À PROPOS DES INVARIANTS DES NŒUDS

Francesco COSTANTINO

Résumé : On donne la définition de nœud et d'équivalence de nœuds. Puis on discute la notion d'invariant de nœuds et on en donne quelques exemples, notamment les polynômes de Jones, d'Alexander-Conway et HOMFLY.

Mots-clés : Nœud - Invariants de nœuds - Polynôme de Jones - Polynôme d'Alexander-Conway.

Introduction

Dans cet article (qui reprend et complète un exposé donné par l'auteur lors de la réunion de rentrée de l'IREM en octobre 2007) on s'intéressera à la notion de *nœud* et plus généralement à celle d'*entrelacs* en mathématiques. Un des premiers mathématiciens à étudier les entrelacs fut Carl Friedrich GAUSS qui, au début du XIX^{e} siècle, définit la notion de *nombre d'enlacements* pour une paire de nœuds. L'intérêt pour la théorie des nœuds fut ensuite agrandi par les idées de Lord KELVIN et Peter TAIT qui essayèrent de modéliser les atomes à l'aide de nœuds et d'en expliquer les différentes propriétés par une classification systématique des diagrammes de nœuds. Même si du point de vue de la physique cette idée se révéla par la suite non satisfaisante, le travail de classification de TAIT fut repris et continué pendant le XX^{e} siècle par les mathématiciens, intéressés par l'étude des propriétés *topologiques* de ces objets. En effet après la découverte par Henri POINCARÉ d'espaces de dimension 3 ayant des propriétés inattendues à l'époque (la « sphère de Poincaré »), Max DEHN inventa une façon d'associer à chaque diagramme d'entrelacs un espace de dimension 3. Cette méthode, dite « Chirurgie de DEHN », ouvrit définitivement la porte à l'étude des nœuds comme branche des mathématiques pures. Parallèlement à DEHN, Kurt REIDEMEISTER s'intéressa aux nœuds et montra comment relier deux diagrammes du même entrelacs à l'aide d'une suite de modifications simples : son théorème est encore aujourd'hui un des outils les plus utilisés pour étudier les invariants des entrelacs.

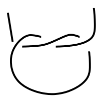
La théorie des nœuds a eu dans les trente dernières années un développement très accéléré grâce à deux nouveaux facteurs. D'une part William THURSTON montra que les espaces de dimension 3 (notamment ceux obtenus des nœuds par chirurgie de DEHN) ont « presque toujours » une structure géométrique remarquable. D'autre part en 1984 Vaughan JONES trouva un nouvel objet, appelé désormais le polynôme de Jones, qui fut par la suite interprété en termes physiques par Edward WITTEN. Ces développements ont favorisé l'interaction de différentes branches des mathématiques et de la physique autour des mêmes objets ce qui a produit certaines des idées les plus étudiées dans les mathématiques contemporaines.

Par la suite on donnera les définitions de base des nœuds et de leur équivalence et on s'intéressera au problème crucial suivant : comment distinguer deux nœuds ? Après avoir donné un panorama de quelques-unes des applications de la théorie des nœuds à d'autres domaines, on définira le concept d'« invariant de nœud » et on en donnera quelques exemples. La dernière section sera consacrée à la définition du polynôme de Jones donnée par Louis KAUFFMAN.

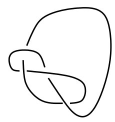
1. Qu'est-ce qu'un nœud ?

Un nœud est une courbe simple fermée dans l'espace de dimension 3. Il s'agit donc d'un sous-ensemble de points de $\mathbb{R}^3$ qui est en bijection continue avec les points d'une circonférence. Imaginer un nœud est très simple : il est suffisant de visualiser une ficelle très fine dont les extrémités sont recollées l'une avec l'autre de telle façon qu'en fin de compte la ficelle n'aura ni point initial ni point final.

Donc ceci n'est pas un nœud...



et ceci est un nœud :



En fait la définition de nœud qu'on vient de donner n'écarte pas certaines pathologies. Imaginez par exemple un nœud obtenu en recollant le long de leurs extrémités un nombre infini de ficelles nouées ayant des longueurs de plus en plus courtes de sorte que l'on obtient une ficelle de longueur finie comme le dessin suivant le suggère :

Pour éviter ces nœuds dits « sauvages » on se restreindra par la suite aux nœuds polygonaux.

Définition 1. Un *nœud* (polygonal) est formé d'un nombre fini de segments dans l'espace. Un *entrelacs* est une union d'un nombre fini de nœuds disjoints.

Maintenant qu'on a défini les objets auxquels on s'intéressera, il faut préciser comment les « représenter » c'est-à-dire comment spécifier sur un papier un nœud (qui par définition vit dans l'espace de dimension 3). On l'a déjà fait implicitement en utilisant des diagrammes de projections génériques dans le plan. Un *diagramme* d'un nœud est la projection du nœud sur un plan, équipée de la donnée supplémentaire autour de chaque point d'intersection entre deux segments spécifiant lequel des deux passe au-dessus. Dans cette définition il faut aussi demander que la projection soit *générique* c'est-à-dire que les projections des sommets du polygone formant le nœud soient distinctes et n'appartiennent pas à l'image des intérieurs des segments du nœud. La table suivante nous en donne quelques exemples[1].

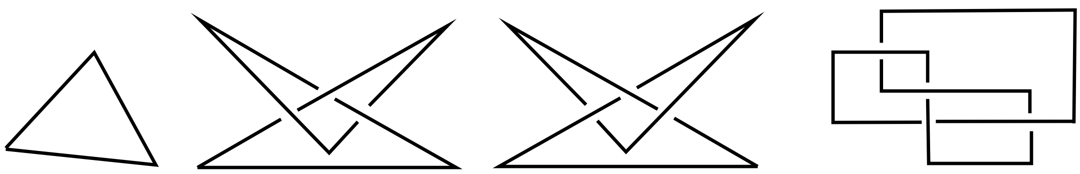


FIG. 1 – De gauche à droite : le nœud simple, le nœud de trèfle gauche, le trèfle droit et le nœud en huit.

[1]En fait le nœud de trèfle tel qu'il a été dessiné ne peut pas être plongé dans l'espace : il faut ajouter des sommets le long de deux arêtes pour les plier et les faire passer l'une sur l'autre. Par la suite on utilisera quand même ces diagrammes simplifiés car les techniques et idées qu'on discutera s'appliquent aussi aux nœuds dont les arêtes sont des courbes lisses quelconques.

Il est simple de prouver que chaque nœud polygonal (on dira simplement nœud par la suite) admet une projection générique et donc un diagramme. Mais deux problèmes se cachent dans la définition d'un diagramme : le premier est qu'étant donné un diagramme on ne peut pas reconstruire *exactement* le nœud de départ, mais seulement un nœud qui lui « ressemble » fortement. Le deuxième est qu'en prenant deux projections génériques du même nœud on pourrait obtenir deux diagrammes différents : quelles sont les relations entre ces diagrammes ?

En fait le premier problème n'en est pas un : on a envie de considérer deux nœuds comme équivalents si on peut « transformer » l'un dans l'autre sans jamais créer d'auto-intersections. Plus précisément on donne la définition suivante.

Définition 2 (Nœuds équivalents)**.** On dit que deux nœuds k_1 et k_2 sont *équivalents* (ou plus simplement qu'ils sont « les mêmes ») si on peut transformer k_1 en k_2 par une séquence finie des opérations suivantes :

1. Bouger un sommet du polygone représentant k_1 de sorte que, pendant le mouvement, les deux segments liés à ce sommet ne coupent pas d'autres segments de k_1.
2. Ajouter un nouveau sommet au polygone qui représente k_1 à l'intérieur d'un segment.
3. Éliminer un sommet qui est extrémité de deux segments colinéaires.

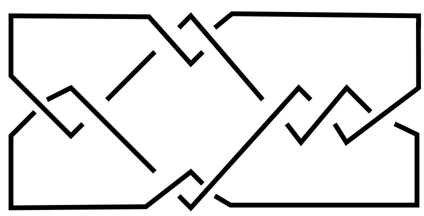
Il est immédiat que deux nœuds ayant le même diagramme sont équivalents : il faut donc considérer les diagrammes comme des moyens de représenter les nœuds « à équivalence près » plutôt que comme de véritables courbes dans l'espace. Dit de façon différente, la relation « être équivalents » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des nœuds polygonaux et un diagramme identifie une classe d'équivalence. Puisque par la suite on s'intéressera à ces classes d'équivalence, on utilisera souvent le mot « nœud » au lieu de « classe d'équivalence de nœuds ».

Le deuxième problème est en fait beaucoup plus délicat. Puisque l'on s'intéresse seulement aux nœuds à équivalence près, on peut bouger une courbe polygonale avant d'en construire un diagramme : le nombre de diagrammes possibles associés à la même classe d'équivalence de nœuds est donc infini.

Voilà donc la question cruciale de la théorie des nœuds :

Question 1. Étant donnés deux diagrammes, comment décider s'ils représentent des nœuds équivalents ?

Répondre à cette question est un problème complètement non trivial : pour avoir une idée de la difficulté sachez que le nœud représenté ci-contre est équivalent à un des nœuds de la figure 1. Sauriez-vous dire lequel ?



Le nœud *simple* est le nœud représenté par n'importe quel triangle dans l'espace (ils sont tous équivalents). Donc une version plus faible de la question précédente est :

Question 2. Comment décider si un diagramme représente le nœud simple ?

Comme il se passe souvent en mathématiques, il est plus simple de montrer que deux diagrammes *ne représentent pas* les mêmes nœuds. Pour faire cela, les topologues ont développé toute une série d'objets dits « invariants des nœuds » qui permettent de distinguer les diagrammes de nœuds différents. Dans les prochaines sections on donnera quelques exemples d'invariants des nœuds et on les utilisera pour distinguer des nœuds remarquables.

Avant de terminer cette section, observons plus attentivement les diagrammes de la figure 1 : ce sont les diagrammes les plus simples de nœuds non équivalents. La mesure de la « complexité » d'un diagramme est donnée par le nombre de croisements dans le diagramme : pour le nœud simple c'est 0, pour les nœuds du milieu (dits respectivement « trèfle gauche » et « trèfle droit ») c'est 3 et pour le quatrième nœud dit « nœud en huit » c'est 4.

On pourrait se demander pourquoi les diagrammes de la figure 2 ne sont pas dans la figure 1 mais la réponse immédiate est que ces diagrammes représentent le nœud simple qui est déjà représenté par un triangle (dont la complexité est moindre).

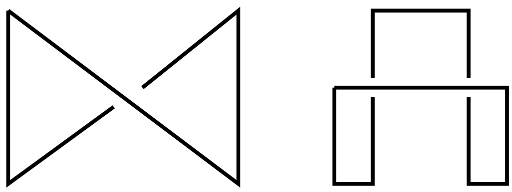


FIG. 2 – Deux diagrammes du nœud simple.

Une question à laquelle il est plus difficile de répondre serait : pourquoi y a-t-il deux nœuds de trèfle ? Ne sont-ils pas équivalents ? On donnera une réponse seulement dans la dernière section. La figure 1 n'est en effet que le point de départ d'une table qui désormais compte des milliers de nœuds : cette liste des nœuds qui a été commencée par Peter TAIT, a été continuée et enrichie par les topologues dans les dernières décennies. Les ordinateurs ont aussi été utilisés. Pour avoir un aperçu de la table telle qu'elle est aujourd'hui voir [5].

Essayons de comprendre quel devrait être le procédé suivi pour construire une telle table. Théoriquement, il faudrait dessiner tous les diagrammes ayant 0 croisement et parmi ces diagrammes déterminer ceux qui représentent le même nœud. Mais déjà là on a un premier problème : il y a un nombre infini de diagrammes sans croisements ! Par exemple on peut considérer un diagramme représenté par un triangle ou par un carré : ils sont différents mais ils représentent quand même le nœud simple. Il faut donc définir une relation d'équivalence sur les diagrammes pour réduire à un nombre fini la liste des diagrammes à considérer.

Remarquons qu'un diagramme est une réunion de segments dans le plan qui forment une courbe fermée mais qui peuvent avoir une intersection non vide (lors des « croisements »). À chaque croisement doit être précisé le segment qui passe au-dessus.

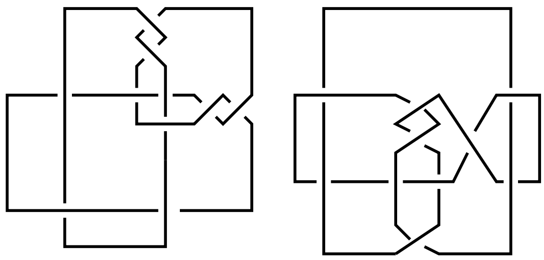
Définition 3 (Diagrammes isotopes)**.** On dit que deux diagrammes D et D' sont *isotopes* si on peut transformer D en D' par une séquence finie des opérations suivantes :

1. Bouger un sommet de l'ensemble de segments formant D de sorte que, si s est un segment lié à ce sommet et s' un autre segment de D, alors pendant tout le mouvement le type de croisement de s avec s' ne change pas : soit s et s' gardent une intersection vide, soit s reste au-dessus de s', soit s reste en dessous de s'.
2. Ajouter un nouveau sommet à l'intérieur d'un segment de D.
3. Éliminer un sommet qui est extrémité de deux segments colinéaires.

Il est clair que si D et D' sont isotopes alors ils ont le même nombre de croisements et ils représentent le même nœud. Encore une fois, la relation « être isotopes » est une relation d'équivalence, et par la suite on s'intéressera plutôt aux diagrammes à isotopie près. Par exemple, on peut prouver que tout diagramme sans croisements est isotope au diagramme (que par la suite l'on notera $\triangle$) formé par un triangle.

Disposant de la notion d'isotopie, on peut continuer l'étude du procédé de construction d'une « table » des noeuds. On pourrait dessiner des diagrammes pour chaque classe d'isotopie de diagrammes ayant 1 croisement, 2,3 et ainsi de suite. Puis, en partant des diagrammes ayant 1 croisement (et vous pouvez vous convaincre qu'à isotopie près il n'y a que celui à gauche dans la figure 2) et 2 croisements, il faudrait commencer par déterminer ceux qui représentent le même nœud : dans ce cas il est facile de voir que tous ces diagrammes représentent le nœud simple. Il faudrait ensuite passer à ceux ayant 3 croisements : là on commencerait à trouver les diagrammes des nœuds de trèfle. Mais comment prouver que ces diagrammes ne représentent pas le nœud simple ? Comment prouver que les deux nœuds de trèfle ne sont pas équivalents ?

Ces difficultés croissent avec le nombre de croisements, au point qu'il est déjà arrivé que deux diagrammes du même nœud apparaissent l'un à côté de l'autre dans la même liste : en 1974 l'avocat new-yorkais Kenneth Perko découvrit que les deux diagrammes ci-contre représentent le même nœud, même si depuis la publication en 1899 par L.C. Little d'une table des nœuds à neuf croisements où ces nœuds apparaissaient comme distincts, ils avaient été considérés comme différents ! A vous de comprendre pourquoi ils sont en effet équivalents.



2. Pourquoi étudier les nœuds ?

Avant de citer les théorèmes fondamentaux pour l'étude des nœuds, il me semble utile de donner une petite idée des applications de la théorie des nœuds à d'autre branches des sciences et même des applications technologiques.

En biologie, l'étude des enzymes qui agissent sur l'ADN utilise des idées de la théorie des nœuds. L'ADN se présente en effet comme une double hélice nouée dans l'espace dont les deux extrémités sont parfois recollées l'une à l'autre : elle forme donc un nœud. Ce nœud est très fortement tordu dans l'espace, et pour pouvoir recopier l'information contenue dans le code génétique, il est nécessaire tout d'abord de dénouer ce nœud. Il est clair que si ce nœud n'est pas le nœud simple il est impossible de le dénouer sans le couper : certains enzymes (comme par exemple la topoisomerase) font exactement cela. Une des façons quantitatives pour étudier l'action de ces enzymes est aujourd'hui de « photographier » un nœud d'ADN (à l'aide d'un microscope électronique), de comprendre le type de nœud formé par cet ADN et puis d'estimer le nombre de coupures et recollements nécessaires pour dénouer ce nœud.

En chimie, les propriétés d'une molécule dépendent fortement de sa forme dans l'espace. Ce qui est le plus frappant est que deux isomères c'est-à-dire deux molécules ayant la même formule chimique, peuvent avoir des comportement très différents si l'une est l'image miroir de l'autre. Parmi ces molécules, dites énantiomères, on trouve plusieurs aminoacides qui sont à la base de notre biologie. Ce qui est surprenant est que la plupart des organismes terrestres, pendant l'évolution, ont « préféré » une des deux versions possibles pour chacune de ces molécules : ainsi par exemple dans notre métabolisme le D-galactose est très important mais son image miroir ne l'est pas ! Un objet qui ne peut pas être superposé à son image miroir est dit « chiral » (du grec « $\chi\epsilon\iota\rho$ = main », car les mains sont l'exemple le plus simple d'objets chiraux) et il existe beaucoup de nœuds chiraux (comme par exemple les nœuds de trèfle droit et gauche). Les techniques développées pour les étudier et les distinguer peuvent aussi être appliquées à des molécules nouées dans l'espace.

En physique théorique, le problème principal du dernier siècle à été celui de trouver une théorie qui unifie la théorie de la relativité générale d'EINSTEIN et la théorie quantique des champs. Plusieurs propositions ont été faites mais aucune n'est encore ni acceptée ni considérée comme satisfaisante. Une de ces propositions, dite « Théorie de la gravité quantique en boucles », se base sur l'idée que tout ce qu'on peut mesurer sur l'univers est lié à des trajectoires nouées des particules dans l'espace. Les invariants des nœuds (dont par exemple le polynôme de Jones) deviennent donc les premiers exemples d' « observables » physiques dans cette théorie.

En électronique, dans les dix dernières années, plusieurs modèles pour l'« ordinateur quantique » ont été proposés. La réalisation d'un tel objet, qui du point de vue théorique est considérée comme possible, doit faire face à des difficultés techniques non résolues jusqu'à présent. Une des idées les plus récentes pour cela a été proposée par le mathématicien Michael FREEDMAN, directeur du « Projet Q » de Microsoft, qui a utilisé la théorie des nœuds (et plus généralement des entrelacs) pour modéliser les « q-bits », les éléments de mémoire de l'ordinateur quantique. Le lecteur trouvera plus de détails à ce sujet dans [8].

3. Comment distinguer deux nœuds ?

Dans cette section on citera le théorème de REIDEMEISTER qui explique comment relier l'un à l'autre deux diagrammes du même nœud et puis on définira le concept d'invariant de nœud.

Commençons par observer que si à un diagramme d'un nœud on applique une des modifications de la figure 3, le diagramme changera mais le nœud associé ne changera pas (pour vous en convaincre essayez avec des ficelles). Par conséquent, si on part d'un diagramme et

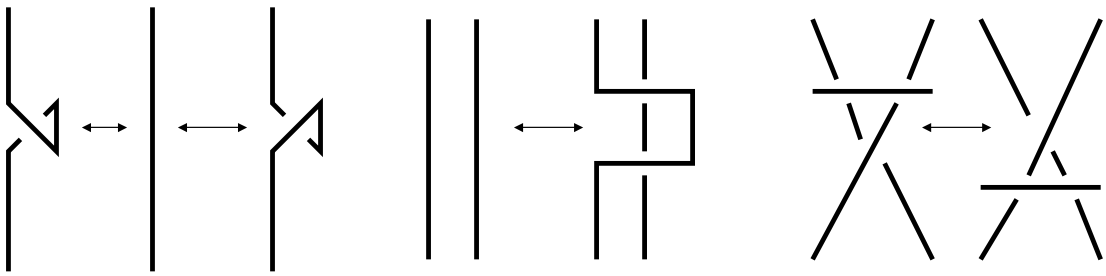


FIG. 3 – Les mouvements de Reidemeister : de la gauche vers la droite le type 1, 2 et 3.

que l'on applique plusieurs de ces modifications, on obtiendra toujours un nœud équivalent à celui de départ. Le théorème de REIDEMEISTER prouve la réciproque :

Théorème 1 (REIDEMEISTER,1926). *Deux diagrammes représentent le même nœud si et seulement si il peuvent être transformés en deux diagrammes isotopes par une séquence finie de mouvements de Reidemeister de type 1, 2 ou 3 (voir la figure 3).*

On pourrait penser que ce théorème donne une réponse définitive à la Question 1. Mais il y a un problème : le théorème nous dit que deux diagrammes representent des nœuds équivalents si il *existe* une séquence de mouvements mais il ne nous dit ni quelle est cette séquence ni combien de mouvements il nous faudra ! Le fait d'essayer de relier deux diagrammes par des mouvements de Reidemeister et de ne pas y réussir n'est pas une garantie que les deux diagrammes ne representent pas des nœuds équivalents : on pourrait avoir raté des séquences.

Mais alors quelle est l'importance du théorème de Reidemeister ? Supposez avoir créé une machine qui accepte comme donnée initiale un diagramme et qui rend comme résultat un nombre (ou un polynôme, ou une couleur, une fleur...). Pour le moment ne nous demandons pas comment elle le fait, mais supposons que cette machine marche de telle façon que si on lui donne le diagramme D ou n'importe quel diagramme D' obtenu à partir de D en appliquant un mouvement de Reidemeister, elle donne la même réponse. Alors forcément la réponse de la machine sur n'importe quel diagramme qui est relié à D par une séquence finie de mouvements de Reidemeister sera toujours la même que pour D. Donc, *grâce au théorème de* Reidemeister cette réponse sera la même pour tout diagramme qui représente le même nœud que D.

Imaginez alors avoir trouvé une telle machine, qu'on vous donne deux diagrammes D et D' et qu'on vous demande si ces diagrammes représentent ou pas le même nœud. Si les résultats de votre machine sur ces deux diagrammes sont différents, alors les nœuds ne sont pas équivalents ! Par contre si les résultats sont égaux vous ne pouvez rien conclure : votre machine pourrait donner le même résultat pour des nœuds différents.

Donc voilà l'importance du théorème de Reidemeister : il réduit le problème de distinguer deux diagrammes de nœuds au problème de construire des machines qui associent des objets aux diagrammes des nœuds de façon invariante par rapport aux mouvements de Reidemeister. Puisque ces mouvements ne sont que trois, ce problème devient abordable.

La notion de machine qu'on vient de donner en effet peut être formalisée comme suit :

Définition 4 (Invariants de nœuds)**.** Un invariant de nœuds à valeurs dans un ensemble E est une fonction

$$f : \{\textit{diagrammes de nœuds}\} \to E$$

telle que si D et D' sont isotopes ou transformés l'un en l'autre par un mouvement de Reidemeister, alors $f(D) = f(D')$.

Mais comment construire des invariants ? L'exemple le plus simple est l'invariant constant : $f(D)$ ne dépend pas de D : cet invariant ne distinguera aucun nœud et donc est totalement inutile.

Une façon de créer des invariants plus intéressants est de prendre n'importe quelle fonction

$$g : \{\textit{classes d'équivalence de nœuds}\} \to E$$

et puis de considérer $f = g \circ \pi$ où

$$\pi : \{\textit{diagrammes de nœuds}\} \to \{\textit{classes d'équivalence de nœuds}\}$$

est la fonction qui associe à chaque diagramme la classe du nœud qu'il représente. En effet, grâce au théorème de Reidemeister, tout invariant peut être obtenu comme cela. Le problème de cette construction est qu'elle passe par la fonction π qui est en fait exactement la fonction qu'on voudrait comprendre !
Pensez au cas où $E = \{\textit{classes d'équivalence de nœuds}\}$ et $f(D) = \pi(D)$: cet invariant est l'invariant le plus puissant qu'on puisse imaginer, sauf que le calculer équivaut (exactement) à répondre à la question 1.

Il faut donc faire un compromis : dans la construction précédente il faut trouver une fonction f qui « perd » de l'information à propos du nœud représenté par un diagramme, en espérant simplifier assez le problème, sans toutefois le rendre trivial. Voici quelques exemples considérés comme « classiques ».

3.1. Le nombre de croisements

L'invariant le plus naturel à définir serait le nombre de croisements dans un diagramme d'un nœud. Or ce nombre dépend fortement du diagramme choisi pour représenter le nœud (on a déjà vu que le nœud simple peut être représenté par un triangle mais aussi par les diagrammes de la figure 2). Ce n'est donc pas un invariant. Cela impose de choisir *le nombre minimal de croisements* dans un diagramme du nœud. Pour le nœud simple c'est 0, pour les nœuds de trèfle 3 et pour le nœud en huit 4. Il s'agit exactement de la complexité utilisée pour ordonner la table des nœuds. Le problème de cet invariant est que théoriquement pour le calculer pour un nœud représenté par un diagramme donné, il faudrait générer tous les diagrammes du même nœud et puis prendre le nombre minimal de croisements. Puisque le nombre de ces diagrammes est infini ceci n'est pas faisable. En revanche on peut immédiatement obtenir une estimation par le haut de cet invariant : le nombre de croisements de n'importe quel diagramme de nœud est supérieur ou égal au nombre de croisements du nœud.

3.2. Le nombre gordien

Un autre invariant classique est le nombre gordien. Étant donné un nœud il est possible de le transformer en nœud simple en le bougeant dans l'espace et en permettant aux segments qui le composent de se couper un nombre fini de fois. Le nombre gordien est le nombre minimal de telles sections nécessaires pour transformer le nœud en nœud simple : pour le nœud simple il est donc 0. Encore une fois, il n'est pas simple de calculer en général ce nombre, mais il n'est pas difficile de l'estimer : étant donné un diagramme d'un nœud on peut voir que (exercice !) en changeant les données haut/bas autour de quelques croisements on peut obtenir un diagramme du nœud simple. Donc le nombre gordien est toujours inférieur ou égal au nombre de croisements dans n'importe quel diagramme du nœud et donc aussi au nombre de croisements du nœud.

3.3. La « tricolorabilité »

Cet invariant est un premier exemple d'invariant complètement calculable. Remarquons tout d'abord qu'un diagramme à $n > 0$ croisements d'un nœud est formé par n arcs dont les extrémités sont exactement les croisements. Donc autour de chaque croisement on voit exactement trois arcs : celui qui passe au-dessus et les deux morceaux de celui qui passe en dessous. Fixons maintenant trois couleurs : par exemple rouge, bleu, et vert.

Définition 5 (Tricoloration)**.** Une *tricoloration* d'un diagramme D est le choix d'une des trois couleurs pour chaque arc du diagramme de sorte que autour de chaque croisement l'on voie soit trois fois la même couleur soit trois couleurs différentes. Un nœud est dit *tricolorable* si il admet un diagramme qui a une tricoloration utilisant au moins une fois chaque couleur.

Ce qui est le plus remarquable dans cette définition est qu'a priori la tricolorabilité d'un nœud dépend du diagramme du nœud choisi pour la tester, mais en fait on peut voir que si D est un diagramme tricolorable et D' est obtenu en appliquant un mouvement de Reidemeister à D alors D' est aussi tricolorable. Donc grâce au théorème de Reidemeister la tricolorabilité ne dépend pas du diagramme mais seulement du nœud ! Vous pouvez enfin remarquer que les nœuds de trèfle sont tricolorables et le nœud en huit (à droite dans la figure 1) ne l'est pas, ce qui implique que le nœud de trèfle et le nœud en huit ne sont pas équivalents. Si cela vous paraît trivial essayez de *prouver* ce fait d'une autre façon.

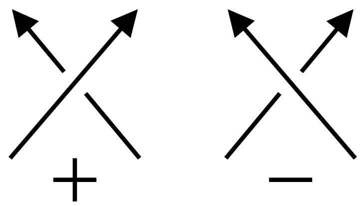
4. Le polynôme de Jones

Les exemples donnés dans la section précédente sont loin d'être tous les invariants de nœuds « classiques » c'est-à-dire connus avant les années 80. L'exemple le plus important est le polynôme d'Alexander, découvert par le mathématicien James Waddel Alexander en 1923, mais, puisque sa définition est légèrement plus compliquée que celle du polynôme de Jones (découvert seulement en 1984 !) on définira d'abord ce dernier.

4.1. Le vrillage

Essayons tout d'abord de construire un invariant à la main. On peut par exemple décider d'associer à chaque croisement d'un diagramme un nombre, par exemple 1 et puis sommer sur les croisements : de cette façon on obtient le nombre de croisements du diagramme. Ce nombre, on l'a déjà dit, changera en appliquant un mouvement de Reidemeister ; ce n'est donc pas un invariant : par exemple en appliquant le mouvement de type 2 le nombre de croisements augmentera de 2.

Pour essayer de raffiner cette construction, choisissons une « orientation » du nœud : c'est-à-dire un sens de circulation le long du nœud. Nous pouvons alors distinguer deux types de croisements : ceux « positifs » et ceux « négatifs » (ces noms étant seulement une convention), comme dans le dessin ci-contre. Remarquons que tout croisement (quitte à faire pivoter son dessin) a une des formes du dessin.



Définition 6. Définissons donc le *vrillage* $w(D)$ d'un diagramme D comme le nombre de croisements positifs moins le nombre de croisements négatifs.

Est-il invariant ? Tout d'abord il faut contrôler qu'il ne dépend pas du choix du sens de circulation qu'on a fait : pour cela il est suffisant d'observer que si on change ce choix, alors autour de chaque croisement les *deux* flèches sont renversées et donc chaque croisement reste du même type (renversez les flèches et tournez cette page de 180° degrés pour vous en convaincre).

Remarque 1. Le vrillage n'est bien défini *que* pour les diagrammes des nœuds, autrement il faut spécifier une orientation pour chaque composante : dans un diagramme d'un entrelacs à plusieurs composantes, en changeant seulement l'orientation d'une composante on change les signes des croisements entre cette composante et toutes les autres.

Contrôlons maintenant ce qui se passe quand on modifie un diagramme par un mouvement de Reidemeister : si on applique le mouvement de type 2, puisque l'on crée exactement un croisement positif et un négatif, le vrillage ne change pas. En ce qui concerne le mouvement de type 3, c'est encore plus simple : le nombre de croisements de chaque type ne change pas après le mouvement. Malheureusement le mouvement de type 1 change le vrillage de ± 1 (selon le signe du croisement créé par le mouvement) : donc ce qu'on vient de construire n'est pas un invariant des nœuds, mais il nous sera bientôt utile.

4.2. Le polynôme de Kauffmann

Soit D un diagramme d'un nœud, et c son nombre de croisements. Numérotons les croisements de D. Si on considère les deux diagrammes obtenus en recopiant D partout sauf autour du c^{e} croisement autour duquel on remplace le croisement comme montré ci-dessous par un des deux diagrammes sur la droite du dessin. On obtient deux diagrammes D_+ et D_- plus simples que D car ils ont $c-1$ croisements. Ces deux diagrammes sont souvent appelés les deux « désingularisations » de D autour du c^{e} croisement. Il faut remarquer qu'on peut obtenir ainsi un diagramme d'entrelacs plutôt que de nœud, mais cela ne nous gênera pas car ce qu'on définira sera valable pour les diagrammes d'entrelacs et pas seulement pour ceux des nœuds.

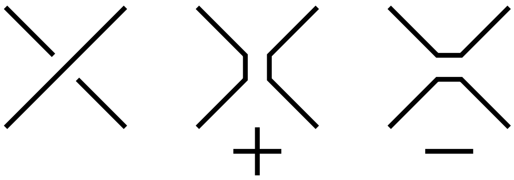


Fig. 4 – Les désingularisations de D autour d'un croisement. Remarquez que le diagramme de gauche n'étant pas symétrique (l'arc supérieur va du bas à gauche en haut à droite), il y a une façon de distinguer parmi les deux désingularisations : c'est grâce à cela qu'on leur donne des noms (+ et −).

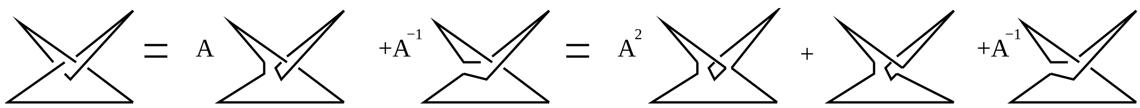
Nous allons montrer comment associer un « polynôme de Laurent » $K(D)$ à chaque diagramme D, c'est-à-dire un polynôme à coefficients entiers en une variable A et son inverse A^{-1} ; autrement dit : $K(D) \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$. Ce polynôme est défini par induction sur le nombre de croisements en utilisant les deux règles suivantes :

1. Si D est un diagramme sans croisements ($c = 0$) d'un entrelacs ayant n composantes (donc D est une union de n courbes simples disjointes dans le plan) alors
$$K(D) = (-A^2 - A^{-2})^{n-1} .$$
En particulier pour le diagramme du nœud simple sans croisements $K(D) = 1$.
2. Si $c > 0$ et D_+ et D_- sont obtenus de D par désingularisation d'un croisement alors
$$K(D) = AK(D_+) + A^{-1}K(D_-) .$$

La définition qu'on vient de donner nous permet toujours de calculer $K(D)$ pour n'importe quel diagramme D car, si c est le nombre de croisements de D, en appliquant c fois la règle 2 nous pouvons exprimer $K(D)$ comme somme de 2^c polynômes associés à des diagrammes n'ayant aucun croisement et donc chacun de la forme $(-A^2 - A^{-2})^{n-1}$ pour un certain entier $n \geq 1$. On peut démontrer que la définition qu'on vient de donner ne dépend ni de la classe d'isotopie du diagramme D de départ, ni de la numérotation des croisements de D qu'on avait choisie au départ. En revanche deux diagrammes D et D' du même nœud peuvent avoir des polynômes différents : par exemple si $D = \triangle$ et D' est le diagramme de gauche de la figure 2, alors $K(D) = 1$ et $K(D') = -A^3$.

Remarque 2. Il n'est pas difficile de prouver que si D_1 et D_2 sont deux diagrammes disjoints dans le plan alors
$$K(D_1 \cup D_2) = K(D_1)K(D_2)(-A^2 - A^{-2}) .$$

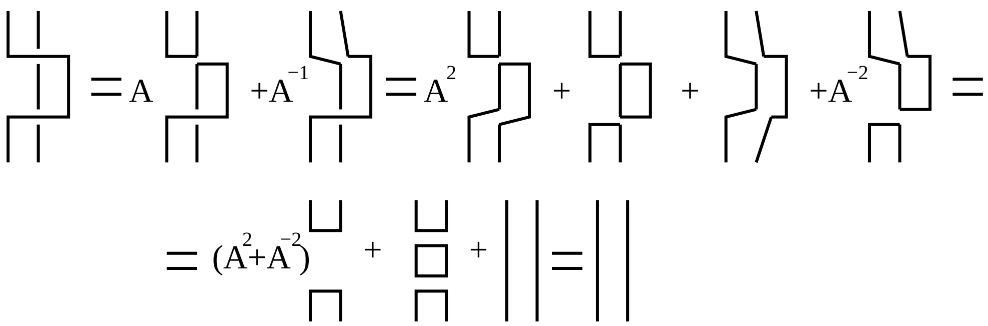
Comme exemple, calculons $K(D)$ pour le diagramme du nœud de trèfle droit dans la figure 1 :



$$= A^2(-A^3) + (-A)^{-3} + A^{-1}((-A)^{-3})^2 = -A^5 - A^{-3} + A^{-7} = K(D)$$

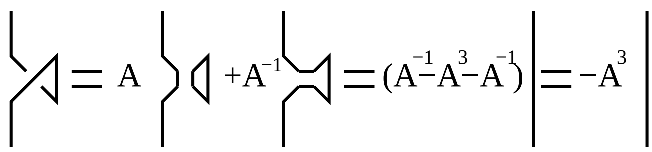
Les calculs précédents sont toujours des calculs entre *polynômes* : en écrivant la « somme » de deux diagrammes on a identifié implicitement chaque diagramme D avec son polynôme $K(D)$. On a donc une façon bien définie d'associer un élément $K(D) \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ à chaque diagramme D. En passant de la première ligne à la deuxième, on a appliqué la règle de changement de $K(D)$ quand on applique un mouvement de Reidemeister de type 1 à D : cette règle sera prouvée par la suite.

Le polynôme $K(D)$ est-il un invariant du nœud représenté par D ? Pour répondre à cette question testons l'invariance de $K(D)$ par rapport aux mouvements de Reidemeister. Si D' est obtenu de D en appliquant un mouvement du type 2 alors on a :



Pour les diagrammes non fermés (comme dans le dernier calcul), on s'intéresse à des morceaux de diagrammes en sachant que tous les diagrammes sont complétés *de la même façon* hors de la zone dessinée et que donc les polynômes des diagrammes complétés diffèrent seulement à cause des différences *dans* la zone dessinée. En particulier dans le dernier passage on a utilisé le fait que le polynôme du diagramme central est $(-A^2 - A^{-2})$ fois le produit du polynôme d'un triangle et de celui du diagramme de gauche (Remarque 2), et puis le fait que le polynôme du triangle est 1 par définition.

Avec un calcul similaire on peut prouver (exercice !) que $K(D') = K(D)$ si D' est un diagramme obtenu en appliquant à D un mouvement de Reidemeister de type 3. Par contre, l'invariance par rapport à Reidemeister 1 n'est pas vérifiée :



Comme les calculs précédents le prouvent, si D' est obtenu en appliquant à D un mouvement de Reidemeister qui crée un croisement positif (respectivement négatif) alors $K(D') = -A^3 K(D)$ (resp. $K(D') = -A^{-3} K(D)$).

Heureusement, le changement qu'on a est semblable à celui qu'on a trouvé pour le vrillage. Donc en utilisant ce dernier on peut « corriger » $K(D)$ pour obtenir un polynôme qui est invariant par rapport a *tous* les mouvements de Reidemeister : il est suffisant de considérer le polynôme $J(D) = K(D)(-A)^{-3w(D)}$.

Définition 7. Le polynôme $J(D) = K(D)(-A)^{-3w(D)}$ est le *polynôme de Kauffman* du nœud représenté par D. En remplaçant A par $t^{-\frac{1}{4}}$ on obtient le *polynôme de Jones* du nœud représenté par D.

Historiquement le polynôme de Jones fut défini par Vaughan JONES en 1984 à l'aide de la théorie de représentations des algèbres de von Neumann, et la définition combinatoire qu'on vient de présenter est due à Louis KAUFFMAN qui la trouva en 1987.

4.3. Quelques exemples

Le polynôme de Jones est un invariant très puissant, c'est-à-dire qu'il peut distinguer beaucoup de nœuds.

Par exemple il est simple de voir que si K' est l'image miroir de K alors $J(K')$ est obtenu en remplaçant A par A^{-1} dans $J(K)$. Par conséquent on peut distinguer le nœud de trèfle gauche du nœud droit car on a déjà calculé le polynôme de Kauffman $K(D)$ pour le diagramme du nœud de trèfle droit D. Il est donné par $K(D) = -A^5 - A^{-3} + A^{-7}$ et, puisque le vrillage du diagramme est 3, on a

$$J(D) = (-A^{-9})(-A^5 - A^{-3} + A^{-7}) = A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}$$

qui n'est pas symétrique par rapport au remplacement $A \to A^{-1}$.

Si on calcule le polynôme de Jones du nœud en huit on obtient : $t^2 - t + 1 - t^{-1} + t{-2}$ (avec $t = -A^4$). Une première remarque est que ce polynôme est symétrique par rapport à l'inversion $A \to A^{-1}$. Il ne peut donc pas distinguer le nœud en huit de son image miroir : en fait le nœud en huit est *amphicheiral*[2] c'est-à-dire il est équivalent à son image miroir (exercice !) donc aucun invariant ne peut (ni doit) les distinguer.

Une autre remarque est que le polynôme de Jones distingue les quatre nœuds de notre figure 1. On pourrait se demander si cela se passe en général : est-il vrai que le polynôme de Jones distingue tous les nœuds ? La réponse est non : il existe des nœuds différents (distincts par d'autres invariants) qui ont le même polynôme de Jones (voir [5]). Pire que cela, il existe des nœuds chiraux, c'est-à-dire non équivalents à leurs images miroir (par exemple le nœud 10_{42} de [5]), qui ont un polynôme de Jones symétrique par rapport au remplacement $A \to A^{-1}$ et donc le polynôme de Jones de ces nœuds et de leurs image miroirs sont égaux.

Cependant une question plus simple peut être formulée : existe-t-il un nœud qui a le même polynôme de Jones que le nœud simple ?

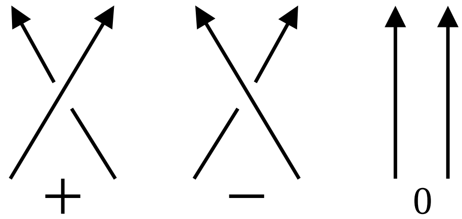
Si la réponse était non, alors le polynôme de Jones pourrait au moins être utilisé pour détecter le nœud simple et donc donner une façon immédiate de répondre à la question 2. Jusqu'à présent cette question est encore ouverte...

5. Autres invariants

Un autre invariant fondamental dans la théorie des nœuds est le polynôme d'Alexander-Conway. Il fut défini par J.W. ALEXANDER en 1923, puis redécouvert par J.H. CONWAY qui en donna une définition plus simple (celle qu'on utilisera).

[2]En chimie on parle plutôt de molécule chirale (distincte de son image miroir) ou achirale (égale à son image miroir).

Soit D un diagramme d'un nœud et fixons une orientation pour D. Soient aussi L_+, L_- et L_0 les trois diagrammes ci dessous :



Alors on peut définir un polynôme $\nabla(D)$ en une variable t en imposant les conditions suivantes :

1. $\nabla(D) = 1$ si D est n'importe quel diagramme du nœud simple.
2. $\nabla(D_+) - \nabla(D_-) = t\nabla(D_0)$ où par D_+, D_- et D_0 on note les diagrammes obtenus en remplaçant un croisement au choix de D par L_+, L_- et L_0 respectivement (en particulier, soit D_+ soit D_- sera identique à D).

Cette fois-ci il n'est pas évident que ces règles soient suffisantes pour calculer $\nabla(D)$ pour un diagramme donné : chaque fois qu'on applique la règle 2 on « réduit » D à un diagramme avec un croisement de moins (D_0) et à un autre ayant le *même* nombre de croisements que D.

Deuxièmement il n'est pas évident que, même si ces règles suffisent, le polynôme qu'on obtient soit invariant par les mouvements de Reidemeister. La preuve de ce fait est plus compliquée que celle qu'on a pu donner pour le polynôme de Jones. On se limitera donc à énoncer le résultat.

Théorème (ALEXANDER, 1923)**.** *Le polynôme $\nabla(D)$ ne dépend que du nœud représenté par D.*

Pour se convaincre que les règles données sont suffisantes pour calculer $\nabla(D)$, remarquons que pour chaque diagramme D on peut trouver un sous-ensemble de croisements de D qu'il suffit de changer pour obtenir un diagramme du nœud simple. Alors en appliquant la règle 2 le long de ces croisements on réduira la complexité du diagramme, où cette fois-ci la complexité est mesurée par le nombre gordien du nœud plutôt que par le nombre de croisements du diagramme. En calculant le polynôme d'Alexander-Conway du nœud de trèfle droit on obtient le même résultat que pour le trèfle gauche : $\nabla(D) = 1 + t^2$. Donc ce polynôme ne peut pas distinguer les deux nœuds ; en fait on peut prouver qu'il ne distingue jamais deux nœuds qui sont image miroir l'un de l'autre.

Le polynôme de Jones et celui d'Alexander-Conway peuvent être vus comme cas spécifiques d'un autre polynôme, cette fois-ci en 2 variables, dit *polynôme HOMFLY*, d'après les initiales des mathématiciens qui le découvrirent en 1985 : HOSTE, OCNEANU, MILLETT, FREYD, LICKORISH, et YETTER. Pour rendre plus explicite le fait que le polynôme HOMFLY associé à un diagramme D dépend de deux variables on le notera $H(D)(t, z)$. Ce polynôme est défini pour un diagramme D par les règles suivantes :

1. $H(\triangle)(t, z) = 1$ où $\triangle$ est le diagramme du nœud simple.
2. $t^{-1}H(D_+)(t, z) - tH(D_-)(t, z) = zH(D_0)(t, z)$ où par D_+, D_- et D_0 on note les diagrammes obtenus en remplaçant un croisement de D au choix par L_+, L_- et L_0 respectivement.

Encore une fois la preuve de l'invariance du polynôme HOMFLY est non triviale et s'énonce ainsi :

Théorème (Hoste, Ocneanu, Millett, Freyd, Lickorish, and Yetter, 1985). *Le polynôme $H(D)(t,z)$ est un invariant du nœud représenté par le diagramme D. De plus on a pour tout diagramme D*

$$H(D)(1,z) = \nabla(D), \qquad H(D)(t, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}) = J(D)\ .$$

Donc, puisque le polynôme HOMFLY contient les polynômes de Jones et d'Alexander-Conway, il est plus « puissant ». Malheureusement il ne distingue pas tous les nœuds : par exemple, lui non plus ne distingue pas le nœud 10_{42} de son image miroir (voir [5]). Il existe plusieurs autres invariants polynomiaux (les polynômes sl_n, les polynômes de Jones coloriés et HOMFLY coloriés *etc.*), mais jusqu'à présent aucun invariant polynomial capable de distinguer tous les nœuds simultanément n'est connu...

La découverte des polynômes de Jones et ensuite des autres invariants polynomiaux, a ouvert une nouvelle époque dans la théorie des nœuds. En effet ces invariants peuvent être étudiés de façon bien plus profonde grâce à des idées qui viennent de la physique théorique et de l'algèbre. Ces points de vue ont enrichi la compréhension de la théorie des nœuds et ont montré comme les nœuds peuvent être pris comme champ de test suffisamment vaste pour une série d'idées dans ces autres domaines de la science.

Aujourd'hui il est possible de trouver beaucoup d'informations, exemples et calculs explicites des invariants des nœuds. Un site à visiter est sûrement « The knot atlas » ([5]) dans lequel on peut repérer les invariants principaux de tous les nœuds jusqu'à 11 croisements. Il existe aussi beaucoup de logiciels téléchargeables gratuitement sur internet pour faire des expériences sur les nœuds chez soi : parmi les plus connus il y a KnotPlot ([6]) et Knotscape ([7]). Enfin, plusieurs livres ont été publiés sur les nœuds : j'en ai indiqué quelques-uns dans la bibliographie sans aucune prétention d'être exhaustif.

Bibliographie

[1] C. Adams (2004), The Knot Book, *American Mathematical Society, Providence.*

[2] G. Burde & H Zieschang (1985), Knots, *de Gruyter Studies in Mathematics 5, Walter de Gruyter & Co., Berlin-New York* .

[3] R.H. Cromwell & R.H. Fox (1963), Introduction to Knot Theory, *Graduate Texts in Mathematics 57, Springer-Verlag.*

[4] L. Kauffman (1991, 2001), Knots and Physics, *World Scientific, Singapore.*

[5] The Knot Atlas, `http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Main_Page`.

[6] R. Scharein, KnotPlot, `http://knotplot.com/`.

[7] J. Hoste & M. Thistlethwaite, Knotscape, `http://www.math.utk.edu/~morwen/knotscape.html`.

[8] G. Collins (2006), *Des tresses pour l'ordinateur quantique*, Pour la Science, **343**.

[9] D. Rolfsen (2003), Knots and Links, *AMS Chelsea Publishing, vol. 346.*

[10] A. Sossinsky (1999), Nœuds, *Seuil, Paris* .

Francesco Costantino
Institut de Recherche Mathématique Avancée
7, Rue René Descartes
67000 Strasbourg
costanti@math.u-strasbg.fr