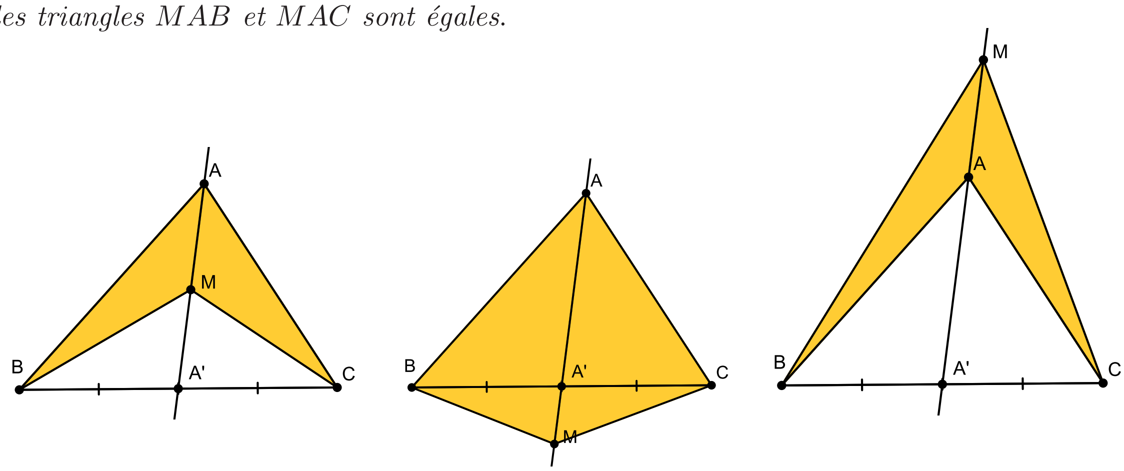
Erratum

Caractérisation de la médiane

Nous prions les lecteurs du numéro **115** de L'Ouvert de bien vouloir nous excuser. Suivant que l'on définisse la médiane comme un segment ou une droite, la caractérisation de la médiane énoncée dans l'article ([1]) *Les aires et le raisonnement géométrique* est correcte ou incorrecte. Malencontreusement la transformation de crochets en parenthèses a conduit à un énoncé erroné. Nous en profitons pour revenir sur ce problème[1] (caractériser la médiane d'un triangle) qui nous a paru intéressant.

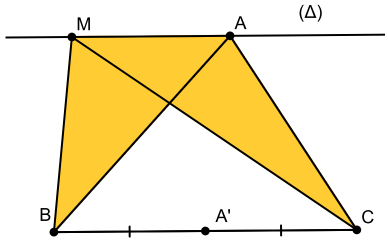
Tout commence par un résultat bien connu :
Si un point M appartient à la médiane (AA') issue de A d'un triangle BAC alors les aires des triangles MAB et MAC sont égales.



En utilisant uniquement la conservation de l'aire par symétrie centrale on démontre ce résultat dans le cas où le point M est le pied A' de la médiane (voir [1] page 6 et 8). Pour conclure dans le cas général on utilise l'additivité de l'aire. Mais, comme les figures ci-dessus le montre, la démonstration n'est pas aussi aisée qu'il y paraît puisqu'il est nécessaire de distinguer différentes positions du point M sur la droite (AA').

Il est alors naturel de se poser la
Question 1. *La médiane (AA') est-elle caractérisée par cette propriété ?*
La réponse est non.

Pour s'en convaincre il suffit (!) de considérer les points M appartenant à la parallèle Δ à (BC) passant par A. Il est bien connu que les triangles MAB et MAC ont même aires (propriété appelée parfois propriété du trapèze). Cette propriété peut aussi se démontrer sans calculs d'aires (voir [1] page 10).

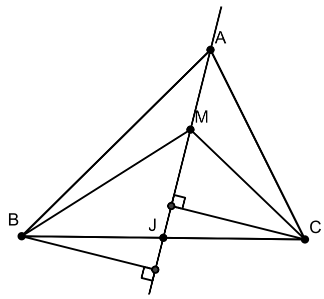


D'où la
Question 2. *Quel est le lieu des points M du plan tels que* Aire(MAB)=Aire(MAC) *?*

Ce lieu est une conique car il est défini par une équation de degré 2. Comme on sait déjà qu'il contient les droites (AA') et (Δ), on en conclut qu'il est égal à leur réunion.

[1] Il a fait l'objet d'un dossier à l'épreuve orale du CAPES externe 2008.

On peut le démontrer par un argument plus terre à terre en considérant un point M de cet ensemble n'appartenant pas à la droite (Δ), J l'intersection de (AM) avec (BC) (qui existe puisque M n'appartient pas à Δ). L'égalité des aires implique l'égalité des distances de B et C à la droite (AM). On en déduit (théorème de Thalès, triangles semblables ou homothétie) que J est le milieu de BC.



Cet exercice (dont la solution n'utilise que des outils élémentaires) est donc très intéressant, à condition de le poser comme un problème ouvert, c'est-à-dire de poser la question 2.

– D'une part sa solution n'est pas évidente. C'est donc un bon exemple pour convaincre des élèves de la nécessité de démontrer une réciproque (« On veillera à traiter des exemples [de lieux] nécessitant de démontrer une double inclusion » lit-on dans le programme de première S).
– D'autre part, de nombreux lieux peuvent être tracés directement avec un logiciel de géométrie dynamique, ce qui tue toute envie d'écrire une démonstration. Ce n'est pas le cas ici. En revanche on peut utiliser un tel logiciel pour se convaincre que tous les points n'ont pas été obtenus avec une seule droite.

En « regardant » la figure on comprend que l'on peut caractériser par les aires la médiane pensée comme un segment. La proposition démontrée dans [1] doit donc être énoncée ainsi.

Un point M intérieur au triangle ABC appartient à la médiane $[AA']$ si et seulement si $\text{Aire}(MAB) = \text{Aire}(MAC)$.

[1] M. de Cointet & M.-A. Egret (2007), *Les aires et le raisonnement géométrique*, L'Ouvert **115**, 1–19.

Le comité de rédaction de L'Ouvert