

---

# L'OUVERT

---

**JOURNAL DE L'APMEP D'ALSACE ET DE L'IREM DE STRASBOURG**  
N° 117 Décembre 2008 ISSN 0290 – 0068

*Responsable de la publication :* Philippe NUSS

*Rédacteur en chef :* Nicole BOPP

*Comité de rédaction :* Jean-Pierre DAROU, Michel ÉMERY,  
Emmanuel WILL

*Relecture des épreuves :* Odile SCHLADENHAUFEN

*Anciens numéros en ligne :* <http://irem.u-strasbg.fr>

*Correspondance à adresser à :*  
IREM de Strasbourg, Université Louis Pasteur  
7, rue René Descartes, F - 67084 Strasbourg Cedex  
Tel : 03 90 24 01 30 – Fax : 03 90 24 01 65  
e-mail : [bibirem@math.u-strasbg.fr](mailto:bibirem@math.u-strasbg.fr)

*Prix d'un numéro :* 8 euros

*Prix de l'abonnement (3 numéros) :* 20 euros (16 euros pour les membres de l'APMEP d'Alsace)



## DES FIGURES ET DE LA COULEUR

Philippe NUSS, le directeur de l'IREM, a souhaité que désormais L'OUVERT soit publié sous un format plus petit, semblable à celui de nombreuses revues, et non comme un « vieux » polycopié. La possibilité de faire éditer notre journal par une imprimerie professionnelle, celle de l'Université Marc Bloch, qui deviendra au 1<sup>er</sup> janvier 2009 l'imprimerie de la nouvelle Université de Strasbourg, ainsi que la composition en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X de tous les articles, permettent cette évolution. Aussi, pour fêter le dernier numéro de L'OUVERT publié sous l'ancien format, format auquel nous avons été fidèles pendant 38 ans, l'IREM nous (vous) offre 15 pages en couleurs.

Les couleurs nous ont en effet paru indispensables pour comprendre les figures de l'article J.-P. FRIEDELMEYER sur l'équidécomposabilité des polygones. Certaines décompositions comprennent plus de 11 polygones qu'il semblait difficile de différencier par des nuances de gris. Et pourtant le principe appliqué pour obtenir ces décompositions remonte à l'article publié en 1833 par GERWIEN dans le *Journal de Crelle*. Mais les figures (à l'encre noire) accompagnant cet article ne « montrent » pas la correspondance entre polygones isométriques alors que l'utilisation de la couleur permet de le faire.

Toutes les figures de l'article de J.-P. FRIEDELMEYER ont été réalisées à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique (avec cabri-géomètre pour être précis). En sus du résultat esthétique, l'utilisation d'un tel logiciel est ici une aide à la compréhension de la procédure suivie pour obtenir les décompositions de deux polygones de même aire en polygones isométriques. En effet la construction de la figure est facilitée par l'utilisation du logiciel, qui permet d'obtenir avec un seul clic de souris le symétrique ou le translaté d'un polygone. Comme nous nous sommes bien amusés à le faire, nous vous conseillons d'en faire autant.

Les lecteurs de L'OUVERT remarqueront peut-être que le numéro de *Pour la Science* (décembre de 2008) qui vient de sortir contient un article ([1]) de J.-P. DELAHAYE, où il explique un résultat ([2]) récent de « six mathématiciens qui viennent de démontrer qu'il existe une dissection articulée permettant de passer d'un polygone donné à un autre de même aire ». Et bien sûr on y retrouve le puzzle de DUDENEY qui illustre la couverture de ce numéro de L'OUVERT. Comme vous l'imaginez l'article de J.-P. FRIEDELMEYER était déjà prêt au moment de la parution du numéro de *Pour la science* et son contenu est certainement plus directement utilisable pour des activités en classe. Toutefois n'hésitez pas à consulter [1] ou [2] sur le site arxiv : vous y trouverez de jolies illustrations en couleurs qui permettent de comprendre la dissection « articulée ».

La plupart des articles de ce numéro sont aussi illustrés par des figures (en noir et blanc cette fois). Dans celui d'Aline ROBERT ce sont des figures de géométrie. L'aide qu'elles apportent à la découverte des résultats et à la compréhension des démonstrations nous semble évidente. Le statut qu'on leur donne, que ce soit au primaire et au collège (voir par exemple le travail de Alain KUZNIAK) ou au lycée dans les énoncés de géométrie dans l'espace, n'est pas si clair que cela. Et dans l'article de F. COSTANTINO les diagrammes jouent un rôle très différent de celui des figures de géométrie. Dans celui de L. TEYSSIER il n'y a que deux figures. Est-ce dû au fait qu'il y traite des questions d'analyse et que les figures qui servent à chercher n'apparaissent pas dans la rédaction finale ? Mais là je

commence à m'égarer dans un terrain miné. Y aura-t-il un jour quelqu'un pour écrire dans L'OUVERT un article sur le rôle des figures dans la recherche en mathématiques ?

Pour conclure, je voudrais ici exprimer ma reconnaissance à tous les auteurs qui ont consacré du temps à rendre accessible aux lecteurs de L'OUVERT des travaux que beaucoup d'entre nous auraient de la peine à comprendre dans leur version originale. C'est loin d'être une tâche facile, mais en ces temps de réforme du lycée et de la formation des maîtres, tout ce qui contribue à montrer que les mathématiques sont vivantes et amusantes est utile.

- [1] J.-P DELAHAYE (2008), *La géométrie du bricolage*, Pour la Science **374**.
- [2] T. ABBOTT & al. (2008), *Hinged Dissections Exist*, Proceedings of the Twenty-fourth Annual Symposium on Computational Geometry, 110-119.  
<http://arxiv.org/abs/0712.2094>

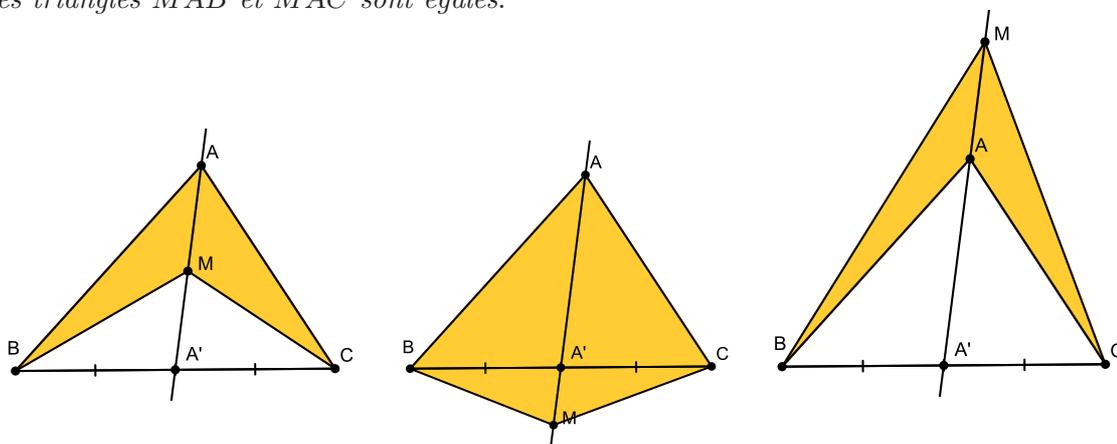
Nicole BOPP

## CARACTÉRISATION DE LA MÉDIANE

Nous prions les lecteurs du numéro **115** de L'OUVERT de bien vouloir nous excuser. Suivant que l'on définisse la médiane comme un segment ou une droite, la caractérisation de la médiane énoncée dans l'article ([1]) *Les aires et le raisonnement géométrique* est correcte ou incorrecte. Malencontreusement la transformation de crochets en parenthèses a conduit à un énoncé erroné. Nous en profitons pour revenir sur ce problème<sup>1</sup> (caractériser la médiane d'un triangle) qui nous a paru intéressant.

Tout commence par un résultat bien connu :

*Si un point  $M$  appartient à la médiane  $(AA')$  issue de  $A$  d'un triangle  $BAC$  alors les aires des triangles  $MAB$  et  $MAC$  sont égales.*



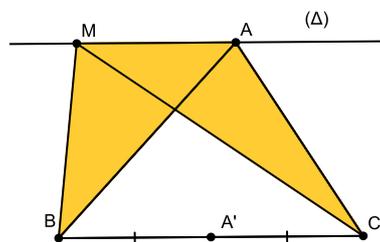
En utilisant uniquement la conservation de l'aire par symétrie centrale on démontre ce résultat dans le cas où le point  $M$  est le pied  $A'$  de la médiane (voir [1] page 6 et 8). Pour conclure dans le cas général on utilise l'additivité de l'aire. Mais, comme les figures ci-dessus le montre, la démonstration n'est pas aussi aisée qu'il y paraît puisqu'il est nécessaire de distinguer différentes positions du point  $M$  sur la droite  $(AA')$ .

Il est alors naturel de se poser la

Question 1. *La médiane  $(AA')$  est-elle caractérisée par cette propriété ?*

La réponse est non.

Pour s'en convaincre il suffit (!) de considérer les points  $M$  appartenant à la parallèle  $\Delta$  à  $(BC)$  passant par  $A$ . Il est bien connu que les triangles  $MAB$  et  $MAC$  ont même aires (propriété appelée parfois propriété du trapèze). Cette propriété peut aussi se démontrer sans calculs d'aires (voir [1] page 10).



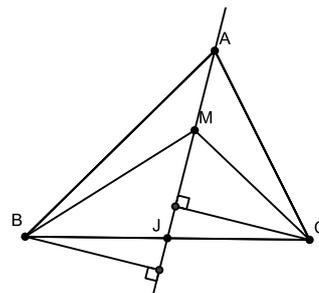
D'où la

Question 2. *Quel est le lieu des points  $M$  du plan tels que  $\text{Aire}(MAB) = \text{Aire}(MAC)$  ?*

Ce lieu est une conique car il est défini par une équation de degré 2. Comme on sait déjà qu'il contient les droites  $(AA')$  et  $(\Delta)$ , on en conclut qu'il est égal à leur réunion.

<sup>1</sup>Il a fait l'objet d'un dossier à l'épreuve orale du CAPES externe 2008.

On peut le démontrer par un argument plus terre à terre en considérant un point  $M$  de cet ensemble n'appartenant pas à la droite  $(\Delta)$ ,  $J$  l'intersection de  $(AM)$  avec  $(BC)$  (qui existe puisque  $M$  n'appartient pas à  $\Delta$ ). L'égalité des aires implique l'égalité des distances de  $B$  et  $C$  à la droite  $(AM)$ . On en déduit (théorème de Thalès, triangles semblables ou homothétie) que  $J$  est le milieu de  $BC$ .



Cet exercice (dont la solution n'utilise que des outils élémentaires) est donc très intéressant, à condition de le poser comme un problème ouvert, c'est-à-dire de poser la question 2.

- D'une part sa solution n'est pas évidente. C'est donc un bon exemple pour convaincre des élèves de la nécessité de démontrer une réciproque (« On veillera à traiter des exemples [de lieux] nécessitant de démontrer une double inclusion » lit-on dans le programme de première S).
- D'autre part, de nombreux lieux peuvent être tracés directement avec un logiciel de géométrie dynamique, ce qui tue toute envie d'écrire une démonstration. Ce n'est pas le cas ici. En revanche on peut utiliser un tel logiciel pour se convaincre que tous les points n'ont pas été obtenus avec une seule droite.

En « regardant » la figure on comprend que l'on peut caractériser par les aires la médiane pensée comme un segment. La proposition démontrée dans [1] doit donc être énoncée ainsi.

*Un point  $M$  intérieur au triangle  $ABC$  appartient à la médiane  $[AA']$  si et seulement si  $\text{Aire}(MAB) = \text{Aire}(MAC)$ .*

[1] M. DE COINTET & M.-A. EGRET (2007), *Les aires et le raisonnement géométrique*, L'OUVERT **115**, 1–19.

Le comité de rédaction de L'OUVERT

# À PROPOS DES INVARIANTS DES NŒUDS

Francesco COSTANTINO

**Résumé :** On donne la définition de nœud et d'équivalence de nœuds. Puis on discute la notion d'invariant de nœuds et on en donne quelques exemples, notamment les polynômes de Jones, d'Alexander-Conway et HOMFLY.

**Mots-clés :** Nœud - Invariants de nœuds - Polynôme de Jones - Polynôme d'Alexander-Conway.

## Introduction

Dans cet article (qui reprend et complète un exposé donné par l'auteur lors de la réunion de rentrée de l'IREM en octobre 2007) on s'intéressera à la notion de *nœud* et plus généralement à celle d'*entrelacs* en mathématiques. Un des premiers mathématiciens à étudier les entrelacs fut Carl Friedrich GAUSS qui, au début du XIX<sup>e</sup> siècle, définit la notion de *nombre d'enlacements* pour une paire de nœuds. L'intérêt pour la théorie des nœuds fut ensuite agrandi par les idées de Lord KELVIN et Peter TAIT qui essayèrent de modéliser les atomes à l'aide de nœuds et d'en expliquer les différentes propriétés par une classification systématique des diagrammes de nœuds. Même si du point de vue de la physique cette idée se révéla par la suite non satisfaisante, le travail de classification de TAIT fut repris et continué pendant le XX<sup>e</sup> siècle par les mathématiciens, intéressés par l'étude des propriétés *topologiques* de ces objets. En effet après la découverte par Henri POINCARÉ d'espaces de dimension 3 ayant des propriétés inattendues à l'époque (la « sphère de Poincaré »), Max DEHN inventa une façon d'associer à chaque diagramme d'entrelacs un espace de dimension 3. Cette méthode, dite « Chirurgie de DEHN », ouvrit définitivement la porte à l'étude des nœuds comme branche des mathématiques pures. Parallèlement à DEHN, Kurt REIDEMEISTER s'intéressa aux nœuds et montra comment relier deux diagrammes du même entrelacs à l'aide d'une suite de modifications simples : son théorème est encore aujourd'hui un des outils les plus utilisés pour étudier les invariants des entrelacs.

La théorie des nœuds a eu dans les trente dernières années un développement très accéléré grâce à deux nouveaux facteurs. D'une part William THURSTON montra que les espaces de dimension 3 (notamment ceux obtenus des nœuds par chirurgie de DEHN) ont « presque toujours » une structure géométrique remarquable. D'autre part en 1984 Vaughan JONES trouva un nouvel objet, appelé désormais le polynôme de Jones, qui fut par la suite interprété en termes physiques par Edward WITTEN. Ces développements ont favorisé l'interaction de différentes branches des mathématiques et de la physique autour des mêmes objets ce qui a produit certaines des idées les plus étudiées dans les mathématiques contemporaines.

Par la suite on donnera les définitions de base des nœuds et de leur équivalence et on s'intéressera au problème crucial suivant : comment distinguer deux nœuds ? Après avoir donné un panorama de quelques-unes des applications de la théorie des nœuds à d'autres domaines, on définira le concept d'« invariant de nœud » et on en donnera quelques exemples. La dernière section sera consacrée à la définition du polynôme de Jones donnée par Louis KAUFFMAN.

## 1. Qu'est-ce qu'un nœud ?

Un nœud est une courbe simple fermée dans l'espace de dimension 3. Il s'agit donc d'un sous-ensemble de points de  $\mathbb{R}^3$  qui est en bijection continue avec les points d'une circonférence. Imaginer un nœud est très simple : il est suffisant de visualiser une ficelle très fine dont les extrémités sont recollées l'une avec l'autre de telle façon qu'en fin de compte la ficelle n'aura ni point initial ni point final.

Donc ceci n'est pas un nœud...



et ceci est un nœud :



En fait la définition de nœud qu'on vient de donner n'écarte pas certaines pathologies. Imaginez par exemple un nœud obtenu en recollant le long de leurs extrémités un nombre infini de ficelles nouées ayant des longueurs de plus en plus courtes de sorte que l'on obtient une ficelle de longueur finie comme le dessin suivant le suggère :



Pour éviter ces nœuds dits « sauvages » on se restreindra par la suite aux nœuds polygonaux.

**Définition 1.** Un *nœud* (polygonaux) est formé d'un nombre fini de segments dans l'espace. Un *entrelacs* est une union d'un nombre fini de nœuds disjoints.

Maintenant qu'on a défini les objets auxquels on s'intéressera, il faut préciser comment les « représenter » c'est-à-dire comment spécifier sur un papier un nœud (qui par définition vit dans l'espace de dimension 3). On l'a déjà fait implicitement en utilisant des diagrammes de projections génériques dans le plan. Un *diagramme* d'un nœud est la projection du nœud sur un plan, équipée de la donnée supplémentaire autour de chaque point d'intersection entre deux segments spécifiant lequel des deux passe au-dessus. Dans cette définition il faut aussi demander que la projection soit *générique* c'est-à-dire que les projections des sommets du polygone formant le nœud soient distinctes et n'appartiennent pas à l'image des intérieurs des segments du nœud. La table suivante nous en donne quelques exemples<sup>1</sup>.

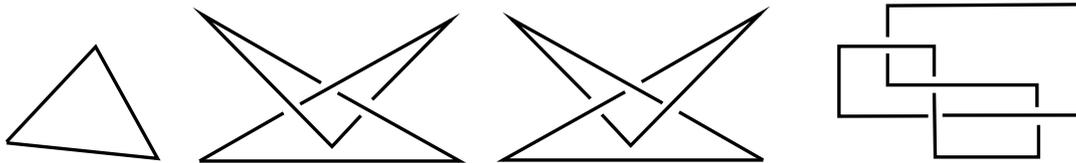


FIG. 1 – De gauche à droite : le nœud simple, le nœud de trèfle gauche, le trèfle droit et le nœud en huit.

<sup>1</sup>En fait le nœud de trèfle tel qu'il a été dessiné ne peut pas être plongé dans l'espace : il faut ajouter des sommets le long de deux arêtes pour les plier et les faire passer l'une sur l'autre. Par la suite on utilisera quand même ces diagrammes simplifiés car les techniques et idées qu'on discutera s'appliquent aussi aux nœuds dont les arêtes sont des courbes lisses quelconques.

Il est simple de prouver que chaque nœud polygonal (on dira simplement nœud par la suite) admet une projection générique et donc un diagramme. Mais deux problèmes se cachent dans la définition d'un diagramme : le premier est qu'étant donné un diagramme on ne peut pas reconstruire *exactement* le nœud de départ, mais seulement un nœud qui lui « ressemble » fortement. Le deuxième est qu'en prenant deux projections génériques du même nœud on pourrait obtenir deux diagrammes différents : quelles sont les relations entre ces diagrammes ?

En fait le premier problème n'en est pas un : on a envie de considérer deux nœuds comme équivalents si on peut « transformer » l'un dans l'autre sans jamais créer d'auto-intersections. Plus précisément on donne la définition suivante.

**Définition 2** (Nœuds équivalents). On dit que deux nœuds  $k_1$  et  $k_2$  sont *équivalents* (ou plus simplement qu'ils sont « les mêmes ») si on peut transformer  $k_1$  en  $k_2$  par une séquence finie des opérations suivantes :

1. Bouger un sommet du polygone représentant  $k_1$  de sorte que, pendant le mouvement, les deux segments liés à ce sommet ne coupent pas d'autres segments de  $k_1$ .
2. Ajouter un nouveau sommet au polygone qui représente  $k_1$  à l'intérieur d'un segment.
3. Éliminer un sommet qui est extrémité de deux segments colinéaires.

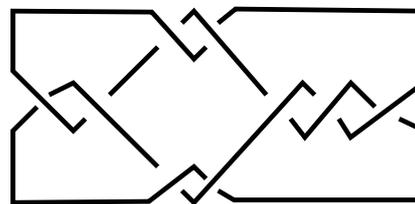
Il est immédiat que deux nœuds ayant le même diagramme sont équivalents : il faut donc considérer les diagrammes comme des moyens de représenter les nœuds « à équivalence près » plutôt que comme de véritables courbes dans l'espace. Dit de façon différente, la relation « être équivalents » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des nœuds polygonaux et un diagramme identifie une classe d'équivalence. Puisque par la suite on s'intéressera à ces classes d'équivalence, on utilisera souvent le mot « nœud » au lieu de « classe d'équivalence de nœuds ».

Le deuxième problème est en fait beaucoup plus délicat. Puisque l'on s'intéresse seulement aux nœuds à équivalence près, on peut bouger une courbe polygonale avant d'en construire un diagramme : le nombre de diagrammes possibles associés à la même classe d'équivalence de nœuds est donc infini.

Voilà donc la question cruciale de la théorie des nœuds :

**Question 1.** Étant donnés deux diagrammes, comment décider s'ils représentent des nœuds équivalents ?

Répondre à cette question est un problème complètement non trivial : pour avoir une idée de la difficulté sachez que le nœud représenté ci-contre est équivalent à un des nœuds de la figure 1. Sauriez-vous dire lequel ?



Le nœud *simple* est le nœud représenté par n'importe quel triangle dans l'espace (ils sont tous équivalents). Donc une version plus faible de la question précédente est :

**Question 2.** Comment décider si un diagramme représente le nœud simple ?

Comme il se passe souvent en mathématiques, il est plus simple de montrer que deux diagrammes *ne représentent pas* les mêmes nœuds. Pour faire cela, les topologues ont développé toute une série d'objets dits « invariants des nœuds » qui permettent de distinguer les diagrammes de nœuds différents. Dans les prochaines sections on donnera quelques exemples d'invariants des nœuds et on les utilisera pour distinguer des nœuds remarquables.

Avant de terminer cette section, observons plus attentivement les diagrammes de la figure 1 : ce sont les diagrammes les plus simples de nœuds non équivalents. La mesure de la « complexité » d'un diagramme est donnée par le nombre de croisements dans le diagramme : pour le nœud simple c'est 0, pour les nœuds du milieu (dits respectivement « trèfle gauche » et « trèfle droit ») c'est 3 et pour le quatrième nœud dit « nœud en huit » c'est 4.

On pourrait se demander pourquoi les diagrammes de la figure 2 ne sont pas dans la figure 1 mais la réponse immédiate est que ces diagrammes représentent le nœud simple qui est déjà représenté par un triangle (dont la complexité est moindre).

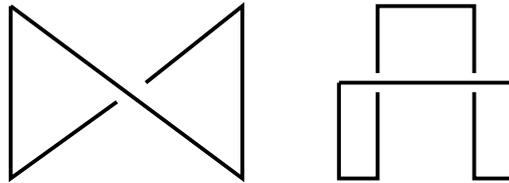


FIG. 2 – Deux diagrammes du nœud simple.

Une question à laquelle il est plus difficile de répondre serait : pourquoi y a-t-il deux nœuds de trèfle ? Ne sont-ils pas équivalents ? On donnera une réponse seulement dans la dernière section. La figure 1 n'est en effet que le point de départ d'une table qui désormais compte des milliers de nœuds : cette liste des nœuds qui a été commencée par Peter TAIT, a été continuée et enrichie par les topologues dans les dernières décennies. Les ordinateurs ont aussi été utilisés. Pour avoir un aperçu de la table telle qu'elle est aujourd'hui voir [5].

Essayons de comprendre quel devrait être le procédé suivi pour construire une telle table. Théoriquement, il faudrait dessiner tous les diagrammes ayant 0 croisement et parmi ces diagrammes déterminer ceux qui représentent le même nœud. Mais déjà là on a un premier problème : il y a un nombre infini de diagrammes sans croisements ! Par exemple on peut considérer un diagramme représenté par un triangle ou par un carré : ils sont différents mais ils représentent quand même le nœud simple. Il faut donc définir une relation d'équivalence sur les diagrammes pour réduire à un nombre fini la liste des diagrammes à considérer.

Remarquons qu'un diagramme est une réunion de segments dans le plan qui forment une courbe fermée mais qui peuvent avoir une intersection non vide (lors des « croisements »). À chaque croisement doit être précisé le segment qui passe au-dessus.

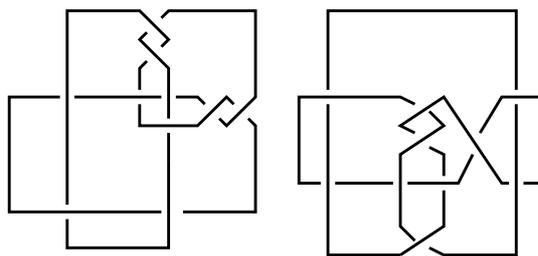
**Définition 3** (Diagrammes isotopes). On dit que deux diagrammes  $D$  et  $D'$  sont *isotopes* si on peut transformer  $D$  en  $D'$  par une séquence finie des opérations suivantes :

1. Bouger un sommet de l'ensemble de segments formant  $D$  de sorte que, si  $s$  est un segment lié à ce sommet et  $s'$  un autre segment de  $D$ , alors pendant tout le mouvement le type de croisement de  $s$  avec  $s'$  ne change pas : soit  $s$  et  $s'$  gardent une intersection vide, soit  $s$  reste au-dessus de  $s'$ , soit  $s$  reste en dessous de  $s'$ .
2. Ajouter un nouveau sommet à l'intérieur d'un segment de  $D$ .
3. Éliminer un sommet qui est extrémité de deux segments colinéaires.

Il est clair que si  $D$  et  $D'$  sont isotopes alors ils ont le même nombre de croisements et ils représentent le même nœud. Encore une fois, la relation « être isotopes » est une relation d'équivalence, et par la suite on s'intéressera plutôt aux diagrammes à isotopie près. Par exemple, on peut prouver que tout diagramme sans croisements est isotope au diagramme (que par la suite l'on notera  $\triangle$ ) formé par un triangle.

Disposant de la notion d'isotopie, on peut continuer l'étude du procédé de construction d'une « table » des noeuds. On pourrait dessiner des diagrammes pour chaque classe d'isotopie de diagrammes ayant 1 croisement, 2,3 et ainsi de suite. Puis, en partant des diagrammes ayant 1 croisement (et vous pouvez vous convaincre qu'à isotopie près il n'y a que celui à gauche dans la figure 2) et 2 croisements, il faudrait commencer par déterminer ceux qui représentent le même nœud : dans ce cas il est facile de voir que tous ces diagrammes représentent le nœud simple. Il faudrait ensuite passer à ceux ayant 3 croisements : là on commencerait à trouver les diagrammes des nœuds de trèfle. Mais comment prouver que ces diagrammes ne représentent pas le nœud simple? Comment prouver que les deux nœuds de trèfle ne sont pas équivalents ?

Ces difficultés croissent avec le nombre de croisements, au point qu'il est déjà arrivé que deux diagrammes du même nœud apparaissent l'un à côté de l'autre dans la même liste : en 1974 l'avocat new-yorkais Kenneth PERKO découvrit que les deux diagrammes ci-contre représentent le même nœud, même si depuis la publication en 1899 par L.C. LITTLE d'une table des nœuds à neuf croisements où ces nœuds apparaissaient comme distincts, ils avaient été considérés comme différents! A vous de comprendre pourquoi ils sont en effet équivalents.



## 2. Pourquoi étudier les nœuds ?

Avant de citer les théorèmes fondamentaux pour l'étude des nœuds, il me semble utile de donner une petite idée des applications de la théorie des nœuds à d'autres branches des sciences et même des applications technologiques.

En biologie, l'étude des enzymes qui agissent sur l'ADN utilise des idées de la théorie des nœuds. L'ADN se présente en effet comme une double hélice nouée dans l'espace dont les deux extrémités sont parfois recollées l'une à l'autre : elle forme donc un nœud. Ce nœud est très fortement tordu dans l'espace, et pour pouvoir recopier l'information contenue dans le code génétique, il est nécessaire tout d'abord de dénouer ce nœud. Il est clair que si ce nœud n'est pas le nœud simple il est impossible de le dénouer sans le couper : certains enzymes (comme par exemple la topoisomerase) font exactement cela. Une des façons quantitatives pour étudier l'action de ces enzymes est aujourd'hui de « photographier » un nœud d'ADN (à l'aide d'un microscope électronique), de comprendre le type de nœud formé par cet ADN et puis d'estimer le nombre de coupures et recollements nécessaires pour dénouer ce nœud.

En chimie, les propriétés d'une molécule dépendent fortement de sa forme dans l'espace. Ce qui est le plus frappant est que deux isomères c'est-à-dire deux molécules ayant la même formule chimique, peuvent avoir des comportements très différents si l'une est l'image miroir de l'autre. Parmi ces molécules, dites énantiomères, on trouve plusieurs aminoacides qui sont à la base de notre biologie. Ce qui est surprenant est que la plupart des organismes terrestres, pendant l'évolution, ont « préféré » une des deux versions possibles pour chacune de ces molécules : ainsi par exemple dans notre métabolisme le D-galactose est très important mais son image miroir ne l'est pas! Un objet qui ne peut pas être superposé à son image miroir est dit « chiral » (du grec «  $\chi\epsilon\iota\rho$  = main », car les mains sont l'exemple le

plus simple d'objets chiraux) et il existe beaucoup de nœuds chiraux (comme par exemple les nœuds de trèfle droit et gauche). Les techniques développées pour les étudier et les distinguer peuvent aussi être appliquées à des molécules nouées dans l'espace.

En physique théorique, le problème principal du dernier siècle a été celui de trouver une théorie qui unifie la théorie de la relativité générale d'EINSTEIN et la théorie quantique des champs. Plusieurs propositions ont été faites mais aucune n'est encore ni acceptée ni considérée comme satisfaisante. Une de ces propositions, dite « Théorie de la gravité quantique en boucles », se base sur l'idée que tout ce qu'on peut mesurer sur l'univers est lié à des trajectoires nouées des particules dans l'espace. Les invariants des nœuds (dont par exemple le polynôme de Jones) deviennent donc les premiers exemples d'« observables » physiques dans cette théorie.

En électronique, dans les dix dernières années, plusieurs modèles pour l'« ordinateur quantique » ont été proposés. La réalisation d'un tel objet, qui du point de vue théorique est considérée comme possible, doit faire face à des difficultés techniques non résolues jusqu'à présent. Une des idées les plus récentes pour cela a été proposée par le mathématicien Michael FREEDMAN, directeur du « Projet Q » de Microsoft, qui a utilisé la théorie des nœuds (et plus généralement des entrelacs) pour modéliser les « q-bits », les éléments de mémoire de l'ordinateur quantique. Le lecteur trouvera plus de détails à ce sujet dans [8].

### 3. Comment distinguer deux nœuds ?

Dans cette section on citera le théorème de REIDEMEISTER qui explique comment relier l'un à l'autre deux diagrammes du même nœud et puis on définira le concept d'invariant de nœud.

Commençons par observer que si à un diagramme d'un nœud on applique une des modifications de la figure 3, le diagramme changera mais le nœud associé ne changera pas (pour vous en convaincre essayez avec des ficelles). Par conséquent, si on part d'un diagramme et

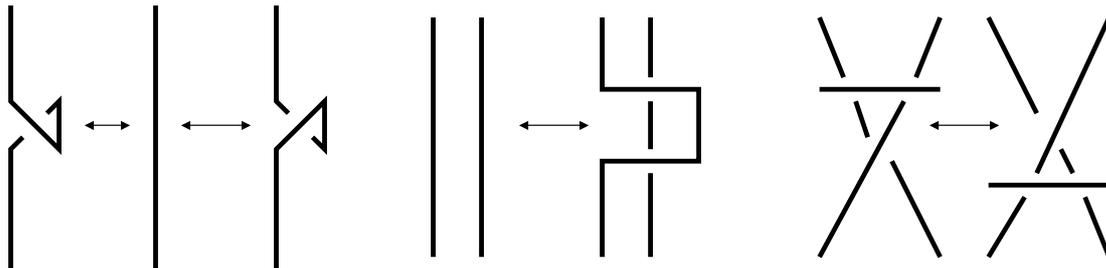


FIG. 3 – Les mouvements de Reidemeister : de la gauche vers la droite le type 1, 2 et 3.

que l'on applique plusieurs de ces modifications, on obtiendra toujours un nœud équivalent à celui de départ. Le théorème de REIDEMEISTER prouve la réciproque :

**Théorème 1** (REIDEMEISTER, 1926). *Deux diagrammes représentent le même nœud si et seulement si il peuvent être transformés en deux diagrammes isotopes par une séquence finie de mouvements de Reidemeister de type 1, 2 ou 3 (voir la figure 3).*

On pourrait penser que ce théorème donne une réponse définitive à la Question 1. Mais il y a un problème : le théorème nous dit que deux diagrammes représentent des nœuds équivalents si il *existe* une séquence de mouvements mais il ne nous dit ni quelle est

cette séquence ni combien de mouvements il nous faudra ! Le fait d'essayer de relier deux diagrammes par des mouvements de Reidemeister et de ne pas y réussir n'est pas une garantie que les deux diagrammes ne représentent pas des nœuds équivalents : on pourrait avoir raté des séquences.

Mais alors quelle est l'importance du théorème de REIDEMEISTER ? Supposez avoir créé une machine qui accepte comme donnée initiale un diagramme et qui rend comme résultat un nombre (ou un polynôme, ou une couleur, une fleur...). Pour le moment ne nous demandons pas comment elle le fait, mais supposons que cette machine marche de telle façon que si on lui donne le diagramme  $D$  ou n'importe quel diagramme  $D'$  obtenu à partir de  $D$  en appliquant un mouvement de Reidemeister, elle donne la même réponse. Alors forcément la réponse de la machine sur n'importe quel diagramme qui est relié à  $D$  par une séquence finie de mouvements de Reidemeister sera toujours la même que pour  $D$ . Donc, *grâce au théorème de REIDEMEISTER* cette réponse sera la même pour tout diagramme qui représente le même nœud que  $D$ .

Imaginez alors avoir trouvé une telle machine, qu'on vous donne deux diagrammes  $D$  et  $D'$  et qu'on vous demande si ces diagrammes représentent ou pas le même nœud. Si les résultats de votre machine sur ces deux diagrammes sont différents, alors les nœuds ne sont pas équivalents ! Par contre si les résultats sont égaux vous ne pouvez rien conclure : votre machine pourrait donner le même résultat pour des nœuds différents.

Donc voilà l'importance du théorème de REIDEMEISTER : il réduit le problème de distinguer deux diagrammes de nœuds au problème de construire des machines qui associent des objets aux diagrammes des nœuds de façon invariante par rapport aux mouvements de Reidemeister. Puisque ces mouvements ne sont que trois, ce problème devient abordable.

La notion de machine qu'on vient de donner en effet peut être formalisée comme suit :

**Définition 4** (Invariants de nœuds). Un invariant de nœuds à valeurs dans un ensemble  $E$  est une fonction

$$f : \{\text{diagrammes de nœuds}\} \rightarrow E$$

telle que si  $D$  et  $D'$  sont isotopes ou transformés l'un en l'autre par un mouvement de Reidemeister, alors  $f(D) = f(D')$ .

Mais comment construire des invariants ? L'exemple le plus simple est l'invariant constant :  $f(D)$  ne dépend pas de  $D$  : cet invariant ne distinguera aucun nœud et donc est totalement inutile.

Une façon de créer des invariants plus intéressants est de prendre n'importe quelle fonction

$$g : \{\text{classes d'équivalence de nœuds}\} \rightarrow E$$

et puis de considérer  $f = g \circ \pi$  où

$$\pi : \{\text{diagrammes de nœuds}\} \rightarrow \{\text{classes d'équivalence de nœuds}\}$$

est la fonction qui associe à chaque diagramme la classe du nœud qu'il représente. En effet, grâce au théorème de REIDEMEISTER, tout invariant peut être obtenu comme cela. Le problème de cette construction est qu'elle passe par la fonction  $\pi$  qui est en fait exactement la fonction qu'on voudrait comprendre !

Pensez au cas où  $E = \{\text{classes d'équivalence de nœuds}\}$  et  $f(D) = \pi(D)$  : cet invariant est l'invariant le plus puissant qu'on puisse imaginer, sauf que le calculer équivaut (exactement) à répondre à la question 1.

Il faut donc faire un compromis : dans la construction précédente il faut trouver une fonction  $f$  qui « perd » de l'information à propos du nœud représenté par un diagramme, en espérant simplifier assez le problème, sans toutefois le rendre trivial. Voici quelques exemples considérés comme « classiques ».

### 3.1. Le nombre de croisements

L'invariant le plus naturel à définir serait le nombre de croisements dans un diagramme d'un nœud. Or ce nombre dépend fortement du diagramme choisi pour représenter le nœud (on a déjà vu que le nœud simple peut être représenté par un triangle mais aussi par les diagrammes de la figure 2). Ce n'est donc pas un invariant. Cela impose de choisir *le nombre minimal de croisements* dans un diagramme du nœud. Pour le nœud simple c'est 0, pour les nœuds de trèfle 3 et pour le nœud en huit 4. Il s'agit exactement de la complexité utilisée pour ordonner la table des nœuds. Le problème de cet invariant est que théoriquement pour le calculer pour un nœud représenté par un diagramme donné, il faudrait générer tous les diagrammes du même nœud et puis prendre le nombre minimal de croisements. Puisque le nombre de ces diagrammes est infini ceci n'est pas faisable. En revanche on peut immédiatement obtenir une estimation par le haut de cet invariant : le nombre de croisements de n'importe quel diagramme de nœud est supérieur ou égal au nombre de croisements du nœud.

### 3.2. Le nombre gordien

Un autre invariant classique est le nombre gordien. Étant donné un nœud il est possible de le transformer en nœud simple en le bougeant dans l'espace et en permettant aux segments qui le composent de se couper un nombre fini de fois. Le nombre gordien est le nombre minimal de telles sections nécessaires pour transformer le nœud en nœud simple : pour le nœud simple il est donc 0. Encore une fois, il n'est pas simple de calculer en général ce nombre, mais il n'est pas difficile de l'estimer : étant donné un diagramme d'un nœud on peut voir que (exercice!) en changeant les données haut/bas autour de quelques croisements on peut obtenir un diagramme du nœud simple. Donc le nombre gordien est toujours inférieur ou égal au nombre de croisements dans n'importe quel diagramme du nœud et donc aussi au nombre de croisements du nœud.

### 3.3. La « tricolorabilité »

Cet invariant est un premier exemple d'invariant complètement calculable. Remarquons tout d'abord qu'un diagramme à  $n > 0$  croisements d'un nœud est formé par  $n$  arcs dont les extrémités sont exactement les croisements. Donc autour de chaque croisement on voit exactement trois arcs : celui qui passe au-dessus et les deux morceaux de celui qui passe en dessous. Fixons maintenant trois couleurs : par exemple rouge, bleu, et vert.

**Définition 5** (Tricoloration). Une *tricoloration* d'un diagramme  $D$  est le choix d'une des trois couleurs pour chaque arc du diagramme de sorte que autour de chaque croisement l'on voie soit trois fois la même couleur soit trois couleurs différentes. Un nœud est dit *tricolorable* si il admet un diagramme qui a une tricoloration utilisant au moins une fois chaque couleur.

Ce qui est le plus remarquable dans cette définition est qu'a priori la tricolorabilité d'un nœud dépend du diagramme du nœud choisi pour la tester, mais en fait on peut voir que si  $D$  est un diagramme tricolorable et  $D'$  est obtenu en appliquant un mouvement de Reidemeister à  $D$  alors  $D'$  est aussi tricolorable. Donc grâce au théorème de Reidemeister

la tricolorabilité ne dépend pas du diagramme mais seulement du nœud ! Vous pouvez enfin remarquer que les nœuds de trèfle sont tricolorables et le nœud en huit (à droite dans la figure 1) ne l'est pas, ce qui implique que le nœud de trèfle et le nœud en huit ne sont pas équivalents. Si cela vous paraît trivial essayez de *prouver* ce fait d'une autre façon.

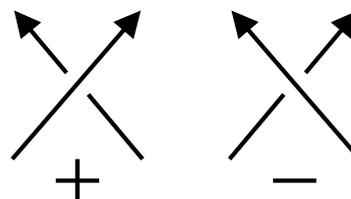
## 4. Le polynôme de Jones

Les exemples donnés dans la section précédente sont loin d'être tous les invariants de nœuds « classiques » c'est-à-dire connus avant les années 80. L'exemple le plus important est le polynôme d'Alexander, découvert par le mathématicien James Waddel ALEXANDER en 1923, mais, puisque sa définition est légèrement plus compliquée que celle du polynôme de Jones (découvert seulement en 1984!) on définira d'abord ce dernier.

### 4.1. Le vrillage

Essayons tout d'abord de construire un invariant à la main. On peut par exemple décider d'associer à chaque croisement d'un diagramme un nombre, par exemple 1 et puis sommer sur les croisements : de cette façon on obtient le nombre de croisements du diagramme. Ce nombre, on l'a déjà dit, changera en appliquant un mouvement de Reidemeister ; ce n'est donc pas un invariant : par exemple en appliquant le mouvement de type 2 le nombre de croisements augmentera de 2.

Pour essayer de raffiner cette construction, choisissons une « orientation » du nœud : c'est-à-dire un sens de circulation le long du nœud. Nous pouvons alors distinguer deux types de croisements : ceux « positifs » et ceux « négatifs » (ces noms étant seulement une convention), comme dans le dessin ci-contre. Remarquons que tout croisement (quitte à faire pivoter son dessin) a une des formes du dessin.



**Définition 6.** Définissons donc le *vrillage*  $w(D)$  d'un diagramme  $D$  comme le nombre de croisements positifs moins le nombre de croisements négatifs.

Est-il invariant ? Tout d'abord il faut contrôler qu'il ne dépend pas du choix du sens de circulation qu'on a fait : pour cela il est suffisant d'observer que si on change ce choix, alors autour de chaque croisement les *deux* flèches sont renversées et donc chaque croisement reste du même type (renversez les flèches et tournez cette page de  $180^\circ$  degrés pour vous en convaincre).

**Remarque 1.** Le vrillage n'est bien défini *que* pour les diagrammes des nœuds, autrement il faut spécifier une orientation pour chaque composante : dans un diagramme d'un entrelacs à plusieurs composantes, en changeant seulement l'orientation d'une composante on change les signes des croisements entre cette composante et toutes les autres.

Contrôlons maintenant ce qui se passe quand on modifie un diagramme par un mouvement de Reidemeister : si on applique le mouvement de type 2, puisque l'on crée exactement un croisement positif et un négatif, le vrillage ne change pas. En ce qui concerne le mouvement de type 3, c'est encore plus simple : le nombre de croisements de chaque type ne change pas après le mouvement. Malheureusement le mouvement de type 1 change le vrillage de  $\pm 1$  (selon le signe du croisement créé par le mouvement) : donc ce qu'on vient de construire n'est pas un invariant des nœuds, mais il nous sera bientôt utile.

## 4.2. Le polynôme de Kauffmann

Soit  $D$  un diagramme d'un nœud, et  $c$  son nombre de croisements. Numérotions les croisements de  $D$ . Si on considère les deux diagrammes obtenus en recopiant  $D$  partout sauf autour du  $c^e$  croisement autour duquel on remplace le croisement comme montré ci-dessous par un des deux diagrammes sur la droite du dessin. On obtient deux diagrammes  $D_+$  et  $D_-$  plus simples que  $D$  car ils ont  $c-1$  croisements. Ces deux diagrammes sont souvent appelés les deux « désingularisations » de  $D$  autour du  $c^e$  croisement. Il faut remarquer qu'on peut obtenir ainsi un diagramme d'entrelacs plutôt que de nœud, mais cela ne nous gênera pas car ce qu'on définira sera valable pour les diagrammes d'entrelacs et pas seulement pour ceux des nœuds.

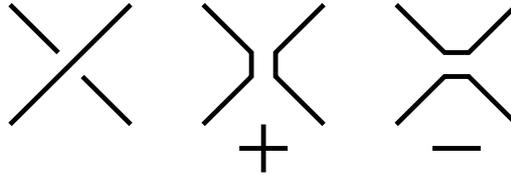


FIG. 4 – Les désingularisations de  $D$  autour d'un croisement. Remarquez que le diagramme de gauche n'étant pas symétrique (l'arc supérieur va du bas à gauche en haut à droite), il y a une façon de distinguer parmi les deux désingularisations : c'est grâce à cela qu'on leur donne des noms (+ et -).

Nous allons montrer comment associer un « polynôme de Laurent »  $K(D)$  à chaque diagramme  $D$ , c'est-à-dire un polynôme à coefficients entiers en une variable  $A$  et son inverse  $A^{-1}$  ; autrement dit :  $K(D) \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ . Ce polynôme est défini par induction sur le nombre de croisements en utilisant les deux règles suivantes :

1. Si  $D$  est un diagramme sans croisements ( $c = 0$ ) d'un entrelacs ayant  $n$  composantes (donc  $D$  est une union de  $n$  courbes simples disjointes dans le plan) alors

$$K(D) = (-A^2 - A^{-2})^{n-1} .$$

En particulier pour le diagramme du nœud simple sans croisements  $K(D) = 1$ .

2. Si  $c > 0$  et  $D_+$  et  $D_-$  sont obtenus de  $D$  par désingularisation d'un croisement alors

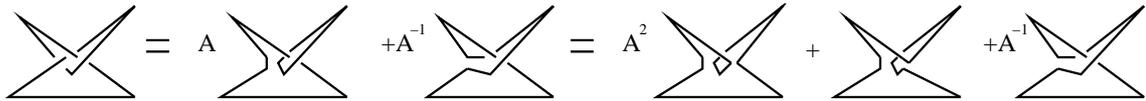
$$K(D) = AK(D_+) + A^{-1}K(D_-) .$$

La définition qu'on vient de donner nous permet toujours de calculer  $K(D)$  pour n'importe quel diagramme  $D$  car, si  $c$  est le nombre de croisements de  $D$ , en appliquant  $c$  fois la règle 2 nous pouvons exprimer  $K(D)$  comme somme de  $2^c$  polynômes associés à des diagrammes n'ayant aucun croisement et donc chacun de la forme  $(-A^2 - A^{-2})^{n-1}$  pour un certain entier  $n \geq 1$ . On peut démontrer que la définition qu'on vient de donner ne dépend ni de la classe d'isotopie du diagramme  $D$  de départ, ni de la numérotation des croisements de  $D$  qu'on avait choisie au départ. En revanche deux diagrammes  $D$  et  $D'$  du même nœud peuvent avoir des polynômes différents : par exemple si  $D = \Delta$  et  $D'$  est le diagramme de gauche de la figure 2, alors  $K(D) = 1$  et  $K(D') = -A^3$ .

**Remarque 2.** Il n'est pas difficile de prouver que si  $D_1$  et  $D_2$  sont deux diagrammes disjoints dans le plan alors

$$K(D_1 \cup D_2) = K(D_1)K(D_2)(-A^2 - A^{-2}) .$$

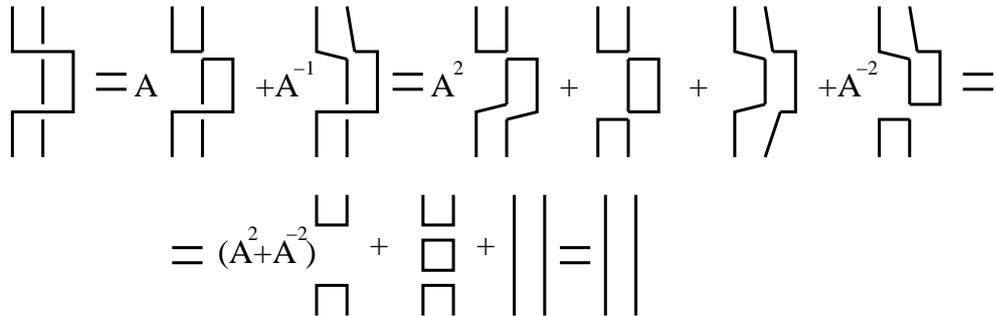
Comme exemple, calculons  $K(D)$  pour le diagramme du nœud de trèfle droit dans la figure 1 :



$$= A^2(-A^3) + (-A)^{-3} + A^{-1}((-A)^{-3})^2 = -A^5 - A^{-3} + A^{-7} = K(D)$$

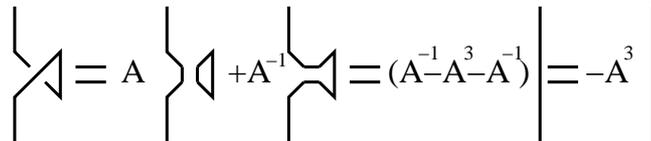
Les calculs précédents sont toujours des calculs entre *polynômes* : en écrivant la « somme » de deux diagrammes on a identifié implicitement chaque diagramme  $D$  avec son polynôme  $K(D)$ . On a donc une façon bien définie d'associer un élément  $K(D) \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$  à chaque diagramme  $D$ . En passant de la première ligne à la deuxième, on a appliqué la règle de changement de  $K(D)$  quand on applique un mouvement de Reidemeister de type 1 à  $D$  : cette règle sera prouvée par la suite.

Le polynôme  $K(D)$  est-il un invariant du nœud représenté par  $D$ ? Pour répondre à cette question testons l'invariance de  $K(D)$  par rapport aux mouvements de Reidemeister. Si  $D'$  est obtenu de  $D$  en appliquant un mouvement du type 2 alors on a :



Pour les diagrammes non fermés (comme dans le dernier calcul), on s'intéresse à des morceaux de diagrammes en sachant que tous les diagrammes sont complétés *de la même façon* hors de la zone dessinée et que donc les polynômes des diagrammes complétés diffèrent seulement à cause des différences *dans* la zone dessinée. En particulier dans le dernier passage on a utilisé le fait que le polynôme du diagramme central est  $(-A^2 - A^{-2})$  fois le produit du polynôme d'un triangle et de celui du diagramme de gauche (Remarque 2), et puis le fait que le polynôme du triangle est 1 par définition.

Avec un calcul similaire on peut prouver (exercice!) que  $K(D') = K(D)$  si  $D'$  est un diagramme obtenu en appliquant à  $D$  un mouvement de Reidemeister de type 3. Par contre, l'invariance par rapport à Reidemeister 1 n'est pas vérifiée :



Comme les calculs précédents le prouvent, si  $D'$  est obtenu en appliquant à  $D$  un mouvement de Reidemeister qui crée un croisement positif (respectivement négatif) alors  $K(D') = -A^3 K(D)$  (resp.  $K(D') = -A^{-3} K(D)$ ).

Heureusement, le changement qu'on a est semblable à celui qu'on a trouvé pour le vrillage. Donc en utilisant ce dernier on peut « corriger »  $K(D)$  pour obtenir un polynôme qui est invariant par rapport à *tous* les mouvements de Reidemeister : il est suffisant de considérer le polynôme  $J(D) = K(D)(-A)^{-3w(D)}$ .

**Définition 7.** Le polynôme  $J(D) = K(D)(-A)^{-3w(D)}$  est le *polynôme de Kauffman* du nœud représenté par  $D$ . En remplaçant  $A$  par  $t^{-\frac{1}{4}}$  on obtient le *polynôme de Jones* du nœud représenté par  $D$ .

Historiquement le polynôme de Jones fut défini par Vaughan JONES en 1984 à l'aide de la théorie de représentations des algèbres de von Neumann, et la définition combinatoire qu'on vient de présenter est due à Louis KAUFFMAN qui la trouva en 1987.

### 4.3. Quelques exemples

Le polynôme de Jones est un invariant très puissant, c'est-à-dire qu'il peut distinguer beaucoup de nœuds.

Par exemple il est simple de voir que si  $K'$  est l'image miroir de  $K$  alors  $J(K')$  est obtenu en remplaçant  $A$  par  $A^{-1}$  dans  $J(K)$ . Par conséquent on peut distinguer le nœud de trèfle gauche du nœud droit car on a déjà calculé le polynôme de Kauffman  $K(D)$  pour le diagramme du nœud de trèfle droit  $D$ . Il est donné par  $K(D) = -A^5 - A^{-3} + A^{-7}$  et, puisque le vrillage du diagramme est 3, on a

$$J(D) = (-A^{-9})(-A^5 - A^{-3} + A^{-7}) = A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}$$

qui n'est pas symétrique par rapport au remplacement  $A \rightarrow A^{-1}$ .

Si on calcule le polynôme de Jones du nœud en huit on obtient :  $t^2 - t + 1 - t^{-1} + t^{-2}$  (avec  $t = -A^4$ ). Une première remarque est que ce polynôme est symétrique par rapport à l'inversion  $A \rightarrow A^{-1}$ . Il ne peut donc pas distinguer le nœud en huit de son image miroir : en fait le nœud en huit est *amphicheiral*<sup>2</sup> c'est-à-dire il est équivalent à son image miroir (exercice !) donc aucun invariant ne peut (ni doit) les distinguer.

Une autre remarque est que le polynôme de Jones distingue les quatre nœuds de notre figure 1. On pourrait se demander si cela se passe en général : est-il vrai que le polynôme de Jones distingue tous les nœuds ? La réponse est non : il existe des nœuds différents (distincts par d'autres invariants) qui ont le même polynôme de Jones (voir [5]). Pire que cela, il existe des nœuds chiraux, c'est-à-dire non équivalents à leurs images miroir (par exemple le nœud  $10_{42}$  de [5]), qui ont un polynôme de Jones symétrique par rapport au remplacement  $A \rightarrow A^{-1}$  et donc le polynôme de Jones de ces nœuds et de leurs image miroirs sont égaux.

Cependant une question plus simple peut être formulée : existe-t-il un nœud qui a le même polynôme de Jones que le nœud simple ?

Si la réponse était non, alors le polynôme de Jones pourrait au moins être utilisé pour détecter le nœud simple et donc donner une façon immédiate de répondre à la question 2. Jusqu'à présent cette question est encore ouverte...

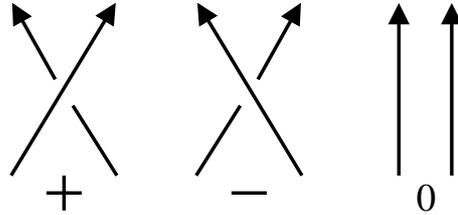
## 5. Autres invariants

Un autre invariant fondamental dans la théorie des nœuds est le polynôme d'Alexander-Conway. Il fut défini par J.W. ALEXANDER en 1923, puis redécouvert par J.H. CONWAY qui en donna une définition plus simple (celle qu'on utilisera).

---

<sup>2</sup>En chimie on parle plutôt de molécule chirale (distincte de son image miroir) ou achirale (égale à son image miroir).

Soit  $D$  un diagramme d'un nœud et fixons une orientation pour  $D$ . Soient aussi  $L_+, L_-$  et  $L_0$  les trois diagrammes ci dessous :



Alors on peut définir un polynôme  $\nabla(D)$  en une variable  $t$  en imposant les conditions suivantes :

1.  $\nabla(D) = 1$  si  $D$  est n'importe quel diagramme du nœud simple.
2.  $\nabla(D_+) - \nabla(D_-) = t\nabla(D_0)$  où par  $D_+, D_-$  et  $D_0$  on note les diagrammes obtenus en remplaçant un croisement au choix de  $D$  par  $L_+, L_-$  et  $L_0$  respectivement (en particulier, soit  $D_+$  soit  $D_-$  sera identique à  $D$ ).

Cette fois-ci il n'est pas évident que ces règles soient suffisantes pour calculer  $\nabla(D)$  pour un diagramme donné : chaque fois qu'on applique la règle 2 on « réduit »  $D$  à un diagramme avec un croisement de moins ( $D_0$ ) et à un autre ayant le *même* nombre de croisements que  $D$ .

Deuxièmement il n'est pas évident que, même si ces règles suffisent, le polynôme qu'on obtient soit invariant par les mouvements de Reidemeister. La preuve de ce fait est plus compliquée que celle qu'on a pu donner pour le polynôme de Jones. On se limitera donc à énoncer le résultat.

**Théorème** (ALEXANDER, 1923). *Le polynôme  $\nabla(D)$  ne dépend que du nœud représenté par  $D$ .*

Pour se convaincre que les règles données sont suffisantes pour calculer  $\nabla(D)$ , remarquons que pour chaque diagramme  $D$  on peut trouver un sous-ensemble de croisements de  $D$  qu'il suffit de changer pour obtenir un diagramme du nœud simple. Alors en appliquant la règle 2 le long de ces croisements on réduira la complexité du diagramme, où cette fois-ci la complexité est mesurée par le nombre gordien du nœud plutôt que par le nombre de croisements du diagramme. En calculant le polynôme d'Alexander-Conway du nœud de trèfle droit on obtient le même résultat que pour le trèfle gauche :  $\nabla(D) = 1 + t^2$ . Donc ce polynôme ne peut pas distinguer les deux nœuds ; en fait on peut prouver qu'il ne distingue jamais deux nœuds qui sont image miroir l'un de l'autre.

Le polynôme de Jones et celui d'Alexander-Conway peuvent être vus comme cas spécifiques d'un autre polynôme, cette fois-ci en 2 variables, dit *polynôme HOMFLY*, d'après les initiales des mathématiciens qui le découvrirent en 1985 : HOSTE, OCNEANU, MILLETT, FREYD, LICKORISH, et YETTER. Pour rendre plus explicite le fait que le polynôme HOMFLY associé à un diagramme  $D$  dépend de deux variables on le notera  $H(D)(t, z)$ . Ce polynôme est défini pour un diagramme  $D$  par les règles suivantes :

1.  $H(\Delta)(t, z) = 1$  où  $\Delta$  est le diagramme du nœud simple.
2.  $t^{-1}H(D_+)(t, z) - tH(D_-)(t, z) = zH(D_0)(t, z)$  où par  $D_+, D_-$  et  $D_0$  on note les diagrammes obtenus en remplaçant un croisement de  $D$  au choix par  $L_+, L_-$  et  $L_0$  respectivement.

Encore une fois la preuve de l'invariance du polynôme HOMFLY est non triviale et s'énonce ainsi :

**Théorème** (HOSTE, OCNEANU, MILLETT, FREYD, LICKORISH, AND YETTER, 1985).  
*Le polynôme  $H(D)(t, z)$  est un invariant du nœud représenté par le diagramme  $D$ . De plus on a pour tout diagramme  $D$*

$$H(D)(1, z) = \nabla(D), \quad H(D)(t, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}) = J(D) .$$

Donc, puisque le polynôme HOMFLY contient les polynômes de Jones et d'Alexander-Conway, il est plus « puissant ». Malheureusement il ne distingue pas tous les nœuds : par exemple, lui non plus ne distingue pas le nœud  $10_{42}$  de son image miroir (voir [5]). Il existe plusieurs autres invariants polynomiaux (les polynômes  $sl_n$ , les polynômes de Jones coloriés et HOMFLY coloriés *etc.* ), mais jusqu'à présent aucun invariant polynomial capable de distinguer tous les nœuds simultanément n'est connu...

La découverte des polynômes de Jones et ensuite des autres invariants polynomiaux, a ouvert une nouvelle époque dans la théorie des nœuds. En effet ces invariants peuvent être étudiés de façon bien plus profonde grâce à des idées qui viennent de la physique théorique et de l'algèbre. Ces points de vue ont enrichi la compréhension de la théorie des nœuds et ont montré comme les nœuds peuvent être pris comme champ de test suffisamment vaste pour une série d'idées dans ces autres domaines de la science.

Aujourd'hui il est possible de trouver beaucoup d'informations, exemples et calculs explicites des invariants des nœuds. Un site à visiter est sûrement « The knot atlas » ([5]) dans lequel on peut repérer les invariants principaux de tous les nœuds jusqu'à 11 croisements. Il existe aussi beaucoup de logiciels téléchargeables gratuitement sur internet pour faire des expériences sur les nœuds chez soi : parmi les plus connus il y a KnotPlot ([6]) et Knotscape ([7]). Enfin, plusieurs livres ont été publiés sur les nœuds : j'en ai indiqué quelques-uns dans la bibliographie sans aucune prétention d'être exhaustif.

## Bibliographie

- [1] C. ADAMS (2004), *The Knot Book*, *American Mathematical Society, Providence*.
- [2] G. BURDE & H. ZIESCHANG (1985), *Knots*, *de Gruyter Studies in Mathematics 5*, *Walter de Gruyter & Co., Berlin-New York* .
- [3] R.H. CROMWELL & R.H. FOX (1963), *Introduction to Knot Theory*, *Graduate Texts in Mathematics 57*, *Springer-Verlag*.
- [4] L. KAUFFMAN (1991, 2001), *Knots and Physics*, *World Scientific, Singapore*.
- [5] The Knot Atlas, [http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Main\\_Page](http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Main_Page).
- [6] R. SCHAREIN, KnotPlot, <http://knotplot.com/>.
- [7] J. HOSTE & M. THISTLETHWAITE, Knotscape, <http://www.math.utk.edu/~morwen/knotscape.html>.
- [8] G. COLLINS (2006), *Des tresses pour l'ordinateur quantique*, *Pour la Science*, **343**.
- [9] D. ROLFSEN (2003), *Knots and Links*, *AMS Chelsea Publishing, vol. 346*.
- [10] A. SOSSINSKY (1999), *Nœuds*, *Seuil, Paris* .

Francesco COSTANTINO  
 Institut de Recherche Mathématique Avancée  
 7, Rue René Descartes  
 67000 Strasbourg  
 costanti@math.u-strasbg.fr

# ÉQUIDÉCOMPOSABILITÉ DES POLYGONES PLANS

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

**Résumé :** Le thème de l'équidécomposabilité des polygones plans, c'est -à-dire leur décomposition en un nombre fini selon les mêmes parties triangulaires ou polygonales, est l'occasion de nombreuses réflexions et activités géométriques à différents niveaux :

au collège et au lycée, par la fabrication de puzzles lesquels nécessitent des raisonnements et des constructions géométriques élémentaires et qui mettent en jeu de façon non artificielle les isométries du plan,

en didactique, par des réflexions sur les notions d'aire, de congruence, leurs fondements théoriques et leurs enjeux didactiques,

en histoire, par l'ouverture à des problèmes qui parcourent toute l'histoire des mathématiques depuis les Grecs jusqu'à aujourd'hui et qui ne sont jamais épuisés.

Enfin, il permet aussi de s'exercer et de tester les logiciels de géométrie dynamique pour la réalisation pratique des nombreuses figures illustrant cet article.

**Mots-clés :** Euclide - Hilbert - Invariant de Dehn - Équidécomposabilité - Puzzles mathématiques - Translation - Symétrie centrale - Aires - Équidécomposabilité translatrice.

Dans l'enseignement élémentaire les notions d'aire et de mesure d'une aire font partie de ces concepts considérés comme intuitivement évidents, pour lesquels en tout cas on ne donne aucune démonstration même pour des figures aussi simples que le rectangle ou le triangle. Quel est le professeur de collège ou de lycée qui saurait démontrer spontanément la formule longueur  $\times$  largeur pour la mesure de l'aire d'un rectangle quelconque ? Il y a à cela une raison profonde, explicitée par HILBERT dans ses *Fondements de la géométrie* ([8]) mais déjà mise évidence dans les *Éléments* d'Euclide : la nécessité de recourir à un axiome de continuité ou axiome d'Archimède. C'est pourquoi l'essentiel des *Éléments d'Euclide*, consacré à la géométrie élémentaire, a son architecture interne nettement séparée en deux parties par le Livre V consacré à la théorie des proportions, c'est-à-dire à la gestion des rapports de grandeurs incommensurables. Le théorème de Thalès, ou la proportionnalité de l'aire d'un triangle à la longueur d'un côté et à la hauteur correspondante ne sont traités qu'au Livre VI, parce que leur démonstration exige l'axiome de continuité. Alors que le théorème de Pythagore est traité dès la fin du Livre I, c'est-à-dire nettement avant la théorie des proportions, parce qu'EUCLIDE a développé dans ce livre toute une théorie des propriétés et des comparaisons des aires sans recours à leur mesure. Le ressort principal des démonstrations d'EUCLIDE dans ce Livre I consiste à ajouter et retrancher des figures congruentes (nous dirions isométriques) à des figures congruentes, pour obtenir d'autres figures congruentes. Par exemple pour la proposition 35 :

*Les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux.*

... c'est-à-dire *ont même aire*. EUCLIDE démontre en substance de la manière suivante l'égalité (en aire) des parallélogrammes  $ABCD$  et  $EBCF$  (figure 1).

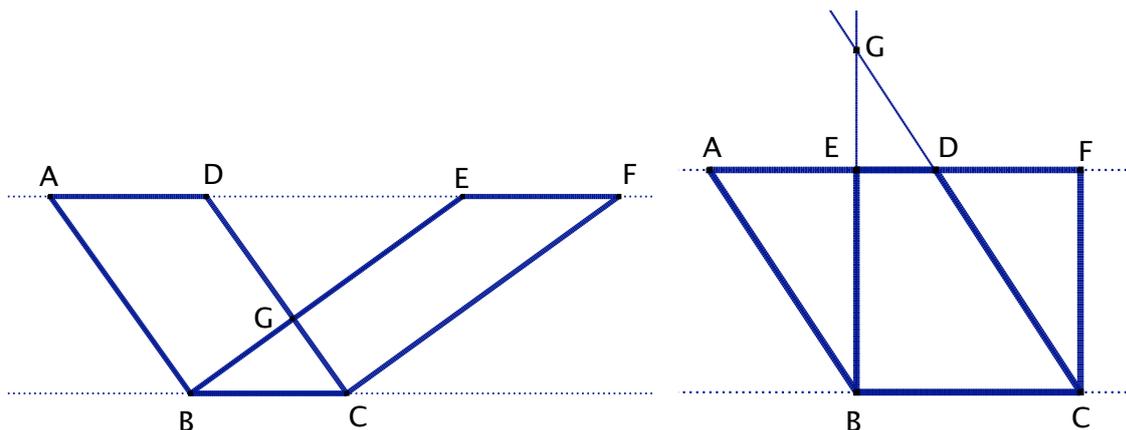


figure 1

figure 2

Comme les triangles  $ABE$  et  $DCF$  sont égaux, les parallélogrammes  $ABCD$  et  $EBCF$  sont égaux car obtenus à partir des triangles égaux en ajoutant un même triangle  $BGC$  et en retranchant un même triangle  $DGE$ . EUCLIDE ne traite pas le cas de la figure 2, où le point  $G$  tombe à l'extérieur des segments  $BE$  et  $CD$ . Mais le principe est le même.

Dans la suite, pour parler de deux polygones qui ont la même aire, nous dirons qu'ils sont équivalents et nous utiliserons quelquefois le signe  $\approx$ .

La démonstration d'EUCLIDE dans le cas de la figure 2 peut se simplifier en remarquant qu'on a une partie commune : le trapèze  $EBCD$  et deux triangles congruents,  $ABE$  et  $DCF$ . Donc les deux parallélogrammes  $ABCD$  et  $EBCF$  sont composés de parties congruentes (un triangle plus un trapèze) ce que l'on traduit aujourd'hui en disant que les parallélogrammes sont *équidécoupables*. Ce terme a été introduit par HILBERT dans les éditions postérieures à la quatrième édition des *Fondements de la géométrie* ([8]) ; on parle aussi de *multicongruence* ou d'*égalité finie*, pour mettre l'accent sur le fait qu'on n'utilise qu'un nombre fini de polygones élémentaires, contrairement à ce qui se fait dans le cas d'une exhaustion. Il n'est pas difficile d'appliquer cette méthode à la situation de la figure 1 : il suffit de découper les deux parallélogrammes par des parallèles à la base équidistantes et en nombre suffisant pour que la première coupe le triangle  $BCG$ , complétées par autant de parallèles aux autres côtés (figure 3).

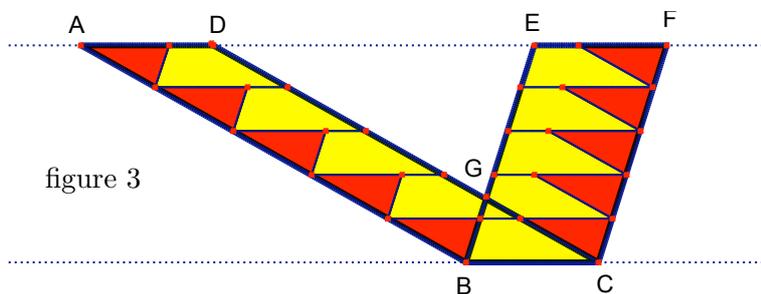


figure 3

Cette dernière démonstration a l'avantage de n'utiliser qu'une seule idée – celle de la subdivision en parties congruentes. Mais il y a aussi un problème : cette démonstration repose sur le fait qu'on peut subdiviser un segment en un nombre fini de parties de même longueur. D'un point de vue moderne cela renvoie au caractère archimédien des segments. Parce que HILBERT voulait développer une théorie des aires sans recourir à l'axiome d'Archimède il était obligé de recourir à la méthode un peu plus compliquée d'EUCLIDE qui fait aussi intervenir des soustractions d'aires. Dans le chapitre IV de ses *Fondements*, après avoir défini un polygone comme réunion finie de triangles, il convient qu'un polygone  $A$

est décomposé en deux polygones  $B$  et  $C$  si l'on a  $A = B \cup C$  et si  $B \cap C$  est réduit à une réunion de segments. La décomposition en un nombre fini de polygones se définit de façon analogue. Suivent alors les deux définitions<sup>1</sup> essentielles pour notre propos.

DÉFINITION. Sont dits *flächengleich*, c'est-à-dire *égaux par addition*, deux polygones qui peuvent être décomposés en un nombre fini de triangles respectivement congruents deux à deux.

DÉFINITION. Sont dits *inhaltsgleich* ou *von gleichem Inhalt*, c'est-à-dire *égaux par soustraction*, deux polygones auxquels on peut ajouter des polygones égaux par addition, de manière que les deux polygones ainsi composés soient eux-mêmes égaux par addition.

La première correspond à l'équidécomposabilité.

La seconde est appelée *équicomplémentarité*.

Les réflexions de HILBERT sur une théorie de l'équidécomposabilité avait été préparées au début du XIX<sup>e</sup> siècle par plusieurs auteurs. Un lieutenant prussien appelé Paul GERWIEN a publié deux articles ([4] et [5]) sur ces questions dans le journal de Crelle en 1833. Ils sont intitulés « Dissection d'un nombre quelconque de figures rectilignes égales en des parties égales » et « Dissection d'un ensemble quelconque de figures de différentes formes mais de même contenu sur la sphère en des parties égales ».<sup>2</sup> Dans ces deux articles, GERWIEN a donné une étude systématique de l'équidécomposabilité dans le plan (géométrie euclidienne) et sur la sphère. Dans les deux cas il démontre le résultat suivant :

*Deux polygones sont de même mesure si et seulement si ils sont équidécomposables.*

D'où il conclut : « Le présent mémoire montre qu'on peut définir l'égalité des figures rectilignes de la manière suivante : des figures sont égales (en aire) si elles sont composées des mêmes parties. »<sup>3</sup>

Avant de passer à l'étude détaillée du premier mémoire de GERWIEN, je voudrais signaler qu'il y a là des occasions d'activités géométriques pour le collège et le lycée très formatrices : elles ne nécessitent pas d'investissement théorique important tout en donnant l'occasion de mettre en œuvre de façon non artificielle des transformations élémentaires comme la translation ou la symétrie centrale.

## 1. Un exemple pour le collège

Les puzzles sont une activité ludique exemplaire pour solliciter la réflexion et l'initiative des élèves, surtout si on leur demande d'inventer leur propre puzzle. Le problème suivant peut s'inscrire dans cette démarche tout en donnant l'occasion de travailler le cours de géométrie.

**Problème.** Soient donnés deux triangles  $ABC$  et  $ADE$  de même base et de même hauteur (figure 4). Trouver une décomposition de ces deux triangles en les mêmes morceaux triangulaires ou polygonaux (figure 5).

<sup>1</sup>Traduction de LAUGEL, *Principes fondamentaux de la géométrie* par M.D. HILBERT ([8]).

<sup>2</sup>Titres originaux : « Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke » et « Zerschneidung jeder beliebigen Menge verschieden gestalteter Figuren von gleichen Inhalt auf Kugeloberfläche in dieselben Stücke ».

<sup>3</sup>Pour une étude approfondie de ces questions, voir l'article de Klaus VOLKERT [10].

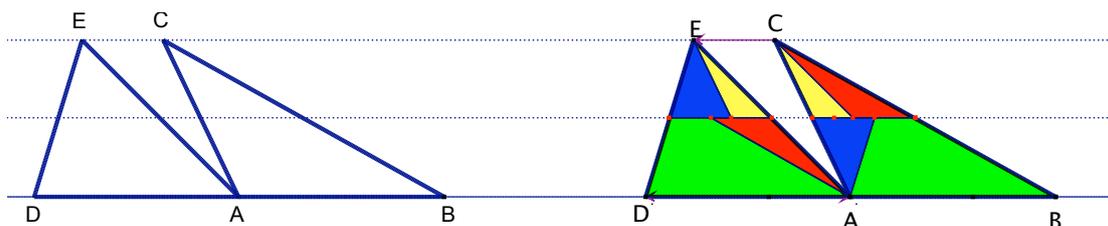


figure 4

figure 5

Comme certaines (au moins), des pièces communes auront des côtés portés par les côtés des triangles de départ, il paraît opportun de tracer par les sommets de l'un et l'autre triangle des parallèles aux côtés de l'autre; ce qui peut se traduire aussi par des translations amenant certains sommets à coïncider (figure 6). Par ailleurs, la droite des milieux peut jouer un rôle, ces milieux pouvant être centre de symétrie pour certaines pièces (figure 7). Ces deux idées suffisent ici à trouver la décomposition. La démarche de GERWIEN s'appuie sur ces idées simples, mais cherche évidemment à mettre en place une méthode générale et systématique de décomposition de deux ou plusieurs polygones équivalents.

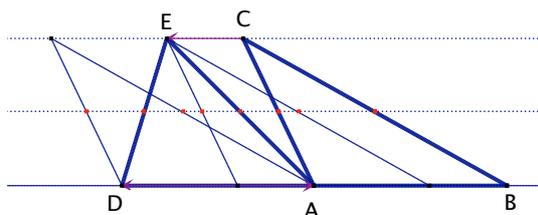


figure 6

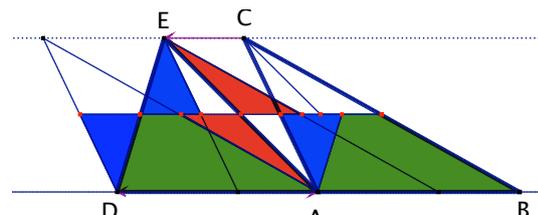


figure 7

## 2. L'équidécomposabilité des polygones plans par Gerwien

Dans son article du *Journal de Crelle* ([4]), GERWIEN développe un raisonnement assez élémentaire en cinq étapes, dont voici la trame :

**Étape 1. Des triangles en nombre quelconque, de même sommet et dont les bases sont égales et accolées sur une même droite, sont simultanément équidécomposables** au moyen de droites parallèles aux différents côtés menées par les sommets situés sur la base commune (figure 8 et 9 pour un exemple avec trois triangles accolés). Remarquons que les polygones de décomposition obtenus par ce procédé sont isométriques soit par translation, soit par symétrie centrale. Nous appellerons ce procédé, *procédé n° 1* et ceci nous sera utile dans la suite.

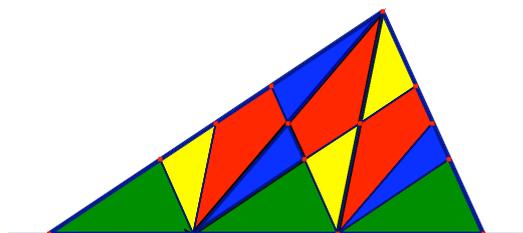


figure 8

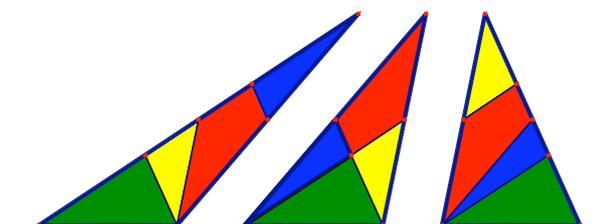


figure 9

### Étape 2. Des triangles ayant même base et même hauteur sont équidécomposables

La démonstration est simple par exemple dans le cas de triangles acutangles  $ABC$  et  $DBC$ , en les plaçant de part et d'autre de la base commune : il suffit de tracer, à partir de l'intersection de la diagonale  $(AD)$  avec la base, des parallèles aux côtés du triangle situé de l'autre côté (figure 10). Nous appellerons cette décomposition *procédé n° 2*. Le ressort principal de ce procédé réside dans le fait que les triangles composants ayant une base commune sur  $(BC)$  se correspondent par une symétrie centrale, les autres par une translation. Bien entendu on pourra adapter cette décomposition à diverses situations des triangles équivalents, au moyen des transformations usuelles, comme dans l'exemple de la figure 11.

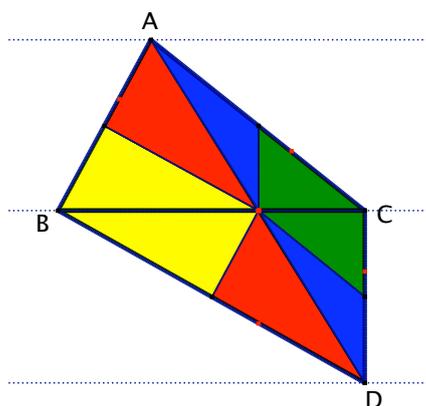


figure 10

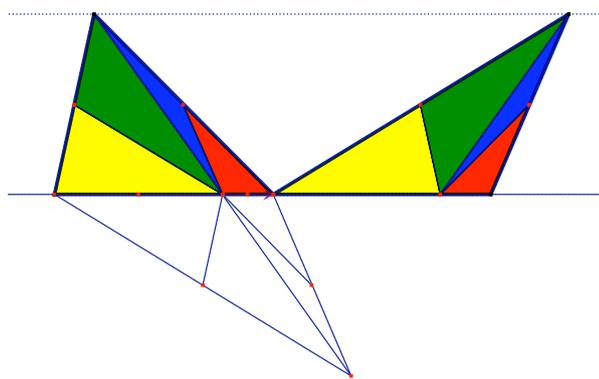


figure 11

Mais le problème peut se révéler plus compliqué si la droite  $(AD)$  coupe la base commune en un point  $K$  situé en dehors du segment  $[BC]$ , comme dans la figure 12. Cette dernière situation peut néanmoins se ramener à la précédente, en accolant des triangles de même base situés entre les mêmes parallèles, jusqu'à aboutir à un triangle débordant le point  $K$  (figure 13).

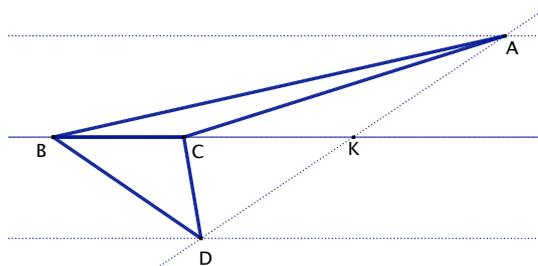


figure 12

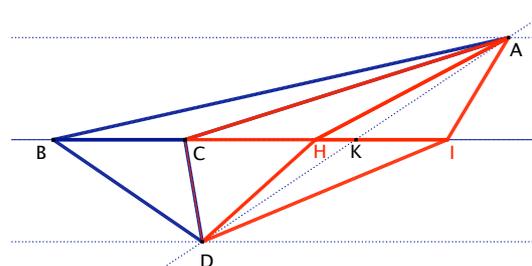


figure 13

Il suffit après cela de superposer les deux décompositions obtenues par les procédés n° 1 et 2. Dans la pratique, la figure devient vite complexe par la multiplication rapide du nombre de polygones réalisant la décomposition. C'est pourquoi nous traiterons un exemple ne nécessitant que l'adjonction d'un triangle pour dépasser l'intersection de  $(AD)$  avec la base  $(BC)$ . Dans ce cas, la décomposition des deux triangles accolés  $ABC$  et  $ACH$  ainsi que de  $DBC$  et  $DCH$  par le procédé n° 1 est très simple, rajoutant les milieux  $I, J, L$  et  $M$  (figure 14). Le procédé n° 2 appliqué aux triangles  $ACH$  et  $DCH$ , rajoute les milieux  $N$  et  $O$  (figure 15).

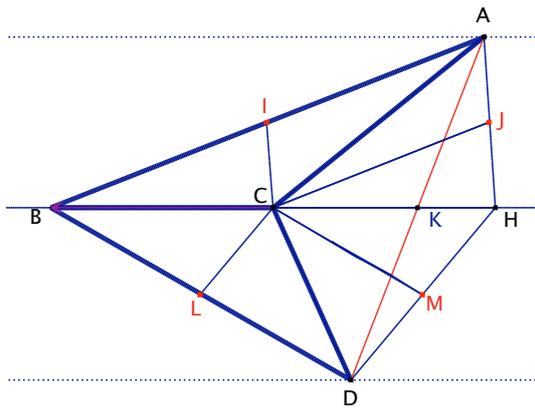


figure 14

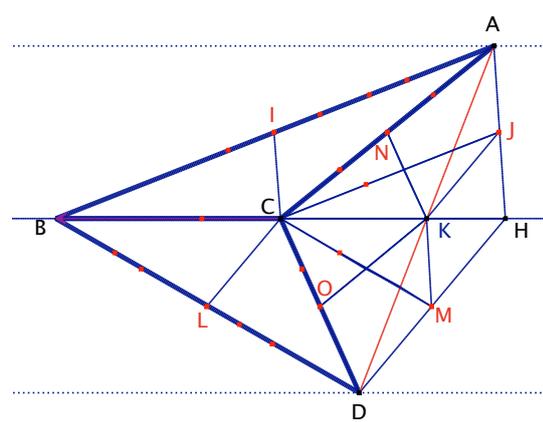


figure 15

Il faut maintenant encore superposer les deux découpages des triangles  $ACH$  et  $DCH$ . Pour cela il suffit d'appliquer la symétrie de centre  $E$  milieu de  $[CK]$  pour les segments contenus dans les triangles symétriques  $CKN$  et  $CKO$ , et les translations de vecteur  $\overrightarrow{DK}$  et  $\overrightarrow{AK}$ , respectivement, pour les segments contenus dans les triangles  $KOD$  et  $MKD$ , (respectivement  $ANK$  et  $JAK$ ) (figure 16). Cela nous donne ici un total de 11 triangles ou polygones pour réaliser l'équidécomposition des triangles  $ABC$  et  $DBC$ . Pour cela, il suffit de ramener ces composants dans les triangles  $ABC$  et  $DBC$ , par translation ou par symétrie centrale, selon la disposition des parties obtenues par le procédé n° 1 (figure 17). De cette manière les polygones isométriques  $NPQRS$  et  $OTUVW$  sont envoyés par symétrie respectivement dans les triangles  $ABC$  et  $DBC$ . Par contre pour les triangles isométriques  $JQK$  et  $UDM$ , le premier est envoyé par translation dans le triangle  $ABC$  alors que le second est envoyé par symétrie dans le triangle  $DBC$ .

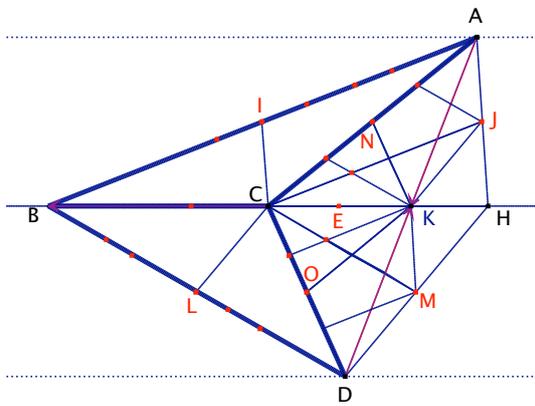


figure 16

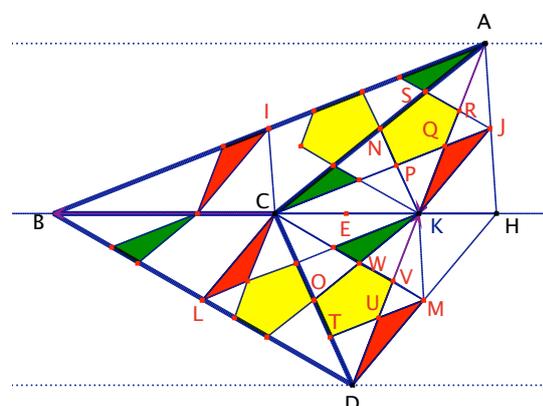


figure 17

En effectuant les transformations pour tous les polygones et triangles composants on obtient finalement l'équidécomposabilité des triangles  $ABC$  et  $DBC$  en 11 éléments. On peut réduire cette décomposition à six éléments seulement, en regroupant dans chaque triangle les morceaux contigus qui sont images l'un de l'autre par la même transformation, symétrie centrale ou translation (figure 18).

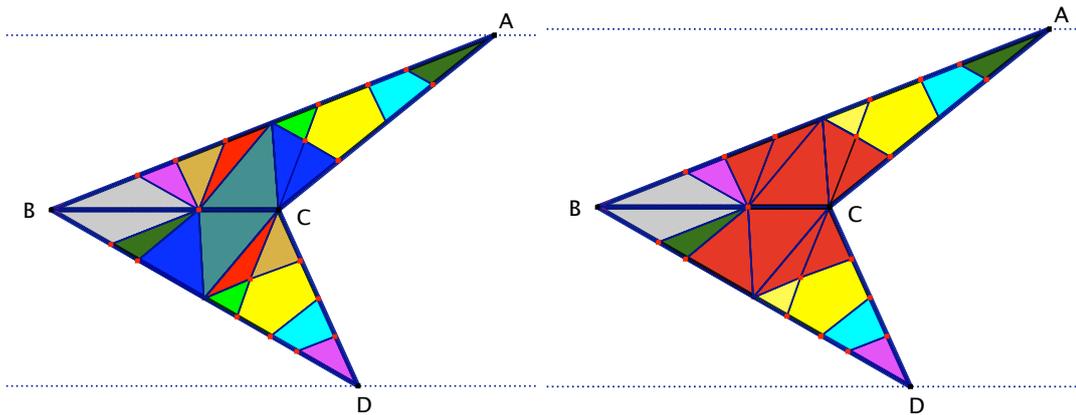


figure 18

Il existe une autre méthode, plus économe en nombre de parties à construire et déplacer dans les étapes intermédiaires, mais un peu plus délicate à mettre en place, dont nous ne donnons ici que le résultat final (figure 19) pour les mêmes triangles que ceux de la figure 18, renvoyant à l'article de Michel SARROUY qui décrit et démontre cette méthode dans la brochure réalisée par le groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Strasbourg ([9], 87–93).

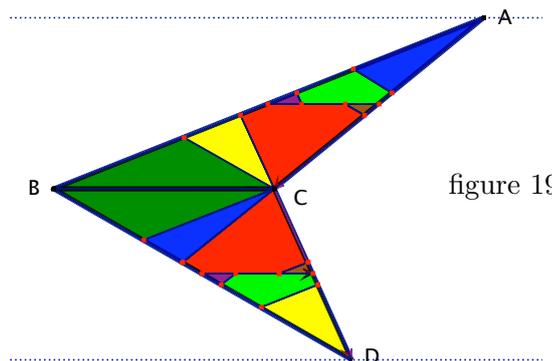


figure 19

Cette seconde décomposition nécessite sept couleurs, contre six en fin de compte dans l'autre, ce qui pose le problème du nombre minimal de couleurs nécessaires à l'équidécomposabilité; problème difficile, dont je ne connais pas de solution.

### Étape 3. Deux triangles de même aire sont équidécomposables

On peut toujours prendre pour base leur plus grand côté et les accoler sur une même droite. Soient donc  $ABC$  et  $AED$  deux tels triangles équivalents quelconques<sup>4</sup>,  $AB$  et  $AE$  leurs bases. Pour réaliser l'équidécomposabilité des deux triangles :

1. Construire un triangle  $AEF$  de même base et même hauteur que  $AED$ , mais dont le côté  $AF$  est égal à  $AB$ . Appliquer le procédé n° 2 aux deux triangles  $AED$  et  $AEF$ , puis ramener  $AEF$ , avec sa décomposition, sur la base  $AB$  pour obtenir le triangle  $ABG$  (figure 20).
2. Appliquer le procédé n° 2 aux triangles  $ABC$  et  $ABG$ , en conservant la décomposition précédente superposée, transporter le découpage obtenu sur le triangle  $AEF$ , puis le

<sup>4</sup>Cela pose le problème intéressant suivant : construire à la règle et au compas deux triangles de même aire n'ayant ni mêmes bases ni mêmes hauteurs, problème que nous laissons au lecteur le soin de traiter. Des indications sont fournies dans [9].

transformer par symétrie centrale ou translation en l'appliquant au triangle  $ADE$ . Regrouper les pièces contiguës (figure 21).

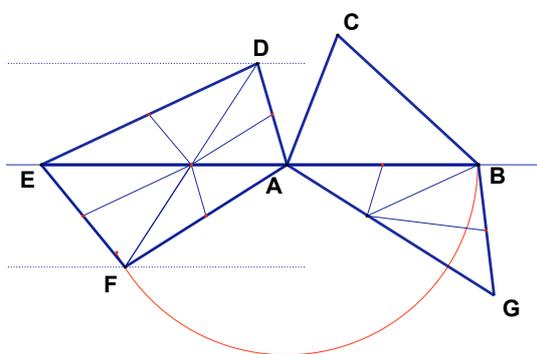


figure 20

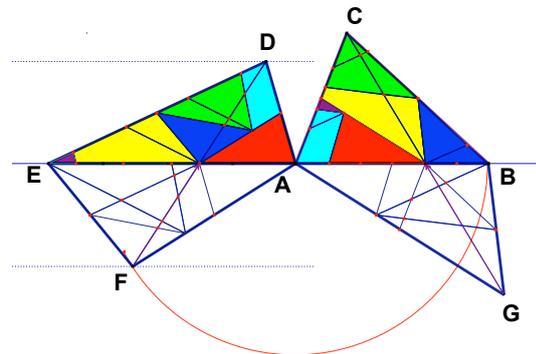


figure 21

#### Étape 4. Deux polygones de même aire sont équidécomposables

Le principe consiste à diminuer de proche en proche le nombre de côtés des polygones pour se ramener en fin de compte à deux triangles. Considérons pour commencer un quadrilatère  $ABCD$ . Une parallèle par  $B$  à la diagonale ( $AC$ ) coupe ( $CD$ ) en  $E$ . Alors le triangle  $AED$  est équivalent au quadrilatère  $ABCD$ . Il suffit de remarquer que les triangles  $ABC$  et  $AEC$  sont équivalents (figure 22). Le lecteur appliquera sans difficulté la méthode à un quadrilatère non convexe. Pour un polygone quelconque de  $n$  côtés, on appliquera la méthode précédente ( $n - 3$ ) fois pour aboutir à un triangle équivalent (figure 23).

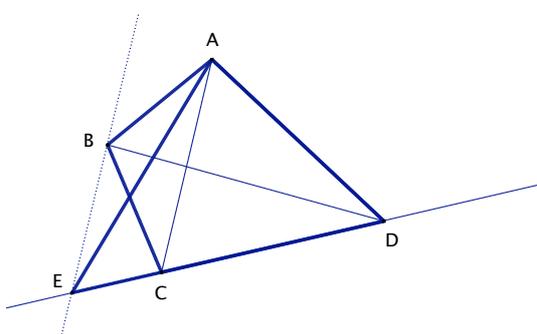


figure 22

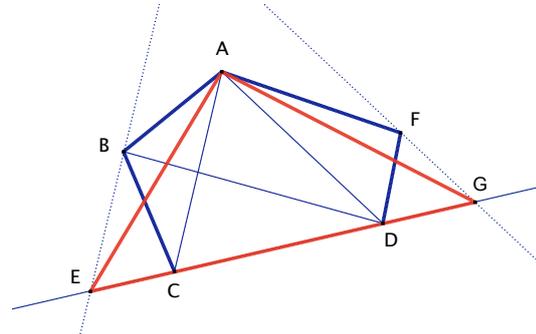


figure 23

Nous laissons le soin au lecteur de reprendre l'ensemble des idées et méthodes développées ci-dessus pour expliciter la décomposition du pentagone et du triangle équivalent, dans la figure 24.

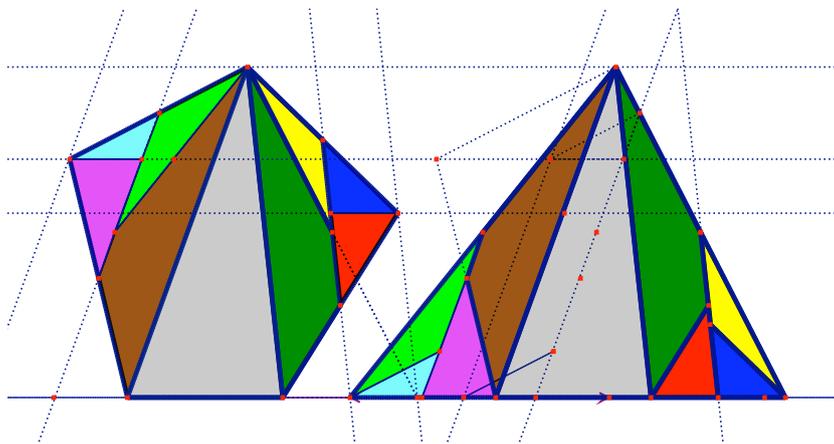


figure 24

### Étape 5. Un nombre fini quelconque de polygones équivalents sont équidécomposables

GERWIEN utilise simplement un raisonnement qui revient à démontrer la transitivité de la relation d'équivalence définie par l'équidécomposabilité. Si les polygones  $P$  et  $Q$  sont équidécomposables, cela veut dire qu'ils sont tous deux réunion des mêmes  $n$  polygones  $p_i (1 \leq i \leq n)$ . De même,  $Q$  et  $R$  sont équidécomposables, donc réunion des mêmes  $m$  polygones  $q_j (1 \leq j \leq m)$ . Alors  $P$  et  $R$  (et  $Q$ ) sont également équidécomposables, réunion des mêmes  $m \times n$  polygones formés par toutes les intersections d'un  $p_i$  avec un  $q_j$ .

Appliquons ces méthodes à un exemple classique bien connu, mais dont la mise en place paraît bien mystérieuse : le fameux puzzle de Dudeney transformant un carré en triangle équilatéral et réciproquement. Si la détermination des pièces composant les deux figures est facile à expliciter, le mystère reste dans l'interrogation suivante : comment DUDENEY a-t-il trouvé cette décomposition ? Je n'ai pas la réponse à cette question, mais les procédés mis en place par GERWIEN y conduisent naturellement, comme nous allons le montrer.

## 3. Le puzzle de Dudeney

Henri Ernest DUDENEY (1857 – 1930) était un mathématicien anglais autodidacte, qui a publié de nombreux puzzles dans un grand nombre de périodiques durant plus d'une trentaine d'années, sous le pseudonyme de « Sphinx ». Un des plus célèbres (voir [3] p. 136) est constitué de quatre morceaux pouvant constituer indifféremment un triangle équilatéral ou un carré (figure 25 et 26) . Cela correspond donc exactement à une équidécomposabilité de ces deux polygones.

On déroule le triangle de la droite vers la gauche.

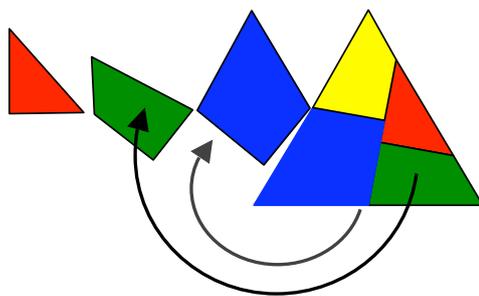


figure 25

On enroule les morceaux de la gauche vers la droite.

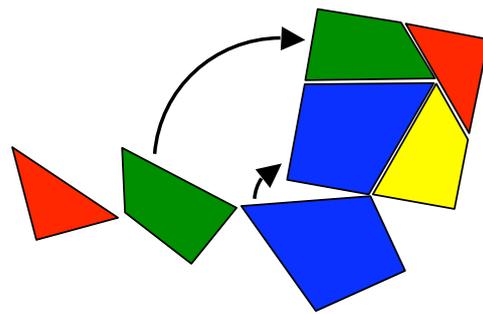


figure 26

Traisons cette équidécomposabilité à la manière de GERWIEN. Successivement :

1. transformer le carré en triangle<sup>5</sup> (rectangle, en l'occurrence ; figure 27),
2. appliquer la procédure de l'étape 3 pour les deux triangles (figure 28),
3. remonter du triangle rectangle au carré (figure 29),
4. regrouper les pièces contiguës ; par exemple la rouge, la jaune, une partie de la bleu clair, une partie de la vert clair (figure 30).

<sup>5</sup>Nous ne traiterons pas ici le problème de la construction d'un carré équivalent à un triangle ou à une figure quelconque donnée, aussi appelé problème de la quadrature. Cette question est traitée dans la brochure [9].

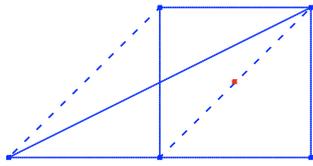


figure 27

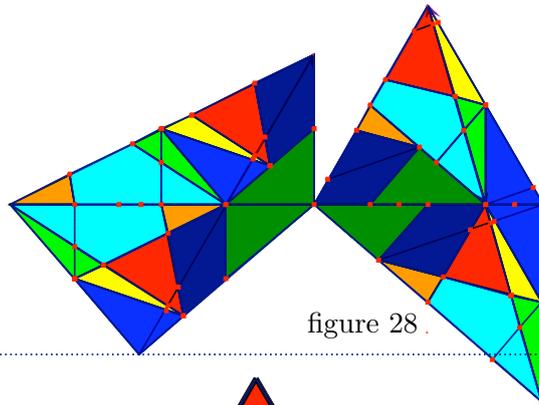


figure 28

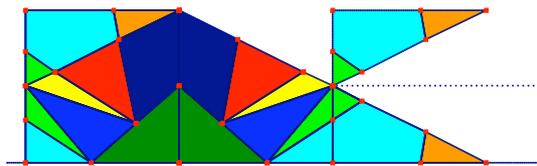


figure 29

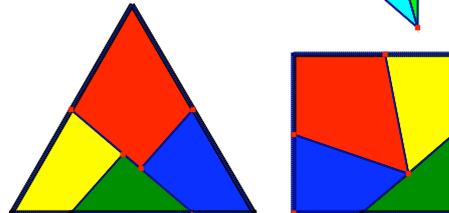


figure 30

En pratique les pièces sont obtenues à partir du triangle équilatéral  $ABC$  de la manière suivante : soient  $M$  et  $N$  les milieux de  $[BC]$  et  $[AB]$  respectivement. Soit  $K$  sur  $[AC]$  tel que  $CK$  soit égal au côté du carré,  $(NL)$  perpendiculaire à  $(MK)$  en  $L$ ,  $I$  le milieu de  $[MK]$ ,  $H$  le symétrique de  $L$  par rapport à  $I$ ,  $(HG)$  perpendiculaire à  $(KM)$  en  $H$ , qui coupe  $(AC)$  en  $G$  (figure 31). Alors on peut démontrer

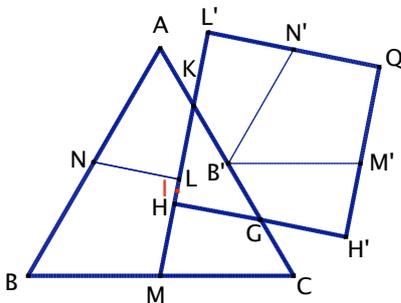


figure 31

1. que les symétriques de  $A$  par rapport à  $K$  et de  $C$  par rapport à  $G$  sont confondus en un point  $B'$ ,
2. que le symétrique  $B'N'L'K$  du polygone  $ANLK$ , par rapport à  $K$ , le symétrique  $H'M'B'G$  du polygone  $HMCG$  par rapport à  $G$  et le translaté  $N'B'M'Q$  de vecteur  $\vec{BB'}$  du polygone  $NBML$  constituent un recouvrement exact du carré  $HH'QL'$ .

De fait il y a là un découpage plus général permettant de découper un triangle quelconque (au moins s'il est acutangle) en morceaux qui, reconstitués autrement, donnent un rectangle.

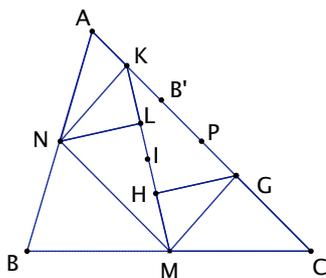


figure 32

Soit  $ABC$  le triangle que l'on veut transformer en rectangle. Plaçons les milieux  $M, N, P$  des côtés  $[BC]$ ,  $[AB]$ ,  $[AC]$  respectivement et choisissons un point  $K$  sur  $[AP]$  (On suppose que l'un au moins des côtés du rectangle est supérieur à  $MP = \frac{1}{2}AB$  et inférieur à la médiane  $AM$ ). La parallèle à  $(NK)$  passant par  $M$  coupe alors  $[AC]$  en un point  $G$  (figure 32).

1. Démontrer que  $MGKN$  est un parallélogramme de centre  $I$  milieu de  $[MK]$ .

2. On abaisse les perpendiculaires à  $(MK)$  issues de  $N$  et  $G$ , qui coupent  $[MK]$  en  $L$  et  $H$ , respectivement. Démontrer que  $NL = HG$ .
3. Démontrer que le symétrique de  $A$  par rapport à  $K$  et le symétrique de  $C$  par rapport à  $G$  sont confondus en un point  $B'$ .

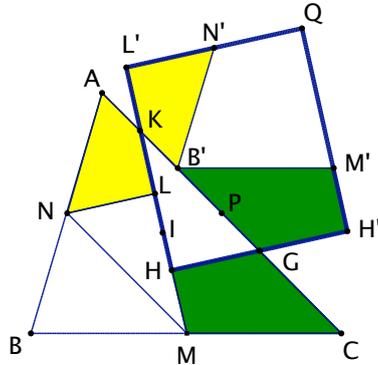


figure 33

4. Construire le polygone  $KL'N'B'$  symétrique du polygone  $KLNA$  par rapport à  $K$ , et le polygone  $GH'M'B'$  symétrique du polygone  $GHMC$  par rapport à  $G$ . Soit  $Q$  l'intersection de  $(L'N')$  avec  $(M'H')$ . Démontrer que  $L'HH'Q$  est un rectangle dont le côté  $L'H$  est égal à  $MK$ .
5. Démontrer que le polygone  $N'B'M'Q$  est l'image du polygone  $NBML$  par une translation de vecteur  $\overrightarrow{BB'}$ . En déduire que le rectangle  $L'HH'Q$  est constitué des mêmes polygones que le triangle  $ABC$ .

On peut ainsi, en trois coups de ciseaux, découper un triangle quelconque en quatre morceaux qui, réarrangés donnent un rectangle. Concluons cette partie en signalant que cet agencement donne du même coup un pavage alternant triangles et rectangles en général, ou triangles équilatéraux et carrés en particulier (figure 34).

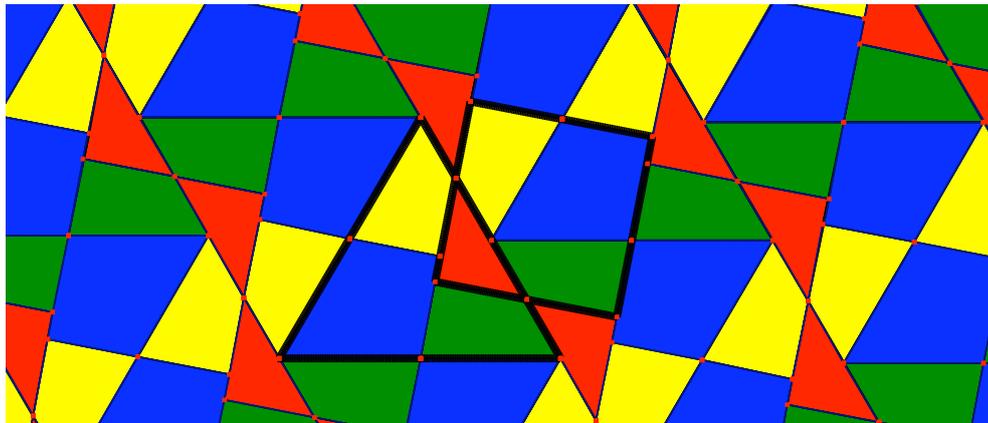


figure 34

On aura remarqué que dans les méthodes de décomposition pour réaliser l'équidécomposabilité, les transformations élémentaires jouent un rôle déterminant, particulièrement les translations et les symétrie centrales. Les mathématiciens suisses H. HADWIGER et P. GLUR se sont ainsi posé la question de la possibilité d'une équidécomposabilité de deux figures planes en imposant la condition supplémentaire que les composants se correspondent tous, deux à deux, par translation. Ils introduisent ainsi la notion d'équidécomposabilité translative.

#### 4. Équidécomposabilité translative

L'équidécomposabilité translative est nettement plus contraignante que l'équidécomposabilité simple, en ce qu'elle doit également prendre en compte la position relative des polygones considérés dans le plan. HADWIGER et GLUR ([6]) commencent par démontrer

l'équidécomposabilité translative d'un rectangle et d'un parallélogramme de même base, situés entre les mêmes parallèles. Celle-ci peut être très simple (figure 35) ou plus compliquée (figure 37), selon que la projection orthogonale des côtés obliques sur l'une ou l'autre base tombe à l'intérieur ou à l'extérieur de cette base. Dans ce second cas, on « redressera » de proche en proche le parallélogramme selon le principe de la figure 36.

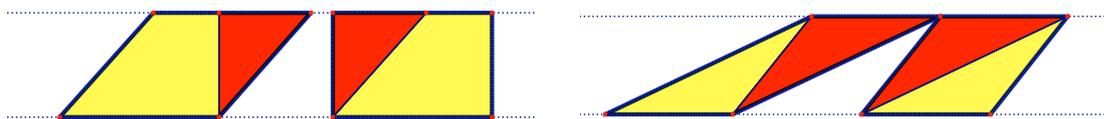


figure 35

figure 36

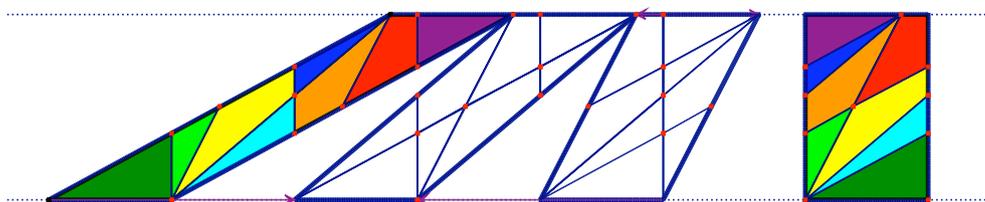


figure 37

Décomposition qui peut finalement se simplifier en regroupant les polygones identiques et contigus (figure 38); ce qui donne une autre idée de décomposition, plus simple, et consistant à découper des tranches parallèles de la largeur du rectangle, ce qui reprend un peu l'idée de la figure 3.

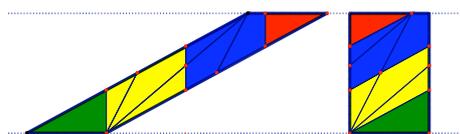


figure 38

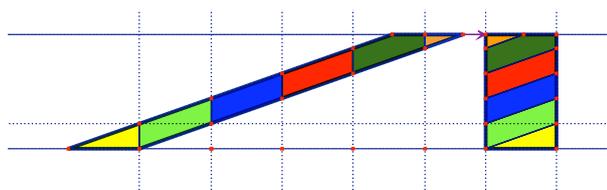


figure 39

Puis est étudiée l'équidécomposabilité translative de deux rectangles équivalents quelconques  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}'$ . Le principe consiste à utiliser la transitivité en construisant :

1. les parallélogrammes équivalents  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{P}'$ , compris entre les mêmes bases que les rectangles,
2. une direction<sup>6</sup> sur laquelle les bases des rectangles  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}'$  se projettent selon des segments de même longueur, et sur lesquels on construira des rectangles égaux  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}'_1$  et, bien sûr, équivalents à  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}'$  (figure 40). Il suffit alors d'appliquer les équivalences  $\mathbf{R} \approx \mathbf{P} \approx \mathbf{R}_1 \approx \mathbf{R}'_1 \approx \mathbf{P}' \approx \mathbf{R}'$ , de les traduire en décompositions géométriques que l'on superpose au fur et à mesure (figures 41 et 42).

<sup>6</sup>On peut démontrer qu'une telle direction existe toujours, par exemple en utilisant le produit scalaire, et elle se construit simplement à la règle et au compas.

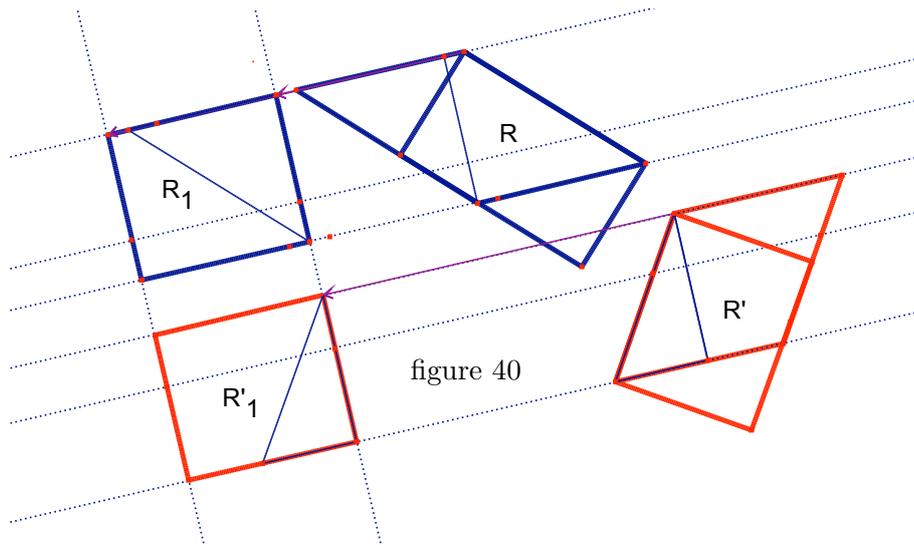


figure 40

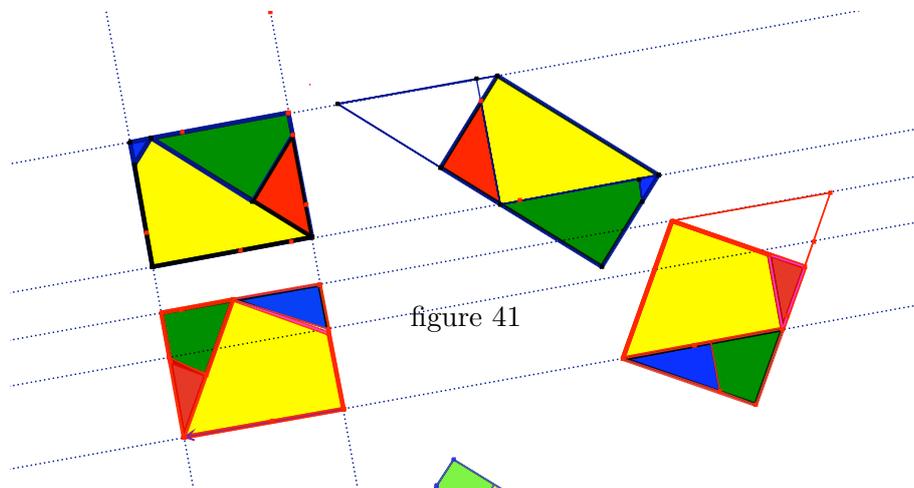


figure 41

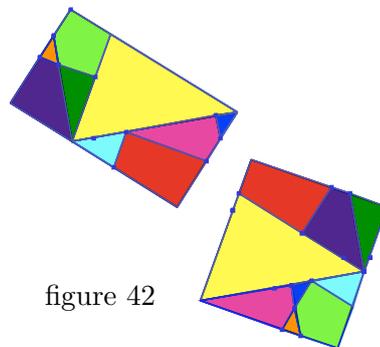


figure 42

Pourquoi deux rectangles quelconques équivalents sont-ils translativement équidécomposables, alors qu'on essaierait en vain une telle décomposition sur deux triangles quelconques, équivalents mais non isométriques ? Pour répondre à cette question, HADWIGER et GLUR introduisent une fonction  $L$  dépendant à la fois des directions et des longueurs des côtés des polygones considérés. Plus précisément, pour chaque côté, considérons le couple formé par sa longueur et l'angle qu'il fait avec une direction fixe. Les côtés sont orientés de telle façon que le périmètre soit parcouru en gardant l'intérieur du polygone à sa gauche. Leur angle est mesuré de  $0^\circ$  à  $360^\circ$ , dans le sens trigonométrique. Pour une direction  $\alpha$ , soit  $S_\alpha(A)$  la somme des longueurs des côtés du polygone  $A$  correspondant à l'angle  $\alpha$  et  $L_\alpha(A) = S_\alpha(A) - S_{\alpha+\pi}(A)$ . Il est clair que cette fonction est nulle pour un rectangle. Mais le théorème important, démontré dans l'article ([6]) de HADWIGER et GLUR est le suivant :

**Théorème.** Deux polygones équivalents  $A$  et  $B$  sont translativement équidécomposables si et seulement si pour tout  $\alpha$  tel que  $0 \leq \alpha < 2\pi$  on a  $L_\alpha(A) = L_\alpha(B)$ .

Des exemples sont évidemment donnés par des carrés isométriques (figure 43) ou par des polygones formés chacun de couples de côtés égaux et parallèles (figure 44, voir [2] p. 133).

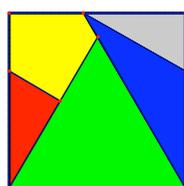


figure 43

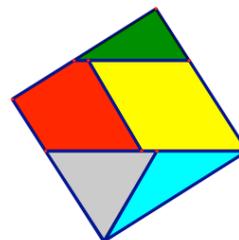
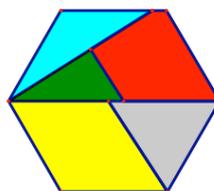
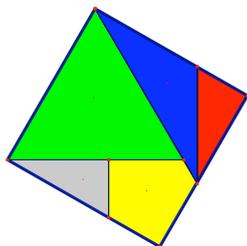


figure 44

HADWIGER et GLUR donnent sans explication, ni mesures de côtés, l'exemple de deux trapèzes. Nous avons cherché à les construire de sorte que les longueurs des côtés des trapèzes et des polygones intervenant dans la décomposition soient entières. La figure 45 montre le résultat que nous avons obtenu.

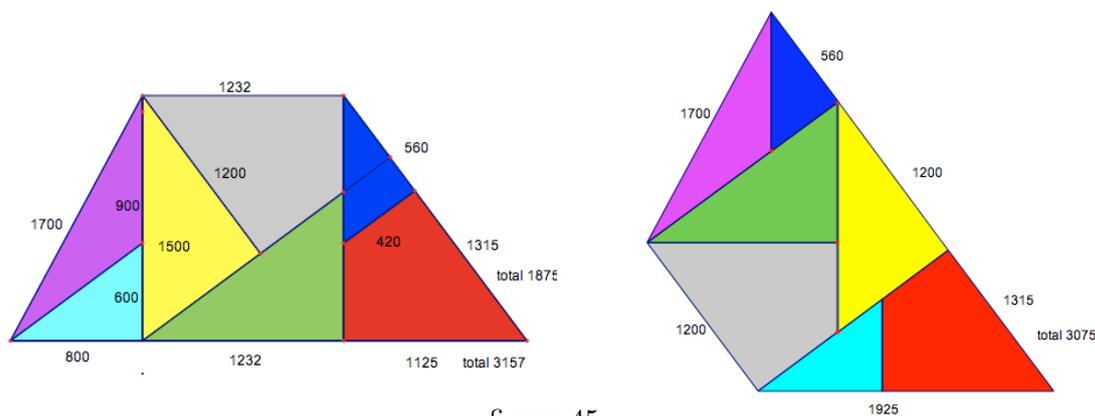


figure 45

On aura pu le constater amplement : il y a là, à la fois, des possibilités d'activités géométriques à divers niveaux du collège et du lycée, mais aussi des domaines encore ouverts à diverses investigations, dans l'espace, pour des géométries non euclidiennes, sur la sphère, etc.

## 5. Le 3<sup>e</sup> problème de Hilbert

L'équidécomposabilité des polyèdres dans l'espace a fait l'objet du troisième des 23 problèmes que HILBERT a posés lors du second Congrès International des Mathématiciens à Paris, en 1900 (c'est à dire un an après la publication des Fondements de la géométrie) sous le titre : *De l'égalité en volume de deux tétraèdres de bases et de hauteurs égales* et qu'il présente ainsi <sup>7</sup> :

*Dans deux lettres adressées à GERLING, GAUSS exprime le regret que certains théorèmes de Stéréométrie dépendent de la méthode d'exhaustion ou, comme*

<sup>7</sup>HILBERT, *Sur les problèmes futurs des mathématiques*, in *Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens, Procès verbaux et communications* publiés par E. DUPOCQ, traduction de M. L. LAUGEL, Gauthier Villars, 1902.

on dirait aujourd'hui, de l'axiome de continuité (ou de l'axiome d'Archimède). GAUSS cite en particulier ce théorème d'EUCLIDE, que deux pyramides triangulaires de même hauteur sont entre elles comme leurs bases. Le problème analogue relatif au plan est aujourd'hui complètement résolu. GERLING réussit à démontrer l'égalité des volumes de polyèdres symétriques en les décomposant en parties congruentes; mais la démonstration, par ce moyen, du théorème précité d'EUCLIDE dans le cas général, ne me paraît guère possible. Il s'agirait donc d'une démonstration rigoureuse de l'impossibilité du problème. On serait immédiatement en possession d'une telle démonstration du moment que l'on pourrait assigner deux tétraèdres de bases et de hauteurs égales qu'il serait impossible de décomposer en tétraèdres congruents (équidécomposabilité), et qui ne pourraient non plus, par l'addition de tétraèdres congruents, être transformés en polyèdres, eux-mêmes décomposables en tétraèdres congruents (équicomplémentables).

De fait, avant même la tenue du congrès, l'assistant de HILBERT, Max DEHN (1878 – 1952) avait résolu le problème en démontrant qu'il existe deux polyèdres de même volume, non équidécomposables. Pour ce faire, il introduit un invariant  $\mathbf{D}$  (qui est resté sous le nom d'invariant de Dehn) associé à un polyèdre et tel que deux polyèdres équidécomposables ont nécessairement même invariant  $\mathbf{D}$ . Ce qui lui permet alors de démontrer qu'un tétraèdre régulier et un prisme ne peuvent jamais avoir même invariant et donc ne peuvent être équidécomposables. L'invariant de Dehn et sa démonstration sont assez compliqués, mais des simplifications ultérieures, en particulier par HADWIGER permettent d'en donner une idée.

Nous dirons qu'un ensemble fini donné  $\mathbf{M}$  de nombres réels  $x_1, x_2, \dots, x_k$  est linéairement dépendant, s'il existe des entiers relatifs  $n_1, n_2, \dots, n_k$  tels que

$$(1) \quad n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_kx_k = 0 .$$

Une fonction réelle  $f$  définie sur  $\mathbf{M}$  sera dite additive, si pour toute relation du type (1) entre des éléments de  $\mathbf{M}$  la même relation de dépendance est vérifiée pour les réels images, c'est-à-dire

$$(2) \quad n_1f(x_1) + n_2f(x_2) + \dots + n_kf(x_k) = 0 .$$

Soit alors  $\mathbf{A}$  un polyèdre,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  les angles dièdres de  $\mathbf{A}$ ,  $l_1, l_2, \dots, l_p$  les longueurs des arêtes correspondantes, alors la somme

$$l_1f(\alpha_1) + l_2f(\alpha_2) + \dots + l_pf(\alpha_p) = f(\mathbf{A})$$

est appelée invariant de Dehn du polyèdre  $\mathbf{A}$ , et l'on a le théorème

**Théorème.** Soient deux polyèdres  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  ayant pour angles dièdres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$  et  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$  respectivement; et soit  $\mathbf{M}$  un ensemble de réels contenant

$$\pi, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q .$$

S'il existe une fonction additive  $f$ , définie sur  $\mathbf{M}$ , telle que  $f(\pi) = 0$  et  $f(\mathbf{A}) \neq f(\mathbf{B})$ , alors les polyèdres  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  ne sont pas équidécomposables (ni équicomplémentables).

En particulier, un cube  $\mathbf{A}$  et un tétraèdre régulier  $\mathbf{B}$  de même volume ne sont pas équidécomposables. Se basant sur le fait que l'angle dièdre entre deux faces adjacentes d'un tétraèdre régulier vaut  $\phi = \text{Arc cos}(1/3)$ , et que celui entre deux faces adjacentes du cube vaut  $\pi/2$ , l'ensemble  $\mathbf{M}$  correspondant peut se réduire à  $\mathbf{M} = \{\pi, \pi/2, \phi\}$ . Soit alors  $f$  la fonction réelle définie sur  $\mathbf{M}$  par

$$f(\pi) = 0 ; f(\pi/2) = 0 ; f(\phi) = 1 .$$

Cette fonction est additive. En effet toute relation de la forme

$$n_1\pi + n_2\pi/2 + n_3\phi = 0$$

entraîne  $n_3 = 0$  car le réel  $\frac{\phi}{\pi} = \frac{1}{\pi} \text{Arc cos} \left( \frac{1}{3} \right)$  est irrationnel (voir [1], p. 102), et donc aussi

$$n_1f(\pi) + n_2f(\pi/2) + n_3f(\phi) = 0 .$$

Les invariants de Dehn correspondants sont alors  $f(\mathbf{A}) = 12a.f(\pi/2) = 0$  (où  $a$  est l'arête du cube), et  $f(\mathbf{B}) = 6b.f(\phi) = 6b \neq 0$  (où  $b$  est l'arête du tétraèdre). En conséquence du théorème, le cube et le tétraèdre régulier ne sont pas équidécomposables car ils n'ont pas le même invariant de Dehn.

Un pas supplémentaire est fait en 1965 par J.-P SYDLER qui montre que la condition nécessaire pour que deux polyèdres de même volume soient équidécomposables, à savoir l'égalité de leurs invariants de Dehn, est aussi suffisante.

On peut constater par ce bref exemple que les situations dans l'espace deviennent rapidement plus difficiles à explorer que celles du plan et qu'elles restent d'actualité. Ceux qui souhaitent les étudier plus en détail peuvent se reporter à la bibliographie, en particulier les références [1], [2], [3], [7] et [10].

## Bibliographie

- [1] V. BOLTJANSKII (1978), HILBERT's Third Problem, *John Wiley & Sons, New York*.
- [2] E. FOURREY (1920), Curiosités géométriques, *Vuibert, Paris*.
- [3] G. FREDERICKSON (1997), Dissections : Plane and Fancy, *Cambridge University Press*.
- [4] P. GERWIEN (1833), *Zerschneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke*, J. Reine Angew. Math. **10**, 228–234.
- [5] P. GERWIEN (1833), *Zerschneidung jeder beliebigen Menge verschieden gestalteter Figuren von gleichem Inhalt auf der Kugeloberfläche in dieselben Stücke*, J. Reine Angew. Math. **10**, 235–240.
- [6] H. HADWIGER & P. GLUR (1951), *Zerlegungsgleichheit ebener Polygone*, Elemente der Math. **6**, 97–106.
- [7] H. HADWIGER (1957), Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie, *Springer-Verlag*.
- [8] D. HILBERT, Les fondements de la géométrie, *Édition critique préparée par Paul Rossier. Ouvrage publié avec le concours du CNRS. Dunod, Paris 1971*.  
*Autre traduction, disponible en ligne, sous le titre Principes fondamentaux de la géométrie par M. D. HILBERT ; trad. par L. LAUGEL, Gauthier-Villars, Paris 1900.*
- [9] Groupe HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES (1996), Activités géométriques pour le collège et le lycée, présentées dans une perspective historique, Vol. I, *IREM de Strasbourg*.
- [10] K. VOLKERT (1999), *Die Lehre vom Flächeninhalt ebener Polygone : einige Schritte in der Mathematisierung eines anschaulichen Konzeptes*, Mathematische Semesterberichte, **46**, 1–28, *Springer Verlag*.

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

IREM de Strasbourg

jean-pierre.friedelmeyer@wanadoo.fr

# LAISSER CHERCHER LES ÉLÈVES ? LES FAIRE TRAVAILLER EN PETITS GROUPES ?

Aline ROBERT

**Résumé :** Dans cet article on discute d'un certain nombre d'avantages et d'inconvénients éventuels du travail autonome des élèves en classe de mathématiques et particulièrement de la modalité « travail en petits groupes ». On dégage différentes variables, celles qui laissent peu de marges de manœuvre aux enseignants et celles qui leur permettent au contraire des choix. On présente des exemples d'exercices où les analyses des connaissances à utiliser pour résoudre l'exercice peuvent a priori faire pencher vers l'organisation d'un travail des élèves en autonomie. Diverses modalités de ce type de travail sont aussi discutées. Quoi qu'il en soit, l'expérience en classe reste indispensable, préparée par un travail sur les énoncés et accompagnée d'une gestion exigeante.

**Mots-clés :** Travail en groupe - Travail autonome - Analyse de tâche - Marge de manœuvre de l'enseignant.

## Introduction

Lorsque des jeunes enseignants de mathématiques en formation en deuxième année d'IUFM cherchent de la bibliographie sur ces questions, par exemple pour leur écrit professionnel, ils trouvent surtout des références pédagogiques générales<sup>1</sup> : en effet les didacticiens qui pourtant rencontrent beaucoup ces questions et les discutent ne centrent pas souvent leurs travaux dessus. Leurs recherches portent plutôt sur des contenus précis, l'enseignement des décimaux ou l'algèbre élémentaire par exemple, qui en constituent souvent les mots clefs, au détriment de mots clefs relatifs aux modalités de travail des élèves.

Dans cet article je vais essayer de partir « à l'envers » de ce questionnement pédagogique. La première réponse que j'aurais envie d'apporter à partir des travaux de didactique serait : ça dépend ! En précisant tout de suite après : dans certaines conditions, laisser chercher les élèves, notamment en petits groupes, peut contribuer à leurs apprentissages. Je vais ainsi aborder le problème en dégageant un certain nombre de variables permettant de préciser des types de réponses à partir d'exemples empruntés au champ des mathématiques. Je commencerai par éliminer les variables qui ne laissent aucun choix aux enseignants, puis je développerai les autres, celles qui correspondent à des marges de manœuvre réelles des enseignants. Je conclurai sur l'importance de l'expérience « en vrai » pour confirmer toute hypothèse vu la nécessité, voire l'obligation, de s'adapter aux exigences d'une réalité toujours changeante et j'insisterai sur le travail correspondant de l'enseignant.

Trois dimensions interviennent dans les variables prises en compte dans les travaux didactiques :

- compréhension des contenus, en relation avec l'émergence des notions et leur constitution en réseaux de concepts et avec leur évolution dans les programmes scolaires ;

---

<sup>1</sup>Par exemple les travaux de MEIRIEU sur le travail en groupes, qui ne fait pas intervenir les contenus mathématiques et leurs spécificités.

- compréhension des élèves, en relation avec leur situation scolaire et avec des théories de l'apprentissage spécifiées aux mathématiques ;
- compréhension des enseignants, en relation avec leurs pratiques et les habitudes de la profession.

Je vais reprendre ces trois dimensions en les imbriquant au fur et à mesure du propos. Mais avant de débrouiller ces variables et leur imbrication, je voudrais aborder la différence éventuelle entre les deux termes posés dans le titre.

## 1. Laisser chercher les élèves en classe et/ou les faire travailler en petits groupes ?

Le travail en petits groupes est une modalité du travail autonome, c'est une manière particulière de laisser chercher les élèves.

Différentes théories générales de l'apprentissage<sup>2</sup> permettent de faire des hypothèses sur les effets positifs, sur les acquisitions éventuelles des élèves, des moments de recherches qui leur sont laissés, moyennant des conditions sur lesquelles nous reviendrons largement. Sont en cause plusieurs facteurs, à la fois l'autonomie du travail correspondant et, s'il y a travail en petits groupes, les interactions entre élèves, qui accompagnent le travail en petits groupes.

D'une part, il semble favorable aux apprentissages<sup>3</sup> de laisser des moments où les élèves travaillent « sans » l'enseignant<sup>4</sup>, se posent des questions, ou encore font des essais, des erreurs et les rectifient en partie eux-mêmes : on dit que cela contribue à la construction de leurs propres connaissances. L'enseignant a posé les problèmes sur lesquels ils travaillent, il peut répondre à des questions, par exemple en relançant les élèves, mais il n'organise pas leur travail. Cela peut se passer en laissant chercher les élèves individuellement, ou en tolérant des échanges, non organisés, entre voisins. Soulignons que ce n'est pas réservé aux connaissances nouvelles à introduire aux élèves : nous pensons en effet que les apprentissages sont longs, lents, différents selon les élèves, avec des arrêts et des reprises, des allers-retours, des prises de conscience. Toutes les occasions de mises en fonctionnement variées des connaissances sont utiles : c'est une dynamique longue entre le (texte du) savoir et ses applications qui doit se mettre en place. Nous nous plaçons ainsi dans une perspective conceptuelle, où les apprentissages ne s'arrêtent pas à des acquisitions de techniques et adoptons la formule de G. VERGNAUD qui cite les problèmes comme « sources et critères du savoir ».

D'autre part, il semble aussi favorable de laisser des moments où les élèves discutent des mathématiques sur lesquelles ils sont en train de travailler (seuls), débattent, partagent des propositions, formulent des arguments pour convaincre les autres élèves<sup>5</sup> : c'est ce que le travail en petits groupes peut ajouter au travail autonome, s'appuyant sur les bénéfices éventuels des échanges et interactions entre pairs. On peut aussi souligner que le travail autonome peut quelquefois gagner à être organisé en petits groupes, notamment s'il s'agit de problèmes longs et/ou difficiles : cela peut favoriser l'émergence de plusieurs pistes et faire avancer la recherche, évitant le découragement devant la difficulté partagée ; cela peut ainsi participer à une certaine motivation des élèves.

<sup>2</sup>Quelques éléments basiques de ces théories sont donnés dans les références suivantes : LATTUATI et al. (1999), VERGNAUD (2002), PARIÈS et DE HOSSON (2008).

<sup>3</sup>On s'inspire ici des travaux de PIAGET.

<sup>4</sup>C'est ce qu'indique notamment le mot « adidactique » utilisé par BROUSSEAU.

<sup>5</sup>On trouve l'intérêt de cette dimension des apprentissages et chez PIAGET et chez VYGOTSKI.

Cependant, des conditions sont requises pour espérer des effets positifs de tels dispositifs sur les apprentissages ultérieurs des élèves – effets positifs qui ne sont jamais garantis au demeurant. On a déjà évoqué le rôle de l’enseignant, avant le travail pour le choisir, et pendant le travail pour l’enrôlement des élèves<sup>6</sup>. Il est aussi important que le temps laissé aux élèves soit suffisamment long pour qu’ils s’investissent dans le problème qui leur est proposé, et qu’ils n’attendent pas tranquillement que « ça se passe » et que l’enseignant corrige... Il est non moins important que l’enseignant intervienne à la suite du travail des élèves, en petits groupes ou non. Cela permet de fixer les connaissances à retenir, ce que les élèves ne peuvent pas faire seuls. Cela amène aussi, le cas échéant, à donner des éclaircissements sur des connaissances proches de celles qui sont déjà acquises par les élèves, en s’appuyant sur le travail qui a été fait et non terminé. Ainsi est-il possible que des corrections d’exercice qui interviennent après une recherche infructueuse mais effective, différente selon les élèves, contribuent à des avancées de connaissances, suffisamment proches de ce qui a été travaillé<sup>7</sup>. Le levier du collectif est alors activé.

Enfin, plus généralement et pour les mêmes raisons, il est intéressant que l’enseignant arrive à repérer l’état des connaissances des élèves, en interprétant ce qu’ils disent (et font) : ceci peut être facilité par un travail en petits groupes pendant une recherche d’exercices en classe parce que les élèves parlent (en général) et que l’enseignant peut entendre. Il y a là un bénéfice indirect sur les apprentissages qui doit être souligné : puisque l’enseignant peut mieux adapter ses propos s’il colle davantage à ce qui est dans la tête d’un maximum d’élèves, y compris pour les échanges avec chaque petit groupe.

Dans la suite, nous ne préciserons pas, sauf exception, si nous parlons de l’une ou l’autre de ces deux modalités : ce qui précède doit être considéré comme un facteur commun à placer avant chaque proposition. Revenons maintenant à nos variables.

## 2. Des variables qui laissent peu de marges de manœuvre

Le premier élément tient aux personnalités en présence. Certains enseignants n’aiment pas laisser leurs élèves chercher un certain temps en classe, encore moins travailler en petits groupes car ils ne pensent pas que ce type de travail apporte de bons résultats. Plusieurs arguments sont avancés, dont beaucoup sont liés au manque de temps avec les élèves, compte tenu de l’ampleur des programmes et de la diminution<sup>8</sup> des horaires.

Pour les uns, ce type de travail, en autonomie, prend trop de temps, et, ajoute-t-on souvent, pour trop peu d’efficacité « tangible », au niveau des notes par exemple. On pourrait se dire qu’on ne va laisser les élèves chercher en classe que de temps en temps, pour ne pas « perdre » trop de temps – cependant il est important d’habituer les élèves au contrat correspondant, de les convaincre du fait que l’enseignant attend vraiment qu’ils se mettent à chercher. Cela demande une certaine régularité, et les enseignants le savent. Par ailleurs l’évaluation des effets positifs d’une expérience aussi limitée, quoiqu’il en soit, est hasardeuse. Quelquefois ce peut être au niveau du décrochage scolaire que cela joue et pas au niveau des notes..

De plus, disent certains enseignants, en classe il faut faire profiter les élèves de la présence

---

<sup>6</sup>Nous ne discuterons pas ici de la constitution même des petits groupes – il n’y a pas d’éléments déterminants dans nos expériences à ce sujet, si ce n’est à expliciter le mode de travail. La mise en place de groupes de tables permettant un repérage géographique des petits groupes semble faciliter la prise de conscience d’un tel contrat.

<sup>7</sup>On s’inspire ici des travaux de VYGOTSKI, lorsqu’il évoque la Zone Proximale de Développement.

<sup>8</sup>Cependant les réticences au travail en petits groupes ne datent pas d’hier !

de l'enseignant, il leur est toujours possible de travailler chez eux en autonomie. Souvent il est ajouté que, dans la mesure où les élèves ne travaillent pas beaucoup chez eux et n'apprennent pas leur cours, il ne sert à rien de les laisser chercher en classe, rien ne peut en « sortir ».

De plus, pour d'autres collègues, le travail en petits groupes peut amener du bruit, voire du chahut et perturber la classe. Les descriptions des pratiques des enseignants dans des classes très difficiles témoignent de cet obstacle, qui conduit même certains enseignants à des pédagogies très différenciées (PELTIER, 2004). Par ailleurs les élèves s'y investissent inégalement, il peut y avoir des leaders, et cela arrête aussi certains collègues, qui peuvent tout de même choisir de laisser chercher les élèves mais individuellement. Enfin, dans tous les cas, il est difficile de savoir quand arrêter les élèves, qui ne vont pas tous au même rythme; de plus la reprise en main de la classe après une phase de travail autonome ou surtout en petits groupes est difficile.

Ces conceptions personnelles, qui se forment souvent lors des premières expériences, sont très importantes et très stables. Il n'y a qu'à observer le tableau d'un enseignant dans n'importe laquelle de ses classes pour constater cette stabilité (ROBERT et VANDEBROUCK, 2003). A titre d'anecdote significative, je citerai cet exemple d'un enseignant qui, lors d'une formation continue<sup>9</sup>, s'était résolu, un peu à son corps défendant, à faire travailler ses élèves de première S en petits groupes – il s'agissait de chercher un problème (voir annexe exercice 3) qui avait été mis au point pendant la formation pour être travaillé ainsi. En fait la difficulté et l'enjeu étaient d'utiliser le nombre dérivé comme coefficient directeur de tangente à une courbe mais en travaillant sur des tangentes dont on ne connaissait pas le point de contact avec la courbe. Pour cela on demandait de trouver des tangentes communes à deux courbes données (du deuxième degré). Ainsi fallait-il réfléchir à l'écriture des équations de ces tangentes en introduisant des inconnues « inhabituelles ». Il s'agissait d'adapter la connaissance sur la dérivée en mettant en œuvre des modalités d'application particulières, puis de reconnaître qu'on avait obtenu un système et de le résoudre, ce qui nécessitait un changement de cadre de travail. A la séance de formation consacrée à la restitution de l'expérience, cet enseignant avait expliqué qu'il avait été très étonné du résultat, tout s'était très bien passé malgré ses appréhensions, les élèves avaient été ravis. Mais ... il ne recommencerait pas, cela lui demandait trop d'efforts.

D'autres contraintes peuvent minorer la possibilité d'installer des moments où on laisse chercher les élèves, en petits groupes ou non. Ainsi interviennent les habitudes de l'établissement scolaire concerné, des autres collègues, voire l'opinion des inspecteurs. Dans un établissement où personne ne laisse chercher les élèves par exemple, il est difficile d'introduire une telle forme de travail. Les collègues peuvent protester car ça fait du bruit, les parents peuvent protester car le cours peut sembler aller plus lentement, les élèves peuvent protester car c'est plus fatigant – même si le travail en petits groupes apparaît souvent plus motivant. Si c'est une classe à examen, ou si des contrôles communs sont organisés, il peut s'avérer délicat de passer plus de temps que les autres sur un chapitre.

De plus le travail des élèves et le bénéfice éventuel en terme d'apprentissages dépend aussi de facteurs en amont de la classe, liés aux postures des élèves et aux malentendus éventuels (BAUTIER & ROCHEX, 1998, BONNERY, 2007). Autrement dit le même exercice cherché de la même façon peut engendrer des choses différentes et pas toujours au bénéfice des élèves les plus faibles! Si on laisse chercher les élèves sur des bases erronées, on peut ne provoquer aucune activité, voire augmenter encore le découragement de certains... Ainsi l'hétérogénéité de certaines classes, qui ne dépend pas de l'enseignant, peut l'empêcher de

<sup>9</sup>Ce travail figure dans le cahier de Didirem n° 41, par le groupe de Toulouse.

choisir ce type de travail, y compris pour ne pas accentuer certaines différences. Dans son travail sur l'apprentissage des triangles semblables en seconde, J HOROKS a montré que le bénéfice du travail en petits groupes sur des exercices complexes peut être inégal et ne pas « atteindre », ou moins, les élèves qui ont le plus besoin de l'enseignant : il est en retrait, au moins une partie du temps, dans cette forme de travail.

Finalement je n'essaierai pas de discuter ce qui précède ni d'apporter beaucoup d'arguments autres que ceux, théoriques, qui sont esquissés dans le paragraphe 1. En effet les restrictions et difficultés signalées par les enseignants réticents ne peuvent être niées, notamment sur le temps. Certes il existe en didactique des expériences faisant intervenir des phases de travail autonome des élèves et du travail en petits groupes, avec une réflexion théorique consistante à l'appui ; mais les évaluations (positives) en sont toujours limitées, relatives à une ou quelques classes, à des enseignants favorables, et surtout c'est l'ensemble du dispositif qui est évalué, et pas seulement cette modalité particulière (ROBERT, 2003). Cela ne peut donc pas faire changer d'avis un enseignant qui a des réticences vis-à-vis de ces formes de travail. Mais cela pourrait peut-être conduire à mettre en place un travail collectif entre enseignants – et encore (ROBERT, 2005) !

Revenons à un enseignant qui estime qu'il peut laisser chercher ses élèves ; il lui reste un certain nombre de choix particuliers à faire, que nous allons développer maintenant.

### 3. Des variables qui laissent une marge de manœuvre

Il y a deux types de variables qui, de surcroît, sont imbriquées sur lesquelles l'enseignant peut avoir des choix décisifs : les exercices et le déroulement des séances. Tel déroulement s'adapte bien à tel type d'exercices (et réciproquement, tel type d'exercices se conçoit bien si on laisse travailler les élèves) : par exemple on n'a pas très envie de faire travailler les élèves en groupes sur des exercices d'application immédiate du cours, même s'il peut y avoir des exceptions, pour donner confiance à certains élèves par exemple ; en revanche un travail introductif sur une notion organisé avant l'exposition des connaissances, pourra gagner à être abordé collectivement ; par exemple, on prévoit de ne pas faire faire la même chose aux différents groupes et on les amène à confronter leurs productions .

Qui plus est, il y a lieu de réfléchir globalement au travail à proposer aux élèves pour y intégrer les exercices sur lesquels on va les laisser chercher, en précisant les modalités de ce travail. Cependant nous allons d'abord présenter séparément les deux types de variables, pour revenir ensuite sur leur imbrication.

#### 3.1. Sur quels contenus laisser chercher les élèves ?

Il y a là une source importante de « variables » tenant aux notions à enseigner en relation avec l'organisation du travail des élèves et, à terme, en relation avec leurs apprentissages.

##### a) Du travail autonome sur les introductions de notion

L'introduction des notions à enseigner peut, a priori, « gagner » ou non à être travaillée grâce à un problème, selon la distance de ces notions avec les connaissances des élèves (*cf.* programmes) et selon le statut de ces notions.

On peut toujours choisir entre des expositions linéaires qui vont des définitions aux théorèmes et aux applications, des expositions problématiques précédées d'activités don-

nant sens (même partiellement) à ce qui est enseigné<sup>10</sup> ou des expositions chronologiques rapportant les phénomènes à leurs émergences... Suivant le vocabulaire introduit par Régine DOUADY, c'est du *caractère outil* d'une notion dont on parlera lorsqu'elle sert à résoudre un exercice et du *caractère objet* lorsqu'elle intervient dans l'exposition de la définition de la notion et des théorèmes correspondants.

L'idée force est que, dans certains cas favorables, un travail autonome des élèves peut précéder utilement l'introduction de la notion par l'enseignant, mais à condition de faire travailler les élèves sur un problème adéquat. Il s'agit de confronter les élèves avec un problème soigneusement élaboré pour leur permettre de donner du sens à ce qui va être introduit. On suppose que le fait de chercher ce problème, d'essayer de mettre en relation la question à résoudre et un outil de résolution (qui correspond à la connaissance visée), de commencer à mettre en œuvre cet outil, sont autant d'activités qui peuvent, même si elles ne sont qu'esquissées, favoriser les apprentissages ultérieurs de la notion. Qui dit problème d'introduction ne dit pas nécessairement travail de recherche des élèves. Cependant on dispose pour un certain nombre de notions de problèmes d'introduction appropriés à être cherchés par les élèves et même cherchés pendant un certain temps, voire en petits groupes (*cf.* paragraphe 1).

Emblématique à ce sujet est le problème du puzzle de BROUSSEAU (2005) pour faire entrer les élèves dans une démarche multiplicative : le puzzle dont on leur demande l'agrandissement est choisi de telle façon que si les élèves choisissent la démarche additive ils ne peuvent pas recoller les morceaux du puzzle agrandi. Cela demande à l'enseignant de réfléchir aux dimensions, au nombre de pièces et au coefficient multiplicateur retenu. Cela demande aussi de gérer la classe de manière appropriée, nous y reviendrons.

Un autre exemple d'introduction à la propriété multiplicative des racines carrées se trouve dans le travail de E. RODITI (1996) sur la racine carrée en troisième : la racine carrée est travaillée comme coefficient d'agrandissement d'une figure (côté d'un carré), ce qui lui confère nécessairement un statut (outil) de nombre.

Donnons un autre exemple travaillé en formation de formateurs en 2008. On veut introduire les barycentres en première S. Plusieurs choix peuvent être tentés :

- Introduire le barycentre en généralisant la notion de moyenne, par exemple aux deux coordonnées, voire à partir d'un problème de physique (équilibre). Autrement dit il y a extension d'une notion unidimensionnelle déjà connue. Cela n'a pas trop de rapport avec les exercices ultérieurs.
- Introduire le barycentre en faisant démontrer l'existence et l'unicité du point G tel que ... : autrement dit on introduit le barycentre comme objet réponse à un problème posé par le professeur, par exemple pour généraliser des constructions particulières déjà faites. Cela permet de faire travailler la définition vectorielle, utilisée par la suite.
- Introduire le barycentre par une propriété « outil » : par exemple on demande d'abord de trouver l'ensemble des points  $M$  tels que  $\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = 2$ . Un travail des élèves peut les amener, au moins certains, à se rendre compte de l'intérêt de remplacer la somme des vecteurs par un seul vecteur faisant intervenir le milieu (isobarycentre). On élargit ensuite en introduisant des coefficients devant les vecteurs et en s'intéressant à l'ensemble des points  $M$  tels que  $\|\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = 2$ . Dans ce cas on a introduit le barycentre comme outil, réponse au problème intermédiaire suivant : simplifier une somme vectorielle en la transformant en un seul vecteur.

Il y a d'autres notions qu'il est beaucoup plus difficile de faire intervenir comme outil dans

<sup>10</sup>Il y a un certain nombre d'ingénieries didactiques présentant de tels problèmes.

un problème. Parce qu'elles généralisent avec un nouveau formalisme ce qui a déjà été vu, elles unifient des notions antérieures qu'on ne peut pas reconnaître ni transposer à cause du nouveau formalisme qu'on doit donc apprendre à utiliser. Les « règles » antérieures peuvent être en partie changées. L'algèbre élémentaire en est un exemple au collège (*cf.* GRUGEON, 2000). Dans un tel cas, si on laisse travailler les élèves sur un problème, il faut bien mesurer les prérequis sur lesquels on s'appuie et ce que ce problème permet d'introduire.

Enfin un tel travail est long à faire en classe et il n'est pas sûr qu'il soit possible de l'organiser pour toutes les notions nouvelles d'un programme donné, même en se restreignant à celles qui sont susceptibles d'être introduites par un problème contribuant à leur donner du sens<sup>11</sup>. Il peut donc y avoir des choix à faire.

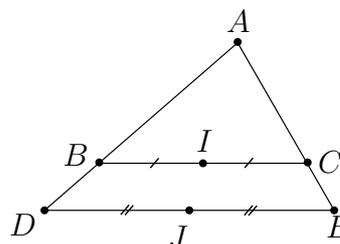
La classification des types de notions que nous utilisons, notamment pour leurs introductions, résulte du croisement entre des analyses épistémologiques révélant la manière dont les notions ont émergé dans l'Histoire, et des analyses des programmes scolaires. Cette réflexion sur chaque notion amène à préciser sa fonction actuelle en mathématiques, les différentes manières de l'utiliser compte tenu des programmes, et à élaborer, le cas échéant, un problème d'introduction<sup>12</sup>.

### b) Du travail autonome sur les mises en fonctionnement des connaissances

Une autre occasion de laisser travailler les élèves en classe (en petits groupes ou non) est fournie par les exercices non immédiats, les problèmes (plus longs) et les problèmes transversaux. Il s'agit de faire avancer les élèves vers une meilleure utilisation de leurs connaissances<sup>13</sup> en leur proposant de travailler sur des énoncés variés. Semblent particulièrement intéressants des énoncés qui ne sont pas entièrement découpés en petites questions ou ont des questions ouvertes, sur lesquelles il reste à faire une conjecture par exemple, que ce soit sur le résultat à démontrer ou sur la méthode à employer. Les problèmes transversaux par exemple donnent l'occasion aux élèves d'utiliser des connaissances inattendues, non indiquées par la place du problème dans le déroulement du cours. Un tel travail peut contribuer à ce que les élèves construisent une certaine disponibilité de leurs connaissances, et réorganisent leurs connaissances nouvelles et anciennes.

Donnons un autre exemple, très classique.

On donne un triangle  $ADE$ ,  $B$  et  $C$  des points de  $[AD]$  et  $[AE]$  respectivement, tels que  $(BC)$  et  $(DE)$  soient parallèles. On appelle  $I$  et  $J$  les milieux respectifs de  $[BC]$  et  $[DE]$ . Il s'agit de démontrer que  $A$ ,  $I$  et  $J$  sont alignés.



Dès la classe de seconde il y a un choix de méthodes, utilisation du théorème de Thalès ou des vecteurs. Si on laisse travailler les élèves sur l'énoncé précédent, on peut espérer que plusieurs idées vont être proposées, essayées. Pour utiliser le théorème de Thalès, il

<sup>11</sup> Ou à celles, encore moins nombreuses, pour lesquelles un bon problème d'introduction est disponible dans la littérature.

<sup>12</sup> C'est l'objet du cahier bleu n°9 par PARIÈS & al.

<sup>13</sup> Apprendre n'est pas pris au sens de mémoriser les définitions et les propriétés mais au sens d'accéder à l'utilisation du cours (à bon escient) ; c'est vraisemblablement dans une dynamique à organiser, entre l'exposition des connaissances et le travail sur ces connaissances, que cette conceptualisation peut se mettre en place, lentement...

est commode d'introduire un intermédiaire, le point d'intersection  $J'$  de  $(AI)$  et  $[ED]$ . Selon les élèves cet intermédiaire peut être indiqué ou non, dans l'énoncé ou au cours de la recherche. On peut alors appliquer deux fois le théorème, une première fois dans les triangles  $ABI$  et  $ADJ'$ , une deuxième fois dans les triangles  $AIC$  et  $AJ'E$ . Les élèves ont ainsi à appliquer deux fois le théorème dans deux triangles à choisir, ce qui n'est pas immédiat et ne se fait pas du premier coup.

Les égalités de rapports obtenues se traitent de manière non indépendante, obligeant à mélanger un travail géométrique et un travail algébrique, sur des fractions faisant intervenir des longueurs. On utilise la transitivité de l'égalité (même si ce n'est pas explicité ainsi) pour reconnaître deux rapports intéressants égaux. Les premiers calculs des élèves peuvent ne pas utiliser les bons rapports, ou être trop longs. Ensuite, l'égalité des numérateurs implique celle des dénominateurs et cela entraîne, en revenant au début de l'exercice, que  $J'$  est (lui aussi) le milieu de  $[DE]$ , c'est donc  $J$ . Donc les points  $A, I$  et  $J$  sont alignés. Cet énoncé est ainsi l'occasion non seulement d'élaborer des étapes mais encore de les « recoller » à la fin.

Dès la seconde, on peut aussi penser à une solution vectorielle plus courte, même s'il y a des étapes :

$$\vec{AI} = \vec{AB} + \vec{BI}, \quad \vec{AJ} = \vec{AD} + \vec{DJ}.$$

Or il existe un réel  $x$  tel que  $\vec{AD} = x\vec{AB}$  et  $\vec{AE} = x\vec{AC}$ , ce qui implique  $\vec{DE} = x\vec{BC}$ , d'où  $\vec{DJ} = x\vec{BI}$  et pour finir  $\vec{AJ} = x\vec{AI}$ . Ceci assure l'alignement des points  $A, I$  et  $J$ . Si des élèves ont passé beaucoup de temps à démontrer ce résultat en utilisant le théorème de Thalès, ils peuvent être attentifs à cette démarche, beaucoup plus courte.

Même chose, à partir de la classe de première, en introduisant (par exemple) l'homothétie de centre  $A$  qui transforme  $B$  en  $D$ , donc  $C$  en  $E$ , donc le milieu  $I$  de  $[BC]$  en le milieu  $J$  de  $[DE]$ . Ceci assure l'alignement du centre  $A$  de l'homothétie, de  $I$  et de son image  $J$ .

Quoi qu'il en soit, le travail sur ce type d'énoncé, même un peu plus découpé, ne se réduit pas à remplacer les données d'un théorème par celles de l'exercice à traiter. Les élèves ont à « éprouver » leurs connaissances en les adaptant à la situation particulière – avec des choix éventuels, des étapes ou intermédiaires à introduire, des reconnaissances de modalités d'application, des mélanges de cadres de travail. Toutes ces adaptations ne se font pas instantanément, elles se dégagent petit à petit, et c'est ce cheminement qui est visé. Si les élèves sont en petits groupes, leurs échanges peuvent les aider et à trouver et à dégager (pour justifier) ce qui sert.

Nous avons joint en annexe notre manière de distinguer différentes mises en fonctionnement (plus ou moins complexes) ou adaptations de la même connaissance (théorème, formule, propriété, définition,...). Cette liste a été établie pour faire des analyses a priori des connaissances à mettre en fonctionnement par les élèves dans un énoncé précis, compte tenu du contexte scolaire.

### 3.2. Comment laisser chercher les élèves ?

Le problème de l'enseignant est maintenant le suivant : comment faire pour que ces exercices, non immédiats, engendrent des activités mathématiques elles-aussi variées qui ne se réduisent pas aux applications immédiates qui les composent ? Comment faire pour que les élèves n'attendent pas le « allez-y » du professeur qui a détaillé les étapes au tableau, y compris avec l'aide de certains élèves, et qui n'a plus besoin que de calculs bien balisés ? Comment engager les élèves dans le travail dès le début ? Comment leur faire gagner quelque chose à partir de ce travail ? Comment encadrer ces moments où les élèves

cherchent ? Il reste là aussi de nombreux choix, encore une fois en partie liés aux contenus concernés.

Bien entendu le temps de cette recherche organisée est une variable importante – ainsi que les critères retenus pour décider d’arrêter la recherche, en relation directe avec les exercices proposés. L’idée reste de laisser le temps pour que « les élèves », en général une grande partie des élèves<sup>14</sup>, puissent au moins s’approprier l’exercice, entrer dans le questionnement. Mais c’est là que jouent aussi d’autres modalités du travail organisé par l’enseignant : travail individuel ou en petits groupes notamment. Selon les choix, les élèves peuvent ou non interagir entre eux, être amenés à formuler des questions ou à élaborer des argumentations qui peuvent contribuer à enrichir leurs activités mathématiques. La durée de la recherche effective des élèves en petits groupes peut sans doute être un peu plus longue qu’individuellement.

Une autre variable tient aux accompagnements de l’enseignant : dans quelle mesure aide-t-il ? Réduit-il les difficultés pour que certains élèves démarrent ? Dans quelle mesure associe-t-il les élèves aux corrections ? Comment, quand valide-t-il ? Quels bilans sont tirés des recherches des élèves ? Toutes ces actions de l’enseignant peuvent influencer les bénéfices que les élèves peuvent tirer de leur travail.

Nous avons introduit la notion d’aides constructives pour traduire ces accompagnements que l’enseignant peut élaborer au fur et à mesure d’une séance, pour ajouter quelque chose à ce qu’ont fait les élèves, pour que leur travail se transforme en connaissances. Les aides constructives seraient des intermédiaires pouvant contribuer à valoriser pour les élèves ce qui a été fait pendant les phases où on les laisse chercher. Elles sont adaptées aux difficultés repérées au démarrage et pendant la résolution, grâce à des interprétations de ce que font les élèves. Selon les cas elles permettent, en récapitulant, de préciser ou même de dégager ce qui a « marché », de le compléter, en le justifiant par exemple, de le généraliser ou de le mettre en relation avec autre chose. Signalons aussi les dispositifs mis au point dans des classes difficiles à partir du calcul mental : ce sont deux élèves qui sont chargés d’élaborer un bilan écrit des règles de calcul utilisées pendant quelques séances, bilan proposé à la classe pour son adoption après discussion (BUTLEN, 2007). Dans son travail I. TENAUD a montré l’évolution positive qui est apparue, sur une année scolaire, chez des élèves de terminale S travaillant une fois par semaine en petits groupes. Au cours de ces séances, elle leur proposait de résoudre des exercices de géométrie nécessitant un questionnement méthodologique. Un enseignement systématique de méthodes était organisé pour chaque chapitre (ROBERT & TENAUD, 1994).

Revenons à cette exploitation, indirecte mais très intéressante, du fait de laisser chercher les élèves en petits groupes : l’appréhension par l’enseignant de ce qu’il y a dans la tête de ses élèves. C’est facilité par une analyse a priori, qui amène à attendre des mises en fonctionnement précises de connaissances. Par exemple, il peut être assez facile pendant la séance de repérer les connaissances supposées disponibles qui ne le sont pas (et de voir pour qui), ou de détecter les choix d’élèves auxquels on n’avait pas pensé, ou de reconnaître les adaptations qui posent problème (à certains), et plus généralement d’évaluer ses propres prévisions d’enseignant. Certes il y a d’autres occasions pour le faire, à l’écrit par exemple, mais on peut apprendre des choses différentes à l’oral, lorsque les élèves cherchent...

Enfin, la nature du travail régulièrement organisé en classe est une variable à introduire pour répondre à la question posée. En effet selon la coutume de la classe, selon que la recherche est exceptionnelle ou habituelle, les relations avec les apprentissages peuvent

---

<sup>14</sup>Il y a là encore une variable qui dépend fortement des classes.

différer. Il peut aussi y avoir des réticences de la part des élèves à s'investir dans un travail demandant des efforts s'ils sont toujours en échec ou si leurs évaluations aux contrôles ne suivent pas !

### 3.3. Un bilan sur le travail des élèves

Revenons juste ici sur la réticence fréquente des enseignants à cette forme de travail qui tient à l'interrogation suivante : dans quelle mesure est-ce utile de laisser chercher des élèves pour leur faire utiliser des propriétés du cours qu'ils n'ont pas du tout apprises ?

Une première réponse, partielle, tient à la possibilité d'associer les élèves justement à l'introduction de certaines notions : cela peut changer cette donne. On peut aussi se demander pourquoi les élèves ne savent pas leur cours. Là encore la relation entre le cours et le travail des élèves se pose. Certains dispositifs actuels tentent même d'organiser un travail des élèves sur le cours, voire de mettre un enjeu de note à l'apprentissage du cours pour le revaloriser.

On peut aussi poser la chose à l'envers, en suggérant que l'apprentissage n'est pas seulement l'apprentissage du texte du savoir mais bien ce qui provient du travail sur les applications, quitte à faire dépendre pour certains élèves le travail sur le cours de celui sur les exercices<sup>15</sup>. Mais pour obtenir cet apprentissage, on peut supposer qu'il est nécessaire de proposer des exercices qui demandent davantage qu'une simple restitution de chaque connaissance isolée, qui amènent à adapter les connaissances et à les mélanger.

Un des moyens pour que les élèves entrent dans une telle visée peut être justement de les laisser chercher, en petits groupes ou non, de favoriser ainsi une entrée dans une démarche de questionnement, d'incertitude, sans attendre d'ailleurs nécessairement qu'ils résolvent tous entièrement les exercices. De plus, si on ne laisse pas les élèves chercher un certain temps des exercices non immédiats, on peut se demander ce qu'ils perçoivent des différences entre les adaptations des connaissances à mettre en œuvre, qui participent de leur apprentissage, qui peuvent être proposés aux contrôles. On peut se demander ce qu'ils peuvent appréhender des corrections, et même des commentaires qui sont faits sur ce qui a servi effectivement. On peut se demander ce qu'ils vont gagner aux récapitulations, aux liens et aux généralisations éventuelles qui sont énoncées par l'enseignant.

Une hypothèse complémentaire est que ce type de travail est une bonne occasion de transmettre un certain « relief » sur les mathématiques aux élèves, à partir de leur travail et pas abstraitement. Ce relief est souvent véhiculé par des commentaires sur les mathématiques (on parle de « méta »). Cela peut porter sur le sens des notions, les liens entre elles, mais aussi sur la manière de chercher, les méthodes à utiliser, les différents domaines de travail (cadres) et modes d'écritures (registres) qui interviennent, les moyens de contrôle, ou encore la rédaction.

En allant un peu plus loin, peut-être peut-on évoquer la possibilité de mettre en jeu l'intelligence des élèves sur le travail attendu : par exemple, laisser chercher les élèves aux bons moments, interpréter et compléter leurs réponses, commenter les corrections en revenant sur les méthodes par exemple, introduire des éléments d'histoire des mathématiques, n'est-ce pas un moyen de faire entrer leur intelligence « ordinaire », critique, voire sociale dans l'exercice d'une discipline scientifique et en retour de les aider à apprendre ?

---

<sup>15</sup>Tout comme on peut penser que le travail à la maison dépend de celui fait en classe : si un élève n'a vraiment pas assez compris en classe, il n'y a pas trop de raison pour surmonter cela à la maison !

## Conclusions

### 1. La nécessité de l'expérience

Même si les roses rouges vont bien avec les roses jaunes, la dernière main du fleuriste et même de l'acheteur pour arranger un bouquet dans un vase donné est indispensable ! Même si tous les ingrédients sont présents pour construire une bonne séance de travail autonome, le recours à l'expérience reste indispensable pour finaliser les décisions et les adaptations de l'enseignant. Chaque classe, chaque année, est une nouvelle histoire, dans une nouvelle conjoncture, et nécessite de nouveaux arrangements, même si les projets globaux essentiels de l'enseignant restent analogues. Cela nous amène à revenir sur le travail de l'enseignant, dans la mesure où aucun automatisme ne peut régler ses décisions. Rien ne peut être décidé complètement à l'avance et des choix restent ouverts sur les deux dimensions, contenus et déroulement.

### 2. Le double travail de l'enseignant

Finalement le simple fait de « laisser chercher les élèves en classe » ne suffit pas à la transformation espérée de leurs activités en classe : y contribuent, comme on l'a déjà dit, la spécificité des contenus sur lesquels ils travaillent ainsi que la manière dont ils travaillent et aussi tout ce que l'enseignant ajoute par ses propos aux divers moments du travail. Ainsi les enseignants sont amenés à faire un double travail (*cf.* ROBERT & ROGALSKI, 2002).

C'est d'abord un travail de prévisions, à adapter chaque année : le choix des exercices, de leur ordre, du mode de passage. Ensuite, et c'est le deuxième travail de l'enseignant, pendant les séances<sup>16</sup>, l'enseignant doit enrôler les élèves pour les faire entrer dans le travail qu'il a prévu de leur faire faire (ce que Brousseau appelle la dévolution) ; il doit les accompagner tout au long du travail, éventuellement en aider certains à démarrer, les encourager, puis interpréter ce qu'ils font, récapituler, corriger les exercices proposés. Selon les cas il peut assortir ou non les corrections d'aides « constructives » en relation avec le travail fait par les élèves. C'est tout ce délicat travail qui consiste à aider sans tout dire d'une part (aides intermédiaires) puis d'autre part à faire profiter au maximum les différents élèves de ce que tous ont fait, même s'ils ont été aidés, même si le travail n'a pas été jusqu'au bout, pour faire avancer les connaissances de tous. C'est un travail très spécifique, qui doit s'adapter à la fois à la classe et aux élèves ; de plus il est en partie improvisé, l'idée étant cependant que la préparation (et les connaissances diverses accumulées au fil des ans, qui garantissent une certaine disponibilité aux enseignants) contribue à aider cette improvisation.

### 3. Et la didactique ?

Nous suggérons que cette expérience des enseignants, accumulée au fil des ans, peut être efficacement complétée, outillée, par des connaissances spécifiques fournies par des recherches de didactique. Les analyses a priori des exercices, les types de notions en sont des exemples, tout comme les outils mis au point pour caractériser des déroulements (ROBERT, 1998). Plus généralement le travail didactique sur les difficultés des élèves et le relief à mettre sur les différents domaines des mathématiques peuvent faciliter le travail de repérage et d'élaboration d'aides appropriées. Enfin la possibilité d'inscrire des constats tirés d'une expérience singulière dans des régularités ou des variabilités inter-individuelles est aussi une aide non négligeable que les travaux de didactique peuvent apporter aux

<sup>16</sup>Et peut-être avec des conséquences a posteriori !

enseignants (Roditi, 2005). De tels outils, de tels « mots pour le dire » professionnels favorisent de plus les échanges entre enseignants, dont nous avons déjà eu l'occasion de signaler l'importance dans les évolutions éventuelles de la profession.

## Annexe : exemples d'analyses de tâches a priori

On caractérise les différentes connaissances à utiliser dans un énoncé donné : connaissances anciennes et en cours d'acquisition, indiquées dans l'énoncé ou non (supposées disponibles). Puis on étudie la manière dont ces connaissances doivent être mises en fonctionnement. On distingue les applications simples et isolées et les autres, plus complexes, où diverses adaptations doivent être introduites pour pouvoir utiliser ces connaissances : reconnaissances de modalités d'application, introductions d'intermédiaires et d'étapes, mélanges de cadres de travail, mises en relation, utilisation de questions antérieures, choix.

Par exemple, pour l'énoncé suivant en troisième,

Exercice 1. Construire un triangle équilatéral d'aire égale à la somme des aires de deux triangles équilatéraux donnés.

il faut utiliser :

- des connaissances anciennes, indiquées : l'aire d'un triangle équilatéral ;
- des connaissances anciennes, supposées disponibles : le théorème de Pythagore ;
- des connaissances nouvelles (en cours d'acquisition) : nommer les côtés des trois triangles (deux donnés, un à chercher) – mise en équation.

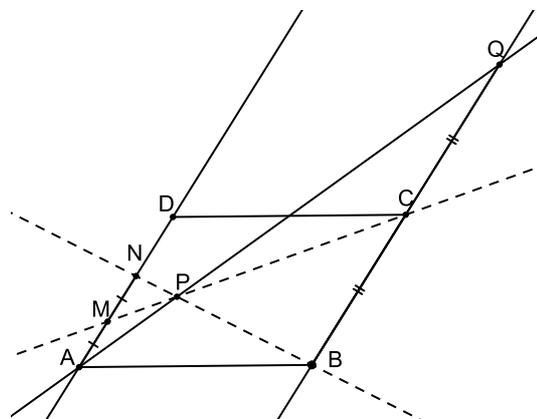
Cet exercice a été proposé dans une classe de fin de collège mais il ne restait qu'une demi-heure de travail et les élèves, qui travaillaient seuls avec des mises au point régulières de l'enseignant, ne sont pas allés au bout de l'exercice. Un élève a crié « Pythagore » quand a été écrite « l'équation »  $x^2 = a^2 + b^2$ , où  $x$ ,  $a$  et  $b$  désignent respectivement les côtés du triangle à chercher et des deux triangles donnés ... et la cloche a sonné ! La fois suivante, l'intérêt était largement émoussé et l'enseignant a terminé rapidement.

Pour l'énoncé suivant en troisième,

Exercice 2. Soient  $ABCD$  un parallélogramme,  $M$  un point de  $(AD)$ ,  $N$  le symétrique de  $A$  par rapport à  $M$ ,  $P$  le point d'intersection de  $(CM)$  et  $(BN)$ . Quel est le lieu de  $P$  lorsque  $M$  décrit  $(AD)$  ?

il faut utiliser :

- des connaissances récentes supposées disponibles : le théorème de Thalès. Pour cela il faut introduire un intermédiaire (un point d'intersection de  $(AP)$  et d'un côté du parallélogramme, à nommer).
- On doit aussi utiliser un mélange géométrique/numérique (égalité de rapports tirée de la géométrie, exploitée numériquement).



Cet exercice a été proposé en préparation au Capes, en petits groupes, notamment pour faire travailler les questions de réciproque. L'énoncé est tiré d'un manuel de troisième de l'IREM de Strasbourg, il figure dans les problèmes transversaux de la fin du livre.

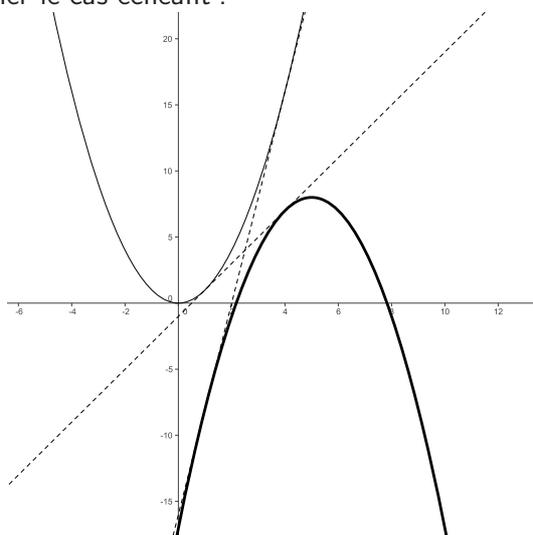
Pour l'énoncé suivant en première (en terminale on peut prendre le même exercice avec

les courbes  $\exp$  et  $\ln$ ),

Exercice 3. Est-ce que les courbes respectives des fonctions  $x \mapsto -x^2 + 10x - 17$  et  $x \mapsto x^2$  ont des tangentes communes à déterminer le cas échéant ?

il faut utiliser :

- coefficient directeur d'une tangente et dérivée : changement de point de vue (tangente, point de tangence, abscisse) – adaptation d'une connaissance mobilisable ;
- intermédiaire à introduire : coordonnées inconnues d'un point de chaque courbe – équation des deux tangentes ;
- mise en système (c'est la même tangente) : changement de cadre ;
- résolution (disponibilité) et retour au problème.



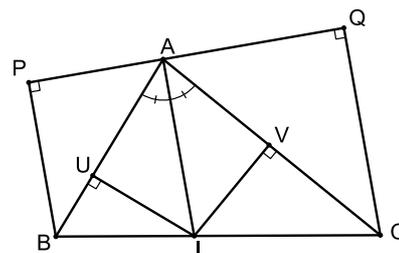
Cet exercice a été mis au point dans une formation continue d'enseignants et a fait l'objet d'une expérimentation en classe, avec un travail en petits groupes des élèves. L'expérience est relatée dans la brochure n° 41 de l'IREM de Paris 7, co-écrite en 2002 par un Groupe de recherche et formation de l'académie de Toulouse et un groupe de Versailles.

### Addendum : une expérience vécue en seconde (par J.-P. DAROU )

L'idée de cette activité revient à Jean-Pierre RICHTON, qui était alors un de mes collègues. Il m'avait dit, au cours de nos discussions, qu'il avait proposé cette recherche non guidée à ses élèves de l'option sciences. Il en a d'ailleurs écrit un compte rendu<sup>17</sup> dans le Bulletin vert de l'APMEP. Je l'ai ensuite souvent reprise en module avec mes classes de seconde. Elle m'a paru être parfaitement en rapport avec les quatre mots clefs (travail en groupe - travail autonome - analyse de tâche - marge de manœuvre de l'enseignant) indiqués au début de l'article par Aline ROBERT. C'est pourquoi, après avoir lu son article, je lui en ai parlé ; elle m'a demandé de la relater dans cette annexe.

Il s'agit de démontrer le théorème dit « de la bissectrice » ou « du pied de la bissectrice » c'est-à-dire, avec les notations des figures, de prouver que la bissectrice de l'angle  $\widehat{BAC}$  coupe le segment  $[BC]$  en deux segments  $[IB]$  et  $[IC]$  tels que  $IB/AB = IC/AC$ . De nombreux livres proposent ce théorème en exercice, j'en ai retrouvé quelques-uns de cette époque. Voyons d'abord le Terracher (Hachette), édition 1994. On y trouve deux manières de démontrer le théorème :

1. Utilisation des aires des triangles  $AIB$  et  $AIC$  calculées de deux manières différentes en rappelant l'égalité  $IU = IV$  (activité 2 page 217).
2. Tracé des projetés orthogonaux  $P$  et  $Q$  de  $B$  et  $C$  sur la bissectrice extérieure de  $\widehat{BAC}$  pour prouver<sup>a</sup> que  $AP/IB = AQ/IC$  et trigonométrie dans les triangles  $ABP$  et  $ACQ$  pour établir que  $AP/AB = AQ/AC$  afin de conclure (Exercice résolu page 222).

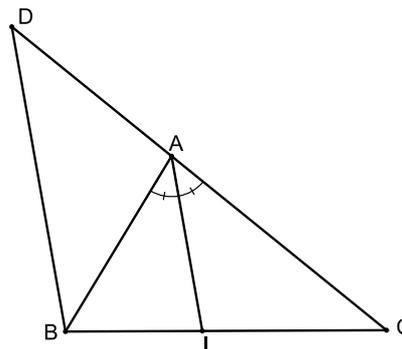


<sup>a</sup>Ceci nécessite une forme générale du théorème de Thalès.

<sup>17</sup>J.-P. RICHTON, *Une option sciences en seconde... Pourquoi ?*, Bulletin de l'APMEP **429**, 432-446.

Dans le Belin, édition 2000, on oriente les élèves vers une méthode très différente également proposée dans d'autres ouvrages.

3. Tracé de la droite  $(BD)$  parallèle à  $(AI)$  pour prouver que le triangle  $BAD$  est isocèle et conclure par une utilisation du théorème de Thalès qui n'est d'ailleurs pas immédiate pour l'élève ne connaissant que les configurations étudiées au collège.

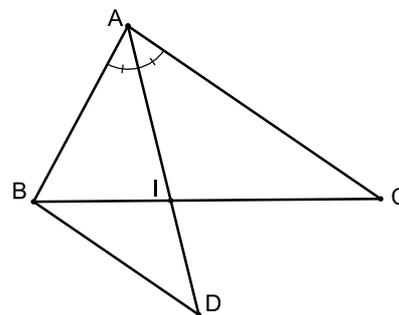


Chacune de ces méthodes est largement guidée (ou même entièrement détaillée), aucune initiative n'est laissée à l'élève. Dans ces conditions un travail en groupe n'aurait guère d'utilité. Les démarches proposées sont complexes (la palme revenant, à mon avis, à la méthode 2). On conçoit aisément qu'un élève de seconde ne les envisage pas de lui-même. Cela ne veut cependant pas dire qu'elles soient dénuées d'intérêt, elles pourraient être proposées dans un second temps, ne serait-ce que pour montrer la diversité des méthodes de démonstration.

Comme l'avait expérimenté mon collègue, j'ai proposé à mes élèves de prouver le théorème de la bissectrice sans leur donner la moindre indication sur la méthode à suivre. Dans un premier temps, un travail de groupe permet de conjecturer le résultat, chaque élève évalue les rapports  $IB/AB$  et  $IC/AC$  à partir du triangle qu'il a construit. On peut aussi avoir recours à un logiciel de géométrie dynamique pour confirmer les observations.

Généralement quelques élèves font vite le rapprochement entre une égalité de rapports et une configuration de Thalès, il s'agit donc de trouver laquelle et, pour cela, de tracer une parallèle adéquate. Il faut du temps, de nombreux essais sont maladroits et, si la classe se décourage, il faudra se décider à intervenir. À plusieurs reprises pourtant, des élèves ont réussi à trouver sans aide ou avec très peu d'aide et, dans certains cas, à l'issue d'une discussion en groupe.

Leurs solutions n'ont jamais été celles que je viens de mentionner, ils ont toujours pensé à la configuration ci-contre qu'on trouve maintenant dans des manuels plus récents. Je n'en suis pas surpris. C'est celle qui leur permet le plus commodément d'utiliser leurs connaissances de troisième. Ils sont aussi plus naturellement enclins à prolonger la bissectrice, l'indication que je dois parfois leur donner le confirme : « On peut prolonger le tracé de l'une des droites de la figure ! ». Presque toujours ils pensent à la bissectrice et c'est vers le bas qu'ils la prolongent. Ils doivent encore penser à tracer  $(BD)$  parallèle à  $(AC)$ , la suite vient alors assez facilement.



Je dois cependant dire qu'une telle séance prend du temps et ne peut être envisagée qu'en module. On ne peut pas non plus laisser chercher les élèves sans succès trop longtemps. Il faut parfois se résoudre à donner les indications nécessaires pour relancer à temps la recherche ou pour éviter que la sonnerie ne vienne brusquement mettre un terme aux efforts juste avant la réussite.

## Éléments de bibliographie

*Tous les cahiers bleus publiés à l'IREM de Paris 7 sont des documents pour les formateurs, ainsi que certains cahiers de Didirem. En voici quelques-uns :*

CISSÉ F. (2006) *Un dossier sur racine carrée à l'usage des formateurs (collège/lycée)*, Document pour la formation des enseignants, Cahier bleu n°8, IREM, Université Paris 7.

PARIÈS M., POUYANNE N., ROBERT A., RODITI E., ROGALSKI M. (2007) *Mettre du relief sur les mathématiques à enseigner*, Document pour la formation des enseignants, Cahier bleu n°9, IREM, Université Paris 7.

ROBERT A., POUYANNE N. (2004) *Formateurs d'enseignants de mathématiques du second degré : éléments pour une formation*, Document pour la formation des enseignants, cahier bleu n°5, IREM, Université Paris 7.

CHAPPET PARIÈS M., DE HOSSON C. (2008) *Introduction à la didactique des mathématiques et à la didactique des sciences physiques – une option en formation initiale*, Document pour la formation des enseignants, Cahier bleu n°10, IREM, Université Paris 7.

GRUPE DE RECHERCHE-FORMATION (2002) de l'Académie de Toulouse et Paf de Versailles, *Deux expériences réalisées en formation continue autour d'énoncés de problèmes de mathématiques*, Cahier de Didirem n°41, IREM, Université Paris 7.

*Voici les références citées :*

BAUTIER, E. ROCHEX J.Y. (1998) L'expérience scolaire des nouveaux lycéens, démocratisation ou massification, *Armand Colin*.

BONNERY S. (2007) La construction des difficultés et des inégalités scolaires, *La dispute*.

BROUSSEAU G. (1998) Théorie des situations didactiques, *La pensée sauvage*.

BROUSSEAU G. (2005) *Recherche en éducation mathématique*, Bulletin de l'APMEP, **457**, 213-225.

BUTLEN D. (2007) Le calcul mental, entre sens et technique, *PUB*.

CHARLOT B., BAUTIER E., ROCHEX J.Y. (1992) École et savoir dans les banlieues et ailleurs, *Armand Colin*.

DOUADY R. (1987) *Jeux de cadres et dialectique outil/objet*, Recherches en didactique des mathématiques **7/2**, 5-32.

GRUGEON B. (2000) *L'algèbre au lycée et au collège. Une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire : conception, exploitation et perspectives*, 5-39 in Grugeon, Guichard, Capponi, Janvier, Delgoulet Eds, L'algèbre au lycée et au collège, Actes des journées de formation de formateurs, Boisseron, *IREM de Montpellier*.

HOROKS J. (2006) Les triangles semblables en classe de seconde : des enseignements aux apprentissages – Étude de cas, *Thèse de doctorat de l'Université Paris 7*.

LATTUATI M., ROBERT A., PENNINGKX J. (1999) L'enseignement des mathématiques au lycée, un point de vue didactique, *Ellipses*.

PELTIER M.L. Ed. (2004) Dur, Dur d'enseigner en ZEP, *La pensée sauvage, Grenoble*

ROBERT A. (1998) *Outils d'analyses des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université*, Recherches en didactique des mathématiques **18/2**, 139-190.

ROBERT A. (2003) *De l'idéal didactique aux déroulements réels en classe de mathématiques : le didactiquement correct, un enjeu de la formation des (futurs) enseignants (en collège et*

*en lycée*), *Didaskalia* **22**, 99-116.

ROBERT A. (2005) *De recherches sur les pratiques aux formations d'enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique*, *Annales de didactique et sciences cognitives* **10**, 209-250.

ROBERT A. & ROGALSKI M. (2002) *Le double travail de l'enseignant*, *Petit x* **60**.

ROBERT A. & TENAUD I. (1994) *Résolutions de problèmes de géométrie et utilisation de méthodes en terminale C*, *Repères IREM* **16**, 29-40.

ROBERT A. & VANDEBROUCK F. (2003) *Des utilisations du tableau par des professeurs de mathématiques en classe de seconde*, *Recherches en didactique des mathématiques* **23/3**, 389-424.

RODITI E. (1996) La racine carrée en troisième. étude d'une activité, *Document pour la formation des enseignants, Cahier vert n°17, IREM, Université Paris 7*.

RODITI E. (2005) *Pratiques enseignantes en mathématiques ; entre contraintes et liberté pédagogique*, *L'Harmattan*.

VERGNAUD G. (2002) *Lev Vygotski, pédagogue et penseur de notre temps*, *Hachette Education*.

*Je remercie J.-P. DAROU qui a réalisé les figures qui illustrent cet article.*

Aline ROBERT  
Équipe Didirem de l'université Paris 7-Diderot  
2, place Jussieu  
75005 Paris  
robert@math.uvsq.fr

# CONVERGENCE(S)...EN SÉRIE

LoïcTEYSSIER

**Résumé :** Dans cet article nous présentons quelques procédés qui permettent de « resommer » des sommes infinies que le sens mathématique commun appelle divergentes. Euler proposa par exemple l'égalité  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1$ , et à sa suite des mathématiciens ont justifié en quoi cette relation portait du sens. Outre ces séries géométriques d'autres types de séries divergentes peuvent être resommées ; nous introduirons par exemple les sommes de Cesàro ou de Mittag-Leffler. Nous étudierons plus particulièrement les séries de type Gevrey, pour lesquelles la sommation « au sens des astronomes », entrevue par Poincaré et finalisée tout au long du vingtième siècle, fonctionne et permet de donner des résultats numériques en rapport avec l'expérience physique (calcul d'éphémérides en astronomie, de franges d'interférence en optique, de moments magnétiques pour l'électron en physique quantique).

**Mots-clés :** Série numérique - Série entière - Série divergente - Développement asymptotique - Transformée de Laplace.

Quand j'ai commencé à écrire cet article sur la sommation des séries divergentes, je ne m'imaginai pas à quel point il serait délicat de traiter le sujet, pour plusieurs raisons. Une d'elles consiste à prendre la suite de l'excellent article [L] de J. LEFORT publié dans L'OUVERT. Je ne voudrais pas refaire en moins bien ce qui a été dit si clairement. Bien que je reprenne certains de ses thèmes, je recommande vivement la lecture préalable de cet article car son abord est sûrement plus aisé et présente certains des itinéraires de pensée qui seront explicités ici. De même le non moins excellent article [R] publié dans *Pour la Science* par J.-P. RAMIS, mathématicien au cœur des récents développements de la resommation, présente avec concision et précision les tenants et aboutissants de ce sujet vus par le mathématicien et le physicien.

L'histoire connue commence quelque part dans l'antiquité grecque. Afin de souligner les incohérences des théories continuistes ou atomistes, le philosophe ZÉNON inventa une série d'expériences de pensée dont la finalité était de prouver que de ces théories découle l'impossibilité (ou l'absurdité) du mouvement. Une de ces expériences met en jeu un Achille qui ne parviendra jamais à rattraper à la course son concurrent pourtant moins rapide. L'argument peut se résumer de la sorte : pour le rattraper Achille doit couvrir la distance qui les sépare au départ, mais pour ce faire il doit d'abord en parcourir la moitié, puis la moitié de la moitié restante, et ainsi de suite *ad infinitum*. Effectuer cette infinité d'étapes lui prendrait un temps infini, donc il ne le rattrape jamais. Ce « paradoxe » peut être résolu de diverses manières, mais celle qui nous intéresse ici en est le traitement mathématique « dur ». En effet, à un facteur près, le temps nécessaire est la somme des termes de la suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - 2^{-\infty}}{1 - 2^{-1}} = \frac{2}{2} = 1$$

qui est finie. On dira que la somme infinie du membre de gauche est une série convergente et que sa somme vaut 1.

Il aura fallu attendre l'apparition de l'analyse mathématique pour formaliser proprement ce raisonnement. Pourtant il existe bien des séries qui sont divergentes : personne ne peut en effet contester que

$$1 + 1 + 1 + 1 + \dots = +\infty.$$

Ô qu'il est amoral de manipuler algébriquement des quantités infinies (ou en tout cas mal définies). Mais que la tentation du Malin est grande... risquons nous à un blasphème ! En désignant par  $S$  la « somme »  $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  on trouve successivement :

$$\begin{aligned} S &= (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0? \\ S &= 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1? \end{aligned}$$

mais également

$$\begin{aligned} 2S = S + S &= \begin{array}{cccccc} & 1 & -1 & +1 & -1 & +\dots \\ + & & 1 & -1 & +1 & -\dots \end{array} = 1, \\ \text{d'où } S &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ces incohérences ont énervé (à juste titre) nos ancêtres mathématiciens, et CAUCHY a décidé de mettre de l'ordre au début du XIX<sup>e</sup> siècle. C'est à lui que l'on doit la définition-couperet actuelle des séries convergentes : celles pour lesquelles la suite des sommes partielles converge. Pour  $S$  ce n'est pas le cas car les sommes partielles valent alternativement 1 et 0. Et pourtant... et pourtant si on fait attention, si on manipule avec dextérité ces expressions, on s'apercevra que la dernière égalité, c'est-à-dire

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2},$$

est crédible. En tout cas telle fut la conclusion d'EULER, qui s'autorisait beaucoup de choses qui sont maintenant défendues à nos pieux élèves. Et ce mathématicien extraordinaire était suffisamment pervers pour avoir pensé des relations encore plus saugrenues, comme par exemple la choquante :

$$T = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n + \dots = -1.$$

La foi qu'EULER portait en ces formules venait, entre autre, du fait que ces expressions sont données par la somme des termes de la suite géométrique de raisons respectives  $-1$  et  $2$ . D'une certaine manière il est ainsi plus « naturel » d'associer à ces séries les nombres cités au-dessus que d'autres valeurs. Plus généralement le caractère naturel des sommations que nous allons présenter proviendra de ce que des séries *a priori* divergentes sont néanmoins symboliquement solutions d'équations fonctionnelles (en pratique : algébriques ou différentielles). Par exemple la dernière série  $T$  est symboliquement solution de  $2T = T - 1$ . Il n'est toutefois pas toujours possible de rendre finie des séries divergentes : aucune théorie de la sommation cohérente [Ly] ne peut associer autre chose que «  $+\infty$  » à la série  $1 + 1 + 1 + \dots$ .

J'ai tenté de résumer dans cet article les principaux concepts qui permettent de manipuler « sans crainte » ces objets qui taquinent l'infini. J'ai également voulu être assez complet en allant jusqu'à relater les avancées récentes qui ont achevé, dans les années 1980 à Strasbourg, la théorie de la resommation (ou sommation de Borel-Laplace) de certaines séries divergentes entrevue par POINCARÉ à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle et construite tout au long du XX<sup>e</sup> siècle. Je ne parlerai pas de la théorie de la résurgence d'ÉCALLE, de développement

récent et finalement assez complexe, bien qu'elle s'inscrive dans la continuité de ces travaux. Bien sûr l'histoire de la sommation des séries divergentes n'est pas finie et, probablement, ne se terminera jamais d'une manière convenable. De même, il existe beaucoup de théories non équivalentes de la sommation des séries numériques, et cet exposé ne se veut en rien exhaustif.

Faire ici un exposé complet de la théorie de la resommation serait sûrement déplacé ; à l'inverse je pense ne pas avoir été trop ambitieux en voulant décrire ses idées essentielles, celles qui font « que ça marche ». L'exemple-type de cette théorie sera la série entière d'Euler

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} (n!) x^{n+1} ,$$

qui lui permet de donner une valeur à la série hypergéométrique de Wallis

$$-0! + 1! - 2! + 3! - 4! + \dots \simeq 0,5963 .$$

Diab!e!

Ce texte pourra paraître plutôt dense ou technique en première lecture ; néanmoins les objets employés sont familiers ou d'existence connue : essentiellement les suites, puis les fonctions dérivables au sens complexe (holomorphes) qui interviendront uniquement à travers leur développement en série entière. Même si notre préoccupation initiale est de donner une valeur numérique à des sommes infinies de nombres, nous serons amenés à considérer des sommes infinies de fonctions, afin notamment de rendre compte des objets provenant de la physique. Nous illustrerons en fin d'exposé en quoi les séries divergentes rencontrées en physique sont, souvent, englobées par la resommation. Peut-être l'exemple le plus frappant est-il celui des calculs obtenus en physique quantique. Après « renormalisation » on tombe sur une série divergente ; en additionnant ses premiers termes on obtient toutefois des valeurs en accord avec l'expérience jusqu'à la zêta-ième décimale ! La théorie de la resommation explique ce phénomène et légitime complètement ce mode de calcul. À ce titre il me semble qu'entrevoir, fort humblement, les rouages mathématiques du monde sensible vaut l'effort de lire les modestes pages qui viennent.

## 1. Premières convergences : somme de nombres

### 1.1. Convergence naturelle

Une *série numérique* est un autre moyen d'écrire une suite de nombres complexes  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sous la forme

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n , \text{ ou plus simplement } \sum a_n .$$

Cet objet est purement formel (symbolique) dans le sens où on ne lui demande pas *a priori* de représenter un nombre. On peut additionner et multiplier de tels objets en *définissant*

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n + \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n &:= \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) , \\ \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \right) \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n \right) &:= \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{p+q=n} a_p b_q \right) . \end{aligned}$$

L'addition ainsi définie est naturelle, mais le produit se distingue du produit naturel pour les suites et rappelle celui des polynômes.

Bien sûr si l'ensemble des termes non nuls de la suite  $a := (a_n)$  est fini, disons  $a_n = 0$  pour  $n \geq d$ , alors on peut identifier l'objet  $\sum a_n$  avec le nombre  $\sum_{n < d} a_n$ . (Si c'est le cas pour les suites  $a$  et  $b$  ci-dessus, la définition prise pour la somme et le produit de deux séries coïncide avec la somme et le produit des deux nombres, ce qui n'est ni malheureux ni un hasard.) Cette situation fournit l'exemple le plus simple de série numérique *convergente*, c'est-à-dire pour lequel l'écriture  $\sum a_n$  a un sens en tant que nombre. Un pas dans la pensée mathématique a été franchi par la réalisation qu'additionner un nombre infini de termes non nuls peut conduire à un nombre bien défini, et qu'un certain nombre d'opérations naturelles (opérations algébriques par exemple) s'effectuent identiquement pour ces deux objets.

Un premier exemple non trivial est la série géométrique de raison  $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ . Pour  $N \in \mathbb{N}$  fixé on sait en effet que

$$\sum_{n=0}^N q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}.$$

Si  $|q| < 1$  alors  $\lim_{N \rightarrow +\infty} q^{N+1} = 0$  donc la suite des *sommes partielles*  $(\sum_{n \leq N} q^n)_{N \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\frac{1}{1-q}$ . On est ainsi amené à introduire un premier moyen, que nous qualifierons de naturel, de *sommer* une série.

**Définition** (sommation naturelle). On dira que la série numérique  $\sum a_n$  est *convergente* lorsque la limite suivante, appelée la *somme* de la série, existe

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n := \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N a_n \in \mathbb{C}.$$

On identifiera alors l'objet  $\sum a_n$  à ce nombre complexe. Pour la durée de l'exposé on notera également  $\mathcal{S}_{NAT}$  l'opération « prendre la somme d'une série convergente en ce sens ».

Dans l'exemple de la série géométrique, si  $|q| \geq 1$  et  $q \neq 1$  alors la suite  $(q^{N+1})_{N \in \mathbb{N}}$  n'a pas de limite, et donc la suite des sommes partielles ne peut converger. Cela signifie que la série  $\sum q^n$  est *divergente*.

On peut montrer que ce procédé de sommation respecte les opérations algébriques. Cela signifie que l'ensemble  $\mathcal{E}_{NAT}$  des séries numériques convergentes est une algèbre sur  $\mathbb{C}$  (de dimension infinie) sur laquelle l'opérateur  $\mathcal{S}_{NAT}$  est une forme linéaire qui respecte le produit.

*Remarque.* Clairement si  $\sum a_n \in \mathcal{E}_{NAT}$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

En effet les suites  $(S_N)_{N \in \mathbb{N}} := (\sum_{n \leq N} a_n)_{N \in \mathbb{N}}$  et  $(S_{N+1})_{N \in \mathbb{N}}$  ayant même limite on peut écrire  $\lim_{N \rightarrow +\infty} S_{N+1} - S_N = 0$ . La réciproque est fautive, puisque la série harmonique  $\sum \frac{1}{n+1}$  est divergente : en minorant les sommes partielles (aires de diagrammes en bâtons) par l'intégrale de  $x \mapsto \frac{1}{x}$  on montre en effet l'inégalité  $\sum_{n=0}^N \frac{1}{n+1} \geq \ln(N+1)$ .

## 1.2. Convergence de Cesàro

On en vient maintenant à justifier d'une première manière la formule

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}.$$

Le membre de gauche est identifié à la série numérique  $\sum (-1)^n$ , et cette série n'est pas convergente au sens que nous avons défini au paragraphe précédent, puisque la suite

$((-1)^n)$  n'a pas de limite et *a fortiori* pas de limite nulle. Néanmoins cette série converge « en moyenne », c'est-à-dire :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^N \left( \sum_{p=0}^n (-1)^p \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2N+3+(-1)^N}{4N+4} = \frac{1}{2}.$$

**Définition** (sommation de Cesàro). On dit que la série  $\sum a_n$  est *convergente au sens de Cesàro* si la limite suivante, appelée *somme de Cesàro* de la série, existe :

$$\mathcal{S}_{CES} \left( \sum a_n \right) := \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{n \leq N} \left( \sum_{p \leq n} a_p \right) \in \mathbb{C}.$$

On notera  $\mathcal{E}_{CES}$  l'algèbre de ces séries ; l'opérateur  $\mathcal{S}_{CES}$  respecte les opérations algébriques.

On va montrer que  $\mathcal{E}_{NAT} \subset \mathcal{E}_{CES}$  et que  $\mathcal{S}_{NAT}$  est la restriction de  $\mathcal{S}_{CES}$  à  $\mathcal{E}_{NAT}$ . Plus clairement : si une série converge au sens classique alors elle converge aussi au sens de Cesàro et les deux procédés de sommation donnent le même résultat. Cette propriété est importante et souligne le fait que la sommation de Cesàro est une extension du procédé de sommation naturel pour une classe (strictement) plus large de séries. C'est toujours ce genre d'extension que nous allons rechercher.

**Proposition.** *Si la série  $\sum a_n$  appartient à  $\mathcal{E}_{NAT}$  alors elle appartient également à  $\mathcal{E}_{CES}$  et  $\mathcal{S}_{CES}(\sum a_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \mathcal{S}_{NAT}(\sum a_n)$ .*

La preuve figure ici afin de nous convaincre que ce n'est pas un jeu d'écriture mais que c'est un « vrai » théorème. Bien que celui-ci ne soit pas de démonstration difficile la nécessité de recourir à des  $\varepsilon$  pour caractériser les suites tendant vers 0, dont on ne peut se passer, constitue un achoppement technique non trivial.

*Démonstration.* On note  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des sommes partielles, c'est-à-dire  $S_n := \sum_{p=0}^n a_p$ , et  $\ell$  la limite de  $(S_n)$ , c'est-à-dire la somme naturelle  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  de la série. La suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $S_n = \ell + \varepsilon_n$  tend vers 0 ; cela signifie qu'étant donné  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $|\varepsilon_n| < \varepsilon$  pour tout  $n > k$ . Si on écrit  $\hat{S}_N := \frac{1}{N+1} \sum_{n \leq N} S_n = \ell + \frac{1}{N+1} \sum_{n \leq N} \varepsilon_n$  on a, pour tout  $N > k$ ,

$$\left| \hat{S}_N - \ell \right| \leq \frac{1}{N+1} \sum_{n \leq N} |\varepsilon_n| < \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^k |\varepsilon_n| + \frac{N-k}{N+1} \varepsilon < \frac{1}{N+1} \left( \sum_{n=0}^k |\varepsilon_n| \right) + \varepsilon.$$

Bien sûr le premier terme du membre de droite de l'inégalité tend vers 0 quand  $N$  tend vers l'infini car  $k$  est fixé. Il existe donc un rang  $\hat{k} \geq k$  tel que, pour tout  $N > \hat{k}$ , ce terme soit inférieur à  $\varepsilon$ . Mais cela entraîne que pour tout  $N > \hat{k}$  la différence  $\left| \hat{S}_N - \ell \right|$  est inférieure à  $2\varepsilon$ . C'est bien ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

*Remarque.* On peut montrer que si  $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \in \mathcal{E}_{CES}$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} a_n = 0$ , et la réciproque est fausse.

### 1.3. Un phénomène étrange (et inversement)

Que se passe-t-il si on permute les termes d'une somme finie ? Rien. On obtient toujours le même résultat, puisque l'addition est commutative. On pourrait alors croire, naïvement,

que si on permute les termes d'une série infinie on ne change pas la somme. En fait il peut tout se passer ! On va ici explorer le résultat suivant, dû à RIEMANN.

**Proposition.** *Supposons qu'une série numérique à **termes réels**  $\sum a_n$  converge mais que  $\sum |a_n|$  diverge, et donnons-nous un réel quelconque  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors on peut permuer les termes de la série initiale de sorte que la nouvelle somme soit  $\lambda$ , c'est-à-dire : il existe une bijection  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \lambda$ . Il existe également des permutations telles que la nouvelle série soit divergente. En revanche si on ne permute qu'un nombre fini de termes d'une série numérique convergente alors on ne change pas la valeur de la somme.*

Notons d'abord que la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$  satisfait aux hypothèses de cette proposition. On sait déjà que la série harmonique  $\sum \frac{1}{n+1}$  diverge. Par ailleurs on peut montrer facilement par récurrence que les suites des sommes partielles de rang pairs ( $S_{2N}$ ) et impairs ( $S_{2N+1}$ ) sont adjacentes et donc convergent vers une même limite, la somme de la série ; on montrera plus loin que celle-ci vaut  $\ln 2$ . Ce raisonnement s'étend sans difficulté à un cas plus général, qui est connu sous la forme du critère d'Abel pour les séries alternées.

*Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite décroissante de réels positifs qui tend vers 0. Alors  $\sum (-1)^n a_n$  converge.*

Le même type d'argument (une suite monotone bornée est convergente) permet de montrer le résultat suivant.

*Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels de signe constant. La série  $\sum a_n$  converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles est bornée.*

Ayant énoncé ces faits, plongeons-nous dans l'étrange phénomène de Riemann. Commençons par scinder en deux l'ensemble des indices : écrivons  $\mathbb{N} = I^- \cup I^+$  où  $I^-$  correspond aux termes  $a_n$  strictement négatifs et  $I^+$  aux termes positifs. Puisque

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n &= \sum_{n \in I^+} a_n + \sum_{n \in I^-} a_n \\ \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| &= \sum_{n \in I^+} a_n - \sum_{n \in I^-} a_n \end{aligned}$$

la convergence de la première série et la divergence de la seconde entraînent que les séries  $\sum_{n \in I^-} a_n$  et  $\sum_{n \in I^+} a_n$  divergent. Plus précisément la suite  $S_N^+ = \sum_{n \in I^+, n \leq N} a_n$  tend vers  $+\infty$  et la suite  $S_N^- = \sum_{n \in I^-, n \leq N} a_n$  tend vers  $-\infty$ . On applique alors la procédure suivante :

- on additionne les premiers termes de  $I^+$  jusqu'à ce que la somme  $S_N^+$  dépasse juste  $\lambda$ . Ceci est possible car  $\lim (S_N^+) = +\infty$ . On appelle  $N_1$  le plus petit entier tel que  $S_{N_1}^+ > \lambda$ .
- on additionne les premiers termes de  $I^-$  (et on note  $S_{N_2}^-$  la somme correspondante) jusqu'à ce que  $S_{N_1}^+ + S_{N_2}^-$  soit juste en-dessous de  $\lambda$ . Ceci est possible car  $\lim (S_N^-) = -\infty$ .
- on recommence : on additionne les termes suivants de  $I^+$  jusqu'à ce que la somme  $S_{N_3}^+ + S_{N_2}^-$  dépasse  $\lambda$  à nouveau (ce qui implique  $N_3 > N_1$ ). Et ainsi de suite.

Puisque  $\lim (a_n) = 0$  on est sûr que la suite  $\left( S_{N_{2n+1}}^+ + S_{N_{2n+2}}^- \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\lambda$ . Par construction ce procédé conduit à faire apparaître une et une seule fois chaque  $a_n$  au bout d'un moment, ce qui correspond bien à une permutation des termes de la série de départ ; la nouvelle somme vaut  $\lambda$ . Ce procédé s'adapte facilement pour construire des séries divergentes.

On peut montrer, en utilisant des techniques un peu plus sophistiquées (complétude de  $\mathbb{R}$  et critère de Cauchy), que le phénomène de Riemann couvre tous les cas pathologiques réels. Les cas non pathologiques sont ceux couverts par le résultat suivant.

**Théorème** (convergence absolue). *Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres complexes. Si  $\sum |a_n|$  converge alors  $\sum a_n$  converge également et la somme de la série ne dépend pas de l'ordre des termes.*

On dit dans ce cas que la série  $\sum a_n$  converge absolument.

## 2. Sommation des séries entières convergentes

Pour traiter de problèmes plus généraux, en particulier ceux découlant de la physique, on a besoin non seulement des opérations algébriques habituelles mais également de manipuler des fonctions et leurs dérivées. Aussi est-il naturel d'introduire la notion de séries de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$  où, pour un point  $x$  donné, on considère la série numérique associée  $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ . Cet article n'est pas le lieu pour un exposé général de la théorie des séries de fonctions, d'autant plus que nous n'allons considérer qu'un seul type de telles séries, celles qui représentent des « polynômes de degré infini ».

### 2.1. Sommation naturelle

Étant donné une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres complexes on appelle *série entière* de l'indéterminée  $x$  l'objet formel

$$\sum a_n x^n .$$

L'ensemble de ces séries, noté  $\mathbb{C}[[x]]$ , hérite de la structure d'algèbre des séries numériques si on comprend  $x$  comme un nombre complexe. À ce titre cette écriture est ambiguë, mais on la comprendra par défaut comme une série formelle en l'indéterminée  $x$ , et non comme la série numérique sous-jacente. Ces objets ont été très étudiés (EULER, ABEL, CAUCHY entre autres).

Bien sûr quand seulement un nombre fini des termes  $a_n$  est non nul on identifie la série entière avec le polynôme correspondant. C'est l'exemple le plus simple de convergence des séries entières. D'autres formules pourtant, comme

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , semblent indiquer qu'il existe une notion de convergence pour une plus large classe de séries entières. Pour donner un sens précis à ce terme, nous avons d'abord besoin du théorème-définition suivant : un classique.

**Théorème** (rayon de convergence). *Étant donné  $\sum a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$  il existe un unique  $\rho \in [0, +\infty]$ , appelé son rayon de convergence, tel que :*

1. *Si  $x \in \mathbb{C}$  satisfait  $|x| < \rho$  alors la série numérique  $\sum a_n x^n$  est convergente.*
2. *Si  $|x| > \rho$  alors la série numérique  $\sum a_n x^n$  est divergente.*

*En outre si une des suites  $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(|a_{n+1}|/|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $[0, +\infty]$  alors la limite est  $\frac{1}{\rho}$ , étant bien entendu que  $\frac{1}{0} = +\infty$  et  $\frac{1}{+\infty} = 0$ .*

*Remarque.* Si  $|x| = \rho > 0$  dans le théorème précédent alors on ne peut rien dire : la série numérique correspondante peut converger simplement, absolument ou pas du tout.

**Définition.** On dira que la série entière  $\sum a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$  est *convergente* si son rayon de convergence  $\rho$  est strictement positif (éventuellement infini). On notera  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

la somme de cette série, qui définit une fonction sur le disque ouvert  $D_\rho$  de centre 0 et de rayon  $\rho$  (éventuellement sur  $D_{+\infty} := \mathbb{C}$ ). Une telle fonction est qualifiée de *fonction analytique* au voisinage de 0. Le domaine  $D_\rho$  sera appelé le *disque de convergence* de la série.

Pour la durée de l'exposé on notera  $\mathcal{S}_{NAT}$  l'opérateur de sommation ainsi défini.

D'après le premier paragraphe, la *série entière géométrique*  $\sum x^n$  a un rayon de convergence égal à 1, et sa somme est la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{1-x}.$$

Donnons aussi l'exemple d'une série *divergente* (rayon de convergence nul), la *série d'Euler*

$$H := \sum (n!) x^{n+1}.$$

## 2.2. Un petit détour au pays des fonctions d'une variable complexe

Une fonction d'une variable complexe  $f : x \in \mathbb{C} \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$  peut se comprendre comme une application réelle  $(a, b) \mapsto (R(a, b), I(a, b))$  où  $x = a + ib$  et  $f(x) = R(a, b) + iI(a, b)$ . La différence essentielle entre les deux points de vue est que  $\mathbb{C}$  étant naturellement un corps on peut considérer des taux d'accroissement complexes. Aussi peut-on définir la dérivée au sens complexe de  $f$  en  $x_0$  par la limite, si elle existe,

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Considérée comme une application réelle on dispose au contraire des quatre dérivées partielles  $\frac{\partial R}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial b}$ ,  $\frac{\partial I}{\partial a}$  et  $\frac{\partial I}{\partial b}$ , qui forment sa matrice jacobienne. Il est assez facile d'imaginer que peu d'applications différentiables  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vont alors correspondre à des fonctions dérivables au sens complexe : la donnée de ces quatre nombres réels, *a priori* arbitraires, doit satisfaire une condition de compatibilité pour engendrer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre dérivé. Cette condition (dite de Cauchy-Riemann) caractérise les fonctions admissibles selon certaines propriétés assez restrictives de symétrie pour leur matrice jacobienne.

Une fonction  $f$  qui est dérivable au sens complexe sur un domaine  $\Omega \subset \mathbb{C}$  (un ouvert connexe non vide) sera dite *holomorphe* sur  $\Omega$ . Ces fonctions sont d'une grande importance (mais qui passe souvent inaperçue) dans quasi tous les domaines scientifiques. Leur étude révèle de bien étranges et fascinantes propriétés de « rigidité » qui permettent de comprendre leur rareté et les distinguent nettement des fonctions dérivables au sens réel :

- une fonction holomorphe sur  $\Omega$  est automatiquement infiniment dérivable sur  $\Omega$ ,
- une telle fonction est même analytique au voisinage de chaque point  $x_0$  de  $\Omega$ , et son rayon de convergence en  $x_0$  est au moins égal à la distance entre  $x_0$  et le bord de  $\Omega$ ,
- si  $|f|$  admet un maximum local alors  $f$  est constante,
- si  $\Omega = \mathbb{C}$  et que  $f$  est bornée alors  $f$  est constante,
- si  $f$  est nulle sur un petit disque alors  $f$  est nulle partout (principe du prolongement analytique).

On confond souvent la notion d'être holomorphe sur  $\Omega$  avec celle d'être analytique sur  $\Omega$  (vocabulaire que nous retiendrons ici), puisqu'il se trouve que ces définitions sont équivalentes. La dernière propriété permet alors d'identifier terme à terme les développements en séries entières. Par exemple si pour tout  $x$  proche de 0 on a  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$  alors

$a_n = b_n$  pour tout  $n$ , ce qui n'a *a priori* rien d'évident. Une série entière convergente se comporte donc bien comme un polynôme de degré infini!

Nous retrouverons dans la suite une fonction particulière, le « logarithme complexe », qui n'est pas analytique sur  $\mathbb{C}$ . Si on considère  $\log$  comme la réciproque de  $\exp$  alors la  $2i\pi$ -périodicité de cette dernière pose problème, comme nous allons l'illustrer. L'écriture

$$\log x = \ln |x| + i \arg x, \quad x \neq 0$$

permet d'identifier le problème : l'argument d'un nombre complexe  $x$  n'est bien défini que *modulo*  $2\pi$ . Aussi la fonction logarithme complexe ne pourra pas être continue si on s'autorise à « tourner autour de 0 ». En effet, partant du point 1 avec argument 0, on peut suivre le cercle unité décrit par  $x(t) := e^{2i\pi t}$  lorsque  $t \in [0, 1]$ . On aura donc  $\log x(t) = 2i\pi t$ . Mais pour  $t = 0$  et  $t = 1$  on n'obtient pas la même image de  $1 = x(0) = x(1)$  ! On dit que la « fonction » logarithme est *multivaluée* : si on tourne  $k \in \mathbb{Z}$  fois autour de 0 alors on ajoute  $2ik\pi$  à la valeur du logarithme initial. Par convention, on suppose que le logarithme initial coïncide avec le logarithme népérien sur la demi-droite  $\mathbb{R}_{>0}$ .

Pour clore cette discussion, remarquons que les « fonctions » racines sont aussi multivaluées, d'après la relation  $x^\alpha = \exp(\alpha \log x)$ . Après avoir tourné autour de 0 un nombre impair de fois la valeur de  $\sqrt{x}$  est multipliée par  $-1$ , alors qu'elle reste inchangée si on tourne un nombre pair de fois autour de l'origine. Notons enfin que rien n'empêche  $\alpha$  d'être un nombre complexe quelconque...

### 2.3. Sommation de Mittag-Leffler

La remarque suivant le théorème du rayon de convergence mérite d'être complétée. En effet, un résultat d'ABEL énonce que si pour un certain  $x_0$  avec  $|x_0| = \rho$  la série numérique  $\sum a_n x_0^n$  est convergente alors la somme de la série entière se prolonge par continuité en  $x_0$  par  $\mathcal{S}_{NAT}(\sum a_n x_0^n)$ . On montre ainsi que

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

en se servant de la relation  $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$  valable pour  $x \in ]-1, 1[$  et obtenue en intégrant terme à terme la série géométrique. La réciproque est fautive comme le montrera l'exemple suivant la définition.

**Définition** (sommation de Mittag-Leffler). Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière convergente et supposons que sa somme est la restriction à  $D_\rho$  d'une fonction  $f$  analytique sur un domaine  $\Omega$ . On dira alors que  $\sum a_n x^n$  est *sommable au sens de Mittag-Leffler* sur  $\Omega$  et on notera

$$\mathcal{S}_{ML} \left( \sum a_n x^n \right) := f$$

sa somme au sens de Mittag-Leffler.

Ainsi la série géométrique  $\sum x^n$  est sommable au sens de Mittag-Leffler sur le domaine  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$  et dans ce cas

$$\mathcal{S}_{ML} \left( \sum x^n \right) = \frac{1}{1-x}.$$

On retrouve donc pour  $x := -1$  l'égalité

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2},$$

ce qui d'une certaine manière confirme Cesàro. En faisant  $x := 2$  on obtient également la relation amoral suivante :

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots = \frac{1}{1-2} = -1.$$

EULER expliquait pourquoi on obtient un résultat négatif en n'additionnant que des termes positifs par l'argument osé suivant : le membre de gauche tend tellement vers  $+\infty$  qu'il finit par « dépasser » cette valeur et revient par  $-\infty$ , mimant le comportement de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  quand on passe de  $0_+$  à  $0_-$ .

Examinons maintenant le cas de la série entière  $\sum x^{n!}$ . Il n'y a que très peu de termes non nuls, ce qui pourrait suggérer que cette série est très convergente : finalement, on n'additionne « pas beaucoup » de termes puisque  $a_n = 1$  si  $n \in \mathbb{N}!$  et  $a_n = 0$  sinon. Cette série est un exemple de *série lacunaire*. Ces séries sont, contrairement aux apparences, des séries très méchantes. En effet si  $|x| < 1$  alors

$$\sum_{n \leq N} |x|^{n!} \leq \sum_{n \leq N!} |x|^n \leq \frac{1}{1-|x|}$$

montre l'inégalité  $\rho \geq 1$ . En revanche si  $x = e^{2i\pi p/q}$  avec  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  alors  $x^{n!} = 1$  dès que  $n \geq q$ , ce qui montre que  $\sum e^{2i\pi(n!)p/q}$  est une série numérique divergente et donc que  $\rho \leq 1$ . De plus, comme l'ensemble des tels points  $x$  est dense dans le cercle unité, la somme de  $\sum x^{n!}$  ne peut pas être la restriction d'une fonction analytique sur un domaine strictement plus grand que le disque unité ouvert !

*Remarque.* Cet exemple souligne par ailleurs que la série numérique  $\sum a_n$  avec  $a_n = 0$  si  $n \notin \mathbb{N}!$  et  $a_n = 1$  sinon, qui est sommable au sens de Cesàro de somme nulle, ne peut correspondre à la somme de Mittag-Leffler d'une série entière. En outre la série  $\sum 2^n$ , de somme

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots = -1$$

au sens de Mittag-Leffler, n'est pas sommable au sens de Cesàro. Ces deux notions portent donc sur des ensembles de séries distincts.

Néanmoins si une série numérique  $\sum b_n \in \mathcal{E}_{CES}$  s'obtient comme  $\mathcal{S}_{ML}(\sum a_n x^n)$  évaluée en un point  $x_0$  alors  $\mathcal{S}_{CES}(\sum b_n) = \mathcal{S}_{ML}(\sum a_n x^n)(x_0)$  (en fait on peut montrer aisément que  $x_0$  est dans le pire des cas sur le bord du disque de convergence de  $\sum a_n x^n$ ). Autrement dit, si une série est à la fois sommable au sens de Cesàro et au sens de Mittag-Leffler alors les deux sommes coïncident.

Il existe cependant des subtilités... En effet la fonction  $f : x \mapsto \frac{x+1}{1+x+x^2}$ , analytique sur  $\mathbb{C} \setminus \{e^{2i\pi/3}, -e^{2i\pi/3}\}$ , est la somme de la série entière convergente

$$1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^8 + x^9 - \dots$$

D'une part on comprend ici la nécessité de recourir au champ complexe pour expliquer la divergence de cette série quand  $|x| > 1$ , car les points à problème sont invisibles depuis l'axe réel. D'autre part, si on n'y prend pas garde on a envie d'écrire  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots = f(1) = \frac{2}{3}$ , ce qui pourrait montrer une incohérence avec la formule précédente. En fait, comme l'avait judicieusement remarqué EULER, ce qu'il est correct d'écrire dans ce cas est

$$1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + 1 + 0 - \dots = \frac{2}{3}$$

qui est d'ailleurs la somme de Cesàro de la série. Aussi permuter un nombre infini de termes n'est pas une opération anodine et rappelle l'étrange phénomène de la première partie. De toute façon, au sens où nous avons défini la notion de série numérique, ces objets ne sont pas égaux !

Pour que la sommation de Mittag-Leffler soit cohérente, il est naturel de poser la question suivante.

*Soit  $\sum a_n x^n$  une série entière convergente sur le disque  $D_\rho$ . Peut-il exister deux fonctions analytiques dont les restrictions à  $D_\rho$  soit égales à la somme de la série et qui prennent des valeurs distinctes en un point (commun) de leurs domaines ?*

La réponse est en général négative. La proposition ci-dessous montre que, cependant, la réponse est (heureusement !) positive dans un grand nombre de cas.

**Proposition.** *Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deux domaines contenant le disque  $D_\rho$ . Soient  $f_1$  et  $f_2$  deux fonctions analytiques respectivement sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  dont les restrictions à  $D_\rho$  sont les mêmes. Alors, si  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  est connexe (d'un seul tenant),  $f_1(z) = f_2(z)$  pour tout  $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ .*

Ce résultat n'est pas de démonstration ardue : c'est une conséquence directe du principe du prolongement analytique. Montrons que l'hypothèse de connexité exigée sur  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  n'est pas superflue en donnant un exemple où la réponse est négative.

Pour cela considérons la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

qui converge sur le disque unité ouvert et dont la somme coïncide avec  $x \mapsto \log(1+x)$ . Nous avons vu que la « fonction » logarithme est multivaluée. On peut par exemple choisir la fonction  $f_1 : x \mapsto \log(1+x)$  sur le domaine rectangulaire  $\Omega_1 := ]-1, 3[ \times ]-i, i[$ , cette fonction étant analytique car ici on ne tourne pas autour de  $-1$ . On aura alors

$$f_1(2) = 2 - 2 + \frac{8}{3} - 4 + \frac{32}{5} - \frac{32}{3} + \dots = \ln 3.$$

Mais si on choisit  $f_2 : x \mapsto \log(1+x)$  sur le domaine  $\Omega_2$  représenté à la figure 1 alors on obtiendra

$$f_2(2) = 2 - 2 + \frac{8}{3} - 4 + \frac{32}{5} - \frac{32}{3} + \dots = \ln 3 + 2i\pi$$

(la fonction  $f_2$  est aussi analytique car même si on « tourne autour » de  $-1$  on ne peut jamais revenir à son point de départ en restant dans  $\Omega_2$ ). On voit ainsi comment la sommation de Mittag-Leffler permet d'associer à cette série numérique n'importe quelle valeur prise dans  $\ln 3 + 2i\pi\mathbb{Z}$ . La somme de Mittag-Leffler de  $\sum \frac{2(-2)^n}{n+1}$  n'est donc pas bien définie.

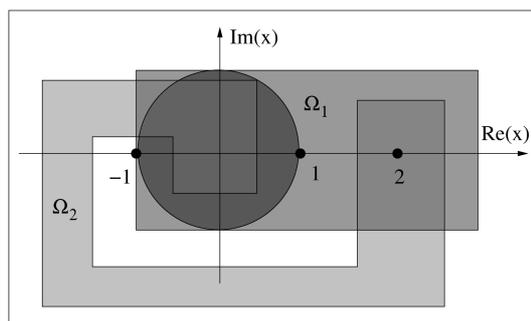


FIG. 1 – Deux domaines pour lesquels la fonction multivaluée  $x \mapsto \log(1+x)$  ne donne pas le même prolongement.

*Remarque.* On pourrait penser que, la partie réelle ne changeant pas, le « bon » choix pour la somme de la série est  $\ln 3$ . Il n'est cependant pas possible de donner un sens général à cette remarque : en reprenant cet exemple pour la fonction multivaluée  $x \mapsto \sqrt{1+x}$  on peut associer  $\sqrt{3}$  ou  $-\sqrt{3}$  à la série numérique correspondante. Que choisir ? Pire, si  $\alpha > 0$  est irrationnel l'ensemble des choix pour  $(1+2)^{1/\alpha}$  est dense dans le cercle de rayon  $\sqrt[\alpha]{3}$  !

## 2.4. Dérivation

On peut introduire la notion « purement symbolique » de *série entière dérivée* de  $\sum a_n x^n$  comme étant :

$$\frac{d}{dx} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n := \sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1) a_{n+1} x^n .$$

En particulier

$$\frac{d}{dx} \sum \frac{x^n}{n!} = \sum \frac{x^n}{n!}$$

redonne la relation différentielle fondamentale de l'exponentielle.

Quand la série entière est convergente de somme  $f$  alors sa série dérivée est aussi convergente. On a même un résultat plus fort : l'acte de dériver ne change pas le rayon de convergence. Et mieux la somme de la série dérivée est égale à la dérivée (au sens complexe) de la fonction  $f$ . Par conséquent  $f$  est une fonction holomorphe. Par induction ceci montre aussi que  $f$  est infiniment dérivable (au sens complexe) sur tout son disque de convergence.

Bien sûr (heureusement...) si tous les  $a_n$  sont réels alors la fonction réelle  $x \in ]-\rho, \rho[ \mapsto f(x)$  est infiniment dérivable (au sens réel). Et on peut montrer que la série  $\sum a_n x^n$  est égale à la *série de Taylor* de  $f$  définie par

$$\mathcal{T}(f) := \sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n .$$

Ceci permet de constater que toutes les fonctions réelles infiniment dérivables ne sont pas des restrictions de fonctions analytiques comme le montre l'exemple de la fonction

$$g : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 , \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

Elle est infiniment dérivable en 0 et on montre par récurrence que  $g^{(n)}(0) = 0$ , c'est-à-dire  $\mathcal{T}(g) = 0$ . On dit que l'on a affaire à une *fonction plate* en 0. Pour autant  $g(x) \neq 0$  si  $x \neq 0$ , ce qui montre que  $g$  est différente de  $\mathcal{T}(g)$  et donc que  $g$  n'est pas la restriction d'une fonction analytique.

On dispose de la caractérisation suivante des restrictions à un intervalle réel de fonctions complexes holomorphes que l'on appellera aussi *fonctions analytiques (réelles)*. On la donne ici au voisinage de 0.

**Théorème.** *Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  définie sur un petit intervalle ouvert autour de 0 est la restriction d'une fonction complexe analytique au voisinage de 0 si, et seulement si :*

1. *La fonction  $f$  est infiniment dérivable en 0.*
2. *La série de Taylor de  $f$  est convergente.*
3. *La somme de  $\mathcal{T}(f)$  coïncide avec  $f$ .*

Plus généralement un théorème de E. BOREL et RITT indique que toute série entière (divergente ou non) est la série de Taylor d'une fonction infiniment dérivable.

**Théorème (BOREL, RITT).** *L'opérateur  $\mathcal{T} : C^\infty(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}[[x]]$  est une application linéaire surjective.*

L'exemple de la fonction  $g$  donné ci-dessus montre que l'application linéaire  $\mathcal{T}$  n'est pas un isomorphisme, ce qui est assez embêtant dans la pratique mais a conduit à l'élaboration de la théorie des développements asymptotiques et de la sommation au sens de Borel-Laplace des séries entières divergentes de type Gevrey, ce que nous allons aborder dans la partie suivante. Ce manque d'injectivité sous-entend en particulier qu'il n'est pas possible d'obtenir une sommation à la Mittag-Leffler pour les développements de Taylor de fonctions  $C^\infty$  qui soit cohérente.

### 3. Sommation de certaines séries entières divergentes

Dans cette section nous allons essayer d'étendre le principe de la sommation de Mittag-Leffler aux séries entières de rayon de convergence nul. Pour une série ayant un rayon de convergence non nul, on dispose d'une information (une fonction analytique) que l'on propage en dehors du disque de convergence par prolongement analytique. Ici la principale difficulté provient de l'absence *a priori* d'information à propager. C'est pour cela que les séries auxquelles on pourra associer une somme sont celles qui contiennent, de façon cachée, de l'information. Par exemple une des méthodes employées par EULER pour établir l'égalité

$$-0! + 1! - 2! + 3! - 4! + \dots \simeq 0,5963\dots$$

utilise une équation différentielle. La série d'Euler  $H = \sum (n!) x^{n+1}$  est en effet l'unique solution sous forme de série entière de l'équation différentielle linéaire

$$x^2 \frac{dy}{dx} = y - x.$$

On peut l'intégrer par quadratures en utilisant la variation de la constante sur l'intervalle  $] -\infty, 0[$ . On obtient la fonction

$$y_0(x) := e^{-\frac{1}{x}} \int_0^x e^{\frac{1}{t}} \frac{dt}{t}.$$

Cette fonction est l'unique solution qui se prolonge par continuité en  $0_-$  par  $y_0(0) := 0$ . En fait on peut prolonger  $y_0$  sur  $\mathbb{R}$  en une fonction infiniment dérivable en posant, par exemple,

$$y_0 : x \in ]0, +\infty[ \mapsto e^{-\frac{1}{x}} \int_1^x e^{\frac{1}{t}} \frac{dt}{t}.$$

On peut montrer par récurrence, en dérivant successivement l'équation différentielle et en faisant  $x = 0$ , que

$$\mathcal{T}(y_0) = H.$$

Il est ainsi compréhensible d'identifier  $y_0(-1)$  avec la « somme »

$$-0! + 1! - 2! + 3! - \dots = -e \int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} dt \simeq 0,5963.$$

Il faut cependant effectuer ces manipulations avec précaution ! Par exemple pour  $x = 1$  (plus généralement pour  $x > 0$ ) le choix de  $y(x)$  est ambiguë. En effet n'importe quelle fonction

$$y_c : x \geq 0 \mapsto y_0(x) + ce^{-\frac{1}{x}} \quad (c \in \mathbb{R})$$

est aussi solution de l'équation différentielle sur  $]0, +\infty[$  et prolonge  $y_0 : ]-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  en une fonction infiniment dérivable de même série de Taylor. Ainsi  $1! + 2! + 3! + \dots$  pourrait être associée à n'importe quel réel (ou nombre complexe en prenant  $c \in \mathbb{C}$ ). Plutôt gênant : il n'y a pas de choix « naturel » de la somme. Cette ambiguïté n'apparaît pas lorsque  $x < 0$  car les autres solutions  $y_c$  de l'équation différentielle sur l'intervalle  $] -\infty, 0[$  ne se prolongent pas en 0 (elles tendent vers l'infini), et donc n'ont pas de série de Taylor en ce point. Nous allons tenter dans ce paragraphe de limiter l'ambiguïté en réduisant à deux le nombre de candidats à la valeur de cette somme.

### 3.1. Séries entières de classe Gevrey

**Définition.** On dit que la série entière  $\sum a_n x^{n+1}$  est de classe Gevrey (sous-entendu, 1-Gevrey) si la série entière

$$\mathcal{B}\left(\sum a_n x^{n+1}\right) := \sum \frac{a_n}{n!} z^n \in \mathbb{C}[[z]]$$

est convergente.

On notera  $\mathbb{C}[[x]]_1$  l'espace vectoriel de ces séries. L'opérateur  $\mathcal{B}$  est linéaire (mais ne respecte pas la multiplication) et la série entière  $\mathcal{B}\left(\sum a_n x^{n+1}\right)$  s'appelle la *transformée de Borel* de la série entière  $\sum a_n x^{n+1}$ . Si on part d'une série entière convergente alors le rayon de convergence de sa transformée est infini (en particulier une série convergente est de classe Gevrey).

*Remarque.* La série  $\sum a_n x^{n+1}$  est de classe Gevrey si, et seulement si, il existe deux constantes positives  $A, T > 0$  telles que

$$|a_n| \leq A \times T^n \times n!.$$

Le plus petit  $T$  possible s'appelle le *type* de la série et coïncide avec le rayon de convergence de sa transformée de Borel.

La série d'Euler  $H$  est de classe Gevrey (et son type est 1). En effet

$$\mathcal{B}(H) = \sum z^n$$

est convergente sur le disque  $D_1$  et de somme

$$B_H : z \mapsto \frac{1}{1-z}.$$

Nous allons montrer comment l'ambiguïté dans le choix de la valeur de  $1! + 2! + \dots$ , notée plus haut, découle de la présence d'un pôle en  $z = 1$  pour cette fonction. Pour cela tentons de répondre à la question, proche du théorème de BOREL et RITT.

*Comment construire une fonction  $f$  telle que  $\mathcal{T}(f) = \sum a_n x^{n+1}$  à partir de la connaissance de  $\mathcal{B}(\sum a_n x^{n+1})$  ?*

Cette question, en toute généralité, est loin d'être évidente... mais possède une réponse pour les séries de classe Gevrey ! L'exemple suivant va illustrer cette construction dans un cas particulier. Considérons la *transformée de Laplace* dans la direction réelle négative de la fonction  $B_H$ .

$$\mathcal{L}(B_H) : x < 0 \mapsto \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-z/x}}{1-z} dz.$$

Cette fonction est bien définie (c'est-à-dire que l'intégrale généralisée est convergente). Les changements de variables  $u := 1 - z$  puis  $t := x/u$  donnent

$$\mathcal{L}(B_H)(x) = e^{-1/x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{u/x}}{u} du = e^{-1/x} \int_0^x \frac{e^{1/t}}{t} dt = y_0(x).$$

Ainsi on a « synthétisé » la solution  $y_0$  de l'équation différentielle  $x^2 y' = y - x$  qui se prolonge en  $0_-$ , et on sait déjà que  $\mathcal{T}(y_0) = H$ . Il est possible de mimer cette construction dans un cadre assez général en considérant la transformée de Laplace de la transformée de Borel. Ce procédé est intéressant dans la mesure où il est « automatique » et en particulier ne nécessite pas la connaissance préalable d'une équation fonctionnelle satisfaite par la série.

Nous allons donner des définitions précises permettant de comprendre la relation

$$(\forall S \in \mathbb{C}[[x]]_1) \quad \mathcal{T}(\mathcal{L}(\mathcal{B}(S))) = S$$

grâce à laquelle on peut associer une somme à une série Gevrey *a priori* divergente.

### 3.2. Développement asymptotique et somme de Borel-Laplace

**Définition.** Soit  $f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue sur  $]0, r]$  pour un certain  $r > 0$  et  $S := \sum a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ . On dit que  $f$  admet  $S$  comme *développement asymptotique* en  $0_+$  si :

$$(\forall N \in \mathbb{N}) (\exists C_N > 0) (\forall 0 < x < r) \quad \left| f(x) - \sum_{n \leq N} a_n x^n \right| < C_N x^{N+1}.$$

En particulier  $f$  doit se prolonger en 0 en une fonction dérivable à droite en ce point.

Par abus de notation on écrira  $\mathcal{T}(f) := S$  le développement asymptotique de  $f$  en  $0_+$  pour la durée de l'exposé. Une notation plus standard est  $DA(f)$ , mais comme une fonction

infiniment dérivable en 0 admet toujours sa série de Taylor  $\mathcal{T}(f)$  comme développement asymptotique en 0, nous conserverons cette notation pour désigner le développement asymptotique de fonctions qui ne se prolongeraient pas à gauche de 0 en des fonctions infiniment dérivables.

On a vu précédemment que la transformée de Laplace d'une fonction  $B$  analytique sur  $[0, +\infty[$

$$\mathcal{L}(B) : x \mapsto \int_0^{+\infty} B(z) e^{-z/x} dz$$

a permis de trouver, pour la série d'Euler  $H$ , une fonction dont la série de Taylor en 0 est précisément  $H$ . Essayons maintenant d'indiquer pourquoi (et comment) cette construction s'applique plus généralement. On suppose, pour le moment, que l'intégrale généralisée précédente converge (l'opérateur  $\mathcal{L}$  ainsi défini est linéaire). Cela est le cas si  $B$  « ne tend pas trop vite » vers l'infini. L'idée essentielle « qui fait que ça marche » repose sur la constatation calculatoire suivante. On montre aisément grâce à une intégration par parties que les fonctions  $\mathcal{L}(z^n)$  sont liées par la relation de récurrence, valable pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{L}(z^{n+1}) = (n+1)x\mathcal{L}(z^n) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(1) = x,$$

de sorte que

$$\mathcal{L}(z^n) = n! x^{n+1}.$$

Écrivons  $\mathcal{T}(B) = \sum b_n x^n$ . Si on procède sans se poser de question on peut avoir envie d'écrire, en utilisant la linéarité de  $\mathcal{T}$  et de  $\mathcal{L}$ ,

$$\mathcal{T}(\mathcal{L}(B)) = \mathcal{L}(\mathcal{T}(B)) = \mathcal{L}\left(\sum b_n z^n\right) = \sum b_n \mathcal{L}(z^n) = \sum (b_n n!) x^{n+1}.$$

Par construction cette série est de classe Gevrey et sa transformée de Borel coïncide avec  $B$ . Bien sûr ce raisonnement n'est pas possible à mener en toute généralité. Le problème principal vient du fait qu'une fonction analytique  $B$  en 0 n'est pas forcément la restriction d'une fonction analytique jusqu'à l'infini. Par ailleurs, et c'est un euphémisme, inverser les signes «  $\int$  » et «  $\sum$  » nécessite quelques précautions ! Pour éviter le premier écueil on utilise une transformée de Laplace *incomplète*. Si  $B$  une fonction analytique sur le disque  $D_\rho$  on lui associe, pour un point base  $z_0 \in D_\rho$  fixé, la fonction

$$\mathcal{L}(B, z_0) : x \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mapsto \int_0^{z_0} B(z) e^{-z/x} dz.$$

Notons qu'ici l'intégrale  $\int_0^{z_0}$  s'effectue dans le champ complexe : on calcule en fait l'intégrale de chemin  $\int_\gamma$  où  $\gamma$  est le segment reliant 0 à  $z_0$  dans  $\mathbb{C}$ . L'avantage de l'emploi d'une transformée incomplète est que l'on intègre uniquement sur le disque de convergence de la transformée de Borel : on n'a pas besoin de prolonger  $B$  jusqu'à l'infini. Le développement asymptotique de la fonction  $\mathcal{L}(B, z_0)$  en  $0_+$  va encore être la série de départ. Pour bien faire il faudrait établir des majorations afin de prouver convenablement que les conditions de la définition du développement asymptotique sont satisfaites. Ce n'est pas le propos ici, mais c'est possible.

**Théorème** (Borel, Ritt, Gevrey). *Soit  $\sum a_n x^{n+1} \in \mathbb{C}[[x]]_1$  et soit  $B$  sa transformée de Borel. Pour tout  $z_0 \neq 0$  dans le disque de convergence  $D_\rho$  de  $B$  :*

- *la transformée de Laplace  $\mathcal{L}(B, z_0)$  considérée comme une fonction de la variable réelle  $x$ , admet un développement asymptotique en 0 et on a  $\mathcal{T}(\mathcal{L}(B, z_0)) = \sum a_n x^{n+1}$ ,*

- considérée comme une fonction de la variable complexe  $x$ ,  $\mathcal{L}(B, z_0)$  est analytique sur le secteur ouvert  $V$  d'ouverture  $\pi$

$$V\left(z_0, \frac{\pi}{2}\right) = \left\{x \in \mathbb{C} : 0 < |x|, \arg(z_0/x) \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \right\}.$$

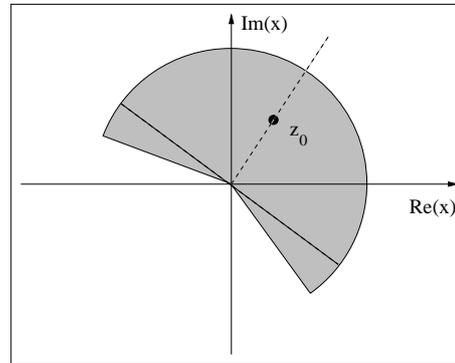


FIG. 2 – Un secteur d'analyticité de la transformée de Laplace dans une direction qui n'est pas une direction de Stokes

Quand  $B$  se prolonge jusqu'à l'infini le long de la demi-droite  $z_0\mathbb{R}_{\geq 0}$  de direction  $z_0$  alors  $\mathcal{L}(B, z_0)$  est analytique sur un secteur d'ouverture plus grande que  $\pi$ . Sinon on dit que  $z_0$  correspond à une *direction de Stokes* de  $B$ . Moralement parlant, ces directions de Stokes correspondent aux « points à problème » de  $B$ . Ainsi dans l'exemple de la série d'Euler l'unique direction de Stokes est l'axe réel positif car  $\frac{1}{1-z}$  a un p le en 1.

**Définition** (sommation de Borel-Laplace). On dira que la série  $\sum a_n x^{n+1} \in \mathbb{C}[[x]]_1$  est sommable au sens de Borel-Laplace si l'ensemble de ses directions de Stokes est fini (disons qu'il comporte  $d$  directions  $z_1, \dots, z_d$ ). On associe alors à cette série  $d + 1$  objets  $(f_j, V_j)_{1 \leq j \leq d+1}$  où  $V_j$  est un secteur d'ouverture plus grande que  $\pi$ ,  $f_j$  est une fonction analytique sur  $V_j$  provenant de la transformée de Laplace complète, et deux secteurs consécutifs  $V_j$  et  $V_{j+1}$  s'intersectent le long de la direction  $z_j$ . On appellera *somme au sens de Borel-Laplace* de la série Gevrey  $\sum a_n x^{n+1}$  la donnée de

$$\mathcal{S}_{BL}\left(\sum a_n x^{n+1}\right) := (f_j, V_j)_{1 \leq j \leq d+1}.$$

*Remarque.* Si  $\sum a_n x^{n+1}$  est au départ une série entière convergente de somme  $f$  alors  $f_j$  est la restriction de  $f$     $V_j$ . Dans ce cas il n'y a aucune direction de Stokes ( $d = 0$ ), et  $\mathcal{S}_{BL}$  coïncide donc avec la somme naturelle de la série entière. Ouf! Par ailleurs il existe des séries Gevrey qui ne sont pas sommables au sens de Borel, c'est le cas de la série  $\sum ((n! + 1)!) x^{n+1}$  dont la transformée de Borel  $\sum z^{n!}$  ne se prolonge à l'infini le long d'aucune direction.

Plusieurs mathématiciens (MALGRANGE, RAMIS, SIBUYA) ont trouvé une caractérisation des familles  $(f_j, V_j)$ , s'obtenant comme la somme de Borel-Laplace d'une série Gevrey. Et, surtout!, ils ont montré que la correspondance entre cette série et cette somme de Borel-Laplace est *univoque*. L'opérateur  $\mathcal{S}_{BL}$  est donc un isomorphisme, c'est-à-dire un bon moyen de donner un sens à certaines séries divergentes, en particulier (la plupart de) celles qui viennent de la physique.

Pour conclure, revenons à notre série d'Euler  $H$ . Sa somme au sens de Borel-Laplace est

donnée par

$$\begin{aligned} f_1 : x \in V_1 := V\left(i, \frac{\pi}{2}\right) &\longmapsto \mathcal{L}(i\infty, H)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-iz/x}}{1-iz} idz \\ f_2 : x \in V_2 := V\left(-i, \frac{\pi}{2}\right) &\longmapsto \mathcal{L}(-i\infty, H)(x) = \int_0^{-\infty} \frac{e^{-iz/x}}{1-iz} idz. \end{aligned}$$

On peut associer de manière essentiellement unique une valeur à  $\sum (n!) x_0^{n+1}$  pour tout complexe  $x_0$  non réel, en prenant la valeur  $f_1(x_0)$  ou  $f_2(x_0)$  selon que  $x_0 \in V_1$  ou  $x_0 \in V_2$ . On s'aperçoit de même que si  $x_0 \leq 0$  alors  $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ , et en particulier

$$-0! + 1! - 2! + 3! + \dots = f_1(-1) = f_2(-1) \simeq 0,5963.$$

Par contre si  $x_0 > 0$  (dans la direction de Stokes) il y a potentiellement deux choix pour la somme de Borel-Laplace de  $H$ . Il n'y en a pas, du point de vue développé ici, un qui soit meilleur que l'autre. Aussi il n'est pas possible de décider entre

$$0! + 1! + 2! + 3! + \dots \simeq \begin{cases} 0,697176 + 1,1557i \\ \text{ou} \\ 0,697176 - 1,1557i \end{cases}.$$

Le fait que plusieurs sommes peuvent être associées à cette série est à rapprocher des exemples de la fin du paragraphe 2, provenant de fonctions multivaluées. On remarquera aussi que ces sommes associées sont des nombres complexes non-réels! La question de savoir s'il est possible d'avoir un procédé de resommation réelle le long des directions de Stokes réelles est encore à l'heure actuelle une question ouverte, et finalement assez ardue, dans le cas général d'une série solution d'une équation différentielle non-linéaire. Pour les équations linéaires, qui est le cas qui nous intéresse ici, les derniers développements de la théorie de la résurgence d'ÉCALLE permettent d'être encore plus précis et de supprimer toute ambiguïté, grâce à un procédé de moyennisation cohérent qui donne finalement pour valeur à cette série

$$0! + 1! + 2! + 3! + \dots \simeq 0,697176.$$

## 4. Applications et exemples

### 4.1. Convergence au sens des astronomes

POINCARÉ, à qui on doit la définition de développement asymptotique, a eu cette parole formidable [P] :

*« Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les 20 premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment. »*

Une bonne illustration de ce propos est donnée par les séries suivantes :

$$C := \sum \frac{(-100)^n}{n!} \quad D := \sum \frac{n!}{(-100)^n}.$$

La première est convergente au sens des géomètres, de somme  $e^{-100} \simeq 3,72 \times 10^{-44}$ , alors que la seconde est divergente (mais convergente au sens des astronomes). Pour s'en convaincre dressons le tableau des premières valeurs des sommes partielles :

$N$	$C_N$	$N$	$D_N$
0	1	0	1
1	-99	1	0,99
2	4901	2	0,9902
3	-161765,67...	3	0,990194
4	4004901,...	4	0,99019424
10	$2,50 \times 10^{13}$	10	0,99019423...
100	$5,34 \times 10^{41}$	100	0,99019423...
200	$4,22 \times 10^{24}$	200	0,99019423...
260	723,77...	260	0,99047094...
270	0,040489...	270	5,8530529...
300	$8,153 \times 10^{-16}$	300	$2,29 \times 10^{14}$

Dans les deux cas il faut aller au-delà du 250-ième terme pour que le calcul confirme les arguments mathématiques ! On comprend bien que dans cette situation les astronomes additionnent sans scrupule les premiers termes de  $D$  et justifient leur acte par la stabilité du résultat, tout en appelant divergente la série  $C$ . En fait ils procèdent à la « sommation au meilleur terme » de  $D$  : additionner les premiers termes tant qu'ils sont décroissants, et s'arrêter quand le terme ajouté se remet à croître. Ici par exemple on peut calculer que les 100 premiers termes décroissent et qu'ensuite le terme général se met à croître ; le minimum de  $\frac{n!}{100^n}$  est en effet donné par

$$\frac{100!}{100^{100}} \simeq 9,3326 \times 10^{-43}.$$

Par ailleurs si on considère la resommée de Borel-Laplace de la série d'Euler, on peut estimer grâce à un logiciel de calcul numérique

$$D = -100 \times y_0(-0,01) = -100 \int_0^{-0,01} \frac{e^{100+1/t}}{t} dt \simeq 0,990194,$$

qui donne, en apparence au moins, la même valeur que la sommation au meilleur terme. Ce qui est assez troublant mais n'est pas une coïncidence. Une étude plus fine du comportement des séries divergentes de classe Gevrey  $\sum a_n x^{n+1}$  alternées permet d'anticiper le nombre  $N$  de termes à prendre en compte et l'erreur commise entre la resommée et la somme au meilleur terme, en fonction du type de la série, c'est-à-dire des meilleures constantes  $A, T > 0$  telles que

$$|a_n| \leq A \times T^n \times n!$$

( $T$  est le rayon de convergence de la transformée de Borel). On minore ainsi ce nombre par

$$N \geq E \left( \frac{1}{|x|T} \right) \quad (\text{où } E \text{ est la partie entière})$$

si bien que dans notre cas  $N = \frac{1}{0.01 \times 1} = 100$ . Si  $x \mapsto \mathcal{L}(x)$  dénote une somme de Borel-Laplace de la série  $\sum a_n x^{n+1}$  on peut montrer que

$$\left| \sum_{n \leq N} a_n x^{n+1} - \mathcal{L}(x) \right| \leq AT^{N+1} |x|^{N+1} (N+1)!.$$

Pour l'équation d'Euler on déduit que l'erreur commise entre  $D_{100}$  et  $-100y_0(-0,01)$  est de l'ordre du dernier terme ajouté, c'est-à-dire un accord à 42 décimales pour seulement 100 termes sommés !

Ces méthodes empiriques de sommations se sont présentées aux astronomes qui calculaient des éphémérides, c'est-à-dire déterminaient les trajectoires d'objets célestes de notre système solaire.

## 4.2. Les franges d'Airy

L'optique est également un domaine où les séries divergentes ont apporté une contribution décisive. L'exemple classique est le calcul de l'intensité lumineuse présentée par un arc-en-ciel, plus précisément la position des franges d'interférences qui correspondent aux points où l'intensité s'annule. Cette dernière est le carré d'une solution de l'équation d'Airy

$$y''(x) = xy(x)$$

qui possède la forme explicite, à un facteur physique multiplicatif près,

$$Ai : x \mapsto \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(t^3/3 + xt) dt.$$

Les zéros réels de cette fonction, dite d'Airy, sont situés sur  $] -\infty, 0[$ . On peut développer  $Ai$  en 0 comme série entière de rayon de convergence infini :

$$Ai(x) = Ai(0) \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3n-2) \times (3n-5) \times \dots \times 4 \times 1}{(3n)!} x^{3n}.$$

Malheureusement les sommes partielles convergent très lentement, et AIRY n'a pu qu'avec difficulté repérer le premier zéro de la fonction  $Ai$ . C'est STOKES qui, grâce à un développement sous forme de série divergente en écrivant l'équation différentielle au voisinage de  $-\infty$ , a pu déterminer avec une précision de quatre décimales les franges suivantes en sommant uniquement les premiers termes de la série

$$\hat{Ai}(x) = R(-x^{-3/2}) \cos\left(-\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) + S(-x^{-3/2}) \sin\left(-\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

où

$$R(t) := \frac{t^{1/6}}{\sqrt{\pi}} \left( 1 + \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p a_{2p} t^{2p} \right), \quad S(t) := \frac{t^{1/6}}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^p a_{2p-1} t^{2p-1}$$

et

$$a_n := \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\Gamma(n + \frac{1}{6}) \Gamma(n + \frac{5}{6})}{2\pi \Gamma(n+1)} \sim_{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{(n-1)!}{2\pi}.$$

Cette série divergente alternée est sommable au sens de Borel-Laplace, et la sommation au plus petit terme s'accorde avec l'expérience physique. Pourtant, manipuler des séries divergentes, c'est Mal...

### 4.3. Des miettes de renormalisation

Pour terminer cet exposé et tenter d'en donner une conclusion, parlons rapidement d'applications récentes de la sommation de Borel-Laplace en électrodynamique quantique, champ théorique et expérimental très actif de la physique des particules. En pratique les propriétés recherchées d'une particule (moment magnétique, charge, ...) ne peuvent être calculées que par approximations successives, en les développant par rapport à un petit paramètre  $x$  qui caractérise l'interaction, autrement dit sous la forme de séries  $\sum a_n x^n$ . Se posent alors deux problèmes : d'une part chaque coefficient  $a_n$  est excessivement difficile à calculer, peut éventuellement être infini, et d'autre part la série obtenue va elle-même être divergente en général.

Pour déterminer  $a_n$  on doit prendre en compte une combinatoire très complexe d'interactions élémentaires, décrite sous forme de graphes par les diagrammes de Feynman associés. Le coefficient  $a_n$  se calcule en considérant les sous-graphes comportant  $n$  sommets (en fait en intégrant le long des chemins décrits par ces sous-graphes) et sa valeur peut-être infinie (notamment en présence d'un cycle dans le graphe). La méthode physique de renormalisation consiste à soustraire les bonnes quantités pour remplacer  $a_n$  par un coefficient  $b_n$  fini. Longtemps cette procédure a été qualifiée de « cuisine » et on commence juste à comprendre sur un plan théorique en quoi ces opérations sont effectivement pertinentes. Cependant on ne sait aujourd'hui calculer que les trois ou quatre premiers termes.

La série  $\sum b_n x^n$  obtenue après « renormalisation » de la série  $\sum a_n x^n$  peut être divergente, et l'on sait démontrer qu'en général elle l'est. Mais on sait aussi montrer que sa divergence est celle d'une série Gevrey alternée, et qu'il y a beaucoup de chance qu'elle soit sommable au sens de Borel-Laplace. Aussi la sommation au meilleur terme, seul outil à la disposition des physiciens actuels, se voit-elle justifiée par la théorie de la resommation. Par exemple, dans le cas du moment magnétique de l'électron, l'écart entre la valeur expérimentale mesurée et la valeur obtenue en ajoutant les trois premiers termes de la série est de l'ordre de  $10^{-9}$  ! Si, comme on le soupçonne, le type Gevrey de la série est standard alors on peut espérer que la sommation au meilleur terme soit obtenue en additionnant les 100 premiers termes, donnant une précision théorique de l'ordre de  $e^{-100}$ . Il faut pourtant tempérer cette conclusion puisque, aux échelles considérées, d'autres interactions négligées dans le modèle physique interviennent et sûrement le calcul numérique que l'on pourrait ainsi mener (s'il était faisable en temps raisonnable...) n'aurait pas une pertinence physique jusqu'à cet ordre de précision.

Néanmoins il est essentiel d'avoir compris, au niveau théorique, que des séries divergentes peuvent contenir une information physique certaine, et pourquoi. Malgré la méfiance éprouvée par les mathématiciens-censeurs des siècles passés envers ces objets maléfiques, j'espère vous avoir convaincu que ces séries ne méritent pas la mise à l'Index, malheureusement toujours en vigueur quand on les enseigne. Je dis cela sans amertume, ces objets ne pouvant être convenablement manipulés que par un public averti. Je dis plutôt cela avec malice !

## Bibliographie

- [L] J. LEFORT (1983), *Les séries divergentes chez Euler*, L'Ouvret, **31**.
- [Ly] Y. LYUBICH (2008), *Axiomatic theory of divergent series and cohomological equations*, *Fundamenta Mathematicae*, **198**.

- [M] B. MALGRANGE (1995), *Sommation des séries divergentes*, Expositiones Mathematicae, **12**.
- [P] H. POINCARÉ (1892), Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, *Gauthier-Villars*.
- [R] J.-P. RAMIS (2006), *Les séries divergentes*, Pour la Science, **350**, éd. Belin.

Loïc TEYSSIER  
Institut de Recherche Mathématique Avancée  
7, Rue René Descartes  
67000 Strasbourg  
teyssier@math.u-strasbg.fr