FRANÇOIS PLUVINAGE, MIRELA RIGO LEMINI

MAIS NON, MARINA !

Abstract. Maieutics live - The authors had the chance to observe a class of 6th grade students in an elementary school in Mexico City. During the lesson observed, which was also video-taped and transcribed, the notion of speed was introduced to the children. The teacher, well-experienced, did not follow the pedagogical prescriptions of collaborative work suggested by the text book presently in use, but rather applied a discursive teaching method in the mode of Socrates' Maieutics. Her main idea was to induce her students to use the ratios that arise from distance divided by time. However during the lesson, difficulties arose in the understanding and application of those ratios. One outstanding student, Marina, proposed a proportionality chart that the teacher initially deemed to be false, rejecting the proposal and failing to give it a place in her teaching process. The article analyzes the tangible parallel between the lesson observed and Socrates' interview of the slave in Plato's *Menon*, and highlights a few exceptions that are interesting in view of their didactic significance.

Résumé. Les auteurs ont pu assister à une classe en sixième année de scolarité à Mexico. Cette classe, dont le thème était l'introduction de la notion de vitesse, a été enregistrée et transcrite. Quoique le manuel scolaire propose une activité prévue pour du travail en groupe suivi de mise en commun, la maîtresse, une enseignante expérimentée, lui préféra un enseignement dialogué, sur le mode de la maïeutique socratique. Elle avait pour objectif d'amener ses élèves à recourir aux rapports entre distances et temps. Des obstacles apparurent durant la classe et une élève douée, nommée Marina, fit une proposition de table de proportionnalité. La maîtresse l'avait tout d'abord crue fausse et l'avait donc rejetée, avant de reconnaître son exactitude sans pour autant lui donner droit de cité. Dans l'analyse de la leçon, nous notons un parallélisme frappant avec le dialogue entre Socrate et l'esclave dans le Ménon de Platon avec toutefois quelques exceptions qui, justement, méritent de retenir l'attention.

Mots-clés. Sixième année d'école, observation de classe, maïeutique, proportionnalité, vitesse.

Introduction

Plusieurs des courants actuels de l'enseignement des mathématiques peuvent nous amener à accorder à la maïeutique socratique une place dans la réflexion didactique d'aujourd'hui : l'enseignement dialogué bien sûr, mais aussi l'enseignement fondé sur la résolution de problèmes, ainsi que la RME (Real Mathematics Education)[1] et l'usage de la modélisation. Dans tous ces cas, le présupposé pédagogique est qu'une partie importante des acquisitions mathématiques de l'élève ne lui est pas

[1] Pour une référence sur RME, voir par exemple Gravemeijer & Doorman (1999).

donnée de l'extérieur, mais au contraire résulte de son activité intellectuelle propre. On peut aussi considérer que le principe d'exploitation des zones de développement proximal prôné par Vygotsky (1985, en traduction française) n'est pas étranger à un tel point de vue, puisqu'il s'agit de développer la culture mathématique sur la base des savoirs déjà en place et non pas d'entreprendre une construction de toutes pièces, comme des tenants des mathématiques modernes ont pu prétendre l'instituer. Un texte considéré comme fondateur de la maïeutique est celui du dialogue entre Socrate et l'esclave présenté par Platon dans “Ménon ou de la vertu”. Dans la maïeutique socratique, deux éléments sont essentiels pour la construction du savoir par l'étudiant lui-même : ses réminiscences et la prise de conscience de ce qu'il ignore.

Dans le cadre de recherches entreprises sur le thème des convictions des professeurs à propos de l'enseignement des mathématiques et de leurs conséquences dans la conduite des classes, des contacts réguliers sont entretenus avec plusieurs enseignants autour de diverses de leurs activités professionnelles : préparation de classes, élaboration d'évaluations, correction de réponses à des exercices,… D'autres articles aborderont ces aspects, mais celui-ci se limite à l'observation d'une seule classe, à laquelle les auteurs de l'article ont eu l'occasion d'assister et qui a été enregistrée en vidéo, puis transcrite. Ce sont les parallèles entre le déroulement de cette classe et le dialogue du Ménon qui nous ont paru particulièrement remarquables et que nous souhaitons développer et commenter dans cet article.

1. Déroulement d'une classe

On peut considérer que les conditions de l'observation n'ont pas troublé de manière sensible le déroulement habituel de la classe. Nous avions choisi d'observer une classe d'une enseignante avec qui le contact était établi depuis un certain temps, qui conduisait ses classes avec professionnalisme et dont les élèves obtenaient des résultats remarquables aux évaluations externes de fin d'études primaires. La classe qui a été observée se situe en effet en sixième année d'une école de la “colonia” (l'équivalent d'un arrondissement pour Paris) Iztapalapa de Mexico ; cette classe fait encore partie au Mexique de l'enseignement du premier degré, alors que par exemple en France il s'agirait de la première année du collège. Par ailleurs les élèves, habitués à la présence dans la classe de matériel informatique et de vidéoprojection, n'ont pas été perturbés par l'enregistrement vidéo, mais l'ont rapidement intégré à leur environnement scolaire usuel.

Le sujet de l'étude proposée aux élèves dans la classe est tiré du manuel national mexicain d'enseignement des mathématiques. Il s'agit de la leçon 80, qui porte sur les notions de distance, temps et vitesse. L'orientation générale du manuel est d'introduire les concepts par des activités ouvertes, dans laquelle les élèves peuvent facilement s'engager, mais qui amènent pour être systématisées à institutionnaliser un savoir mathématique précis, dans notre cas la proportionnalité pour des mouvements uniformes. Aucune piste de réflexion n'est au départ privilégiée par le manuel, nous le verrons pour le sujet d'étude observé, mais il est important de noter que les enseignants peuvent évidemment choisir d'adopter une autre ligne de conduite. Au passage, il vaut peut-être la peine de rappeler ici ce qui est sans doute une banalité dans les études didactiques : si, dans leur très grande majorité, les professeurs considèrent qu'ils sont tenus de respecter scrupuleusement les contenus mathématiques des programmes et des ouvrages scolaires, ils se sentent moins liés par toute préconisation d'application dans leurs classes.

Le manuel scolaire présente la table de valeurs suivantes, supposée indiquer des temps de natation réalisés par des jeunes gens.

	Distance	Temps			
		Heures	Minutes	Secondes	
Amalia	100 mètres	0	2	0	
Beto	50 mètres	0	0	50	
Catalina	150 mètres	0	2	51	
Darío	1500 mètres	0	40	0	

Les questions posées dans le manuel à propos de cette table de valeurs sont d'abord relatives aux données elles-mêmes : Qui a nagé la plus grande distance ? Qui a nagé durant le temps le plus court ? Ensuite, il s'agit de déterminer qui a nagé le plus vite. On pourra observer que la variable temps est relevée sur plusieurs colonnes, et qu'une ultime colonne, vide, pourra permettre d'accueillir les valeurs calculées des vitesses.

Le manuel préconise un travail individuel ou en petits groupes, suivi d'une confrontation dans la classe des divers résultats obtenus et des méthodes employées (la formulation de cette consigne est évidemment mise à la portée des élèves, sous forme de la demande d'expliquer comment on a fait pour obtenir un résultat). D'autres activités suivent cette question sur les nageurs, par exemple des questions relatives à des parcours à bicyclette, mais nous ne les rapporterons pas ici.

1.1. L'enseignante et sa classe

En fait, l'enseignante et ses élèves sont habitués à une conduite collective de la classe. La table de valeurs est projetée sur écran (le manuel est enregistré dans des fichiers informatisés du programme mexicain intitulé Enciclomedia) et tous les élèves lisent en chœur les énoncés des questions posées. S'ils le peuvent, ils répondent immédiatement. Ce qui fonctionne est donc un enseignement dialogué sous forme de questions-réponses, plutôt que la formule de temps de réflexion suivis de mises en commun proposée par le manuel. Les premiers échanges entre l'enseignante et les élèves donnent la tonalité.

Chœur des élèves. - *Lequel des quatre a nagé la plus grande distance ? Dario. Qui a nagé le moins longtemps ? Beto.*

Maîtresse. – *Voyons. Quelle est la première question ?*

Chœur des élèves. – *Lequel des quatre a nagé la plus grande distance ? Dario.*

Maîtresse. – *Dario.*

Chœur des élèves. – *Qui a nagé le moins longtemps ? Beto. Qui a nagé le plus vite ?* Une majorité avance sans trop de conviction la réponse *Catalina*.

Maîtresse. – *Qui a nagé le plus vite ?*

Chœur des élèves. – *Beto.*

A juste titre, la réponse ne satisfait pas la maîtresse, car elle a été donnée à l'instar des questions précédentes sans justification, alors qu'au contraire de celles-là, elle n'est pas directement apparente au vu des valeurs données dans la table. La maîtresse va donc conduire une phase de recherche de ce qui peut justifier la réponse à la question des vitesses. D'emblée, va se dérouler un épisode au cours duquel l'élève Marina va fournir une piste qui sera malheureusement méconnue, car elle n'entre pas dans le cadre de pensée de la maîtresse. Nous sautons cet épisode, intitulé *l'épisode incombant à Marina*, sur lequel portera tout le paragraphe suivant, et passons à l'épisode suivant, dans lequel les échanges mettent en évidence un fonctionnement sur le mode de la maïeutique.

Maîtresse. – *Que pouvons-nous faire pour savoir combien de secondes ont nagé Amalia, Catalina et Dario ?*

Elève D. – *Diviser la distance par le temps.*

Maîtresse. – *Diviser la distance par le temps ! Bien sûr !*

Ce bref échange mérite un commentaire, car il joue un rôle essentiel par rapport au déroulement de la classe. La maîtresse a voulu que soit d'abord réglée la question de la variable temps en se rapportant à une seule unité, la seconde, alors que le tableau affiche des minutes et des secondes (il y a même une colonne pour des heures, mais ne contenant que des 0). Mais un élève fait alors une réponse qui correspond non pas à cette question, mais à une opération ultérieure. Pourquoi alors la maîtresse approuve-t-elle alors cette intervention au lieu de relever qu'elle n'est pas (encore) pertinente ? Socrate, lui, veillait à ne pas laisser passer d'erreur. Mais le fait qu'une clé pour une solution soit formulée par un élève n'a pu manquer de focaliser l'attention de la maîtresse, au point d'estomper tout examen critique. La réminiscence a donc ici pris le pas sur la prise de conscience de ce qui est erroné. Tout se passe comme si la maîtresse s'était dit : « Puisque réminiscence il y a de la méthode que je veux précisément faire utiliser, relevons la tout de suite avant qu'elle ne s'évanouisse dans la nature. » Le savoir mathématique que la maîtresse souhaitait voir enfanté par la classe semble avoir donné lieu à un accouchement rapide. Difficile de ne pas accueillir le bébé ! Toutefois, le problème préalable de l'unité de temps pour diviser reste à traiter.

Maîtresse. – *A présent, il y a ici un détail : on voit des minutes et des secondes… Que pouvons-nous faire pour rendre tout cela plus facile ? Convertir quoi ?*

Une élève. – *Convertir tout en secondes.*

Maîtresse. – *Tout en secondes, bien vrai ? Voyons, dans la première ligne il y a… deux minutes. Combien cela fait-il de secondes ? Notez ! Tu as déjà compris D, passe au tableau !*

– L'élève D passe au tableau et, avec la contribution de plusieurs de ses camarades pour effectuer les opérations, réalise la table de valeurs suivantes, avec conversion des temps en secondes et calcul des vitesses. Nous traduisons les unités (secondes : *sec* pour *seg* en espagnol, et *m par sec* pour *m por seg* en espagnol), mais y conservons en notation américaine les valeurs décimales obtenues par les élèves, par exemple .83 qui serait 0,83 en notation européenne. Il se peut en effet que la notation américaine où n'apparaît pas le 0 de la partie entière accroisse le risque d'erreur dans des comparaisons de valeurs. On notera plus avant qu'en enseignante expérimentée, la maîtresse est consciente de ce risque.

100	120	.83 m×sec
50	50	1 m×sec
150	171	.87 m×sec
1500	2400	.62 m par sec

Maîtresse. – *Comment répondre ainsi à la dernière question ? Qui a nagé le plus vite ?*

Chœur des élèves. – *Dario.*

Un commentaire s'impose ici pour plusieurs raisons. Bien sûr, la dernière réponse Dario est fausse et nous y reviendrons. Mais il convient tout d'abord de noter que la table est dépourvue d'indication des variables considérées : distances, temps et vitesses. L'attention ne se centre alors pas nécessairement sur la seule dernière colonne quand il y a lieu de considérer des vitesses. De plus on notera des erreurs dans la désignation de l'unité pour les vitesses : Seule la dernière n'est pas fausse, mais n'est pas non plus conforme à la notation officielle qui est m/sec (ou *m/seg* pour les hispanisants). La maîtresse ne corrige pas et n'apporte aucune modification à la table de valeurs réalisée par les élèves.

Il est remarquable que, dans le Ménon de Platon, une difficulté concernant les unités soit également présente. Il y est question d'aires, et les surfaces donnent lieu à une mesure d'aire en *pieds* tout comme les longueurs. Il faudrait évidemment introduire les *pieds carrés* pour la mesure des aires. Mais, dans le dialogue du Ménon comme dans la classe, ce sont les résultats exprimés en valeurs numériques qui comptent, plutôt que les unités de mesure.

Maîtresse. – *Levez la main, ceux qui pensent que c'est Dario !*

…

Maîtresse. – *Dites-moi, à combien a nagé Beto ?*

…

Maîtresse. – *Point quatre-vingt trois. Comment le lit-on ?*

Chœur des élèves. – *Quatre-vingt trois centièmes.*

Maîtresse. – *Mais ce sont des centièmes de mètre. Comment cela se dit-il ?*

Un élève. – *Centimètre.*

Maîtresse. – *Donc ce sont quatre-vingt trois quoi ?*

Chœur des élèves. – *Centimètres.*

Maîtresse. – *Centimètres par seconde. Et ensuite, à combien a nagé Catalina ?* Elle amène le chœur des élèves à procéder à voix haute à une seconde lecture des expressions qui apparaissent dans la troisième colonne de la table.

Dans le passage qui précède, on peut noter la demande de lever la main, adressée aux élèves par la maîtresse. Il s'agit là de rompre l'apparente unanimité exprimée par le groupe, en individualisant les réponses. Evidemment, on ne trouve rien de tel dans le Ménon, puisque Socrate n'y a qu'un unique élève concerné, Ménon pour sa part étant l'observateur de la démonstration didactique administrée par Socrate. (Peut-on dans ce cas dire de Ménon que c'est un élève au second degré, ou un élève-maître ?) Demandons nous maintenant pourquoi les élèves tendent à proposer Dario, la table de valeurs étant sous leurs yeux au tableau. Une hypothèse qu'il semble raisonnable d'avancer est précisément qu'ils voient tout le tableau et pas seulement sa dernière colonne. La lecture collective à voix haute des expressions de cette dernière colonne n'empêche pas les autres colonnes de rester visibles et donc de pouvoir jouer un rôle perturbateur. Et en effet, les valeurs en regard de

Dario dans les deux premières colonnes, où la comparaison des nombres entiers saute aux yeux, sont les plus élevées ; il est donc tentant à propos de Dario de dire qu'il est « le plus » sans préciser davantage. Dans la transcription de la classe, on peut aussi observer que l'erreur sur l'utilisation des seuls centimètres pour exprimer une vitesse n'a pas été commentée par la maîtresse, qui s'est contentée de compléter en disant *par seconde.* C'est un écart par rapport aux préconisations de Socrate, d'identifier les éléments de méconnaissance. Mais, encore une fois, le primat du résultat numérique semble se manifester là, la maîtresse souhaitant focaliser l'attention sur les comparaisons de nombres en écriture décimale.

Maîtresse. – *Qui a nagé le plus vite ?*

Chœur des élèves. – *Dario.*

Elève Marina. – *Non maîtresse, c'est Beto.*

Maîtresse. – *Etait-ce correct que c'était Dario ?*

Chœur des élèves. – *Non*

Maîtresse. – *Qui a nagé le plus vite ?*

Chœur des élèves. – *Beto*

Maîtresse. – *C'est correct que ce soit Beto, parce que… Un mètre est-il plus petit que soixante deux centimètres ?*

Nous voyons, dans ces derniers échanges entre la maîtresse et la classe, intervenir l'élève Marina. C'est elle qui sauve en quelque sorte la mise à sa maîtresse, en ayant assez de conviction pour répondre *Beto*, en opposition avec ce que l'ensemble de ses camarades persistait à proposer. Cela a permis à la maîtresse de s'en tenir à la ligne de conduite qu'elle s'était fixée, ou, si l'on veut, le contrat qu'elle avait passé avec elle-même, à savoir de faire surgir les réponses de la classe et non pas de les livrer. Mais la difficulté rencontrée dans la réalisation de ce projet n'est pas sans avoir produit un effet en retour. Toucher au but a en effet pu faire oublier à la maîtresse de s'assurer d'une réelle compréhension par l'ensemble des élèves. Le fait simplement de relever, sous forme interro-négative, que la valeur obtenue pour la vitesse de Beto est supérieure à celle de Dario peut-il suffire à rendre évident pour beaucoup d'élèves le fait que la réponse à la question posée résulte du calcul des quotients des distances parcourues par les temps réalisés ? Nous ne le pensons pas, en raison des réponses majoritairement exprimées malgré la présence visible au tableau des valeurs obtenues, et nous avons eu l'impression lors de l'observation que nombre d'élèves restaient perplexes après cet épisode.

La maîtresse aurait cependant pu appliquer le second des principes de la maïeutique, à savoir de rendre un apprenant sensible à ses égarements, ses ignorances, en exploitant une perche que Marina lui avait tendue, mais qu'elle n'avait pas saisie parce qu'elle était étrangère à la vision qu'elle avait à ce moment du sujet étudié. Il s'agit de l'épisode que nous avons indiqué en signalant que nous le sautions, parce qu'il se situait en marge de la progression instituée, et que nous allons à présent examiner.

1.2. L'épisode incombant à Marina

Maîtresse. – *Comment pouvons-nous savoir qui a nagé le plus vite ?*

Marina. – *Par proportionnalité… Pour voir que si par exemple on a fait 50 m en 50 secondes, on mettra pour 100 m une minute et quarante secondes.*

Maîtresse. – *Pourrais-tu le faire au tableau ?*

– Marina réalise au tableau la table de valeurs suivante.

50		50
100	1	40
150	2	30
1500	25	

On remarquera, comme dans la table que nous avions déjà rencontrée, l'absence de références aussi bien pour les lignes que pour les colonnes, ce qui amène l'intervention suivante de la maîtresse.

Maîtresse. – *En haut, ce sont des minutes et des secondes, pas vrai ? A présent, comment pouvons-nous savoir qui a fait le meilleur temps ?... Comment pouvons-nous comparer ces quantités ? Que devrions nous faire pour comparer ?*

Marina. – *En voyant cela* (elle montre ce qu'elle a écrit au tableau) *par rapport à ce qu'ils ont fait, pour en tirer les écarts…*

Maîtresse. – *Oui, comment ça serait ?*

Marina. – *Amalia a fait 100 m, elle a mis 2 min, mais ici il y a 1 min 40 sec.*

Maîtresse. – *Amalia a fait 100 m, mais je crois que le temps que tu lui as mis n'est pas le bon. Cent mètres en combien ? Vérifie le !*

– Marina observe les valeurs qu'elle a écrites au tableau.

Maîtresse. – *Quelqu'un veut-il lui dire ce qu'il en est pour Amalia ? voyez le tableau ! Cent mètres en 1 min 40 sec ?*

Elève A. – *Non*

Maîtresse. – *Il y a là une erreur, ma belle. Efface !*

– Ligne après ligne, la table complète élaborée par Marina est effacée pour être remplacée par l'exacte copie de la table du manuel. Marina, en élève disciplinée, n'émet aucune objection. L'élève A apporte à la « correction » une contribution active.

Dans le début de cet épisode, la maîtresse est totalement passée à côté de la proposition de Marina. Dans un premier temps, elle n'a pas vraiment prêté attention aux valeurs inscrites pour les temps. Ensuite, quand Marina signale l'écart entre un temps qu'elle a obtenu, à savoir 1 min 40 sec, et le temps donné par l'énoncé, 2 min, la maîtresse prend cette différence pour une erreur de Marina et non pas pour un résultat. Ici, l'utilisation des unités de temps parfois dites complexes a pu jouer, car il ne saute pas aux yeux que 1 min 40 sec est le double de 50 sec. A tête reposée, on en prend très vite conscience, mais cela échappe facilement lorsque l'on est en train de diriger une classe. De plus, seule la première intervention de Marina a indiqué, et encore de manière allusive, qu'elle prenait pour référence le temps de Beto. Quel lecteur peut certifier que dans les mêmes circonstances il aurait saisi la proposition de Marina, s'il n'y avait pas réfléchi au préalable ? On peut aussi imaginer que le déroulement de l'épisode aurait été différent si Marina avait dressé un tableau à seulement deux colonnes : les distances en mètres et les temps en secondes, dont les valeurs numériques se seraient trouvé être rigoureusement les mêmes, par exemple 100 et 100 pour la deuxième ligne, ou 1500 et 1500 pour la dernière.

Maîtresse. – *Comment allons nous comparer ces temps et ces distances ? Comment pouvons-nous faire pour comparer ?...Tu m'as déjà plus ou moins dit une idée, Marina, donne-la nous !*

Marina. – *C'est que j'avais déjà fait la table, mais vous ne m'avez pas comprise.*

Maîtresse. – *Ah ! Je te comprends.*

Marina. – *Je m'étais appuyée sur ce qu'avait fait Beto.*

Maîtresse. – *Tu as fait la table de ce qu'a fait Beto, autrement dit la table n'était que celle de Beto.*

Marina. – *C'était pour savoir, parce que j'ai pensé que c'était Beto le plus rapide. Alors si nous saisissons que Beto a fait 50 secondes aux 50 mètres, alors il aurait nagé différemment…* (sous-entendu : *des autres personnages de l'énoncé*)

Maîtresse. – *Très bien ! Que pouvons-nous faire pour savoir combien de secondes ont nagé Amalia, Catalina et Dario ?*

Ainsi l'épisode provoqué par Marina est-il conclu, en quelque sorte par une fin de non recevoir déguisée (sous forme de l'appréciation élogieuse *Très bien !*). La maîtresse passe à la question qui amène l'épisode présenté dans le paragraphe précédent (l'enseignante dans sa classe). Ayant en tête son idée de faire calculer les rapports $\frac{\text{distances}}{\text{temps}}$, elle ne se rend pas compte que l'intervention de Marina ne constitue pas une diversion, mais au contraire peut permettre à des élèves en situation d'incompréhension ou de doute d'avoir un accès au sens de ces rapports.

Des réflexions sur la proportionnalité telles celles de Vergnaud (1983) permettent de bien éclairer la question : l'invariance de rapports de type scalaire (ou interne), c'est-à-dire concernant les mêmes grandeurs, est plus simple à comprendre que celle de rapports de type fonctionnel (ou externe), c'est-à-dire concernant des grandeurs différentes. C'est ce qui est exploité dans l'intervention de Marina : Un mouvement de vitesse constante est caractérisé par le fait que, par exemple, le temps est doublé si la distance l'est et plus généralement que les rapports internes des temps sont égaux aux rapports internes des distances. Le rapport externe entre distances et temps qui définit la vitesse d'un mouvement uniforme est nettement moins intuitif. Outre le problème des unités, que nous avons signalé au passage, il soulève un problème même de signification, que l'on peut d'ailleurs percevoir dans l'intervention de la maîtresse concluant l'épisode de l'enseignante dans sa classe, sous forme de la question qui doit conduire les élèves à produire une réponse évidemment négative : *Un mètre est-il plus petit que soixante deux centimètres ?* Cette question exprime des distances, alors qu'elle porte sur des vitesses, ce qui signifie que l'idée sous-jacente est que la vitesse est la distance parcourue lors de l'unité de temps. Cela impliquerait que le concept de vitesse est tributaire d'une unité de temps. Or les spectateurs d'une course n'ont pas besoin d'une unité de temps pour apprécier qualitativement les vitesses des participants ! L'approche du contexte abordée par Adjiage (2005), puis développée par Adjiage & Pluvinage (2007), vise à séparer d'abord, puis à coordonner, l'étude de l'environnement physique et celle des objets mathématiques. L'intervention de Marina aurait très bien pu être exploitée dans une telle approche.

Pour conclure ce point de l'étude, montrons que, loin de détourner de la prise en compte du rapport entre distances parcourues et temps (l'objectif d'apprentissage visé par la maîtresse), cette exploitation peut permettre de concourir à son acquisition. Ci-après, voici la table dans laquelle apparaissent côte à côte les valeurs de l'énoncé et celle des temps que Beto aurait réalisés en continuant à nager à la même vitesse que sur son 50 m, pris comme temps de référence. Il est important pour la bonne compréhension que les lignes et les colonnes de telles tables soient labelisées (ou : étiquetées). Dans une situation de classe, on peut être amené à travailler pendant une phase d'action sur des tables non étiquetées, mais en passant à une phase de validation, il convient de compléter lignes et colonnes par l'étiquetage.

	Distance en mètres	Temps en secondes	Temps de référence en secondes
Amalia	100	120	100
Beto	*50*	*50*	*50*
Catalina	150	171	150
Dario	1500	2400	1500

De la considération de chaque ligne de la table, il ressort que le temps de référence est moindre que celui réalisé par le nageur considéré. Ainsi Amalia réalise un temps de 120 sec tandis que le temps de référence est de 100 sec. La présentation sous forme de l'écriture fractionnaire peut alors amener à braquer le projecteur sur les rapports des distances aux temps :

$$\frac{100}{120} < \frac{100}{100}, \frac{150}{171} < \frac{150}{150}, \frac{1500}{2400} < \frac{1500}{1500}.$$

Le recours à l'écriture fractionnaire est exposé en particulier dans l'article déjà cité Adjiage & Pluvinage (2007). L'idée n'est pas de faire passer en force cette écriture en l'imposant d'emblée pour toute étude liée à la proportionnalité, il s'agit d'amener les élèves à se convaincre eux-mêmes, sur bien d'autres exemples que celui que nous venons de considérer, de sa pertinence et de l'intérêt d'y recourir.

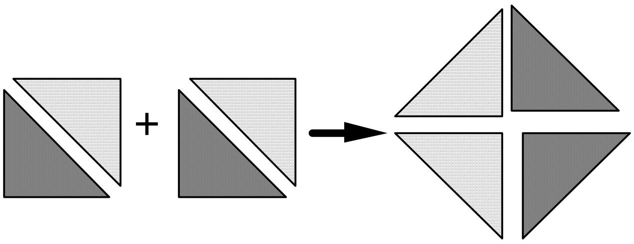
2. Le dialogue du Ménon vu à la lumière de la déconstruction dimensionnelle

Dans le dialogue du Ménon de Platon, considéré du point de vue didactique notamment par Glaeser (1999), Socrate a envisagé l'erreur résultant de la confusion entre longueurs et aires, mais il ne pose pas la question des différentes démarches possibles de résolution. Or pour l'analyse *a priori* d'une situation didactique, une telle question se trouve posée. Dans les épisodes de classe précédemment considérés, la prise en compte d'études didactiques, telle celle de Vergnaud (1983) qui a été indiquée, permet dans l'analyse *a priori* d'envisager le recours à des tableaux du type de celui que nous avons présenté *in fine*.

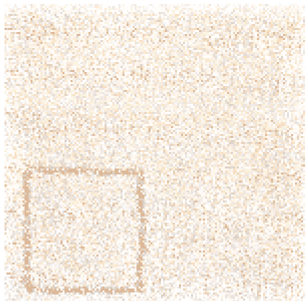
Qu'en est-il pour le problème que Socrate pose dans le Ménon, à savoir l'obtention d'un carré d'aire double de celle d'un carré donné ? La mesure des surfaces, objets de dimension 2, ou unités figurales 2D selon la terminologie de Duval (2005), se trouve confrontée à la difficulté due au fait que les surfaces ont des formes variées. La mesure des longueurs, correspondant à des unités figurales 1D, ne rencontre pas la même difficulté. Ainsi deux segments de droite mis bout à bout constituent encore un segment de droite, tandis que deux carrés mis côte à côte ne forment jamais un carré. N'y a-t-il pas cependant des figures géométriques dont l'assemblage s'accompagne d'une conservation de forme ?

Pour qui a eu l'occasion de jouer avec les pièces du puzzle intitulé Tangram, cette question conduit à une réponse simple, qui résulte de la considération de triangles rectangles isocèles. L'assemblage de *deux* tels triangles isométriques produit un nouveau triangle rectangle isocèle, dont les côtés de l'angle droit sont les hypoténuses des deux triangles de départ. C'est ce que montre la figure ci-dessus, tracée à la manière des dessins dans le sable qui pouvaient illustrer les propos de Socrate et que l'on trouve dans le document du Ménon traduit en français et mis en ligne par Bernard SUZANNE (2000).

Dans des remarques qu'il nous a envoyées au moment de la rédaction du présent article, Raymond DUVAL signale qu'en conséquence un traitement figural possible repose exclusivement sur la prise en compte des unités figurales 2D et sur une travail de reconfiguration des unités figurales 2D. Il peut être réalisé matériellement en partant de deux formes carrées d'aires égales (on a donc d'emblée la condition à réaliser).



Voyons, après cette analyse, des extraits commentés du dialogue du Ménon de Platon, dans la traduction française de Bernard SUZANNE (2000). Pour ne pas alourdir, nous ne reproduisons pas l'intégralité du dialogue, ce qui ne nuit pas à notre propos. Nous avons numéroté les phrases du texte complet et reproduit cette numérotation dans les extraits, afin que le lecteur désireux de consulter le texte complet du Ménon puisse facilement s'y retrouver.



1. SOCRATE.-- *Maintenant, dis-moi, mon garçon, sais-tu que ceci est un espace carré ?*
2. L'ESCLAVE.—*Certes*

…

7. SOCRATE.-- *Un tel espace ne pourrait-il être soit plus grand, soit plus petit ?*
8. L'ESCLAVE.-- *Très certainement.*
9. SOCRATE.-- *Si donc ce côté-ci était de deux*

pieds et celui-là de deux, de combien de pieds serait le tout ? Mais examine [les choses] *ainsi : si celui-ci était de deux pieds, mais celui-là d'un pied seulement, n'est-il pas vrai que l'espace serait d'une fois deux pieds ?*

10. L'ESCLAVE.-- *Oui.*
11. SOCRATE.-- *Mais puisque celui-là est aussi de deux pieds, cela ne fait-il pas deux fois deux ?*

…

16. L'ESCLAVE.-- *Quatre, Socrate.*
17. SOCRATE.-- *Ne pourrait-il y avoir, par rapport à cet espace, un autre, double, mais semblable, ayant toutes les lignes égales, comme celui-ci ?*
18. L'ESCLAVE.-- *Si.*
19. SOCRATE.-- *De combien de pieds serait-il ?*

A ces deux dernières répliques, nous pouvons imaginer que puisse se substituer l'échange suivant, si nous mettons, à la place de l'esclave, une élève Marina ayant pensé à l'assemblage de triangles rectangles isocèles.

MARINA à la place de L'ESCLAVE.-- Nous avons vu deux espaces carrés mis côte à côte : ils ne forment pas un espace carré. Mais, Socrate, deux moitiés de carré égales ne s'assemblent-elles pas pour former un espace semblable double ?
SOCRATE qui n'a pas compris cette intervention. -- Mais non, deux moitiés de carré côte à côte forment ou bien le carré, ou bien un espace dont un côté serait quadruple de l'autre. Restons à nos carrés, de combien de pieds serait notre espace double ?

20. L'ESCLAVE.-- *Huit.*
21. SOCRATE.-- *Eh bien, voyons ! Essaye de me dire de quelle longueur sera chaque ligne ce celui-ci. Celle de celui-là est en effet de deux pieds ; mais qu'en sera-t-il de celle de celui qui est double ?*
22. L'ESCLAVE.-- *Il est tout à fait évident, Socrate, qu'elle sera double.*
23. SOCRATE.-- *Tu vois, Ménon, que je ne lui enseigne rien, mais que j'interroge continuellement. Et pour l'instant, celui-ci pense savoir quelle est celle à partir de laquelle on construira l'espace de huit pieds. Ou bien n'est-ce pas ton avis ?*

Il y a un parallélisme, remarquable jusque dans certaines particularités comme l'existence de difficultés sur les unités, entre l'épisode de classe que nous avons rapporté et ce dialogue. La difficulté sur les unités qui est présente ici est relative aux aires : celles-ci y sont évaluées en pieds tout comme les longueurs, au lieu de l'être en pieds carrés, comme nous le ferions aujourd'hui si nous n'étions pas passés au système métrique. On comprend que l'amalgame puisse être source de confusions ! Par exemple un carré de quatre pieds peut être soit un *espace de quatre pieds* (d'aire), qui aura un côté de deux pieds, soit un carré de quatre pieds de côté, qui aura une aire de seize pieds. A côté de cela, l'évaluation de la vitesse en kilomètres par heure conduisant à se demander s'il faut multiplier ou diviser les kilomètres par les heures fait figure de cas simple.

24. MÉNON.-- *Si, en effet.*
25. SOCRATE.-- *Le sait-il donc ?*
26. MÉNON.-- *Non certes.*
27. SOCRATE.-- *Mais il pense assurément* [que c'est] *à partir de la double ?*
28. MÉNON.-- *Oui.*

…

35. SOCRATE.-- *Dessinons donc d'après celle-ci quatre* [lignes] *égales. Ne serait-ce pas là ce que tu dis être l'espace de huit pieds ?*
36. L'ESCLAVE.-- *Tout à fait.*
37. SOCRATE.-- *Eh bien, n'y a-t-il pas dans celui-ci ces quatre-là, dont chacun est égal à celui de quatre pieds ?*
38. L'ESCLAVE.-- *Si.*
39. SOCRATE.-- *De quelle grandeur est-il donc ? N'est-il pas quatre fois aussi grand ?*
40. L'ESCLAVE.-- *Comment non ?*
41. SOCRATE.-- *Est donc double ce qui est quatre fois aussi grand ?*
42. L'ESCLAVE.-- *Non, par Zeus.*
43. SOCRATE.-- *Alors, combien de fois plus grand ?*
44. L'ESCLAVE.-- *Quatre fois plus grand.*
45. SOCRATE.-- *A partir de la* [ligne] *double, donc, mon garçon, l'espace devient, non pas double, mais quadruple.*

…

65. SOCRATE.-- *Eh bien alors, si celle-ci est de trois et celle-ci de trois, l'espace entier devient de trois fois trois pieds.*

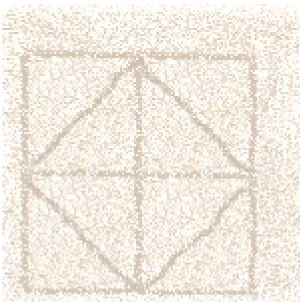
66. L'ESCLAVE.-- *C'est clair.*
67. SOCRATE.-- *Mais combien de pieds font trois fois trois ?*
68. L'ESCLAVE.-- *Neuf.*
69. SOCRATE.-- *Mais de combien de pieds le double devait-il être ?*
70. L'ESCLAVE.-- *Huit.*
71. SOCRATE.-- *Ce n'est donc pas encore à partir de celle de trois pieds que se forme l'espace de huit pieds.*
72. L'ESCLAVE.-- *Non, certes !*
73. SOCRATE.-- *Mais alors, à partir de laquelle ? Essaye de nous le dire exactement, et si tu ne veux pas dire un nombre, alors montre à partir de laquelle.*
74. L'ESCLAVE.-- *Mais, par Zeus, Socrate, je n'en sais vraiment rien !*

Ici, à la suite de son intervention précédente, l'élève Marina aurait pu réagir.

MARINA à la place de L'ESCLAVE.-- Mais, par Zeus, Socrate, mon idée des moitiés de carré me paraît utilisable pour montrer laquelle !

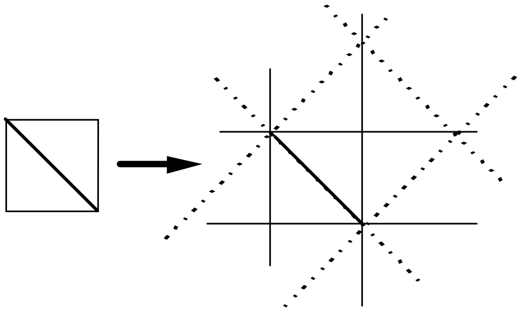
…

87. SOCRATE.-- *... Dis-moi donc, toi : ceci n'est-il pas pour nous l'espace de quatre pieds ? Comprends-tu ?*
88. L'ESCLAVE.-- *Certes.*
89. SOCRATE.-- *Mais nous pourrions lui accoler un autre qui lui soit égal ?*
90. L'ESCLAVE.-- *Oui.*
91. SOCRATE.-- *Et ce troisième ici, égal à chacun d'eux ?*
92. L'ESCLAVE.-- *Oui.*
93. SOCRATE.-- *Et ne pourrions-nous pas combler ce vide dans le coin ?*
94. L'ESCLAVE.-- *Tout à fait.*
95. SOCRATE.-- *N'est-il donc pas vrai qu'il en résulte quatre espaces égaux là ?*



96. L'ESCLAVE.-- *Si.*
97. SOCRATE.-- *Quoi encore ? Ce tout, combien de fois plus grand que celui-ci devient-il ?*
98. L'ESCLAVE.-- *Quatre fois plus grand.*
99. SOCRATE.-- *Or il devait devenir double pour nous ; ne t'en souviens-tu pas ?*
100. L'ESCLAVE.-- *Tout à fait.*
101. SOCRATE.-- *Eh bien, cette ligne d'angle à angle ne coupe-t-elle pas en deux chacun de ces espaces ?*

Dans les remarques, déjà citées, qu'il nous a adressées, Raymond Duval signale que le traitement du problème par Socrate repose exclusivement sur la prise en compte des unités figurales 1D. Il suppose que l'on oublie la vision "surface" ou la focalisation sur les unités figurales 2D, et que l'on se concentre sur une vision "lignes" et donc sur les unités figurales 1D, autrement dit que l'on effectue une déconstruction dimensionnelle des formes. Et pour Raymond Duval, il y a là un saut cognitif considérable par rapport au traitement présenté dans notre analyse *a priori*.



102. L'ESCLAVE.—*Si.*
103. SOCRATE.— *Eh bien, cela ne fait-il pas quatre lignes égales, entourant l'espace que voici ?*
104. L'ESCLAVE.-- *Ça les fait.*

…

115. SOCRATE.-- *Alors, pour celui-ci, combien de pieds cela fait-il ?*
116. L'ESCLAVE.-- *Huit.*
117. SOCRATE.-- *Sur quelle ligne ?*
118. L'ESCLAVE.-- *Sur celle-ci.*
119. SOCRATE.-- *Sur celle qui est tracée d'angle à angle dans celui de quatre pieds ?*
120. L'ESCLAVE.-- *Oui.*
121. SOCRATE.-- *Or les spécialistes l'appellent justement « diagonale » ; de sorte que, si « diagonale » est son nom, ce serait sur la diagonale, à ce que tu dis, serviteur de Ménon, que se formerait l'espace double.*

Pour achever le parallèle avec l'épisode qui a incombé à Marina, nous pouvons imaginer de substituer à ces deux dernières répliques les suivantes :

MARINA à la place de L'ESCLAVE. -- Justement, Socrate, la moitié de carré dont je parlais est limitée par une diagonale.
SOCRATE. – A présent, je comprends quelles moitiés de carré tu voulais assembler pour obtenir encore une moitié de carré. Tes moitiés de carré n'avaient pas une forme rectangulaire, mais triangulaire.

122. L'ESCLAVE.-- *Très certainement, Socrate.*

Conclusion et questions

Notre expérience d'observation de classes nous conduit à dire que, si la maïeutique socratique est loin d'être l'unique pratique pédagogique mise en œuvre dans les classes, et c'est heureux, on rencontre en revanche des moments de pratiques maïeutiques dans beaucoup de classes. Des dialectiques de validation au sens de Guy Brousseau, voire d'institutionnalisation, peuvent aisément se prêter à de telles mises en œuvre. Et tout professeur sent à certains moments que ses élèves sont en possession des éléments pour répondre ou conclure par eux-mêmes. De ce point de vue, la maîtresse de notre observation n'apparaît donc pas comme singulière au sein du corps enseignant.

Cela dit, nous avons observé une application seulement partielle de la maïeutique par la maîtresse, malgré les qualités professionnelles de cette dernière, attestées lors de l'observation par l'implication de l'ensemble de ses élèves. S'agit-il d'une caractéristique qui lui est personnelle, ou n'y aurait-il pas une tendance générale des professeurs, lors d'une pratique maïeutique de classe, à accorder à l'expression par les élèves eux-mêmes du savoir à acquérir la primauté sur la sensibilisation des élèves à leurs ignorances, leurs errements ? La question mérite d'être posée.

L'étude des vitesses que le manuel présentait était envisagée par les auteurs comme une étude introductive. Mais la maîtresse de la classe observée l'a plutôt prise comme un exercice d'application d'une définition mathématique, celle de la vitesse donnée comme rapport de la distance parcourue au temps : $v = \frac{d}{t}$. S'agit-il d'une tendance à l'*impatience pédagogique*, la maîtresse souhaitant que soit abordé au plus vite l'objet d'apprentissage visé ? Ou est-ce dû à ce que la maîtresse n'a pas étudié *a priori* une question essentielle en didactique, celle des différentes démarches de résolution possibles, pas plus que Socrate ne l'a fait dans le Ménon ? Soulignons encore une fois l'efficacité professionnelle générale de l'enseignante, qui nous permet plus facilement de relever en contrepoint un certain *"manque à apprendre"* dans la leçon observée.

Le dialogue du Ménon, pour sa part, est une illustration de patience pédagogique, mais on peut aussi y pointer certain *"manque à apprendre"*. En ce qui concerne la terminologie, tout ce qui eut pu être dit de relatif aux triangles, en particulier le triangle rectangle isocèle et son hypoténuse, est totalement absent. Pour ce qui est de la géométrie, tout son aspect dynamique, à commencer par la considération de déplacements de figures, reste ignoré. Il faut toutefois reconnaître à ce sujet que la géométrie grecque, étude de figures plus que du plan en général, ne conduisait guère à une telle vision dynamique. Et reconnaissons aussi que, contrairement aux élèves d'une classe, l'esclave du dialogue n'est pour Socrate qu'un élève de circonstance, pour lequel il n'y a pas un projet de formation.

Annexe : transcription originale en espagnol des épisodes rapportés

Ejemplo 1. Papel protagónico de la Maestra

1. Maestra: -¿Qué podemos hacer para saber cuántos segundos hizo Amalia, Catalina y Darío?
2. Di: -Dividiendo la distancia entre el tiempo
3. Maestra: -¡Dividiendo la distancia entre el tiempo! (con énfasis) ¡Claro!
…
4. Maestra: ahora, hay otro detalle ahí, hay minutos y hay segundos … ¿Qué podemos hacer para que se nos haga más fácil todo? ¿Convertir qué cosa?
5. Alumna: convertir todos a segundos
6. Maestra: Todos a segundos ¿verdad? A ver, en la primera ya está, ahora … dos minutos ¿cuántos segundos serían?... … anótenlo…
…
7. Maestra: tú ya entendiste Di, pasa al pizarrón…

100	120	.83 m x seg
50	50	1 m x seg
150	171	.87 m x seg
1500	2400	.62 m por seg

8. Tabla que realizan los alumnos en el pizarrón. (Previamente han realizado en este espacio las operaciones correspondientes)
9. Maestra: - ¿Cuál sería la que respondería a la última pregunta? ¿Quién fue el que nadó más rápido?
10. Grupo: -Darío
11. Maestra: ¿por qué Darío? … ¿Cuántos metros por segundo nadó Darío? … (y continúa la lectura a coro de las siguientes expresiones que aparecen en la tercera columna bajo la dirección de la Maestra: ejemplo: Maestra: Cuánto nadó Amalia? Alumnos: punto 83 metros por segundo, etc.)
…
12. Maestra: -¿Quién nadó más rápido?
13. Grupo: -Darío
14. Maestra: Levantamos la mano los que creemos que fue Darío…
…
15. Maestra: Díganme: ¿cuánto nadó Beto?
….

16. Maestra: Punto ochenta y tres ¿cómo se lee?
17. Alumnos: ochenta y tres centésimos
18. Maestra: Pero centésimos en metro ¿cómo se dice?
19. Alumno: Centímetro
20. Maestra: … entonces son ochenta y tres ¿qué?
21. Alumnos: Centímetros
22. Maestra. Centímetros por segundo

23. Maestra. Y luego ¿cuánto nadó Catalina?... (continúa la segunda lectura a coro de las expresiones que aparecen en la tercera columna bajo la dirección de la Maestra)
…
…
24. Maestra: - ¿Quién nadó más rápido?
…
25. Grupo: -Darío
26. Mar: - No Maestra, fue Beto
27. Maestra: ¿Estaba correcto que era Darío?
28. Alumnos: No
29. Maestra: ¿Quién nadó más rápido?
30. Alumnos: Beto
31. Maestra: -Es correcto, fue Beto … porque … ¿un metro es más chico que sesenta y seis centímetros?

Ejemplo 2. Papel protagónico de una estudiante (Marina)

1. Maestra: -¿Cómo podríamos saber quién nadó más rápido?
2. Marina: -Por proporcionalidad… Para ver si por ejemplo 50 m. lo hicieron en 50 seg. en 100 tuvieron que hacer un minuto con cuarenta segundos
3. Maestra: Me lo podrías hacer en el pizarrón?

50		50
100	1	40
150	2	30
1500	25	

4. Tabla que realiza Mar en el pizarrón

5. Maestra: Arriba es minutos y segundos ¿verdad?
6. Maestra: Ahora ¿cómo podemos saber quién hizo más tiempo? … ¿cómo podríamos compara esas cantidades (las que anotó Marina en el pizarrón) ¿Qué tendríamos nosotros que hacer para comparar?
…
7. Marina: viendo esto (señala lo que escribió en el pizarrón) con lo que hicieron, para ir sacando cuánto falta … (para ver) … cuánto tiempo hicieron…
8. Maestra: sí ¿cómo sería?
9. Marina: -“Amalia hizo 100 m, ella hizo 2 min., pero aquí está teniendo 1 min. 40 seg. (señala la cantidad que aparece en la tabla del pizarrón)
10. Maestra: -Amalia hizo 100 metros, pero creo que la cantidad está mal ¿100 metros en cuánto? ¡Chécale!
11. Marina: (observa las cantidades que escribió en el pizarrón)
12. Maestra: “¿Alguien le quiere decir qué pasa con Amalia? ¡Vean el pizarrón!
13. Maestra: ¿cien metros es un minuto 40 segundos?
14. Ale: No!

…
15. Maestra: Ahí hay un error, mi amor ¡bórrale!
(Se corrige fila a fila toda la tabla que hizo Mar en el pizarrón, aduciendo que es incorrecta, sin dar mayor explicación y se copia textual la que aparece en el libro de texto. En esto participa activamente Ale).
…
16. Maestra: ¿Cómo comparamos este tiempo y estas distancias? ¿Cómo podemos hacer para comparar? … Ya me dijiste más o menos Marina una idea ¡hazla! …
17. Marina: Es que ya había hecho la tabla, pero ustedes no me entendieron
18. Maestra. ¡Ah! Ya te entendí
19. Marina. Me basé a lo que hizo Beto
20. Maestra. Hiciste la tabla de lo que hizo Beto, o sea, era de Beto nada más la tabla
21. Marina. Era para saber, porque yo pienso que Beto era más rápido, entonces si agarramos que Beto hizo 50 segundos (para) 50 metros, entonces hubiera nadado diferente…
22. Maestra: Muy bien ¿Qué podemos hacer para saber cuántos segundos hizo Amalia, Catalina y Darío?

Bibliographie

ADJIAGE R. (2005), Diversité et invariants des problèmes mettant en jeu des rapports, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 95–129.

ADJIAGE R. & PLUVINAGE F. (2007), An experiment in teaching ratio and proportion, *Educational Studies in Mathematics*, **65**, 149–175.

DUVAL R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **10**, 5–54.

DUVAL R. & GODIN M. (2005), Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N,* **76**, 7–27.

GLAESER G. (1999), *Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques*, Textes rassemblés et préparés par Blochs B. & Régnier J.-C., La Pensée Sauvage éditions, Grenoble.

GRAVEMEIJER K. & DOORMAN D. (1999), Context problems in Realistic Mathematics Education: a calculus course as an example, *Educational Studies in Mathematics*, **39**,111–129.

SUZANNE B. (2000), Traduction annotée du Ménon de PLATON, en ligne à http://plato-dialogues.org/fr/tetra_3/meno/traductions.htm et http://plato-dialogues.org/fr/tetra_3/meno/t80d_86d.htm

VERGNAUD G. (1983), Multiplicative Structures, in *Acquisition of mathematics concepts and processes* (Eds. LESH R. & LANDAU M.), Academic Press, New York, 127–174.

VYGOTSKY L.S. (1985), Le problème de l'enseignement et du développement mental à l'âge scolaire, dans *Vygotsky aujourd'hui* (Eds. SCHNEUWLY B. & BRONCKART J. P.), Delachaux & Niestlé, Neuchâtel, Paris, 95–117.

PLUVINAGE FRANÇOIS
pluvin@math.u-strasbg.fr

RIGO LEMINI MIRELA
CINVESTAV del IPN México
MIRELA RIGO LEMINI <mirelarigo@prodigy.net.mx>