnie Micrelec inc.

[4] MicrolabExAO est un logiciel d'acquisition de données pour les sciences expérimentales développé au Québec au Laboratoire de robotique pédagogique de l'Université de Montréal.

> Nous leur avons expliqué cette méthode en empruntant et en modélisant les données expérimentales de l'expérience de la pression de l'eau (P) en fonction de la profondeur (hauteur, h) du liquide. Nous avons donc expliqué la méthode RGS en l'appliquant seulement sur le cas d'une fonction linéaire de premier degré de type P =f(h) = a*h+b.

Notre expérimentation consiste donc à nous insérer dans le cours de physique donné par les deux professeurs du collège Marie de France, c'est-à-dire réaliser le laboratoire sur la charge d'un condensateur, en particulier à effectuer l'activité cognitive d'interprétation sur les données expérimentales de ce phénomène physique. Il s'agit donc de modéliser une fonction exponentielle[5] de la forme $A*(1 - e^{-t/b})$, où A est la tension maximale du générateur et b = RC, où R est la résistance de 30 Ohms du circuit et C est la valeur du condensateur qui est de l'ordre de 10000 μF. Les deux enseignants ont préparé un protocole de laboratoire sur la charge du condensateur de façon à effecteur la modélisation algébrique avec la méthode RGS au lieu du logiciel Régressi, Excel ou de la calculatrice programmable.

6.1. Recueil de données

Les données de cette expérimentation ont été recueillies à l'aide :

- Du fichier de sauvegarde d'extension.xao

Ce fichier contiendra les données brutes de l'expérience ainsi que la production finale et les étapes de la modélisation algébrique effectuée par les élèves.
À partir de la production finale, nous pourrons vérifier : le choix de la courbe, l'utilisation du graphique, de la fenêtre des écarts, et de la fenêtre de la distribution des incertitudes relatives et l'équation algébrique, résultat final de la modélisation.
À partir des données brutes, l'auteur de cet article reproduira la modélisation complète afin de la comparer avec les résultats des élèves.

- Des commentaires écrits, adressés aux élèves, à partir des deux questions

Ces deux questions portent sur la compréhension et le degré de difficulté de la modélisation algébrique par des élèves utilisant le module RGS. Son utilisation est comparée avec la méthode traditionnelle automatique de leur cours. L'évaluation, effectuée groupe par groupe, nous permettra d'identifier les difficultés d'utilisation et d'appropriation de la méthode RGS par les élèves.

---

[5] Ceci nous permettait de vérifier le caractère général de notre méthode avec une fonction non linéaire, ce que ne peut faire directement la méthode de Gauss-Legendre sans une transformation par les logarithmes pour rendre linéaire la relation entre les variables.

6.2. Modélisation didactique des cheminements d'apprentissage

En observant les résultats dans le tableau de compilation ci-dessous (Tableau 1), nous pouvons dire que 11 groupes sur 12 ont réussi la première étape, la deuxième et la troisième étape du processus de modélisation algébrique avec la méthode RGS. La cinquième étape a été réussie par 7 groupes sur 12. La sixième a été réussie par 6 groupes sur 12. La septième étape n'a été réussie que par 3 groupes sur 12.

Étapes du processus de modélisation algébrique	Résultats	Groupes/12
1 - Utilisation du graphique (Ajustement)	Réussi	11
2 - Utilisation de la fenêtre des écarts (Réduction)	Réussi	11
3-Utilisation de la fenêtre de la distribution des écarts (**Optimisation**)	Réussi	11
4 - Tenu compte du 68% (Optimisation)	Réussi	11
5 - Tenu compte de la distribution symétrique (Optimisation)	Réussi	7
6 - Tenu compte de la distribution normale (Optimisation)	Réussi	6
7 - Choix de l'incertitude (Optimisation)	Réussi	3

Tableau 1 : Synthèse des étapes du processus de modélisation algébrique.

En interprétant et en comparant les résultats (fonctions algébriques) de la modélisation algébrique des groupes et ceux du chercheur, nous trouvons que:

- au millième près, 25% des coefficients correspondent aux résultats du chercheur ;
- au centième près, 58% des coefficients résultats correspondent à ceux du chercheur.

6.2.1. Analyse et interprétation des données des sujets

Dans le cas du groupe 7, il lui a été difficile d'optimiser et de trouver l'équation algébrique de type $a*(1 - e^{-t/b})$ qui distribue les écarts normalement parce que l'origine de la courbe obtenue expérimentalement ne commençait pas à l'origine des échelles. Ce groupe n'avait pas réussi à synchroniser expérimentalement le début de l'acquisition des données sur le début de la charge du condensateur. Ainsi, entre le moment où le groupe a déclenché l'acquisition des données et a basculé l'interrupteur pour charger le condensateur, il s'est écoulé un certain temps avant que le condensateur ne commence à se charger.

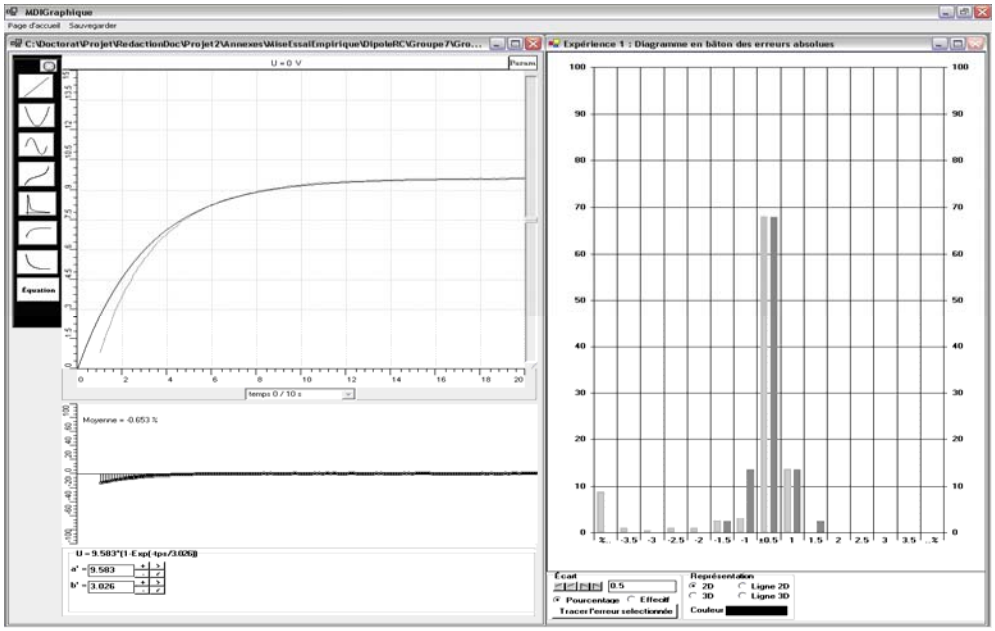


Figure 4 : Modélisation algébrique du groupe 7.

Pour tenir compte de ce temps écoulé dans l'équation de la charge du condensateur, le groupe aurait pu corriger mathématiquement cette erreur expérimentale en ajoutant une constante c sur le temps : $a*(1 - e^{(-(t+c)/b)})$ (Figure 4). Ainsi, les élèves de ce groupe n'ont pas mis en correspondance les unités signifiantes de leur représentation graphique avec les propriétés et caractéristiques des objets phénoménaux, à savoir l'origine des abscisses et le temps écoulé. Donc, ils n'ont pas suffisamment exercé l'activité cognitive d'interprétation inductive. Cependant, en interprétant le résultat de la modélisation algébrique dans leur fichier.xao, et malgré le type d'équation qu'il possédait, nous avons constaté que ce groupe a quand même essayé de trouver l'écart le plus petit qui contient les 68% et les 95% (à quatre fois cet écart) des données expérimentales en ayant le moins possible des points singuliers. Nonobstant cette erreur de manipulation, nous pouvons dire qu'il a réussi à appliquer les propriétés de la méthode RGS afin d'optimiser la fonction de modélisation qu'il possédait. Avec ce type de fonction, nous avons aussi pu conclure que les élèves de ce groupe ont réussi les activités cognitives de traitement (passage de la représentation graphique de la courbe à la représentation graphique des écarts), de conversion (passage des deux représentations graphiques des écarts à leur représentation statistique) et de coordination entre les différentes représentations des écarts. En effet, ce groupe a ajusté et a optimisé de façon itérative les coefficients a et b en fonction de la représentation des écarts, de la

représentation graphique de la fonction exponentielle et de l'histogramme des écarts.

Dans les deux cas des groupes 9 et 12, une erreur de manipulation a été commise sur l'origine des ordonnées. Cette fois-ci, ces groupes ont soit déclenché la charge du condensateur un peu avant de déclencher l'acquisition des données, soit le condensateur n'était pas complètement déchargé lorsqu'ils ont démarré l'expérience.

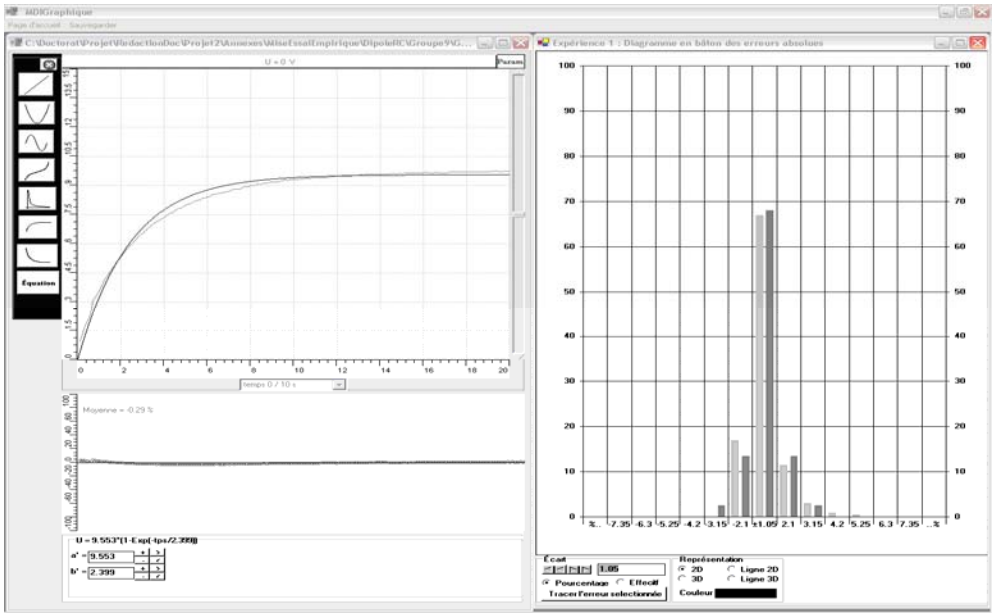


Figure 5 : Modélisation algébrique du groupe 9 avec le logiciel RGS.

Pour tenir compte de la charge initiale du condensateur, le groupe 9 aurait dû ajouter une constante à l'équation. Comme pour le groupe 7, le groupe 9 n'a pas mis en correspondance les unités signifiantes de leur représentation graphique avec les propriétés et caractéristiques des objets phénoménaux, à savoir l'origine des ordonnées et la valeur initiale de la charge du condensateur. Par contre, même avec le type d'équation qu'il possédait, nous constatons que le groupe 9 a appliqué les propriétés de la méthode RGS (écart le plus petit qui contient les 68% des données expérimentales et les 95 % (à quatre fois cet écart) de ces derniers). En analysant les données de ce groupe à partir du fichier .xao, nous avons aussi conclu que les élèves de ce groupe ont réussi les activités de traitement, de conversion et coordination sur les différentes représentations des écarts.

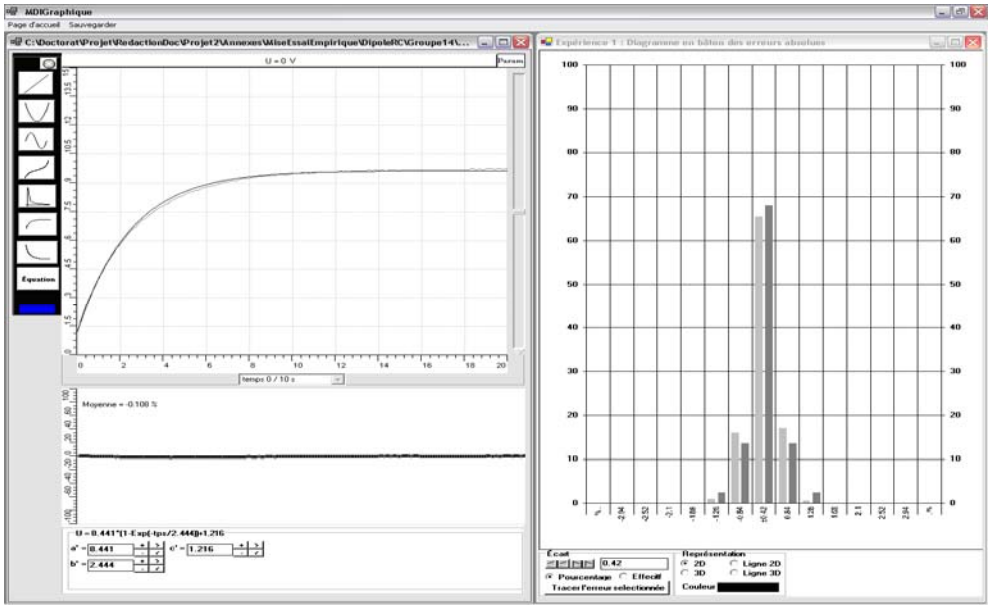


Figure 6 : Modélisation algébrique du groupe 12 avec le logiciel RGS.

Cependant, le groupe 12 a pu compenser algébriquement cette erreur et modéliser ainsi les données en ajoutant une constante sur l'ordonnée. Les commentaires de ce groupe sur l'utilisation de la méthode RGS nous montrent que les élèves ont réussi à mettre en correspondance les unités signifiantes de leur représentation graphique avec les propriétés et caractéristiques des objets phénoménaux, à savoir l'origine des ordonnées et la valeur initiale de la charge du condensateur. En effet, dans ces commentaires, le groupe 12 suggère au chercheur que le logiciel devra *«synchroniser la prise de mesure avec le début de l'expérience»* c'est-à-dire, le logiciel devra s'assurer qu'au début de l'acquisition des données, la charge du condensateur est nulle.

Par contre, le groupe 12 n'a pas diminué suffisamment l'incertitude pour mieux ajuster sa courbe. Ceci donne la raison pour laquelle le résultat de la modélisation algébrique est différent de celui du chercheur. En analysant et en interprétant les données et les commentaires de ce groupe, nous avons conclu qu'il n'a pas réussi suffisamment les activités cognitives de conversion et de coordination entre les différentes représentations sémiotiques des écarts. En effet, ce groupe mentionne dans ses commentaires : «*lorsque l'on joue sur les paramètres de la courbe, il devrait y avoir un indicateur de l'unité que l'on influence, car il arrivait qu'on se perde…».* Les élèves de ce groupe ont donc eu de la difficulté à ajuster et à optimiser les paramètres de la fonction de façon à minimiser le plus possible l'incertitude. Notons que la compréhension de l'effet de chaque paramètre de

l'équation de la fonction exponentielle sur sa représentation graphique est le cœur de l'activité de conversion et de coordination.

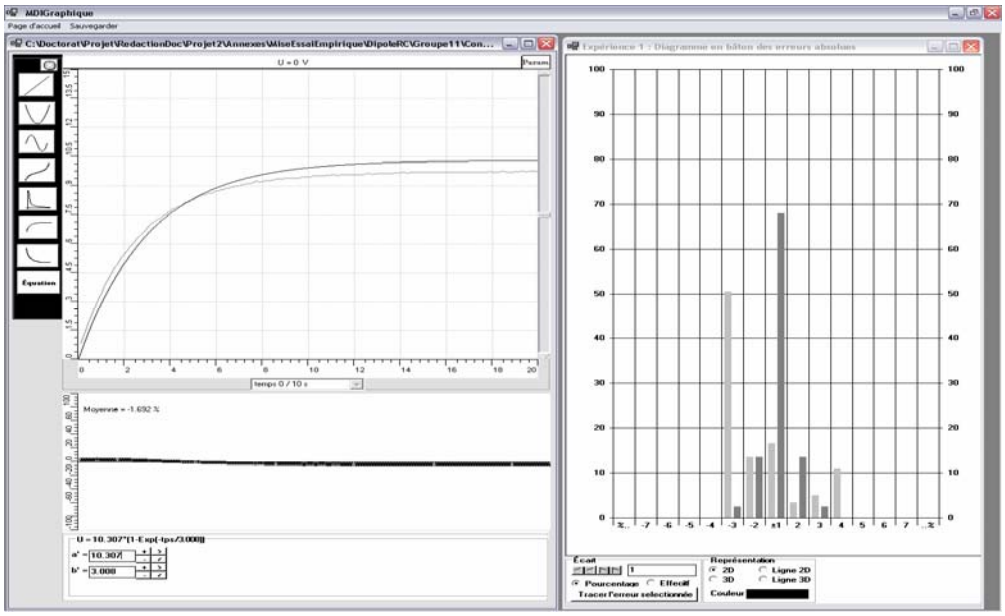


Figure 7 : Modélisation algébrique du groupe 11.

Dans le cas du groupe 11, nous remarquons que les élèves ont rencontré des difficultés à superposer graphiquement la fonction exponentielle sur les données expérimentales. L'analyse des données de ce groupe nous dévoile qu'il ne comprenait pas l'effet de chaque paramètre de l'équation sur sa représentation graphique. Il n'était donc pas capable de réussir les activités de conversion, de traitement et de coordination entre les différentes représentations des écarts. En plus, ce groupe devrait tenir compte de la charge initiale du condensateur afin d'ajouter une constante à l'équation. Comme pour les groupes 7 et 9, le groupe 11 n'a non plus mis en correspondance les unités signifiantes de leur représentation graphique avec les propriétés et caractéristiques des objets phénoménaux, à savoir l'origine des ordonnées et la valeur initiale de la charge du condensateur.

Dans le cas du groupe 10, nous remarquons que les élèves ont réussi à appliquer toutes les propriétés de la méthode RGS afin de déterminer l'équation algébrique de la meilleure courbe. Comme dans le cas du groupe 12, le groupe 10 n'a pas diminué suffisamment l'incertitude pour mieux optimiser la courbe.

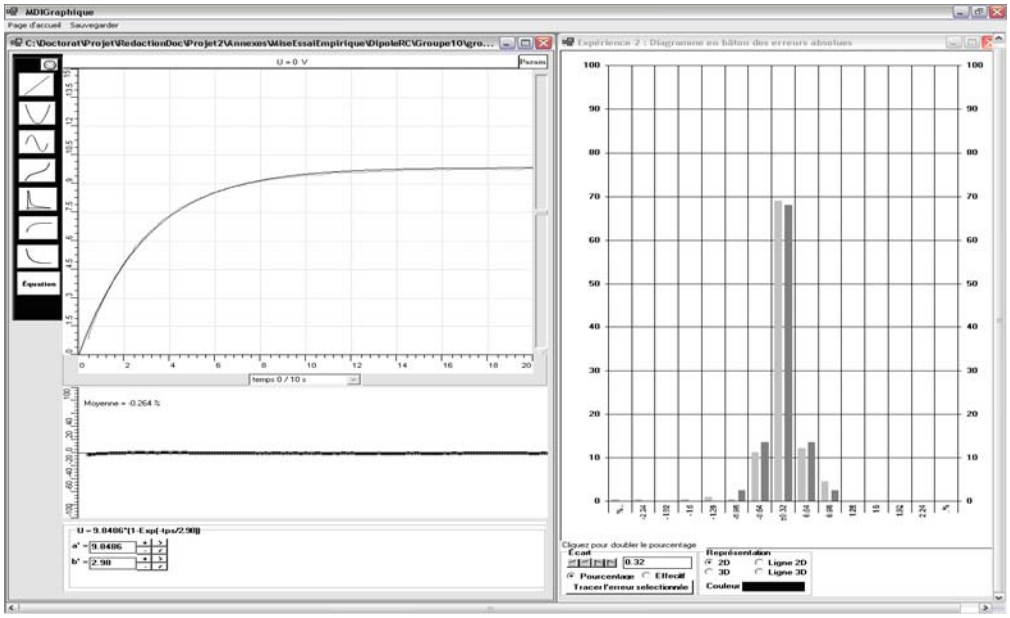


Figure 8 : Modélisation algébrique du groupe 10.

6.2.2. Analyse et interprétation des témoignages des différents groupes

De façon générale, nous pouvons dire que 9 groupes sur 12 considèrent que le module RGS est facile à utiliser (Groupes : 1;2;3;4;6;8;9; 10 et 12).

6.2.3. Ce que les élèves n'ont pas apprécié par rapport à la méthode traditionnelle automatique utilisée souvent dans leur cours

En général, selon certains groupes, la méthode RGS demande plus de temps pour trouver la meilleure équation algébrique que la méthode traditionnelle automatique utilisée dans les calculatrices programmables et les logiciels de Modélisation (Moindres carrés). Par exemple, le groupe 1 mentionne que «*le fait qu'on doive manuellement chercher la meilleure équation passant par tous les points n'est pas très approprié aux T.P…..on aurait besoin d'une façon plus rapide à avoir accès aux différentes équations*». Le groupe 5 note qu'il n'a pas apprécié «*le temps qu'il faut pour trouver l'équation, comparé aux autres logiciels*». Alors que le groupe 7 «*a d'ailleurs eu besoin d'une heure d'explications pour le comprendre*». Le groupe 2 a trouvé dur «*le moment où il fallait jongler avec les différentes colonnes*». Pour faciliter l'ajustement des paramètres, le groupe 12 suggère : «*lorsque l'on joue sur les paramètres de la courbe, il devrait y avoir un indicateur de l'unité que l'on influence, car il arrivait qu'on se perde; il faudrait aussi pouvoir simplement taper un nombre directement et aller cliquer l'unité que l'on veut influencer*».

Finalement, le groupe 10 nous dit que «*l'utilisation de cette méthode, quoiqu' efficace, est plus compliquée que la méthode traditionnelle automatique*».
Pour résumer, ces résultats ne sont pas surprenants puisque l'objectif de la méthode RGS est d'amener les élèves à la compréhension du processus de modélisation algébrique. Ce module inséré dans cette activité de laboratoire en sciences expérimentales a prolongé d'au moins 20 minutes la période de laboratoire. Malgré cela, si les élèves de cette étude comprennent mieux ce processus de modélisation complexe que celui qu'ils exécutaient de manière automatique et aveugle avec les calculatrices programmables et les logiciels de modélisation algébrique, ces commentaires sont encourageants. C'est ce qu'on nous allons vérifier dans le paragraphe suivant.

6.2.4. Ce que les élèves ont apprécié par rapport à la méthode traditionnelle automatique utilisée dans les écoles et collèges

Pour le groupe 5, la manipulation itérative de la méthode RGS afin de réduire les écarts et d'optimiser la courbe lui «*donne la chance de mieux comprendre l'influence des paramètres d'une équation sur la courbe*» et que le concept de l'histogramme c'est-à-dire «*de diviser la proximité de la localisation des points à la courbe en pourcentages fixes (68% et des % symétriques) est intéressant*». Ce groupe précise aussi que «*le fait qu'il y avait plus qu'un support pour nous aider à approcher la courbe expérimentale de la courbe théorique (distance des points à la courbe et le graphique)*». Les témoignages du groupe 5 se rejoignent avec ceux du groupe 10. Pour ce dernier, la méthode RGS permet aussi «*un meilleur ajustement du modèle d'une courbe à la courbe qu'on obtient expérimentalement*». Selon ce groupe, cet ajustement est meilleur «*grâce au diagramme en bâtons des erreurs absolues*»par ce qu'il permet «*la visualisation de l'écart entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux, ce que ne permet pas la méthode traditionnelle automatique*». Le groupe 8 trouve que le logiciel RGS est intéressant parce qu'il lui permet de comprendre et «*de voir comment modéliser des courbes, contrairement à la méthode traditionnelle automatique où on nous donne une équation qui tombe du ciel*». Comme le groupe 8, le groupe 7 précise aussi qu'avec le logiciel RGS «*on comprend mieux d'où viennent les modélisations qu'on obtient*». Le groupe 1 trouve intéressant qu'il trouve par lui-même la meilleure courbe avec le logiciel RGS «*il est intéressant de trouver cette équation par nous même,..*» et que le logiciel RGS «*est beaucoup plus clair que la méthode traditionnelle automatique*». Pour finir, le groupe 4 considère que le logiciel RGS contribue au développement des capacités mathématiques des élèves pour modéliser algébriquement les données des phénomènes scientifiques «*le fait de pouvoir concevoir nous-mêmes une courbe très précise, correspondant à un ensemble de données expérimentales, avec la plus petite erreur relative possible, est une liberté qui n'avait encore jamais été atteinte. Cela permettra à la fois de*

contribuer au développement des capacités mathématiques des élèves et de devenir par le fait même un nouveau critère d'évaluation».

7. Discussion des résultats et conclusion

Sur le plan théorique, le processus de modélisation en sciences exige de l'élève qu'il réalise une expérience, qu'il prenne acte des mesures obtenues, qu'il perçoive le caractère modélisable de ses résultats. De manière générale, nous pouvons dire que le fait de visualiser différentes représentations sémiotiques des écarts a permis aux différents groupes d'exercer les activités cognitives de traitement, de conversion, de coordination et d'interprétation, nécessaires à la compréhension du processus de modélisation algébrique, qu'ils n'arrivaient pas à comprendre avec la méthode traditionnelle *automatique*. Les résultats de cette recherche indiquent que la majorité des élèves ont compris non seulement le fonctionnement du logiciel mais aussi le rationnel algébrique de la méthode RGS. Les résultats de cette recherche nous montrent aussi qu'une modélisation algébrique de phénomènes physiques exige des élèves qu'ils atteignent non seulement la coordination au sens de Duval (1995) (ex. : groupes 10 et 12), mais aussi l'interprétation (ex. : groupes 7 et 9) au sens de Touma (2008).

Au plan pratique, le logiciel RGS a permis à des élèves, sans besoin de connaissances spécialisées, d'entrer dans une démarche d'investigation scientifique puis de confronter les résultats de leur propre modélisation avec les modèles ou théories existantes.

Références

AYÇAGUER-RICHOUX, H. (2000), *Rôle des expériences quantitatives dans l'enseignement de la physique au lycée*, Thèse de doctorat, université de Paris 7.

BEAUFILS, D. (1993), L'ordinateur outil d'investigation scientifique au lycée : propositions et implications didactiques, *Didaskalia*, **1**, 123–130.

DUPIN, J.-J. (1995), Modèles et modélisation dans l'enseignement. Quelques contraintes didactiques, Acte de l'école d'été, Edition coordonnée par : Noirfalise R : IREM de Clermont-FD, et Perrin-Glorian, M-J : IUFM Arras et Équipe DIDIREM Paris VII, 247–257.

DUVAL, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Berne, Peter Lang.

JOSHUA, S. & DUPIN, J.-J. (1999), *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*, Paris : PUF.

GUILLON, A. (1995), Démarches scientifiques en travaux pratiques de physique de DEUG à l'université de Cergy-Pontoise, Didaskalia, **7**, 113–127.

JOHSUA, S., et DUPIN, J.-J. (1999), *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*, 2IÈME édition, Paris : Puf.

MARTINAND, J.-L. (2002), *Apprendre à modéliser. In R. Toussaint. Changement conceptuel et apprentissage des sciences*, Montréal, Québec : Éditions Logiques, 47–68.

NONNON, P. (1986), *Laboratoire d'initiation aux sciences assisté par ordinateur*. Thèse de doctorat, Université de Laval.

ORANGE, C. (1997), *Problèmes et modélisation en biologie*, Paris : PUF.

TOUMA, G. (2006), *Un paradigme d'expérimentation au laboratoire de sciences pour l'identification et l'optimisation statistique d'un modèle algébrique par interaction visuo-graphique*, Thèse de doctorat, Université de Montréal.

TOUMA, G. (2008), Activité cognitive d'interprétation, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **13**, IREM de Strasbourg, 93–111.

GEORGES TOUMA
Université d'Ottawa, Faculté d'éducation
Pavillon Lamoureux
145, Jean-Jacques-Lussier
Ottawa, ON, Canada, K1N 6N5
Georges.touma@uottawa.ca

CHRISTIAN SILVY & ANTOINE DELCROIX

SITE MATHÉMATIQUE D'UNE ROC : UNE NOUVELLE FAÇON D'INTERROGER UN EXERCICE ?

Abstract. Place of Organized Returning of knowledge in Mathematics: a new way for questioning an exercise? – The French ministry of education introduced in 2005 the « organized returning of knowledge » (ROC) in the French baccalauréat as a tool to render more efficient the mathematical education at the end of secondary school. This article is based on an analysis of the ROC of the 2006 Antilles-Guyane baccalauréat, by the anthropological approach to didactics, which leads to the construction of its *mathematical site*. Through this analysis, some features of the ROC are discussed, such as its consistency (including from the view point of the institution) and the transparency of this evaluation.

Résumé. L'introduction des restitutions organisées de connaissances (ROC) dans les épreuves du baccalauréat, à partir de 2005, est une réponse de l'institution à la volonté de rendre plus efficace l'enseignement en cycle terminal. Cet article s'appuie sur l'analyse de la ROC du sujet Antilles Guyane session 2006 par une approche anthropologique en proposant la construction de son *site mathématique*. Au travers de cet exemple sont interrogées certaines caractéristiques du concept ROC comme sa cohérence (notamment institutionnelle) et la transparence de cette évaluation.

Mots-clés. Site mathématique, restitution, ROC, Descartes, habiletés, connaissances, savoirs, pré-requis, réorganisation, méthode, baccalauréat, évaluation.

Introduction

L'introduction, dans le cadre des épreuves du baccalauréat 2005, d'exercices novateurs, dont un pilier est la restitution organisée de connaissances (ROC), est une réponse proposée par l'institution à la nécessité de rendre plus efficace l'enseignement en cycle terminal. L'idée sous jacente est que l'on peut contribuer à atteindre cet objectif en agissant en amont, par le moyen de l'évaluation certificative. L'affirmation selon laquelle *« le baccalauréat pilote l'enseignement du cycle terminal »* [B. David, 2000] ou bien celle qui stipule que « *le mode d'évaluation aux examens structure les contenus de l'enseignement et organise la scolarité* » (selon une déclaration d'A. Périssol à l'Assemblée Nationale en 2005) illustrent ce postulat.

Cet article s'appuie sur une étude de la ROC du sujet Antilles-Guyane session 2006 dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique formulée par Y. Chevallard en 1989. L'article construit le site mathématique de la ROC étudiée [P. Duchet & K. Erdogan, 2006] : nous postulons en effet que la construction du site mathématique local d'une ROC permet d'appréhender par niveau de

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 14, p. 103 – 122.
© 2009, IREM de STRASBOURG.

praxéologie croissant, les connaissances ou les coutumes mathématiques à enseigner pour préparer les élèves à devenir des résolveurs [C. Castela, 2008].

Nous partons d'une première analyse situant la ROC selon les points de vue historique et institutionnel des pratiques (à l'oral du baccalauréat) mathématiques. Nous poursuivons notre étude par l'explicitation des méthodes de résolution, permettant de préciser son écologie didactique. L'ensemble de ces éléments permet alors la construction effective du site.

Nous discutons, enfin, au travers de cet exemple certaines caractéristiques du concept de ROC, notamment celles liées à l'introduction de pré-requis dans une épreuve de baccalauréat, et leur traduction dans les pratiques enseignantes à partir d'un travail d'enquête effectué en 2007/08 auprès de dix enseignants des classes terminales scientifiques de Guadeloupe. Nous sommes amenés à nous questionner sur la transparence des critères de cette évaluation en montrant que contrairement à son acronyme la ROC n'évalue pas que des connaissances mathématiques. Nous testerons également la cohérence du concept au niveau institutionnel, en particulier en montrant qu'elle semble avoir répondu à l'un des objectifs assigné par l'institution, la remise en valeur de la démonstration dans le cycle terminal. L'ensemble de ces éléments permet de montrer que la ROC n'est probablement pas un mode d'évaluation à rejeter, même si elle ne constitue pas une réponse parfaite aux différentes fonctions assignées par l'institution.

1. Premières analyses de la ROC

1.1. Première lecture

Voici le sujet tel qu'il fut proposé aux candidats, à la session 2006 du Baccalauréat série S Antilles Guyane :

Restitution organisée de connaissances
Pré-requis :
- La fonction logarithme népérien est dérivable sur]0;+∞[et sa fonction dérivée est la fonction inverse $\left(x \mapsto \frac{1}{x} \right)$.
- ln(1)=0.
Démontrer que pour tous réels strictement positifs a et x, ln(a x) = ln(a) + ln(x).

Un élève résolveur [C. Castela, 2008] qui lit pour la première fois le sujet remarque deux codages de natures différentes qu'on peut considérer comme relevant du

champ protomathématique[1].

Le premier codage consiste à noter *ln*(*x*) à la place du plus habituel *ln x.* Ce code fait référence à la valeur de la fonction *ln* prise au point *x*, comme il réfèrerait à une fonction *f* non précisée prise au point *x*. La modification de la forme du signifiant doit permettre aux résolveur d'évoquer la fonction *ln*. Cette figure[2] rhétorique (un signifié/plusieurs signifiants) est un polymorphisme de la langue symbolique [A. Cauty, 1984]. L'ostensif (*x*) est d'un usage commun. Il s'emploie dans la classe à partir de la seconde. Ainsi, après trois occurrences du mot « fonction » dans les pré-requis, ce codage situe bien la ROC dans le champ des « fonctions ». Cette répétition dans la langue naturelle et dans la langue symbolique, au sens d'A. Cauty, doit évoquer chez l'élève résolveur la variation.

Le deuxième code est le choix des lettres *a* et *x*. Traditionnellement les lettres *a, b, c* désignent dans un contexte mathématiques des constantes inconnues tandis que *x, y* et *t* sont des variables. L'auteur suggère au résolveur que *x* sera traité comme une variable et *a* comme une constante. Le choix linguistique de lettres est soumis aux contraintes paradigmatiques des symboles de constante ou de variable.

Par ailleurs, le concepteur a choisi de donner comme pré-requis une propriété de la fonction ln et non une définition possible de la fonction *ln* : « *La fonction logarithme népérien est la primitive définie sur]0;+∞[de la fonction inverse (x↦ 1/x) qui s'annule en 1 ».* Cette figure rhétorique indique, par son caractère inhabituel, un objet précis, la dérivation. Dans le même ordre d'idées, le concepteur n'introduit pas l'objet du problème en le citant comme étant une propriété ni une relation fonctionnelle mais simplement une démonstration.

Ainsi dans l'énoncé de cette ROC, l'implicite occupe une place première. Pour reconnaître les concepts protomathématiques, paramathématiques ou

[1] Pour les concepts d'objets paramathématiques et protomathématiques, nous référons le lecteur à Y. Chevallard (1985), *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée Sauvage, Grenoble. Brièvement, pour nous, les objets ou notions paramathématiques sont des « notions-outils », utilisées pour étudier un objet mathématique, par exemple le tableau de variation pour l'étude d'une fonction. La notion de paramètre, d'équation, et même de démonstration, en sont d'autres exemples. Une caractéristique des notions paramathématiques est qu'elles sont a priori exclues de l'évaluation directe [Y. Chevallard, 1985]. Les notions protomathématiques sont situées dans une strate plus profonde. Elles sont attendues et sont mobilisées implicitement par le contrat didactique. Ainsi elles vont de soi et appartiennent au milieu des actions des élèves [G. Brousseau, 2001] : « *Tout se passe comme s'il n'y avait là rien à savoir (et rien à enseigner sinon à apprendre) mais seulement à faire ce qu'il faut* » [G. Delbos & P. Jorion, 1984].

[2] « *Je dirai qu'il y a une figure rhétorique en un lieu d'un discours si* ***ce qui s'y trouve n'est pas ce qui est attendu*** [A. Magen, 2001]. (C'est Alain Magen qui souligne.)

mathématiques l'élève résolveur doit montrer une « habileté de lecture mathématique », habileté au sens du mot latin « habilis » : « *qui ont des habitudes, qui « savent y faire ». C'est la notion anglaise de « craft », de « clever » (adresse et présence d'esprit et habitude), c'est l'habileté à quelque chose. Encore une fois nous sommes bien dans le domaine technique.* » [M. Mauss, 1950]. En conséquence une lecture attentive du sujet permet à cet « expert » de décoder et donc de choisir les techniques [Y. Chevallard, 1985], la variable et la stratégie.

1.2. Panorama général

1.2.1. Point de vue historique

Sans entrer dans un long développement[3], mentionnons qu'après la découverte des logarithmes par une approche cinématique, leur reconnaissance mathématique découle du fait qu'ils sont une réponse aux calculs longs et difficiles en astronomie. Les calculs de multiplication ou de division sont remplacés par deux correspondances dans une table et une addition. C'est au début du XVII° siècle que John NAPIER publie son traité *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, où il donne des tables de correspondances. Nous pouvons donc dire que la propriété énoncée dans la ROC est à la base du concept logarithme. Cette naissance, si elle ne dépend pas des exponentielles, est cependant liée à la suite des puissances d'un nombre et à celle de ses exposants. En effet la suite q, q^2,…, q^n peut être mise en relation avec 1, 2,…, n. Nous retrouvons alors la propriété qui fonde notre exercice, un produit $q^p q^r$ est en relation avec $p+r$ grâce à la propriété des puissances.

1.2.2. Point de vue institutionnel (évolution des programmes)

Dans les programmes antérieurs à 2002 les logarithmes introduisent les nouvelles fonctions de terminale. Elles sont donc vues comme fondement de la fonction exponentielle. Dans le programme de 1971, par exemple, « *La fonction logarithme népérien est définie sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *par* $\operatorname{Log} x = \int_1^x \frac{dt}{t}$*; la fonction exponentielle sera obtenue comme réciproque de la fonction logarithme népérien. On justifiera les règles de calcul et l'isomorphisme ainsi établi entre le groupe additif* $(\mathbb{R}^{*+},+)$ *et le groupe multiplicatif* $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ *»*[4]. Cette introduction est conservée dans les années 1980.

Le programme des années 1990 n'impose plus le mode d'introduction des fonctions *ln* et *exp* : « *L'existence et la dérivabilité de ces fonctions peuvent être*

[3] Nous invitons le lecteur à se reporter à E. Barbin & alii (2006), *Histoires de logarithmes*, Ellipses, Paris.

[4] Mathématiques, classes de second cycle, Ministère de l'Education Nationale, Horaires, Programmes, Instructions, INRDP, Fabrègue, 4è trimestre 1971.

admises. En revanche, les propriétés des fonctions ln et exp feront l'objet de démonstrations » [BO du 13 juin 1997, p. 18].

Le programme de 2002 marque une rupture avec les précédents pour l'introduction de la fonction *ln*. La fonction *exp* est introduite le plus tôt possible avant celle de logarithme. Elle doit occuper une place centrale. La fonction logarithme népérien n'est plus la première fonction « transcendante » étudiée en classe de terminale. Elle perd ainsi sa place dans la progression au profit de la fonction exponentielle.

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Fonction logarithme népérien ; notation ln. Équation fonctionnelle caractéristique. Dérivée ; comportement asymptotique.	On mentionnera la fonction logarithme décimal, notée log, pour son utilité dans les autres disciplines et son rapport avec l'écriture décimale des nombres. Approximation affine, au voisinage de 0, de $h \mapsto \ln(1+h)$.	Le mode d'introduction du logarithme n'est pas imposé. On peut, pour l'introduire : – soit partir des propriétés des fonctions exponentielles ; – soit poser le problème des fonctions dérivables sur ∇^{+*} telles que $f(x\,y) = f(x) + f(y)$ et admettre l'existence de primitives pour la fonction : $x \mapsto 1/x$; – soit traiter le logarithme après l'intégration.

Document 1[5] : Étude des fonctions logarithmes et exponentielles.

Ce programme (voir document 1) propose trois introductions au logarithme. Le professeur, habitué aux programmes antérieurs à 2002 aura tendance, par habitude, à privilégier la troisième approche.

En revanche, pour l'élève dont l'enseignant aura choisi une des deux premières approches, cette ROC peut constituer une démonstration nouvelle. (Un entretien avec un des professeurs interrogés corrobore ce fait.)

1.2.3. Point de vue des pratiques de l'oral du baccalauréat.

Dans les années 1980 les professeurs utilisaient les contenus mathématiques de cette ROC dans l'oral du baccalauréat pour sélectionner les candidats. Ce sujet était alors, dans la pratique, reconnu comme étant difficile.

Dans la décennie 90, le professeur choisit souvent le mode de fonctionnement induit par cette ROC pour introduire la fonction *ln*. Il procède en définissant *ln* par

[5] Extrait du Cédérom mathématiques 2002, accompagnement des programmes, Mathématiques, classes terminales de la série scientifique et de la série économique et sociale, Ministère jeunesse éducation recherche, imprimerie nationale, juillet 2002.

la primitive définie sur]0;+∞[de la fonction $x \mapsto 1/x$ qui s'annule en 1. Après une étude succincte de la fonction *ln*, il est amené à en déduire la propriété « fondamentale » :

- soit par une question : « Soit a un réel strictement positif et soit la fonction g définie par $g(x) = ln(ax)$ pour $x > 0$; montrer que g est dérivable et calculer $g'(x)$. En déduire que $ln(ax) = ln(x)+ln(a)$ pour tout $x > 0$ » ;
- soit en la démontrant directement dans son cours.

1.2.4. Point de vue mathématique

Les relations fonctionnelles restent un sujet délicat en mathématiques. Cependant, classiquement, celles présentes dans le curriculum du professeur (certifié, agrégé) de lycée sont au nombre de quatre, avec des hypothèses de régularité sur la fonction inconnue adaptées au niveau de formation :

- équation fonctionnelle des fonctions linéaires de la variable réelle : $f(x+y) = f(x)+f(y)$;
- équation fonctionnelle des fonctions logarithmes : $f(xy) = f(x)+f(y)$;
- équation fonctionnelle des fonctions exponentielles : $f(x+y) = f(x)+f(y)$;
- équation fonctionnelle des fonctions puissances : $f(xy) = f(x)f(y)$.

La résolution des trois dernières peut, par exemple, s'obtenir à partir de la résolution de la première, la plus élémentaire. Dans l'expérience des auteurs, cela reste un sujet d'oral 1 assez difficile pour les étudiants préparant le CAPES.

Au niveau des programmes du secondaire, l'élève apprend (ou démontre partiellement) que les fonctions précitées vérifient l'équation fonctionnelle correspondante. C'est ce qui est demandé dans la ROC étudiée. Dans son cursus, il peut cependant être amené à résoudre ces équations fonctionnelles avec des hypothèses de régularité fortes.

2. Méthodes de résolution

Nous allons rédiger quelques réponses possibles à cette ROC en les appelant méthode dans le sens ordinaire de ce mot. Nous ne choisissons pas une rédaction la plus économique possible pour expliciter quelques concepts protomathématiques ou paramathématiques et par voie de conséquence, pouvoir construire effectivement le site mathématique.

2.1. Première méthode

Les pré-requis peuvent faire penser à la définition de ln à partir de l'intégrale :

$$ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt .$$

Nous avons donc à démontrer que, pour tous réels strictement positifs *a* et *x*,

$$\int_1^{ax} \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_1^x \frac{1}{t} dt .$$

En utilisant la relation de Chasles, nous obtenons :

$$\int_1^{ax} \frac{1}{t} dt = \int_1^a \frac{1}{t} dt + \int_a^{ax} \frac{1}{t} dt .$$

Ainsi, nous devons montrer que $\int_a^{ax} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt$. Pour démontrer cette égalité, il faut effectuer un changement de variable affine $u = at$. Rappelons le théorème : « Soit une fonction *f* continue sur un intervalle *I* contenant *ma*+*p* et *mb*+*p* (*m*, *p*, *a*, *b* réels, $m \neq 0$) alors $\int_a^b f(mt + p)dt = \frac{1}{m}\int_{ma+p}^{mb+p} f(u)du$ »[6]. Or

$$\int_a^{ax} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{a}\int_a^{ax} \frac{1}{\frac{1}{a}t} dt \cdot$$

Soit alors $f :]0 ; +\infty[\to \nabla$ définie par $f(t) = \frac{1}{at}$. La fonction *f* est continue sur $]0,+\infty[$, ainsi nous pouvons appliquer le théorème rappelé ci-dessus. Donc

$$a\int_a^{ax} f(\frac{1}{a}t))dt = a \times \frac{1}{a}\int_1^x \frac{1}{u} du = \int_1^x \frac{1}{u} du.$$

2.2. Deuxième méthode

Nous utilisons la fonction exponentielle, fonction qui dans la programmation de la classe se situe avant la fonction *ln*. Nous remarquons qu'un professeur peut choisir d'utiliser cette méthode en cours pour démontrer la propriété du logarithme présente en suivant les directives prescrites par l'institution.

En utilisant la propriété « $\forall x \in \nabla^{*+}$, $exp(ln(x)) = x$ » nous obtenons $exp(ln(ax)) = ax$. D'autre part, nous avons $exp(ln(a)+ln(x)) = exp(ln(a)) \times exp(ln(x)) = ax$. Ainsi $exp(ln(ax)) = exp(ln(a)+ln(x))$. Or la fonction *exp* est une bijection de ∇ dans $]0;+\infty[$ donc $ln(ax) = ln(a)+ln(x)$.

---

[6] L'importance de ce résultat est souvent soulignée. Bien que hors programme, ce résultat est présent dans certains ouvrages destinés aux terminales scientifiques : « *Nous aimerions que ce cours puisse rester l'ouvrage de référence du bachelier scientifique* » [Warusfel et alii, 2002].

2.3. Troisième méthode

Nous utilisons l'indication de l'auteur, qui a mis intentionnellement les parenthèses dans le sujet $ln(ax) = ln(a)+ln(x)$ pour les raisons indiquées dans les remarques initiales. Cette méthode a pour base l'équivalence entre la relation fonctionnelle et la constance (ou la nullité) d'une certaine fonction. Elle repose ainsi sur le choix d'une fonction constante à partir de la relation fonctionnelle.

Pour déterminer la fonction nous procédons par équivalence à partir de la relation fonctionnelle. Un premier choix consiste à écrire que, pour tous réels strictement positifs a et x, la proposition $ln(ax) = ln(a)+ln(x)$ est équivalente $ln(ax)-ln(a)-ln(x) = 0$. Nous obtenons ainsi une première fonction $f(x) = ln(ax)-ln(a)-ln(x)$ dont on doit montrer qu'elle est identiquement nulle. On peut procéder en trois étapes :

- f est la somme de fonctions dérivables (d'après le pré-requis). Elle est donc dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) = 0$ d'après la propriété de dérivation d'une fonction composée ; ainsi f est une fonction constante i.e. il existe un nombre réel c tel que pour tout x de $]0;+\infty[$, $f(x) = c$;
- on a $f(1) = 0$ (pré-requis) ;
- donc la constante c est nulle et f est nulle.

On peut aussi remplacer l'égalité $ln(ax) = ln(a)+ln(x)$ par $ln(ax)-ln(x) = ln(a)$ et cela nous indique une deuxième fonction possible : soit g la fonction définie et dérivable sur $I =]0;+\infty[$ par $g(x) = ln(ax)-ln(x)$. On a $g'(x) = 0$, comme pour f ci-dessus. Ainsi, g est constante sur $]0;+\infty[$, égale à c. Puis $g(1) = ln(a)+ln(1)$. Comme, d'après le pré-requis $ln(1) = 0$, on a $g(1) = ln(a)$. Donc la constante c vaut $ln(a)$. D'où, pour tous x et a réels strictement positifs, $ln(ax)-ln(x) = g(x) = ln(a)$ C'est à dire $ln(ax) = ln(a)+ln(x)$ [7].

[7] Une variante de cette troisième méthode, consiste à utiliser explicitement le concept de primitive. On définit la fonctions h par $h(x) = ln(ax)$. La fonction h est composée de fonctions dérivables (pré-requis) est donc dérivable sur $]0;+\infty[$ et $h'(x) = a/(ax) = 1/x$. La fonction h est donc une primitive sur l'intervalle $]0;+\infty[$ de la fonction inverse $x \mapsto 1/x$, comme la fonction ln (pré-requis). Ces deux fonctions diffèrent d'une constante. Or, pour $x = 1$, on a $h(1) = ln(a)$ donc $h(x) = ln(x)+ln(a)$.

3. Écologie didactique : outils - concepts

3.1. Concept de pré-requis

Toute ROC débute par un pré-requis qui organise la restitution. Il établit ainsi un contrat d'évaluation. Mais de quel contrat s'agit-il ? Pour la plupart des professeurs de terminale S interrogés, le résolveur a l'obligation de l'utiliser dans sa démonstration. Ainsi le pré-requis ne se réduit pas à une hypothèse (surabondante ou pas), ni à une définition ou propriété qu'on admet. Il est plus proche du contrat implicite classique présent dans un enchaînement de questions dont la dernière question débute par « en déduire » : le contrat de la ROC pourrait paraître, de ce point de vue, quasiment identique à celui proposé à l'élève qui aborderait cette dernière question en admettant les résultats précédents.

Cette caractéristique révèle cependant plus qu'une modification mais une rupture de contrat didactique. En effet, dans le secondaire, les élèves ont l'habitude de pouvoir utiliser tous les résultats de cours pour répondre à un exercice : le « réservoir » de leurs connaissances constitue leur corpus personnel de pré-requis. Le résolveur doit être conscient d'une nouvelle règle, d'un jeu un peu formel, qui modifie le contrat d'évaluation. La ROC servant de base à notre analyse en est une bonne illustration. La première méthode de résolution exposée ci-dessus utilise la technique du changement de variable affine qui n'est pas au programme du cycle terminal. La deuxième méthode fonctionne au niveau de la classe de terminale. Mais, en exploitant les propriétés fonctionnelles de l'exponentielle, elle n'utilise pas les pré-requis, et se trouve donc hors contrat d'évaluation. L'obligation d'utiliser les pré-requis condamne le résolveur à laisser de côté la deuxième méthode et tend à refermer la ROC.

Cette rupture nécessite une modification des « réflexes » acquis lors de l'apprentissage, pour mettre en œuvre le nouveau contrat didactique : « tout pré-requis doit être utilisé pour répondre à l'exercice ». Ce nouveau contrat est maintenant clairement perçu des candidats au baccalauréat en Guadeloupe.

Face à cette ROC, en fonction des choix didactiques de son enseignant de terminale[8], l'élève se trouve soit devant une démonstration déjà vue soit devant un exercice inédit. Dans le premier cas, il doit reconstruire la démonstration. Cela devrait impliquer de nier la connaissance acquise pour pouvoir se mettre dans la condition de la restitution au sens étymologique du terme c'est-à-dire « remettre en son état premier le texte du savoir ». Le pré-requis a cette vocation, nier l'appropriation du savoir par l'élève et remettre en oeuvre la dialectique « outil/objet » [R. Douady, 1986] à son origine. Mais le pré-requis fonctionne plutôt comme un palliatif à l'altération ou à l'oubli des souvenirs : « *La raison de*

[8] Comme le montre l'analyse des programmes présentée plus haut.

l'oubli des souvenirs *tient dans le fait qu'ils ne peuvent être restitués à l'identique, comme s'ils étaient stockés sans altération dans « un entrepôt du cerveau », mais qu'ils doivent être reproduits. Or,* ***reproduire n'est pas retrouver****, mais* ***reconstruire****. Mais l'univers cognitif des élèves a changé ; la venue de nouveaux ostensifs et non ostensifs a modifié l'univers de l'élève* » [Y. Matheron, 2000].

Dans le second cas, l'élève doit partir du pré-requis pour construire sa démonstration. Il doit reconstruire son savoir autour de la question, c'est une des caractéristiques de la Méthode de Descartes comme le montre A. Mercier[9]. Cette caractéristique répond au *principe de Papert* énoncé par M. Minsky : « *certaines étapes les plus cruciales du développement mental sont fondées non pas seulement sur l'acquisition de nouvelles compétences mais sur de nouveaux processus administratifs de ce que nous connaissons déjà »* [M. Minsky, 1988]. Nous posons alors la même question que celle de C. Silvy[10] : *« la ROC ne serait-elle pas essentiellement une procédure d'évaluation formative introduite dans une épreuve sommative ?* »

Cependant, dans ces deux cas, le pré-requis permet au résolveur d'être dans les conditions d'une *pratique cartésienne* avec un minimum de pas de raisonnement à effectuer. Cette organisation rend (en principe) la ROC « comestible », en termes de temps et de difficulté, pour un élève candidat au baccalauréat.

3.2. Notion de site mathématique

Nous partons de la notion de site mathématique proposée par P. Duchet et K. Erdogan : « *le champ des objets mathématiques dont l'étude se révèle pertinente ou est supposée telle pour la connaissance d'un objet scientifique donné, O, peut être considéré comme un réseau d'objets et de relation, le site mathématique de O. Certains de ces objets et relations sont visibles, d'autres sont cachés*[11]*. »* Pour chaque sujet en position résolveur, le site mathématique se présente sous forme d'un champ de signification, d'investigation et d'expérience qui doit être suffisamment stable, à son échelle, pour conférer à son étude un référentiel fiable.

Pour nous, un site mathématique s'organise autour de plusieurs champs d'analyse dont les deux premiers sont donnés par lecture experte du sujet.

- Le « **substrat** », terreau de la question, les « **choses »** sont des implicites, naturalisés, préconstruits, des notions protomathématiques ou paramathématiques pour le niveau étudié ; elles peuvent relever du

[9] Dans A. Mercier (2001), Descartes : le temps de la construction du savoir, *L'Ouvert* 103, 14–24.
[10] Poster et séminaire, 14ème Ecole d'été de Didactique des Mathématiques, ARDM, 2006, Sainte Livarde.
[11] Traduction des auteurs du texte publié dans [P. Duchet & K. Erdogan, 2006].

vocabulaire (non forcément explicité au niveau étudié) de la logique, de la théorie des ensembles ou bien des codages usuels en mathématiques ; par exemple, dans la ROC étudiée, l'égalité, les quantificateurs en font indiscutablement partie ; elles peuvent relever, également, de « procédés », de méthodes (au sens usuel) ou de stratégies de démonstration. Ainsi le substrat n'appelle pas de mathématisation pensable, dans l'institution concernée ;

- les **objets mathématiques** sont des non ostensifs *: « Nous avons utilisé le mot « objet » surtout pour désigner les concepts mathématiques qui font l'objet d'étude (...) De cette manière nous pouvons penser qu'un site mathématique est constitué d'abord des objets principaux dont l'étude fait appel à une multitude de concepts. »* [K. Erdogan, 2006] ; ainsi, les nombres réels, la fonction logarithme constituent des objets de la ROC sujet de notre étude ;
- les **techniques** viennent ensuite qui sont *les manières* de faire, permettant d'utiliser les objets comme des outils. Elles sont entendues ici au sens de propriété mathématique, théorème en général, figurant éventuellement dans les pré-requis, justifiant une étape de la démonstration demandée dans la ROC étudiée. Elles sont des méthodes routinières efficaces et peuvent varier dans les différentes solutions ;
- nous distinguerons enfin, dans cette ROC, deux niveaux d'analyse conceptuelle. Les **technologies** ou **concepts 1** permettent de justifier les techniques. C'est la technologie [Y. Chevallard, 1985]. Elles constituent le premier niveau de théorèmes justifiant les techniques ;
- les **concepts 2** constituent un deuxième niveau de notions ou de théorèmes justifiant les concepts 1.

Pour expliciter ces trois derniers champs d'analyse, et dans un contexte voisin de cette ROC, la technique justifiant l'étude du sens de variation d'une fonction par le signe de la dérivée pourrait être le théorème des accroissements finis (TAF), bien que ce ne soit pas la seule approche possible. Alors, une des technologies associées (ou concepts 1) pourrait être le théorème de Rolle, pourtant équivalent au TAF, mais que la progression place avant. Nous pourrions aussi considérer qu'une des propriétés des fonctions continues sur les segments, atteindre leurs extrema, est une technologie associée, tant le théorème de Rolle en découle immédiatement. Les concepts 2 seraient ceux plus généraux, englobant les champs mathématiques questionnés, comme la notion de continuité ou de compacité.

Remarque : au niveau d'analyse considéré, nous avons choisi de ne pas reprendre dans les concepts une part du substrat, par souci de lisibilité. Mais, nous restons

conscients que, par exemple, le vocabulaire de la logique présenté ici comme « substrat » pourrait devenir concept dans une analyse plus fine qui viserait les méthodes de démonstration en la situant dans la théorie formelle des propositions.

3.3. Construction du site mathématique de la ROC (voir document 2)

Nous avons rejeté la première méthode de résolution par manque de connaissances de la part des élèves au niveau d'étude considéré et la deuxième pour rupture de contrat d'évaluation du concept ROC. En conséquence, nous limiterons notre analyse aux deux dernières méthodes.

Le substrat de cette ROC, déjà présenté pour l'essentiel dans la première lecture du sujet, relève du champ de la logique (égalité, équivalence, quantificateurs), des codages usuels mentionnés (notation d'une fonction et usage de l'alphabet en mathématiques), qui suggèrent une stratégie de démonstration. L'égalité « pour tous réels strictement positifs a et x, $ln(ax) = ln(a)+ln(x)$ » fait intervenir deux objets différents. L'un étant une propriété de la fonction ln, objet spécifique, l'autre celui des relations fonctionnelles, objet plus général, champ d'investigation en mathématiques.

Nous remarquons que la relation « pour tous réels strictement positifs x et y, $ln(xy) = ln(x)+ln(y)$ » a été remplacée par celle rappelée ci-dessus. Comme nous l'avons déjà écrit dans la première partie, cette figure rhétorique est un indice pour le résolveur. Cette modification de l'énoncé de la propriété de la fonction ln ou de la relation fonctionnelle permet de passer de deux variables à une variable et une constante. Elle indique que la clef du problème réside dans l'étude d'une fonction. Cela met en évidence de nouveaux objets, la somme et la composée de fonctions.

En rappelant que la fonction ln est dérivable, le pré-requis indique un autre objet, la dérivation, outil central de l'analyse fonctionnelle.

Enfin la notion d'intervalle et les nombres réels sont les derniers objets. Ils sont plus difficiles à voir car ils ne sont pas très présents dans le sujet (une seule fois). Pourtant ces objets sont fondamentaux dans la justification de la technique. Les nombres présents dans cette ROC sont soit des constantes spécifiées (1 par exemple), soit des constantes quelconques positives (a par exemple), soit des variables (x par exemple). Nous notons que certains de ces objets sont issus du cycle terminal, donc des objets récents pour le résolveur [C. Castela, 2008].

La dernière méthode fait appel à la même technique principale, la caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée (caractérisation FCD). Nous pouvons l'énoncer ainsi : « soit I un intervalle et f une fonction définie sur I. La fonction f est constante sur I si, et seulement si, f est dérivable et f' est la fonction nulle sur I ». Pour atteindre cette technique, cette méthode passe par la mise en relation de plusieurs des objets : dérivabilité, dérivation de somme et de composée de

fonctions. Les propriétés algébriques des fonctions dérivables (dérivabilité de la somme de fonctions dérivables, d'une fonction composée et calcul de ses dérivées) sont ainsi les principales justifications des hypothèses de la technique principale.

Remarquons que la justification principale de cette technique est un théorème admis. En effet, le fait que « toute fonction dérivable à dérivée nulle sur un intervalle non réduit à un point est constante », n'est pas justifiable en 1ère S depuis le changement de programme 2002. En terminale elle n'est pas, à notre connaissance, enseignée depuis la disparition du théorème des accroissements finis (programme 1991).

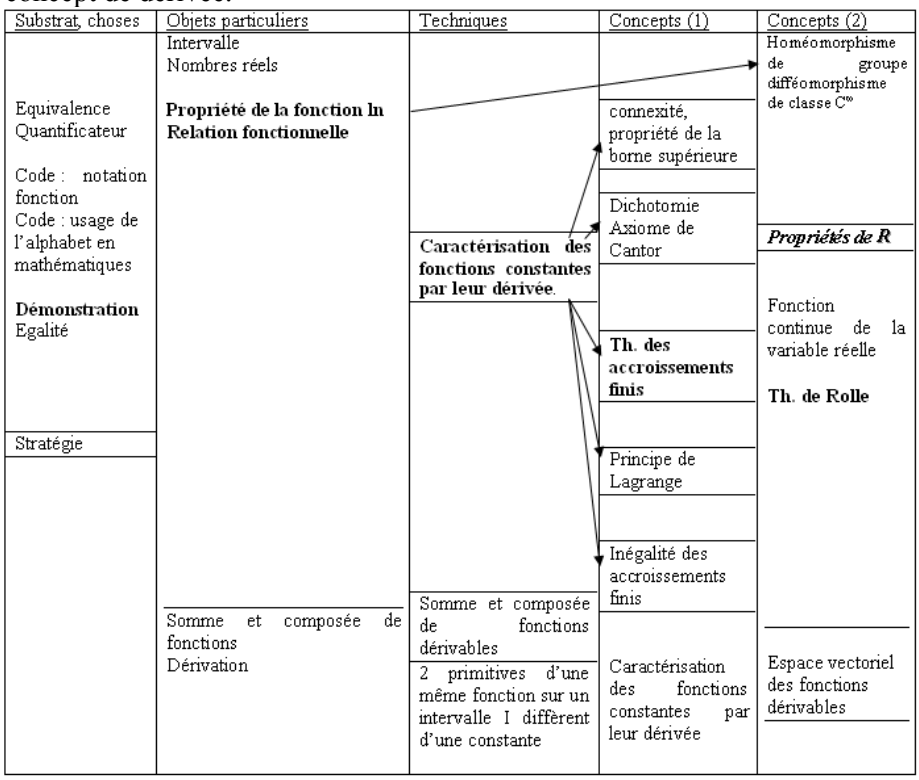
Dans le but de rendre le site plus exhaustif, la recherche d'une démonstration possible en terminale S, qui contournerait les propriétés d'accroissements finis [A. Delcroix & C. Silvy, 2008], nous a conduits à un exercice illustrant le cours de première année d'un professeur de classe préparatoire. Cette démonstration utilise un principe de dichotomie, équivalent à la propriété des segments emboîtés (axiome de Cantor) et aux quatre propriétés suivantes :

- propriété de la borne supérieure : toute partie de ∇ non vide majorée admet une borne supérieure ;
- convergence des suites monotones bornées : toute suite réelle monotone bornée est convergente ;
- complétude séquentielle : toute suite réelle de Cauchy est convergente ;
- propriété de Bolzano-Weierstrass : de toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

D'autres démonstrations de la caractérisation FCD utilisent le principe de Lagrange (liant le sens de variation au signe de la dérivée) ou diverses variantes de l'inégalité des accroissements finis dont les démonstrations reposent notamment sur l'axiome de la borne supérieure ou sur la propriété de Bolzano-Weierstrass. Enfin, dans la programmation actuelle des programmes du supérieur, la caractérisation FCD se situe après les fonctions continues, au moment de l'étude des fonctions dérivables, comme corollaire de l'égalité des accroissements finis. Ce théorème est équivalent au théorème de Rolle dont la démonstration repose sur les propriétés des images compactes de segment par des fonctions continues, *in fine* conséquence des propriétés du corps des réels. Ainsi, toutes les démonstrations de la caractérisation FCD ont pour concept associé une des propriétés du corps des réels relevées ci-dessus, qui forment ainsi des *concepts 1* de la technique principale de cette ROC[12].

[12] La méthode proposée dans la note 7 est une variante de la troisième méthode basée sur la notion de primitive. La technique principale est remplacée par l'assertion suivante : « deux primitives d'une même fonction sur un intervalle *I* diffèrent d'une constante ». En effet, par définition, deux primitives *F* et *G* ont même dérivée. La fonction *F*-*G* a alors pour dérivée la fonction nulle. En appliquant la caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée,

Remarque : Dans les programmes du secondaire précédant les années 1960, l'habitat de la notion de dérivée n'était pas le même : il était placé entre l'étude des variations des fonctions dites aujourd'hui de référence (monôme de degré au plus trois, fonction racine et homographique) et la notion de mouvement. En effet, la justification des variations des fonctions de référence ne nécessite pas l'utilisation du concept de dérivée.



Document 2 : Le site mathématique local de la ROC[13].

---

on obtient le résultat voulu. Dans cette méthode, la technique principale s'appuie donc sur la caractérisation FCD, qui en devient la technologie.

[13] Nous présentons le tableau de synthèse du site mathématique de cette ROC. Seuls les éléments principaux ont été représentés dans un souci de clarté. Les flèches indiquent les liens d'« inclusion » dans la justification, « à interpréter à peu près comme « pertinent pour » » [P. Duchet & K. Erdogan, 2006]. Les éventuelles flèches joignant des concepts d'une même colonne n'ont pas été marquées. Les mots en gras sont substrat, objets, technique, concepts attendus par l'institution. Nous invitons le lecteur, qui désire « fouiller » davantage le site, à se reporter à A. Delcroix & C. Silvy (2008), Fonction constante et dérivée nulle : un résultat si trivial…

Derrière ces technologies, on trouve les propriétés algébriques des espaces vectoriels ou des algèbres de fonctions, bien sûr hors programme du secondaire. La relation fonctionnelle de la fonction ln est la définition d'un homomorphisme du groupe $(\nabla^{*+},\times)$ vers le groupe $(\nabla,+)$ appelé « isomorphisme fondamental du groupe multiplicatif ∇^{*+} dans le groupe additif de ∇ »[14] . Comme la fonction ln est dérivable sur *I*, de dérivée une fraction rationnelle ne s'annulant pas sur *I* comme l'indique le pré-requis, un raisonnement par récurrence permet aisément de montrer qu'elle est de classe C^{∞} . Nous sommes donc en présence d'un difféomorphisme de classe C^{∞} qui est donc un des *concepts 2* de cette ROC.

4. Discussion

La construction du site mathématique d'un exercice induit un questionnement sur son écosystème mathématique, didactique et pédagogique. C'est essentiellement sur ces deux derniers aspects que porte notre discussion.

4.1. La ROC et l'enseignement des habiletés

Nous évoquions dans l'introduction la question de « la transparence » de l'évaluation par les ROC et plus particulièrement par celle objet de notre étude. Nous avons montré que le terme « organisée » de cette restitution possède deux niveaux, l'un mathématique, l'autre constituant « une mise en scène » du texte de l'énoncé. Le premier niveau montre l'importance de cette ROC au niveau mathématique, au centre des propriétés des fonctions de la variable réelle, dont elle exige une bonne maîtrise. Le deuxième niveau est destiné à aider les élèves : il évoque des habiletés mathématiques pour reconnaître l'usage du *a* et du *x*, de la notation *ln*(*x*) ainsi que des autres notions protomathématiques et para-mathématiques de l'énoncé. L'évaluation porte donc à la fois sur la solidité des savoirs : *« une partie de restitution organisée des connaissances qui permet d'évaluer la solidité des savoirs scientifique »*[15] et sur les habiletés mathématiques du candidat. Nous nous questionnons sur l'enseignement de ces habiletés. Se fait-il par l'exemple, par ostension[16] ? Ou bien, ces habiletés sont-elles non enseignées ? Sans être en mesure d'apporter une réponse exhaustive en l'état actuel de nos travaux, nous pouvons apporter les éléments suivants. Les habiletés relevant du substrat paramathématique du site ne font pas toutes l'objet d'une prise en charge

[14] A. Lentin & J. Rivaud (1958), *Éléments d'algèbre moderne*, Vuibert, Paris.

[15] Rapport-n°2007-090 Novembre 2007, inspection générale de l'administration, l'éducation nationale et de la recherche : *La série scientifique au cycle terminal du lycée : articulation avec le cycle de détermination et orientation vers les études supérieures*.

[16] L'ostension est un enseignement basé sur l'observation : le maître montre, les élèves reconnaissent une propriété dont ils sont supposés capables de transférer l'emploi à d'autres contextes.

particulière dans le panel d'enseignants interrogés : si la prise en compte de recommandations institutionnelles est effectuée (par exemple celles concernant les notations fonctionnelles), la ROC n'introduit pas en elle-même de rupture à ce niveau. En revanche, les stratégies sont mises en valeur. Plutôt qu'enseigner la démonstration en elle-même, 30% des enseignants insistent sur l'enseignement des « astuces », des ruses. Ils font référence explicitement dans la ROC étudiée ici au fait qu'il faut se ramener à l'étude d'une fonction, qui est le point de départ de la deuxième méthode, celle attendue. Ainsi enseigner l'habileté, prise ici dans le sens de *mètis*, la ruse de l'intelligence [M. Détienne & J.P. Vernant, 1974], semble faire partie, pour les enseignants interrogés, du contrat imposé par la ROC. Du point de vue des élèves, un enseignement qui lève les implicites de certaines habiletés permet de ne plus penser l'acronyme ROC au sens de « dur comme du rocher » mais au sens de « ROC, cœur du raisonnement ».

4.2. Les autres caractéristiques de la ROC

Par ailleurs, les caractéristiques de la ROC évoquée dans cet article sont au nombre de quatre. En premier lieu, cette ROC se situe à la fin de l'apprentissage, au moment où l'élève peut réécrire partiellement *un texte du savoir* : la « restitution des connaissances ». Traditionnellement, le cours écrit du professeur constitue le texte du savoir de la classe. Au XIX^{e} siècle ou au début du XX^{e}, le cours est typographié en écriture manuelle, composé d'une suite de théorèmes et comporte de nombreux commentaires : c'est un discours. Dans les années 2000, le cours n'est pas toujours transmis en totalité. Sa construction, se faisant en partie au travers d'activités, devient partiellement du domaine privé, appartenant à l'élève. Ainsi, une ROC peut tendre à faire ressurgir ce souffle du discours, le « logos ».

Le nouveau contrat d'évaluation engendré par le pré-requis est la deuxième caractéristique de cette ROC. Le pré-requis induit la troisième, qui est de permettre au résolveur d'être dans les conditions d'une certaine pratique cartésienne. Les enseignants le prennent en compte sinon dans la résolution de ROC du moins dans les activités liées aux démonstrations : soit au début de la construction d'une démonstration[17] : « J'ai annoncé le plan de la démonstration, les étapes parce que ce qui est important c'est de structurer la démonstration, qu'elle prenne du sens aux yeux des élèves » ; soit à la fin : « Quand on a fait la démonstration, on cherche les points clefs ; on revoit le cheminement ». Dans les ROC, cette pratique cartésienne est obtenue par reconstruction, soit par *oubli des souvenirs,* soit par réorganisation *des savoirs connus de l'élève autour de ce problème*. C'est bien une méthode qu'on peut rapprocher de celle de Descartes : *« Le rapprochement entre les deux textes de Descartes montre que la réorganisation des connaissances qu'il mène selon la méthode, lui permet de produire des réponses - inconnues jusqu'alors - aux*

[17] Les propos des collègues interrogés sont entre guillemets et en caractère droits.

problèmes mathématiques qu'il se pose : la méthode cartésienne décrit la manière de s'enseigner soi-même ce que l'on ignore, dès lors que l'on peut comprendre son ignorance dans le cadre de pensée des savoirs existants, réorganisé à cet effet. » [A. Mercier, 2001].

En outre, dernière caractéristique, la ROC peut permettre un certain dépaysement du programme par une autre entrée, comme en témoigne une enseignante : « C'est vrai que j'ai traité les plus difficiles à mon sens au début. Celles qui tournaient autour du logarithme où, finalement, il y a une multitude de points d'entrée. » (C'est nous qui soulignons.) L'enseignante interrogée ne dégage pas encore explicitement le site mathématique de la ROC étudiée : mais, de manière implicite, elle est amenée à en utiliser les éléments. Ceci motive, pour nous, une autre phase de ce travail, dans laquelle la construction du site mathématique sera au cœur de l'activité[18].

4.3. Les ROC et l'évolution des pratiques

Enfin, l'introduction de la ROC dans l'évaluation terminale peut répondre, au moins partiellement, aux attentes de l'institution. En effet, la ROC induit une modification des pratiques en introduisant obligatoirement davantage de démonstrations dans le cours du professeur.

C'est le cas pour l'ensemble des enseignants interrogés ayant en charge une classe de terminale. Ils se positionnent tous dans un rôle bipolaire de « manageur » et d'organisateur. Le professeur/manageur pose des questions incisives à la classe pour guider, éclairer ou réfuter les pistes possibles de démonstration. Le professeur/organisateur planifie le schéma de la démonstration et structure la rigueur du discours mathématiques. Cette volonté commune cache cependant des pratiques hétérogènes dans la gestion du temps concernant l'activité démonstration, dans le choix des habiletés nécessaires pour comprendre la démonstration et dans l'aide fournie aux élèves pour conserver la ou les traces génératives de la démonstration. Par exemple pour une gestion efficace du temps, un professeur, par l'usage raisonné de polycopié du formulaire du cours, place la démonstration au centre de sa pratique. D'autres utilisent le travail hors temps scolaire pour préparer les séances de démonstration, d'autres réaménagent certaines démonstrations en

[18] Ce travail sera notamment mené avec les étudiants et stagiaires (ou les futurs étudiants de master) de l'IUFM de Guadeloupe. Pour les étudiants préparant les concours (ou pour les futurs étudiants de première année de master), il s'agira d'étudier si la construction du site local d'une notion leur permet de mieux appréhender sa place dans le curriculum et dans l'univers mathématique, pour construire leur argumentation pour les épreuves orales et se placer en situation d'enseignant. Pour les stagiaires (ou bien les futurs étudiants de seconde année de master), l'accent sera mis sur l'intervention du site pour la construction de séquences en classe.

une ROC. Enfin, un dernier amène dans le cadre du cours un outil didactique, l'organigramme. Tous se posent cependant la question du coût de ce nouvel enseignement et de son efficacité pour les élèves non spécialistes de mathématiques. Un seul le rejette en ces termes : « En évaluation, si je demande une démonstration de cours… c'est le vide, là j'exagère : il y a 4 réponses pour 29 élèves. J'y passe énormément de temps et j'ai l'impression que cela augmente mon échec ». Cependant, tous font part du rôle actif des quelques élèves de bon niveau, les autres élèves suivent le débat en essayant de comprendre. Ces interrogations sur le coût de ce nouvel enseignement trouvent une réponse en 2008-2009 chez trois des enseignants. Ils abandonnent totalement l'enseignement de la démonstration systématiquement remplacée par une ROC. Ce faisant, ils pratiquent une sorte de détournement classique, qui consiste à faire piloter son enseignement par la forme que prend l'évaluation certificative plutôt que par l'objectif assigné par l'institution à cette forme d'évaluation. Cependant, dans la réalité de la classe, l'évaluation ROC donne un espace où l'apprentissage de l'argumentation existe.

5. Conclusion

Au final, la cohérence institutionnelle de l'objet ROC nous semble malgré tout réelle. L'organisation de la restitution par le pré-requis semble bien permettre, pour les enseignants interrogés, la mise en place d'une démarche cartésienne, même limitée, chez les élèves : en agissant comme *l'os de Cuvier*[19], le pré-requis permet la reconstruction du discours mathématiques. Les stratégies de démonstration, sur lesquelles les enseignants mettent l'accent, interviennent comme les habiletés, *la mètis*, nécessaires à cette reconstruction et contribuent à la construction du sens chez le résolveur.

Enfin, au-delà de l'exemple étudié ici, nous espérons avoir montré que la construction effective d'un site mathématique permet de réinterroger un exercice, une activité, une notion mathématique, en donnant à l'étude un cadre de référence pertinent, permettant de les resituer dans leur écosystème mathématique. Ainsi, en utilisant cet outil structurant, l'enseignant peut redonner dans son activité de préparation du cours et dans la pratique de classe, cohérence et sens au discours mathématique que les contraintes (liées à l'organisation curriculaire, à l'institution scolaire) peuvent avoir affaibli.

[19] qui aurait permis au célèbre paléontologue la reconstruction d'un mastodonte à partir d'un de ses os [G. Magen, 2006].

Bibliographie

BARBIN, E. & alii (2006), *Histoires de logarithmes***,** Ellipses, Paris.

BROUSSEAU, G. (2001), Les propriétés didactiques de la géométrie, dans *Actes du 2ième Colloque de Didactique des mathématiques (Rethymnon, Crète, Grèce*, Université de Crète, Rethymnon*)*, 67–83.

CASTELA, C. (2008), Approche didactique des processus différenciateurs dans l'enseignement des mathématiques : l'exemple des apprentissages relatifs à la résolution de problèmes, dans *Perspective en didactique des mathématique, Cours de la XIIIème École d'été de didactique de mathématiques* (Eds Rouchier, Bloch, La Pensée Sauvage, Grenoble), 89–114.

CAUTY, A. (1984), Tropes et figures du discours mathématique, *Recherche en Didactique des Mathématiques,* **5.1**, La pensée sauvage, Grenoble, 81–128.

CHEVALLARD, Y. (1985), *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée Sauvage, Grenoble (1991 : 2ème édition).

DAVID, B. (2000), *Équité et arrangements évaluatifs. Certifier en E.P.S.*, INRP, Paris.
http://www.inrp.fr/publications/edition-electronique/documents-travaux-recherche-education/david/equite/accueil.html

DELBOS, G. & JORION, P. (1984), *La transmission des savoirs*, Maison des Sciences de l'Homme, Paris.

DELCROIX, A. & SILVY, C. (2008), Fonction constante et dérivée nulle : un résultat si trivial…, *soumis*.
http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00318449/fr/

DÉTIENNE, M. & VERNANT, J.-P. (1974), *Les ruses de l'intelligence – la mètis des Grecs*, Flammarion, Paris.

DOUADY, R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherche en Didactique des Mathématiques,* **7.2**, 5–31.

DUCHET, P. & ERDOGAN, K. (2006), Pupil's autonomous studying: From an epistemological analysis towards the construction of a diagnosis, dans *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (Ed Bosch), 663–674, Publication électronique.

ERDOGAN, K. (2006), *Le diagnostic de l'aide à l'étude en mathématiques,* Thèse de doctorat, université de Paris 7.

LENTIN, A. & RIVAUD, J. (1958), *Éléments d'algèbre moderne*, Vuibert, Paris.

MAGEN, A. (2001), Le projecteur rhétorique, *Repère,* **45**, 24–54.
www.univ-irem.fr/commissions/reperes/consulter/45**magen**.pdf

MAGEN, G. (2006), *Du radical du sens,* Presses du Lema, Université de Paris 8, Saint-Denis.

MATHERON, Y. (2000), *Une étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée quelques exemples,* Thèse de doctorat, université de Provence.

MAUSS, M. (1950), *Sociologie et anthropologie,* Quadrige/Presse Universitaires de France, Paris (1997 : 7ème édition).

MERCIER, A. (2001), Descartes : le temps de la construction du savoir, *L'Ouvert,* **103**, 14–24.

MERCIER, A. (2002), La transposition des objets d'enseignement et la définition de l'espace didactique, en mathématiques, *Revue Française de Pédagogie,* **141**, 135–171.

MERCIER, A. (2003), Évaluer et comprendre les effets des pratiques pédagogiques. *Conférence au PIREF* (UMR ADEF).
http://www.aix-mrs.iufm.fr/formations/form_formateur/documents/Piref_Mercier.pdf.

MINSKY, M. (1998), *La société de l'esprit,* Inter Editions, Paris.

PERISSOL, A. (2005), *Rapport d'information déposé en application de l'article 145 du règlement par la commission des affaires culturelles, familiales et sociales sur la définition des savoirs enseignés à l'école*, enregistré à la Présidence de l'Assemblée nationale le 13 avril 2005.

WARUSFEL, A. & *alii* (2002), *Mathématiques – cours et exercices, Analyse*, Vuibert, Paris.

CHRISTIAN SILVY & ANTOINE DELCROIX
IUFM de Guadeloupe
Morne FERRET
BP 517
97178 Abymes Cedex (Guadeloupe)
christian.silvy@iufm.univ-ag.fr
antoine.delcroix@iufm.univ-ag.fr

KHEDIDJA KOUIDRI

PROBLÈMES DE L'ENSEIGNEMENT DE L'INTÉGRATION AU DÉBUT DE L'UNIVERSITÉ EN ALGÉRIE

Abstract. Problems for teaching integration at the beginning of university in Algeria – It is indispensable to be able to interpret the organization of a given teaching in terms of choice, in order to be able to identify their consequences on the meaning of the introduced objects and on students' learning. This article first presents the study of the place of area in the teaching of integral calculus at the beginning of university in seven reference textbooks. We bring to light three possible plans of filiations and breaks between the various types of integrals taught and the notion of area, connected to various meanings of the integral calculus. This study leads us to make a praxeological analysis of the types of tasks related to the institutional choices made in first year of university teaching in Algeria, before considering the feeling that students have about integral calculus.

Résumé. Il est indispensable de pouvoir interpréter l'organisation d'un enseignement en termes de choix, pour pouvoir identifier leurs conséquences sur la signification des objets enseignés et sur les apprentissages des étudiants. Cet article présente tout d'abord l'étude de la place de l'aire dans l'enseignement des intégrales simples au début de l'université dans sept manuels de référence. Nous y mettons en évidence trois schémas possibles de filiations et de ruptures entre les différents types d'intégrales simples enseignées et la notion d'aire, liés à différentes significations du calcul intégral. Cette étude nous conduit à effectuer une analyse praxéologique des types de tâches liés aux choix institutionnels effectués en première année d'enseignement universitaire en Algérie, avant d'étudier le rapport personnel des étudiants au calcul intégral.

Mots-clés. Aire, intégrale définie, intégrale indéfinie, intégrale impropre, rapport institutionnel, rapport personnel.

Introduction

Cet article s'appuie sur notre travail de thèse (Kouidri, à soutenir).

Pour comprendre les difficultés de l'enseignement et de l'apprentissage de l'intégrale, nous cherchons d'abord à caractériser les choix de l'enseignement de l'intégrale en première année de deux universités algériennes (étude de cas), en les situant par rapport à différentes organisations possibles de cet enseignement (mises en évidence par une analyse de traités mathématiques). Nous précisons ensuite le rapport institutionnel au concept d'intégrale dans ces universités à l'aide d'une étude praxéologique du polycopié d'enseignement (Osmanov et Khelifati 2003). Enfin nous présentons une expérimentation et une analyse succincte des principales difficultés et erreurs des étudiants après enseignement.

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 14, p. 123 – 151.
© 2009, IREM de STRASBOURG.

1. Une étude d'organisations possibles de l'enseignement de l'intégrale en début d'université en relation avec la notion d'aire

L'origine historique d'une problématique de l'intégration se trouve dans le calcul de l'aire d'une figure géométrique en rapport avec l'aire d'un carré et appelé pour cette raison quadrature. On trouve chez Euclide une première solution à ce problème : la méthode d'exhaustion pour le calcul approché de l'aire d'un disque.

Au 19ième siècle, Cauchy en 1823, puis Riemann en 1854 reviennent à la méthode d'exhaustion, outillés par les concepts de limite et de fonction, pour mettre en place une véritable théorie mathématique. Bourbaki décrit comme suit la portée de la contribution de Cauchy à la théorie de l'intégration :

« En ce qui concerne l'intégration, l'œuvre de Cauchy représente un retour aux saines traditions de l'antiquité et de la première partie du XVII^{e} siècle, mais appuyé sur des moyens techniques encore insuffisants. L'intégrale définie, passée trop longtemps au second plan, redevient la notion primordiale, pour laquelle Cauchy fait adopter définitivement la notation $\int_a^b f(x)dx$ proposée par Fourier au lieu de l'incommode $\int f(x)dx\left[\begin{matrix}x=b\\x=a\end{matrix}\right]$ (parfois employée par Euler) ; et, pour la définir, Cauchy revient à la méthode d'exhaustion, ou comme nous dirions, aux 'sommes de Riemann' (qu'il vaudrait mieux nommer d'Archimède, ou sommes d'Eudoxe). » (Bourbaki. 1976, p. III.65)

Le calcul d'aires est donc historiquement la raison d'être du calcul intégral et du développement de sa théorisation.

Ceci nous conduit à questionner la place qu'occupe cette raison d'être dans l'enseignement de l'intégration au début de l'université.

- Comment cet enseignement intègre-t-il le calcul des grandeurs, tout particulièrement le calcul d'aires ?
- Quelles organisations de cet enseignement sont possibles ?
- Quelles significations prend en conséquence la notion d'intégrale dans ces organisations ?
- Quelles filiations et quelles ruptures résultent de ces différentes organisations possibles ?

Pour répondre à ces questions, nous avons analysé sept ouvrages universitaires que nous prenons comme référence, car certains sont l'œuvre de mathématiciens

reconnus comme Serge Lang, et d'autres sont considérés comme des références pour les enseignants algériens[1].

Il s'agit des ouvrages suivants numérotés de 1 à 7 : (1) Gouyon (1958), (2) Cagnac, Ramis et Commeau (1963), (3) Bass (1964), (4) Lang (1964, réédité en 2000), (5) Lelong-Ferrand et Arnaudiès (1977), (6) Lehning (1985), (7) Arnaudiès et Fraysse (1988).

1.1. À qui s'adressent ces ouvrages ?

Les ouvrages 1, 2, 5, 6, 7 concernent l'enseignement des mathématiques dans les classes préparatoires aux grandes écoles[2] et aux sections scientifiques du premier cycle d'université.

Le premier ouvrage, Gouyon (1958), a été écrit avant un changement de programme important introduisant des notions de topologie et de mathématiques modernes : ce changement de programme pour les universités en France a eu lieu dans les années 1960.

L'ouvrage 5 de Lelong-Ferrand et Arnaudiès (1977) se place clairement par rapport aux nouveaux programmes de l'époque.

« […] Nous avons tenu à donner au lecteur un exposé moderne aussi complet et aussi clair que possible des nouveaux programmes de mathématiques spéciales et du premier cycle universitaire. […] Cet ouvrage est un livre de base, qui servira aux étudiants tout au long de leurs études et auxquels ils pourront se reporter. En particulier ils y trouveront des éléments de topologie nécessaires à la suite de leurs études. » (op. cité, Avant propos)

Quant à l'ouvrage 7 d'Arnaudiès et Fraysse (1988), c'est encore aujourd'hui un ouvrage recommandé pour la préparation de l'agrégation de mathématiques en France.

L'ouvrage 3, de Bass (1964), s'adresse aux étudiants d'école d'ingénieurs :

« Le présent ouvrage contient, avec quelques compléments, la matière des cours de mathématiques de l'École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'École

---

[1] Rappelons que, dans la plupart des universités algériennes, l'enseignement des mathématiques se fait en français.

[2] Les classes préparatoires aux grandes écoles préparent, en 2 ou 3 ans, les élèves aux concours d'entrée dans les grandes écoles et les écoles d'ingénieurs. Ces classes, situées dans les lycées, sont accessibles avec un baccalauréat ou un niveau équivalent, après acceptation du dossier par le chef d'établissement. Les manuels étudiés visent ici les classes préparatoires scientifiques de la filière « mathématiques, physique, sciences de l'ingénieur » selon la dénomination actuelle.

normale Supérieure des Mines de Paris. […] Le programme de ce cours devait être choisi de telle sorte que, dans un cadre raisonnable, un futur ingénieur y trouve l'essentiel des mathématiques dont il aura besoin à l'école et peut-être plus tard, présentées dans un langage qui ne le déconcerte pas. » (Op. cité p. VII)

Comme Lelong-Ferrand et Arnaudiès (1977), Bass mentionne les changements dans l'enseignement des mathématiques pour justifier certaines modifications de la deuxième édition, la troisième édition étant peu différente.

« En cinq ans, l'enseignement des mathématiques a subi une évolution rapide. Bien que les programmes de l'enseignement secondaire n'aient pas dans leur ensemble reçu des modifications sérieuses, les programmes propédeutiques, et plus particulièrement ceux des classes de mathématiques spéciales, ont été transformés. » (op. cité p. XI)

Enfin, l'ouvrage 4 (Lang 1964) se présente comme un ouvrage d'enseignement des notions de base en analyse.
«The purpose of a first course in calculus is to teach the student the basic notions of derivative and integral, and the basic techniques and applications which accompany them. The very talented students, with an obvious aptitude for mathematics, will rapidly require a course in functions of one real variable, more and less as it is understood by professional mathematicians. This book is not primarily addressed to them (although I hope they will be able to require from it a good introduction at an early age).
[…] Rigor. This does not mean that so-called rigor has to be abandoned. » (op. cité, in Foreword)

1.2. Ordre d'apparition des différents types d'intégrales dans les ouvrages universitaires

L'étude de ces sept ouvrages permet de dégager trois types d'ordre possibles pour l'apparition des différents types d'intégrales enseignées.

Ordre 1 : intégrale définie → intégrale indéfinie (primitive) → intégrale impropre (Ouvrages 1, 3, 5 et 7).
Seul l'ouvrage 5 utilise strictement les appellations intégrales définies, indéfinie et impropre (ou généralisée). Les autres parlent d'intégrale ou d'intégrale simple, de primitive. Tous les ouvrages parlent d'intégrales impropres ou généralisées : le plus souvent les deux termes sont présents.
Dans l'ouvrage 1 (Gouyon, 1958), même si les vocables « intégrales indéfinies » et « intégrales généralisées (ou impropres) » sont absents, celui de « primitive » et d'« extensions de la notion d'intégrale définie » les remplacent.

Notons qu'il semble que l'appellation « intégrale indéfinie » a tendance à être supplantée dans les manuels au profit de la notion fondamentale de primitive.

L'ouvrage 7 (Arnaudiès et Fraysse, 1988) parle d'intégrale de Riemann comme cas particulier de l'intégrale de Lebesgue, de primitive et d'intégrale généralisée.

Ordre 2 : intégrale indéfinie → intégrale définie → intégrale impropre (Ouvrages 2 et 4).
Ordre 3 : Intégrale propre → intégrale impropre (Ouvrage 6).

Ordre	Ordre 1 définie → indéfinie → impropre	Ordre 2 indéfinie → définie → impropre	Ordre 3 propre → impropre
Ouvrage	1, 3, 5, 7	2, 4	6

Tableau 1 : Les différents ordres d'apparition des trois intégrales.

L'intégrale impropre ou généralisée est toujours enseignée en dernier, quel que soit l'ouvrage considéré. Dans l'ordre 1, majoritaire dans l'ensemble choisi de référence, l'intégrale indéfinie apparaît comme un outil pour le calcul de l'intégrale impropre, alors que dans l'ordre 2, l'intégrale définie permet de répondre à la question du calcul de l'intégrale dépendant de la borne supérieure, qui est pour Lang (ouvrage 4) une primitive ou intégrale indéfinie.

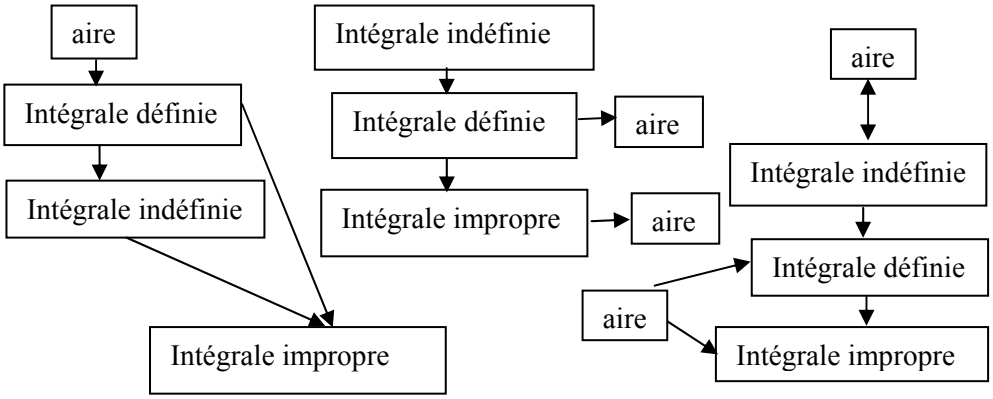
Nous examinons maintenant comment les enseignements sont organisés dans ces ouvrages, en dégageant d'abord certaines filiations puis les ruptures entre les trois intégrales, et entre les trois intégrales et la notion d'aire.

1.3. La notion d'aire dans les différentes organisations possibles de l'enseignement des intégrales

Nous résumons l'étude détaillée faite dans notre thèse (Kouidri, à soutenir) dans trois schémas de base, dont le premier est nettement majoritaire puisqu'il représente 5 ouvrages de références parmi les sept étudiés. Les deux autres schémas correspondent respectivement à l'ouvrage (2) de Cagnac, Ramis et Commeau (1963) et à l'ouvrage (4) de Lang (1964).

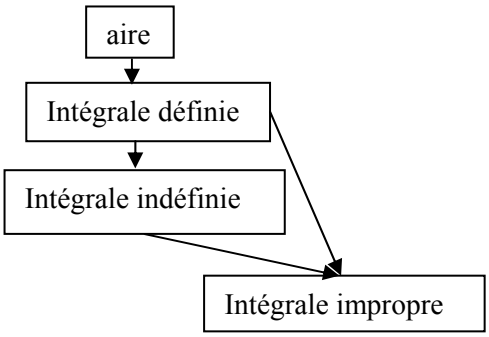
Voici ces schémas.

Schéma 1 (1, 3, 5, 6, 7) Schéma 2 (2) Schéma 3 (4)



Nous allons maintenant commenter ces schémas pour préciser les relations entre les différentes notions, relations que nous présenterons essentiellement en termes de filiation.

Relations dans le schéma 1



Prenons l'exemple de l'ouvrage 3 (Bass, 1964).

• Aire → intégrale définie

L'aire donne sa signification à l'intégrale définie d'autant plus que tout calcul d'aires se ramène au calcul d'une intégrale définie.

« La notion d'intégrale définie peut être rattachée à la notion intuitive d'aire. […] Il est donc nécessaire de donner une définition précise de la notion d'aire, et si possible une définition qui soit susceptible de se traduire par des méthodes pratiques de mesure des aires de courbes compliquées. » (op. cité, p. 140)

Pour Bass, définir la notion d'aire revient à travailler sur l'intégrale de Riemann :

« Nous nous occuperons surtout de préciser la définition de l'aire, sous la forme de *l'intégrale de Riemann.* Il arrive dans la pratique que l'intégrale de Riemann ne soit pas d'un emploi commode, et *l'intégrale de Lebesgue,* qui en est en un certain sens une généralisation, se prête mieux aux calculs concrets. Mais il n'est pas nécessaire de connaître *la théorie* de l'intégrale de Lebesgue pour savoir mesurer des intégrales. Aussi nous limiterons-nous à l'intégrale de Riemann, qui sera suffisante pour toutes les questions que nous aurons à étudier. » (op. cité, p. 140)

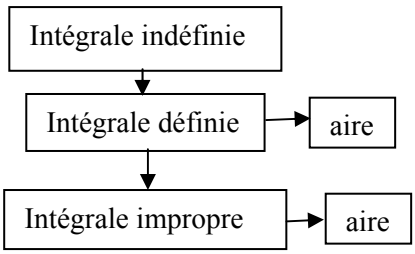
• Intégrale définie → intégrale indéfinie (primitive)

L'intégrale définie est un outil pour définir l'intégrale indéfinie comme intégrale dépendant de la borne supérieure et pour démontrer que cette intégrale est une fonction primitive. Elle a aussi un autre rôle : celui de définir de nouvelles fonctions primitives et d'élargir ainsi le catalogue des fonctions connues. Et inversement, l'intégrale indéfinie outille le calcul exact d'une intégrale définie.

• Intégrale définie → intégrale impropre

L'intégrale impropre ou généralisée est présentée comme une extension de l'intégrale définie. Elle lui emprunte certaines propriétés et certaines méthodes de calcul, mais perd certaines autres propriétés et développe des méthodes spécifiques de calcul qui doivent inclure la démonstration de son existence.

Relations dans le schéma 2



• Intégrale indéfinie (primitive) → intégrale définie

L'intégrale indéfinie est seulement un outil pour le calcul pratique de l'intégrale définie (c'est-à-dire le calcul exact), via la formule de Newton-Leibniz (*f* étant une fonction continue sur un segment [*a*, *b*], et *F* une primitive quelconque de *f*, alors

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)).$$

• Intégrale définie → aire

L'aire se réduit à être l'interprétation géométrique de l'intégrale simple et non à la fonder. Mais cette interprétation est l'occasion de présenter des éléments d'une théorie de la mesure.

« 90. Interprétation géométrique de l'intégrale simple.

1° Notion d'aire. On démontre qu'il est possible d'attacher à tout domaine polygonal plan D un nombre réel positif A, dit aire de D, vérifiant les deux axiomes suivants :

[Axiome1] les aires de deux domaines égaux sont égales.

[Axiome 2] si A_1 et A_2 sont les aires de deux domaines disjoints D_1 et D_2, l'aire du domaine $D_1 \cup D_2$ est $A_1 + A_2$.

En ajoutant une convention d'unité (le carré dont le côté a pour longueur 1 a pour aire 1) on peut alors déterminer l'aire de tout domaine polygonal.

Considérons un domaine du plan D. Nous supposons qu'on peut l'enfermer dans un rectangle assez grand, et qu'il contient l'intérieur de tout polygone dont il contient la frontière. Nous dirons qu'un tel domaine D est quarrable si l'ensemble des aires des domaines polygonaux contenant D et l'ensemble des aires des domaines polygonaux contenus dans D sont adjacents, c'est-à-dire si, quel que soit le nombre positif ε, il existe $Q \supset D$ et $q \subset D$ tels que la différence des aires des domaines polygonaux Q et q soit inférieure à ε. L'aire de D est par définition la borne A commune aux deux ensembles adjacents. On vérifie que cette aire obéit aux deux axiomes 1 et 2.

Remarque – D est quarrable si et seulement si sa frontière peut être enfermée dans un domaine polygonal d'aire aussi petite que l'on veut.

2° Théorème. F étant une fonction réelle de variable réelle, continue et positive sur $[a, b]$, soit D le domaine défini, dans le plan rapporté à un repère xOy, comme l'ensemble des points (x,y) tels que $x \in [a, b]$; $y \in [0, f(x)]$, alors, D est quarrable et si le repère est orthonormé son aire est

$$A = \int_a^b f(x)dx .$$

[…] 1er Cas : Le repère est orthonormé.

[…] 2e Cas : Le repère n'est pas orthonormé.

[…] 2e : Généralisation. – a) $a < b$ et $f(x) < 0$. […]

$f(x)$ n'a pas de signe fixe sur $[a, b]$.» (Cagnac, Ramis et Commeau, 1963, pp. 163-166).

• Intégrale définie → intégrale impropre

Comme dans les ouvrages relevant du schéma 1, l'intégrale généralisée apparaît comme une extension de l'intégrale définie. On parle d'abord d'extension de l'intégrale définie avant d'introduire tardivement le terme d'« intégrale généralisée ».

• Intégrale impropre → aire

Comme pour l'intégrale définie, l'aire est une interprétation géométrique de l'extension de l'intégrale définie : cela permet de faire remarquer, à propos de

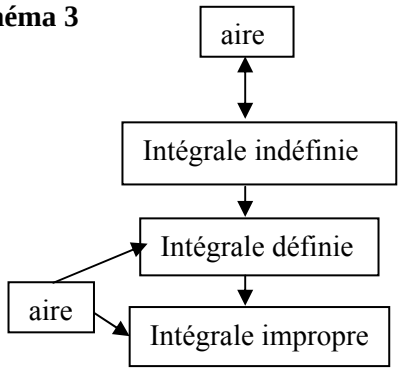
l'exemple de référence $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ ($\alpha > 0$, $a > 0$) qu'« un domaine dont une dimension est infinie peut néanmoins avoir une aire finie ». Il y a ainsi dans cette organisation une forte filiation entre l'intégrale définie et l'intégrale généralisée.

« II. Extension de la notion d'intégrale simple

[…] En résumé, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ n'est convergente que si $\alpha > 1$, et l'on écrit, pour $\alpha > 1$, $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}$. »

Le résultat précédent peut s'interpréter géométriquement. Le graphe de la fonction $y = \frac{1}{t^\alpha}$ étant tracé (fig. 66), l'intégrale $\int_a^x \frac{dt}{t^\alpha}$ est l'aire comprise entre cette courbe et l'axe O*x* d'une part, entre les ordonnées A'A et M'M des points qui ont pour abscisses respectives *a et x* d'autre part. Lorsque M s'éloigne indéfiniment, cette aire a une limite finie dans le cas où α est plus grand que 1 ; cette aire devient infinie lorsque α est inférieur ou égal à 1. On voit ainsi qu'un domaine dont une dimension est infinie peut néanmoins avoir une aire finie. » (op. cité, p. 348).

Relations dans le schéma 3



Regardons de plus près les relations représentées dans le schéma 3 (organisation de Lang 1964).

• Aire $\leftrightarrow$intégrale indéfinie

Dans cet ouvrage, on cherche à résoudre quasi simultanément deux problèmes : (1) étant donnée une fonction *f*, trouver une primitive de cette fonction, (2) étant donnée une fonction *f* positive, donner une définition de l'aire sous la courbe de cette fonction.

« In this chapter, we solve, more or less simultaneously the following problems:
(1) Given a function $f(x)$, find a function $F(x)$ such that $F'(x) = f(x)$.

This is the inverse of differentiation, and is called integration.
(2) Given a function $f(x)$.which is ≥ 0, give a definition of area under the curve $y = f(x)$.which does not appeal to geometric intuition. » (op. cité, p. 287)

La réponse au problème (2) est donnée ainsi dans Lang : sur un intervalle $[a, b]$ et étant donné $x \in [a, b]$, l'intégrale indéfinie $F(x)$ d'une fonction $f(x)$ est la mesure numérique de l'aire sous la courbe $y = f(x)$ entre a et x.

« IX, §3. AREA
Let $a < b$ be two numbers and let $f(x)$ be a continuous function defined on the interval $a \leq x \leq b$. This closed interval is denoted by $[a, b]$.
We wish to find a function $F(x)$ which is differentiable in this interval, and such that $F'(x) = f(x)$.
In this section, we appeal to our geometric intuition concerning area. We assume that $f(x) \geq 0$ for all x in the interval. We let: $F(x)$ = numerical measure of the area under the graph of $y = f(x)$ between a and x. The following figure illustrates this. » (op. cité, p. 292-293)

Puis il démontre que $F(x)$ comme aire sous la courbe est bien une primitive de f (problème (1)).

« Theorem 3.1. The function $F(x)$ is differentiable, and its derivative is $f(x)$. » (op. cité, p. 293)

• Intégrale indéfinie → intégrale définie

Chez Lang (1964), l'introduction de l'intégrale indéfinie (via l'intégrale dépendant de l'une de ses bornes) comme aire sous la courbe « variable » permet de poser le problème de l'existence de l'intégrale.

$$\textbf{Aire} \rightarrow \begin{cases} \textbf{Intégrale définie} \\ \\ \textbf{Intégrale impropre} \end{cases}$$

Lang introduit l'intégrale impropre en posant le problème du calcul de l'aire sous la courbe de la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{-1}{2}}$ sur l'intervalle]0, 1[. Pour cela il se ramène au calcul de l'intégrale définie $\int_c^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx$ avec $c \in]0, 1[$, c'est-à-dire au

calcul de l'aire sous la courbe de *f* entre c et 1. Puis il définit la notion d'intégrale impropre.

« X, §4. Improper integrals

Exemple 2. However, it is remarkable that an entirely different situation will occur when we consider the area under the curve $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{\frac{-1}{2}}$. We take x > 0, of course.

Let $0 < c < 1$. We compute the integral $\int_c^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx = 2 - 2\,c^{1/2}$

Then as $c \to 0$, $2\,c^{1/2} \to 0$ and therefore $\int_c^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx \to 2$ […]

Definition. If the limit $\lim_{c \to a} F(c)$ exits, then we say that the improper integral $\int_a^b f(x)dx$ exits, and then we define $\int_a^b f(x)dx = \lim_{c \to a} \int_c^b f(x)dx = F(b) - \lim_{c \to a} F(c)$. »
(op. cité, p. 330-331)

Ce que nous avons écrit pour le schéma 1, à propos des relations entre intégrale impropre et intégrale définie en particulier sur les méthodes de calcul, reste valable ici.

1.4. Les ruptures liées aux trois organisations possibles de l'enseignement de l'intégration

Une première rupture fondamentale entre intégrale indéfinie et les deux autres intégrales est que l'intégrale indéfinie est une fonction alors que les deux autres intégrales représentent, si elles existent, un nombre, mesure d'une grandeur, le plus souvent d'une aire. On peut dire que le calcul d'une intégrale indéfinie équivaut à la résolution d'une équation différentielle élémentaire.

Cette rupture de signification entre intégrale indéfinie (fonction) d'un côté et intégrales définie et impropre (nombre, lié à la notion d'aire) est rendue potentiellement visible par les ostensifs[3] qui les représentent : absence ou présence

[3] Bosch et Chevallard (1999) distinguent deux types d'objets : les objets *ostensifs*, les objets *non ostensifs*.
Un « *objet ostensif* – du latin *ostendre*, 'montrer, présenter avec insistance' – pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. » (op.cité, p. 90)

de bornes pour le signe somme « ∫ », ce dernier signe étant commun aux trois intégrales.

Il y a une rupture de signification entre intégrale définie et intégrale impropre dans les calculs (de grandeurs), puisqu'il est nécessaire de se poser le problème de la convergence seulement dans le cas du calcul d'une intégrale impropre. Mais les ostensifs du calcul sur un intervalle (*a*, *b*), *a* et *b* réels, sont les mêmes : « Calculer $\int_a^b f(x)dx$ ». Il faut donc, dans ce cas et si rien d'autre n'est précisé, étudier si la fonction *f* est bornée sur l'intervalle *(a, b)*[4], pour différencier une intégrale définie d'une intégrale impropre (ou généralisée). Soulignons que, le plus souvent dans l'enseignement effectif, on guide les étudiants pour ce calcul en ne le proposant que pour une intégrale définie ou une fois démontrée la convergence de l'intégrale impropre.

L'intégrale impropre est présentée dans tous les ouvrages que nous avons consultés comme une extension de l'intégrale définie, d'où la filiation institutionnelle entre l'intégrale définie et l'intégrale impropre. Par là, elle emprunte à l'intégrale définie certaines propriétés et certaines méthodes de calcul, mais aussi perd certaines autres propriétés et développe des méthodes spécifiques de calcul qui doivent inclure la démonstration de son existence pour les fonctions qui ne sont pas localement intégrables. En cela, elle est en rupture avec l'intégrale définie.

Soulignons le rôle central dans la théorie de Riemann de l'intégrale dépendant de l'une de ses bornes pour établir des liens entre primitive (ou intégrale indéfinie) et intégrale définie (Théorème de Newton-Leibniz) et pour définir la convergence ou la divergence d'une intégrale impropre : en cela l'ouvrage de Lang (1964) est exemplaire puisque son organisation (schéma 3) souligne ce rôle.

Pour le schéma 1 (majoritaire), la notion d'aire se rattache seulement à l'intégrale définie. Dans le schéma 2, la notion d'aire se rattache aussi bien à l'intégrale définie qu'à l'intégrale impropre (ou généralisée) mais apparaît comme une application du calcul intégral ou comme une interprétation géométrique d'une

---

« Les objets *non ostensifs* sont alors tous ces 'objets' qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence – sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être évoqués ou invoqués par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours). » (*Ibid*.)
Dans les usages humains, les objets ostensifs se distinguent des objets non ostensifs par le fait qu'ils peuvent être concrètement manipulés.

[4] Condition suffisante.

intégrale simple. Et enfin, dans le schéma 3, la notion d'aire se rattache aux trois intégrales. La rupture de signification entre aire et intégrale diffère donc selon les choix des auteurs conduisant à des organisations différentes de l'enseignement.

2. Analyse didactique du rapport institutionnel au concept d'intégrale en début d'université : le cas de l'université de Boumerdes (Algérie)

Dans notre travail de thèse, nous nous sommes placée dans le cadre de la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1999) pour analyser l'enseignement et l'apprentissage du concept « intégrale » dans l'institution « Enseignement des mathématiques en tronc commun d'université pour les futurs ingénieurs dans les deux universités de Boumerdes et Djelfa en Algérie » que nous nommons ***A*** par la suite.

Cette théorie considère que, en dernière instance, toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T, au moyen d'une technique τ, justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie Θ. En bref, elle part du postulat que toute activité humaine met en œuvre une organisation que Chevallard note $[T/\tau/\theta/\Theta]$ et nomme praxéologie, ou organisation praxéologique. L'analyse praxéologique nous permet de caractériser le rapport institutionnel au concept d'intégrale dans l'institution ***A***.

Avant d'entreprendre l'étude des praxéologies mathématiques enseignées et apprises, nous situons les choix d'enseignement de l'intégrale dans ***A*** par rapport aux organisations possibles dégagées dans la partie 1, car ce sont ces choix qui conditionnent les praxéologies enseignées.

La caractérisation du rapport institutionnel au concept d'intégrale dans ***A*** s'appuie ici sur l'analyse des 140 pages consacrées à l'intégration dans la brochure d'enseignement (Osmanov et Khelifati 2003) de l'université de Boumerdes[5]. Cette brochure, en même temps :

- sert de support pour le cours de l'enseignant chargé de cours ;
- fournit une liste d'exercices pour les enseignants de TD ;
- est un outil de travail autonome pour les étudiants à qui il fournit un rappel des définitions et principaux théorèmes ainsi qu'une liste d'exercices avec réponses et exemples de corrections détaillées.

[5] Cette brochure est également utilisée par les enseignants de Djelfa dont l'université vient juste, à l'époque de notre travail, d'être créée.

2.1. Caractérisation des choix effectués dans l'institution *A*

La brochure ne s'intéresse, comme la majorité des ouvrages étudiés dans la partie 1, qu'à l'intégration des fonctions d'une variable réelle.

L'ordre des enseignements dans la brochure est celui du schéma 2 :
Indéfinie → définie → impropre, ordre minoritaire dans les traités où l'ordre majoritaire est : Aire → définie → indéfinie → impropre.

L'intégrale indéfinie est un outil pour le calcul de l'intégrale définie (c'est-à-dire le calcul exact), via la formule de Newton-Leibniz, l'intégrale impropre apparaissant comme une extension de l'intégrale simple, comme dans tous les traités consultés.

La notion d'aire n'est pas absente, mais n'apparaît que comme application de l'intégrale définie.

Les principaux objets d'étude sont les calculs d'intégrale indéfinie et définie, puis, dans le cas des intégrales généralisées, l'étude de la convergence de ces dernières. Parmi les exercices, ceux à caractère plus technique que théorique (selon l'appellation des auteurs de la brochure) sont prédominants par rapport aux exercices à caractère plus théorique que technique, et ceux de calcul d'intégrales (qu'elles soient indéfinies, définies ou impropres) sont majoritaires.

La conception majoritaire de l'intégrale indéfinie de f est « une primitive sur un intervalle ».

Comme dans les traités, l'intégrale dépendant de la borne supérieure permet d'établir la relation fondamentale entre intégrale indéfinie et intégrale définie (Théorème de Newton-Leibniz), relation qui attribue à la recherche de primitive ou d'intégrale indéfinie un objet principal : le calcul d'une intégrale définie.

Contrairement à l'ouvrage de Bass (1964), on ne trouve pas de trace flagrante, dans la brochure, du second rôle de l'intégrale indéfinie : celui de définir de nouvelles fonctions primitives et d'élargir ainsi le catalogue des fonctions connues.

Pour l'intégrale définie, le genre de tâches privilégié est le calcul. Mais seul le calcul exact de l'intégrale définie est présent, la place du calcul approché étant simplement évoquée lors d'un travail sur l'approximation par encadrement[6].

---

[6] Notre travail de thèse (Kouidri, à soutenir) montre la variabilité de la présence du calcul approché dans les ouvrages étudiés en 1, cf. tableau ci-dessous :

Place du calcul approché	importante	réduite	Absente
ouvrage	3, 6	1, 2, 5	4, 7

L'aire est vue comme application de l'intégrale de Riemann et non pas comme un fondement :

« L'intégrale définie (de Riemann) est un puissant outil mathématique dont les applications sont nombreuses, telles que le calcul des aires, le travail d'une force, le calcul de limites des suites *etc*. » (p. 61)

Comme dans la plupart des traités de référence étudiés dans la partie 1 :

- l'intégrale généralisée apparaît comme une extension de l'intégrale définie
- les deux termes « impropre » et « généralisée » se côtoient.
- le découpage en intégrales de 1^{ere} espèce et de 2eme espèce est respecté, dans l'ordre historique (González-Martín 2004) : 1^{ere} espèce → 2eme espèce. Mais, contrairement aux ouvrages de référence où ces termes n'apparaissent pas, ils sont ici objets d'enseignement.

Rappelons que la 1^{ere} espèce se réfère à l'intervalle d'intégration où l'une des bornes au moins est infinie, la 2eme espèce se référant à une fonction à intégrer non bornée sur un intervalle borné.

La brochure ne laisse aucune place, dans l'étude des intégrales impropres, à l'interprétation géométrique, ni à la représentation graphique de l'aire sous la courbe, aucun graphique n'étant présent dans cette étude. Le calcul approché est également complètement absent.

2.2. Praxéologies effectivement présentes dans l'institution *A*

L'étude de la brochure nous a permis d'identifier 5 praxéologies effectivement présentes dans l'institution ***A***. Nous ne les présentons ci-après que sous la forme d'un triplet [T/τ/θ], la théorie Θ étant la théorie de l'intégration de Riemann, la même pour toutes ces organisations mathématiques.

1. Organisation mathématique du calcul de l'intégrale indéfinie

Type de tâches T_1 : Calculer $\int f(x)dx$

Technique τ_1 : rechercher une primitive en utilisant une méthode d'intégration adéquate.

Eléments technologiques θ1 : propriétés fondamentales de l'intégrale indéfinie, table des primitives usuelles et méthodes de calcul des primitives.

2. Organisation mathématique du calcul de l'intégrale définie

Type de tâches T_2 : Calculer $\int_a^b f(x)dx$

Technique τ_2 : rechercher une primitive F de f ; calculer $F(b) - F(a)$

Eléments technologiques θ_2 : propriétés fondamentales des intégrales définies, formule de Newton-Leibniz, table des intégrales indéfinies usuelles, méthodes de calcul adaptées de l'intégrale indéfinie.

3. Organisation mathématique du calcul de l'« aire sous la courbe »

Type de tâches T_3 : Calculer l'aire de la surface limitée par deux courbes d'expressions $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$.

Technique $\tau 3$: Ecrire $\sigma = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$, puis chercher une primitive F de $f_1 - f_2$; calculer $F(a)-F(b)$.

Eléments technologiques θ_3 : θ_2 + théorème faisant le lien entre intégrale définie et aire.

4. Organisation mathématique du calcul d'une intégrale impropre (ou généralisée)

Type de tâches T_4 : Calculer $\int_a^b f(x)dx$ $a < b$; $a, b \in \overline{R}$ ou établir sa divergence

Technique τ_4 : déterminer les points de singularité de f ; partager l'intervalle d'intégration en autant d'intervalles que nécessaires ; écrire que l'intégrale est égale à la somme des limites d'autant d'intégrales dépendant d'une de leur borne que nécessaires ; chercher une primitive sur chaque intervalle ; calculer les limites de chaque primitive ; si ces limites sont finies, les ajouter, sinon conclure à la divergence.

Eléments technologiques θ_4 : intégrale dépendant de sa borne supérieure, méthodes de calcul des intégrales définies ; propriétés fondamentales (relation de Chasles et propriétés de linéarité) des intégrales impropres ; limites de fonctions.

5. Organisation mathématique de l'étude de la nature d'une intégrale impropre

Type de tâches T_5 : Etudier la nature d'une intégrale impropre

Technique τ_5 :

- si la fonction est positive sur l'intervalle d'intégration, essayer de majorer (respectivement minorer) l'intégrale $\int_a^r f(x)dx$ (resp $\int_s^b f(x)dx$), ou de majorer la fonction f par une fonction g dont l'intégrale existe sur le même intervalle, ou de remplacer la fonction f par un équivalent g au voisinage du point de singularité dont l'intégrale existe sur le même intervalle ;
- sinon étudier l'intégrale de la valeur absolue de la fonction sur le même intervalle. Éléments technologiques θ5 : critères de convergence et notion de convergence absolue.

2.3. Règles de contrat et rapport institutionnel dans *A*

C'est surtout dans les exercices (et pas seulement dans le cours) que se forge le rapport institutionnel à un objet de savoir. L'étude de ces derniers nous a non seulement conduite à décrire les précédentes organisations mathématiques, mais aussi à formuler l'hypothèse de l'existence des 4 règles de contrat suivantes :

R1 : « Lors du calcul de $\int f(x)dx$, on doit déterminer l'intervalle sur lequel l'intégrale existe seulement dans le cas où cela est explicitement demandé dans l'énoncé. »

R2 : « Pour calculer l'intégrale indéfinie d'une fonction *f(x),* il suffit de chercher une primitive *F(x),* puis de lui ajouter une constante C. »

R3 : « Lors du calcul de $\int_a^b f(x)dx$, l'étudiant doit vérifier l'existence de l'intégrale sur [a, b] seulement dans le cas où cela lui est explicitement demandé. »

R4 : « L'étudiant n'a pas la responsabilité de se demander si la fonction est intégrable ou non sur l'intervalle d'intégration. »

Ces règles de contrat participent à la mise en place du rapport institutionnel dans ***A*** et font apparaître le problème important suivant.

Les deux types de tâches autour desquelles s'organisent les praxéologies existant effectivement autour de l'intégrale impropre rendent incontournables les relations entre intervalle d'intégration et fonction à intégrer. Cependant, la notion topologique d'intervalle, associée soit à l'existence d'un ensemble de primitives pour l'intégrale indéfinie, soit à l'intégrabilité d'une fonction pour l'intégrale définie, fondamentale pour l'intégration, est absente des praxéologies existant effectivement dans ***A***.

3. Étude des conséquences de ces choix institutionnels sur le rapport personnel des étudiants au concept d'intégrale

L'expérimentation conduite a eu lieu en mai 2006 à l'université de Boumerdes, où nous enseignions l'année précédente, et au centre universitaire de Djelfa où nous enseignons actuellement. Signalons que depuis la rentrée suivante (septembre 2006), l'étude de l'intégrale impropre a été, dans le cadre de la mise en place du LMD (licence, master, doctorat) dans les universités algériennes, repoussée en 2ème année d'université (L2). La population totale à laquelle a été proposé le test comporte 108 étudiants dont 57 à Djelfa et 51 à Boumerdes.

L'objet principal de cette expérimentation était de nous permettre d'évaluer le rapport personnel des étudiants de fin de 1ère année d'université aux objets suivants : intégrales indéfinies, définies et impropres, au travers de leur maîtrise des techniques de calcul enseignées et des justifications associées. Autrement dit, de mesurer l'impact des choix institutionnels sur les savoir-faire des étudiants face au calcul intégral.

Nous avons fait le choix de recueillir des productions écrites. Pour cela, nous avons élaboré quatre exercices à proposer dans des conditions de devoir surveillé, situation propice à l'observation de l'assujettissement des étudiants au rapport institutionnel (Coppé, 1993).

3.1. Raisons du choix et caractérisation des exercices proposés

Nous dirons qu'une question est *routinière* lorsque sa résolution, attendue par l'institution, consiste en une procédure se ramenant à une suite de pas, clairement identifiée dans cette institution. Au contraire, une question pour laquelle les étudiants ne disposent pas de procédure connue et doivent donc chercher par eux-mêmes comment y répondre sera qualifiée de *non-routinière*.

L'exercice 1 propose des spécimens du type de tâches T1 routinier dans A : Calculer $\int f(x)dx$.

Ce premier exercice a pour but d'évaluer la maîtrise par les étudiants du calcul de l'intégrale indéfinie. Il comporte le calcul de 4 intégrales indéfinies dont 3 correspondent à des méthodes typiques d'intégration dans A.

Dans l'exercice 2 il s'agit d'évaluer le rapport institutionnel dans A aux intégrales impropres, en position d'étudiant. Pour ce faire nous avons choisi de proposer des spécimens d'un type de tâches non-routinier dans A : reconnaître, dans une liste

d'intégrales $\int_a^b f(x)dx$ $a < b$ et $a, b \in \overline{R}$, les intégrales qui sont impropres. Les étudiants sont mis pour cet exercice dans une situation de rupture de contrat.

L'exercice 3 a pour but d'évaluer la maîtrise par les étudiants des praxéologies enseignées pour les types de tâches routinières dans l'institution A, T4 : calculer une intégrale impropre ou montrer sa divergence et T5 : étudier la nature d'une intégrale impropre. Les 3 intégrales proposées dans cet exercice sont deux intégrales de 1ère espèce, l'une convergente, l'autre divergente, et une intégrale de 2ème espèce convergente.

Dans l'exercice 4 nous étudions quel lien est fait par les étudiants entre une aire associée à la courbe représentative d'une fonction f et l'intégrale impropre : $\int_a^b f(x)dx$ $a < b$ et $a, b \in \overline{R}$. En effet, nous avons constaté, dans certains ouvrages de référence (Cagnac, Ramis et Commeau 1963, Lang 1964), la forte présence de la représentation graphique de l'intégrale généralisée alors qu'elle est absente dans d'autres ouvrages, comme dans la brochure étudiée.

De plus, González-Martín et Camacho (2004) montrent que de nombreuses difficultés, dans la construction de la connaissance de l'intégrale impropre d'étudiants espagnols de 1ère année d'université, relèvent de leur difficulté à articuler les différents registres de représentation sémiotique au sens de Duval (1993) : le registre algébrique et le registre graphique.

Pour Duval (1993) la compréhension d'un concept passe par l'utilisation et la coordination de différents registres de représentation sémiotique. Il définit « les représentations sémiotiques comme des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement » (*ibid*. p. 39). Pour lui, « les représentations sémiotiques ne sont pas seulement des moyens d'extériorisation des représentations mentales pour des fins de communication, mais elles sont également essentielles pour l'activité cognitive de la pensée » (*ibid*., p. 39). Elles jouent un rôle dans le développement des représentations mentales, dans l'accomplissement de différentes fonctions cognitives (objectivation, calcul, *etc*.), ainsi que dans la production même des connaissances. Duval distingue trois types d'activités : la formation d'une représentation identifiable comme appartenant à un registre donné, le traitement et la transformation d'une représentation à l'intérieur du registre où elle a été créée, et enfin la conversion, c'est-à-dire la transformation d'une représentation sémiotique d'un registre dans un autre. Il souligne l'importance de la troisième activité comme un passage nécessaire pour permettre la coordination des

registres attachés à un même concept. Il soutient de plus que la possibilité de conversion est une des conditions essentielles de la conceptualisation : « la compréhension (intégrative) d'un contenu conceptuel repose sur la coordination d'au moins deux registres de représentation, et cette coordination se manifeste par la rapidité et la spontanéité de l'activité cognitive de conversion » (*ibid*. p. 51).

Le type de tâches proposé dans l'exercice 4 : associer des graphiques aux intégrales impropres qui leur correspondent, est non-routinier. Il exige, pour être résolu, la coordination des deux registres algébrique et graphique.

3.2. Texte des exercices[7]

Exercice 1 : *Trouver les intégrales suivantes*

$I_1 = \int \frac{dx}{(2x-1)^2}$, $I_2 = \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$, $I_3 = \int x^2 e^x dx$, $I_4 = \int \frac{(1-\cos x)\sin x}{\cos^2 x} dx$

Exercice 2 : *Lesquelles des intégrales suivantes sont impropres ? Pourquoi ?*

$I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$; $I_2 = \int_0^2 \frac{dx}{2x-1}$; $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1} dx$; $I_4 = \int_0^2 \frac{2x dx}{\sqrt{|x^2-x|}}$;

$I_5 = \int_1^2 \frac{1}{2x-3} \ln(x-1) dx$; $I_6 = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx$

Exercice 3 : *Etudier la nature des intégrales impropres suivantes :*

$I_8 = \int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$, $I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+1} dx$, $I_9 = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

Exercice 4 :

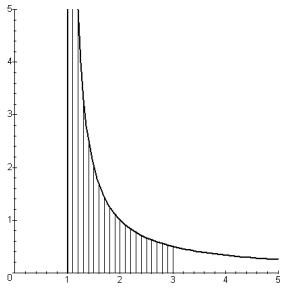


Figure 1

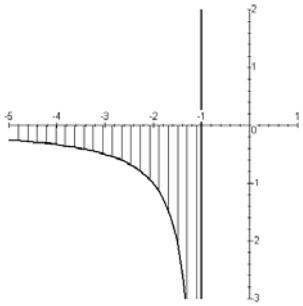


Figure 2

[7] Nous avons repris dans les consignes des exercices le type de formulation utilisé dans la partie exercices de la brochure d'enseignement.

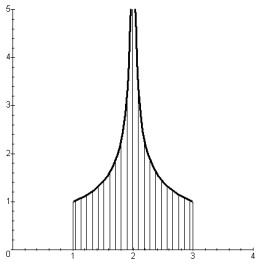


Figure 3

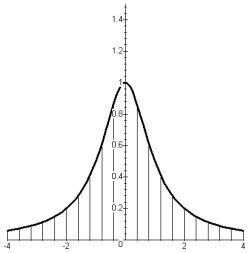


Figure 4

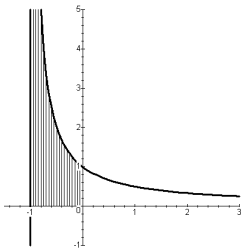


Figure 5

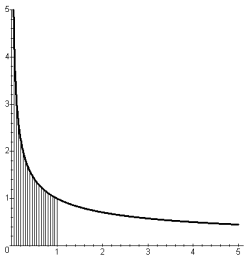


Figure 6

Associer les graphiques aux intégrales qui leur correspondent

$I_1=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, $I_2=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$, $I_3=\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+1}$, $I_4=\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$, $I_5=\int_1^3 \frac{dx}{1-x}$, $I_6=\int_{-1}^0 \frac{dx}{x}$, $I_7=\int_0^1 \frac{-dx}{x}$,

$I_8=\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$, $I_9=\int_1^3 \frac{dx}{x^2-4}$, $I_{10}=\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{|x-2|}}$, $I_{11}=\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$, $I_{12}=\int_1^3 \frac{dx}{x-1}$, $I_{13}=\int_1^3 \frac{dx}{2x-1}$.

3.1. Caractéristiques du rapport personnel des étudiants à l'intégration mises en évidence dans les tâches routinières

Concernant le calcul des primitives, comme outil de base pour le calcul de toute intégrale, définie ou impropre, la majorité des étudiants savent mettre en relation un type de fonction à intégrer avec un type de méthode d'intégration enseigné dans le cours : méthode directe, changement de variable ou intégration par parties, sans que cela les conduise pour autant forcément à la réussite. Le tableau 2 permet une comparaison des résultats selon l'intégrale définie à calculer.

	I_1	I_2	I_3	I_4
% réponses	82%	49%	82%	42%
% résultats exacts	55%	31%	61%	21%

Tableau 2 : Comparaison des résultats des 4 intégrales de l'exercice 1.

Les échecs proviennent essentiellement :

- de la non maîtrise de techniques de transformation algébrique élémentaires nécessaires au calcul des primitives, comme la réduction au même dénominateur de deux fractions, les formules de décomposition des fractions rationnelles en éléments simples, les formules trigonométriques usuelles ;
- d'une difficulté de calcul des primitives des fonctions puissances quand l'exposant est négatif ou d'une confusion entre primitives des fonctions trigonométriques usuelles ;
- d'une tendance à se rabattre sur les primitives $\ln x$, *Arctgx* pour toute fonction à intégrer de la forme $\frac{1}{(f(x))^n}$ ou $\frac{1}{1+(f(x))^2}$;
- d'une difficulté de calcul des primitives des fonctions trigonométriques : difficultés dans la transformation des fonctions trigonométriques ;
- en cas de changement de variable : de l'oubli de l'élément de différentiation ou d'erreurs lors du passage de *dx* en *dt* ou de la généralisation de cette méthode hors de son domaine de validité ;
- de difficultés propres à l'intégration par parties : usage de l'ostensif *dx*, choix de *u* et de *v*, oubli de *uv, etc*., oubli des résultats des étapes intermédiaires dans le résultat final.

Il est important de noter de plus que, dans le cas où les étudiants aboutissent à la donnée d'une primitive, ils ne précisent jamais sur quel intervalle cette primitive existe.

Ceci nous amène à nous demander si les étudiants savent bien que :

- une primitive est nécessairement une fonction continue ;
- le domaine de définition d'une primitive ne peut pas être une réunion d'intervalles ouverts.

Ce qui aura des conséquences lors de l'étude de la convergence d'une intégrale impropre par le calcul de primitives, la primitive de *f* étant alors envisagée comme la même sur tout l'intervalle d'intégration comme l'attestent certains calculs pour l'exercice 3.

Étudiant 86

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}=\lim_{x\to -1}\int_{r}^{2}\frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{2}\sqrt{|1-x^2|}=\lim_{x\to -1}[\frac{1}{2}\sqrt{3}]-[\frac{1}{2}\sqrt{1-r^2}]=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$$

I_8 converge

En ce qui concerne la convergence des intégrales impropres

Pour ceux des étudiants pour lesquels l'intégrale impropre a un sens, le calcul de primitives est une technique largement majoritaire, seule une infime minorité d'étudiants dispose d'autres techniques de recherche de convergence s'appuyant sur des théorèmes d'équivalence ou de reconnaissance d'intégrales impropres classiques. Le tableau 3 donne les résultats globaux de l'exercice 3.

	Convergente	**Divergente**	**Non Réponse**
$I_3=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x+1}{x^2+1}dx$	11%	46% dont la moitié de justification correcte	43%
$I_8=\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{\|1-x^2\|}}$	33% dont aucune justification correcte	14%	53%
$I_9=\int_{1}^{+\infty}\frac{.dx}{x^2}$	71% dont les trois quarts de justification correcte	16%	13%

Tableau 3 : Réponses globales pour l'exercice 3.

Même quand ils trouvent les points de singularité de la fonction à intégrer, en cherchant son domaine de définition, ils ont des difficultés, en particulier pour l'intégrale I_8, à :

- subdiviser l'intervalle d'intégration en autant d'intervalles que nécessaire ;
- partager l'intégrale en autant d'intégrales dépendant de l'une de leurs bornes que nécessaire.

Étudiant n° 81

$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + {}_s\lim_{\longrightarrow 1} \int_{s}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ x=1, x= -1 points singuliers

$\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}} = {}_s\lim_{\longrightarrow -1} [\arcsin x]_s^1 + \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|\Big]_s^2 = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} + \ln|2+\sqrt{3}-1-\sqrt{0}|$

$= -\pi + \ln|1+\sqrt{3}|$; $\int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{|1-x^2|}}$ converge.

Et même quand ils font ces deux opérations correctement, ils peuvent attribuer la même primitive dans chacun des intervalles déterminés.

3.2. Ce que nous apprennent les tâches non routinières

La résolution de tâches d'identification d'intégrales impropres parmi d'autres

Les étudiants qui traitent ces tâches malgré leur caractère non routinier savent reconnaître une intégrale impropre lorsque l'une au moins des deux bornes est infinie.

Par contre, ce type de tâches fait apparaître une confusion entre intégrale définie et intégrale impropre dans le cas de l'écriture $\int_a^b f(x)dx$ où *a* et *b* sont des réels, ce qui révèle une non prise en charge, par les étudiants, de l'articulation entre l'intervalle d'intégration et le domaine de définition de la fonction à intégrer, problème que nous avions anticipé lors de la formulation des règles du contrat didactique à propos du calcul intégral dans ***A***.

Étudiant 8

$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{2x-1}$ définie car les bornes sont finies.

Étudiant 31

$I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{2x-1}$ n'est pas impropre car la fonction est définie en 1 et en 0.

Une conséquence de cette absence d'articulation est que les réponses de certains étudiants semblent réglées par l'un et/ou l'autre des éléments technologiques *ad-hoc* suivants.

- Une intégrale est définie si les bornes de l'intervalle d'intégration sont finies ;

- une intégrale est définie si la fonction à intégrer est définie (ou continue) aux bornes de l'intégrale d'intégration ;
- une intégrale est impropre si la fonction à intégrer est non définie (ou discontinue) en une borne de l'intégrale d'intégration ;
- une intégrale est impropre si la fonction à intégrer est non définie (ou discontinue) en un point, où qu'il soit par rapport à l'intervalle d'intégration.

L'intégrale impropre comme calcul d'aire sous la courbe

L'absence totale dans le chapitre de la brochure du cadre géométrique *via* le registre graphique, seulement présent dans les applications de l'intégrale définie, explique sans doute que le tiers des étudiants ne répondent pas à l'exercice 4.

Néanmoins entre 30% et 40% des étudiants ayant répondu associent correctement à certaines intégrales impropres l'aire sous la courbe représentative de la fonction à intégrer, prolongeant ainsi d'eux-mêmes ce qu'ils ont appris sur l'intégrale définie.

Le caractère non routinier de la tâche fait qu'ils ont des difficultés à justifier leur réponse et que, quand ils donnent des explications, celles-ci s'appuient sur des critères souvent insuffisants, comme par exemple le domaine de définition ou la variation de la fonction à intégrer.

Examinons le cas des figures 2 et 5. Nous les avions choisies de façon qu'aucune intégrale de la liste ne leur corresponde, mais que certaines intégrales puissent leur être associées si on s'appuie sur des critères insuffisants. Nous donnons dans le tableau 4 les résultats concernant ces deux figures, pour les 2/3 des étudiants qui ont répondu à l'exercice 4.

Choix	Aucune	I_6	$I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_9, I_{11}, I_{12}, I_{13}$	Non Réponse
Fig.2	1%	57%	23%	19%
Choix	Aucune	I_6	$I_1, I_2, I_3, I_4, I_7, I_8, I_9, I_{19}, I_{11}, I_{13}$	Non Réponse
Fig.5	3%	45%	25%	27%

Tableau 4 : Pourcentage des solutions proposées pour les figures 2 et 5.

Par exemple un étudiant (59) justifie ses choix erronés pour ces deux figures par des propriétés communes entre courbes et fonction à intégrer (critères des bornes et de variation), sans prendre en compte les points de singularité de la fonction ou les asymptotes du graphique.

Étudiant n°59

$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2}$ pour figure 2 puisqu'elle est décroissante + les bornes de l'intégrale sont $-\infty$, -1 respectivement.

$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x}$ pour figure 5 décroissante + bornes de l'intégrale -1 et 0 respectivement

Enfin près d'un quart des étudiants qui donnent une réponse ne coordonnent pas la lecture des bornes délimitant l'aire sous la courbe et les bornes des intégrales proposées : ils proposent une intégrale avec au moins l'une des bornes incorrectes dans le cas où l'aire est délimitée par une asymptote, notamment quand elle est verticale. On retrouve encore ici une incidence du manque de travail, dans l'institution ***A***, sur la relation entre intervalle d'intégration et caractéristiques de la fonction à intégrer, relation qui pourrait précisément être traitée à partir d'un travail sur l'articulation entre registre graphique et registre algébrique (Duval, 1993).

Conclusion

Du point de vue de la raison d'être du calcul intégral, tout ce qui concerne le calcul de différentes sortes d'intégrales (indéfinie, définie et impropre), concerne en fait un seul type de tâches « calculer une grandeur ». Or la 1ère partie de notre étude montre bien que certaines organisations de l'enseignement de l'intégration, comme l'organisation 2, évacuent cette raison d'être en réduisant le calcul d'une grandeur à une application du calcul intégral, rompant ainsi les liens fondateurs.

Comme nous l'avons montré, l'un des intérêts de cette 1ère partie est de permettre, lorsqu'on s'intéresse à un enseignement universitaire donné, de mieux comprendre et interpréter les choix faits pour l'organisation de l'intégration dans l'enseignement, et leurs conséquences sur la signification des objets enseignés et donc sur les apprentissages des étudiants.

C'est ainsi que l'expérimentation atteste notamment de la vie difficile de la notion topologique d'intervalle dans l'intégration, induite par le fonctionnement dans l'institution **A** des deux règles de contrat R3 et R4 (§ 2.3.). L'interrelation entre intervalle d'intégration et fonction à intégrer est problématique à mettre en œuvre par les étudiants pour lesquels l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ (avec a et b finis) se limite le plus souvent à être une intégrale définie sans référence à la notion géométrique d'aire qui la fonde.

Bibliographie

ARNAUDIÈS, J.M. et FRAYSSE, H. (1988), *Cours de mathématiques-2*, Bordas, Dunod Université, Paris, 305–322.

BASS, J. (1964), *Cours de mathématiques, Tome I*, Masson & Cie, 3ième édition.

BOSCH, M. et CHEVALLARD, Y. (1999), La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **19(1)**, La Pensée Sauvage, Grenoble, 77–124.

BOURBAKI, N. (1976), *Eléments de mathématiques. Fonction d'une variable réelle*. Hermann, Paris.

CAGNAC, G., RAMIS, E. et COMMEAU, J. (1963), *Nouveau cours de mathématiques spéciales*, Analyse, Masson et Cie.

CHEVALLARD, Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **19(2)**, La Pensée Sauvage, Grenoble, 221–266.

COPPÉ, S. (1993), *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé*, Thèse, Lyon : Université Claude Bernard.

DUVAL, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives,* **5**, IREM de Strasbourg, 35–65.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A.S. (2004), *La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje*, Thèse de doctorat, Université de La Laguna.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A.S. et CAMACHO, M. (2004), What is first-year Mathematics students'actual knowledge about improper integrals ? *International Journal of Mathematical Education in Sciences and Technology*, **35(1)**, 73–89.

GOUYON, R. (1958), *Précis de mathématiques spéciales*, Vuibert, Paris, 435–468.

KOUIDRI, K. (à soutenir) *Analyse didactique du rapport institutionnel au concept d'intégrale en début d'université et conséquence sur le rapport personnel des étudiant*s. Thèse préparée à l'Ecole Normale Supérieure de Kouba et au sein du laboratoire LIG de l'Université de Grenoble 1.

LANG, S. (1964), *A first course in calculus*, (réédition 2000), Addison-Wesley, Springer.

LEHNING, H. (1985), *Intégration et sommation*, Masson, Paris.

LELONG-FERRAND, J. et ARNAUDIÈS, J.M. (1977), *Cours de mathématiques*, Tome 2, Bordas, Dunod Université Paris.

OSMANOV, H. et KHELIFATI, S. (2003), *Brochure d'exercices d'analyse mathématique I, première et deuxième partie*, Faculté des Sciences, Université de Boumerdes.

KHEDIDJA KOUIDRI
Centre universitaire de Djelfa
Cite Benjermain
N:14 B:344 Djelfa
Algérie
kouidri_kh@yahoo.fr

MONCEF ZAKI & ZAHID ELM'HAMEDI

ÉLÉMENTS DE MESURES POUR UN ENSEIGNEMENT DES TESTS STATISTIQUES

Abstract. Elements of measure for teaching statistical tests – Statistical tests have traditionally been an important tool in the statistical analysis of data. However it is widely recognized, at least in the university medium, that the teaching of this concept is difficult for the teacher as well for the learner. Indeed, the literature of didactic research on statistical tests has revealed that there are various difficulties, often with respect to some misconceptions, which are encountered at every age and level of expertise. We start with the assumption according to which the teaching of statistical tests cannot succeed in the absence of situations allowing the apprehension of the meaning behind the procedures involved in this concept. This paper synthesizes some supporting measures that can be taken into account in the teaching of statistical tests, and presents the results of an exploratory study conducted on 3rd year students at a scientific university. These measures will, a priori, help students to deepen their understanding of statistical tests.

Key words. Statistical tests, Misconceptions, Frequentist approach, Bayesian approach, Fisher's significance tests, Neyman-Pearson's hypothesis tests, Teaching at university.

Résumé. Les tests statistiques sont à l'origine d'outils importants d'analyses statistiques de données. Cependant, il est largement reconnu, du moins dans le milieu universitaire, que leur enseignement reste un sujet difficile aussi bien pour l'enseignant que pour l'apprenant. En effet, la littérature de recherches en didactique sur les tests statistiques rapporte diverses difficultés, souvent en rapport avec des conceptions erronées, que l'on peut rencontrer chez tous les âges et à tous les niveaux d'expertise. Nous partons de l'hypothèse selon laquelle l'enseignement des tests statistiques ne peut être réussi en l'absence de situations permettant l'appréhension de la signification des procédures impliquées dans cette notion. Cet article synthétise quelques éléments de mesures qui pourraient être pris en considération lors de l'enseignement des tests statistiques, et dont le bien fondé a été examiné à l'aide d'une étude exploratoire auprès d'étudiants de troisième année universitaire scientifique. Ces mesures pourraient a priori aider les étudiants à mieux approfondir leur appréhension vis-à-vis des tests statistiques.

Mots clés. Tests statistiques, Conceptions erronées, Approche fréquentiste, Approche Bayésienne, Tests de signification de Fisher, Tests d'hypothèses de Neyman-Pearson, Enseignement à l'université.

---

1. Introduction

Le concept de test statistique est connu pour être à l'origine de l'élaboration d'outils fondamentaux de l'inférence statistique, notamment pour le traitement de

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 14, p. 153 – 194.
© 2009, IREM de STRASBOURG.

situations de décision à partir de bases de données issues de recherches expérimentales. Pourtant, il reste un objet mathématique souvent mal utilisé, d'une part par son application impropre, et d'autre part par une mauvaise interprétation des résultats qu'il peut fournir.

En fait, de nombreux travaux didactiques se sont attelés sur les difficultés dérivant de l'utilisation incorrecte de ce concept, et plusieurs études ont mis en avant l'existence d'erreurs d'interprétation des tests statistiques largement répandues chez les étudiants et les chercheurs en sciences expérimentales (Rosenthal, Gaito, 1963 ; Nelson, Rosenthal, Rosnow, 1986 ; Oakes, 1986 ; Falk, Greenbaum, 1995 ; Mittag, Thompson, 2000 ; Gordon, 2001 ; Poitevineau, Lecoutre, 2001 ; Zendrera, 2004 ; Batanero, Diaz, 2006). Récemment, Haller et Krauss (2002) ont même démontré que des formateurs en méthodologie qui enseignent les outils statistiques de décision à des étudiants en psychologie, y compris des formateurs qui travaillent dans le domaine de la statistique, commettent les mêmes erreurs d'interprétation que leurs propres étudiants.

Les multiples problèmes dérivant de l'utilisation impropre des procédures de ce concept, nécessitent donc une réflexion particulière sur le besoin d'amélioration de leur enseignement en vue de leurs applications. Ce n'est qu'au cours des dix dernières années que certains chercheurs didacticiens se sont particulièrement penchés sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des tests statistiques. Poitevineau (1998) par exemple, a présenté une étude très détaillée sur la méthodologie d'analyse expérimentale des données, dans laquelle il a mis l'accent sur les difficultés qui accompagnent l'utilisation et l'application de ces outils de décision. Ces difficultés trouvent souvent leur origine dans des pratiques d'enseignements qui font un amalgame entre deux approches totalement distinctes, les tests de signification introduits par Fisher et les tests d'hypothèses développés par Neyman-Pearson. D'ailleurs, de tels enseignements conduisent malheureusement les étudiants à ne pas assimiler les fondements des tests statistiques ; seules des procédures ''automatisées'' sont alors véhiculées par les étudiants, se résumant à des réponses dichotomiques de type : « résultat statistiquement significatif ou non significatif » ou encore « rejeter H_0 ou accepter H_0 ». De telles procédures restent bien entendu insuffisantes pour une application pertinente des tests statistiques.

L'amalgame entre les deux approches de Fisher et de Neyman-Pearson dans l'enseignement des tests statistiques a par ailleurs suscité plusieurs débats entre les chercheurs didacticiens conduisant à des controverses sur le concept même de test statistique (Cobb, Moore, 1997 ; Harlow, Mulaik, Steiger (Eds.) , 1997 ; Krantz, 1999 ; Batanero, 2000 ; Ben-Zvi, Garfieled, 2004 ; Pfannkuch, Wild, 2004 ; Batanero, Diaz, 2006 ; Hubbard, Lindsay, 2008 ; …) : ces controverses ont essentiellement porté sur quelques pratiques erronées dans l'utilisation de ce

concept par certains chercheurs et praticiens et des mauvaises interprétations qui en résultent. Des auteurs et associations pédagogiques (Kline, 2004 ; American Psychological Association, 1994) sont allés jusqu'à recommander la pure exclusion de ce concept de l'enseignement des statistiques inférentielles, ou du moins son enseignement accompagné d'autres méthodes statistiques tels que les intervalles de confiance, la taille de l'effet, la réplication ou la statistique bayesienne… Cependant, malgré tous ces débats, les tests statistiques continuent à être enseignés aux étudiants dans les universités et méritent à ce titre de faire encore l'objet de recherches didactiques.

Le travail que nous exposons dans cet article s'inscrit dans la continuité des réflexions et recherches menées sur la question d'enseignement des tests statistiques. Nous cherchons à y présenter, à la lumière de travaux antérieurs, l'essentiel d'une synthèse portant sur des mesures qui pourraient être prises en considération lors de l'enseignement des tests statistiques, pour mieux aider les étudiants à approfondir leur appréhension pour ce concept. Cette synthèse est aussi appuyée par les résultats d'une étude exploratoire que nous avons par ailleurs menée auprès d'étudiants de troisième année scientifique d'université. Ces mesures n'ont pas la prétention de vouloir remplacer un enseignement proprement dit des tests statistiques ; cependant, elles nous paraissent comme étant un élément important, sinon essentiel dans la mise en place d'un tel enseignement. Elles permettront en particulier aux étudiants de bien cerner les paradigmes de probabilités conditionnelles sur lesquels sont fondés les tests statistiques et de maîtriser la logique de mise en place des indicateurs de jugement et des conclusions qui en découlent, notamment entre les procédures de Fisher et de Neyman-Pearson. Cependant, nous n'irons pas jusqu'à étudier les questions de liaisons entre les conclusions issues d'un test statistique et les critères utilisés dans la mise en place d'un plan expérimental et encore moins les conséquences (effets) que peuvent avoir ces conclusions sur les hypothèses « scientifiques »[1] de départ : ces questions ont bien entendu beaucoup d'intérêt dans une étude faisant appel aux statistiques, mais elles ne sont pratiquement jamais prises en charge (à tort ou à raison…) dans un enseignement de statistique inférentielle.

Avant de développer ces mesures, nous souhaiterions rappeler au lecteur[2] les principales notions habituellement rencontrées dans les tests statistiques :

---

[1] Il s'agit de l'hypothèse étudiée par le chercheur au départ, qui à la suite d'une reformulation (modélisation), donne lieu à l'hypothèse alternative H_1 d'un test statistique.

[2] Cet article suppose que le lecteur est familiarisé avec les différentes notions habituellement impliquées dans une procédure de tests statistiques, à savoir : le niveau de signification, la p-value (ou niveau de signification atteint), les risques du 1er type et du 2ème type, la région critique, le seuil, l'hypothèse nulle, l'hypothèse statistique alternative,

l'hypothèse nulle H_0, l'hypothèse alternative H_1 et les données observées D_0 (ou échantillon(s)) ; notions utilisées pour la construction d'outils d'évaluation permettant d'analyser la défaillance entre des données et des hypothèses statistiques.

2. Mesures préconisées pour l'enseignement des tests statistiques

2.1. Deux paradigmes basés sur la notion de probabilité conditionnelle

Deux paradigmes basés chacun sur une probabilité conditionnelle, sont formalisés pour évaluer la "défaillance" entre les données observées D_0 et les hypothèses statistiques H_i (i = 0 ou 1), il s'agit de l'approche fréquentiste relative aux "tests statistiques" et de l'approche subjectiviste relative aux "statistiques Bayésiennes" :

- le paradigme de tests statistiques évalue la probabilité $P(D^*| H_0)$, dite p-value[3], d'obtenir les données D* sachant que l'hypothèse statistique H_0 est vraie ; où D* représente les données observées D_0 ou des données plus extrêmes[4] que D_0. L'expression du résultat des tests statistiques en fonction de la probabilité conditionnelle $P(D^*|H_0)$ induit deux éléments essentiels : d'une part, seules des argumentations basées sur la probabilité des données sont prises en considération dans la procédure du test statistique, d'autre part, l'hypothèse statistique H_0 est considérée comme étant un fait donné. Ce dernier élément implique en particulier que toute présentation des résultats du test statistique doit être formulée sous l'hypothèse d'acceptation de ce fait, c'est-à-dire ''… *sachant que H_0 est vraie*" ;
- le paradigme de statistiques bayésiennes s'intéresse à la probabilité conditionnelle $P(H_i|D_0)$, i=0 ou 1, à savoir la probabilité de l'hypothèse statistique H_i (i=0 ou 1) sachant les données observées D_0. En fait,

---

ainsi que les notions de probabilité conditionnelle, d'échantillon et de population statistique.

[3] Cette probabilité $P(D^*|H_0)$ est exactement la p-value que nous obtenons à partir des tests statistiques : la probabilité des données disponibles ou plus extrêmes (ou même moins probables), sachant que l'hypothèse nulle H_0 est vraie. Il est important aussi de noter que la notation de la p-value $P(D^*|H_0)$ n'a de sens que si, d'une part H_0 est interprétée comme étant un événement, et d'autre part H_0 représente une hypothèse simple. Dans le cas où H_0 représente une hypothèse composite, on calcule alors le maximum de la probabilité de rejet par rapport à l'ensemble des paramètres.

[4] Des données plus extrêmes que D_0 sont des données qui s'écartent (plus que celles de D_0) de H_0 en faveur de H_1. Le choix de ces données plus extrêmes pourrait dépendre des intentions de l'expérimentateur et du plan échantillonnal adopté.

l'approche bayésienne est fondée sur la *règle de Bayes* : $P(\mathrm{H}|D_0) = P(\mathrm{H}).\frac{P(D_0|H)}{P(D_0)}$.

De ce fait, les statistiques bayésiennes représentent une méthodologie mesurant la défaillance entre les données observées D_0 et les hypothèses statistiques H_i (i = 0 ou 1), moyennant des argumentations à partir de probabilités (conditionnelles) des hypothèses[5]. Quant à la probabilité $P(\mathrm{H})$, elle mesure le degré de vérité de l'hypothèse H avant de collecter les données D_0, elle est calculée sur la base d'informations extérieures qui sont indépendantes des données D_0.

L'intérêt de préciser le fondement des statistiques bayésiennes à partir de la *règle de Bayes*, est de permettre aux étudiants de comprendre la signification de la probabilité $P(H_i|D_0)$, de ne pas la confondre avec l'approche des tests statistiques décrite ci-dessus (Carver, 1978 ; Oakes, 1986 ; Poitevineau, 1998), et de l'interpréter comme étant d'une certaine manière « l'inverse » du concept de p-value.

2.2. Les tests statistiques, un amalgame de deux approches : Fisher et Neyman-Pearson

Les tests statistiques sont à leur tour conçus selon deux approches différentes, celle de Fisher et celle de Neyman-Pearson. L'enseignement des tests statistiques est souvent présenté à travers un amalgame de ces deux approches, que Gigerenzer (1993) qualifie de *logique hybride*, difficilement discernable chez les étudiants. En fait, les tests statistiques représentent deux sous paradigmes distincts :

- les tests de signification selon Fisher (1935 et 1956), et qui s'intéressent à la seule probabilité $P(D^*|H_0)$;
- les tests d'hypothèses selon Neyman-Pearson (1933), et qui s'intéressent aux deux probabilités $P(D^*|H_0)$ et $P(D^*|H_1)$;

En outre, Fisher et Neyman-Pearson procèdent selon deux approches différentes :

- Les tests de signification permettent de conclure au rejet (ou à l'échec du rejet) de l'hypothèse nulle H_0 avec un seuil (une probabilité) décidé à posteriori après le calcul de $P(D^*|H_0)$, sans pour autant permettre de conclure quant à l'acceptation ou au rejet de l'hypothèse alternative. Cependant, il faut préciser que l'hypothèse alternative H_1, bien qu'elle représente implicitement chez Fisher l'hypothèse d'intérêt de la situation explorée, elle intervient directement dans la construction des

[5] Pour une discussion détaillée de l'approche inférentielle bayésienne, voir par exemple, Edwards, Lindman & Savage (1963) ou Howson & Urbach (1989).

données extrêmes D*, donc dans l'élaboration de la procédure de calcul des tests de signification ;

- quant aux tests d'hypothèses, ils permettent de construire, en fonction d'un seuil préalablement fixé, indépendamment des données observées D_0, des règles de décisions permettant de choisir entre deux actions faisant référence, de manière explicite, respectivement à l'hypothèse nulle et à l'hypothèse alternative.

2.3. Interprétation des hypothèses statistiques en termes de modèles statistiques

Une difficulté majeure dans les tests statistiques est l'interprétation qu'on donne aux hypothèses statistiques dans les procédures de traitements mathématiques sous jacentes à ces situations, particulièrement lorsqu'il s'agit de tests paramétriques. Que l'on soit dans le cadre des tests de signification de Fisher ou celui des tests d'hypothèses de Neyman-Pearson, l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1 (uniquement chez Neyman-Pearson) renvoient respectivement chacune à un modèle statistique, qui en fait n'est autre qu'un espace probabilisé auquel on associe une famille de probabilités (celle-ci pouvant éventuellement être réduite à une seule probabilité, comme c'est le cas par exemple pour les tests d'hypothèses simples). Ainsi, tout traitement probabiliste sous l'hypothèse H_0 (respectivement sous H_1), en l'occurrence celui de $P(D^*| H_0)$ (respectivement $P(D^*| H_1)$), sous-entend que les calculs probabilistes mis en œuvre se font à partir du modèle probabiliste sous jacent à cette hypothèse. En principe, cela ne devrait pas poser de problèmes aux étudiants, à condition de leur préciser que les hypothèses statistiques ne sont autres qu'une formulation simplifiée de modèles statistiques susceptibles de répondre le plus adéquatement possible au problème de modélisation des données observées. Mclean (2000) par exemple soutient une telle approche didactique, en suggérant de traduire les hypothèses statistiques mises en jeu dans certains problèmes de régression linéaire (tests sur une moyenne ou encore sur un rapport de variances), en termes de recherche de modèles statistiques qui soient les plus « proches » ou du moins les plus représentatifs des données recueillies.

Cependant, l'interprétation des hypothèses statistiques en termes de modèles statistiques n'est pas toujours immédiate chez les étudiants, bien que dans l'enseignement des tests statistiques toutes les précautions théoriques soient préalablement prises en compte. Ainsi par exemple, dans un cours de statistique mathématique introductif aux tests statistiques, il arrive assez souvent que les

étudiants ne fassent pas de rapport[6] dans la formulation et l'interprétation des hypothèses H_0 et H_1 mises en jeu dans un test paramétrique, avec la propriété fondamentale de définition d'un modèle statistique, à savoir le fait que tout paramètre θ du modèle est *identifiable* – c'est-à-dire qu'à tout paramètre θ est associée une et une seule probabilité P_θ du modèle statistique.

Cette difficulté d'interprétation des hypothèses statistiques en termes de modèles statistiques peut engendrer d'autres interprétations erronées : en nous plaçant encore une fois dans le cadre des tests paramétriques, un test d'hypothèses simples de Neyman-Pearson ($H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$) peut donner lieu à de fausses interprétations des hypothèses statistiques mises en jeu. En effet, à l'issue de la réalisation de ce test, si les données observées conduisent par exemple à une action en faveur de l'hypothèse H_0, les étudiants vont parfois conclure dans ce cas là que la vraie valeur du paramètre θ est θ_0 (Vallecillos, 1995 et 1996), en omettant de dire que le modèle P_{θ_0} est celui qui est en faveur des données observées. A notre avis, cette difficulté est non seulement liée à une question d'interprétation des hypothèses statistiques en termes de modèles statistiques, mais aussi à une mauvaise compréhension de la procédure même du test statistique. C'est ce que nous allons développer dans le prochain paragraphe.

2.4. Interprétation des procédures statistiques

Les tests statistiques sont fondés sur l'évaluation de la probabilité conditionnelle $P(D^*| H_0)$ chez Fisher, et sur les deux probabilités conditionnelles $P(D^*| H_0)$ et $P(D^*| H_1)$ chez Neyman-Pearson (cf. § II.2). Néanmoins, l'interprétation adéquate de ces probabilités conditionnelles dans la procédure même des tests statistiques peut poser quelques difficultés aux étudiants, voire même à certains chercheurs praticiens des statistiques - psychologues et autres -.

Le dernier exemple que nous venons de citer au paragraphe précédent, représente une variante de ces difficultés, qui en outre se trouve associée à une fausse interprétation de l'hypothèse nulle (voir l'exemple ci-dessus du test $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$) : certains étudiants qui ont une *approche déterministe* de la procédure du test statistique, vont aller déclarer dans le cas de cet exemple que le test vient de prouver (au sens d'une preuve mathématique) que le paramètre $\theta = \theta_0$ (Vallecillos, 1995 et 1996).

Une seconde variante de ces difficultés consiste à mettre en avant une *approche probabiliste erronée* due à une fausse interprétation de $P(D^*| H_0)$ et $P(D^*| H_1)$:

[6] Expérience souvent vécue à la Faculté des Sciences Dhar El mehraz de Fès avec les étudiants de licence de Mathématiques (Option Probabilités - Statistiques) dans un cours de statistique mathématique introductif aux tests statistiques.

certains étudiants vont renverser les conditions de ces probabilités, en passant de Pr(Données| Hypothèse) à Pr(Hypothèse| Données). La conséquence d'un tel renversement des hypothèses et des données dans les probabilités conditionnelles va favoriser de fausses interprétations des procédures des tests statistiques, comme par exemples :

« *La probabilité que l'hypothèse nulle soit vraie est égale à la p-value (ou au seuil du test)* » (Poitevineau, 1998),

ou encore,

« *La probabilité que les résultats soient dus au seul hasard est égale à la p-value (ou au seuil du test)* », ou de manière équivalente « *La probabilité que l'hypothèse alternative soit vraie est égale à 1 moins la p-value (ou à 1 moins le seuil du test*) » (Carver, 1978 ; Batanero, 2000).

L'approche probabiliste peut aussi prendre une autre forme d'interprétation erronée de la p-value P(D*| H_0) pour induire de fausses interprétations au niveau des conclusions d'un test statistique : l'expression « statistiquement significatif » renvoie à une conclusion en faveur de l'hypothèse d'intérêt[7] (le rejet de H_0 chez Fisher ou l'acceptation de H_0 chez Neyman-Pearson), néanmoins, le résultat de la p-value ne devrait pas pour autant être interprété comme étant une mesure du degré de confiance (ou d'importance) que l'on va attribuer à l'hypothèse scientifique mise en jeu dans la situation étudiée (sachant que l'hypothèse statistique d'intérêt n'est autre qu'une formulation réduite de l'hypothèse scientifique). Pourtant, on va constater chez certains étudiants ou chercheurs-praticiens (Kerlinger, 1979 ; Pedhazur et Schmelkin, 1991) des conclusions erronées du type : plus le résultat d'un test est « statistiquement significatif », plus le résultat (hypothèse) scientifique étudié est « important ». En fait, ces conclusions incorrectes renvoient à deux conceptions erronées :

- certains étudiants ou chercheurs croient qu'une plus petite p-value reflète directement une influence (un effet) quantitative plus grande du facteur ou de la relation examinés et c'est en ce sens qu'ils considèrent qu'une plus petite p-value montre un résultat plus important (American Psychological Association (APA), 1994 ; Wilkinson & APA , 1999 ; Vacha-haase et al , 2000 , p. 599) ;
- certains confondent signification statistique et signification pratique et tentent de croire qu'une plus petite p-value montre un résultat qui a plus de signification ou d'importance pratique. Un autre aspect, aussi (ou même plus) important, de cette conception erronée est que certains

[7] On rappelle que l'hypothèse d'intérêt est H_1 chez Fisher et H_0 chez Neyman-Pearson.

chercheurs sont tentés de croire que des résultats qui ne sont pas statistiquement significatifs n'ont pas d'intérêt ou d'importance pratique. Or de tels résultats peuvent très bien avoir de l'intérêt ou de l'importance pour l'étude menée, pour des raisons théoriques, sociales, ou en liaison avec d'autres études portant sur le même sujet (Nelder, 1999 ; Gliner & al, 2002 ; Lecoutre & al, 2003 ; Castro Sotos & al, 2007).

Les erreurs d'interprétation liées aux hypothèses ou aux conclusions dans la procédure d'un test statistique nécessitent à notre avis, du point de vue de l'enseignement, la prise en compte et la comparaison des deux paradigmes "tests statistiques" et "statistiques bayésiennes". Cette approche didactique, qui est aussi soutenue par Gigerenzer (1993), contribuerait d'une part à avoir une appréhension globale des approches développées pour les tests statistiques, et d'autre part à mieux percevoir et la nature et le statut des hypothèses et des conclusions dans chacune de ces approches.

On pourrait donc éventuellement penser à une présentation permettant aux étudiants d'accéder aux différents modèles d'organisation des tests d'hypothèses statistiques :

Étape	**Fisher**	**Neyman-Pearson**	**Solution Bayésienne**
(1) Hypothèse d'intérêt	H_1	H_0	H_1
(2) Hypothèse(s) impliquée(s) dans la procédure de test statistique	H_0	H_0 et H_1	H_i (i=0 ou 1)
(3) Élément(s) de jugement		Niveau de signification du test : $\alpha \in]0,1[$	Probabilités a priori : $P(H_i)$
(4) Taille(s) Echantillon(s)	$(n_1, \ldots, n_j)$	$(n_1, \ldots, n_j)$	$(n_1, \ldots, n_j)$

Fisher	Neyman-Pearson	Solution Bayésienne
(5) Données observées (Échantillon(s)) : D_0	***(5) Indicateur de jugement :*** Calcul de règle de décision δ à partir du rapport de vraisemblances	***(5) Données observées (Echantillon(s)) :*** D_0
(6) Indicateur de jugement : Calcul de la p-value $P(D^*\|H_0)$ à partir d'estimateurs (dans le cas paramétrique) ou de statistiques subjectives	***(6) Données observées (Echantillon(s)) :*** D_0	***(6) Indicateur de jugement :*** Probabilités a posteriori : $P(H_i\| D_0)= P(H_i).\frac{P(D_O\|H_i)}{P(D_O)}$ (Règle de Bayes)

Étape	Fisher	Neyman-Pearson	Solution Bayésienne
(7) Jugement	Comparaison de $P(D^*\|H_0)$ à un seuil de signification α fixé a posteriori	$\delta(D_0)$	Comparaison de $P(H_1\| D_0)$ à $P(H_0\| D_0)$
(8) Conclusions	Si $P(D^*\|H_0)$ est petite (par rapport à α) : Rejeter H_0 Si $P(D^*\|H_0)$ est élevée (par rapport à α) : Echouer de rejeter H_0	Si $\delta(D_0)=1$: Rejeter H_0 Si $\delta(D_0)=0$: Accepter H_0 Si $\delta(D_0)=c$ ($\neq 0$ et 1) : Pile ou face	Si $P(H_1\|D_0)<P(H_0\|D_0)$: Rejeter H_1 Si $P(H_1\|D_0) \geq P(H_0\|D_0)$: Accepter H_1

Tableau 1 : Modèles d'organisation des tests d'hypothèses statistiques (Fisher, Neyman-Pearson et solution Bayésienne).

La présentation de ces modèles (ou de modèles similaires) est certainement nécessaire pour réussir un enseignement de statistiques inférentielles, mais elle n'est pas suffisante. En effet, dans les modèles précédents, nous voyons apparaître des paramètres tels que la taille de l'échantillon, les données D_0, ou données extrêmes D* et le niveau (ou seuil) de signification du test, qui vont jouer un rôle

très important dans le processus d'inférence statistique, se situant à des niveaux différents, avec différents statuts ; ils méritent à ce titre d'être traités avec attention dans un enseignement de tests statistiques, en particulier dans les procédures de Fisher et de Neyman-Pearson.

2.5. Niveau de signification α et amalgame entre les procédures de Fisher et de Neyman-Pearson

La procédure de recherche de l'indicateur de jugement en situation de tests statistiques diffère entre Fisher et Neyman-Pearson. Le premier construit son indicateur de jugement directement en fonction de données D*, regroupant les données observées D_0 et celles qui sont plus extrêmes ; alors que le second établit une règle de décision (indicateur de jugement) en fonction uniquement de la taille n_0 de l'échantillon observé et du seuil de signification α qu'il se fixe a priori, indépendamment du corps même des données observées D_0. Ce n'est qu'à l'étape du jugement effectif que Neyman-Pearson fait appel aux données observées D_0, pour conclure ensuite.

Pourtant, dans les situations courantes, comme par exemple celles de tests paramétriques relatifs aux modèles continus, la distinction entre les deux procédures précédentes devient pratiquement inapparente, du moins au niveau de l'indicateur de jugement et du jugement lui-même : ce qui justifie en partie l'amalgame entre ces deux approches (cf. § II. 2), souvent rencontré dans un enseignement de tests statistiques.

En effet, en nous plaçant dans une situation de tests paramétriques dans le cas continu, il arrive très souvent que l'estimateur du paramètre testé, souvent utilisé par Fisher, coïncide avec la statistique issue du rapport de vraisemblances utilisé par Neyman-Pearson. C'est ainsi que, pour un seuil α fixé a priori, la recherche d'indicateur de jugement chez ce dernier conduit à une règle de décision δ, fonction de l'estimateur utilisé par Fisher, pour donner lieu à une région de rejet (voir valeur critique *c* de la figure 1).

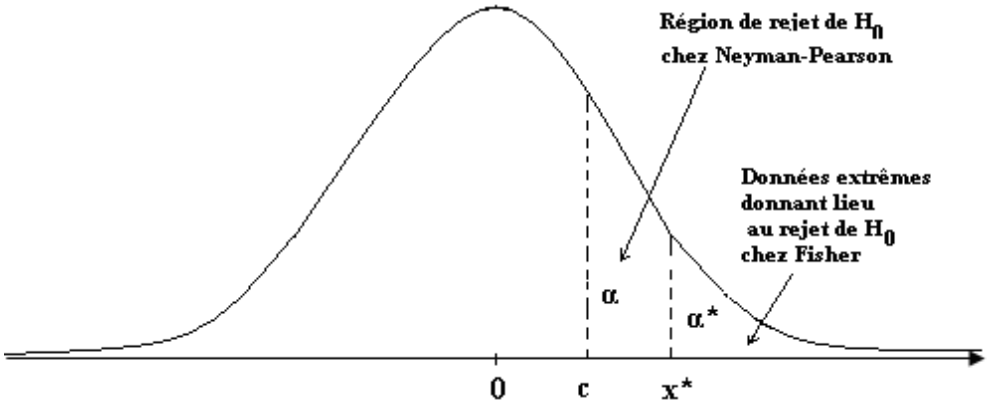


Figure 1 : Indicateurs de jugement chez Fisher et Neyman-Pearson.

Ainsi, les calculs de $\delta(D_0)$ ou $P(D^*|H_0) = \alpha^*$ relèvent d'indicateurs de jugement équivalents, le premier consiste à comparer une valeur x^* (issue des données D_0) à la valeur critique *c* définissant la région de rejet, et le second est basé sur la comparaison de α^* au seuil de signification α : ce qui est mathématiquement équivalent, car formellement cela se traduit en fait par une relation de type $P(D^*|H_0) = P^*([x^*, +\infty[) = \alpha^*$, et la fonction de répartition est bien entendu bijective dans le cas continu. Or, nous constatons que $P(D^*|H_0) = \alpha^*$ n'est autre que l'indicateur de jugement utilisé par Fisher, ce qui explique « *la logique hybride* » citée par certains auteurs (Gigerenzer, 1993), que nous préférons qualifier de *procédure hybride* dans la recherche d'indicateurs de jugement chez Fisher et Neyman-Pearson. Cependant, il faudrait souligner dans le cas présent que la différence entre les procédures de Neyman-Pearson et de Fisher, se situe plutôt au niveau de l'étape ultime concernant les conclusions : au vu des résultats obtenus à l'étape de jugement, le premier va soit accepter H_0, soit la rejeter (autrement dit accepter H_1), alors que le second va soit rejeter H_0, soit y échouer, sans pour autant engager de conclusions sur H_1 : cela correspond à deux logiques totalement différentes au niveau des conclusions de ces deux approches, logiques qui ne sont pas toujours nuancées dans l'enseignement, ce qui génère par conséquent un réel amalgame entre les procédures de Fisher et de Neyman-Pearson.

2.6. Exemple de test d'hypothèses appuyant la différence de procédures chez Fisher et Neyman-Pearson

Nous venons de soulever une question importante concernant la nuance qui existe dans les conclusions relatives aux procédures de Fisher et de Neyman-Pearson. Il serait alors intéressant de présenter un exemple de situations qui met en valeur la différence de procédures chez ces deux auteurs : les situations les plus riches dans

ce cas là sont celles de tests non paramétriques, faisant référence à des modèles statistiques discrets.

Considérons par exemple l'énoncé suivant :

« Une personne en état d'ébriété essaie d'ouvrir une porte à l'aide d'un porte clés composé de 5 clés. Elle réussit à ouvrir la porte au bout de 4 essais. Deux hypothèses sont mises en jeu dans cette situation :

H_0 : La personne est en état d'ébriété très avancé, auquel cas elle procède par essais avec remise.

H_1 : La personne n'est pas en état d'ébriété très avancé, auquel cas elle procède par essais sans remise. »

Pour traiter cette situation, nous considérons naturellement la variable aléatoire *X=''Nombre d'essais effectués par la personne jusqu'à ouverture de la porte''*. Sous les hypothèses H_0 et H_1, la variable aléatoire X suit respectivement une loi géométrique de paramètre 1/5 et une loi uniforme sur {1, 2, 3, 4, 5}.

- La solution de Neyman-Pearson à ce problème, teste les hypothèses H_0 et H_1, où H_0 représente l'hypothèse d'intérêt. Ainsi, le rapport de vraisemblances fournit une région de rejet de la forme :

$$RC = \left\{ k \geq 1 / \frac{P^{H_1}(X=k)}{P^{H_0}(X=k)} \geq c \right\} ,$$

où $c > 0$ représente une constante dépendant du seuil $\alpha \in]0,1[$ fixé au départ.

Sachant que sous H_0, X suit une loi géométrique de paramètre 1/5, la région de rejet RC s'obtient alors par la relation :

$$P^{H_0}\left\{ X \in \{1,\ldots,5\} / X \geq \frac{Ln(c)}{Ln(5/4)} + 1 \right\} \leq \alpha$$

En se référant à la distribution de la loi géométrique de paramètre 1/5 pour les valeurs k allant de 1 à 5, nous obtenons pour α=0,05 , $RC = \varnothing$; pour α=0,1 , RC= {5} et pour α=0,2 , RC = {4, 5}.

Ainsi pour cette situation, au seuil α=0,2 , la procédure de Neyman-Pearson va conclure au rejet de l'hypothèse H_0.

- Pour Fisher, si nous considérons H_1 comme hypothèse d'intérêt, cette situation conduit alors au test de signification portant sur l'hypothèse H_0.

Sachant que les données observées correspondent à l'ensemble $D_0 = \{X = 4\}$, l'ensemble D^* englobant les données observées et celles qui sont plus extrêmes que celles-ci, correspond aux données $D^* = \{1, 2, 3, 4\}$ qui sont en faveur de l'hypothèse H_1. Par conséquent, l'indicateur de jugement chez Fisher va être $P^{H_0}(D^*) = 0{,}5904$. En comparant cet indicateur au seuil de signification α=0,2 (en référence à la solution de Neyman-Pearson), le test de signification de Fisher va échouer pour cette situation dans le rejet de l'hypothèse H_0. (Contrairement à la conclusion fournie par la solution de Neyman-Pearson)

La situation précédente constitue un exemple intéressant qui explique la différence de procédures entre Fisher et Neyman-Pearson ; il est donc important de présenter de telles situations aux étudiants lors d'un enseignement sur les tests d'hypothèses statistiques.

2.7. Niveau de signification α et rôle dissymétrique des hypothèses H_0 et H_1 dans la construction de tests chez Neyman-Pearson

En intégrant les deux hypothèses H_0 et H_1 dans la procédure de construction de tests, Neyman-Pearson va introduire deux types de risques, représentant respectivement sous ces deux hypothèses[8] les coûts moyens $R(\theta,\delta)$ de la règle de décision δ, faisant l'objet de la solution du problème : ce sont les risques de première et de seconde espèces. Dans la recherche de δ, la solution du problème ne permet pas d'agir (minimiser) sur les deux risques simultanément. Ainsi, dans sa solution, Neyman-Pearson ne va contrôler que le risque de première espèce (qui fait référence à son hypothèse d'intérêt H_0), en fixant un seuil de signification α, pour aller chercher parmi les règles de décision répondant à ce seuil, celles dont le risque de second espèce est le plus faible (ou encore dont la puissance[9] est maximale). Ainsi, nous constatons d'emblé dans la procédure de Neyman-Pearson un rôle dissymétrique des hypothèses H_0 et H_1 dans l'élaboration de la solution au problème de tests d'hypothèses.

Cette dissymétrie va effectivement contraindre le type de solution apporté au problème de test statistique, c'est le cas par exemple du test bilatéral, $H_0 : \theta \leq \theta_1$ ou $\theta \geq \theta_2$ vs $H_1 : \theta_1 < \theta < \theta_2$, où il existe pour les modèles à rapport de vraisemblances monotone un test (règle de décision) qui est uniformément le plus puissant (UPP) dans la classe des tests de seuil α ; alors qu'il n'en est rien pour le cas symétrique ($H_0 : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$) : dans ce cas, la solution est limitée aux seuls

[8] Ces deux risques sont naturellement fonction du paramètre θ respectivement sous les hypothèses H_0 et H_1.

[9] La puissance est le complémentaire à 1 du risque de seconde espèce (sous l'hypothèse H_1).

tests qui sont sans biais, c'est-à-dire dont le risque de première espèce est plus petit que la puissance (cf. par exemple C. Robert, 1992).

Par ailleurs, lorsqu'une règle de décision chez Neyman-Pearson conduit au rejet ou à l'acceptation d'une hypothèse H_0, cette décision est conduite selon une certaine puissance du test. Ainsi, pour un seuil de signification α fixé, en faisant augmenter la taille n_0 de l'échantillon des données observées D_0, il peut arriver que la puissance du test augmente, et que la région de rejet s'élargisse : par conséquent à un seuil de signification donné, l'augmentation de la taille n_0 de l'échantillon peut conduire à l'élaboration de règles de décision avec une plus forte puissance, mais pour lesquelles l'hypothèse H_0 a plus de chances d'être rejetée. A la limite, un échantillon de taille infinie va systématiquement conduire au rejet de l'hypothèse nulle H_0…

L'exemple simple de test unilatéral sur la moyenne, $H_0 : \mu \leq \mu_0$ vs $H_1 : \mu > \mu_0$ d'un modèle gaussien $N(\mu, \sigma_0^2)$, décrit parfaitement la situation précédente. En effet, pour un seuil $\alpha \in]0,1[$ fixé, la région de rejet *RC* d'un échantillon de taille n_0 s'obtient par :

$$RC = \left\{ (X_1,\ldots,X_{n0}) / \overline{X} \in \left] \mu_0 + \Phi_\alpha \frac{\sigma_o}{\sqrt{n_0}}, +\infty \right[\right\}$$

où Φ_α désigne le quantile de la loi normale centrée – réduite *N(0,1)* d'ordre *1 - α.*

La puissance de ce test pour $\mu > \mu_0$ s'obtient par $P(N(0,1) \geq \Phi_\alpha + \frac{\sqrt{n_o}}{\sigma_0}(\mu_0 - \mu))$.

Par conséquent, lorsque la taille n_0 de l'échantillon augmente, la région de rejet *RC* s'élargit et la puissance du test augmente ($\mu_0 - \mu$ est négatif). A la limite, lorsque la taille n_0 de l'échantillon tend vers l'infini, l'hypothèse H_0 sera systématiquement rejetée, en vertu de la loi forte des grands nombres ($\overline{X} \xrightarrow{P_{\mu 0} - ps} \mu_0$), et la puissance du test devient maximale (elle tend vers 1).

Ainsi, nous constatons que le rôle dissymétrique des hypothèses H_0 et H_1 a un effet non négligeable sur les procédures d'élaboration de tests chez Neyman-Pearson, il en délimite la portée dans la recherche de solutions en statistiques inférentielles, au point de remettre en question la cohérence même de l'approche qui en est sous jacente.

3. Étude exploratoire auprès des étudiants

3.1. Objectif de l'étude et expérimentation

La portée des conclusions dégagées à la lumière de l'analyse précédente concernant quelques éléments de mesures préconisés pour l'enseignement des tests statistiques, bien qu'elle soit fondée sur la revue de plusieurs travaux didactiques antérieurs (Carver, 1978 ; Oakes, 1986 ; Gigerenzer, 1993 ; Vallecillos, 1995 et 1996 ; Poitevineau, 1998 ; Mclean, 2000 ; Zendrera, 2003, …), ne pourrait que gagner en pertinence si elle est accompagnée d'observations effectives auprès des étudiants. Nous avons donc conduit au courant du deuxième semestre de l'année universitaire 2007/2008 une expérimentation auprès de 70 étudiants en 3ème année de formation (38 étudiants de la Faculté des Sciences de Rabat-Agdal et 32 élèves ingénieurs de l'Institut Agronomique et Vétérinaire de Rabat), auxquels nous avons administré durant 1 heure un questionnaire en vrai - faux, avec une demande de justification écrite des réponses. Les étudiants interrogés[10] ont tous suivi un enseignement classique de probabilités – statistiques, d'un volume horaire de 70 heures, portant sur la théorie de base des probabilités (espaces probabilisés, variables aléatoires et lois de probabilités, lois des grands nombres, …), l'estimation ponctuelle et par intervalles de confiance, ainsi que les tests statistiques habituellement étudiés dans les cas paramétriques et non paramétriques.

Le questionnaire a été construit sur la base d'une situation relevant d'un test de *conformité* (cf. Tableau 2), généralement présentée aux étudiants dans leur cours sur les tests statistiques. Il est composé de 7 items- numérotés de A à G – recouvrant les différents aspects que nous avons analysés dans l'étude des éléments préconisés pour l'enseignement des tests statistiques, et dont le résumé est le suivant :

- rôle d'un test statistique (entre Fisher, Neyman-Pearson et Bayes) ;
- interprétation de l'hypothèse nulle et de l'alternative en termes de modèles probabilistes ;
- procédures statistiques et indicateurs de jugement chez Fisher et Neyman-Pearson ;
- procédures de test statistique et seuil de signification chez Fisher et Neyman-Pearson ;
- distinction et interprétation des conclusions des tests statistiques selon les approches de Fisher et Neyman-Pearson ;

[10] Notons au passage, qu'il nous a été très difficile d'interroger des étudiants, du fait des programmes trop chargés et de la quasi indisponibilité des enseignants qui les encadrent.

- statut du seuil de signification et de la taille d'échantillon face à l'acceptation de l'hypothèse nulle ;
- dissymétrie de l'hypothèse nulle et de l'alternative en fonction de l'indicateur de jugement dans la construction d'un test chez Neyman-Pearson.

Avant de procéder à l'analyse proprement dite des productions des étudiant, nous allons consacrer le prochain paragraphe à l'analyse a priori du questionnaire, afin de mieux cerner l'interprétation (statistique) des réponses des étudiants.

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type connu σ :

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

On rappelle que la fonction densité f_μ de X est définie par :

$$f_\mu(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

On considère les deux hypothèses statistiques suivantes H_0 et H_1 relatives à la moyenne μ de X, et auxquelles on veut appliquer ***un test statistique*** :

$$\begin{cases} H_0 : \text{“}\mu = \mu_0\text{”} \\ H_1 : \text{“}\mu = \mu_1\text{”, avec } \mu_1 > \mu_0 \end{cases}$$

Pour cela, on a recueilli à l'aide d'un échantillon $(X_1,\ldots,X_{no})$ de taille n_0, les données D_0 : $(x_1^0, \ldots, x_{n_o}^0)$ telles que $\overline{x}_{ob} = \frac{x_1^0 + \ldots + x_{n_o}^0}{n_o}$ (moyenne *ob*servée).

Dans tout ce questionnaire, $\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_{n_o}}{n_o}$ désigne la moyenne d'échantillon $(X_1,\ldots,X_{no})$ issu de la variable aléatoire X.

Tableau 2 : Situation du test statistique retenu dans le questionnaire.

3.2. Analyse a priori du questionnaire

Les sept aspects (items numérotés de A à G) qui composent le questionnaire présenté aux étudiants, sont tous relatifs à la situation de test de *conformité* présenté ci-dessus :

(A) A votre avis, l'application d'un test statistique dans cette situation sert à :

(1) *Démontrer que μ est égal à μ_0* ☐ ***Vrai*** ☐ ***Faux***

(2) *Démontrer que μ est égal à μ_1* ☐ ***Vrai*** ☐ ***Faux***

(3) *Conclure, avec une forte probabilité, que les données observées D_0 rejettent l'hypothèse H_0* ☐ ***Vrai*** ☐ ***Faux***

(4) *Déterminer la probabilité de réalisation de H_0, sachant qu'on a observé les données D_0* ☐ ***Vrai*** ☐ ***Faux***

(5) *Déterminer la probabilité pour que la réalisation de H_1 soit due au seul hasard* ☐ ***Vrai*** ☐ ***Faux***

(6) *Décider, moyennant un risque de se tromper, entre les hypothèses H_0 : '' $\mu = \mu_0$ '' et H_1 : '' $\mu = \mu_1$ ''* ☐ ***Vrai*** ☐ ***Faux***

Un test statistique ne peut jamais démontrer si une hypothèse est vraie ou fausse. Il fournit seulement des probabilités conditionnées par sa réalisation, et ne peut ainsi constituer une preuve mathématique proprement dite de sa véracité. Ces probabilités interviennent dans le calcul de la p-value ($P(\overline{X} \geq \overline{x}_{ob}| H_0)$) dans le cas des tests de signification (approche de Fisher) et dans la détermination de la région critique RC ($P(RC| H_0)=\alpha$) dans le cas des tests d'hypothèses (approche de Neyman-Pearson). De ce fait, les modalités (1) et (2) de cette question sont fausses.

En revanche, la modalité (3) est vraie. Elle indique le rôle joué par un test statistique selon l'approche de Fisher. Rappelons que ce rôle est de conclure, avec une forte probabilité, si les données observées D_0 rejettent ou non l'hypothèse nulle H_0.

Par ailleurs, les probabilités conditionnelles impliquées dans une procédure de test statistique sont des probabilités de réalisation des données sachant que l'hypothèse nulle H_0 est vraie ($P(D_0|H_0)$), et non le contraire ($P(H_0| D_0)$). Ces deux types de probabilités sont bien entendu différents. Par conséquent, nous ne pouvons conclure à partir de l'application d'un test statistique que la réalisation d'une hypothèse est certaine (items (1) et (2)) ou qu'elle correspond à toute autre probabilité (item (4)). De ce fait, la modalité (4) est fausse[11].

[11] Néanmoins, certains outils statistiques permettent l'estimation des probabilités des hypothèses. Nous pouvons citer à titre d'exemple la statistique bayésienne.

La modalité (5) est fausse. En effet, dans une procédure de test statistique, H_0 est une hypothèse selon laquelle la réalisation de H_1 est due au seul hasard. Ensuite, les probabilités conditionnelles impliquées dans une telle procédure sont d'une part calculées en supposant a priori la réalisation certaine de H_0 (p-value=($P(\overline{X} \geq \overline{x}_{ob}|H_0)$ ou $P(RC|\ H_0)=\alpha$), et d'autre part utilisées pour décider a posteriori si nous acceptons ou rejetons l'idée de la réalisation certaine de H_0.

Enfin, la modalité (6) est vraie. Elle indique le rôle joué par un test statistique selon l'approche de Neyman-Pearson. Cette dernière permettra de décider entre H_0 et H_1, moyennant un risque de se tromper dans cette décision.

(B) Pour i = 0 ou 1, 1'hypothèse H_i ''$\mu=\mu_i$'' signifie que :

(1) *$\mu = \mu_i$* ☐ ***Vrai*** ☐ ***Faux***

(2) *La variable aléatoire X suit une loi $N(\mu_i, \sigma^2)$* ☐ ***Vrai*** ☐ ***Faux***

H_i : "$\mu = \mu_i$" est une écriture simplifiée de H_i : "$N(\mu, \sigma^2)=N(\mu_i, \sigma^2)$". Ceci est vrai puisqu'à chaque μ on associe une et une seule loi de probabilité $N(\mu, \sigma^2)$.

(C) Dans une procédure de test statistique, le calcul sous l'hypothèse H_0 de la probabilité

$$p=P\left[\frac{\sqrt{n_0}\left(\overline{X}-\mu_0\right)}{\sigma} \geq \frac{\sqrt{n_0}\left(\overline{x}_{ob}-\mu_0\right)}{\sigma}\right] = P\left[N(0,1) \geq \frac{\sqrt{n_0}\left(\overline{x}_{ob}-\mu_0\right)}{\sigma}\right]$$

correspond à :

(1) *La probabilité d'obtenir $\overline{X}$ supérieure ou égale à $\overline{x}_{ob}$, sachant que μ est égal à μ_0* ☐ ***Vrai*** ☐ ***Faux***

(2) *La probabilité de réalisation de H_0, sachant qu'on a observé les données D_0*

☐ ***Vrai*** ☐ ***Faux***

(3) *La probabilité* $P\left[\frac{f_{\mu_1}(X_1).....f_{\mu_1}(X_{n0})}{f_{\mu_0}(X_1).....f_{\mu_0}(X_{n0})} \geq c \mid \mu=\mu_0\right] = \alpha$, *où c est une constante positive calculée en fonction d'un seuil α fixé préalablement, indépendamment des données observées D_0* ☐ ***Vrai*** ☐ ***Faux***

La modalité (1) de cette question est vraie. En effet, la probabilité indiquée est la définition du concept de p-value ($P(\overline{X} \geq \overline{x}_{ob}|H_0)$), qui, après transformation, est égale à $P\left[N(0,1) \geq \frac{\sqrt{n_0}\left(\overline{x}_{ob} - \mu_0 \right)}{\sigma} \right]$.

La modalité (2) est fausse (se rapporter à l'explication donnée pour prouver la fausseté de la modalité (4) de l'item A).

La probabilité p= $P\left[N(0,1) \geq \frac{\sqrt{n_0}\left(\overline{x}_{ob} - \mu_0 \right)}{\sigma} \right]$ est l'indicateur de jugement selon l'approche de Fisher, que nous comparons à un seuil de signification α défini a posteriori, et à partir de laquelle on va tirer une conclusion, selon que cette probabilité est inférieure ou supérieure à α. Or, la probabilité $P\left[\frac{f_{\mu_1}(X_1).....f_{\mu_1}(X_{n0})}{f_{\mu_0}(X_1).....f_{\mu_0}(X_{n0})} \geq c \mid \mu = \mu_0 \right]$ indiquée dans la modalité (3) est fixée à α. De ce fait, la modalité (3) est fausse.

(D) Une procédure de test statistique se base sur le concept de seuil de signification souvent noté α (ou ε). A votre avis, le seuil de signification α :

(1) *Permet de construire, après avoir fixé la taille n_0 de l'échantillon, une règle de décision pour laquelle, au vu des données observées D_0 on décide de :*

- rejeter l'hypothèse H_0 (et accepter l'hypothèse H_1)

Ou

- accepter l'hypothèse H_0 (et rejeter l'hypothèse H_1) ☐ ***Vrai*** ☐ ***Faux***

(2) *Est directement comparé à la probabilité $P\left[N(0,1) \geq \frac{\sqrt{n_0}\left(\overline{x}_{ob} - \mu_0 \right)}{\sigma} \right]$ pour conclure au rejet de H_0, ou à l'échec dans le rejet de H_0* ☐ ***Vrai*** ☐ ***Faux***

Les modalités (1) et (2) de cette question sont toutes les deux vraies. Elles permettent d'expliciter le rôle que peut jouer le concept de seuil de signification dans une procédure de test statistique selon l'approche de Neyman-Pearson (modalité (1)) et selon l'approche de Fisher (modalité (2)).

(*E) Après application d'un test statistique, la (les) conclusion(s) qu'on peut tirer est (sont) :*

(1) *Rejeter H_0 OU Accepter H_0*	☐ ***Vrai***	☐ ***Faux***
(2) *Rejeter H_0 OU Echouer de rejeter H_0*	☐ ***Vrai***	☐ ***Faux***
(3) *Rejeter H_1 OU Echouer de rejeter H_1*	☐ ***Vrai***	☐ ***Faux***
(4) *Accepter H_1 OU Echouer de rejeter H_0*	☐ ***Vrai***	☐ ***Faux***

Les modalités vraies de cette question sont bien sûr (1) et (2) :

- (1) si le test statistique en question est vu selon l'approche de Neyman-Pearson ;
- (2) si le test statistique en question est vu selon l'approche de Fisher.

Cependant, en nuançant les réponses, si nous sommes face à un test statistique selon l'approche de Fisher, la modalité (1) devient fausse, du fait que la conclusion ''Accepter H_0'' est différente ''d'échouer de rejeter H_0 ''. De même que, si nous sommes face un test statistique selon l'approche de Neyman-Pearson, la modalité (2) devient fausse, du fait que la conclusion ''Echouer de rejeter H_0'' n'implique pas ''Accepter H_0''. En fait, il y a deux raisons pour cela :

- la première est qu'il peut y avoir d'autres raisons que celles explicitées dans l'hypothèse H_0 pour que les données soient conformes aux prédictions de H_0, en particulier, dans le cas où il y aurait un manque de spécificité de H_0 : des hypothèses H_i, autres que H_0, pourraient être elles qui soient vraies (et non H_0) ;
- la seconde est que le test peut manquer de puissance. Il peut arriver en effet que l'hypothèse H_1 soit vraie, alors que le dispositif expérimental ou le plan échantillonnal ne permettent pas de le détecter.

Bien évidement, la modalité (3) est fausse selon les deux approches.

La modalité (4) est à son tour fausse selon les deux approches, pour les raisons suivantes :

- Selon Fisher, la conclusion "Rejeter H_0" ne permet pas d'affirmer que le mécanisme impliqué dans l'hypothèse H_1 est démontré. Les observations peuvent en effet résulter d'un mécanisme d'action différent de celui qui est invoqué dans H_1. Rejeter H_0 implique seulement que H_1 est acceptable.
- Selon Neyman-Pearson, la décision "Rejeter H_1" est évidement différente "d'Echouer de rejeter H_0".

(F) Supposons qu'après application du test statistique nous ayons décidé d'accepter H_0. A votre avis, cela veut dire que :

(1) *L'acceptation de H_0 est vraie quelle que soit la taille n_0 de l'échantillon dont dérivent les données observées D_0, et quelle que soit la valeur du seuil α*

□ Vrai □ Faux

(2) *L'acceptation de H_0 dépend uniquement de la taille n_0 de l'échantillon dont dérivent les données observées D_0* ***□ Vrai □ Faux***

(3) *L'acceptation de H_0 dépend uniquement de la valeur du seuil α*

□ Vrai □ Faux

(4) *L'acceptation de H_0 n'est que provisoire : en fixant le seuil α et en augmentant suffisamment la taille n_0 de l'échantillon dont dérivent les données observées, on finit toujours par rejeter l'hypothèse H_0*

□ Vrai □ Faux

Nous sommes dans cette question face à un test d'hypothèses, à travers lequel nous devons décider entre H_0 et H_1. La région de rejet de l'hypothèse H_0 de ce test est $RC=\left\{(X_1,....,X_{n0}) / \overline{X} \in \left]\mu_0 + \Phi_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n0}},+\infty\right[\right\}$, où ϕ_α représente le quantile d'ordre (1-α) de la loi normale centrée réduite N(0,1).

Par ailleurs, la borne $\mu_0 + \Phi_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n0}}$ est une fonction de (α, n_0). Elle diminue, et par conséquent *la région de rejet s'élargit*, si nous augmentons la taille n_0 de l'échantillon ou/et si nous augmentons la valeur α du niveau du test. Par conséquent, les modalités (1), (2) et (3) de cet item sont toutes les trois fausses, et seule la modalité (4) est vraie.

(G) Dans cette question, les données observées D_0 et la valeur du seuil de signification α sont fixées. On considère alors les deux tests statistiques suivants :

- Le test statistique n°1 de H_0: "$\mu = \mu_0$" contre H_1: "$\mu = \mu_1$"

et

- Le test statistique n°2 de H_0: "$\mu = \mu_1$" contre H_1: "$\mu = \mu_0$"

Parmi les propositions suivantes, celle(s) qui est (sont) vraie (s) est (sont):

(1) *Si nous décidons de rejeter "$\mu = \mu_0$" par le test statistique n°1 alors nous devons décider d'accepter "$\mu = \mu_1$" par le test statistique n°2*

□ Vrai □ Faux

(2) *Si nous décidons de rejeter "$\mu = \mu_1$" par le test statistique n°1 alors nous devons décider d'accepter "$\mu = \mu_0$" par le test statistique n°2*

□ Vrai □ Faux

(3) *Les hypothèses H_0 et H_1 ne jouent pas un rôle symétrique dans une procédure de test statistique, par conséquent, le résultat fourni par le test statistique n°1 n'est pas le même que celui fourni par le test statistique n°2* ***□ Vrai □ Faux***

Dans cette question, nous sommes devant deux sortes de tests d'hypothèses, dans lesquels nous voulons décider entre H_0 et H_1.

La région de rejet du test d'hypothèses n°1 est :

$RC_1=\left\{(X_1,....,X_{n0}) / \overline{X} \in \left]\mu_0 + \Phi_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n_0}}, +\infty\right[\right\}$, celle du test d'hypothèses n°2 est :

$RC_2=\left\{(X_1,....,X_{n0}) / \overline{X} \in \left]-\infty, \mu_1 + \Phi_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n_0}}\right[\right\}$, avec $\mu_1 > \mu_0$.

Les réponses correctes aux différentes modalités de cet item sont présentées dans le tableau suivant :

	$-\infty$	$\mu_0 + \Phi_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n_0}}$	$\mu_1 + \Phi_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n_0}}$	$+\infty$
Décision du test d'hypothèses n°1	Accepter : "$\mu = \mu_0$"	Rejeter : "$\mu = \mu_0$"	Rejeter: "$\mu = \mu_0$"	
Décision du test d'hypothèses n°2	Rejeter : "$\mu = \mu_1$"	Rejeter : "$\mu = \mu_1$"	Accepter: "$\mu = \mu_1$"	
	⇩ La modalité (2) est vraie[12]	⇩ La modalité (1) est fausse ⇩ La modalité (3) est fausse		

Tableau 3 : Réponses aux modalités de l'item G.

[12] C'est seulement dans ces deux cas particuliers de tests d'hypothèses -que nous sommes en train de traiter- que la modalité (2) pourrait être considérée comme étant vraie. Mais, d'une manière générale, ceci n'est pas toujours le cas.

2.3. Codage et outil d'analyse retenus pour le traitement des réponses des étudiants

Les aspects étudiés dans ce questionnaire présentent, de part la nature même du contenu des tests statistiques, des liens conceptuels inhérents aux modèles d'organisation des tests d'hypothèses, notamment pour ce qui concerne les approches de Fisher et de Neyman-Pearson[13] : à ce propos, nous avons déjà présenté dans le tableau 1 (cf. §II.4 *Interprétation des procédures statistiques*), des exemples de modèles d'organisation qui illustrent bien les relations conceptuelles qui existent entre ces différents aspects.

Pour le traitement des réponses des étudiants, l'analyse factorielle des correspondances multiples (AFCM), nous a semblé être un outil efficace pouvant tenir compte de ce fait, puisqu'il va permettre d'analyser et d'interpréter les réponses des étudiants en termes de liens qui existent entre les réussites et les échecs aux modalités des différents items du questionnaire.
Par ailleurs, pour ne pas biaiser l'analyse, vu le nombre important de modalités (24) de l'ensemble des items (7) du questionnaire, face au nombre « limité » d'étudiants interrogés (70), nous avons décidé de retenir un codage en bimodalité « Réussite - Echec » pour toute modalité de chaque item du questionnaire.

Dans le tableau 4 suivant, nous résumons le codage des modalités des items du questionnaire, les libellés des items, ainsi que la signification associée à chaque modalité :

Libellé	**Codage**	**Signification**	**RR**[14]	**RE**[15]
Conceptions relatives au *rôle* d'un test statistique	A1	• *Conceptions bayésiennes :* *-Conception déterministe:* • *En termes de vérité absolue de H_0.*	A1R	A1E
	A2	• *En termes de vérité absolue de H_1.*	A2R	A2E
	A4	*-Conception bayésienne directe.*	A4R	A4E
	A5	*-Conception bayésienne indirecte.*	A5R	A5E
	A3	• *Conception Fishérienne.*	A3R	A3E
	A6	• *Conception Neyman-Pearsonienne.*	A6R	A6E

[13] Ce sont ces deux approches qui nous intéressent le plus, vue que l'approche bayésienne est quasi absente de l'enseignement des tests statistiques au niveau de l'enseignement initial universitaire.
[14] **R**éponse **R**éussie**.**
[15] **R**éponse **E**chouée (y compris les **N**on **R**éponses).

Conception concernant la *signification* des hypothèses statistiques H_i	B1 B2	• *Conception paramétrique :*''$\theta = \theta_i$''. • *Conception en termes de modèle probabiliste :* '' $P_\theta = P_{\theta i}$''.	B1R B2R	B1E B2E
Conception sur la *p-value* exprimée en fonction d'une statistique test	C1 C2 C3	• *$P(D \geq D_0 \mid H_0)$.* • *Probabilité inverse : $P(H_0 \mid D_0)$.* • *Probabilité de la région critique selon Neyman-Pearson.*	C1R C2R C3R	C1E C2E C3E
Localisation du seuil de signification dans une procédure de tests statistiques	D1 D2	• *Avant collecte des données (approche de Neyman-Pearson).* • *Après collecte des données (approche de Fisher).*	D1R D2R	D1E D2E
Résultat d'un test statistique	E1 E2 E3 E4	• *Résultats en conformité avec l'approche de Neyman-Pearson.* • *Résultats en conformité avec l'approche de Fisher.* • *Résultats en symétrie totale avec celles de l'approche de Fisher.* • *Résultats en symétrie partielle avec celles de l'approche de Fisher.*	E1R E2R E3R E4R	E1E E2E E3E E4E
Aspect provisoire du résultat d'un *test d'hypothèses* : statut du seuil de signification α et de la taille n_0 de l'échantillon face à l'acceptation de H_0	F1 F2 F3 F4	• *Résultat indépendant de la taille n_0 de l'échantillon et de la valeur seuil α.* • *Résultat dépendant uniquement de la taille n_0 de l'échantillon.* • *Résultat dépendant uniquement de la valeur seuil α.* • *Résultat provisoire, dépendant du seuil α, de la taille n_0 de l'échantillon et des données observées D_0.*	F1R F2R F3R F4R	F1E F2E F3E F4E
Aspect asymétrique du résultat d'un *test d'hypothèses*	G1 G2 G3	• *Asymétrie à droite, du résultat : Rejet de H_0 par le test n°1 implique une acceptation de H_0 par le test n° 2.* • *Asymétrie à gauche, du résultat : Rejet de H_1 par le test n°1 implique une acceptation de H_1 par le test n° 2.* • *Asymétrie totale du résultat: Résultat du test n°1 est en général différent de celui du test n°2.*	G1R G2R G3R	G1E G2E G3E

Tableau 4 : Codage des modalités de chaque item du questionnaire.

3.4. Analyse et interprétation des réponses des étudiants

3.4.1. Valeurs propres et inertie totale

L'analyse factorielle des correspondances multiples[16] appliquée au tableau disjonctif complet issu du codage des réponses des étudiants, a conduit à des valeurs propres non nulles de moyenne 0,042 (l'inverse du nombre de modalités qui est égal à 24). Par ailleurs, les valeurs propres supérieures à cette moyenne sont : λ_1=0,122, λ_2=0,095, λ_3=0,089, λ_4=0,083, λ_5=0,069, λ_6= 0,067, λ_7=0,055, λ_8=0,051 et λ_9=0,047. L'inertie totale est égale à 1 (nombre de valeurs propres non nulles, divisé par le nombre de modalités).

3.4.2. Nombre d'axes retenus dans l'analyse

Nous rappelons tout d'abord que l'inertie totale en analyse factorielle de correspondances multiples appliquée à un tableau disjonctif complet n'a pas de signification statistique[17] ; elle ne dépend pas des observations, elle dépend uniquement du nombre de variables et du nombre de modalités impliquées. Par ailleurs, le calcul des taux d'inertie liés aux neuf valeurs propres ci-dessus conduit à des pourcentages décroissant de 12% à pratiquement 5%, ce qui donne une idée assez pessimiste des parts d'informations obtenues par l'analyse factorielle. Nous avons donc eu recours à la formule proposée par Benzécri (1979), qui dans une telle situation, va permettre une meilleure appréciation des taux d'inertie :

Inertie corrigée = $\left(\frac{s}{s-1}\right)^2\left(\lambda_k-\frac{1}{s}\right)^2$ pour $\lambda_k > \frac{1}{s}$, s étant le nombre de modalités du questionnaire et λ_k les valeurs propres obtenues par l'analyse du tableau disjonctif complet.

L'application de cette formule aux inerties initiales[18], donne pour les valeurs propres supérieures à 0,042 (égale à $\frac{1}{24}$) les résultats suivants :

0,006994, 0,003104, 0,002433, 0,001837, 0,000809, 0,000683, 0,000191, 0,000095 et 0,000033

Le tableau 5 suivant illustre les pourcentages d'inerties corrigées et leurs cumuls, correspondant aux valeurs propres supérieures à la valeur moyenne $\frac{1}{24}$:

---

[16] Cette analyse a été conduite à l'aide du logiciel Statistica (Version 6).

[17] Ce n'est pas le cas pour le calcul d'inertie en analyse de correspondances simples d'un tableau de contingence.

[18] Dans la suite de l'analyse, nous nous limiterons simplement aux 9 premières valeurs propres.

Valeurs propres	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8	λ_9
% Inerties corrigées	43%	19%	15%	11%	5%	4%	1%	0,5%	0,2%
Cumul % Inerties corrigées	**43%**	**62%**	**77%**	**89%**	94%	98%	99%	99,5%	≈ 100%

Tableau 5 : Pourcentages d'inerties corrigées et leurs cumuls.

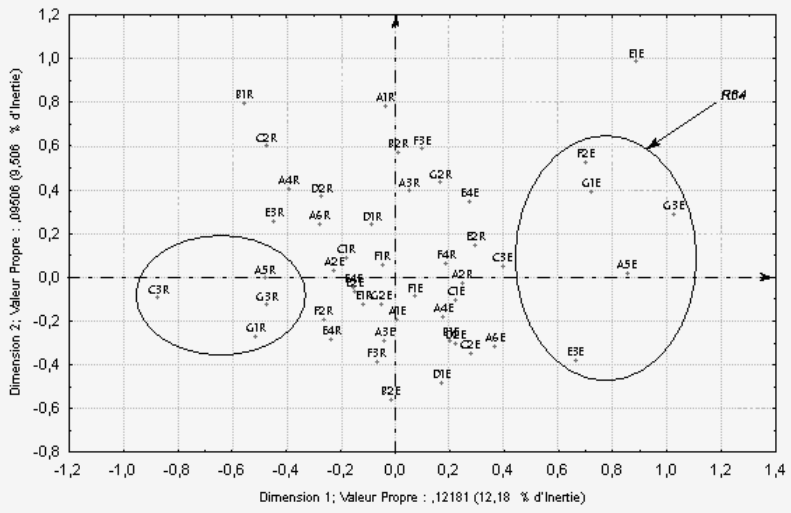
Par conséquent, le premier axe représente 43% de l'information totale, le deuxième axe 19%, le troisième axe 15% et le quatrième axe 11% (les axes suivants chutent à une part d'information représentant moins de la moitié du quatrième axe). Ces valeurs indiquent que l'essentiel de l'information est lié aux quatre premiers axes factoriels qui représentent ensemble 89% de l'information totale.

Par ailleurs, la première valeur propre λ_1=0,122 est significativement supérieure à λ_2=0,095. Par contre, λ_2=0,095, λ_3=0,089 et λ_4=0,083 sont très proches ; cela signifie que nous sommes pratiquement en présence d'une valeur propre multiple d'ordre 3. Par conséquent, il va falloir étudier d'une part l'axe 1, et d'autre part le plan formé par les axes 2 et 3 et celui formé par les axes 3 et 4, plutôt que de chercher à donner séparément une interprétation à chacun de ces 3 derniers axes.

3.4.3. Interprétation du premier axe factoriel : (Axe de réussite/Echec)

L'analyse factorielle des correspondances multiples conduit à une inertie[19] de 43% pour l'axe 1. En outre, presque toutes les réussites ont une coordonnée négative sur cet axe, par opposition aux échecs, qui y ont tous une coordonnée positive (voir graphique 1). Par conséquent, l'axe 1 s'interprète comme étant l'axe de *réussite-échec*.

[19]Il s'agit de l'inertie corrigée.



Graphique 1 : Plan factoriel (1,2).

Les modalités qui contribuent le plus à l'axe 1 sont celles entourées dans le graphique 1 ci-dessus[20]. Elles ont une contribution comprise entre 4,6% et 11,3%. La qualité de représentation de ces modalités par rapport à cet axe est comprise entre 0,18 et 0,48. Nous pouvons donc considérer que ce sont les items A5, C3, E3, F2, G1 et G3, correspondant à ces modalités, qui sont les plus représentatifs de l'ensemble du questionnaire.

Premièrement, nous constatons, comme le montre le tableau 6 ci-dessous, que la réussite aux items C3, G1, G3 et A5, et l'échec aux items F2, G1, A5 et G3, sont directement liés au degré d'appréhension du concept de probabilités conditionnelles P(A|B) usuellement impliqué dans une procédure de tests statistiques, où A et B désignent les événements D (Données observées ou données plus extrêmes) ou H (Hypothèses statistiques H_i, avec i =0 ou 1).

Item	Éléments d'appréhension du concept de probabilités conditionnelles
C3	• *La p-value, P(D|H), exprimée, selon l'approche de Fisher, à partir d'une statistique test, est une fonction des données observées, et non égale à une valeur fixe.*

[20] Notons au passage que ces modalités occupent des positions correspondant aux modalités ayant les plus grandes cordonnées en valeur absolue par rapport au 1er axe factoriel. Sinon, le reste des modalités occupent quasiment des positions intermédiaires, avec en outre de faibles contributions relatives.

G1 et G3	• *[P(RC| H_0) faible et P(RC| H_1) élevée] n'est pas toujours équivalente à [P(RC^c|H_1) faible et P(RC^c| H_0) élevée] ; avec RC : Région Critique, RC^c : Complémentaire de RC.*
A5	• *La probabilité conditionnelle qui pourrait être déterminée dans le cadre du paradigme de tests statistiques est P(D|H) et non P(H|D).*
F2	• *La région critique (RC), déterminée par le biais de la résolution de l'équation : $P(RC|H_0)\approx\alpha$, ne dépend pas seulement de la taille n_0 de l'échantillon, mais aussi d'autres facteurs.*

Tableau 6 : Éléments d'appréhension du concept de probabilités conditionnelles.

De ce fait, ce facteur s'interprète comme étant « *un gradient » d'appréhension du concept de probabilités conditionnelles, impliqué dans une procédure de tests statistiques*. En effet, d'une part, cet axe oppose la réussite et l'échec dans *la distinction entre le paradigme de tests statistiques et celui de statistiques bayésiennes* (cf. item A5 dans le tableau 6) : la probabilité conditionnelle susceptible d'être déterminée dans le cadre des procédures de tests statistiques est P(D|H) et non P(H|D), qui elle, est relative à l'approche bayésienne.

D'autre part, l'opposition des modalités C3R « la valeur de la p-value n'est pas égale à une valeur fixe » et E3E « le résultat fourni par application d'un test statistique est en symétrie totale avec celui fourni par l'application d'un test de signification », permet de conclure que cet axe distingue la réussite de l'échec dans *l'appréhension du paradigme de tests de signification* (approche de Fisher).

De la même façon, l'opposition de la réussite aux items G1 et G3 « le résultat fourni par l'application d'un *test d'hypothèses* est caractérisé par un aspect asymétrique », et l'échec à ces items ainsi qu'à l'item F2 « dans un test d'hypothèses, l'acceptation de H_0 dépend uniquement de la taille n_0 de l'échantillon », permet de conclure que cet axe distingue aussi la réussite de l'échec dans *l'appréhension du paradigme de tests d'hypothèses* (approche de Neyman-Pearson)

Enfin, la réussite ou l'échec[21] à l'item C3 « le concept de p-value est différent du niveau de signification – seuil – permettant la construction d'une région de rejet », traduit le fait que cet axe oppose aussi la réussite et l'échec dans *la distinction entre le paradigme de tests de signification et celui de tests d'hypothèses*.

[21] Noter sur le graphique 1 que la modalité C3E est à proximité du groupe de modalités d'échec ayant fortement contribué à la construction du premier facteur.

Pour confirmer ces interprétations, nous avons calculé les coordonnées par rapport au premier axe de deux individus supplémentaires : le premier individu (de coordonnée **-1,664**) est caractérisé par les modalités C3R, G1R, G3R et A5R. C'est un étudiant ayant une bonne appréhension des aspects relatifs au concept de probabilités conditionnelles, impliqué dans une procédure de tests statistiques, à la distinction entre le paradigme de tests statistiques et celui de statistiques bayésiennes, à l'approche de tests de signification et celle de tests d'hypothèses et à la distinction entre ces deux paradigmes. Le deuxième individu (de coordonnée **1,809**) est caractérisé par les modalités G1E, G3E, A5E, C2E et F2E ; c'est un étudiant ayant une mauvaise appréhension de tous ces aspects.

Par ailleurs, nous avons consulté les copies de tous les étudiants ayant répondu incorrectement aux items A5, E3, G1 et G3, l'étudiant **R64** représente l'individu ayant la plus forte contribution à l'axe 1, avec une coordonnée positive sur cet axe (voir graphique 1) : sur sa copie, nous avons pu relever en particulier les trois erreurs illustrées dans le tableau 7 suivant :

Type d'erreur	Item	Réponse de l'individu R64
Erreur d'ambiguïté linguistique	A5	• *La probabilité indiquée dans cette question est :''la probabilité que le résultat observé soit dû au seul hasard''. Cette probabilité est en fait équivalente à* $P\left(N(0,1) \geq \sqrt{n_o}\left(\bar{x}_{ob} - \mu_o\right)/\sigma\right)$.
Erreur d'interprétation	E3	• *Le résultat d'un test statistique est : Accepter* H_1 *ou Echouer de rejeter* H_0*. Or l'acceptation de* H_1 *est équivalente à l'échec dans le rejet de* H_1*, et l'échec dans le rejet de* H_0 *est équivalent à l'acceptation de* H_0 *(c'est-à-dire le rejet de* H_1*).*
Erreur de probabilités conditionnelles	G1	• *Puisque le rejet de* H_0 *implique l'acceptation de* H_1 *alors l'item G1 est vrai.*
	G3	• *Puisque G1 et G2 sont tous les deux vrais, alors G3 est faux. Donc, les hypothèses* H_0 *et* H_1 *jouent un rôle symétrique dans une procédure de test statistique.*

Tableau 7 : Erreurs significatives relevées dans l'interprétation de l'axe 1.

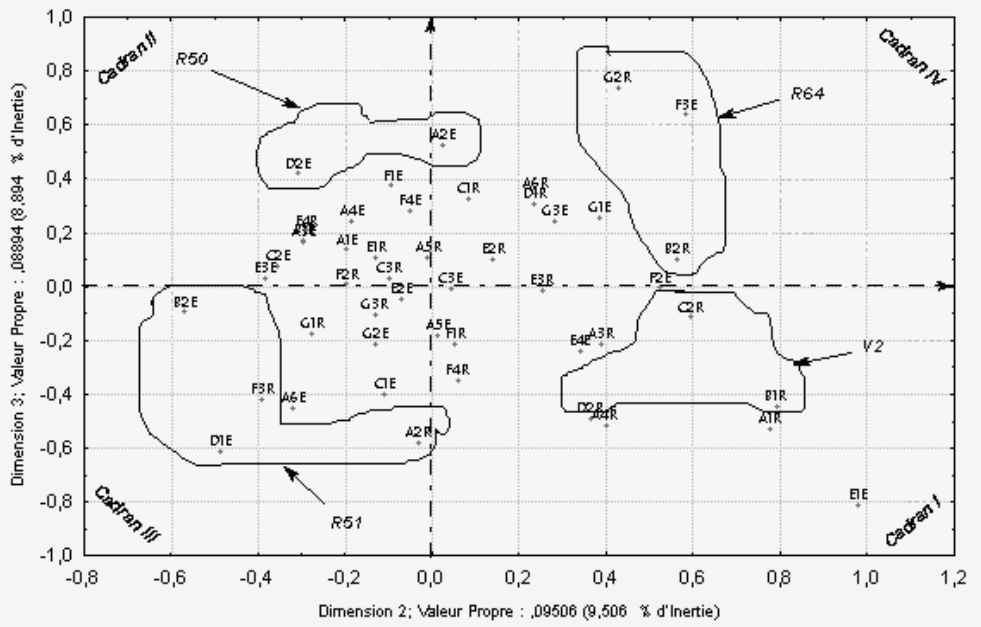
En conclusion, l'axe 1 s'interprète comme étant *un axe de réussite/échec* dans l'appréhension :

- du concept de probabilités conditionnelles impliqué dans une procédure de tests statistiques ;

- de la distinction entre le paradigme de tests statistiques et celui de statistiques bayésiennes ;
- du paradigme de tests de signification (approche de Fisher) ;
- du paradigme de tests d'hypothèses (approche de Neyman-Pearson) ;
- de la distinction entre le paradigme de tests de signification et celui de tests d'hypothèses.

3.4.4. Interprétation du plan (2,3) : (Plan de maîtrise des tests statistiques)

L'analyse factorielle des correspondances multiples conduit à des inerties[22] de 19% pour l'axe 2 et de 15% pour l'axe 3. Le graphique 2 suivant représente la projection de l'ensemble des modalités par rapport au plan (2,3) :



Graphique 2 : Plan factoriel (2,3).

Les modalités correspondant aux plus fortes contributions relatives (comprises entre 3,4% et 7,4%) dans la construction des axes 2 et 3, et ayant une bonne représentation, sont celles qui sont entourées dans le graphique 2.

En cherchant parmi ces modalités les groupements qui présentent les plus fortes oppositions, nous constatons qu'il y a quatre groupes de modalités qui s'opposent

[22]Il s'agit d'inerties corrigées.

deux à deux[23] : d'une part B1R, C2R et D2R contre A2E et D2E, et d'autre part A2R, B2E, D1E et F3R contre B2R, F3E et G2R :

-Cadran I vs Cadran II

L'opposition de la réussite aux items B1, C2 et D2 face à l'échec aux items A2 et D2 traduit l'opposition d'une bonne maîtrise de l'approche de Fisher (C2R et D2R) favorisant le non déterminisme (B1R) d'un test statistique face à une mauvaise maîtrise de cette approche (D2E) favorisant le déterminisme (A2E) d'un test statistique.

Pour confirmer cette interprétation, nous avons consulté les réponses de l'individu **R50** (voir graphique 2) qui a la plus forte contribution par rapport à *l'axe 1*, parmi les individus ayant une forte contribution par rapport à l'axe 2 et/ou 3 et se trouvant dans le cadran II, chez qui nous avons relevé les erreurs illustrées dans le tableau 8 ci-dessous :

Type d'erreur	**Item**	**Réponse de l'individu R50**
Erreur de déterminisme	A2	*Dans une procédure de tests statistiques, le rejet de H_0 est équivalent à la probabilité $P(H_0\|D_0)$ est égale à 0, c'est-à-dire que $P(H_1\|D_0)$ est égale à 1. Ce qui signifie que '' $\mu=\mu_1$ ''.*
Erreur procédurale	D2	*Comparer $P\left(N(0,1) \geq \sqrt{n_o}(\bar{x}_{ob} - \mu_o)/\sigma\right)$ à α n'est pas suffisant pour conclure.*

Tableau 8 : Erreurs significatives relevées dans l'interprétation de l'opposition des cadrans I et II du plan (2,3).

Nous pouvons donc conclure que les cadrans I et II du plan (2,3) opposent *des erreurs procédurales favorisant le déterminisme dans l'approche des tests statistiques* contre une *bonne maîtrise de l'approche de Fisher favorisant une procédure non déterministe*.

- Cadran III vs Cadran IV

Ces deux cadrans opposent l'échec aux items B2 et D1 et la réussite aux items A2 et F3, contre la réussite aux items B2 et G2 et l'échec à l'item F3 : il s'agit ici d'une opposition entre une maîtrise partielle (A2R, F3R, B2E et D1E) des tests d'hypothèses (approche de Neyman-Pearson), contre une maîtrise de ces tests (B2R et G2R) accompagnée d'un « automatisme procédural » (F3E).

[23] Voir Cadran I, Cadran II, Cadran III et Cadran IV du graphique 2.

En effet, les réponses de l'individu **R51** (voir graphique 2) qui a la plus forte contribution par rapport à *l'axe 1*, parmi les individus ayant une forte contribution par rapport à l'axe 2 et/ou 3 et se trouvant dans le cadran III, vont dans le sens de cette interprétation (voir tableau 9) :

Type d'erreur	Item	Réponse de l'individu R51
Erreur implicite	B2	*H_i ne signifie pas que $X\sim N(\mu_i, \sigma^2)$ parce que, par hypothèse, X suit déjà $N(\mu, \sigma^2)$ et nous avons $\mu \neq \mu_i$.*
Erreur d'amalgame	D1	*La valeur de α est directement comparée à $P\left(N(0,1) \geq \sqrt{n_o}(\bar{x}_{ob} - \mu_o)/\sigma\right)$ pour conclure au rejet ou à l'échec dans le rejet de H_0.*

Tableau 9 : Erreurs significatives relevées dans l'interprétation du cadran III du plan (2,3).

L'individu **R64** (voir graphique 2) qui a la plus forte contribution par rapport à *l'axe 1*, parmi les individus ayant une forte contribution par rapport à l'axe 2 et/ou 3 et se trouvant dans le cadran IV, a échoué à l'item F3. Sa réponse à cet item a permis d'identifier une *erreur d'automatisme* : *"L'acceptation de H_0 dépend uniquement de α puisque à cette seule valeur (α) qu'on compare la probabilité $P\left(N(0,1) \geq \sqrt{n_o}(\bar{x}_{ob} - \mu_o)/\sigma\right)$ pour conclure, et non à d'autres valeurs*".

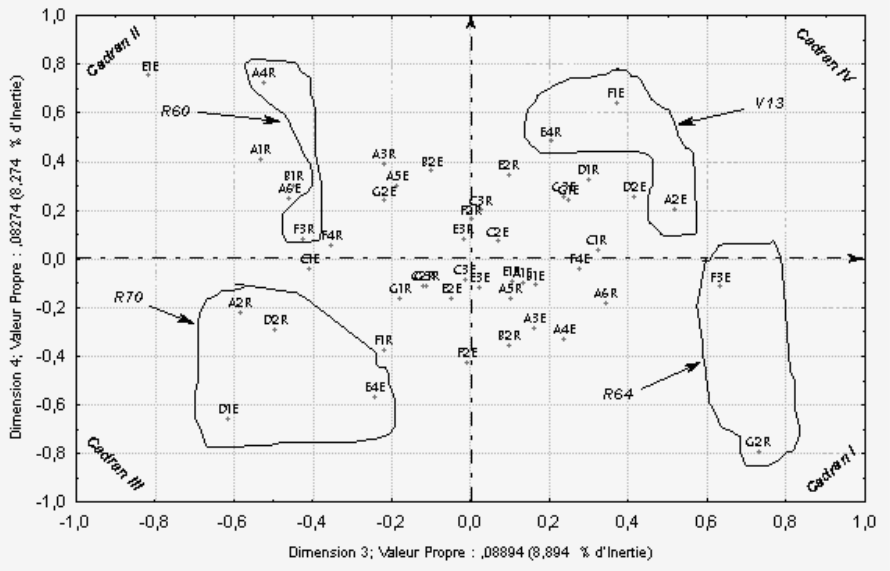
Ainsi, nous pouvons conclure que les cadrans III et IV du plan (2,3) opposent *des erreurs d'amalgame et d'implicite* à *une erreur d'automatisme procédural*.

En conclusion, le plan (2,3) est *un plan de maîtrise des tests statistiques* (degré d'appréhension des tests de signification et des tests d'hypothèses) qui se traduit par :

- *l'opposition d'une bonne maîtrise de l'approche de Fisher favorisant une procédure non déterministe contre une mauvaise maîtrise de cette approche favorisant un déterminisme procédural (CADRAN I vs CADRAN II) ;*
- *l'opposition d'une maîtrise partielle de l'approche de Neyman-Pearson contre une maîtrise de cette approche accompagnée d'automatisme procédural (CADRAN III vs CADRAN IV).*

3.4.5. Interprétation du plan (3,4) : (Plan de distinction entre les trois paradigmes)

L'analyse factorielle conduit à une inertie[24] de 15% pour l'axe 3 et de 11% pour l'axe 4. Le graphique 3 suivant représente la projection des modalités par rapport au plan (3,4) :



Graphique 3 : Plan factoriel (3,4).

Les modalités correspondant aux plus fortes contributions relatives (comprises entre 5% et 8,2%) dans la construction des axes 3 et 4, et ayant une bonne représentation, sont celles qui sont entourées dans le graphique 3.

Ces modalités, distribuées en quatre regroupements (voir cadrans de I à IV, graphique 3), donnent lieu dans le plan factoriel (3,4) à deux oppositions :

- *Cadran I vs Cadran II*

L'opposition de l'échec à l'item F3 et de la réussite à l'item G2, contre la réussite aux items A4 et F3 traduit l'opposition d'une maîtrise partielle de l'approche de tests d'hypothèses (G2R et F3E) contre une maîtrise de cette approche (F3R), avec la distinction entre le paradigme de tests statistiques et celui de statistiques bayésiennes.

En allant consulter la réponse (incorrecte) à l'item F3 de l'individu **R64** (voir graphique 3) qui a la plus forte contribution par rapport à *l'axe 1*, parmi les

[24]Il s'agit de l'inertie corrigée.

individus ayant une contribution très élevée par rapport à l'axe 3 et/ou 4 et se trouvant dans le cadran I, nous avons repéré une *erreur d'automatisme procédural,* exprimée de la façon suivante :

"*L'acceptation de H_0 dépend uniquement de α puisque à cette seule valeur (α) qu'on compare la probabilité* $P\left(N(0,1) \geq \sqrt{n_o}(\bar{x}_{ob} - \mu_o)/\sigma\right)$ *pour conclure, et non à d'autres valeurs"*

Nous pouvons donc conclure que les cadrans I et II du plan (3,4) opposent *une erreur d'automatisme procédural contre une maîtrise de l'approche de tests d'hypothèses accompagnée d'une distinction entre le paradigme de tests statistiques et celui de statistiques bayésiennes*.

- Cadran III vs Cadran IV

L'opposition de l'échec aux items D1 et E4 et de la réussite aux items A2 et D2, contre la réussite à l'item E4 et l'échec aux items A2 et F1, traduit l'opposition d'une maîtrise partielle de l'approche de tests de signification (D2R et E4E), accompagnée d'une procédure non déterministe du paradigme de tests statistiques (A2R), contre une non maîtrise de l'approche de tests d'hypothèses (D1E), et d'une maîtrise partielle de l'approche de tests de signification (E2R) accompagnée de procédure déterministe (A2E et F1E).

Les réponses (incorrectes) aux items D1 et E4 de l'individu **R70** (voir graphique 3) qui a la plus forte contribution par rapport à *l'axe 1*, parmi les individus ayant une contribution très élevée par rapport à l'axe 3 et/ou 4 et se trouvant dans le cadran III, a permis de repérer une *erreur d'amalgame* illustrée dans le tableau 10 suivant :

Item	Réponse de l'individu R70
D1	*α ne participe pas à la construction d'une règle de décision. Mais, nous devons la comparer à la probabilité* $P\left(N(0,1) \geq \sqrt{n_o}(\bar{x}_{ob} - \mu_o)/\sigma\right)$ *pour conclure.*
E4	*Le résultat d'un test statistique est soit rejeter H_0 soit accepter H_0. Or le rejet de H_0 est équivalent à l'acceptation de H_1, et l'acceptation de H_0 est équivalente à l'échec dans le rejet de H_0.*

Tableau 10 : Erreurs significatives relevées dans l'interprétation du cadran III du plan (3,4).

Par ailleurs, en consultant les réponses (incorrectes) aux items A2 et F1 de l'individu **V13** (voir graphique 3) qui a la plus forte contribution par rapport à *l'axe 1*, parmi les individus ayant une contribution très élevée par rapport à l'axe 3

et/ou 4 et se trouvant dans le cadran IV, nous avons repéré une *erreur procédurale de déterminisme* illustrée dans le tableau 11 suivant :

Item	***Réponse de l'individu R70***
A2	*Un test statistique sert à démontrer que "$\mu=\mu_0$" ou que "$\mu=\mu_1$".*
F1	*Le résultat d'un test statistique est de démontrer que "$\mu=\mu_0$" ou que "$\mu=\mu_1$" indépendamment de la taille de l'échantillon n_0 et du seuil α.*

Tableau 11 : Erreurs significatives relevées dans l'interprétation du cadran IV du plan (3,4).

Nous pouvons donc conclure que les cadrans III et IV du plan (3,4) opposent *une erreur d'amalgame* contre une erreur *de déterminisme procédural*.

En résumé, le plan (3,4) est un *plan de distinction entre les trois paradigmes* : tests de signification, tests d'hypothèses et statistiques bayésiennes. Cela se traduit par :

- *l'opposition d'une maîtrise partielle de l'approche de tests d'hypothèses contre une maîtrise de cette approche favorisant la distinction entre le paradigme de tests statistiques et celui de statistiques bayésiennes (CADRAN I vs CADRAN II) ;*
- *l'opposition d'une maîtrise partielle de l'approche de tests de signification et d'une non maîtrise de celle de tests d'hypothèses, accompagnées de procédure non déterministe, contre une maîtrise de l'approche de tests de signification, accompagnée de procédure déterministe (CADRAN III vs CADRAN IV).*

4. Conclusions et perspectives de recherche

Les tests statistiques occupent une place importante dans l'inférence statistique, cependant leur enseignement est souvent réduit à une simple présentation de recettes, que les étudiants s'approprient et restituent de manière mécanique, sans que cela représente en soi un réel objectif. En fait, l'intérêt de l'enseignement des tests statistiques, est avant tout de développer chez les étudiants *une façon de penser* pour répondre à des questions d'inférence statistique, tout en leur fournissant les outils mathématiques qui permettent d'atteindre cet objectif.

Les tests statistiques cherchent à évaluer la défaillance qui existe entre hypothèse(s) H et données D_0 observées. Les deux paradigmes développés pour répondre à cette question font référence aux probabilités conditionnelles $P(D_0 | H)$ et $P(H | D_0)$, pour donner lieu respectivement aux deux approches suivantes :

- l'approche fréquentiste, qui est à la base des tests statistiques et dont le développement a donné lieu à deux types de procédures, les tests de signification de Fisher et les tests d'hypothèses de Neyman-Pearson ;
- l'approche subjectiviste, qui a donné lieu aux statistiques bayésiennes qui ont aussi apporté des solutions aux tests statistiques.

La présentation de ces deux approches pour l'introduction des tests statistiques peut s'avérer bénéfique auprès des étudiants, elle peut jouer le rôle de support de base d'interprétations, en particulier pour ce qui est de :

- une bonne interprétation des procédures mises en jeu, elle permet d'éviter par exemples des confusions dues à l'inversion des conditions des probabilités conditionnelles mises en jeu dans cette approche : *approche probabiliste erronée* (cf. tableaux 6 et 7 dans l'interprétation du premier axe factoriel), ou encore des conclusions erronées à propos de la p-value (cf. tableau 6 dans l'interprétation du premier axe factoriel et tableau 10 dans l'interprétation du plan factoriel (3,4)), qui peuvent aussi se traduire en termes d'importance (ou non) de l'hypothèse (scientifique) étudiée ;
- une interprétation des hypothèses statistiques en termes de modèles statistiques, permettant d'éviter entre autres chez les étudiants de privilégier une *approche déterministe* dans leur interprétation de la procédure d'un test statistique (cf. tableau 11 dans l'interprétation du plan factoriel (3,4)).

L'enseignement des tests statistiques peut conduire à un amalgame entre les deux approches de Fisher et de Neyman-Pearson (cf. tableau 6 dans l'interprétation du plan factoriel (2,3)). Cet amalgame peut ne pas être apparent dans beaucoup de situations classiquement traitées auprès des étudiants, comme c'est le cas pour certains tests paramétriques relevant de modèles continus. En effet, dans ce type de situations, les deux approches utilisent une *procédure hybride* dans la recherche d'indicateurs de jugement. Néanmoins, les deux approches renvoient à deux logiques fondamentalement différentes au niveau de leurs conclusions, qu'il est important de souligner auprès des étudiants à travers des exemples appropriés.

Les tests d'hypothèses statistiques de Neyman-Pearson, largement enseignés à l'université, sont construits à partir de procédures spécifiques mettant en avant deux risques, un de première espèce et un de seconde espèce (puissance), ne faisant pas jouer aux deux hypothèses mises en jeu dans le test un rôle symétrique. Il est alors important de souligner auprès des étudiants cette question de dissymétrie (cf. tableau 7 dans l'interprétation du premier axe factoriel), sous ses divers aspects, à travers divers exemples, et d'en expliquer l'effet et les limites dans l'élaboration des tests chez Neyman-Pearson.

Nous avons présenté ici les diverses approches élaborées pour traiter des problèmes de tests statistiques, en soulevant quelques difficultés et fausses interprétations que l'on pourrait préconiser chez les étudiants en situation d'enseignement, d'ailleurs, à ce propos, les résultats d'analyse de productions des étudiants que nous avons interrogés le confirment largement. En fait, ce travail constitue une étape fondamentale de notre recherche, il représente une analyse a priori importante en vue d'une élaboration de séquences d'enseignement sur les tests d'hypothèses statistiques, que nous prévoyons expérimenter auprès d'étudiants de licences de filières scientifiques à l'université[25]. En outre, nous pensons aussi intégrer lors de ces séquences d'enseignement un logiciel[26] (tableur numérique) permettant aux étudiants de traiter diverses situations de tests statistiques, tout en faisant varier les paramètres des situations étudiées, base de données, tailles des échantillons, seuil α de signification, etc.

L'objectif de notre recherche est d'étudier l'effet d'un enseignement de tests statistiques pour lequel on aura introduit deux actions de natures différentes :

- la première est qualitative, il s'agit de tenir compte des éléments mis en avant par l'analyse a priori précédente, ainsi que des résultats de l'analyse des productions des étudiants interrogés.
- la seconde est quantitative, elle concerne l'introduction d'un environnement informatique permettant des traitements de situations de tests statistiques, avec la possibilité de variation des paramètres qui y interviennent.

A l'issue de ce travail, nous pensons être en mesure de fournir des propositions concrètes pour l'élaboration d'ingénieries didactiques sur les tests statistiques.

[25] Le Maroc a adopté depuis 2003 pour l'université le système LMD, avec une organisation semestrielle des enseignements.

[26] En nous inspirant de Excel 2000 (J-.P. Georgin et M. Gouet, 2000), nous allons développer notre propre tableur sur les tests statistiques.

Bibliographie

AMERICAN PSYCHOLOGICAL ASSOCIATION (1994), *Publication manual of the American Psychological Association* (4th ed.), Washington, DC: Author.

BATANERO, C. (2000), Controversies around the role of statistical tests in experimental research. *Mathematical Thinking and Learning*, **2(1-2)**, 75–98.

BATANERO C. & DIAZ C. (2006), Methodological and Didactical Controversies around Statistical Inference, *Proceedings of 38th Conference of the French Statistical Conference,* Paris: SFDE. CDROM.

BENZECRI, J.P. (1979), Sur le calcul des taux d'inertie dans l'analyse d'un questionnaire, *Cahiers de l'analyse des données,* **4**, 377–378.

BEN-ZVI D. & GARFIELD G. (2004), "Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Goals, Definitions, and Challenges" in D. Ben-Zvi & G. Garfield (eds), *The Challenge of Developing Statistical Literacy. Reasoning and Thinking*, Dordrecht: 3–16.

CARVER R.P. (1978), The case against significance testing. *Harvard Educational Review,* **48**, 378–399.

CASTRO SOTOS, A.E., VANHOOF, S., VAN DEN NOORTGATE, W. & ONGHENA, P. (2007), "Students' misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education", *Educational Research Review*, **2**, 98–113.

COBB, G. & MOORE, D. (1997), "Mathematics, Statistics, and Teaching", *The American Mathematical Monthly*, **104(9)**, 801–823.

EDWARDS, W., LINDMAN, H. & SAVAGE, L.J. (1963), Bayesian statistical inference for psychological research, *Psychological Review*, **70**, 193–242.

FALK, R. & GREENBAUM, C.W. (1995), Significance tests die hard. The amazing persistence of probabilistic misconception, *Theory and Psychology,* **5**, 75–98.

FISHER, R. A. (1935), *The design of experiments*, Oliver and Boyd, Edinburgh.

FISHER, R. A. (1956), *Statistical methods and scientific inference*, Oliver and Boyd, Edinburgh.

GEORGIN, J.-P. & GOUET, M. (2000), *Statistiques avec Excel 2000*, Eyrolles, Paris.

GIGERENZER, G. (1993), *The Superego, the ego and the id in statistical reasoning. In G. Keren & C. Lewis (Eds), A handbook for data analysis in the behavioural sciences: Methodological issues*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

GLINER, J. A., LEECH, N.L. & MORGAN, G.A. (2002), Problems with null hypothesis significance testing (NHST): What do the textbooks say? *The Journal of Experimental Education*, **71(1)**, 83–92.

GORDON, H.R.D. (2001), American Vocational Education Research Association members' perceptions of statistical significance tests and other statistical controversies, *Journal of Vocational Education Research,* **26(2)**.

HALLER, H. & KRAUSS, S. (2002), Misconceptions of significance: A problem students share with their teachers? *Methods of Psychological Research,* **7(1)**.

HARLOW, L.L., MULAIK, S.A. & STEIGER, J.H. (Eds.) (1997), *What if there were no significance tests?* London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

HOWSON, C. & URBACH, P. (1989), *Scientific Reasoning*, The Bayesian Approach Open Court Publishing Company.

HUBBARD, R. & LINDSAY, R.M. (2008), "Why P Values are not a useful measure of evidence in statistical significance testing", *Theory & Psychology*, **18(1)**, 69–88.

KERLINGER, F.N. (1979), *Behavioral research: a conceptual approach*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

KLINE, R.B. (2004), *Beyond significance testing: Reforming data analysis methods in behavioral research*, Washington, DC: American Psychological Association.

KRANTZ, D.H. (1999), The null hypothesis testing controversy in psychology, *Journal of the American Statistical Association*, **44**, 1372–1381.

LECOUTRE, M.P., POITEVINEAU, J. & LECOUTRE, B. (2003), Even statisticians are not immune to misinterpretations of null hypothesis significance tests, *International Journal of Psychology*, **38(1)**, 37–45.

MCLEAN, A.L. (2000), On the nature and role of hypothesis tests. *Department of Econometrics and Business Statistics Working. Paper 4/2001. Available at:* http://www.buseco.monash.edu.au/depts/ebs/pubs/wpapers/2001/wp4-01.pdf.

MITTAG, K.C. & THOMPSON, B. (2000), A national survey of AERA members' perceptions of statistical significance tests and other statistical issues, *Educational Researcher,* **29**, 14–20.

NELDER, J.A. (1999), " Statistics for the Millennium: From statistics to statistical science" (with comments), *The Statistician*, **48**, 257–269.

NELSON, N., ROSENTHAL, R. & ROSNOW, R.L. (1986), Interpretation of significance levels and effect sizes by psychological researchers, *American Psychologist,* **41**, 1299–1301.

NEYMAN, J. & PEARSON, E.S. (1933), On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses, Phil. Trans. **A 231**, 289–337.

OAKES, M. (1986), *Statistical inference: a commentary for the social and behavioural sciences*, Willey, New York.

PEDHAZUR, E.J. & SCHMELKIN, L.P. (1991), *Measurement, design and analysis: an integrated approach,* Hillsdale, NJ, Erlbaum.

PFANNKUCH, M. & Wild, C. (2004), "Towards an Understanding of Statistical Thinking" in D. Ben-Zvi & G. Garfield (eds), *The Challenge of Developing Statistical Literacy. Reasoning and Thinking*, Dordrecht: 17–46.

POITEVINEAU, J. (1998), *Méthodologie de l'analyse des données expérimentales: Etude de la pratique des tests statistiques chez les chercheurs en psychologie, approches normative, perspective et descriptive*. Thèse de Doctorat. Université de Rouen.

POITEVINEAU, J. & LECOUTRE, B. (2001), The interpretation of significance levels by psychological researchers: The .05-cliff effect may be overstated, *Psychonomic Bulletin and Review,* **8**, 847–850.

ROBERT, C. (1992), *L'analyse statistique bayesienne*, Economica, Paris.

ROSENTHAL, R. & GAITO, J. (1963), The interpretation of significance levels by psychological researchers, *Journal of Psychology,* **55**, 33–38.

VACHA-HAASE, T., NILSSON, J. E., REETZ, D.R., LANCE, T.S. & THOMPSON, B. (2000), Reporting practices and APA editorial policies regarding statistical significance and effect size, *Theory & Psychology*, **10**, 413–425.

VALLECILLOS, A. (1995), Comprensión de la lógica del contraste de hipótesis en estudiantes universitarios, (University students' understanding of the logic of hypothesis testing), *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **15 (3)**, 53–81.

VALLECILLOS, A. (1996), Students' conceptions of the logic of hypothesis testing, *Hiroshima Journal of Mathematics Education,* **4**, 43–61.

WILKINSON, L. & TASK FORCE ON STATISTICAL INFERENCE (1999), Statistical methods in psychological journal, *American Psychologist,* **54**, 594–604.

ZENDRERA, N. (2003), Difficultés d'apprentissage liées aux tests statistiques. Le cas des tests paramétriques auprès des étudiants en sciences humaines, *Actes des XXXV^{ème} JdS (2)*, 895–899. SFdS et Université Lyon, 2-6 juin 2003.

ZENDRERA N. (2004) Difficultés et obstacles rencontrés dans l'apprentissage des tests paramétriques : objets d'une recherche en didactique de la statistique. *Actes des XXXVI^{ème} JdS.* SFdS, Université Montpellier II et Ecole supérieure agronomique. Montpellier, 24-28 mai 2004.

MONCEF ZAKI
Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en
Didactique des Sciences et Techniques (LIRDIST)
Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Département de Mathématiques
B.P. 1796 Fès-Atlas 30 000, Maroc
zaki.moncef@yahoo.fr

ZAHID ELM'HAMEDI
Etudiant de Doctorat à l'UFR de
Didactique des Mathématiques et de la Physique
Université Sidi Mohammed Ben Abdellah de Fès, Maroc
Département de Mathématiques
B.P. 1796 Fès-Atlas 30 000, Maroc

CHARALAMPOS LEMONIDIS, IOANNIS PANAGIOTOPOULOS, KONSTANTINOS NIKOLANTONAKIS

LES ENSEIGNANTS GRECS FACE AUX PROBLÈMES RÉALISTES - LES CARACTÉRISTIQUES DES ENSEIGNANTS QUI INFLUENCENT LES RÉPONSES RÉALISTES

Abstract. Greek teachers facing realistic problems – Teachers' characteristics that influence realistic answers – In opposition with traditional school problem, solving realistic problem needs a critical consideration of the statement, based on everyday experience. Much research has been made on realistic problems in order to examine pupil's behaviour. Almost all researchers conclude that the solutions of realistic problems given by pupils and prospective teachers are founded on didactic contract and do not take in consideration everyday experience for judging the data in the statement. There was not any research about in service teachers in order to examine their progress on realistic problem solving and analyse the factors of this progress, thus we examined the behaviour of 162 in service Greek teachers regarding realistic problems. We also examine what teachers' characteristics among: gender, academic level, teaching experience, and preference for mathematics, determine their behaviour in realistic problem solving.

Résumé. En opposition aux problèmes scolaires traditionnels, les problèmes réalistes sont ceux dont la solution demande une considération critique de l'énoncé fondée sur l'expérience quotidienne. Beaucoup de recherches concernant les problèmes réalistes ont été effectuées pour examiner le comportement des élèves et presque toutes arrivent à la conclusion que, lors de leur résolution, les élèves et les futurs enseignants opèrent en se basant sur le contrat didactique et ne prennent pas en compte la réalité quotidienne. Mais l'absence de recherches auprès des enseignants en activité pour examiner leur progrès sur les problèmes réalistes et analyser les facteurs de ce progrès nous a amenés à examiner le comportement de 162 enseignants grecs en activité face aux problèmes réalistes. Nous essayons notamment d'examiner quelles caractéristiques des enseignants, parmi leur genre, leur niveau d'études, leur expérience d'enseignement et leur préférence pour les mathématiques, déterminent leurs comportements en résolution de problèmes réalistes.

Mots-clés. Problèmes réalistes, réponses réalistes, enseignants en action, genre, études, expérience à l'enseignement, préférence pour les mathématiques.

---

1. Contexte Théorique

Dans l'histoire de l'éducation un des rôles essentiels de la résolution de problèmes a été la liaison des mathématiques avec la réalité. Par l'intermédiaire de la résolution du problème on offrait des situations de la vie quotidienne dans lesquelles pourraient être appliquées les notions mathématiques enseignées à

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 14, p. 195 – 212.
© 2009, IREM de STRASBOURG.

l'école. Pendant longtemps les problèmes verbaux ont joué ce rôle d'application des mathématiques à la réalité sans provoquer réflexion ou critique sur ce sujet (Kilpatrick, 1985 ; Blum & Nis, 1991 ; Verschaffel et al, 2000).

Ces derniers 15-20 ans, les recherches expérimentales ont commencé à contester ce rôle des problèmes verbaux. Après beaucoup d'années d'enseignement à l'école, les chercheurs ont constaté que beaucoup d'élèves ont acquis un comportement face à la résolution du problème, selon lequel ils se limitent à l'exécution d'une ou plusieurs opérations arithmétiques avec les nombres de l'énoncé du problème sans tenir compte des restrictions de la réalité décrite dans l'énoncé (Nesher, 1980 ; Schoenfeld, 1991 ; Lave, 1992 ; Boaler, 1994 ; Reusser & Stebler, 1997 ; Verschaffel et al, 2000). Ce comportement des élèves pendant la résolution des problèmes verbaux est nommé selon Schoenfeld (1991) « suspension de la création du sens » («suspension of sense-making»).

1.1. Recherches sur les problèmes réalistes

Le cas le plus connu de suspension de la création du sens a été présenté par des chercheurs français dans le problème de l'âge du capitaine. L'interprétation du comportement des élèves a donné lieu à l'expression théorique « contrat didactique » (Brousseau 1986), que nous présentons par la suite. Un autre exemple très connu est le problème du bus qui a été utilisé pour la première fois aux Etats-Unis dans le Third National Assessment of Educational Progress (Carpenter et al., 1983) auprès d'élèves de 13 ans. Les résultats ont montré que beaucoup d'élèves ont donné la réponse non-réaliste (31,3 bus).

Inspirés par ces paradigmes de suspension de la création du sens, Gerr (1993) a fait des expériences auprès d'élèves de 13-14 ans en Irlande et Verschaffel, De Corte et Lasure (1994) auprès d'élèves de 10-11 ans en Belgique. Ils ont utilisé des problèmes équivalents à ceux de la recherche précédente et les ont catégorisé selon deux grandes catégories : a) problèmes habituels ou problèmes S (Standard Problems) et b) problèmes problématiques (Problematic Problems) ou problèmes P. Les problèmes standards sont ceux qui peuvent être résolus sans difficultés spécifiques en combinant les données arithmétiques du problème. Les problèmes utilisés dans les mathématiques scolaires dans beaucoup de systèmes éducatifs sont de ce genre. Dans la deuxième catégorie, les problèmes problématiques (réalistes) le modèle mathématique n'est pas évident, et pendant la résolution il faut prendre en compte des situations réalistes. Nous trouvons très rarement ce genre de problèmes dans les manuels scolaires et on n'utilise pas ces problèmes dans l'enseignement. Les chercheurs cités sont arrivés au résultat que les élèves qui affrontent des problèmes du type P ont généralement tendance à ne pas appliquer les connaissances de la vie quotidienne et de la pensée réaliste. Ils répondent mieux

aux problèmes du type S (84 % de succès). Les élèves n'essaient pas d'utiliser les connaissances de la vie quotidienne et de la pensée réaliste.

Ces premières recherches ont été répétées dans beaucoup de pays (p.e. Japon, Allemagne, Suisse, Pays-Bas, Chili, Venezuela, Grèce) en utilisant la même méthodologie et les mêmes problèmes. Les résultats dans ces différents pays sont les mêmes (Verschaffel et al, 2000). Un petit pourcentage d'élèves a répondu au problème P par la façon réaliste, exception faite du problème de bus.

En considérant la variable type des problèmes P, nous pouvons mettre à part ceux dont la résolution nécessite une division avec reste, comme le problème du bus. Dans toutes les recherches, ces problèmes concentrent le plus grand pourcentage de réponses réalistes.

Si nous considérons les variables qui se réfèrent aux sujets, les résultats des recherches montrent que la tendance des élèves à ne pas prendre en compte les aspects connus de la réalité dans leurs réponses aux problèmes verbaux s'associe à l'âge, au genre et à la classe sociale. Les élèves ayant moins d'expérience de l'éducation traditionnelle (Radatz, 1983 ; Yeping & Silver, 2000), les filles (Boeler, 1994) et les élèves de la classe ouvrière (Cooper & Dunne, 1998) ont beaucoup plus de possibilités de rester dans un contexte quotidien quand ils résolvent des problèmes à l'école.

Il n'y a pas beaucoup de recherches ayant comme but d'examiner la façon dont les enseignants affrontent ou manipulent, en vue de l'enseignement à conduire, le contexte qui se rapporte au monde réel des situations. Quelques recherches ont été faites auprès des futurs enseignants pour examiner la façon avec laquelle ils affrontent les problèmes verbaux dans des contextes qui se réfèrent au monde réel (Verschaffel et al., 1997, Contreras and Martinez-Cruz, 2001, Chapman, 2006). En général, les futurs enseignants ont le même comportement que les élèves par rapport au contexte qui se réfère au monde réel. Par exemple, Verschaffel et al. (1997) ont constaté qu'il y a une forte tendance parmi les futurs enseignants d'exclure la connaissance provenant du monde réel, tant dans le cadre de leurs solutions spontanées que dans le cadre de leurs estimations des solutions d'élèves. Contreras et Martinez-Cruz (2001) ont constaté que les futurs enseignants ne référaient pas toujours leurs réponses au contexte réaliste des situations décrites dans les problèmes.

1.2. Le contrat didactique

Les résultats des recherches montrent que cette omission (négligence) générale et constante de la création du sens par les élèves, quand ils résolvent des problèmes arithmétiques verbaux dans un contexte scolaire formel, n'est pas due à un manque

cognitif. Ils réagissent plutôt selon les règles du jeu de l'interaction, c'est-à-dire du contrat didactique.

On appelle contrat didactique l'ensemble des comportements de l'enseignant attendus par l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève attendus par l'enseignant. Ce contrat est l'ensemble des règles qui désignent explicitement cette relation, mais par dessus de tout, il sous-entend que chaque personne qui participe à la relation didactique peut la gérer d'une manière ou d'une autre, mais toujours de telle façon quelle corresponde aux attentes de l'autre (Brousseau, 1997).

Beaucoup de chercheurs (p.e. De Corte & Verschaffel, 1985 ; Gerofsky, 1996 ; Kilpatrick, 1985 ; Lave, 1992 ; Reusser & Stebler, 1997) ont analysé les règles cachées qui sont utilisées implicitement et d'une manière sous-entendue par les élèves. Les règles sont les suivantes :

- tous les problèmes introduits par l'enseignant ou qui se trouvent dans le livre ont une solution et ont un sens ;
- il y a une solution arithmétique simple, correcte et concrète ;
- cette réponse simple peut être obtenue par l'exécution d'une ou des plusieurs opérations en utilisant tous les nombres du problème ;
- nous pouvons obtenir la solution par l'application des procédures mathématiques connues ;
- le problème contient tous les éléments nécessaires pour sa solution. Il ne contient pas d'informations inutiles. Il ne faut pas utiliser des connaissances extérieures pour sa solution ;
- on peut ignorer les violations de la connaissance du monde quotidien.

Nous souhaitions combler le manque de recherches examinant les comportements d'enseignants en activité face aux problèmes réalistes, ou confrontant ces comportements avec des caractéristiques comme le genre, l'expérience d'enseignement, le niveau d'études et la préférence pour le cours des mathématiques. Nous présentons ici une recherche sur les enseignants en activité et nous utilisons des problèmes de la bibliographie citée.

2. Recherche

2.1. But et questions de recherche

Dans cette recherche nous avons posé deux questions. Premièrement nous avons voulu examiner de quelle manière les enseignants en action traitent les problèmes réalistes. Nous voulons examiner s'ils agissent pour la résolution d'un problème

sur la seule base du contrat didactique, sans prendre en compte les données de la réalité et de la vie quotidienne. Nous voulons comparer les comportements des enseignants avec les comportements des élèves et des futurs enseignants rencontrées dans d'autres recherches. Deuxièment, nous voulons examiner quelles caractéristiques – le genre, l'expérience d'enseignement dans des classes différentes, les années de travail, les études, la préférence pour les mathématiques – influencent le progrès des enseignants en résolution de problèmes réalistes.

2.2. Méthodologie - Échantillon

La recherche a été réalisée de mars à juin 2007. L'échantillon est constitué de 162 enseignants, 80 hommes et 82 femmes, qui enseignaient en Grèce à des endroits différents. Les enseignants ont reçu un questionnaire soit directement, soit par la poste (électronique ou autre) soit par fax, sans leur donner une date limite pour le remplir.

Pour choisir les enseignants interrogés, la technique d'échantillonnage utilisée a été celle dite de la boule de neige (*snowball sampling*), décrite par Salganik & Heckathorn (2004).

2.3. Collecte des données

L'enquête auprès des enseignants a été faite par un questionnaire qui contenait quatre problèmes réalistes, présentés ci-après. On a demandé aux enseignants, après chaque réponse, d'analyser leur pensée par des mots. Le début du questionnaire contenait des questions relatives aux caractéristiques des enseignants comme le genre, les études, les années de travail, les cours que l'enseignant préfère enseigner par ordre d´importance.

Nous avons emprunté les problèmes par la bibliographie (Yoshida et al., 1997, Verschaffel, De Corte & Borghart, 1997). Pour l'élaboration des résultats nous avons utilisés une première codification, celle de Verschaffel, De Corte & Lasure (1994) & Verschaffel, De Corte & Borghart (1997) : réponse réaliste (RA), réponse non réaliste (NA), erreur technique (erreurs d'exécution des opérations) (TE), autre réponse qui ne peut pas être classée dans les catégories existantes (OA), absence de réponse (NOA). Nous avons utilisé une deuxième codification parce que nous voulions avoir un score de progrès quantitatif concret pour chaque enseignant. Précisément, chaque réponse réaliste a été notée 1, et toutes les autres (réponses non réalistes, erreurs techniques, autres réponses, pas de réponses) ont été notées 0. Le score le plus grand est 4 et le plus petit 0. La codification est en partie analogue à celle utilisée par Verschaffel, De Corte & Borghart (1997), pendant leur recherche auprès des étudiants à l'Université.

Pour l'analyse statistique des données nous avons utilisé le paquet statistique SPSS et nous avons appliqué les méthodes de la statistique descriptive et inductive.

2.3. Les Problèmes

1. (Les carreaux). Nikos a acheté 4 carreaux de 2,5 mètres chacun. Combien de carreaux d'un mètre peut-il couper ?

2. (Les bus). 450 soldats doivent aller à la caserne en bus. Chaque bus contient 36 soldats. Combien de bus faudra-t-il ?

3. (Le coureur). Ioannis court les 100 mètres en 17 secondes. Combien de temps a-t-il besoin pour courir 1 km ?

4. (L'école). Elena et Niki vont à la même école. Elena habite à une distance de 17 km de l'école et Niki à une distance de 8km de l'école. Combien de Kilomètres séparent l'une de l'autre ?

3. Recherche

3.1. Les Réponses des enseignants aux problèmes réalistes

Problème	RA : Réponse réaliste	NA : Rép. non réaliste	TE : erreur technique	OA : autre réponse	NOA : non réponse
1 Carreaux	108 (66,7%)	39 (24,1%)	12 (7,4%)	2 (1,2%)	1 (0,6%)
2 Bus	146 (90,1%)	12 (7,4%)	1 (0,6%)	3 (1,9%)	
3 Coureur	73 (45,1%)	78 (48,1%)	11 (6,8%)		
4 École	57 (35,2%)	102 (63%)		3 (1,9%)	

Tableau 1 : Les réponses des enseignants aux problèmes.

Dans le tableau nous remarquons que le pourcentage le plus élevé de réponses réalistes des enseignants apparaît dans le problème 2 des bus (90,1 %). Pour le problème 1 des carreaux, le pourcentage des réponses réalistes est 66,7% et pour les problèmes 3 du coureur et 4 de l'école, les pourcentages chutent à 45,1% et 35,2% respectivement.

Nous utilisons le z-test statistique pour la comparaison des pourcentages des réponses réalistes. Nous trouvons que le problème 2 des bus rassemble, par une différence statistique importante, le plus grand pourcentage des réponses réalistes par rapport aux autres problèmes. Le premier problème avec les carreaux rassemble plus de réponses réalistes, avec une différence statistique significative, que le problème du coureur et le problème de l'école. Enfin, le problème du coureur présente un pourcentage significativement plus grand de réponses réalistes que le problème de l'école ($z = 1,81$, $p < 0,05$).

Pour le premier problème, les réponses réalistes correctes que les enseignants donnent (il faut avoir coupé 8 carreaux de 1m), représentent 60,5 %. Les réponses qui ajoutent qu'il reste 4 carreaux de 0,5 mètre, et celles qu'il faut réunir les restes, donc que nous obtiendrons 2 mètres de plus, totalisent 6,2%.

La réponse fausse la plus répandue au problème est celle où apparaît la multiplication 4×2,5 et ensuite la division par 1 pour donner le résultat 10 carreaux de 1 mètre (pourcentage 24,1%). Ici, les enseignants considèrent que les moitiés de carreaux sont des morceaux avec lesquels on peut former 2 carreaux de 1 mètre.

Beaucoup d'enseignants (13%) ont écrit le commentaire suivant : "L'énoncé est faux" ou ils ont répondu au problème par une question comme : "quelle est la largeur des carreaux", "quelle forme ont-ils" ou "comme nous parlons d'une surface, pour donner une réponse il faut donner la figure et la largeur".

Pour le deuxième problème avec les bus, bien que le pourcentage des réponses réalistes soit grand (90,1%), un enseignant sur dix a donné une réponse fausse. Et 4,9% des enseignants ont seulement écrit la division et son résultat 12,5 bus, sans aucune autre référence. Quatre (soit 2,5%) ont fait la division avec son reste. Deux enseignants ou bien font une erreur dans la division, ou écrivent qu'il faut 12 bus et qu'il reste 18 soldats. Trois enseignants donnent dans leur réponse des commentaires du type "*presque 13*", "*le problème ne précise pas si les bus vont être remplis*", "*nous ne pouvons pas exécuter la division*", "*ne se divisent pas*", "*nous n'obtenons pas un entier*" *etc*.

Cinq enseignants (soit 3%) ont fait davantage de commentaires relatifs à l'énoncé du problème : "*il faut choisir un nombre qui peut être divisé exactement*". D'autres enseignants ont mis dans leurs réponses la restriction des trajets, c'est-à-dire que la réponse qui a été donnée est valable si les bus font un trajet. D'autres, en pensant de façon pratique, n'ont proposé que le partage des soldats qui restent dans les autres bus pour des raisons de sécurité et de confort.

Pour le troisième problème du coureur, la plupart des réponses réalistes correctes, résultant d'opérations effectuées de façon analogue et aboutissant à 170 secondes, ou 2 minutes et 50 secondes, ont été accompagnées d'un commentaire. Plus précisément, 38,3% des enseignants de l'échantillon, après avoir donné le résultat, ont ajouté des commentaires du type : "*il court le 100 mètres*", "*le 1000 mètres est une course d'endurance*", "*ce résultat n'est pas valable pour les humains*", "*le résultat est valable seulement si la vitesse du coureur est constante*", ou "*seulement sous conditions mathématiques*" *etc*. Les enseignants ont déclaré qu'ils prennent en compte le facteur fatigue, mais ils donnent le résultat clairement pour des raisons mathématiques. Onze enseignants (6,8%) ont répondu en écrivant seulement qu'il est possible de calculer le temps du coureur sur la base de son temps au 100 mètres, puisque le 100 mètres est une course de vitesse et le 1000 mètres est une course

d'endurance. Les réponses non réalistes, donnés par 48,1% des enseignants, résultent de l'application de la proportionnalité pour aboutir seulement au résultat 170 secondes ou 2 minutes et 50 secondes sans commentaire réaliste sur la fatigue du coureur.

Le quatrième problème, où nous avons demandé la distance entre les deux maisons des élèves, donne lieu au plus petit pourcentage de réponses réalistes (35,2%). Plus précisément, 16% des enseignants ont répondu qu'il est impossible de résoudre le problème si nous ne connaissons pas la position précise des maisons. Dans ces réponses, il n'y a pas d'opération, mais seulement des commentaires verbaux du type : "*la solution est impossible si nous ne connaissons pas la position des maisons*", "*on a besoin de dessin*" *etc*.

Dix-huit enseignants (11,1%) qui ont donné une réponse réaliste ont écrit que le problème peut en avoir des solutions infinies $9<x<25$ kilomètres. Treize enseignants (8%) ont donné une réponse réaliste au problème, en faisant des calculs et disent qu'il y a deux cas : la distance des maisons est 9 ou 25 kilomètres si elles se trouvent sur la même ligne droite. Ils ajoutent que le problème a une infinité de solutions car nous ne savons pas où se trouvent les maisons des enfants. Dans les réponses non réalistes des enseignants nous trouvons des réponses de types différents : 17,9% des enseignants choisissent la soustraction pour résoudre le problème. Ils considèrent que les maisons des élèves se trouvent sur la même ligne, et que le résultat est 17-8 = 9 kilomètres, sans aucun commentaire réaliste dans leurs réponses. Trois enseignants (1,9%) considèrent que les maisons se trouvent sur la même ligne mais de part et d'autre de l'école, donc ils concluent que le résultat s'obtient par addition 17+8 = 25 kilomètres.

Dans la fausse réponse la plus fréquente (non réaliste) donnée par un pourcentage de 35,8% d'enseignants, il y a deux solutions au problème. Ils font une addition et une soustraction et ils trouvent comme résultats 8 et 25 kilomètres. Ils considèrent que les maisons sont sur la même ligne, soit d'un même côté soit de côtés opposés.

Beaucoup d'enseignants, soit un pourcentage de 7,4% croient que les maisons peuvent former un triangle avec l'école (souvent rectangle). Par la suite, ils adjoignent ce cas aux solutions, sous l'option qu'il faut trouver l'hypoténuse qui unit les deux maisons (théorème de Pythagore). Leurs réponses contiennent trois résultats, et dans ces réponses il y a une figure qui explique leur pensée.

Dans le quatrième problème, la plupart des commentaires des enseignants se rapporte à son énoncé. Un pourcentage de l'ordre de 24,1% a exprimé par écrit son doute ou sa faiblesse pour résoudre le problème, en demandant plus d'éléments. Quelques phrases significatives exprimées sont : "*le dessin manque*", "*piégé par un mauvais énoncé*", "*Inconnue ! Imprécise !*", *etc*.

3.2. Les caractéristiques des enseignants qui influencent leurs résultats dans la résolution de problèmes réalistes

A chaque enseignant correspond un score total selon ses réponses réalistes données aux quatre problèmes. Pour chaque réponse réaliste, les enseignants ont été notés 1, et les autres réponses ont été notées 0. Les scores vont ainsi de 0 à 4. Comme on le remarque dans le tableau 2 ci-après, six enseignants (3,7%) n'ont résolu de manière réaliste aucun problème et 30 enseignants (18,5%) ont résolu de manière réaliste seulement un problème. Une majorité (60,5%) a résolu d'une manière réaliste 2 ou 3 problèmes du questionnaire. La moyenne des scores est 2,37, avec médiane 2 et écart-type 1,082.

Score	Effectif	Pourcentage	Pourcentage cumulé
0	6	3.7	3.7
1	30	18.5	22.2
2	52	32.1	54.3
3	46	28.4	82.7
4	28	17.3	100.0
Total	162	100.0	

Tableau 2 : Scores des enseignants.

Une des questions importantes de cette recherche est d'examiner lesquels des cinq facteurs – genre, expérience dans des classes, expérience professionnelle en années, niveau d'études, préférence pour les mathématiques – influencent les résultats des enseignants en résolution de problèmes réalistes.

Concernant le facteur "genre" la question est de savoir s'il y a des différences importantes entre les femmes et les hommes dans la résolution des problèmes réalistes. Souvent un stéréotype domine dans les écoles, que les hommes sont meilleurs en mathématiques que les femmes, car souvent (dans les générations les plus anciennes) les hommes ont des classes d'élèves plus âgés qui ont plus d'exigences au niveau des mathématiques.

Quant au facteur "expérience dans des classes" la question est de savoir si les enseignants qui ont enseigné dans plusieurs ou dans toutes les classes résolvent mieux les problèmes réalistes que ceux qui ont enseigné dans peu de classes. Est-ce que les enseignants qui ont une expérience plus grande de toutes les classes de l'école primaire donnent plus de réponses réalistes que ceux qui jusqu'à maintenant dans leur carrière, soit à cause de leur ancienneté soit pour des raisons de préférence, ont enseigné dans certaines classes de l'école ?

Pour le facteur “années d’expérience” la question est : Y a-t-il des différences de résultats des enseignants dues à l’ancienneté. Les plus anciens donnent-ils plus de réponses réalistes que les plus jeunes qui n’ont que peu d’ancienneté ?

Le facteur “études” décrit le type de diplôme que les enseignants ont obtenu, masters ou autre diplômes. En Grèce on trouve deux grandes catégories de diplômes des enseignants de l’école primaire : le diplôme des Académies Pédagogiques qui conclut 2 années d’études et le diplôme du nouveau Département Pédagogique (après 1990) qui conclut 4 années d’études. La question qui se pose est : Les enseignants qui ont obtenu leur diplôme au Département Pédagogique et naturellement ont une formation plus récente sont-ils meilleurs en résolution de problèmes réalistes que les enseignants plus vieux de l’Académie Pédagogique ?

Enfin, nous avons examiné si le facteur “préférence des enseignants pour les mathématiques” influence le succès en résolution de problèmes réalistes. Les enseignants qui ont choisi les mathématiques en tant qu’objet d’enseignement parmi leurs trois premières préférences donnent-ils plus de réponses réalistes que ceux qui n’ont pas cité les mathématiques parmi les matières préférées ?

Pour l’étude des influences et des interactions des cinq facteurs Genre, Etudes, Expérience Professionnelle, Expérience dans des classes, et Préférence pour les mathématiques, sur les scores des enseignants concernant des problèmes réalistes, nous avons appliqué une analyse basée sur les modèles généraux de Gram. Précisément, nous avons utilisé la méthode de l’analyse multifactorielle de variance (ANOVA) pour l’étude des modèles antagonistes. Pour chaque cas, nous avons contrôlé que l’hypothèse d’homogénéité de la fluctuation n’est pas invalidée.

Par cette analyse on obtient que les trois facteurs Genre ($F(1,134)=0.071$, $p=0.790$), Années d’Expérience Professionnelle ($F(4,134)=1.573$, $p=0.185$) et Expérience dans des classes ($F(1,134)=0.002$, $p=0.968$) ne donnent pas lieu à des influences premières et secondaires statistiquement importantes. Les facteurs qui paraissent statistiquement avoir une influence importante sur les résultats des enseignants en résolution de problèmes réalistes sont les deux facteurs Études et Préférence pour les mathématiques.

3.3. Le facteur Université dans laquelle les enseignants ont fini leurs études

Par l’analyse multifactorielle de variance ANOVA nous remarquons que l’influence majeure du facteur études est statistiquement importante, au point d’importance $a = 0,05$ ($F(1,134) = 4.009$, $p =0.047$). Il s’agit des deux groupes d’enseignants : ceux qui ont fini leurs études à l’Académie Pédagogique (deux ans d’études) et les diplômés des Départements Pédagogiques (quatre ans d’études).

Université	Effectif	Pourcentage	Moyenne	Écart type
Académie Pédagogique	96	59.3	2.425	0.195
Département Pédagogique	66	40.7	1.928	0.216
Total	162	100.0		

Tableau 3 : Résultats selon l'université d'obtention du diplôme.

Dans le tableau 3 nous constatons que les enseignants diplômés des Académies Pédagogiques ont un score meilleur que ceux qui sont diplômés des Départements Pédagogiques. Les enseignants qui sont diplômés de l'Académie Pédagogique ont une moyenne totale de 2,425 pour les quatre problèmes réalistes tandis que leurs collègues du Département Pédagogique n'ont que 1,928.

Problème 1	Fréquence	%	*z-test* exact *p*
Académie Pédagogique	50/75	66,7	0,897
Département Pédagogique	42/64	65,6	
χ^2=27,515, β.ε.=20, Monte Carlo *p*=0,177			
Problème 2			
Académie Pédagogique	70/75	93,3	0,372
Département Pédagogique	57/64	89,1	
χ^2=60,983,β.ε.=15, Monte Carlo *p*=0,024			
Problème 3			
Académie Pédagogique	41/75	54,7	0,003
Département Pédagogique	19/64	29,7	
χ^2=17,354, β.ε.=10, Monte Carlo *p*=0,070			
Problème 4			
Académie Pédagogique	35/75	46,7	0,001
Département Pédagogique	13/64	20,3	
χ^2=15,954, β.ε.=10, Monte Carlo *p*=0,156			

Tableau 4 : Pourcentages de réponses réalistes aux quatre problèmes selon l'Université d'obtention du diplôme.

Dans le tableau 4 nous remarquons que parmi les deux groupes d'enseignants les différences statistiquement importantes pour les réponses réalistes se présentent aux problèmes 3 et 4. Les enseignants diplômés des Académies Pédagogiques ont des pourcentages des réponses réalistes plus élevés aux problèmes 3 et 4 comparés aux enseignants diplômés de Départements Pédagogiques. Nous avons obtenu ces résultats par une série des tests χ^2 et *z-test*.

3.4. Le facteur préférence pour l'enseignement des mathématiques

A la question : citer par ordre de préférence les trois matières que vous préférez enseigner, 124 enseignants (76,5%) ont cité les mathématiques, tandis que 38 enseignants (23,5%) n'ont pas indiqué les mathématiques. Le tableau 5 introduit la catégorisation qui a été utilisée pour les analyses statistiques de l'échantillon. Deux groupes seront formés : le premier groupe est celui des enseignants qui ont mis les mathématiques parmi les trois premiers rangs et le deuxième groupe celui des enseignants qui n'ont pas indiqué les mathématiques dans leurs préférences.

Mathématiques dans les trois premiers choix des enseignants	Nombre d'enseignants	Pourcentage
Indiquées	124	76,5
Non indiquées	38	23,5
Total	162	100,0

Tableau 5 : Mathématiques dans les préférences d'enseignement.

Par l'analyse ANOVA des facteurs genre, préférence pour les mathématiques et niveau d'études sur le score obtenu par les enseignants, nous obtenons que l'influence du facteur "préférence aux mathématiques" est statistiquement importante, au niveau d'importance a = 0,05 (F (1,154) = 9,116, p = 0,003).

Nous avons essayé de trouver dans quels problèmes se manifeste la différence de résultats concernant le facteur "préférence pour les mathématiques". Nous avons trouvé qu'il y a une corrélation statistiquement importante entre la préférence pour les mathématiques chez les enseignants et les réponses réalistes au premier et au deuxième problème (tableau 6 ci-après).

Dans le premier problème, 71% des enseignants qui avaient déclaré les mathématiques dans leurs trois premiers choix ont répondu d'une manière réaliste, tandis que le pourcentage de ceux qui n'ont pas déclaré les mathématiques est 52,6%. Dans le deuxième problème, 93,5% des enseignants qui avaient déclaré les mathématiques dans leur trois premiers choix ont répondu d'une manière réaliste, tandis que le pourcentage de ceux qui n'avaient pas déclaré les mathématiques est de 78,9%.

Bien que nous n'ayons pas trouvé une corrélation statistiquement importante de la préférence aux mathématiques pour les réponses des enseignants au troisième problème, nous avons découvert entre les deux groupes d'enseignants une différence de réponses réalistes statistiquement importante. Concrètement, 49,2% des enseignants qui avaient déclaré les mathématiques dans leurs trois premiers choix avaient répondu d'une manière réaliste, tandis que le pourcentage de ceux qui n'avaient pas déclaré les mathématiques est de 31,6%.

Problème 1	Fréquence	%	*z-test* Exact *p*
Mathématiques indiquées	88/124	71,0	0,036
Pas indiquées	20/38	52,6	
χ^2=15,897, β.ε.=4, Monte Carlo *p*=0,002			
Problème 2			
Mathématiques indiquées	116/124	93,5	0,008
Pas indiquées	30/38	78,9	
χ^2=9,287, β.ε.=3, Monte Carlo *p*=0,022			
Problème 3			
Mathématiques indiquées	61/124	49,2	0,056*
Pas indiquées	12/38	31,6	
χ^2=5,489, β.ε.=2, Monte Carlo *p*=0,070			
Problème 4			
Mathématiques indiquées	47/164	37,9	0,190
Pas indiquées	10/38	26,3	
χ^2=1,789, β.ε.=2, Monte Carlo *p*=0,190			

Tableau 6 : Fréquence des réponses réalistes pour les deux groupes d'enseignants formés selon le choix ou non des mathématiques parmi les matières préférées.

Conclusion

Nous avons vu que la majorité des enseignants (90%) donne une réponse réaliste au problème des bus, les deux tiers (66,7%) au problème des carreaux, moins de la moitié (45%) au problème du coureur et à peine plus d'un tiers (35%) au problème de l'école. Dans le tableau 7 nous comparons ces résultats avec les résultats

d'autres recherches sur les mêmes problèmes, avec comme sujets les futurs enseignants en Belgique (Verschaffel, et al. 1997) et à Chypre (Lemonidis, 2007), les élèves de la 5e année de scolarité en Belgique (Verschaffel, et al. 1994) et de la sixième année de scolarité à Chypre. Nous observons une similitude des pourcentages de réponses réalistes des futurs enseignants et des enseignants. Dans les réponses des futurs enseignants de Chypre les pourcentages des réponses réalistes aux deux derniers problèmes du coureur et de l'école sont plus bas. Évidemment les pourcentages des réponses réalistes des élèves sont plus bas que ceux des enseignants et des futurs enseignants.

Problème	Notre recherche (enseignants en activité)	Verschaffel, et al (1997) (futurs enseignants)	Lemonidis (2007) (futurs enseignants)	Verschaffel, De Corte & Lasure (1994) (élèves)	Lemonidis (2007) (élèves)
carreaux	66,7%	64%	62%	13%	3,2%
bus	90,1%	90%	89,5%	49%	56,1%
coureur	45,1%	31%	11,5%	3%	4,2%
école	35,2%	48%	17%	3%	12,2%

Tableau 7 : Pourcentages de réponses réalistes obtenus dans diverses recherches auprès de futurs enseignants et d'élèves.

Nous observons que dans toutes les populations le problème des bus est celui qui concentre les pourcentages les plus élevés de réponses réalistes. Nous pouvons l'expliquer par le fait que d'un côté la partie mathématique est facile – une division – et que d'un autre côté le contenu se réfère à une situation réelle qui est assez connue de tous, sous la forme d'excursions d'école. Il faut aussi noter que donner une réponse non réaliste nous conduit à une réponse peu logique – fraction ou nombre décimal de bus. Quant au problème des carreaux, le contenu est tel qu'une réponse non réaliste se trouve en opposition avec la réalité – des carreaux de 0,5 mètre ne peuvent pas être unis à des carreaux de 1 mètre. Au problème du coureur la réponse non réaliste est en contradiction avec la réalité, mais cette contradiction ne se voit pas seulement par le résultat arithmétique du problème mais aussi par la nécessité de discuter et compléter le contenu de l'énoncé du problème. Un être humain ne peut pas courir le 100 mètres de la même manière que le 1000 mètres. Le problème de l'école diffère par rapport aux trois autres problèmes, car son élaboration mathématique est plus difficile. Il n'y a pas un résultat arithmétique facile qui se trouve en contradiction avec la réalité comme dans les autres problèmes. Ce problème exige l'exploration de plusieurs cas. De ce point de vue la représentation du contenu du problème n'est pas évidente.

Le constat général que nous pouvons faire est que pour les enseignants en activité les habitudes et le contrat didactique relatif à la résolution du problème sont très puissants. Les enseignants, les futurs enseignants et les élèves n'examinent pas de façon critique la réalité de l'énoncé du problème, mais ils la considèrent comme donnée. Cela semble logique dans le cadre de l'enseignement traditionnel où les mathématiques ne sont pas en lien avec la vie réelle, et un contrat didactique se crée selon lequel on considère que le contenu du problème est une donnée et que chaque problème a une solution réelle. Cette attitude s'aggrave du fait que souvent en mathématiques nous allons du concret à l'abstrait et que par les efforts d'abstraction et de généralisation nous utilisons beaucoup de conventions et nous faisons beaucoup d'entorses à la réalité.

A notre question de recherche (Quelles sont les caractéristiques des enseignants qui donnent des réponses réalistes ?) nous avons vu que dans l'échantillon des enseignants grecs, les réponses réalistes ne sont pas influencées par les facteurs genre et expérience d'enseignement. C'est-à-dire que la réponse réaliste d'un enseignant ne dépend ni de son genre ni de l'expérience résultant de son ancienneté et du nombre de classes dans lesquelles il a enseigné. Le facteur qui influence les réponses réalistes est la citation des mathématiques parmi les matières préférées d'enseignement. Comme c'était attendu, les enseignants dont les matières préférées comportent les mathématiques donnent plus de réponses réalistes que les autres.

Nous observons quelque chose de paradoxal, que les enseignants diplômés de l'Académie Pédagogique après deux ans d'études donnent plus de réponses réalistes que les enseignants plus jeunes diplômés de Départements Pédagogiques après quatre ans d'études. Les enseignants des Académies sont plus âgés et ils ont plus d'expérience mais on ne peut pas dire que la différence de comportements est due à l'expérience et aux années de travail car ces facteurs n'influencent pas les réponses réalistes. Une explication possible du phénomène est la suivante : les enseignants des Académies ont eu une éducation en tant qu'élèves centrée sur l'arithmétique pratique et sur des problèmes de la vie. En même temps ils n'ont pas eu une formation scientifique sur les mathématiques. Ces enseignants ont une perception empirique mais aussi simpliste des mathématiques en opposition aux jeunes enseignants qui ont une approche plus abstraite et théorique.

Bibliographie

BLUM, W., & NISS, M. (1991), Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subject – state, trends, and issues in mathematics education, *Educational Studies in Mathematics*, **22**, 37–68.

BOALER, J. (1994), When do girls prefer football to fashion? An analysis of female underachievement in relation to "realistic" mathematics contexts. *British Educational Research Journal,* **20(5)**, 551–564.

BROUSSEAU, G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques,* **7-2***, 33–115*.

BROUSSEAU, G. (1997), *Theory of didactical situations in mathematics*. (Edited and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland, & V. Warfield). Dordrecht: Kluwer.

CARPENTER, T.P., LINDQUIST, M., MATTHEWS, W., SILVER, E.A. (1983), Results of the third NAEP mathematics assessment: Secondary school. *Mathematics Teacher*, **76**, 652–659.

CHAPMAN, O. (2006), Classroom practices for context of mathematics word problems, *Educational Studies in Mathematics,* **62***, 211–230*.

CONTRERAS, J.N. and MARTINEZ-CRUZ, A.M. (2001), An investigation of preservice elementary teachers' solution processes to problematic story problems. In M. van den Heuvel- Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME Conference,* **2**, 289–296.

DE CORTE. E., & VERSCHAFFEL, L. (1985), Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *Journal of Mathematical Behavior,* **4**, *3–21*.

COOPER, B., & DUNNE, M. (1998). Anyone for tennis? Social class differences in children's responses to National Curriculum mathematics testing. *Sociological Review,* **46**, 115-148.

GEROFSKY, S. (1996), A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education. *For the learning of Mathematics*, **16(2)**, 36–45.

GREER, B. (1993), The modeling perspective on wor(l)d problems*, Journal of Mathematical Behavior,* **1.2**, 239–250.

KILPATRICK, J. (1985), A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem-solving. In E. A. Silver (Ed.), *teaching*

and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1–16.

KUTNER, M., NACHTSHEIM, C., NETER, J. & LI, W. (2005), *Applied Linear Statistical Models*. Singapore: McGraw-Hill, Inc.

LAVE, J. (1992), Word problems: A microcosm of theories of learning. P. Light & G. Butterworth (Eds), *Context and cognition: Ways of learning and knowing*, New York: Harvester Wheatsheaf*,* 74–92.

LEMONIDIS Ch. (2007), Les comportements des élèves de l'école élémentaire et des futurs enseignants face aux problèmes réalistes, *Colloque COPIRELEM* 11-13 juin, Troyes.

NESHER, P. (1980), The stereotyped nature of school word problems, *For the Learning of Mathematics,* **1(1)**, 41–48.

RADATZ, H. (1983), Untersuchungen zum Lösen eingekleideter Aufgaben. *Zeitschrift fur Mathematik-Didaktik,* **4(3)**, 205–217.

REUSSER, K., & STEBLER, R. (1997), Every word problem has a solution. The suspension of reality and sense-making in the culture of school mathematics, *Learning and Instruction,* **7***, 309–328*.

SALGANIK, M.J. AND HECKATHORN, D.D. (2004), Sampling and Estimation in Hidden Populations Using Respondent-Driven Sampling, *Sociological Methodology,* **34**, 193–239.

SCHOENFELD, A.H. (1991), On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics, In J. F. Voss, D. N. Perkins & J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education*. Hillsdale, NJ: Erlbaum, 311–343.

VERSCHAFFEL, L., DE CORTE, E. & LASURE, S. (1994), Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems, *Learning and Instruction,* **4**, 273–294.

VERSCHAFFEL, L., DE CORTE, E., & BORGHART, I. (1997), Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modeling of school word problems, *Learning and Instruction*, **4**, 339–59.

VERSCHAFFEL, L., DE CORTE, E. & LASURE, S., VAN VAERENBERGH, G., BOGAERTS, H., & RATINCKX, E. (1999), Design and evaluation of a learning environment for mathematical modeling and problem solving in upper elementary school children*, Mathematical Thinking and Learning,* **1***,* 195–229.

VERSCHAFFEL, L., GREER, B. and DE CORTE, E. (2000), *Making Sense of Word Problems*, Swets & Zeitlinger, Lisse.

YEPING, L., & SILVER, E. (2000), Can younger students succeed where older students fail? An examination of third graders' solutions of a division-with-remainder problem, *Journal of Mathematical Behaviour*, **19**, 233–246.

YOSHIDA, H., VERSCHAFFEL, L. & CORTE, E. (1997), Realistic considerations in solving problematic word problems, Do Japanese and Belgian children have the same difficulties? *Learning and Instruction*, **7(4)**, 329–338.

CHARALAMBOS LEMONIDIS
Université de la Macédoine Ouest
3eme Km Florina – Niki
53100, Florina
xlemon@uowm.gr

IOANNIS PANAGIOTOPOULOS
Enseignant, Education Primaitre
panagiotio@gmail.com

KONSTANTINOS NIKOLANTONAKIS
Université de la Macédoine Ouest
3eme Km Florina – Niki
53100, Florina
knikolantonakis@uowm.gr

LUCIE DEBLOIS

LES CONTEXTES ET LES BESOINS À L'ORIGINE DE LA RECHERCHE COLLABORATIVE[1]

Abstract. Contexts and needs at the origin of collaborative research – The goal of this study was to discuss the characteristics of collaborative research to identify/determine the conditions contributing to achieving this type of research. In light of pedagogical reforms and teachers' reactions have led school districts to provide "a la carte" training. It is therefore important that both schools and teachers participate in these types of professional development activities that provide useful results for teachers as well as researchers. Three groups of mathematics teachers participated at this research project. The thinking that emerged enabled us to identify the benefits, challenges, and conditions of this type of research.

Key words. Inservice teacher, collaborative research, interpretation, sensibility.

Résumé. Cet article a pour but de discuter les caractéristiques de la recherche collaborative afin de préciser les conditions qui contribuent à la réalisation de ce type de recherche. La mise en œuvre du renouveau pédagogique et les réactions des milieux scolaires ont conduit à offrir des formations « à la carte ». Il devient donc intéressant à la fois pour les commissions scolaires et pour les enseignants de participer à des activités qui offrent des résultats tant pour les praticiens que pour les chercheurs. Trois groupes d'enseignantes et d'enseignants en mathématiques ont participé à ce type de recherche. Les réflexions qui se dégagent nous permettent d'identifier les apports, les contraintes et les conditions de ce type de recherche.

Mots-clés. Formation continue, recherche collaborative, interprétation, sensibilité.

Introduction

Considérée comme une forme de recherche participative (Bourassa, Bélair et Chevalier, 2007), la recherche collaborative se constitue sur la base d'une «communauté de pratiques» (Lave, 1991 ; Wenger, 1998). Elle suscite la production d'un savoir professionnel viable qui considère notamment les sensibilités, les routines et le jeu des contraintes (Joannert, 2001) tout en permettant le renouvellement de ces savoirs (Bednarz et al, 2001). Les travaux de Desgagnés (1997, 2007) identifient trois grandes caractéristiques spécifiques de la recherche collaborative : la *co-situation*, qui conduit à la mise en place du projet, la

[1] Cette recherche a été possible grâce à la contribution financière du conseil de Recherche en Sciences Humaines du Canada (CRSH).

© 2009, IREM de STRASBOURG.

coopération, grâce à laquelle les rencontres sont vues comme autant de journées de perfectionnement pour les enseignantes et les enseignantes et de moments de cueillette de données pour la chercheure, la *coproduction*, qui permet de valider les analyses et de diffuser les résultats.

La recherche collaborative permet de donner à l'ensemble des partenaires des réponses à des questions importantes pour eux. Ainsi, des questions telles que « Comment intervenir en classe ? » et « Comment se modifient les pratiques des enseignants ? » cohabitent malgré leur décalage. Une intersection est possible entre ces questions. À ce titre, Roditi (2009) précise : «Au lieu d'une répartition dichotomique des objectifs de la recherche, il nous apparaît plus juste aujourd'hui de les penser comme étant effectivement répartis en deux ensembles, mais des ensembles dont l'intersection n'est pas vide.» C'est cette intersection qui favorisera le choix d'une méthode de recherche collaborative pour atteindre les objectifs visés.

Cet article a pour but de discuter les caractéristiques de la recherche collaborative et à l'illustrer par mes travaux comme dispositif privilégié. En m'appuyant sur les préoccupations des enseignants de mathématiques et en relisant les études que j'ai effectivement conduites, je chercherai à identifier les nécessités qui s'en dégagent, afin de pouvoir mieux circonscrire les contextes, les rôles, les apports, les contraintes et les conditions de la recherche collaborative. La recherche collaborative pourra aussi être située par rapport à d'autres, pour préciser les raisons qui la rendent pertinente.

1. Les contextes politique, professionnel et scolaire

La transformation des programmes d'études québécois, initiée par les États généraux de l'éducation tenus en 1995, encourage un renouvellement des pratiques enseignantes. Dans ce contexte, étudier les conditions de changements des pratiques enseignantes s'avère tout aussi intéressant pour les chercheurs en didactique que pour les enseignantes et les enseignants qui se sentent démunis. Desgagnés (1997, 2007) précise que la co-situation permet de dégager un espace qui conduit à identifier les buts visés par chacun des partenaires sans pour autant que ces buts soient les mêmes. J'ajouterai que les contextes politiques, professionnels et scolaires favoriseront ou nuiront à la définition de la co-situation.

La réforme des programmes impose aux enseignantes et aux enseignants une approche par compétences. Dans cette foulée, les six années scolaires du primaire sont restructurées en trois blocs de deux années appelées respectivement 1er cycle, 2e cycle et 3e cycle. Des conséquences de cette structuration et de cette approche sont, d'une part, que l'évaluation portera davantage sur les compétences que sur les connaissances, d'autre part, que les élèves auront deux années pour développer les

dites compétences. Enfin, le redoublement des élèves qui ne réussissent pas est énergiquement remis en question, de même que la création de classes spécialisées pour les élèves qui éprouvent des difficultés d'adaptation et d'apprentissage. Les écoles devront remettre des bulletins adaptés à leurs milieux.

Ce contexte politique, professionnel et scolaire crée des besoins dans le milieu scolaire. Les enseignants sont invités à travailler en collaboration avec les collègues du même cycle et non pas seulement avec les collègues du même degré scolaire. Le travail en cycle exige un travail de concertation et de collaboration, nécessitant de dégager du temps pour favoriser ces échanges sur les contenus disciplinaires par degrés et sur les ressemblances et les différences de contenus disciplinaires entre les degrés. Enfin, l'information à donner aux parents nécessite des concertations entre les membres d'une même école. L'élaboration d'une compréhension commune sur les exigences de ces programmes, la construction de situations d'enseignement-apprentissage, d'évaluations et l'élaboration de bulletins incitent les enseignants à entrer dans un processus de coproduction. Ainsi, sans aller jusqu'à la recherche collaborative, un processus de coopération se dessine dans le milieu scolaire. Le chercheur n'est pas encore sur le terrain, mais ce contexte aura inévitablement une influence sur la réalisation du projet.

Les enseignants sont déroutés. Leurs préoccupations des contribuent à faire naître une variété de besoins. Intéressée par les déclencheurs de transformation de pratiques de classe, je reconnais une occasion pour cerner les changements de pratiques dans leur contexte « réel », c'est-à-dire avec ses contraintes. Toutefois, je ne pourrai me soustraire aux attentes des enseignants qui cherchent une « formation ».

1.1. Préoccupations des enseignants dues au renouvellement des pratiques

De nouvelles préoccupations émergent. Je les ai regroupées en trois catégories. Certaines se développent à l'égard de l'apprentissage des élèves, d'autres à l'égard de l'évaluation de compétences et à l'égard de la compréhension des programmes d'études.

La première catégorie intègre les préoccupations liées aux approches pédagogiques (trucs, exemples, activités pédagogiques) de même que la différenciation de l'enseignement compte tenu de la diversité des besoins des élèves, le contenu pour répondre aux besoins de tous les élèves, les repères culturels lors du développement des concepts, notamment en géométrie.

Dans la deuxième catégorie se manifestent davantage des préoccupations à l'égard de la distinction entre l'évaluation en cours de cycle et en fin de cycle, de la communication à l'aide du langage mathématique, de l'évaluation des situations-

problèmes et de l'utilisation de cotes ou de notes en pourcentage pour maintenir la motivation des élèves.

Enfin, les préoccupations de la troisième catégorie touchent la redondance possible des contenus disciplinaires dans les programmes d'études par cycle, les nuances de sens entre différents termes utilisés dans le programme d'étude (analyser, interpréter, transmettre et produire un message à caractère mathématique, situation-problème et situation d'apprentissage; algorithme et processus).

1.2. Mon parcours de recherche

Le choix de la recherche collaborative a été la conséquence du type de questions auxquelles je cherche à répondre. Ces questions sont aussi l'effet du contexte dans lequel j'évolue. Les questions de mes premières recherches ont été liées à l'action. Les méthodes qu'elles invitent à privilégier sont très près de ce qu'il est convenu d'appeler une recherche action. C'est le cas des recherches que j'ai menées sur le développement cognitif des élèves en mathématiques, au moment où j'étais à la fois orthopédagogue[2] et chercheure. Ainsi, reconnaître les manifestations d'apprentissage lorsque des élèves coordonnent les quantités, les conventions et les opérations dans des situations portant sur la numération positionnelle (DeBlois, 1996) ou encore reconnaître comment les séquences de temps (avant-après, début-fin, *etc*.) favorisent un ajustement des aspects qualitatifs des situations proposées aux élèves (DeBlois, 1997) ont permis de contribuer au développement des connaissances du champ de l'apprentissage des mathématiques. L'analyse et l'interprétation des différentes conduites observées au cours de ces recherches peuvent servir de guide pour baliser une intervention adaptée. Toutefois, ce type de résultats n'est souvent pertinent que pour qui analyse et interprète ces différentes conduites. En effet, bien que le but visé par les recherches issues de ces questions soit de documenter un phénomène, le travail professionnel réalisé au même moment invite à profiter des analyses successives pour adapter ou modifier les interventions et, par conséquent, à transformer la pratique professionnelle. Mais les questions de la diffusion des résultats et de l'utilisation de ces derniers restent entières.

D'autres questions, liées à la réflexion sur l'action, se sont développées ensuite. Elles visaient, par exemple, à étudier certains phénomènes de classe. Par exemple, une recherche visant à cerner les savoirs d'expérience des orthopédagogues (DeBlois et Squalli, 2001) ou à développer un modèle d'interprétation des activités cognitives des élèves (DeBlois, 2003) a rendu possible l'intégration des préoccupations et des contraintes des différents partenaires. Il a été possible de

[2] L'orthopédagogue travaille, en français ou en mathématiques, avec des élèves qui éprouvent des difficultés d'apprentissage et qui sont le plus souvent en classe ordinaire.

« théoriser » les actions, de les discuter, de les comparer, d'identifier les principes et les limites de leurs interventions. Les résultats de ces recherches ont contribué à la reconnaissance de l'influence de l'interprétation sur le choix des interventions et de l'importance de démystifier le regard porté par les différents partenaires lors de la recherche. Toutefois, malgré la volonté de vouloir développer une recherche collaborative, ces recherches n'ont pas permis la mise en place d'une véritable co-situation, l'objet de recherche était trop éloigné des préoccupations des partenaires. En effet, le modèle d'interprétation développé est confondu avec un modèle d'intervention, conduisant ainsi à répondre à la question de la recherche sans pouvoir répondre aux préoccupations des partenaires.

Un troisième type de recherche a permis d'atteindre les préoccupations des partenaires. Liées à la réflexion sur des connaissances didactiques ou pédagogiques, elles visent à poser une réflexion sur la réflexion à l'égard de la supervision de stagiaires et de l'insertion professionnelle (DeBlois et Maheux, 2005). Réalisée avec des enseignantes et des étudiantes stagiaires, cette recherche a permis la planification commune de situations d'enseignement-apprentissage et l'expérimentation suivie d'un retour sur l'expérimentation.

1.3. Les rôles des partenaires

Reprenons chacun des exemples évoqués précédemment afin d'identifier les rôles des partenaires de ces recherches. Il sera alors possible de cerner comment naît l'intersection entre les préoccupations des différents partenaires, intersection nécessaire à la mise en place d'une co-situation.

Lorsqu'il s'agit de documenter le développement cognitif des élèves en mathématiques (DeBlois 1997a, 1996), les résultats conduisent à la transformation du regard du chercheur qui analyse et interprète les différentes conduites observées. Ce dernier diffuse l'information que les enseignants interprètent et utilisent ou non dans leurs planifications.

Cerner les savoirs d'expérience des orthopédagogues (DeBlois et Squalli, 2001) ou développer un modèle d'interprétation des activités cognitives des élèves (DeBlois, 2003) offre des résultats pour qui s'intéresse à comprendre son intervention, sans pour autant offrir des stratégies d'intervention directe.

La recherche menée avec des enseignantes et des stagiaires (DeBlois et Maheux, 2005) conduit chacun à manifester son expertise pour contribuer à la formation et à la supervision. Les enseignants répondent à leurs besoins de supervision des stagiaires et ces derniers font connaître leurs « bons coups » afin de faciliter leur insertion professionnelle. Au plan de la pratique professionnelle, cette recherche a favorisé l'insertion professionnelle des stagiaires impliquées. Au plan de la recherche, les résultats ont contribué à identifier quatre types d'adaptation de

stagiaire (projective, normative, retirée, évitement). La recherche collaborative est donc une forme de méthodologie qui offre des retombées jugées pertinentes pour l'ensemble des partenaires. Les transformations sont étudiées *à partir des interactions* plutôt qu'à partir de la réflexion sur l'action.

2. Une alternance entre les expertises des partenaires

Pour illustrer les caractéristiques de la recherche collaborative, j'utiliserai la recherche en cours, qui s'est développée dans le contexte décrit précédemment. Des séminaires offrent un lieu où les préoccupations des enseignantes et des enseignants de mathématiques du secondaire sont considérées. En effet, le choix des productions étant nouveau à chaque fois, des préoccupations différentes sont considérées à l'égard du contenu à enseigner. C'est ainsi que la co-situation est redéfinie à chacune des rencontres, en mettant en scène des erreurs produites par leurs élèves. Ces préoccupations deviennent la plate-forme à partir de laquelle une véritable formation est offerte.

Au plan de la coopération, les rencontres sont vécues comme des journées de perfectionnement pour les enseignantes et les enseignants et des moments de cueillette de données pour moi. Les séminaires se déroulent dans le milieu scolaire. Les productions à analyser sont choisies à partir des pratiques de classe, tandis que je prépare la structure des séminaires et je me tiens disponible pour réaliser une analyse conceptuelle des notions mathématiques. Les séminaires mettant en scène des erreurs produites par les élèves en classe de mathématiques offrent aussi un lieu où chacun intervient de façon active. Mes rôles alternent entre l'animation et la participation, alors que mes partenaires se concentrent sur la participation. J'ai déterminé des questions, alors que les contenus disciplinaires des séminaires sont déterminés par les enseignantes et les enseignants. Par exemple, les productions discutées dans un des groupes ont porté sur : les relations entre histogrammes et tables de valeurs, les relations entre table de valeurs et graphiques, les opérations sur des expressions algébriques, une initiation aux probabilités, les monômes, l'aire et le périmètre, la priorité des opérations, les angles et leurs mesures, la construction de soustractions d'expressions algébriques. L'analyse des traces laissées par leurs élèves permet d'étudier les interactions possibles entre l'élève et la situation proposée dans la classe pour poser des hypothèses (des catégories d'interprétation) et considérer des interventions. Dix-sept productions ont été étudiées par trois groupes d'enseignantes et d'enseignants à travers 11 séminaires d'environ 120 minutes. L'animation permet des régulations « en situation ». Je partage des savoirs didactiques et pédagogiques et je recueille des données permettant de cerner le développement de la sensibilité des enseignants. Cette alternance entre les expertises marque ce type de coopération.

Comment les idées ou des propositions sont-elles initiées ? Et un biais dans l'observation des comportements d'enseignants peut-il résulter des interventions de la chercheure ? Afin de réfléchir à cette question, je donnerai trois exemples : deux où j'ai initié les idées, l'une qui a abouti et l'autre non, et une hypothèse initiée par les enseignantes et les enseignants. Rappelons que des questions sont planifiées. Ces dernières favorisent la réalisation de séminaires semi-dirigés. En général, je formule une question suscitant la contextualisation de la production, puis j'assure le relai dans la passation de la parole. Durant le séminaire, je cherche, tout comme les enseignants, une explication à l'origine de l'erreur, puis je fais des synthèses auxquelles je fais participer les enseignants. Une alternance entre les deux rôles, celui de chercheure qui surplombe la discussion et le bon avancement du groupe, puis celui d'un membre de ce groupe, qui participe à la discussion au même titre que les autres.

2.1. Initiation d'idées par la chercheure utilisées par les enseignants

La situation indiquée aux élèves était celle d'un chien de garde attaché par une corde à un coin d'une maison (dimension de 1 sur 2), située sur un terrain correspondant à un rectangle de dimensions 6 par 7. La tâche finale proposée aux élèves était d'obtenir la longueur minimale que doit avoir la corde pour que le chien puisse atteindre n'importe quel point du terrain.

Les figures 1 à 4 montrent des feuilles d'élèves avec leurs réponses. Sur les quatre élèves, un seul a réussi à résoudre le problème, deux autres ont pu le résoudre avec de l'aide. L'écart entre résultats obtenus et résultats attendus est observé.

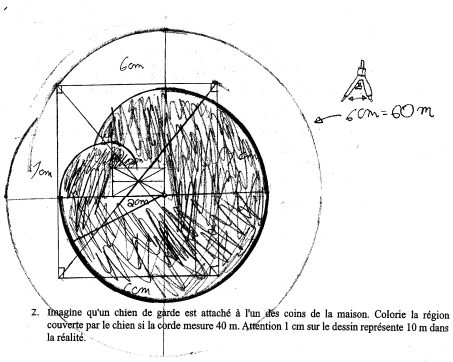


Figure 1

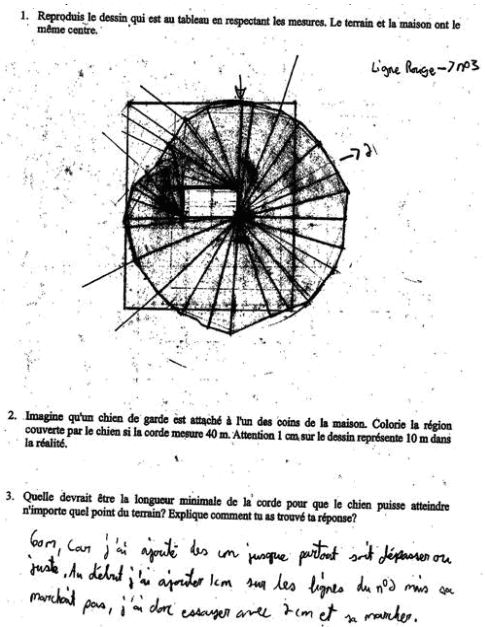


Figure 2

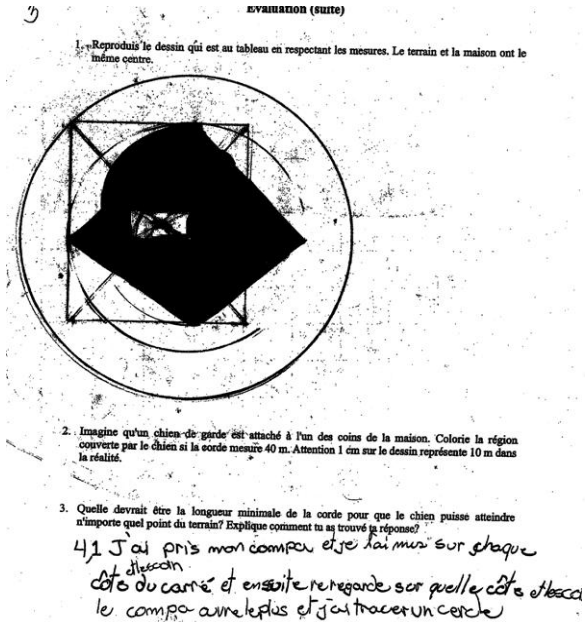


Figure 3

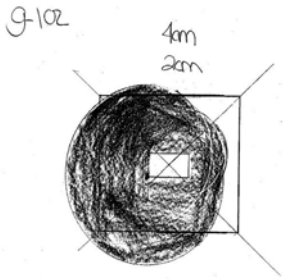


Figure 4

L'invitation à décrire des productions d'élèves conduit à porter l'attention sur les procédures utilisées, comme l'utilisation de segments de droite ou la construction d'un losange. L'étude de ces procédures conduit à formuler des hypothèses : une incompréhension de la tâche par l'élève, un manque de réflexion ou un manque d'anticipation. C'est l'étude des caractéristiques de la tâche qui contribue au développement d'une sensibilité aux exigences de la tâche : choix de connaissances, implicites de la tâche, mouvement. Cette nouvelle sensibilité conduit à interpréter autrement l'erreur. L'élève n'a pas découpé la tâche, ce qui a engendré une absence de découpage de la solution du problème. Puis une difficulté à établir des relations entre le problème et les savoirs géométriques vus en classe (cercle, frontière, échelle) est évoquée. Les enseignants interprètent l'erreur comme un manque de transfert.

La discussion porte ensuite sur une élève, compte tenu du fait que cette dernière, à la suite de plusieurs années en classe spécialisée, vient d'être intégrée en classe régulière. Initiée par la chercheure, une comparaison entre les tâches présentées habituellement en classes spécialisées et celles à l'étude ici conduit à développer une sensibilité aux modalités d'enseignement auxquelles est habituée l'élève. La discussion sur les modalités d'enseignement privilégiées dans les classes spécialisées, par rapport à celles sollicitées pour la tâche proposée, conduit à développer une sensibilité au contrat didactique. L'erreur est alors interprétée comme une difficulté d'adaptation aux nouvelles attentes de la classe. Ce processus

réflexif montre comment une hypothèse conduit à développer une explication plausible en alternant entre les propositions de plusieurs enseignantes et enseignants et de la chercheure, jusqu'à trouver une explication jugée plausible par l'ensemble des partenaires. Dans ce cas, une hypothèse émise par la chercheure a pu influencer l'apparition de nouvelles hypothèses.

2.2. Initiation d'idées par la chercheure abandonnées par les enseignants

Dans cette production (figure 5), l'élève devait écrire un nombre décimal en fraction irréductible ou un pourcentage en une fraction. Les corrections manuscrites sont réalisées par l'élève à la suite de la correction par l'enseignant.

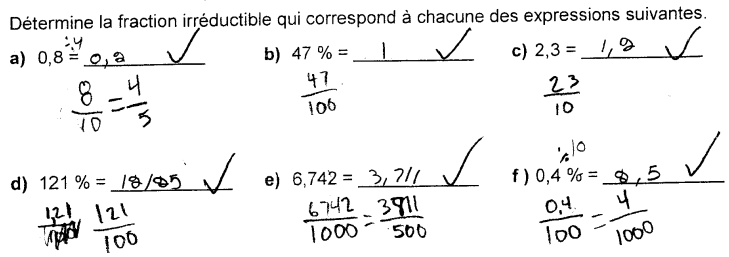


Figure 5

L'étude de l'écart entre résultats attendus et résultats obtenus a conduit les enseignants à considérer une absence de connaissances de la notion d'égalité et du sens des nombres rationnels. Invités à observer la régularité de l'erreur, ils reconnaissent que l'élève semble jouer avec l'idée de moitié (c, d, e) sans écrire une fraction. De plus, les enseignants reconnaissent que l'élève a réussi la tâche suivante qui consistait à transformer une fraction en pourcentage ou en nombre décimal. Le retour aux tâches habituellement réalisées en classe permet d'identifier la méthode de travail proposé (créer un tableau dont une colonne est réservée à l'écriture du nombre respectivement sous la forme d'une fraction, d'un nombre décimal et de pourcentage). L'élève a l'habitude d'identifier une fraction, puis de la simplifier afin de la rendre irréductible. L'importance de cerner les représentations de l'élève est évoquée.

En réexaminant de près la procédure de l'élève, des enseignants considèrent la présence du mot "irréductible" dans la consigne. «… *Le mot irréductible l'amène à faire une division, cherchant le plus grand commun [diviseur]* ». Un enseignant observe que l'élève divise par 2, trouve un nombre décimal, puis qu'elle fait une approximation à partir du résultat de la division. « *Elle essaie un peu de se rapprocher [de l'idée] d'irréductible, mais sans passer par la fraction* ». La chercheure saisit cette occasion pour initier l'idée selon laquelle l'élève « *s'est donné une règle* ». Cette hypothèse n'est pas retenue par les membres du groupe,

privilégiant plutôt une interprétation liée à une incompréhension de l'élève à l'égard du mot "irréductible" dans la consigne.

C'est une intervention en classe auprès de l'élève qui conduit à revoir cette hypothèse. Sensibles aux représentations de l'élève, l'intervenant constate que la transformation de nombre décimal en fraction est réalisée sans problème pour des nombres composés de centièmes comme 0,18. Toutefois, les nombres composés de millièmes (0,003) posent problème : «E*lle a bloqué, elle est restée trente secondes à peu près, puis elle a dit « ça marche pas sur 100* ». Une deuxième observation est discutée. Ses difficultés sont surtout liées aux nombres impairs. «*… quand il y a des nombres pairs, numérateur, dénominateur, la règle qu'elle s'est donnée… elle divise par deux, par deux, par deux, par deux jusqu'à ce que ça marche plus. Quand je demande des nombres impairs comme sept quarante neuvième (7/49)… là, elle ne le voit pas…*». Sensibles à la fois aux représentations de l'élève et aux caractéristiques de la tâche, les enseignants sont conduits à reconnaître que l'élève cherchait à répéter une procédure de division par deux pour les nombres pairs. Ce processus réflexif illustre comment l'expérimentation davantage que l'hypothèse de la chercheure conduit à revoir l'hypothèse d'une règle construite par l'élève pour développer une explication plausible.

2.3. Initiation d'idées par des enseignants

Un ensemble d'observations sont faites par les enseignants à propos des erreurs de l'élève sur des exercices de réduction d'expressions algébriques. À l'invitation de la chercheure à décrire la production de l'élève, les enseignants observent sa procédure, ce qui les rend sensibles à l'enseignement offert. Une enseignante interprète l'erreur comme un échec compte tenu du fait qu'un rappel a été fait dans la classe deux jours avant la réalisation du travail à l'étude. Les enseignants observent que l'élève opère sur l'exposant de manière inadéquate. Ils reconnaissent ensuite qu'il a des difficultés à opérer avec un signe négatif. Enfin, on observe que l'élève a des difficultés avec la distributivité de la multiplication sur l'addition. L'erreur est interprétée comme la manifestation d'une attitude passive de l'élève et d'une faible attention.

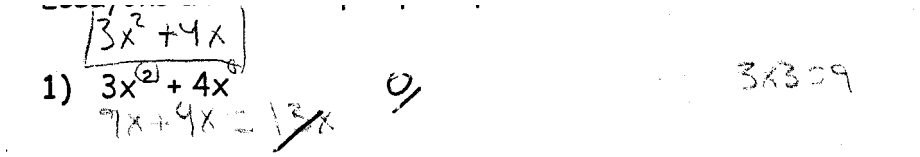


Figure 6

Invités à identifier les connaissances manifestées par l'élève pour l'ensemble des exercices de la production, les enseignants reconnaissent des régularités dans les

erreurs de l'élève, ce qui les rend sensibles à un nouveau milieu : les caractéristiques de la tâche. L'élève aurait fonctionné par ordre de priorité. C'est pourquoi il calculerait d'abord l'exposant. L'élève attribue l'exposant aux nombres plutôt qu'aux variables et additionne les nombres. La réponse à la 3e question manifeste d'ailleurs une compréhension.

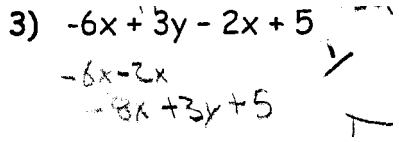


Figure 7

La chercheure précise que l'élève pourrait être revenu à un fonctionnement avec lequel il est familier et qui, probablement, lui réussissait. Une enseignante soulève un problème de communication : les élèves n'arrivent pas à parler, à formuler des questions et semblent se murer dans le silence. Une enseignante signale l'influence d'idées préconçues sur l'algèbre et la représentation que l'élève entretient par rapport à cette matière.

Ce processus réflexif montre comment les enseignants et les enseignantes, entre eux, développent une hypothèse qui conduit à développer une explication plausible en alternant entre les propositions de plusieurs partenaires. Ces trois exemples exposent comment certaines des hypothèses, initiées par la chercheure, servent de déclencheurs, alors que d'autres sont abandonnées.

3. Discussion

Dans ce type de recherche, mon rôle ne vise pas à demeurer "neutre", comme par exemple dans le cas de la recherche de Sauter (2008), mais bien à contribuer au développement d'une expertise commune. Les réflexions qui se dégagent de cette recherche permettent d'identifier les apports, les contraintes et les conditions de cette méthodologie.

3.1. Apports de la recherche collaborative

Une transcription verbatim a contribué à l'élaboration d'un modèle d'interprétation/intervention mis ensuite à l'épreuve dans la classe (Annexe 1). Une telle activité est nouvelle dans la méthodologie. En effet, elle n'existait pas dans les recherches antérieures (DeBlois, 2006, DeBlois et Squalli, 2000). Cette coproduction laisse des traces, ce qui favorise une coordination entre les préoccupations des partenaires. La transcription verbatim a aussi permis une analyse de discours, plus particulièrement à l'égard des interactions et de la transformation des pratiques ainsi qu'aux relations entre elles. Une analyse de l'origine des interprétations et des interventions devient possible pour reconnaître

comment des transformations de l'interprétation des enseignants à l'égard de leurs élèves influencent leurs changement de pratiques (Annexe 2). Les résultats obtenus présentent des classes de sensibilités : sensibilité à la compréhension de l'élève, à l'enseignement offert, à la concentration exigée par la manipulation du matériel par l'élève ou encore aux habitudes de travail des élèves. Ces sensibilités sont toutefois spécifiques aux tâches étudiées.

Il semble qu'il ait été important pour les enseignants de jouer un rôle dans cette construction pour démystifier les résultats de la recherche. Par exemple, sous l'influence de l'expérimentation de leur modèle d'interprétation/intervention dans les classes, certaines catégories d'intervention sont validées (comme le fait de proposer des contre-exemples), d'autres sont transformées (comme le fait de demander à l'élève d'expliquer la solution proposée). En outre, l'expérimentation a montré une nouvelle relation enseignant/élève, relation caractérisée par la nature des interactions. Par exemple, une enseignante précise que le nombre de comportements inappropriés diminuerait chez les élèves ayant le sentiment de vivre une expérience commune avec elle. Enfin, une certaine vigilance se développe par rapport aux multiples interprétations, attestant une prise de conscience de ce qu'ils appellent « *le piège des interprétations* », pour élargir les possibilités d'intervention.

De nouvelles compétences se développent. Par exemple, plutôt que d'interpréter l'erreur de l'élève comme un manque d'attention, les enseignants cherchent le sens des procédures utilisées par les élèves. Au plan de l'intervention, la coproduction réalisée conduit à accompagner l'élève durant sa démarche d'apprentissage pour ensuite jouer son rôle en alternance plutôt que de façon séquentielle. Contrairement à la recherche de Sauter et al. (2008), le fait que les partenaires aient des buts différents contribue à une différenciation des retombées de notre recherche.

3.2. Contraintes de la recherche collaborative

Le contexte politique, professionnel et scolaire a contribué à rendre la recherche collaborative appropriée. C'est donc dire qu'en l'absence d'un tel contexte, le chercheur aura intérêt à susciter l'identification des préoccupations de l'ensemble des partenaires afin de cerner les besoins auxquels ce type de recherche peut répondre. Sans ce travail "souterrain", l'écart entre les attentes des partenaires risque de s'opposer à la manifestation de retombées jugées pertinentes. Par exemple, en l'absence d'une redéfinition régulière de la co-situation, l'écart entre les préoccupations des partenaires risque de conduire les enseignants à se centrer sur la relation contenu-tâches (enseignement) et la chercheure sur les interactions tâches-élève (apprentissage). Dans les deux cas, ces centrations réduiraient les possibilités de formuler des hypothèses. Il ne faudrait pas passer sous silence les difficultés à redéfinir continuellement une co-situation. Dans la recherche

présentée, une redéfinition a pu se réaliser, de façon informelle, par la variété d'activités prévues (analyse de productions différentes, élaboration d'un modèle d'interprétation/intervention, expérimentation du modèle).

En outre, les questions de la recherche portent sur les conditions de transformation des interprétations et des interventions des enseignantes et des enseignants. Ainsi, mes interventions sont considérées comme des déclencheurs potentiels plutôt que comme des biais. Les exemples présentés précédemment montrent comment une explication qui ne semble pas plausible sera abandonnée. Certaines questions de la recherche ne pourront susciter la mise en place de co-situation comme je l'ai illustré en évoquant certaines expériences.

3.3. Les conditions de réalisation d'une recherche collaborative

Toute forme de collaboration avec des enseignants ne devient pas une recherche collaborative, comme nous l'avons vu en revisitant les recherches antérieures. De même, la volonté de vouloir réaliser une recherche collaborative n'est pas suffisante. Il convient de préciser certaines conditions qui contribuent à la mise en œuvre de cette méthodologie. Je m'attarderai sur le contexte, la planification et la réalisation.

J'ai décrit dans cet article le contexte dans lequel les enseignantes et les enseignants réalisaient leurs activités professionnelles et le contexte de recherche de la chercheure. Une évaluation du contexte et des préoccupations des partenaires, de même que l'identification de leurs besoins sont fondamentaux. Ces contextes initient des préoccupations à l'égard de l'évaluation des apprentissages des élèves pour les uns, et à l'égard du développement de savoirs professionnels pouvant se manifester par des retombées dans les milieux de pratique pour les autres. En ce qui me concerne, la problématisation de la question de recherche et le cadre conceptuel seront des atouts précieux durant les séminaires pour donner des éléments de réponse aux besoins qui se manifestent. En ce sens, je considère le choix d'une telle méthodologie de recherche comme un projet sociétal.

Le temps accordé à la préparation d'une rencontre préparatoire avec l'ensemble des partenaires contribuera à créer une intersection dans laquelle peuvent se retrouver les préoccupations des enseignants et des éléments de la problématique du chercheur. En outre, la planification préalable des questions qui guident les séminaires contribue à stabiliser le climat puisque des habitudes de travail se développent. Les partenaires accepteront plus facilement de remettre en question leurs interprétations et leurs interventions habituelles sans se sentir menacés par ces remises en question. Enfin, le fait que l'organisation d'une rencontre soit confiée à l'un des participants contribue aussi à créer un climat de confiance suscitant la collaboration. Ce participant, toujours le même durant l'ensemble des séminaires,

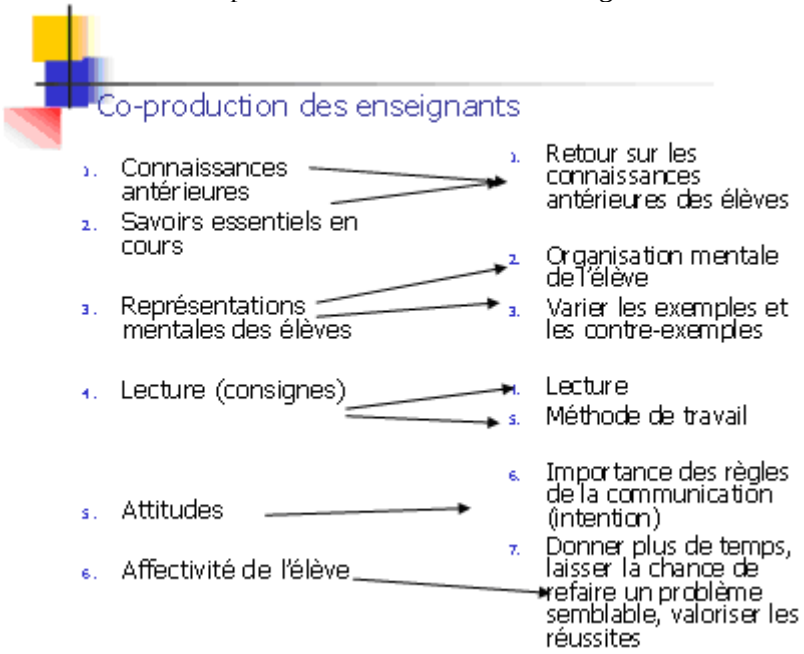
est désigné par le groupe pour s'occuper tant des relations entre les enseignants et la chercheure que de l'organisation matérielle des séminaires.

Il est souhaitable de considérer aussi l'ensemble des composantes organisationnelles. Par exemple, une recherche réalisée de façon intensive permet de conserver la motivation et l'engagement des partenaires. Des moyens financiers, comme le remplacement des enseignants assumé par la chercheure, ont semblé atténuer les irritations liées à leur absence en classe. De même, l'implication de l'administration scolaire dans le processus encourage la participation des enseignantes et des enseignants. L'engagement des partenaires est alimenté par leur rôle. Ainsi, le matériel issu des incidents de leur classe favorise leur engagement dans la recherche. La co-construction d'un modèle destiné à l'intervention en classe contribue à l'engagement et aux retombées, alors que l'expérimentation du modèle co-construit permet de dégager des marges de manœuvres nouvelles. Le fait que la chercheure se déplace dans les écoles est considérée comme une manifestation de sa considération envers le travail de ses partenaires.

Conclusion

Cet article visait à discuter une méthodologie de recherche et à préciser les raisons qui la rendent pertinente. Le principal défi de ce type de méthodologie consiste à créer un climat qui favorise l'alternance entre les expertises des partenaires pour répondre aux besoins exprimés. Cette méthodologie a permis, nous l'avons vu, de redéfinir les préoccupations et les buts des partenaires, ce qui a favorisé le développement d'une souplesse pour jouer sur les rôles de chacun. La réalisation d'une recherche collaborative est aussi l'aboutissement d'une expérience de recherche. Dans notre cas, en ce qui concerne l'intervention dans les classes, la construction de modèle pour interpréter les incidents de classe que sont les erreurs des élèves s'est avérée pertinente. Et en ce qui concerne l'observation de l'évolution des enseignants impliqués, la modélisation des interactions et des transformations conduit à cerner des sensibilités et des déclencheurs de transformations, composantes importantes pour qui s'intéresse à la formation professionnelle.

Annexe 1 - Modèle d'interprétation/intervention des enseignants



Annexe 2 - Analyse de la chercheure appliquée à la mesure des

ÉLÉMENTS CONTRIBUANT À L'INTERPRÉTATION	**SENSIBILITÉ DES ENSEIGNANTS À :**	**INTERPRÉ-TATION DES ERREURS**	**INTERVENTIONS PRÉVUES**
Écarts entre résultats attendus et obtenus, régularité de l'erreur	La compréhension de l'élève	Méconnaissance de l'instrument rapporteur d'angles	Proposer une variété de rapporteurs
Procédure de l'élève dans plusieurs des exercices	L'enseignement offert	Attention des élèves	Inverser l'ordre des questions
Difficultés à manipuler un rapporteur	La priorité de la concentration nécessaire à la manipulation sur le développement et la compréhension	Compréhension de la mesure des angles	Entraînement à la manipulation du matériel
Difficulté de lecture de la mesure donnée par un rapporteur	La méthode de travail (habitude du travail des droitiers, habitudes de vérification)	Absence de questionnement des réponses obtenues	Donner un angle et demander de le mesurer

Bibliographie

BOURASSA, M., BÉLAIR, L., CHEVALIER, J. (2007), Les outils de la recherche participative *Éducation et francophonie*, **XXXV n°2**, http://www.acelf.ca/c/revue.

BEDNARZ, N., DESGAGNÉ, S., DIALLO, P., POIRIER, L. (2001), Approche collaborative de recherche : une illustration en didactique des mathématiques. *Les didactiques des disciplines -Un débat contemporain*. Jonnaert, Ph. et S. Laurin (dir.), Presses de l'Université du Québec : Sainte-Foy, 177–207.

DEBLOIS, L. (2003), Préparer à intervenir auprès des élèves en interprétant leurs productions : une piste… *Éducation et Francophonie*. http://www.acelf.ca.

DEBLOIS, L. (2006), Influence des interprétations des productions des élèves sur les stratégies d'intervention en classe de mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, **62(3)**, 307–329.

DEBLOIS, L., MAHEUX, J.F. (2005, mai), When things don't go exactly as planned: Leveraging from student teachers' insights to adapted interventions and professional practice. Communication présentée dans le cadre du 15e congrès de l'International Commission on Mathematical Instruction. Aguas De Lindoia, Brésil. http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/log_in.html.

DEBLOIS, L., SQUALLI, H. (2002), Implication de l'analyse de productions d'élèves dans la formation des maîtres, *Educational Studies in Mathematics 50* (2), Kluwer Academic Publishers, 212–237. http://www.kluweronline.com/issn/0013-1954.

DEBLOIS, L. (1997), Trois élèves en difficulté devant des situations de réunion et de complément d'ensembles. *Educational Studies in Mathematics*, **34**, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, **1**, 67–96.

DEBLOIS, L. (1996), Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble : Éditions la Pensée Sauvage, France, **16(1),** 71–128.

DESGAGNÉ, S. (2007), « Le défi de coproduction de « savoir » en recherche collaborative, analyse d'une démarche de reconstruction et d'analyse de récits de pratique enseignante, dans M. Anadòn et L. Savoie-Zajc. (dir.) *La recherche participative, Multiples regards*, Québec : PUQ, 89–121.

DESGAGNÉ, S. (1997). Le concept de recherche collaborative : l'idée d'un rapprochement entre chercheurs universitaires et praticiens enseignants. Revue des sciences de l'éducation, **XXIII (2)**, 371–393.

JONNAERT, P. (2001), *La question de la référence en didactique. La posture épistémologique du chercheur et ses implications*, In Terrisse, A., Didactique des disciplines, Les références au savoir, Bruxelles, De Boeck Université.

LAVE, J. (1991), Acquisition des savoirs et pratiques de groupe. Sociologie et sociétés, **XXIII (1)**, 145–162.

RODITI, E. (2009, juin), Communication au symposium "Travail en communautés, collaborations et partenariats pour encourager le développement professionnel des enseignants : liens problématiques entre recherche et pratique" du colloque Réseau international de Recherche en éducation et formation. Actes à paraitre en 2010 dans la revue électronique "Éducation et Formation". http://ute2.umh.ac.be/revues/index.php?revue=3&page=1.

SAUTER, M., COMBES M.C., DE CROZALS, A., DRONIOU, J., LACAGE, M., SAUMADE, H., THÉRET, D. (2008), Une communauté d'enseignants pour une recherche collaborative de problèmes. Revue Éduc-math. http://educmath.inrp.fr/Educmath/lectures/dossier_mutualisation/recherche-collaborative.

WENGER, E. (1998), Communities of Practice. Learning as a social system', *Systems Thinker*, http://www.co-i-l.com/coil/knowledge-garden/cop/lss.shtml. Accessed December 30, 2002, checked June 2009.

LUCIE DEBLOIS
Université Laval, Québec
lucie.deblois@fse.ulaval.ca

INFORMATIONS AUX AUTEURS

Les Annales de didactique et de sciences cognitives sont une revue annuelle éditée par l'IREM de Strasbourg, Université Louis Pasteur. Elle a été fondée en 1988 par R. Duval et F. Pluvinage.

La revue publie des articles de recherches propres à développer et à stimuler la réflexion sur l'enseignement des mathématiques en direction de tous les types de publics : écoliers, lycéens, étudiants et adultes en formation. Les présentations de recherches concernant la formation initiale et continue des enseignants et sur l'enseignement dans des contextes socioculturels variés sont les bienvenues.

Les articles peuvent être de nature théorique en relation étroite avec une expérimentation dans le cadre d'un enseignement. Ils peuvent être aussi des comptes rendus d'une expérience d'enseignement appuyée sur un cadre théorique explicite. Les domaines théoriques de références sont issus de la didactique des mathématiques. Lorsqu'ils s'insèrent dans une problématique d'enseignement des mathématiques, les travaux peuvent aussi prendre appui sur la psychologie cognitive et sur la linguistique.

Les articles ne doivent généralement pas dépasser vingt pages mais exceptionnellement ils peuvent être plus longs et permettre ainsi à l'auteur de développer un point de vue original et émergeant dans le champ de recherche. Il est aussi possible de présenter une synthèse des recherches menées dans un domaine particulier de la didactique des mathématiques. Les articles proposés sont soumis à un arbitrage avant publication. Le cas échéant, des demandes de modifications, aménagements ou compléments des textes présentés seront adressées aux auteurs.

La langue de la revue est le français. Des articles peuvent être publiés dans d'autres langues (notamment anglais et espagnol) ; ils seront alors précédés d'une présentation analytique rédigée en français par l'auteur ou par l'équipe de rédaction.

Les articles proposés pour publication dans les *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* de l'IREM de Strasbourg peuvent être transmis sous forme de documents attachés à des messages électroniques. Il convient d'adresser ces messages à l'un des rédacteurs en chef, à l'adresse électronique indiquée ci-après.

Un modèle d'article au format des Annales se trouve sous forme de fichier *word* à l'adresse URL :

http://irem/data/publi/annales/templates/modele_annales_didactiques.doc

Après ouverture et enregistrement sous un nouveau nom, il permet d'introduire par copier-coller aux emplacements appropriés, en respectant les fontes de caractères et les tailles :

- le nom de l' (des) auteur(s) ;
- le titre complet ;
- le titre éventuellement abrégé, figurant dans l'en-tête des pages impaires ;
- le bloc “abstract – résumé - mots clés” ;
- le texte proprement dit de l'article proposé ;
- la bibliographie sous forme normalisée (s'inspirer du modèle où apparaissent les différents cas pour la présentation des références).

Pour composer un article sans utiliser le modèle, par exemple en recourant à LaTeX, voici des précisions sur le format des pages et les caractères utilisés.

Feuille A4 portrait, avec les marges suivantes :

Haut :	3 cm
Bas :	8 cm
Gauche :	4 cm
Droite :	4 cm
Reliure :	0 cm
En tête :	2 cm
Pied de page :	7 cm

Caractères :

- Auteur(s) en première page : Arial 12 points, gras, petite capitale, Centré ;
- Titre en première page : Arial 14 points, petite capitale, Centré ;
- Abstract – Résumé - Mots clés : Times New Roman 10 points ;
- En-tête : Arial 9 points ;
- Corps de texte : Times New Roman 11 points.

Pour la pagination d'un article proposé, commencer par le numéro 1.

Adresses électroniques :

- pour des commandes de volumes mailto :

  `bibirem@math.u-strasbg.fr`

- pour des propositions d'articles mailto :

  `alain.kuzniak@orleans-tours.iufm.fr`
  `pluvin@math.u-strasbg.fr`