

VOIR ET DESSINER L'ESPACE

Collection : *Dans nos classe n°1*

Les membres du groupe « Géométrie dans l'espace » de l'IREM de Strasbourg.

ACKER Emmanuelle – BERGOTTI Cécile – BRISOUX François – DE MEZZO Adeline –
GABUS Claire – JAEGER Valérie – SCHWEISS Anne-Élise – UNDREINER Bach Christine.

Sommaire

Préface	V
Avant-propos	9
Introduction	11
I. Voir	15
1. Une première illustration : (exemple A).....	16
2. Pour approfondir le sujet : (exemple B)	17
3. L'activité « Que peut-on voir dans l'espace ? »	18
3.1. Le « document élève ».....	19
3.2. Déroulement de l'activité	20
3.3. Conclusion.....	21
II. Construire.....	23
III. Voir et construire : deux activités intimement liées	29
1. Les solides de Platon	30
2. Le pyrosaure	30
3. Sections de solides.....	31
3.1. La nécessité de couper un objet.....	31
3.2. Gabarits.....	31
3.3. Trace d'un plan sur un cube	33
3.4. Les figures clés.....	33
Conclusion.....	35
Annexes	37
Annexe 1 : Que peut-on « voir » dans l'espace ?	38
Annexe 2 : Savoir dessiner dans l'espace.....	42
Annexe 3 : Solides de Platon.....	43
Annexe 4 : Le pyrosaure.....	46
Annexe 5 : Sections du cube.....	47
Annexe 6 : Tracé d'un plan sur un cube.....	48
Annexe 7 : Les figures clés.....	51
Bibliographie	55

PRÉFACE

Un sujet de philosophie du baccalauréat 2008 était « *La perception peut-elle s'éduquer ?* » Sans avoir la prétention de traiter ce sujet et en nous limitant au seul sens de la vue, nous pouvons trouver des exemples qui conduisent à répondre positivement à la question posée. Ainsi en est-il des stéréogrammes, ces images mathématiquement composées sur ordinateur, dans lesquelles des objets sont vus dans l'espace, à condition que l'on apprenne à les regarder en louchant légèrement pour réduire la convergence des yeux. Celui de la figure 1 montre la lettre Pi, il est extrait de l'encyclopédie multilingue Wikipedia à l'article Stéréogramme.

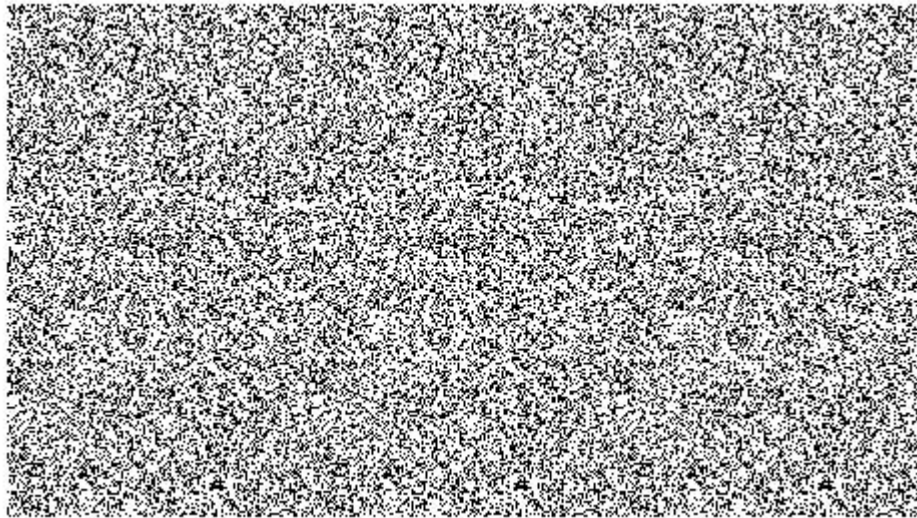


Figure 1 - Stéréogramme fixe : La lettre Pi.

<http://fr.wikipedia.org/wiki/St%C3%A9r%C3%A9ogramme>

Une caractéristique de notre perception de l'espace apparaît ici : Il s'agit de la vision binoculaire. Les lecteurs qui ne bénéficient pas d'une vision équilibrée des deux yeux ne seront donc pas en mesure de percevoir la lettre Pi dans ce qui restera pour eux un réseau de points sans organisation apparente.

Les lecteurs qui auront réussi à voir dans le stéréogramme la lettre Pi se rendront compte que, s'ils déplacent légèrement la tête, l'impression de relief est renforcée par la mobilité apparente de la lettre en premier plan par rapport au fond en arrière plan. Une deuxième caractéristique de la vision spatiale est ainsi mise en évidence : l'observation de mouvements relatifs lors de déplacements. Cette caractéristique, qui fait donc intervenir le temps, est indépendante de la vision binoculaire. Si nous nous trouvons dans un véhicule en mouvement, les objets fixes les plus rapprochés sont ceux dont le déplacement nous apparaît le plus rapide. C'est de cette façon que le cinéma peut, à travers une vision purement monoculaire, nous procurer une impression de profondeur de champ.

Une photographie ne nous montre qu'une image fixe perçue par un objectif. C'est pourquoi, sauf s'il s'agit de rechercher des effets particuliers, le photographe apprend à placer son appareil de manière à éviter des superpositions parasites. Une telle superposition parasite est illustrée sur la figure 2.

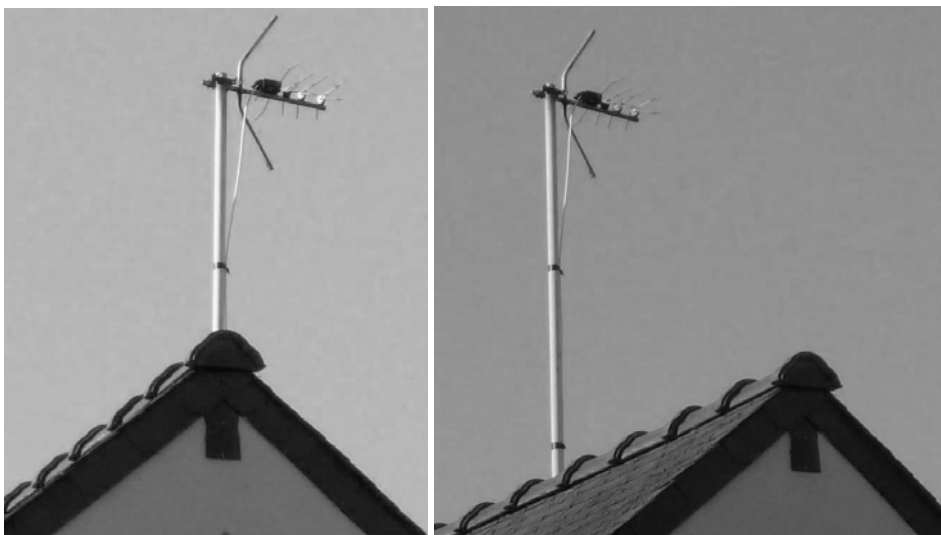


Figure 2 – Malgré ce que montre la photographie de gauche, on voit sur la photographie de droite que l'antenne n'est pas plantée sur le pignon de la maison.

Tant que l'on en reste à des images de notre environnement proche, il est facile de se déplacer pour améliorer, si nécessaire, le point de vue. C'est ce qui avait été fait pour prendre la photographie de droite de la figure 2. Mais ce n'est plus le cas si l'on en vient à des observations astronomiques. Sur la figure 3 apparaissent quelques étoiles caractéristiques de la constellation d'Orion telle que nous l'observons aujourd'hui depuis la terre. L'image connue de quelques étoiles de cette constellation, très proche de la figure d'un losange étroit avec son centre, conduit à des questions à la fois sur l'espace et le temps : Les trois étoiles qui paraissent proches et alignées ne forment-elles pas un triangle aux côtés très longs ? Et, puisque la lumière met un certain temps pour nous parvenir d'une étoile, la vision que nous avons d'un ensemble d'étoiles est-elle celle du moment, ou au contraire nous fait-elle apparaître une figure qui n'a pas d'existence réelle, par le fait que se produisent des déplacements relatifs (l'expansion de l'univers) ou même des disparitions d'étoiles ? Considérée dans toute son étendue, la question « *Que peut-on voir dans l'espace ?* » est ainsi d'une complexité redoutable.

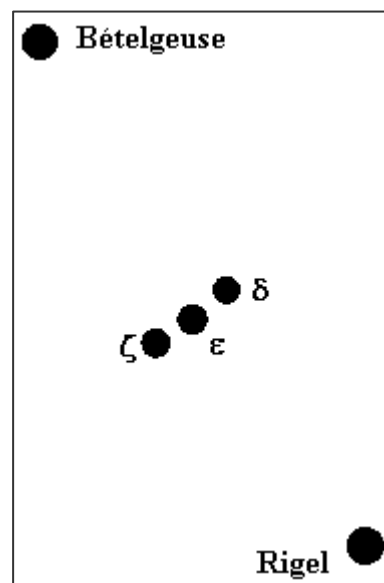


Figure 3 – Étoiles caractéristiques de la constellation d'Orion.

Le regard que nous venons de porter sur la vision d'objets situés à des distances éloignées amène à considérer des questions où intervient la taille d'un environnement étudié. Des recherches en didactique des mathématiques les ont abordées. Pour des travaux concrets proposés à des élèves, il est apparu pertinent de distinguer trois espaces ambiants : le micro-espace, le méso-espace et le macro-espace. On trouvera sur ce sujet une référence en ligne à l'adresse <http://magesi.inrp.fr/impitem.php?Rub=2&Id=16&IC=IC14>. Pour résumer, disons que, pour un individu à un instant donné, le micro-espace est ce qui se trouve à portée de sa main sans besoin de se déplacer, le méso-espace est ce qu'il perçoit de son environnement terrestre dans son champ de vision, le macro-espace ce qui dépasse sa perception. Un aspect théoriquement intéressant de cette considération est qu'un individu a des positions personnelles très différentes dans les trois cas, positions que nous pouvons préciser ainsi : il est extérieur au micro-espace, il est à l'intérieur du méso-espace, il a besoin des autres ou de

la technologie (images prises depuis des satellites par exemple) pour percevoir le macro-espace. A propos de ce dernier cas, il vaut la peine de signaler que des activités organisées au niveau international, pour des classes de pays différents, ont récemment amené à des reprises par des élèves de la méthode (fondée sur des mesures de longueurs d'ombres au soleil d'objets situés en différents points de la terre) qu'Eratosthène avait utilisée pour évaluer la taille de notre planète.

Le passage de l'objet au dessin est évidemment l'objet de nombreuses autres activités. Une publication de l'IREM de Montpellier qui présente de telles activités est consultable en ligne à l'adresse <http://sierra.univ-lyon1.fr/irem/c2ipc/espacemontp.pdf>, ce qui peut permettre au lecteur qui s'y intéressera de compléter les activités proposées dans la présente brochure. Elle s'appuie notamment sur des travaux qui avaient été conduits par Gérard Audibert autour de l'expérimentation du problème *fil* (où est envisagé un fil tendu entre deux points d'une pièce).

Les travaux de recherche menés avec des élèves ont conduit à souligner qu'une question fondamentale pour l'appréhension de l'espace est la perception de plans. Dans le cadre universitaire strasbourgeois, la regrettée Marie-Paule Rommevaux avait soutenu un doctorat de didactique des mathématiques sur le discernement des plans dans une situation tridimensionnelle. Un tel sujet mérite toujours de retenir notre attention, même si son origine remonte à l'antiquité : C'est par exemple Apollonius de Perge qui a donné le nom général de coniques aux sections des cônes de révolution par des plans. Apollonius ne pouvait pas se douter de l'importance considérable que l'étude des coniques aurait par la suite en mathématiques et en physique.

En ce qui concerne le dessin d'objets de l'espace sous forme de représentations planes, dont il convient de rappeler à nouveau qu'elles ne suffisent pas pour la perception de l'espace, l'histoire nous montre que sa systématisation telle que nous la connaissons a été assez tardive. Elle remonte à l'époque du peintre Dürer. L'excellent site personnel de notre collègue Nicole Vogel, à l'adresse Internet <http://pagesperso-orange.fr/nvogel/Dossiers/indexe.html> (référéncée sur la page de liens de l'IREM de Strasbourg), mérite d'être consulté à ce propos. Sur ce même site, les professeurs intéressés pourront aussi trouver, en se rendant à la page <http://pagesperso-orange.fr/nvogel/Dossiers/Stage2007/Dossiers%20stage/IREM2/texte.htm>, des éléments pour compléter leur culture sur la géométrie tridimensionnelle et, pourquoi pas !, enrichir la gamme des activités proposables à des élèves. Saviez-vous par exemple qu'un patron d'octaèdre régulier peut être replié de manière à former un polyèdre autre que l'octaèdre ?

Parmi les choix qui ont été retenus pour constituer la présente brochure, celui de mettre en bonne place la géométrie dite d'incidence, c'est-à-dire la considération des seules propriétés d'appartenance, d'alignement, de coplanarité et de parallélisme, ne peut que recueillir l'approbation s'agissant de l'espace tridimensionnel. La présence d'un test diagnostic pour débiter l'enseignement est également à souligner comme très appréciable, même si je critiquerai personnellement l'énoncé sur un point : ce qui a été dit à propos de la chasse aux superpositions malencontreuses en photographie conduit normalement en mathématiques à ne pas dessiner un point sur un objet s'il peut ne pas lui appartenir. Ce qui est certain de toute façon est que, davantage dans la représentation de l'espace qu'en géométrie plane, une figure doit être accompagnée d'hypothèses sous forme de texte pour représenter un objet mathématique.

François PLUVINAGE

AVANT-PROPOS

A l'heure où nous publions ce document, le Ministère de l'Éducation Nationale vient de rendre public le projet de nouveau programme de seconde en lycée d'enseignement général, qui sera en principe mis en application à la rentrée 2009, après une consultation des enseignants et une publication de sa version définitive entre juin et octobre 2009.

Le projet actuel supprime la plus grande partie de la géométrie dans l'espace, en ne laissant de place que pour quelques calculs ponctuels sur des figures extraites, basés sur les connaissances acquises au collège. Ce projet exclut tout travail sur les incidences, qui permet pourtant de comprendre la relation entre la représentation en perspective et l'objet spatial représenté. La présente publication valorise les vertus de cet enseignement, qui vont bien au-delà du traitement d'un simple "chapitre", mais contribuent à une meilleure compréhension des objets représentés, à une époque où les représentations de situations spatiales sont en nombre croissant dans l'environnement des jeunes. En outre, cet enseignement favorise la rigueur et le raisonnement, deux objectifs majeurs de ce nouveau programme.

Certaines activités réalisées avec des élèves de seconde ne seront certainement plus adaptées à cette classe et seront à proposer en première, cela n'en réduit certainement pas la pertinence, mais nous ne pouvons que regretter que cet enseignement n'ait pas rejoint le socle de compétences fondamentales en mathématiques de la classe de seconde.

INTRODUCTION

Dans le cadre du groupe de recherche "Géométrie dans l'espace" de l'IREM de Strasbourg, nous travaillons depuis 2003 sur l'enseignement de la géométrie dans l'espace au lycée. Nous avons d'abord recherché et analysé les causes des difficultés de nombreux élèves et écouté les attentes des enseignants souvent démunis face aux questions de ce chapitre. Nous avons ensuite élaboré et expérimenté des activités pour remédier aux obstacles didactiques liés à cet enseignement.

Le groupe est composé d'enseignants de lycée, dont quelques-uns ont enseigné au collège. Certains d'entre nous animent depuis de nombreuses années des formations auprès de collègues du second degré dans d'autres domaines des mathématiques. Cette approche par la formation continue a permis de remettre sans cesse en cause nos concepts et nos pratiques, en les confrontant à celles de nos collègues et d'enrichir notre réflexion sur l'enseignement. Nos travaux se sont nourris de ces rencontres.

Quatre membres du groupe "Géométrie dans l'espace" participent en outre aux travaux du groupe de "Didactique" de l'IREM de Strasbourg. Les outils développés en didactique des mathématiques nous ont guidés tout au long de nos recherches et nous ont permis de comprendre les mécanismes d'apprentissages mis en jeu dans la géométrie dans l'espace.

Les enseignants qui se sont investis dans cette publication ont testé les différentes activités dans leurs classes de seconde ou première, afin d'en analyser l'impact et d'en repérer les faiblesses. Cette publication n'a pas pour objet d'être un « cours » de géométrie dans l'espace, ni de traiter tous les items du programme de lycée sur ce chapitre. Nous présentons ici le résultat de nos travaux. Le lecteur y trouvera des explications sur les difficultés multiples liées aux représentations de l'espace, des outils pour y remédier, et enfin des activités pour les élèves (avec les objectifs visés et une synthèse sur les expérimentations de ces activités).

Cette publication comporte trois grandes parties, intitulées "Voir", "Construire", " Voir et construire sont deux activités intimement liées ", ainsi qu'une conclusion et des annexes.

I. Voir

Dans l'enseignement secondaire, la géométrie dans l'espace semble souvent être le prolongement naturel de la géométrie plane. Elle se heurte pourtant à de nouveaux obstacles comme les problèmes d'interprétation de la figure ou de lecture de codes supplémentaires de représentation. L'une des difficultés de la géométrie dans l'espace est le passage d'un objet de l'espace à sa représentation dans le plan. Ce passage implique des pertes d'informations qu'il faut pouvoir gérer en maîtrisant entre autre les règles de représentation utilisées (comme la perspective cavalière par exemple).

II. Construire

Une autre approche pour aider les élèves à comprendre et décoder les informations induites sur une figure consiste à les rendre acteur de leur construction. Nous sommes partis du constat que le cours introduisant les notions de base de géométrie dans l'espace est source de difficultés sous-estimées. Nous avons remarqué en effet que « les représentations- type » rencontrées dans le cours (notamment sur les positions relatives de droites et de plans dans l'espace) ne sont pas aussi explicites pour les élèves que pour l'enseignant. Ces "images" illustrant par exemple un théorème ne sont pas toujours perçues comme une représentation d'une situation concrète, d'où la difficulté de transposer une situation spatiale "réelle" vers un modèle théorique permettant d'identifier le théorème à appliquer. Pour y remédier, il faut aider l'élève à se familiariser avec ces représentations non issues d'un solide en l'entraînant à dessiner dans l'espace.

Notre objectif est de proposer une activité de dessin qui vise non seulement à vérifier l'aptitude des élèves à représenter une situation de l'espace mais aussi à mesurer les contraintes de construction liées aux propriétés des objets de l'espace et de leurs incidences. Dessiner correctement implique nécessairement dans cette activité la mise en œuvre de certains théorèmes du cours.

III. Voir et construire : deux activités intimement liées

Nous proposons ici des activités de niveau seconde permettant aux élèves de mettre en œuvre la représentation de figures et/ou la lecture de figures.

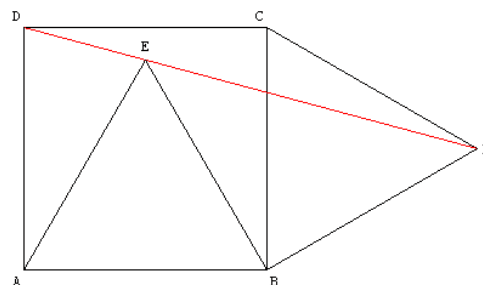
I. VOIR

Dans cette partie, notre objectif est d'attirer l'attention des élèves sur la difficulté de lecture d'une figure en deux dimensions représentant une situation en trois dimensions. Pour cela nous proposons deux exemples et une activité permettant de poser clairement le problème de la représentation et de les rendre plus vigilants.

1. Une première illustration : (exemple A)

Pour bien appréhender les différences entre la géométrie plane et la géométrie dans l'espace, on peut s'appuyer sur cet exercice classique de géométrie plane, basé sur les propriétés du carré et du triangle équilatéral.

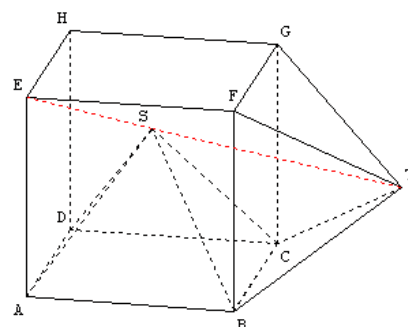
Sur la figure ci-contre, $ABCD$ est un carré, ABE et BFC sont deux triangles équilatéraux. Les points D , E et F sont-ils alignés ? Si oui, le démontrer.



Cet exercice de Seconde ou de Première se traite de multiples façons.

Voici maintenant une version spatiale de l'exercice ci-dessus, basée sur un cube et des pyramides régulières :

Sur la figure ci-contre, $ABCDEFGH$ est un cube, $ABCD$ et $BCGFT$ sont deux pyramides à bases carrées dont les autres faces sont des triangles équilatéraux. Les points E , S et T sont-ils alignés ?



Une transposition naïve du problème précédent et une vision trop hâtive de la situation pourraient conduire à la conclusion que E , S et T sont alignés. Pourtant, il n'en est rien car on peut prouver par exemple que S et T appartiennent au plan médiateur de $[FG]$ alors que E n'y appartient pas.

Dans l'espace, il y a donc des situations où la simple observation de la figure ne permet pas de répondre à la question posée.

Notons encore que, pour cet exemple, la manipulation de la figure avec un logiciel de géométrie dynamique permet de visualiser facilement le fait que les points E , S et T ne sont pas alignés. L'utilisation des tels logiciels ne doit toutefois pas être systématique : laisser l'élève sur une incertitude quant à la conclusion peut être un bon levier pour motiver la nécessité de démonstration et intéresser l'élève à l'activité mathématique proposée.

2. Pour approfondir le sujet : (exemple B)

On relève fréquemment des illustrations de ce type :

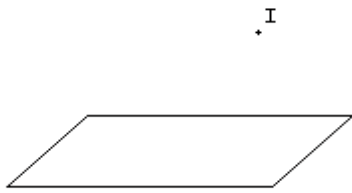


Figure 1

I un point n'appartenant pas au plan P

On n'a alors aucune raison de douter que ...

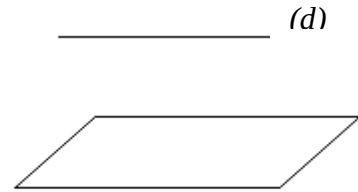
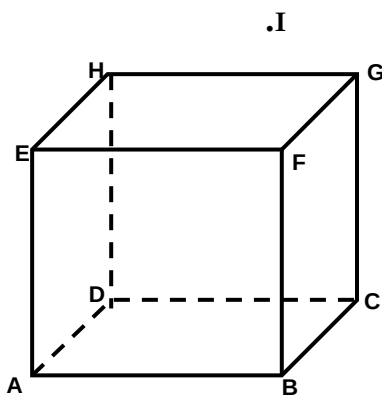
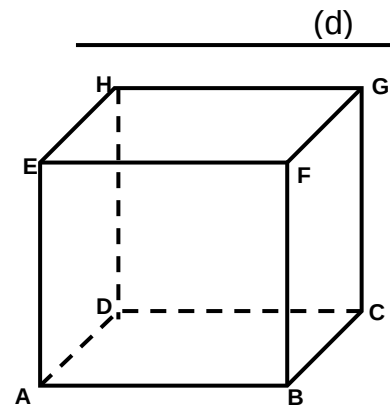


Figure 2

(d) une droite parallèle au plan P



I n'appartient pas au plan (EFG)



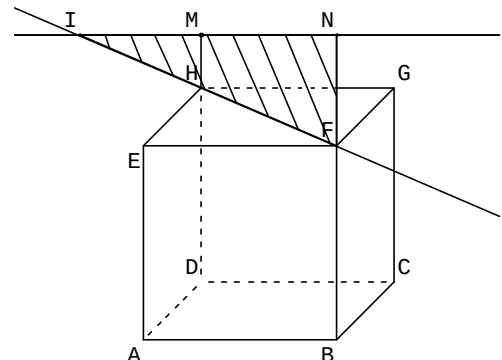
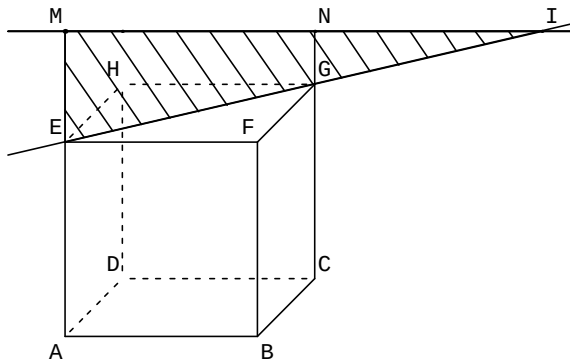
la droite (d) est parallèle au plan (EFG)

Pour la première figure, il est clair que I peut appartenir au plan (EFG), ou au plan (HDC) ou au plan (ABF) ... les possibilités sont nombreuses !

Pour la deuxième figure, la propriété induite est tellement forte qu'il est difficile d'imaginer que d ne soit pas parallèle à (EFG).

Pourtant en ajoutant des traits de construction dans les deux exemples ci-dessous, on peut induire une "vision" de la droite d et du plan (EFG) sécants en I. Mais on pourrait aussi ajouter des traits de construction qui "valideraient" implicitement situation de parallélisme !

Quelques constructions possibles :

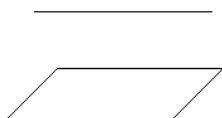


Ces deux exemples montrent que pour comprendre correctement une figure de l'espace, il est nécessaire de surmonter deux difficultés cumulées :

D'une part, la difficulté intrinsèque de la représentation d'un objet en trois dimensions sur un support en deux dimensions, c'est-à-dire la difficulté liée à la nécessité de projection (en général en perspective cavalière).

D'autre part, les mauvaises interprétations des « représentations-type », c'est-à-dire des figures représentant des situations théoriques (comme les figures de l'exemple B). Ces représentations sont indispensables mais elles induisent des hypothèses par convention de dessin et, de ce fait, conduisent parfois à des interprétations fausses sur une figure observée.

L'élève doit comprendre que pour représenter une droite parallèle à un plan il peut faire le dessin suivant :



Ce qui ne veut pas dire que la figure ci-dessus représente toujours une droite et un plan parallèles.

Pour surmonter ces difficultés, l'élève doit bien connaître les règles de la perspective cavalière et comprendre que les hypothèses sont indispensables pour interpréter correctement une figure de l'espace.

Nous avons donc cherché une activité, liée à la lecture d'une figure et permettant de mettre en avant l'importance des hypothèses pour interpréter la figure.

Cette activité est détaillée dans le paragraphe 3, où figure un compte rendu de l'expérimentation ainsi qu'une synthèse des résultats et des réactions des élèves.

L'analyse des expérimentations menées dans les classes nous a révélé que cette activité permet aussi de faire avec les élèves l'inventaire des informations que l'on peut ou non déduire d'une figure en perspective cavalière.

3. L'activité « Que peut-on voir dans l'espace ? »

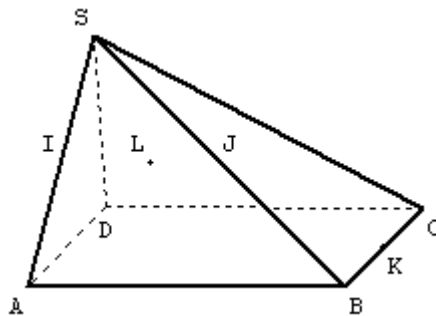
Nous avons adapté l'énoncé et la figure d'un exercice initialement proposé par l'IREM de Rennes¹, pour créer des situations visuelles inhabituelles et ambiguës pour les élèves. Un des objectifs didactiques de cette provocation était d'éveiller leur curiosité et de les faire réfléchir à la notion d'hypothèses ainsi qu'au statut de la figure à travers ces hypothèses. La figure, souvent perçue comme une simple illustration de l'énoncé, contient-elle des informations propres ? Quel crédit peut-on donner à ces informations ?

Nous présentons d'abord le document tel qu'il est donné aux élèves, puis expliquons le déroulement de l'activité. L'analyse de cette expérimentation met en valeur les différents objectifs mais soulève aussi des questions plus profondes, comme le rôle de la preuve et/ou le statut du logiciel comme outil de validation d'une conjecture. La narration détaillée d'une expérimentation de cette activité en classe figure en Annexe 1.

¹ L'exercice original proposé par l'IREM de Rennes qui nous a inspiré se trouve sur le site internet <http://www.irem.univ-rennes1.fr>.

3.1. Le « document élève »

QUE PEUT-ON « VOIR » DANS L'ESPACE ?



Une situation de l'espace est représentée en perspective cavalière ci-dessous, SABCD est une pyramide à base rectangle. I et J sont les milieux respectifs des segments [SA] et [SB].

1. Pour chacune des affirmations suivantes, précisez si elles sont vraies ou fausses avec certitude. Répondez par "peut-être" s'il est impossible de conclure.

Points de l'espace

	VRAI	FAUX	PEUT-ÊTRE
1. Le point K appartient à l'arête [BC]	☐	☐	☐
2. Le point I appartient au plan (SAB)	☐	☐	☐
3. Le point K appartient au plan (SBC)	☐	☐	☐
4. Le point L appartient au plan (SAB)	☐	☐	☐
5. Les points L, I et J sont alignés	☐	☐	☐
6. Le point L appartient à la face ABCD	☐	☐	☐
7. Le point L appartient au plan (ABC)	☐	☐	☐
8. Les points I, J, K et B sont coplanaires	☐	☐	☐

Droites de l'espace

	VRAI	FAUX	PEUT-ÊTRE
9. Les droites (IJ) et (AB) sont parallèles	☐	☐	☐
10. Les droites (JK) et (SC) sont parallèles	☐	☐	☐
11. Les droites (AK) et (BD) sont sécantes	☐	☐	☐
12. Les droites (AJ) et (CJ) sont sécantes	☐	☐	☐
13. Les droites (LB) et (AC) sont coplanaires	☐	☐	☐
14. Les droites (IJ) et (DC) sont coplanaires	☐	☐	☐

2. Vérification à l'aide de l'outil informatique :
Les deux figures dynamiques fournies sont conformes à l'énoncé.
Utilisez ces figures pour vérifier vos réponses. Lorsque vous avez répondu par VRAI ou FAUX, justifiez votre réponse.
3. On ajoute des données à l'énoncé :
est un point de la droite (AD).
est un point du plan (SAB).
Compléter le questionnaire et justifiez vos réponses.

Points de l'espace

	VRAI	FAUX
1. Le point K appartient à l'arête [BC]	☐	☐
2. Le point I appartient au plan (SAB)	☐	☐
3. Le point K appartient au plan (SBC)	☐	☐
4. Le point L appartient au plan (SAB)	☐	☐
5. Les points L, I et J sont alignés	☐	☐
6. Le point L appartient à la face ABCD	☐	☐
7. Le point L appartient au plan (ABC)	☐	☐
8. Les points I, J, K et B sont coplanaires	☐	☐

Droites de l'espace

	VRAI	FAUX
9. Les droites (IJ) et (AB) sont parallèles	☐	☐
10. Les droites (JK) et (SC) sont parallèles	☐	☐
11. Les droites (AK) et (BD) sont sécantes	☐	☐
12. Les droites (AJ) et (CJ) sont sécantes	☐	☐
13. Les droites (LB) et (AC) sont coplanaires	☐	☐
14. Les droites (IJ) et (DC) sont coplanaires	☐	☐

3.2. Déroulement de l'activité

Étape 1 : Les élèves remplissent un QCM en classe, sans aide, sans ordinateur ni correction. Ce QCM comporte des questions sur les positions relatives de certains éléments d'une figure. Les élèves peuvent répondre par VRAI, FAUX ou PEUT-ÊTRE.

Étape 2 : Ils ont ensuite accès aux ordinateurs. Deux figures Geospace correspondant toutes deux à la figure représentée sur leur feuille sont ouvertes et mises en parallèle. Ces deux figures correspondent pourtant à deux situations différentes de l'espace, mais les élèves n'en sont pas informés. En manipulant et en comparant ces figures, les élèves perçoivent leurs différences et doivent s'appuyer sur leurs observations pour corriger les erreurs éventuelles commises dans l'étape 1.

Étape 3 : Les réponses « peut-être » de l'étape 2 s'expliquent par le manque d'informations sur certains éléments de la figure. L'étape 3 consiste donc à introduire de nouvelles hypothèses.

On demande alors de compléter par VRAI ou FAUX les réponses "PEUT-ÊTRE" restées en suspend à l'étape 2 et de **justifier** les réponses.

3.3. Conclusion

A travers cette activité, plusieurs concepts ont été abordés, certains propres aux situations de l'espace, d'autres plus généraux concernant le statut d'une figure.

Sur la perception de la représentation, l'impact des représentations-type reste très fort, même lorsque les hypothèses vont à l'encontre de la perception induite par la figure et l'élève a du mal à revenir sur cette impression si "réelle". Le point K est immédiatement perçu sur le segment [BC]. Cette information est intégrée dans l'image mentale que se fait l'élève de la situation. Quand la raison lui indique qu'il a tort (la figure dynamique ne coïncide pas et/ou l'énoncé contredit ce fait), il lui est souvent très difficile de se "recréer" une nouvelle image mentale adaptée.

Pour le point L, la modification est plus facile. Lorsque l'hypothèse précise sa position, l'image mentale se construit plus facilement car L est davantage perçu comme un point "libre", car non relié à un objet visible de la figure.

Ce besoin d'attacher un point à un objet "concret" pour comprendre la situation globale est tout à fait légitime. Mais dépasser ce besoin est aussi un objectif nécessaire pour appréhender de nouveaux objets : se détacher permet de quitter le solide constitué de faces et de segments pour entrer dans l'espace des plans et des droites.

Concernant le statut "validateur" du logiciel, la difficulté première repose sur le fait que l'élève doit accepter l'affirmation que les deux figures dynamiques correspondent à l'énoncé. Cet obstacle nous a semblé mineur, il est lié à la relation de confiance entre l'élève et l'enseignant en situation d'apprentissage. Ceci étant établi (parfois avec l'apport de représentations supplémentaires comme des maquettes pour accepter l'idée que deux situations de l'espace peuvent avoir la même représentation, selon le point de vue choisi), la dualité des situations observables a favorisé la validation par contre exemple (une propriété vraie sur une figure et fausse sur l'autre ne peut être toujours vraie).

Le choix des figures dynamiques était dès lors prépondérant car si les élèves comprennent assez rapidement que si une situation est fausse sur une figure au moins, alors elle n'est pas vraie en général, il devient plus délicat de leur faire admettre que si une situation est vraie (ou a l'air vraie) sur les deux figures, rien n'est moins sûr et il faut le démontrer.

L'idée de construire deux figures avec une situation apparemment vraie sur les deux figures et pourtant non conforme à la situation proposée avec une hypothèse supplémentaire, bien que didactiquement dans le prolongement logique de ce travail, nous a semblé une étape supplémentaire un peu difficile pour un grand nombre d'élèves. Ce prolongement mériterait certainement d'être envisagé.

Après avoir expérimenté cette activité, nous pouvons dire que ses objectifs semblent atteints et que la grande majorité des élèves a perçu les difficultés liées aux informations que l'on peut tirer ou non d'une vue en perspective cavalière.

Les élèves ont en grande partie intégré l'idée que pour avoir des informations sur les points, les droites, etc. Il fallait, en plus du dessin et des hypothèses, utiliser des théorèmes du cours.

Ils ont compris :

- que des points alignés dans un dessin en perspective cavalière ne sont pas nécessairement alignés en réalité,
- que des points sur une face dans un dessin en perspective cavalière ne sont pas nécessairement sur cette face en réalité,
- et, étape plus difficile, qu'un point sur une droite dans un dessin en perspective cavalière, n'est pas nécessairement sur cette droite dans la réalité.

En contrepartie des doutes suscités par l'activité, les élèves ont pris conscience que si un point n'est pas sur une droite ou une face dans la perspective cavalière, il ne peut pas l'être dans la réalité. La perspective cavalière permet aussi d'obtenir des informations avec des certitudes !

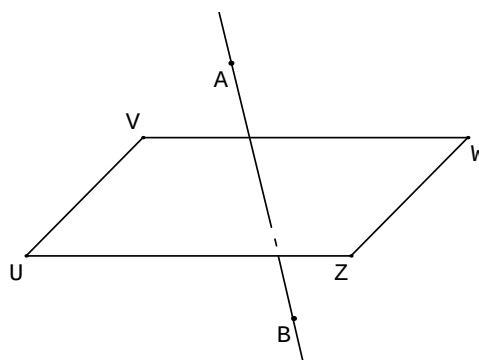
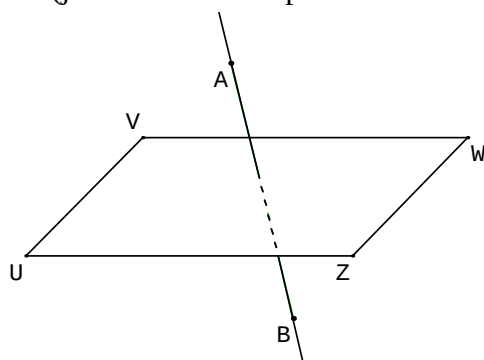
Une analyse détaillée d'une expérimentation de cette activité figure en Annexe 1.

II. CONSTRUIRE

Comme annoncé dans l'introduction, une autre approche pour aider les élèves à comprendre et décoder les informations induites sur une figure consiste à les rendre acteur de leur construction.

Si le tracé des solides de base ne devrait pas représenter de grandes difficultés pour eux, au sortir du collège, il n'en est pas de même pour la représentation de certaines constructions **non liées à un solide**. En effet la réalisation effective de la construction de certains objets de l'espace n'est pas possible selon les seules règles de la perspective cavalière.

Par exemple, un plan P et deux points A et B étant dessinés, il n'y a pas une unique façon de choisir la position du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan P . Il y a une place pour l'arbitraire (je choisis l'intersection où je veux sur (AB)), mais pas de place pour le hasard (je dois choisir ce point sur la droite (AB)).



Nous allons donc confronter les élèves à ces difficultés de représentation pour mettre en avant l'importance des règles d'incidence et pour leur permettre de se les approprier.

L'activité «savoir dessiner dans l'espace» constituée de quatre exercices vise cet objectif.

Nous présentons ici les commentaires exercice par exercice pour permettre d'avoir les énoncés sous les yeux.²

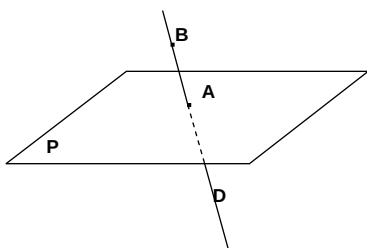
SAVOIR DESSINER DANS L'ESPACE

Exercice 1 : Représenter les situations suivantes

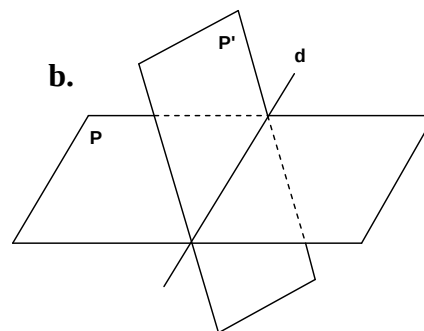
- P est un plan, B est un point qui n'appartient pas à P et D est une droite qui passe par B et qui coupe P en A .
- P et P' sont deux plans sécants selon la droite d .

Des réponses possibles sont :

a.



b.

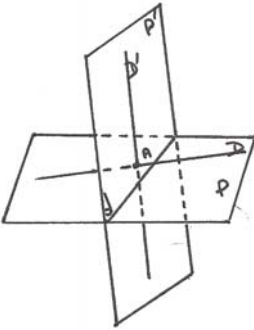
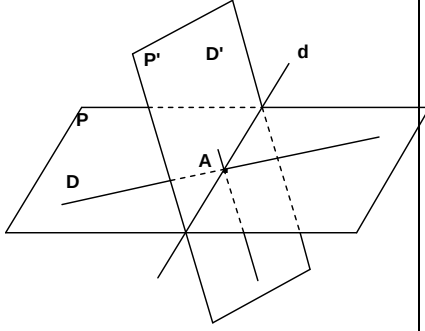
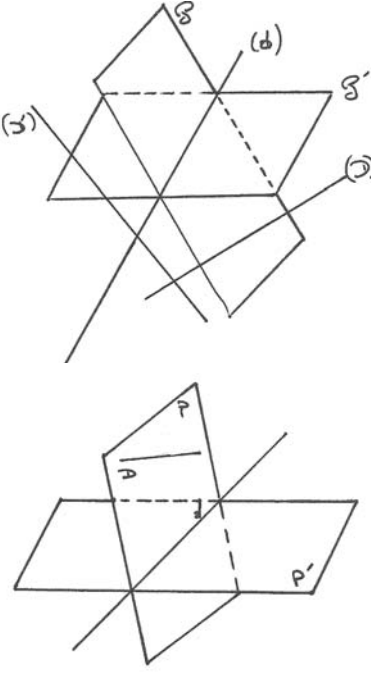
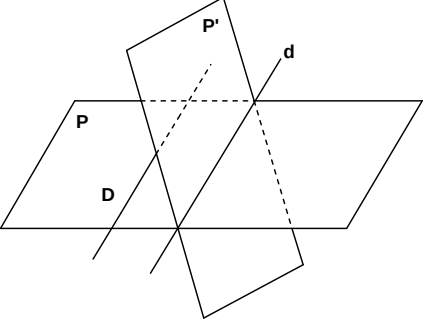


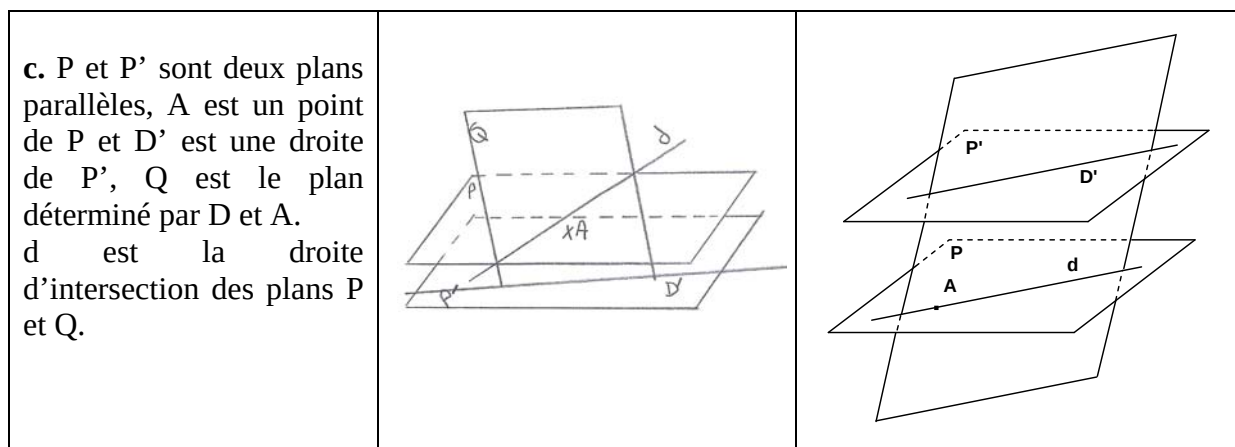
² Le document élève est disponible en annexe 2.

Cet exercice est donné à faire à la maison après le cours sur les positions relatives de droites et de plans. Le but est de vérifier que chaque élève sait représenter une situation simple proche du cours et que la représentation de deux plans sécants par exemple ne présentera pas de difficulté particulière pour la suite de l'exercice. Même un exercice aussi simple pose légitimement problème à plusieurs élèves. C'est le caractère arbitraire de la position de certains objets qui dérange : en effet, pour l'exemple a., une fois P et D tracés, la position de A reste indéterminée !

Exercice 2 : Représenter les situations suivantes

Pour permettre une analyse plus rapide ici, nous donnons l'énoncé, certaines réponses d'élèves et une réponse possible sous forme d'un tableau. Rappel : l'activité telle qu'elle a été donnée aux élèves se trouve dans l'annexe 2.

Énoncé	Réponse(s)-élève erronée(s)	Réponse possible "attendue"
a. P et P' sont deux plans sécants selon la droite d, D est une droite contenue dans P et D' est une droite contenue dans P'. D et D' se coupent en A.		
b. P et P' sont deux plans sécants selon la droite d, D est une droite parallèle à P' et contenue dans P.		



L'objectif est atteint si les élèves s'aperçoivent que certains objets doivent être construits de façon arbitraire mais qu'ils n'ont pas toute liberté pour les tracer car leurs constructions doivent respecter les théorèmes du cours.

Les règles de construction qu'il faut respecter dans l'exercice 2 sont :

- pour la question a. : le point A appartient aux deux plans, donc à la droite d'intersection,
- pour la question b. : D est parallèle aux plans P et P' , donc à leur droite d'intersection d ,
- pour la question c. : si deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

Cette contrainte est tout à fait nouvelle par rapport au dessin dans le plan où il suffit de suivre les instructions de construction pour obtenir une figure correcte.

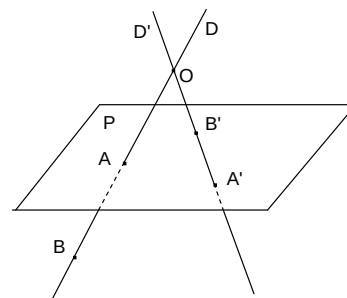
Exercice 3

P est un plan et O un point n'appartenant pas à P .

Les droites D et D' se coupent en O et coupent le plan P respectivement en A et A' .

B et B' sont deux points distincts des précédents tels que B appartient à D et B' appartient à D' .

Construire l'intersection de la droite (BB') avec le plan P . Justifier la construction.



Contrairement aux deux premiers exercices, il n'y a ici qu'une seule construction possible. Pour la trouver, un théorème du cours est nécessaire. Une intersection arbitraire choisie sur la droite (BB') ne convient pas. Au bout d'un moment les élèves tracent l'intersection de (AA') et (BB') , parfois sans pouvoir la justifier.

On peut alors les inciter à justifier la construction : "Pourquoi ce point serait-il sur (AA') ?"

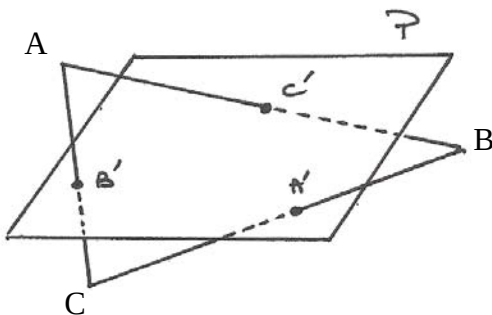
et les mener à une rédaction du type : "Si l'on nomme Q le plan déterminé par les droites sécantes D et D' . L'intersection de Q et P est la droite (AA') . (BB') est incluse dans Q donc l'intersection de (BB') et P appartient à (AA') ."

Exercice 4

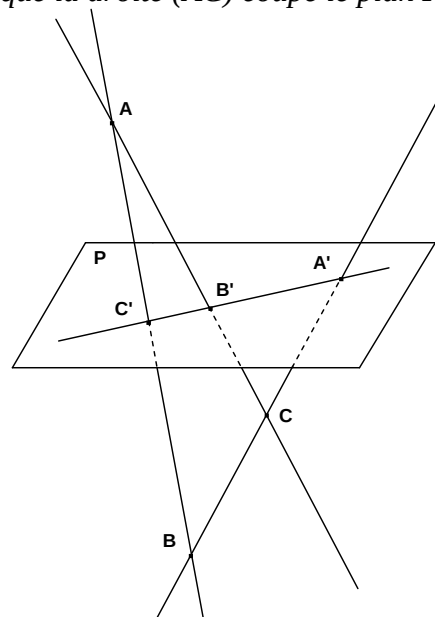
Soit P un plan, A , B et C trois points non alignés qui n'appartiennent pas à P .

On suppose que la droite (AB) coupe le plan P en C' , que la droite (AC) coupe le plan P en B' et que la droite (BC) coupe le plan P en A' .

Montrer que les points A' , B' et C' sont alignés.



Un exemple de figure (fausse) réalisée par un élève.



Une solution possible.

A ce stade de l'activité, malgré les trois exercices traités précédemment, beaucoup d'élèves vont faire une figure proche de la figure fautive ci-dessus et affirmer que l'énoncé proposé est faux.

Il est difficile pour les élèves de comprendre que ces intersections doivent être construites de façon arbitraire mais non aléatoire.

L'activité se termine par un exercice de démonstration pour bien montrer aux élèves que représenter, voir et démontrer sont trois activités extrêmement liées en géométrie dans l'espace.

La construction de figures n'est donc, en général, pas aussi aisée qu'il n'y paraît et sera pour l'enseignant un support riche pour la compréhension des propriétés de l'espace et l'utilisation des théorèmes du cours.

Il est à noter que les réactions des élèves par rapport à ces exercices sont très variables selon leurs compétences personnelles et leurs acquis antérieurs. Les élèves ayant suivi l'enseignement optionnel de sciences de l'ingénieur vont souvent représenter des figures justes sans pouvoir relier leurs constructions à des théorèmes du cours alors que de bons élèves de mathématiques n'ayant pas suivi cette option vont construire les figures correctement grâce à leur bonne connaissance et compréhension du cours. Ces derniers, bien qu'ayant réussi l'exercice, ont toutefois du mal à reconnaître si une figure proposée est mal construite, ce qui reste troublant pour l'enseignant. Enfin, **beaucoup d'élèves sont déstabilisés par le fait que « suivre les instructions de l'énoncé » ne suffit pas pour obtenir une figure juste.**

III. VOIR ET CONSTRUIRE : DEUX ACTIVITÉS INTIMEMENT LIÉES

Nous proposons dans cette partie plusieurs activités expérimentées avec les élèves, leur permettant de développer leurs compétences en géométrie dans l'espace par l'intermédiaire de représentations de figures et/ou de lectures de figures.

Ces activités permettent en outre d'amener progressivement les élèves à construire des démonstrations.

Dans cette partie les documents élèves sont tous donnés en annexe. Le texte ci-dessous comporte indications de mise en œuvre et commentaires.

1. Les solides de Platon

L'activité se trouve en annexe 3

Il s'agit d'une activité simple destinée à une classe de seconde dans laquelle beaucoup d'élèves se trouvent globalement en difficulté sur ce chapitre. L'activité se fait à l'aide du logiciel Cabri 3D, elle peut être adaptée au logiciel Géospace à condition de ne pas permettre l'utilisation de la fonction « construction d'un polyèdre à l'aide de ses sommets ». Elle est à relier à un thème d'étude ; il s'agit de construire un octaèdre comme dual du cube. La construction triangle par triangle de l'octaèdre aide les élèves en difficulté à bien comprendre la structure de l'octaèdre et, au delà, à mieux visualiser les objets déjà construits dans l'espace.

En plus du développement des capacités « manipuler, construire et représenter des solides », cette activité comporte des questions qui mettent en œuvre les capacités « effectuer des calculs de longueurs, aires et volumes » inscrites au programme.

2. Le pyrosaure

L'activité se trouve en annexe 4

Le pyrosaure est une activité destinée à des élèves de Seconde (ou de Première S pour débiter le chapitre). Elle est à réaliser à l'aide du logiciel Géospace mais peut être adaptée au logiciel Cabri 3D. L'activité propose la construction d'un polyèdre particulier, la création de son patron, ainsi que des questions dont l'objectif est de calculer le volume de ce solide. Une partie est dédiée à l'étude de positions relatives et une autre porte sur l'orthogonalité.

Plusieurs capacités et compétences sont mises en jeu dans cet exercice et se trouvent naturellement liées.

Il est en premier lieu demandé de **voir** (compter le nombre de sommets, d'arêtes, de faces). Pour aider les élèves, plusieurs techniques sont mises en place : visualisation du solide et du patron (avec son ouverture) à l'aide du logiciel, construction de la maquette. Il est ensuite nécessaire de **construire** le parallélépipède, qui, tronqué en quatre sommets par des tétraèdres donnera le pyrosaure. Pour effectuer cette construction il est bien évidemment indispensable d'imaginer le parallélépipède cherché, faute de le voir. Suivent ensuite des questions de calculs de longueurs, de volumes et des démonstrations.

3. Sections de solides

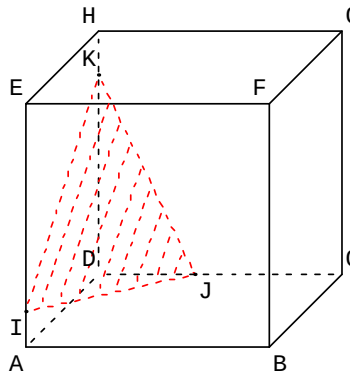
D'autres constructions qui posent souvent problème sont les sections de solides

Cette partie de la géométrie dans l'espace qui est souvent considérée comme très difficile par les élèves n'apparaît en classe de Seconde que dans les thèmes d'étude. Il nous paraît tout de même indispensable de préparer ou de pratiquer ces constructions en classe de Seconde.

Les sections nécessitent à la fois de voir, de construire et de démontrer, c'est donc une activité mathématique complète. En classe de Seconde on peut ne pas exiger une démonstration complète, alors qu'elle sera demandée en Première S. Commencer cette réflexion dès la classe de Seconde permet de graduer les difficultés, d'autant plus que le temps disponible en Première S est assez réduit.

3.1. La nécessité de couper un objet

Après avoir testé, sur plusieurs années, différentes activités d'introduction à la section de solides dont certaines seront évoquées ci-dessous, il nous a semblé incontournable de "couper un solide" : couper de la mousse, du gâteau ou du polystyrène... et si cela n'est pas possible, apporter des objets déjà coupés. C'est la meilleure façon d'expliquer à un élève que la section du cube ABCDEFGH par le plan (IJK) n'est pas le triangle IJK comme sur la figure fautive ci-après. Il doit être amené à comprendre que chaque segment de la section est dessiné sur une face du solide.



3.2. Gabarits

Il s'agit d'une activité inspirée de J. DREYER, S. HAEGEL, J-P. RICHETON, *Des solutions pour gérer la classe de seconde*, 2. IREM de Strasbourg (1994-1995) (un texte adapté se trouve en annexe 5).

L'activité est située en fin de chapitre de Seconde : le cours est connu, plusieurs exercices ont été faits.

Chaque élève dispose d'un cube en plastique et d'une enveloppe contenant plusieurs formes évidées.

La première étape consiste à observer les formes. Dans chacun des cas, il faut dire s'il s'agit ou non d'une section du cube par un plan.

L'intérêt de l'activité réside dans la discussion qui a lieu lors de la correction en commun.

Pourquoi certaines sections conviennent-elles et pas d'autres ?

Peut-on obtenir n'importe quel polygone comme section ?

Il est possible de dégager plusieurs points intéressants :

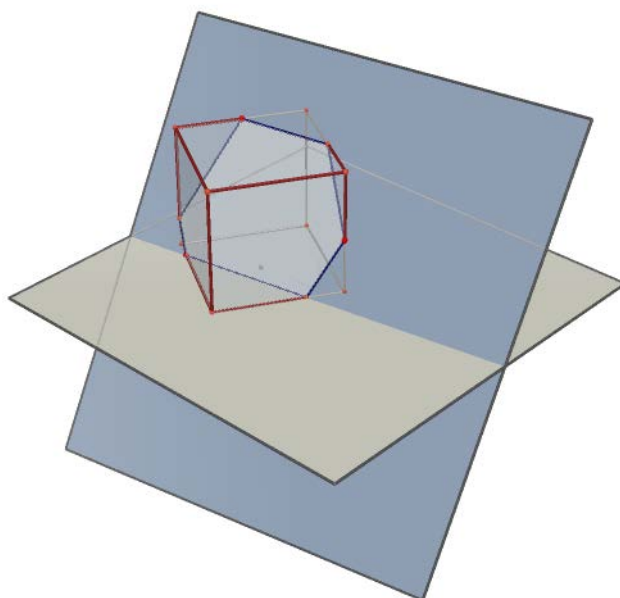
- les sections obtenues sont des polygones de 3 à 6 côtés mais de nombreux polygones ne peuvent convenir (comme le triangle rectangle par exemple),
- dès que la section a plus de 4 côtés on observe que les côtés obtenus par section de faces parallèles du cube sont parallèles (on utilisera le cours pour le démontrer).

En fin de séance, les élèves sont amenés à construire eux-mêmes sur un cube en perspective cavalière une section en forme de triangle, de rectangle et une en forme d'hexagone régulier. Il leur est parfois nécessaire de s'aider des cubes et des formes.

Dans une deuxième étape, l'objectif est de les faire tracer correctement une section du cube. L'idée est de s'aider du cube en plastique sur lequel on marque les points I, J et K au feutre.

Pour les élèves qui ne voient toujours pas avec le cube en plastique, l'utilisation de Cabri 3D pour visualiser la section peut être utile.

On peut voir ci-dessous une section (pentagone) obtenue avec ce logiciel :



La fin de l'activité permet de retrouver des calculs de longueurs et de revenir au dessin en vraie grandeur.

La multiplication des supports permet une bonne vision du problème. Certains élèves, qui ne voyaient pas bien avec les cubes en plastique ou la perspective cavalière, ont été convaincus par l'utilisation de CABRI 3D qui, il est vrai, illustre bien le fait de « couper dans le cube ».

Même si l'activité semble concluante, des élèves continuent à commettre des erreurs "élémentaires" en construisant des sections. Cependant, lorsqu'ils se trompent, faire référence à cette activité leur permet de réaliser assez vite leurs fautes. La manipulation matérielle de la section de l'espace reste finalement plus concrète que sa représentation, ce qui n'a rien d'illogique.

3.3. Trace d'un plan sur un cube

L'activité se trouve en annexe 6

C'est une activité pour la classe de Seconde, en bilan du chapitre « géométrie dans l'espace » et qui peut être reprise en introduction en Première S. Elle est à réaliser à l'aide du logiciel Géospace mais peut être adaptée au logiciel Cabri 3D.

Les élèves n'ont rien à construire à l'aide du logiciel, mais ils doivent uniquement manipuler la figure et faire bouger les points mobiles. Ils observent les figures obtenues et reproduisent sur le document distribué les figures demandées.

L'activité doit avant tout leur permettre de se familiariser aux tracés « hors solide », souvent nécessaires pour la construction d'une section.

La fin de l'exercice consiste alors à mettre en application les propriétés découvertes et démontrées dans la première partie. Comme pour l'activité précédente les résultats sont hélas un peu décevants mais les problèmes liés à la construction de section ne peuvent se résoudre facilement.

Pour les bloqués sur la question 7, l'utilisation de Géospace pour s'auto-corriger peut s'avérer nécessaire. Pour ceux en difficulté sur cet exercice, l'exploitation de maquettes du cube et de sections évidées peut être également un recours efficace.

Cette activité très proche de la précédente a pour avantage de nécessiter moins de matériel et permet de visualiser plus de situations, elle est cependant perçue comme moins concrète par les élèves.

3.4. Les figures clés

L'activité se trouve en annexe 7

C'est une activité pour la classe de Première S.

Beaucoup d'élèves ont des difficultés à « voir dans l'espace » et se trouvent démunis quand on leur demande de tracer une section d'un solide par un plan. Ils prolongent alors des droites de façon hasardeuse jusqu'à trouver une intersection alors que ces droites ne sont pas coplanaires.

D'où l'idée d'introduire des figures-clés dans l'espace, qui, dans le même esprit que celles trouvées au collège pour appliquer le théorème de Thalès, serviront d'images mentales.

L'objectif est triple :

- décomposer la démarche de construction d'une section en étapes élémentaires,
- permettre d'extraire d'une figure « les bons plans » dans lesquels l'élève pourra tracer des intersections de droites,
- structurer le raisonnement pour faciliter ensuite la rédaction de la justification d'une section.

Ces figures-clés peuvent être proposées :

- en remédiation pour les élèves en difficulté,
- en approfondissement pour représenter des sections plus complexes, notamment dans des cas où il faut avoir recours à un plan auxiliaire qui n'est pas représenté sur la figure (cas par exemple de la section d'un tétraèdre par un plan passant par 3 points situés chacun sur une face du tétraèdre),
- ou encore en classe entière.

On commence par l'analyse des figures fausses proposées ce qui permet d'établir les 3 figures-clés indiquées dans l'annexe 7. Puis les élèves réalisent la construction des sections à l'aide de ces figures-clés.

Un premier exemple est réalisé sur ordinateur à l'aide du logiciel Géospace, avec le solide et la figure-clé correspondante à ouvrir en parallèle. Grâce aux couleurs utilisées pour les différents plans, les élèves comprennent rapidement le principe de l'exercice. Par la suite, ils réalisent la construction directement sur le polycopié. Au début certains ont du mal à trouver les plans appropriés et des explications supplémentaires sont nécessaires. Au bout d'une heure, la plupart semblent à l'aise avec les sections d'un cube.

Les élèves sont ensuite amenés à travailler sur des sections de tétraèdres et de pyramides.

L'activité fonctionne bien car les figures-clés obligent les élèves à analyser la figure pour pouvoir faire la construction. Une grande majorité réussit à construire les sections sans se tromper. Les élèves ont apprécié la rapidité de leur progrès. Aucun n'a tracé de droite "traversant" les solides.

Conclusion

R. Bkouche résume ainsi les problèmes liés à la géométrie dans l'espace :

« Une situation spatiale apparaît ainsi à travers une représentation qui la transforme en figure plane, ceci nécessite l'explicitation d'un code, code d'écriture et code de lecture. Dans ces conditions, l'appréhension de la situation spatiale à travers la médiation de la représentation plane ne s'appuie plus sur l'évidence comme c'est le cas en géométrie plane. On ne peut plus raisonner sur une figure qui est déjà distincte de la réalité qu'elle est censée représenter, ceci nécessite donc la mise au point de méthodes de raisonnement plus complexes. »³

Nous avons vu tout au long de notre exposé que beaucoup de difficultés en géométrie dans l'espace sont liées aux problèmes de vision et de représentation. Mais ces mêmes difficultés fournissent également un avantage pour l'enseignant, en lui permettant de donner un nouvel attrait à l'activité de démonstration.

En effet, pourquoi faire démontrer aux élèves ce que l'on voit ? On peut au contraire leur demander de prouver un résultat que l'on ne voit pas, ou mieux encore, de justifier que ce que l'on croit voir n'est pas vrai.

On peut ainsi mettre l'accent sur les questions ouvertes : deux droites sont-elles sécantes ? Quatre points sont-ils coplanaires ? Trois points sont-ils alignés ?

On offre alors aux élèves une approche différente de la géométrie, axée sur l'investigation et la construction, les deux étant intimement liées. Les expériences que nous avons menées dans les classes semblent montrer que cette approche, parfois déconcertante de prime abord pour certains, est au final le vrai moteur de la réussite de l'enseignement de la géométrie dans l'espace.

L'intervention de logiciels de géométrie dynamique offre dans un premier temps des moyens pour disqualifier les interprétations illicites. Ils apportent une aide pour les raisonnements du type :

- "si je vois les points alignés, je ne sais rien, si je vois que les points ne sont pas alignés, je sais qu'ils ne le sont pas",
- "si je tourne la figure et que les droites ne sont plus parallèles, c'est qu'elles ne le sont pas"...

Mais l'utilisation du logiciel doit être réfléchie et non systématique. On peut s'en servir comme aide à la conjecture mais il faut aussi parfois savoir s'en passer pour permettre de laisser une question ouverte.

Au delà de la motivation accrue des élèves sur les activités proposées, nous avons aussi constaté que dans d'autres contextes que la géométrie dans l'espace, les élèves sont devenus plus vigilants sur les hypothèses d'un énoncé et sur les informations que fournit une figure, même plane. Cette dernière remarque confirme, s'il en est besoin, que l'enseignement de la géométrie dans l'espace, parfois marginalisé, souvent traité en fin d'année, mérite que nous y portions un plus grand intérêt et que nous lui redonnions toute sa place au cœur de l'enseignement des mathématiques.

³ R. BKOUCHE et M. SOUFFLET, Enseignement de la géométrie, Bull. Inter-Irem, 23 (1983).

ANNEXES

Annexe 1 : Que peut-on « voir » dans l'espace ?

Bilan de l'activité

Organisation de la séquence : 4 groupes de module de Seconde : 60 élèves.

Place dans la progression : Après la première activité et le cours sur les incidences.

Narration d'une expérimentation :

Étape 1

Les élèves remplissent le QCM en classe (en salle informatique) sans aide ni correction.

Les résultats

En gras la bonne réponse, les réponses intéressantes en grisé.

Points de l'espace

	VRAI	FAUX	PEUT-ÊTRE
1. Le point K appartient à l'arête [BC]	46	1	13
2. Le point I appartient au plan (SAB)	55	0	5
3. Le point K appartient au plan (SBC)	45	3	12
4. Le point L appartient au plan (SAB)	3	6	51
5. Les points L, I et J sont alignés	2	4	54
6. Le point L appartient à la face ABCD	0	55	5
7. Le point L appartient au plan (ABC)	5	43	12
8. Les points I, J, K et B sont coplanaires	4	39	17

Droites de l'espace

	VRAI	FAUX	PEUT-ÊTRE
9. Les droites (IJ) et (AB) sont parallèles	48	0	12
10. Les droites (JK) et (SC) sont parallèles	12	13	35
11. Les droites (AK) et (BD) sont sécantes	43	2	15
12. Les droites (AJ) et (CJ) sont sécantes	52	4	4
13. Les droites (LB) et (AC) sont coplanaires	9	30	21
14. Les droites (IJ) et (DC) sont coplanaires	33	17	10

Soit une moyenne de 6,1 erreurs par élève sur 14 questions.

Parmi les questions où le taux de réussite est mauvais, on trouve celles qui utilisent les points L et K (ces points posent problème car l'énoncé ne fournit pas d'hypothèses pour eux).

La question 14 départage aussi les élèves : près de la moitié d'entre eux ne voit pas que les droites (IJ) et (DC) sont coplanaires. Après discussion au moment de la correction, ils ne voient pas non plus qu'elles sont parallèles.

Plus de trois quarts des élèves sont certains que le point K appartient à l'arête [BC].

Pour le point L, 71% des élèves pensent qu'il n'appartient pas à (ABC), alors qu'il est possible qu'il appartienne à (SAB).

Les erreurs constatées aux questions 11 et 13 sont liées aux problèmes de position des points L et K constatées plus haut.

Étape 2

Les élèves ont accès aux ordinateurs (deux élèves par poste), les deux figures Geospace sont ouvertes et mises en parallèle, il faut corriger les erreurs éventuelles commises dans la partie 1.

L'enseignant explique clairement que ce sont deux figures différentes, dont les vues initiales superposables sont la vue en perspective dessinée sur leur feuille.

Plusieurs élèves demandent quelle est la "bonne" figure à regarder (laquelle est fausse ?).

Un élève affirme qu'il est impossible que deux figures différentes puissent correspondre à la figure qu'ils ont sur leur feuille.

Finalement une idée se transmet plus ou moins rapidement dans les différents groupes : « si c'est vrai sur une figure et faux sur l'autre, il faut cocher peut-être. »

Plusieurs élèves vont expliquer à l'enseignant au cours du module qu'ils appliquent cette consigne (donnée par les autres élèves) mais qu'ils ne comprennent pas pourquoi.

A l'aide d'une maquette de pyramide et d'une punaise sensée matérialiser un point, le professeur essaie de montrer à ces élèves que le point L dessiné sur la perspective cavalière peut être sur le plan (SAB) ou ne pas y être, question de profondeur. Ceci est facilement compris par les élèves.

Pour montrer de même que le point K peut être ou non sur l'arête [BC], cette fois pour deux élèves, l'explication ne sera pas convaincante et c'est le retour aux deux figures sous Geospace qui permettront de les convaincre.

Bien qu'ayant rencontré ces difficultés lors de la séance, ces deux élèves (faibles en mathématiques par ailleurs), feront très peu d'erreurs au second QCM.

En circulant dans la classe l'enseignant prend conscience d'un risque d'erreur générée par l'activité : certains élèves énoncent le « théorème-élève » suivant : « Si c'est vrai sur les deux figures, c'est que c'est vrai ». Cela leur paraît de plus être la meilleure justification possible. Les élèves n'ont pas de recul sur la construction des figures. Beaucoup pensent que seules deux figures correspondent à la vue en perspective qu'ils ont sur leur document. Il faudra donc rester vigilant sur ce point !

Quelques résultats : (57 élèves).

Nombres de cases corrigées suite à l'utilisation de géospace.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Effectif	1	3	6	5	10	8	6	11	4	3

Soit une moyenne de 4,9 cases corrigées par élève.

Nombres d'erreurs (après correction à l'aide de géospace)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Effectif	6	10	15	9	6	0	3	3	1	1	1	2

Soit une moyenne de 3,1 erreurs par élève.

Nombres d'erreurs après correction qui étaient justes avant correction.	0	1	2	3
Effectif	38	11	6	2

Soit une moyenne de 0,5 case corrigée à tort.

Étape 3

Certains élèves auront besoin de toute l'heure pour finir l'étape 2.

Les plus avancés vont commencer l'étape 3 sans avoir corrigé l'étape 2 durant le module en salle informatique. Après discussion, les élèves formulent l'idée que les réponses « peut-être » viennent du fait qu'il manque des informations, des hypothèses.

D'où l'introduction de deux nouvelles hypothèses dans la partie 3.

On demande de compléter le VRAI ou FAUX et de justifier les réponses.

Une très grosse partie des élèves n'a pas compris que la figure donnée au départ correspondait aux quatre hypothèses données. Ce qui signifie deux choses :

1. La figure en perspective cavalière n'est pas considérée comme une hypothèse par certains élèves.
2. Après discussion, beaucoup pensent que le point K tel qu'il est placé ne peut pas appartenir au plan (SAB).

Pour convaincre les élèves, il faudra tracer le segment [SK] sur le logiciel Géospace et faire tourner la figure et même pour certains élèves, utiliser la maquette de pyramide.

Au cours suivant, classe entière, la correction de la partie 2 est faite à l'aide du tableau blanc interactif. Certaines réponses VRAI ou FAUX seront justifiées oralement à la demande des élèves.

Pour que la troisième partie se déroule bien l'enseignant rappelle aux élèves que le dessin est une des hypothèses de l'exercice et que K tel qu'il est placé est bien dans le plan (SAB).

Quelques résultats : (55 élèves).

En gras la bonne réponse, les réponses intéressantes en grisé.

Points de l'espace

	VRAI	FAUX
1. Le point K appartient à l'arête [BC]	1	54
2. Le point I appartient au plan (SAB)	54	1
3. Le point K appartient au plan (SBC)	2	53
4. Le point L appartient au plan (SAB)	1	54
5. Les points L, I et J sont alignés	1	54
6. Le point L appartient à la face ABCD	17	38
7. Le point L appartient au plan (ABC)	52	3
8. Les points I, J, K et B sont coplanaires	48	7

Droites de l'espace

	VRAI	FAUX
9. Les droites (IJ) et (AB) sont parallèles	55	0
10. Les droites (JK) et (SC) sont parallèles	1	54
11. Les droites (AK) et (BD) sont sécantes	6	49
12. Les droites (AJ) et (CJ) sont sécantes	55	0
13. Les droites (LB) et (AC) sont coplanaires	47	8
14. Les droites (IJ) et (DC) sont coplanaires	50	5

Soit une moyenne de 0,9 erreur par élève (pour mémoire : 6,1 erreurs dans la première étape).

Dans leur grande majorité, les élèves ont bien compris les difficultés liées aux informations que l'on peut tirer ou non d'une vue en perspective. Ils ont intégré l'idée que pour avoir des informations sur les points, les droites, *etc.*, il fallait, en plus du dessin et des hypothèses, utiliser des théorèmes du cours.

Pour la question n° 6, après discussion orale, la moitié des élèves a commis une erreur car ils n'ont pas fait la distinction entre face et plan (bien que les questions 6. et 7. se suivent !), les autres pensaient qu'ils pouvaient mettre le point L où ils voulaient sur la droite (AD) et l'ont mis sur le segment.

Étape 4

A l'issue de la correction, il y a discussion orale sur ce que l'activité leur a appris.

On découvre qu'en plus des notions qu'on voulait leur transmettre, à savoir :

- des points alignés sur une figure en perspective cavalière ne sont pas nécessairement alignés dans la réalité,
- un point sur une face d'un solide dessiné en perspective cavalière n'est pas nécessairement sur cette face dans la réalité,
- un point sur une droite en perspective cavalière n'est pas nécessairement sur cette droite dans la réalité, d'où l'importance des hypothèses, les élèves ont pris conscience que si un point n'est pas sur une droite ou une face, *etc.*, dans la perspective cavalière, il ne peut pas l'être dans la réalité.

Il est ainsi possible, dans une vue en perspective, de mettre à plat les choses sur lesquelles on peut compter et les autres.

Annexe 2 : Savoir dessiner dans l'espace

Exercice 1 : Représenter les situations suivantes :

- Soit P un plan, B un point qui n'appartient pas à P et D une droite qui passe par B et qui coupe P en A .
- Soient P et P' deux plans sécants en D .

Exercice 2 : Représenter les situations suivantes :

- Soient P et P' deux plans sécants selon la droite d , D est une droite contenue dans P et D' est une droite contenue dans P' . Les droites D et D' se coupent en A .
- Soient P et P' deux plans sécants selon la droite d , D est une droite parallèle à P' et contenue dans P .
- Soient P et P' deux plans parallèles, A est un point de P et D' est une droite de P' , Q est le plan déterminé par D' et A . On appelle d la droite d'intersection des plans P et Q .

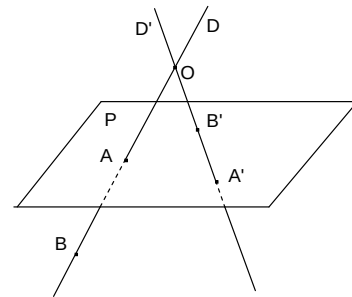
Exercice 3

P est un plan et O un point n'appartenant pas à P .

Les droites D et D' se coupent en O et coupent le plan P respectivement en A et A' .

B et B' sont deux points distincts des précédents tels que B appartient à D et B' appartient à D' .

Construire l'intersection de la droite (BB') avec le plan P .
Justifier la construction.



Exercice 4

Soit P un plan, A , B et C trois points non alignés qui n'appartiennent pas à P .

On suppose que la droite (AB) coupe le plan P en C' , que la droite (AC) coupe le plan P en B' et que la droite (BC) coupe le plan P en A' .

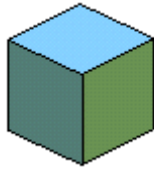
Montrer que les points A' , B' et C' sont alignés.

Annexe 3 : Solides de Platon

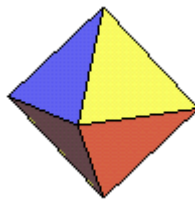
1. Introduction historique



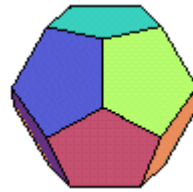
Tétraèdre



Cube



Octaèdre



Dodécaèdre



Icosaèdre

Les solides de Platon sont les cinq polyèdres réguliers.

Leurs faces sont constituées de polygones réguliers isométriques.

Ces polyèdres sont inscriptibles dans une sphère.

Les solides de Platon sont : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

Platon a accordé une signification mystique aux cinq solides réguliers en les rattachant aux grandes entités qui, selon lui, façonnaient le monde : le feu est associé au tétraèdre, l'air à l'octaèdre, la terre au cube, l'univers au dodécaèdre et l'eau à l'icosaèdre.

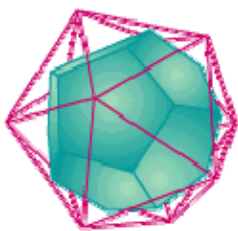
Vous pouvez observer que chaque solide de Platon vérifie la formule d'Euler :

$$F + S = A + 2$$

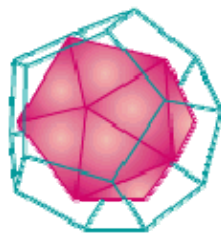
obtenue avec le nombre **F** de faces, **A** d'arêtes et **S** de sommets.

On appelle **dual** d'un polyèdre régulier **P** le polyèdre **P'** dont les sommets sont les centres des faces du polyèdre **P**.

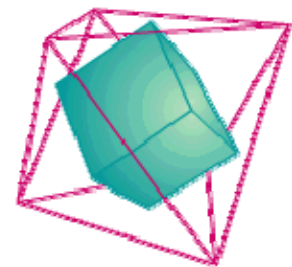
Si **P'** est le dual de **P**, alors le dual de **P'** est semblable à **P**. Ainsi le dual d'un cube est un octaèdre régulier et réciproquement.



Le dual de l'icosaèdre est le dodécaèdre composé de 12 faces et de 20 sommets.



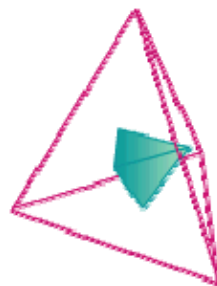
Le dual du dodécaèdre est l'icosaèdre composé de 20 faces et de 12 sommets.



Le dual de l'octaèdre est le cube composé de 6 faces et de 8 sommets.



Le dual du cube est l'octaèdre composé de 8 faces et de 6 sommets.



Le dual du tétraèdre est le tétraèdre lui-même composé de 4 faces et de 4 sommets.

2. Construction de la première figure

Nous allons construire un cube et son dual l'octaèdre :

- ouvrir le logiciel CABRI 3D,
- construire un cube : icône « Polyèdres réguliers » (neuvième bouton) – cube – puis cliquer :
 - une première fois pour déterminer le plan qui contiendra la première face (ici le plan de base),
 - une deuxième fois pour déterminer le centre de la première face (ici l'origine du repère),
 - une troisième fois pour déterminer un point de la première face,
 - si nécessaire appuyer sur **Ctrl** pour choisir de quel côté du plan on veut construire le cube.
- vous pouvez faire bouger la figure en prenant le pointeur (première icône), en laissant cliquer le bouton droit et en déplaçant la souris,
- rendre le cube transparent (cliquer droit avec le pointeur sur « ce cube » style de surface vide),
- construire le centre de chaque face : vous pouvez utiliser « milieu de deux points »,
- construire l'octaèdre face par face (c'est-à-dire en construisant des triangles),
- sauver votre figure, dans votre disque personnel, sous le nom : Octaèdre.

3. Calcul d'aire et de volume

Rendre transparente toutes les faces de l'octaèdre, pour cela : cliquer droit sur le triangle choisi puis : - style de surface – Vide.

(Remarque : il est également possible de rendre tous les triangles construits vides en faisant : Edition – Préférences – styles par défaut – Triangle – Attributs de surfaces – Vide).

Nommer le cube ABCDEFGH, il faut d'abord créer les points car seul le polyèdre existe, vous pouvez alors *nommer à la volée* en tapant son nom juste après sa construction.

Nommer IJKLMN les centres respectifs des faces : ADHE, ABFE, BCGF, DCGH, EFGH, ABCD.

Nommer O le centre de IJKL.

Sauver votre figure, dans votre répertoire personnel, sous le nom : Octaèdre nommé.

On suppose que les arêtes du cube sont de longueur a .

1. Calculer le volume du cube et l'aire totale du cube.
2. Représenter une face de l'octaèdre. Calculer en fonction de a l'aire totale de l'octaèdre.
3. Calculer en fonction de a le volume de l'octaèdre.

4. Le rapport des volumes du cube et de l'octaèdre est-il le même que le rapport des aires du cube et de l'octaèdre ?

👉 Si vous n'y arrivez pas, pensez à dessiner sur votre feuille les sections du cube et de l'octaèdre par les plans (OIJ) et (MOI) .

4. Construction du dual du dual

Charger votre figure Octaèdre.

Construire le centre de chaque face. (Vous cacherez les traits de construction, pour cela cliquez droit sur le segment à cacher et choisir cacher/montrer).

Puis en construire les différentes faces du cube. Pour bien voir le cube il faut rendre transparente certaine face de l'octaèdre.

Sauver votre figure, dans votre disque personnel sous le nom : Dual Octaèdre.

5. Les autres solides de Platon

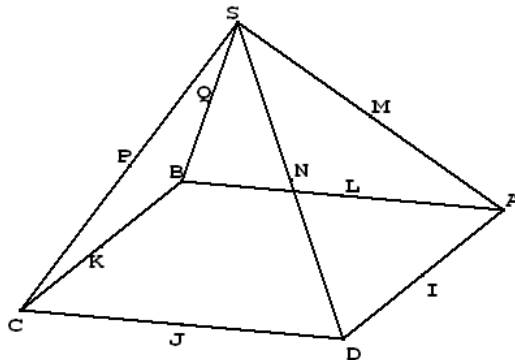
Construire un dodécaèdre régulier à l'aide de l'icône 9 puis construire son dual, voire le dual du dual.

Construire un tétraèdre régulier à l'aide de l'icône 9 puis construire son dual, voire le dual du dual.

Annexe 4 : Le pyrosaure

A partir de Geospace, ouvrir la figure pyrreg.gw3 qui se trouve dans le répertoire "bases espace", il s'agit d'une pyramide régulière de côté a (sa base est carré et ses arêtes sont toutes de même longueur a). Pour les calculs, on prendra $a = 10$ cm.

- Créer les points I, J, K, L, M, N, P et Q, milieux respectifs des segments [AD], [DC], [CB], [BA], [AS], [DS], [CS], [BS].
- Créer le polyèdre IJKLMNPQ et le nommer PYRO, on l'appellera un pyrosaure. Hachurer et colorer le polyèdre PYRO.
- Combien le pyrosaure a-t-il de faces ? d'arêtes ? de sommets ?
- Créer un patron du pyrosaure :
 - créer une variable x dans l'intervalle $[0 ; 1]$ (créer, numérique, variable réelle libre dans un intervalle),
 - créer le patron avec le coefficient d'ouverture x (créer, solide, patron de polyèdre),
 - dans le menu de mise en forme, sélectionner "non dessiné" pour la pyramide,
 - piloter au clavier (piloter x , puis flèches haut et bas),
 - observer la figure dans le plan du patron (ouvrir le patron et afficher plan isolé IJK).
- Tracer, à main levée, un patron du pyrosaure en codant la figure sur une feuille de papier.
- On peut imaginer le pyrosaure comme un parallélépipède tronqué en quatre sommets par des tétraèdres.
 - Construire ce parallélépipède sur géospace,
 - quelle est la nature des tétraèdres enlevés aux quatre coins du parallélépipède ?



Quelques calculs et démonstrations :

- Montrer que (MN) est parallèle à (PQ) et déterminer la longueur MN.
- Montrer que les points M, N, P et Q sont coplanaires et forment un carré.
- Quelle est la nature du triangle MQL ?
- Montrer que le triangle QLK est rectangle.
- Créer R le milieu de [LK], ainsi que les segments [BR] et [QR].
 - Calculer la longueur QR.
 - Montrer que la droite (BR) est orthogonale au plan (QLK).
 - Déduire alors la position relative des plans (ABC) et (LQR).
- Calculer le volume du parallélépipède de la question 6 a).
 - Déterminer le volume d'un tétraèdre enlevé du parallélépipède de la question 6 b).
 - En déduire le volume du pyrosaure.

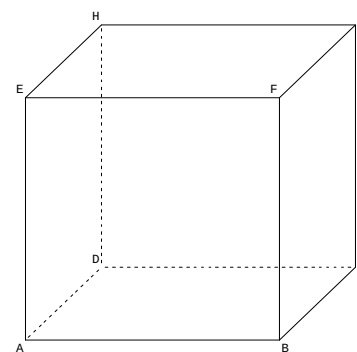
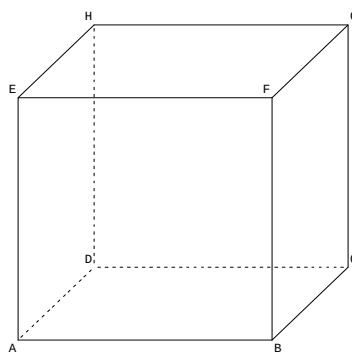
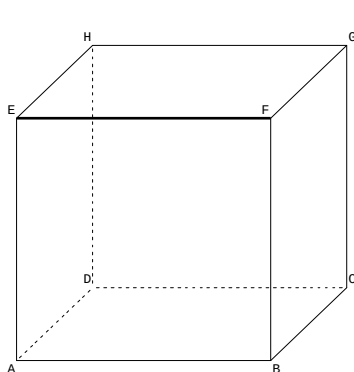
Annexe 5 : Sections du cube

Partie 1 : Dans chaque enveloppe vous trouverez des formes évidées. Dans chaque cas dire s'il s'agit d'une section éventuelle du cube par un plan.

Formes évidées n°	Réponses	Formes évidées n°	Réponses
0		8	
1		9	
2		10	
3		11	
4		12	
5		13	
6		14	
7			

Partie 2 : Sur les cubes représentés ci dessous en perspective cavalière, représenter :

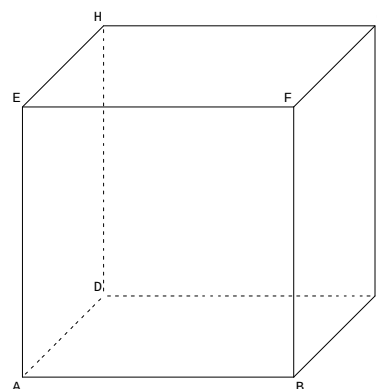
- une section en forme de triangle,
- une section en forme de rectangle,
- une section en forme d'hexagone régulier.



Partie 3 : Sur la figure suivante construire l'intersection du cube ABCDEFGH d'arête 7cm avec le plan (IJK).

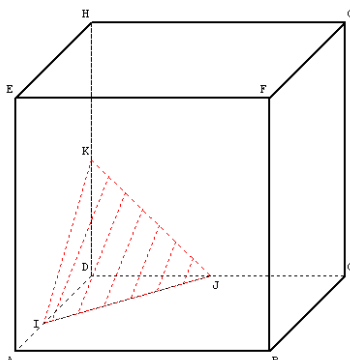
On sait que I est sur le segment [EF] tel que $IF = 5$ cm
 J est sur le segment [FG] tel que $JF = 4$ cm
 et K est sur le segment [FB] tel que $FK = 3$ cm

- Quelle figure obtient-on ?
- Calculer les longueurs des côtés IJ, JK et IK puis dessiner en vraie grandeur la section obtenue.



Annexe 6 : Tracé d'un plan sur un cube

On se propose de visualiser l'intersection d'un plan avec un cube.



1. Lancer le logiciel Géospace puis ouvrir la figure "section.g3w" du répertoire.

La zone hachurée est la section du cube par le plan (IJK)

2. Déplacer les points I, J et K respectivement sur les droites (DA) (DC) et (DH) et, en déduire, la (les) condition(s) pour que la trace du plan soit un triangle :

Où peut-on placer les points I, J et K pour obtenir un triangle équilatéral ?

Indication : Vous pouvez visualiser la trace IJK en vraie grandeur : Afficher Plan isolé

Nom du plan isolé IJK

3. Déplacer I sur le segment [DA], J sur le segment [DC] et K « au-dessus » de H (par exemple comme sur la figure 1 ci-après)

Quelle est la nature de la trace obtenue ? Justifier :

Sur la figure 1 au crayon de papier, construire la section (ou la trace) du plan IJK et du cube.

4. Déplacer K sur le segment [DH], I et J à l'extérieur du cube comme sur la figure 2. Quelle est la nature de la trace obtenue ? Justifier :

Sur la figure 2 au crayon de papier, construire la section (ou la trace) du plan IJK et du cube.

5. Où peut-on placer les points I, J et K pour obtenir un hexagone ?

Sur la figure 3 au crayon de papier, construire la section (ou la trace) du plan IJK et du cube.

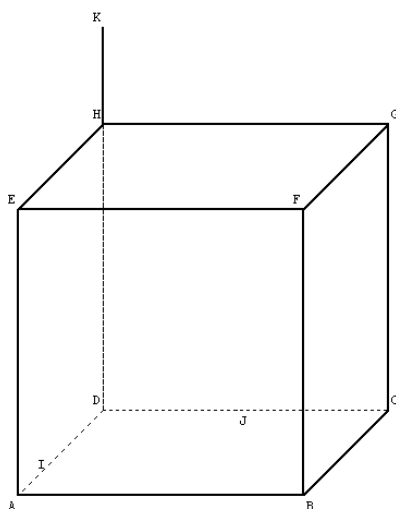


Figure 1

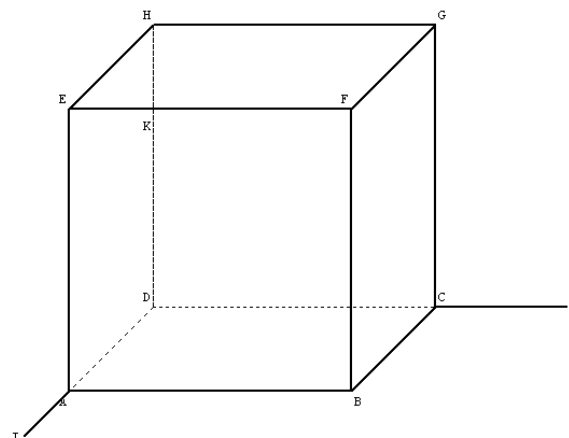


Figure 2

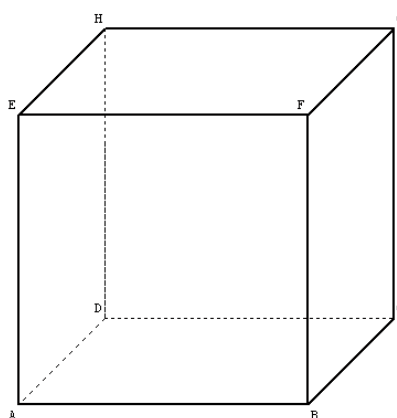


Figure 3

6. On se propose d'étudier les figures ci-dessous. Certaines représentent des sections du cube, d'autres non. Vous devez déterminer lesquelles sont effectivement des sections du cube et :
- si elles le sont, ajouter des traits de construction permettant de valider la section,
 - sinon, justifier votre réponse.

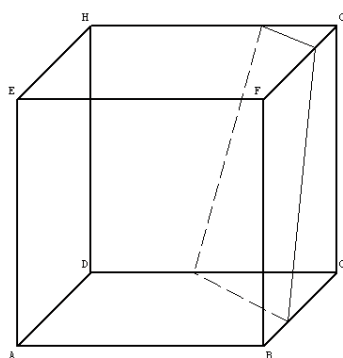


Figure 4
Oui – Non

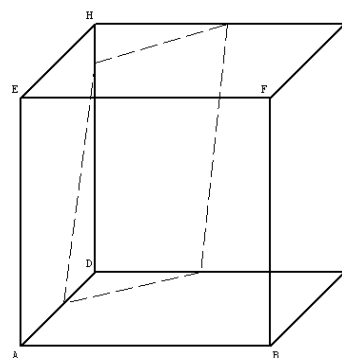


Figure 5
Oui – Non

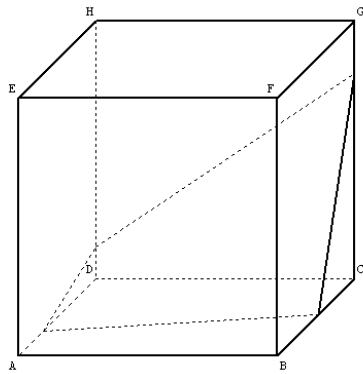


Figure 6
Oui – Non

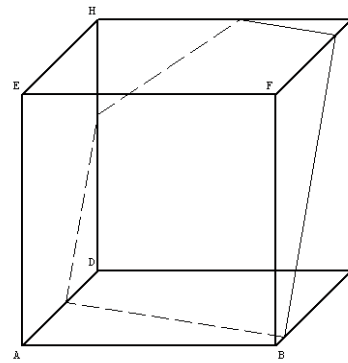


Figure 7
Oui – Non

Justifications éventuelles

.....

.....

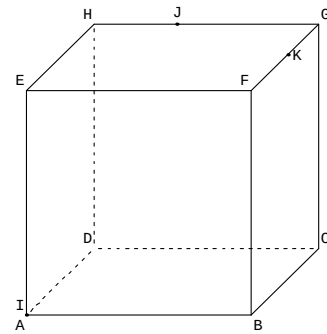
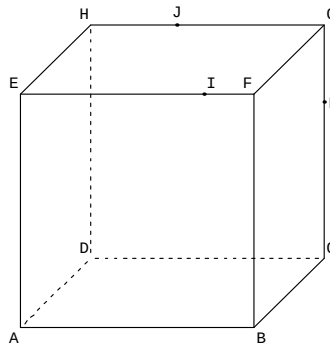
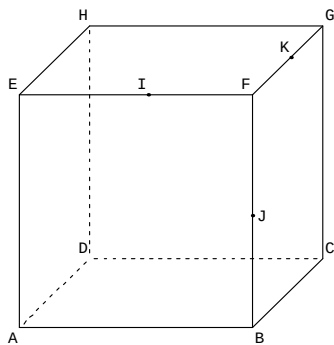
.....

.....

.....

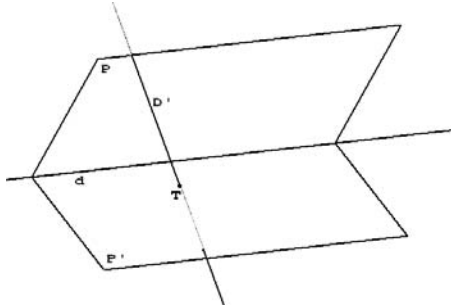
.....

7. Tracer la section du cube par le plan (IJK).



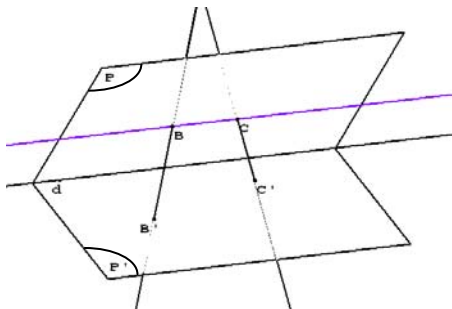
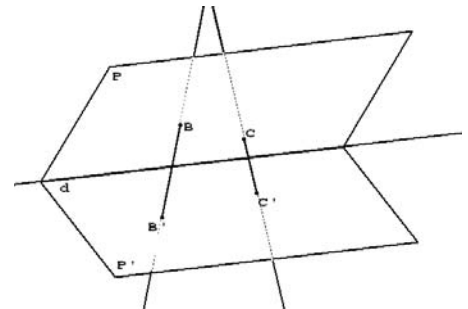
Annexe 7 : Les figures clés

On peut s'appuyer sur des exemples de figures FAUSSES : TROUVER L'ERREUR DANS CHAQUE FIGURE...



Les plans P et P' sont sécants en d .
La droite D' est incluse dans le plan P .
Elle coupe le plan P' en T .

Les plans P et P' sont sécants en d .
Le point A n'appartient à aucun des deux plans P et P' .
 B et C sont deux points du plan P tels que (BC) et d ne soient pas parallèles.
Le plan (ABC) coupe respectivement les plans P et P' suivant les droites (BC) et $(B'C')$.



Les plans P et P' sont sécants en d .
 B et C sont deux points du plan P tels que (BC) est parallèle à d .
Le plan (ABC) coupe respectivement les plans P et P' suivant les droites (BC) et $(B'C')$.

Pour éviter ces figures FAUSSES, il peut-être utile d'entraîner les élèves à réaliser des constructions.

De cet exercice découlent les trois figures-clés qui suivent :

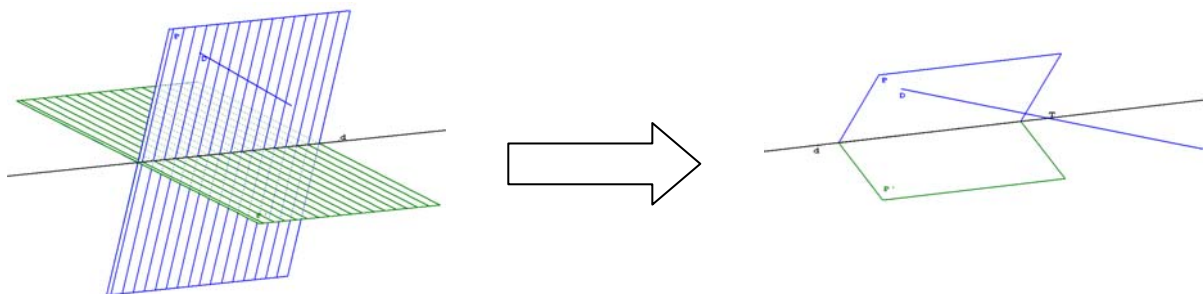


Figure clé 1

Les plans P et P' sont sécants selon la droite d . Si une droite D (non parallèle à d) est incluse dans le plan P , alors elle coupe le plan P' en T point d'intersection de d et de D .

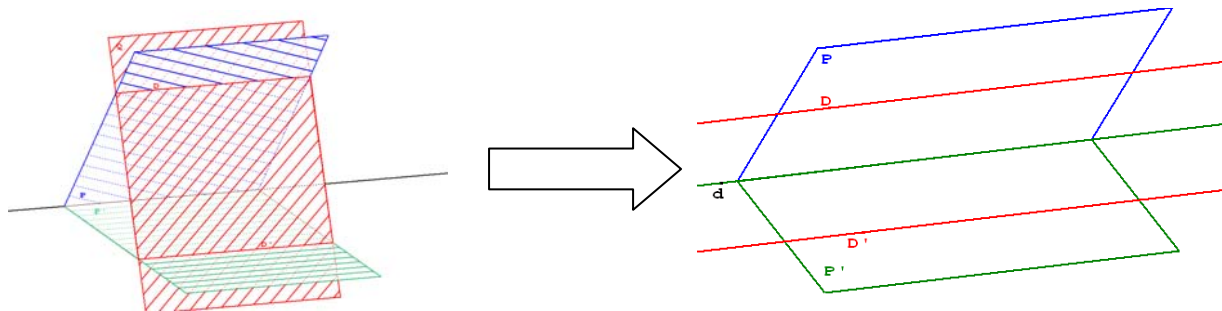


Figure clé 2

Les plans P et P' sont sécants selon la droite d . Si un plan Q coupe le plan P suivant une droite D parallèle à d , alors le plan Q coupe le plan P' suivant une droite D' parallèle à d .

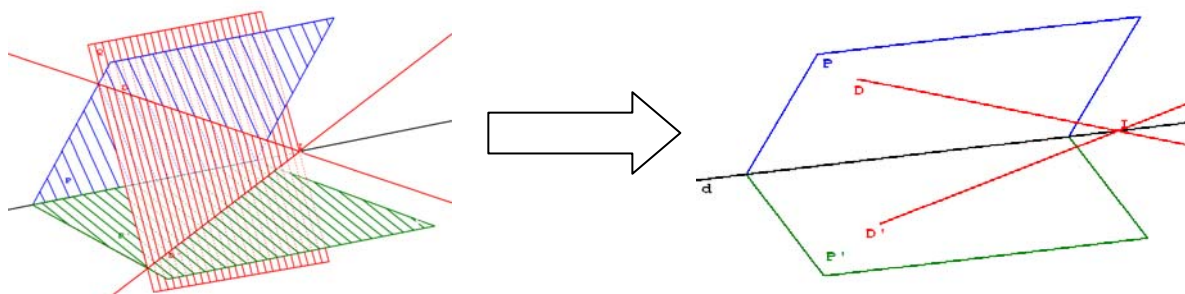


Figure clé 3

P et P' sont deux plans sécants selon la droite d . Si un plan Q coupe le plan P suivant une droite D sécante à d en un point I , alors le plan Q coupe P' suivant une droite D' telle que D , D' et d soient concourantes en I .

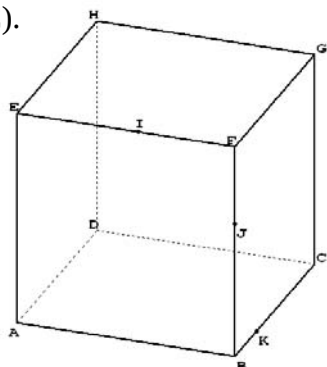
Application : tracé de sections de solides

- Quelques cas simples (surtout pour les élèves ne distinguant pas les droites coplanaires).

Cas 1 : Section du cube $ABCDEFGH$ par le plan (IJK) .

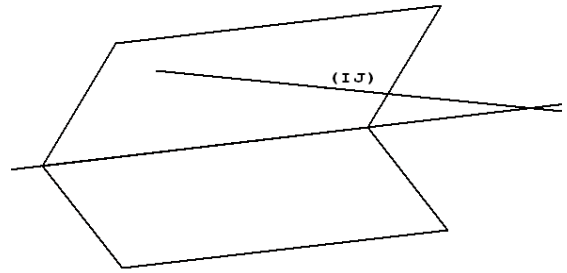
1. Construire la trace du plan (IJK) sur les faces $ABFE$ et $BCGF$.
2. On souhaite à présent déterminer l'intersection de (IJK) avec la face $ABCD$.

Situation clé : deux plans sécants, la droite (IJ) dans le plan (ABF) , le point K dans le plan (ABC) .



I , J et K sont des points appartenant respectivement aux arêtes $[EF]$, $[BF]$ et $[BC]$.

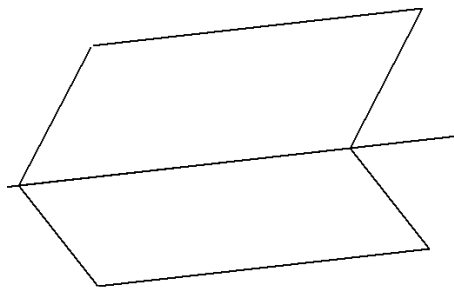
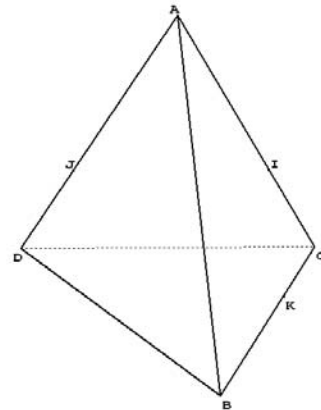
- Compléter alors la figure clé ci-dessous :
 - y placer le point K ?
 - nommer les plans concernés.
- Conclure quant à l'intersection de (IJK) et (ABC).



3. Finir la section.

Cas 2 : Section du tétraèdre ABCD par le plan (IJK).

1. Construire la trace du plan (IJK) sur les faces ADC et ABC.
2. On souhaite à présent déterminer l'intersection de (IJK) avec le plan (BDC) (ou (BAD) au choix).
 - Compléter alors la figure clé :
 - y placer une droite et un point du plan (IJK),
 - nommer les plans concernés.



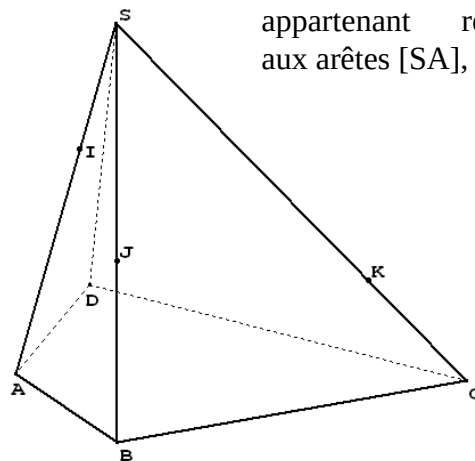
I, J et K sont des points appartenant respectivement à [AC], [AD] et [BC] tels que :
 $AI = \frac{2}{3}AC$; $AJ = \frac{2}{3}AD$;
 $CK = \frac{1}{3}CB$.

3. Finir la section.

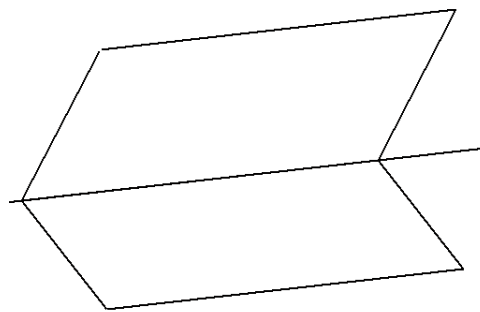
Cas 3 : Section de la pyramide SABCD par le plan (IJK).

1. Construire la trace du plan (IJK) sur les faces SAB et SBC.
2. On souhaite à présent déterminer l'intersection de (IJK) avec le plan (SDC) (ou (SAD) au choix).

I, J et K sont des points appartenant respectivement aux arêtes [SA], [SB] et [SC].



- Compléter alors la figure clé.



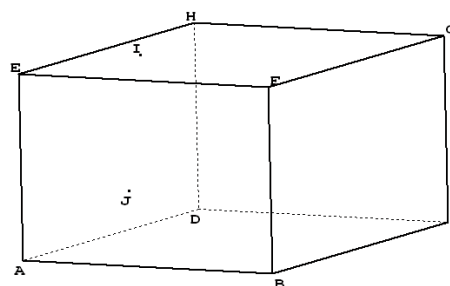
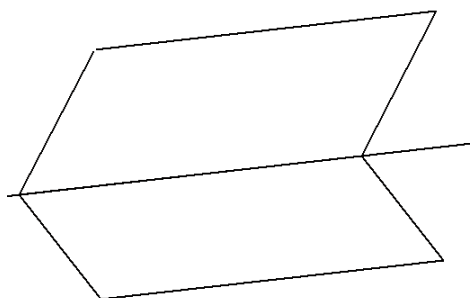
➤ **Cas nécessitant un plan auxiliaire**

Cas 4 : Intersection de la droite (IJ) et du plan (ABC).

Pour déterminer l'intersection de la droite (IJ) et du plan (ABC), on choisit un plan Q contenant la droite (IJ).

Situation clé : Deux plans sécants, la droite (IJ) dans le plan Q

- Compléter la figure ci-dessous.

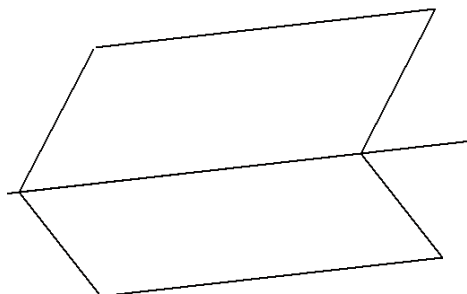


I est sur la face EFGH.

J est sur la face ABFE.

- Conclure quant à l'intersection de (IJ) et (ABC).

Cas 5 : Section d'un tétraèdre par un plan déterminé par 3 points situés respectivement sur 3 faces.



I est sur la face ABD.

J est sur la face ABC.

K est sur la face ADC.

Bibliographie

BKOUCHE, R. & SOUFFLET, M., *Enseignement de la Géométrie*, Bull. Inter-Irem, **23**, 1983.

CHAACHOUA, A., *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace, étude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapport des enseignants à ces problèmes*, Laboratoire Leibniz - IMAG - Université Joseph Fourier Grenoble, 1997.

CHAACHOUA, A., *Recherches en didactique des mathématiques*. Extrait de : *Écologie des problèmes de construction dans l'espace*, **19 Num. 3**, La Pensée Sauvage éditions Grenoble, 1999, 323–356.

DREYER, J., HAEGEL, S. et RICHETON, J.-P., *Des solutions pour gérer la classe de seconde*, **2**, IREM de Strasbourg, (1994-1995).

PARZYSZ, B., *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée*, Thèse de doctorat, Université Paris 7, 1989.

ROMMEVAUX, M.P., *Le discernement des plans : un seuil décisif dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle*, IRMA de Strasbourg, 1997.

ROMMEVAUX, M.P., *Le premier pas dans l'espace*, *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, **4**, IREM de Strasbourg, 1991.