PATRICK GIBEL

ANALYSE EN THÉORIE DES SITUATIONS D'UNE SÉQUENCE DESTINÉE À DÉVELOPPER LES PRATIQUES DU RAISONNEMENT EN CLASSE DE MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE PRIMAIRE

Abstract. Analysing with theory of situations a primary school lesson devoted to improvement of reasoning - The purpose of this article is to take as object of study reasoning processes elaborated by the pupils during a sequence “The biggest number”, proposed in a class of fifth graders in a primary school. This research, made within the framework of the theory of didactical situations in mathematics, aims at analyzing on the one hand pupils reasoning processes, on the other hand, more precisely, conditions in which the reasoning processes were produced. We will analyse their possibilities to use them to take a decision, formulate a assertion, express an explanation or elaborate an argument depending on whether the conditions, which define the situation, require, or not, their uses**.**

Résumé. Le but de cet article est de prendre comme objet d'étude les raisonnements élaborés par les élèves au cours d'une séquence “Le nombre le plus grand”, proposée dans une classe de cinquième année de l'école primaire. Cette recherche, effectuée dans le cadre de la théorie des situations didactiques, vise à analyser d'une part les raisonnements produits pas les élèves, d'autre part à étudier, précisément, les conditions dans lesquelles les élèves les ont produits. Nous analyserons leurs possibilités de les utiliser pour prendre une décision, formuler une assertion, donner une explication ou produire une argumentation selon que les conditions, qui définissent la situation, requièrent ou non leurs usages.

Mots-clés. Raisonnement, argumentation, situation a-didactique, situation de validation, argumentation, contre-exemple, méthode généralisable, domaine de validité.

Introduction

Nous avons choisi de prendre comme objet d'étude une séquence de classe dans laquelle, explicitement, l'enseignant par la dévolution d'une situation a-didactique cherche à développer les capacités de raisonnement des élèves.

Le choix d'effectuer l'analyse de cette séquence en théorie des situations didactiques vise à apporter des éléments de réponses aux questions suivantes :

Peut-on favoriser la pratique des raisonnements en faisant dévolution, aux élèves, de situations dans lesquelles ils produisent et utilisent leurs raisonnements pour répondre aux exigences de la situation ? En quoi, la théorie des situations, permet-elle une analyse approfondie des conditions qui définissent ces situations d'apprentissages ?

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 13, p. 5 - 39.

Peut-on enseigner ce qu'est « faire des mathématiques » en confrontant les élèves à des situations a- didactiques ?

Nous définirons dans le paragraphe 1 ce que nous entendons par le terme « raisonnement » en classe de mathématiques à l'école primaire, et nous expliciterons à quelles conditions un « raisonnement supposé » produit par un élève, peut-il être considéré, par l'observateur, comme un « raisonnement effectif ».

Dans le paragraphe 2 nous effectuerons l'analyse a priori de la séquence choisie, « Le nombre le plus grand », dont l'ingénierie didactique a été produite par G. Brousseau et qui a été mise en œuvre en classe de C.M.2 au C.O.R.E.M[1]. Cette séquence a été choisie car elle fait clairement apparaître de nombreux raisonnements chez les sujets, sous des formes très variées et dans des fonctions très diverses.

Nous présenterons, dans le paragraphe 3, notre outil d'analyse : le schéma de la structuration du milieu. Ce dernier nous permettra d'analyser, dans le paragraphe 4, d'une part la complexité didactique des raisonnements produits par les élèves dans chacune des « situations emboîtées », d'autre part les possibilités pour les élèves d'utiliser leurs raisonnements dans des fonctions spécifiques (prise de décisions, formulation d'une assertion, explication, argumentation) selon que les conditions, qui définissent la situation, requièrent ou non leur usage.

1. Les raisonnements en classe de mathématiques

1. 1. La détermination d'un raisonnement produit par un sujet : notion de « situation »

En classe de mathématiques, à l'école primaire, le terme « raisonnement » tend à couvrir un champ beaucoup plus vaste que celui des raisonnements formels, logiques ou mathématiques. C'est pour cette raison que nous avons pris comme définition initiale celle proposée par P. Oléron (1977) :

> « Un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduits en fonction d'un but ».

Pour affirmer que tel observable est l'indice d'un raisonnement dont les éléments sont en grande partie implicites, il est nécessaire de dépasser la définition formelle, pour examiner les conditions dans lesquelles le « raisonnement supposé » peut être considéré, par le chercheur, comme « raisonnement effectif ».

[1] Centre Observation et de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques, école Jules Michelet, 33400 Talence.

Dans le cadre d'une recherche sur l'usage et le traitement des raisonnements des élèves par les professeurs, cf. Brousseau et Gibel (2002), nous avons mis en évidence que, souvent, en situation didactique, le professeur relève, dans les formulations des élèves, des indices et les interprète davantage en fonction de leur utilité pour le déroulement de la leçon que du point de vue du projet initial de l'élève qui en est l'auteur. Par conséquent pou pouvoir déterminer et analyser objectivement les raisonnements produits pas les élèves, le chercheur doit suivre une autre voie. Il convient qu'il montre que tel raisonnement complet, dont il n'aperçoit qu'une partie ou que des indices, est bien celui qu'il faut attribuer à son auteur.

Pour cela il convient de montrer que le « supposé raisonnement »

- pourrait être énoncé par le sujet ou, qu'au moins, la connaissance, utilisée implicitement ou explicitement, est connue de lui ;
- est utile (il réduit une incertitude, par exemple, s'il y a doute car une autre règle aurait pu être appliquée). Le lien ne doit pas être l'effet d'une cause, par un mécanisme qui échapperait au jugement et à la volonté du sujet ;
- est motivée par un avantage qu'elle procure au sujet. Elle est l'instrument d'une modification de son environnement qui lui parait favorable ;
- est motivée par des raisons « objectives », propres : arguments de pertinence, de cohérence, d'adéquation, d'adaptation, qui justifient ce raisonnement là (et pas un autre) par opposition à l'idonéité (la conformité aux attentes du professeur).

Le chercheur doit donc montrer que la production du raisonnement prêté à ce sujet est motivée par une intention de la part de ce dernier, qu'elle répond à un but, qu'elle lui apporte un avantage dans les conditions qu'il perçoit, et avec les connaissances dont il dispose.

Ainsi, comme Brousseau et Gibel (2005) l'ont explicité, parmi toutes les conditions qui accompagnent la production d'un supposé raisonnement, quelques unes seulement – le moins possible - peuvent servir à le déterminer et à le justifier. Ces conditions ne sont pas quelconques. Elles forment un ensemble cohérent que nous appelons « situation ». La situation est une partie seulement du « contexte, ou de l'environnement de l'action de l'élève ou du professeur et elle comprend, mais pas seulement, une sorte de question à laquelle le raisonnement de l'élève est une réponse. Elle n'est réduite ni à l'action du sujet, ni à la connaissance qui la motive mais elle les met en relation rationnelle. Une situation peut expliquer pourquoi un raisonnement faux a été produit par d'autres causes qu'une erreur ou une insuffisance du sujet.

Ce point de vue est un peu différent de celui qui prévaut légitimement chez les professeurs où les seuls raisonnements vraiment utilisables sont les raisonnements entièrement corrects. Un raisonnement faux n'est qu'assez exceptionnellement un objet d'étude.

La théorie des situations a pour objet l'étude et la modélisation des situations ainsi définies. Elle est un instrument pour rechercher les explications minimales des faits observés, qui sont compatibles avec les faits connus.

1.2. Les raisonnements effectifs

Les raisonnements que nous étudierons seront essentiellement modélisables par des inférences c'est-à-dire des relations de la forme « Si la condition A est réalisée alors la condition B l'est (ou le sera) aussi ». Mais cette définition doit être complétée car nous voulons pouvoir distinguer les raisonnements effectifs des citations et intégrer des raisonnements qui se manifestent par des activités aussi bien que par des déclarations, ce qui nous amène à formuler la définition suivante Un *raisonnement* est donc une relation R entre deux éléments A et B telle que :

- A désigne une condition ou un fait observé, contingent ;
- B est une conséquence ou une décision ou un fait prévu ;
- R est une relation, une règle, plus généralement une connaissance empruntée à un répertoire considéré comme connu, accepté. La relation R conduit l'actant, dans la circonstance A, à prendre la décision B ou à prévoir le fait B ou à énoncer que le fait B est vrai.

Un *raisonnement effectif* comprend de plus :

- un agent E (élève ou professeur) qui utilise la relation R ;
- un projet déterminé par une situation $\mathbb{S}$ dont la réalisation exige l'usage de cette relation.

On peut dire que pour réaliser le projet déterminé par la situation S, le sujet utilise la relation R qui permet d'inférer B de la condition A. Ce projet peut être convenu et explicité par l'agent ou il peut lui être prêté par le chercheur à partir d'indices.

1.3. Classification des raisonnements d'après la fonction et le type de situation

En conclusion du paragraphe précédent un raisonnement est identifié par sa fonction dans une situation, par le rôle qu'il y joue. Cependant un raisonnement peut avoir des fonctions différentes, décider, informer, convaincre, expliquer. Elles sont différenciées par des modèles de situations mathématiques (d'action, de formulation, de preuve…) généraux mais différents, pour une présentation plus détaillée nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Brousseau (1997).

De plus, à un moment donné du déroulement d'une leçon, on peut identifier, suivant les intentions des participants, un très grand nombre de situations plus ou moins « emboîtées ». Nous expliciterons, dans le paragraphe 3, cette notion de « situations emboîtées » dont la définition repose sur le concept de « schéma de la structuration du milieu ».

Les raisonnements qui apparaissent dans les situations didactiques se rapportent à leurs différentes composantes, telles que décrites dans la théorie didactique des situations mathématiques :

Dans les situations a-didactiques, le raisonnement est produit par des élèves, pour les besoins de la résolution, sans intervention, appui, ni recours à l'enseignant :

– soit comme un moyen pour un ou plusieurs élèves d'établir leurs décisions dans les situations d'action ;

– soit comme un moyen d'appui un peu formel, pour préciser une information dans une situation de formulation ;

– soit comme moyen de convaincre un ou des condisciples de la validité lors d'une situation de validation.

Dans les situations didactiques, le raisonnement de l'élève s'adresse principalement à l'enseignant,

– soit pour justifier une action ou pour produire une réponse ;

– soit pour satisfaire une demande explicite ou implicite du professeur ; formellement il est une justification considérée comme un objet de l'enseignement en cours, indépendamment de son rapport avec l'action engagée, il s'apparente alors à une citation.

1.4. L'identification des raisonnements

Afin de pouvoir étudier les moyens utilisés par l'enseignant pour gérer les raisonnements apparaissant dans les productions des élèves, il convient de définir ce qui, pour *le chercheur, est* assimilable à un « raisonnement », pour cela faut :

– identifier des observables (textes, gestes, paroles, dessins, *etc.*) produits par un élève, par plusieurs élèves en interaction ou par l'enseignant ;

– relier ces observables par une relation « rationnelle » telle que :

Cette relation s'exprime dans le langage du chercheur, différent à priori de celui des protagonistes.

Elle attribue à ces observables un rôle dans la réalisation du projet proposé par la situation convenue ou dans celle de l'un de ses modèles qui ont la charge de représenter les intentions possibles des protagonistes.

Elle est hypothétique ou formelle :

– identifier un actant : professeur, élève ou groupe d'élèves à qui est attribué l'établissement de la relation dans le cadre d'un projet qui lui est prêté ;

– s'il s'agit d'une hypothèse, établir qu'elle est valide, en montrant, éventuellement à l'aide d'autres indices, qu'elle est la moins improbable des explications.

De plus la relation rationnelle ainsi « observée » par le chercheur doit résulter d'une combinaison « originale », ou considérée comme telle, dans le sens où elle n'a pas fait l'objet d'une institutionnalisation, elle n'a pas été enseignée ou montrée comme objet d'enseignement.

Il est à noter que parmi les raisonnements détectés par le chercheur, certains d'entre eux peuvent être attribués à un ou à plusieurs des protagonistes bien que ces derniers ne les aient pas nécessairement identifiés comme tel.

Dans le paragraphe suivant nous allons effectuer l'analyse a priori de la séquence « Le nombre le plus grand » et expliciter l'ingénierie didactique.

2. Présentation et analyse a priori de la situation a-didactique destinée à développer certaines pratiques du raisonnement

2.1 Origine et enjeux de cette séquence

Le problème de mathématiques a été initialement proposé par G. Glaeser (1999), l'énoncé est le suivant :

Soient cinq nombres naturels quelconques a,b, c,d,e.

Quel est le nombre le plus grand que l'on peut obtenir à partir des quatre opérations élémentaires {+ ;- ;x ; :} appliquées à ces nombres qui ne seront pris dans le calcul qu'une seule fois, une même opération pouvant être utilisée plusieurs fois.

La mise en œuvre de cette séquence est liée à la rencontre de G. Brousseau et de G. Glaeser qui a été à l'origine de ce projet didactique. Le problème proposé est un problème ouvert, G. Brousseau montre l'utilité de la théorie des situations didactiques pour élaborer une ingénierie permettant de mettre en place une situation a-didactique de validation.

L'idée de G. Brousseau est de faire débattre les élèves sur des déclarations mathématiques suivant des règles qui les conduisent à produire des preuves, plus précisément leur faire chercher des contre exemples.

La situation d'argumentation, telle qu'elle a été conçue par G. Brousseau, est une situation a-didactique ou du moins en grande partie a-didactique en effet il est possible et même probable que l'enseignant sera conduit à intervenir de manière à assurer le maintien du processus. Par conséquent l'analyse de cette séquence devrait nous permettre d'apporter des éléments de réponses aux questions que nous avons formulées dans l'introduction mais également aux questions suivantes :

Quelles sont les différentes formes de raisonnements, produits par les élèves, qui apparaissent lors des différentes phases de cette séquence ? Quelles fonctions recouvrent-ils ?

A quelles conditions les raisonnements produits par les élèves en situation d'action ou de formulation peuvent-ils être utilisés par les élèves dans des situations de preuve ?

2.2. La mise en situation d'analyse a priori

2.2.1. Analyse de la nature de la réponse attendue au problème proposé

Pour déterminer la nature de la réponse attendue par l'enseignant il est nécessaire de distinguer les conditions dans lesquelles la réponse doit être produite :

- si la suite de nombres est donnée par l'enseignant alors la réponse attendue est un nombre ainsi que le programme de calculs permettant de l'obtenir ;
- si les cinq nombres ne sont pas explicités, c'est-à-dire si l'on se place dans le cas général, alors la réponse idoine est une méthode de calculs. Cependant il est à noter que l'écriture d'une expression algébrique ne conviendra pas car il est nécessaire de distinguer différents cas selon la suite de nombres considérés.

Dans le second cas nous sommes amenés à considérer l'expression algébrique

$$a \times b \times c \times d \times e$$

où a,b,c,d et e désignent cinq entiers naturels quelconques.

Or cette expression algébrique est valide, pour obtenir le nombre le plus grand, à partir d'un 5-uplet donné, que si les cinq nombres sont tous distincts de 0 et de 1.

Le domaine de validité de cet algorithme «naturel» n'est pas immédiatement évident, il devrait conduire les élèves à s'interroger sur le statut des nombres 0 et 1. Ces derniers ne sont pas des nombres comme les autres, ils ont des caractères didactiques et culturels spécifiques.

Il est à noter que la présence d'un ou plusieurs 0 nécessite, pour obtenir le nombre le plus grand, de déterminer, à partir de la suite constituée par les entiers non nuls, le nombre le plus grand et d'ajouter, ensuite, le ou les entiers nul(s), ce qui nécessite de distinguer des cas particuliers lors de la formulation de la méthode.

Examinons à présent les cas où la suite des cinq nombres contient un ou plusieurs 1 et explicitons pour chacun d'eux la formule permettant d'obtenir le nombre le plus grand.

Cas n°1 : Supposons que la suite de nombres comporte exactement un 1 alors elle est de la forme 1,b,c,d,e

$$1 < b \le c \le d \le e$$

Dans ce cas le nombre le plus grand est donné par la formule

$$(b+1) \times c \times d \times e$$

Cas n°2 : Supposons que la suite de nombres comporte exactement deux 1 alors elle est de la forme 1;1,c,d,e avec

$$1 < c \le d \le e$$

Il est alors nécessaire de distinguer deux cas :

Si c=d=2 alors le nombre le plus grand est obtenu par l'algorithme

$$(c+1) \times (d+1) \times e$$

Sinon le nombre le plus grand est donné par

$$(1+1) \times c \times d \times e$$

Cas n°3 : Supposons que la suite de nombres comporte exactement trois 1 alors elle est de la forme 1,1,1,d,e avec

$$1 < d \le e$$

Le nombre le plus grand est donné par la formule

$$(1+1+1) \times d \times e$$

Cas n°4 : Supposons que la suite de nombres comporte exactement quatre 1 alors elle est de la forme 1,1,1,1,e avec e > 1

Si e=2 le nombre le plus grand est donné par la formule

$$(1+1+1) \times (e+1)$$

Si e>2 le nombre le plus grand est donné par la formule

$$(1+1+1+1) \times e$$

Cas n°5 : Supposons que la suite soit formée de cinq 1

Le nombre le plus grand est obtenu par la formule

$$(1+1+1) \times (1+1)$$

La formulation d'une méthode généralisable est liée à l'usage des propriétés de la multiplication, il convient donc de s'intéresser aux connaissances dont disposent les élèves en cinquième année de primaire. Pour ces élèves, l'associativité n'est pas acquise en ce qui concerne l'usage de cette propriété, ni formulable. La commutativité est admise implicitement du point de vue de son usage par les élèves mais ces derniers ne peuvent pas faire référence à la propriété plus précisément à sa désignation.

2.2.2. Analyse didactique de la séquence

Ce qui est visé, c'est l'enseignement des règles du jeu de la preuve, c'est donc une leçon sur le vrai et le faux mais également sur la manière de l'établir. L'un des objectifs de la séquence est de mettre les élèves en situation de débattre de la validité de méthodes permettant d'obtenir le nombre le plus grand quelle que soit la suite de nombres proposée.

Le « rejet » d'une méthode est lié à la production d'un contre-exemple, c'est-à-dire à l'exhibition d'une suite de cinq nombres et d'une méthode conduisant à la production d'un nombre plus grand que celui obtenu par la méthode initialement proposée.

Pour qu'une mise en débat de la validité des méthodes soient envisageable c'est-à-dire pour que la situation de validation puisse être a-didactique il est nécessaire que :

1. Ces méthodes aient été produites par les élèves et donc qu'elles résultent d'un travail de formulation fondé sur l'écriture de méthode.
2. Elles aient fait l'objet d'une reconnaissance formelle par l'enseignant et par conséquent qu'elles appartiennent au *répertoire didactique* de la classe de sorte qu'elles soient utilisables par l'ensemble des élèves.
3. Les élèves parviennent à se les approprier c'est-à-dire à faire le lien entre leur formulation et leur usage.
4. Elles soient assimilables à des assertions dans le sens où elles sont correctement formées et consistantes.

De plus pour qu'il soit envisageable de demander aux élèves d'élaborer des méthodes, il faut dans un premier temps envisager des répétitions de calculs sur des suites de nombres différentes données par l'enseignant afin que les élèves parviennent à élaborer des programmes de calculs que nous appellerons programmes d'actions finalisés.

Il convient d'examiner :

- d'une part les écritures qui correspondent à leur programme de calculs. Dans le cas où les nombres sont spécifiés les élèves peuvent utiliser des écritures comportant des parenthèses ou avoir recours à des arbres de calculs ;
- d'autre part les formulations que les élèves peuvent élaborer afin de désigner les nombres dans le cas général. Dans ce cas les élèves présenteront l'énoncé de leur méthode sous forme d'écriture littérale.

Nous allons à présent nous intéresser à la mise en situation proposée par Brousseau.

L'ingénierie envisagée découle de l'analyse effectuée précédemment. Initialement nous allons mettre les élèves en situation d'action, plus précisément en situation de produire des programmes d'actions finalisés. Pour cela nous allons, dans un premier temps, leur proposer le problème pour des nombres entiers donnés.

A la suite d'une phase de recherche, l'enseignant organisera une phase de confrontation au cours de laquelle les élèves expliciteront les résultats obtenus ainsi que la manière dont ces résultats ont été produits.

La situation a-didactique est une situation de preuve, si l'on considère le schéma de la dialectique de la validation, en théorie des situations, il s'appuie nécessairement sur une situation d'action et sur une situation de formulation.

La situation d'action est le jeu du « nombre le plus grand »; il s'agit pour les élèves de trouver le nombre le plus grand que l'on peut obtenir à l'aide d'un *répertoire* formé des quatre opérations élémentaires {+ ;- ; x ; :} appliquées à un ensemble de cinq nombres entiers donnés. La règle précise que l'on ne peut utiliser chacun des nombres qu'une seule fois.

Examinons à présent la situation de formulation.

Les élèves doivent écrire une méthode utilisable quels que soient les cinq nombres entiers proposés et permettant d'obtenir le nombre le plus grand. Les élèves devront passer de l'activité de raisonnement, au sens de la mise en œuvre d'un programme d'actions finalisé à la rédaction d'une « méthode » générale qui permette d'obtenir le nombre le plus grand quelle que soit la suite de 5 nombres proposée.

Nous verrons que les élèves se heurtent à des difficultés. En effet, pour expliciter la méthode nous avons besoin de l'Algèbre, car il est nécessaire d'utiliser des termes pour désigner les nombres qui ne sont pas fixés puisque nous souhaitons obtenir une méthode utilisable pour tous les 5-uplets.

La situation de validation constitue l'élément central de notre étude. L'enseignant fait dévolution aux élèves du jeu des « propositions »- la dénomination correcte adéquate est « conjecture »- dans lequel il y a un concours de propositions entre des équipes, ce qui va donner lieu à la production par les élèves de preuves visant à valider ou à invalider les propositions.

La situation didactique consiste essentiellement à

1. Faire dévolution aux élèves de la situation d'action, c'est-à-dire présenter les règles du jeu du « nombre le plus grand » et amener les élèves à formuler : d'une part le nombre obtenu, d'autre part la justification du programme d'actions finalisé qui lui est associé. Le maître va donner les règles du jeu mais il va, lors des phases de jeu de la première séance, cacher le fait qu'il peut choisir 0 ou 1 dans la suite de nombres ce qui va surprendre les élèves, lors de la rédaction des méthodes, car ils n'avaient pas envisagé cette possibilité.

Le maître, lors du déroulement de la séquence, choisit les nombres qu'il va donner pour mettre en scène les règles convenables, puis ensuite pour éprouver, lorsque cela s'avère nécessaire, la validité des « méthodes » proposées par les élèves lors de la situation de formulation.

2. Faire dévolution de la situation de formulation afin que les élèves s'engagent dans l'écriture d'une méthode assimilable à un programme d'action finalisé détachable des conditions, c'est-à-dire utilisable pour obtenir le nombre le plus grand quelle que soit la suite de 5 nombres proposée.

Compte tenu de la difficulté de la tâche dévolue aux élèves l'enseignant devra leur indiquer très précisément d'une part la finalité c'est-à-dire la production d'une méthode permettant de gagner au jeu du nombre le plus grand quel que soit le 5-uplet donné, d'autre part la forme de l'écrit c'est-à-dire la rédaction d'une méthode sous la forme d'une proposition. Pour que cette dernière soit correctement formulée et consistante, l'enseignant devra vraisemblablement interagir avec l'élève ou les élèves auteurs de la proposition pour les amener à préciser certains termes.

3. Faire dévolution de la situation de validation, c'est-à-dire amener les élèves à prendre position relativement à la validité des méthodes formulées par chacun des groupes. L'enseignant aura à préciser les règles lors de la situation de validation.

4. Intervenir si nécessaire pour maintenir le caractère dédidactifiable de la situation de validation et par conséquent maintenir le processus de validation.

Nous allons à présent expliciter les différentes phases de chacune des séances afin de rendre compte de l'ingénierie dans sa globalité.

2.2.3. Le déroulement de la séquence

La séquence est constituée de 3 séances ; nous allons expliciter, pour chacune d'elles, les différentes phases :

<u>Les différentes phases de la séance 1</u>

Phase 1 : Dévolution du jeu. Suite proposée 3,8,7,5,4.

Phase 2 : Informations complémentaires.

Phase 3 : Recherche individuelle.

Phase 4 : Mise en commun. Etablissement des résultats et désignation des gagnants.

Phase 5 : Comparaison de méthodes.

Phase 6 : Consigne du deuxième jeu 7,3,2,5,8.

Phase 7 : Recherche individuelle.

Phase 8 : Mise en commun. Exposition des résultats et désignation des gagnants.

Phase 9 : Consigne relative au concours de propositions.

Phase 10 : Recherche.

Phase 11 : Regroupement. Formulation des propositions. Débat relatif aux propositions.

Phase 12 : Phase de jeu 2,5,3,2,4.

Phase 13 : Présentation des résultats.

<u>Les différentes phases de la séance 2</u>

Phase 1 : Consigne relative au concours de propositions.

Phase 2 : Recherche en groupe.

Phase 3 : Mise en commun. Explicitation des méthodes.

Phase 4 : Débat relatif aux méthodes.

Phase 5 : Phase de jeu. 5,2,4,0,3.

Phase 6 : Présentation des résultats obtenus à partir des méthodes.

Phase 7 : Proposition de nouvelles méthodes.

Phase 8 : Phase de jeu 8,1,3,0,0.

Phase 9 : Présentation des résultats obtenus à partir des méthodes.

Phase 10 : Proposition d'une nouvelle méthode.

Phase 11 : Recherche d'un contre-exemple à une méthode.

Phase 12 : Propositions de contre-exemples. Débats relatifs à la validité des contre-exemples.

Phase 13 : Proposition de nouvelles méthodes.

Phase 14 : Phase de jeu 7,0,4,3,1.

Phase 15 : Présentation des résultats.

Phase 16 : Recherche de contre-exemples.

Phase 17 : Proposition de contre-exemples.

Les différentes phases de la séance 3

Phase 1 : Mise en commun des résultats suite à la série proposée par Hélène 8,1,1,1,0.

Phase 2 : Débat relatif au statut de la proposition d'Hélène.

Phase 3 : Présentation par la maîtresse d'une série de nombres 1,1,1,1,1.

Phase 4 : Recherche de la méthode correspondante.

Phase 5 : Présentation des méthodes. Explicitation du contre-exemple.

Phase 5 : Phase de jeu. 1,1,1,1,9.

Phase 6 : Présentation des résultats obtenus à partir des méthodes.

Phase 7 : Recherche de contre-exemples.

Phase 8 : Phase de rédaction individuelle d'une méthode.

3. Un outil pour l'analyse des raisonnements des élèves dans la relation didactique : le schéma de structuration du milieu

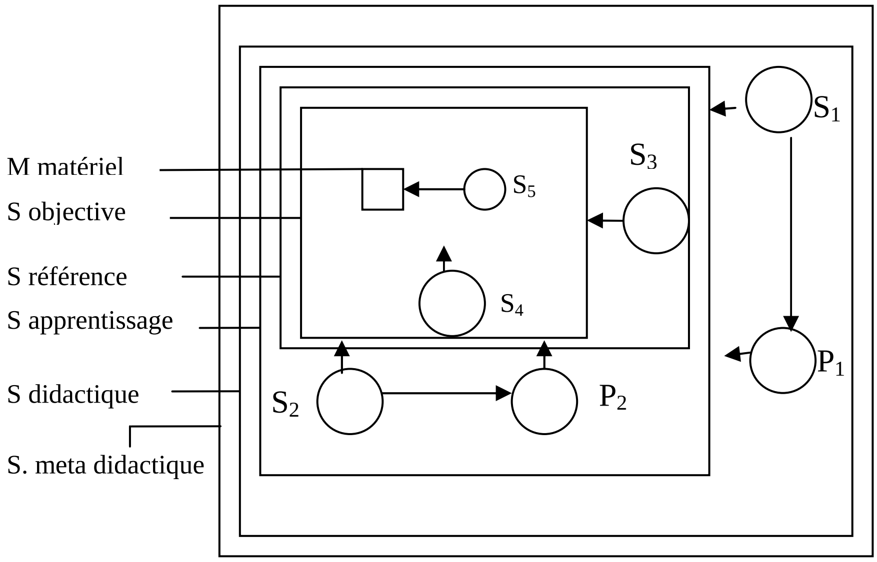
3.1. Présentation du schéma de la structuration du milieu

G. Brousseau a présenté à l'école d'été 1986, cf. Brousseau (1988) le modèle suivant sous le titre « schéma de la structuration du milieu didactique » afin de modéliser la relation didactique et d'en prévoir les différents régimes de fonctionnement.

Ce modèle permet de

– combiner des systèmes interactifs pour faire apparaître deux rôles différenciés, celui de l'élève et celui du professeur, par leurs rapports réciproques et leur rapport au savoir ;

– étudier la compatibilité de leurs caractères respectifs.



S_1 sujet universel S_4 sujet agissant P_2 professeur enseignant agit et observe
S_2 élève générique S_5 sujet objectif
S_3 sujet apprenant P_1 professeur préparant son cours

Schéma de structuration du milieu didactique.

C. Margolinas a transformé ce modèle afin de mettre en valeur le caractère central de la situation didactique et pour analyser symétriquement à celle de l'élève, la situation du professeur.

M+3:M-Construction		P+3:P-Noosphérien	*S+3: Situation noosphérienne*
M+2: M-Projet		P+3:P-Constructeur	*S+2: Situation de construction*
M+1:M-Didactique	E+1:E-Réflexif	P1: P-Projeteur	*S+1: Situation de projet*
M0:M-Apprentissage	**E0: Elève**	**P0: Professeur**	***S0: Situation didactique***
M-1:M-Référence	E-1:E-Apprenant	P-1: P-Observateur	*S-1: Situation d'apprentissage*
M-2: M- Objectif	E-2: E-Agissant		*S-2: Situation de référence*
M-3: M- Matériel	E-3: E-Objectif		*S-3: Situation objective*

Tableau de la structuration du milieu présenté par C. Margolinas (1998).

Ce modèle permet ainsi de

- représenter des déroulements effectifs de leçons ;
- concevoir des situations effectivement réalisables ;
- rendre compte des transformations du savoir observables au cours d'un apprentissage local ou d'une genèse historique;
- étudier les conditions théoriques du fonctionnement d'un savoir.

Il faut remarquer que pour chacune des situations emboîtées (situation objective, situation de référence, situation d'apprentissage, situation didactique, situation de projet, situation de construction), les savoirs et les connaissances de l'enseignant et de l'enseigné sont différents, même lorsqu'il s'agit de la même notion mathématique.

L'ensemble des moyens que le professeur pense pouvoir attendre des élèves, par suite de son enseignement, constitue ce que nous appellerons le *répertoire didactique* de la classe. Par conséquent l'enseignant identifie un *répertoire* qu'il juge légitime d'utiliser dans la relation didactique compte tenu des institutionnalisations antérieures, afin de produire la solution ou la réponse attendue.

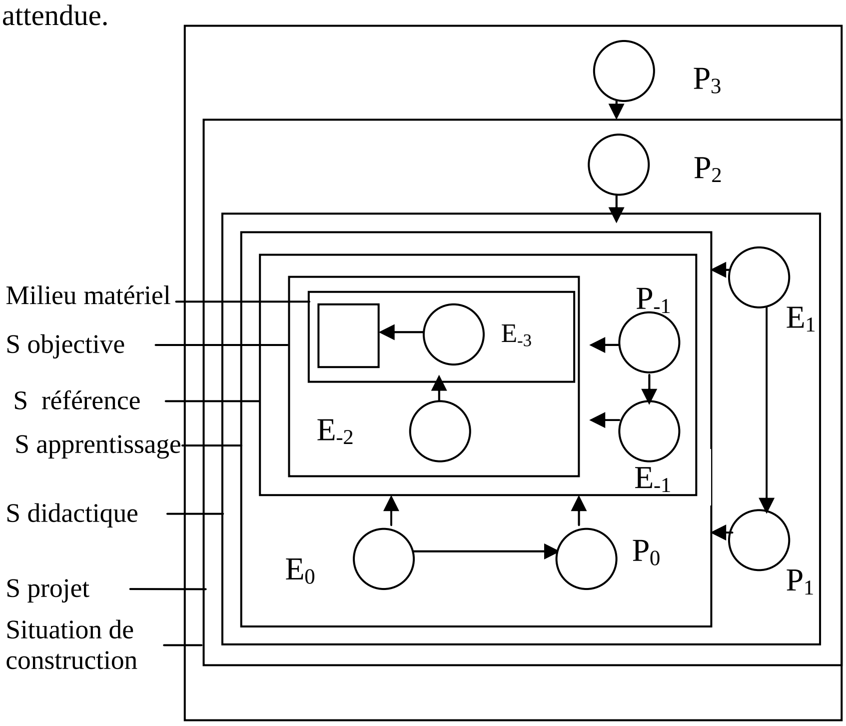


Schéma de la structuration du milieu.

En ce qui concerne l'analyse des fonctions didactiques du raisonnement et de ses éléments, la combinatoire s'articule autour des trois types de situations que sont : l'action, la formulation et la validation.

La modélisation du fonctionnement des connaissances du sujet par l'usage de son répertoire didactique conduit à spécifier les conditions de son utilisation en définissant trois composantes du répertoire didactique : le répertoire d'actions, le répertoire de formulations et le répertoire de validations.

Présentation des principes fondamentaux du schéma :

- l'objet et les moyens d'une activité sont différents ;
- une action porte sur un objet ; elle est déterminée par un *répertoire d'actions* du sujet et par une situation, elle-même étant définie par des conditions et un but à atteindre ;
- une formulation conduit à représenter les objets, les actions et les conditions de la situation d'action dans l'optique où cette dernière sert d'objet à la communication à l'aide d'un *répertoire* dans lequel il y a des objets, des actions, des procédures et des déclarations.

Ce schéma devrait nous permettre de distinguer une action et une modification de cette action dans la mesure où elle peut être justifiée par le sujet, en effet elles vont apparaître sur le schéma à des niveaux différents.

Nous distinguerons la performance de l'élève qu'il s'agisse d'une action, d'un message ou d'un énoncé, du *répertoire didactique* à l'aide duquel elle est produite.

Ce qui était considéré comme un moyen au niveau N est alors considéré comme un objet au niveau N+1 : la structure du schéma transforme en objet ce qui était le moyen au niveau précédent.

3.2. La méthodologie utilisée

Nous souhaitons effectuer une analyse en théorie des situations de la complexité didactique des raisonnements produits ; pour cela nous allons utiliser le schéma de la structuration du milieu didactique, afin d'expliciter d'une part les différentes formes et les différentes fonctions des raisonnements, d'autre part les conditions qui définissent chacune des situations dans laquelle les élèves ont produit les raisonnements.

L'utilisation de ce modèle devrait nous permettre :

1. d'approfondir l'analyse a priori de la séquence, en explicitant, pour chacune des situations emboîtées du schéma, les différentes formes de raisonnements susceptibles d'apparaître dans la relation didactique en

regard des principaux objectifs de l'enseignant et des conditions qui définissent la situation.

2. D'analyser a posteriori dans la séquence «Le nombre le plus grand »

– les raisonnements produits par les élèves en situation d'action ;
– les conditions dans lesquelles ils ont été élaborés ;
– les transformations de ces mêmes raisonnements lorsque les élèves sont conduits à les utiliser en situation de formulation ou de validation.

L'analyse détaillée de cette séquence devrait également nous permettre d'apporter des éléments de réponse à la question, formulée dans l'introduction :

Peut-on, en plaçant les élèves en situation a-didactique, enseigner ce qu'est « faire des mathématiques » au sens de

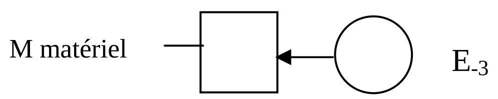
1. Produire des conjectures en écrivant des énoncés, des « méthodes » permettant de gagner au jeu «le nombre le plus grand» proposé par G. Glaeser.
2. Débattre de la validité des méthodes, plus précisément du domaine de validité des méthodes proposées par chacun des groupes.
3. Rechercher un contre-exemple à une méthode.
4. Elaborer et écrire un nouvel énoncé dont le domaine de validité est plus étendu.

4. Analyse des différentes formes et des différentes fonctions des raisonnements associés à chacun des niveaux du schéma

L'objet de notre étude est d'une part de prévoir, pour chacun des niveaux du schéma à quelles conditions les différentes actions des élèves peuvent être assimilées ou non à une forme de raisonnement. et d'autre part de déterminer en effectuant l'analyse a posteriori de la séquence « Le nombre le plus grand » les formes et les fonctions des raisonnements produits par les différents acteurs de la relation didactique.

4.1. L'acteur objectif et le milieu matériel

Niveau (M-3) : l'acteur objectif et le milieu matériel



Quand le professeur prépare son cours, il organise la situation objective à savoir le milieu matériel et l'acteur objectif. L'acteur objectif, E-3, effectue des actions non seulement formulables simplement, mais aussi culturellement repérées, pouvant être répertoriées et qui sont supposées connues puisqu'elles doivent lui être communiquées. Il s'agit donc d'algorithmes et de procédures précédemment institutionnalisés c'est-à-dire appartenant au répertoire didactique de la classe.

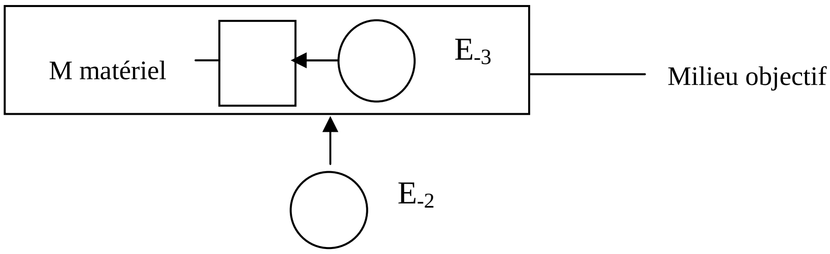
La situation objective, objet de notre étude, est fondée sur le problème de mathématiques proposé par G. Glaeser. C'est donc une situation de jeu pour un 5-uplet donné. Le milieu matériel est constitué par les entiers naturels. Les connaissances du répertoire didactique, que les élèves vont devoir utiliser, relèvent des opérations sur les entiers et de leurs propriétés.

4.2 Le sujet agissant et le milieu objectif

Niveau (M-2) : le sujet agissant et le milieu objectif

E_{-3} élève objectif ; E_{-2} élève agissant ;

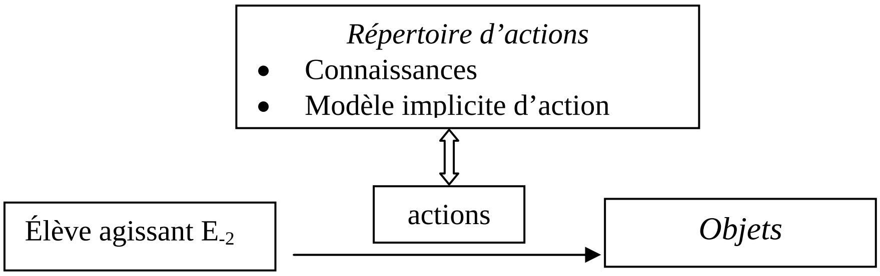
(M_{-3},E_{-3}) définissent le milieu objectif pour E_{-2}



Sujet agissant et milieu objectif.

Dans le cadre des règles, l'élève va, à l'aide de son *répertoire* de connaissances, établir une action, en général une action sur les objets. Ce qui motive l'action sur les objets c'est le *répertoire* didactique dont dispose l'élève.

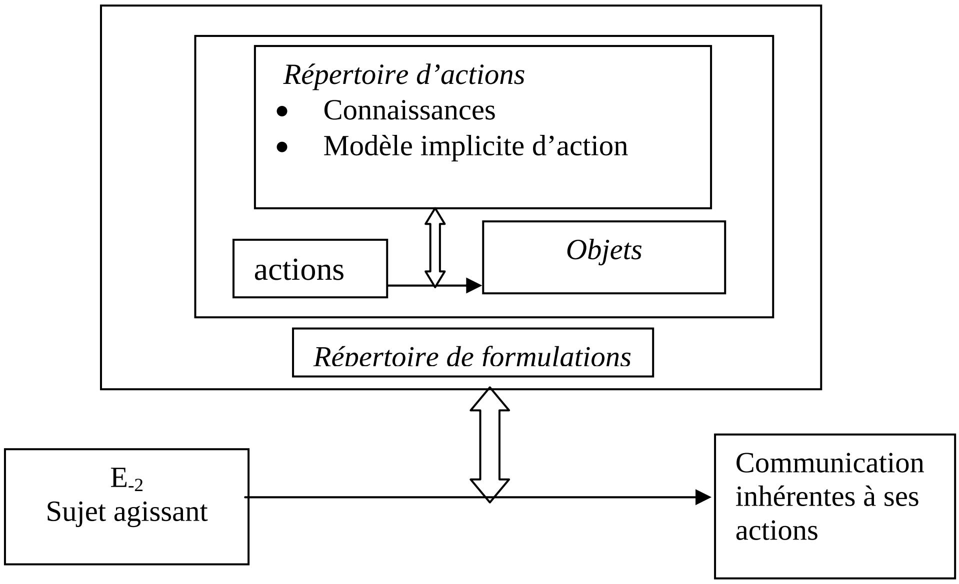
Le schéma suivant modélise l'action du sujet agissant sur le milieu objectif



Modélisation de l'action du sujet sur le milieu objectif.

Certaines actions du sujet sont entièrement déterminées par la situation : l'élève n'a pas réellement de choix à effectuer. Pour que l'élève ait le choix, il faut qu'il y ait plusieurs possibilités effectives, c'est-à-dire il faut pouvoir observer que, dans des conditions similaires, certains élèves font différemment. Il y a choix s'il y a plusieurs possibilités effectives.

On peut envisager à ce niveau (M-2) que le sujet effectue à la demande de l'enseignant une communication inhérente à ses actions c'est-à-dire aux actions sur les objets eux–mêmes.



Modélisation de la communication des actions du sujet agissant.

Une communication inhérente aux actions des élèves vise à amener les élèves à prendre position relativement aux différentes procédures proposées. Cette prise de position nécessite de la part des élèves une capacité à analyser les productions en fonction de différents critères

- la pertinence : ce dont l'élève parle est réalisé dans la situation qui lui a été dévolue ;
- l'adéquation : la procédure mise en œuvre permet d'obtenir la solution ;
- la complexité : le nombre de pas du raisonnement produit ;
- la consistance : ce n'est pas contradictoire avec ce qui a été institutionnalisé précédemment, c'est-à-dire avec le répertoire de connaissances de la classe ;

– la validité : consistance et adéquation. L'élève utilise ses connaissances conformément aux règles d'usage du répertoire didactique pour réaliser l'attendu.

Dans l'analyse de la séquence « Le nombre le plus grand », l'enseignant a pour objectif de faire dévolution aux élèves de la situation d'action, c'est-à-dire présenter les règles du jeu du « nombre le plus grand » et amener les élèves à formuler : le nombre obtenu et la justification du programme d'actions qui lui est associé.

Lors de la phase de mise en commun (phase 4, séance 1) les élèves doivent effectuer une communication inhérente à leur suite d'actions. Les outils d'analyse explicités précédemment nous donnent la possibilité d'analyser la nature des déclarations des élèves : différents éléments nous amènent à considérer qu'il s'agit là de raisonnement :

D'une part les élèves sont confrontés à des choix concernant les nombres et les opérations qu'ils utilisent à chaque étape de leur programme d'actions.

D'autre part chaque étape de la formulation de l'élève est en fait une assertion dont la validité par rapport au calcul, mais également par rapport aux règles du jeu, est débattue par les élèves. Il s'agit d'une dialectique de la validation.

La justification du nombre, donnée par la formulation des étapes du programme d'actions, est assimilable à une preuve : l'élève fait une conjecture (Avec ces cinq nombres, en respectant les règles je peux obtenir..) et pour démontrer la validité de sa conjecture, il va falloir qu'il en apporte la preuve.

Extrait de la phase 4, séance 1, épisode 1, Kévin expose sa réponse à l'issue du premier jeu 3,8,7,5,4

<table>
<tr><td>0.07.20</td><td>M : Top ! Posez crayon ! …Allez Kévin ?</td><td></td></tr>
<tr><td>0.07.28</td><td>Kévin : 4215 !</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>M : Tu as trouvé 4215 ?</td><td>La maîtresse écrit 4215 au tableau</td></tr>
<tr><td></td><td>E : Moi j'aurais pu trouver ce nombre</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>M : Attention, tu viens nous expliquer comment tu as fait</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>M : Non tu restes là, tu me dis comment tu as fait.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Kévin : 8 fois 7, 56</td><td rowspan="5">La maîtresse écrit
$\underbrace{(8x7)}_{56} + \underbrace{(3x5)}_{15} + 4$
56 + 15 + 4</td></tr>
<tr><td></td><td>M : Pardon ?</td></tr>
<tr><td></td><td>Kevin : 8 fois 7</td></tr>
<tr><td></td><td>M : Oui, tu as trouvé que ça faisait ?</td></tr>
<tr><td></td><td>Kevin : 56</td></tr>
</table>

	Kevin : 3 fois 5, 15	
	M : Tu as fait 3 fois 5, 15. Après tu as fait ? Chut !	
	Kevin : J'ai additionné les résultats 56 plus 15 plus 4	
	M : Alors 56 et 15, 66….71	
	M : Et tu trouves 4215 ?	
	Kévin : Non après, j'ai fait 75 fois 56	
	E : Mais tu as utilisé deux fois les mêmes nombres.	La maîtresse interrompt l'écriture du programme d'actions.
	M : Tu as déjà… Chut, on dit rien, annulé ! Tu n'as pas respecté la règle ça ne vaut rien.	

Kevin annonce son résultat (4215), l'enseignante lui demande alors de justifier la manière d'établir son résultat. La validité de son programme d'actions va être examinée par les différents acteurs du point de vue de la règle du jeu «le nombre le plus grand» et du point de vue de la validité des calculs effectués.

Un élève indique à Kevin qu'il a utilisé deux fois les mêmes nombres (8 et 7) ; par conséquent Kevin n'a pas respecté les règles du jeu, la maîtresse annule sa réponse. La maîtresse invalide la proposition de Kevin.

Phase 4, séance 1 épisode 2, Myriam expose sa réponse pour le premier jeu 3,8,7,5,4

	M : (en désignant Myriam) : A toi.	
	Myriam : Moi j'ai trouvé 3360 !	
	E : Moi, aussi !	
	E : Non pas moi, j'ai trouvé plus grand.	
0.09.00	M : 3360, tu expliques. Attention, je t'écoute.	La maîtresse écrit au tableau 3360.
	Myriam : 8 fois 7 , 56	La maîtresse écrit le programme de calculs (8x7) x (5x4) x 3 56 X 20 1120 X 3 3360
	M : Alors, tu as fait 8 fois 7, oui.	
	Myriam : Après j'ai fait 5 fois 4 , ça fait 20	
	M : Hum ! *(ton approbateur)*	
0.09.20	Myriam : Après j'ai additionné 56 et …	
0.09.22	E : Additionné ?	
	Myriam : Non multiplié ; 56 fois 20	
0.09.27	M : C'est-à-dire tu as multiplié ces deux là !	
	Myriam : 56 fois 20, 1120 et après j'ai fait fois 3 et j'ai trouvé 3360.	
0.09.40	M : Et après tu as fait fois 3 pour trouver 3360.	

L'intervention d'un élève (0.09.22 E : Additionné ?) a pour objet de remettre en question la formulation de Myriam concernant le choix de l'opération qui lie les nombres (56 et 20). Dans sa formulation Myriam indique qu'elle additionne ces deux nombres alors qu'elle a choisi (en témoigne le résultat de son calcul) de les multiplier entre eux. L'intervention de son camarade lui permet de prendre conscience de son erreur de formulation et de modifier son discours en conséquence. Elle parvient ainsi à produire, par la formulation de son programme d'actions, le résultat annoncé initialement 3360.

La maîtresse valide le résultat proposé par Myriam du point de vue de sa conformité aux règles du jeu et aux règles de calculs. Le nombre 3360 a été obtenu conformément aux règles du jeu et les calculs sont justes.

4.3 Le sujet apprenant et le milieu de référence

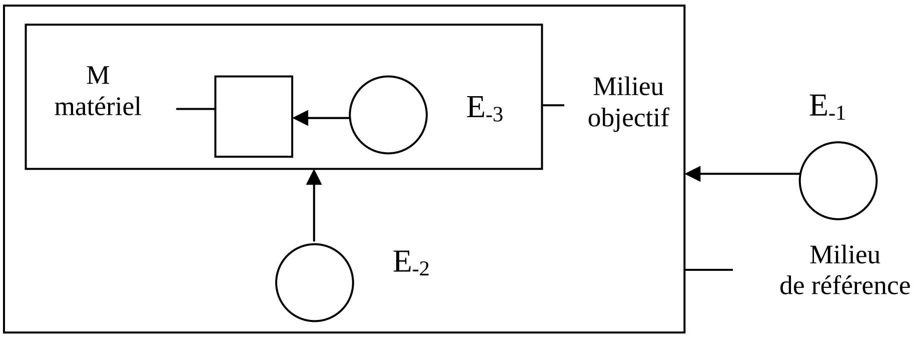
Niveau (M-1) : Le sujet apprenant et le milieu de référence

E_{-3} élève objectif ;

E_{-2} élève agissant ;

(M_{-3}, $E_{\_3}$) définissent le milieu objectif ;

(M_{-2}, E_{-2}) constitue le milieu de référence pour le sujet apprenant E_{-1}.



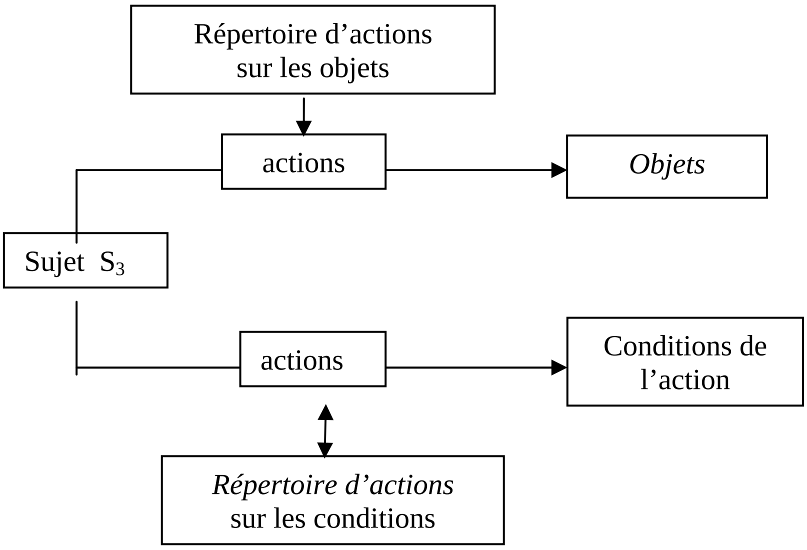
Le sujet apprenant et le milieu de référence.

La situation vise à permettre au sujet apprenant, E_{-1}, d'analyser sa suite de décisions. Pour lui, les conditions font partie de son objet d'étude. Il a un *répertoire* de règles d'apprentissage, de connaissances, de savoirs.

Il va prendre en compte les objets, les règles mais également les conditions de son travail. Cette prise en considération par le sujet apprenant, de ses actions sur les objets en regard des conditions se situe à un deuxième niveau par rapport à l'analyse de ses actions sur les objets.

Elle est déterminante en ce qui concerne le rapport du sujet à la situation.

Nous allons essayer de modéliser les différentes formes d'actions du sujet apprenant, en proposant le schéma suivant :



Modélisation des différentes formes d'actions du sujet apprenant.

Le sujet apprenant est amené à produire deux types d'actions qu'il convient de distinguer d'une part une action sur les objets, d'autre part une action sur les conditions de l'action, c'est-à-dire que l'élève est amené à envisager une modification des conditions dans lesquelles il va utiliser les objets.

Ce qui fait fonctionner cet outil d'analyse, c'est le fait que l'on traduise les situations en termes de conditions. Le sujet apprenant peut, dans certaines conditions, être amené à produire un programme d'actions finalisé détachable des conditions défini ainsi :

Le programme d'actions finalisé, établi par un élève, est détachable des conditions (non pertinentes) lorsque l'élève est capable de le simuler i.e. de simuler son fonctionnement dans une situation où justement il n'y a pas de feed-back.

Par exemple la formulation, dans le cas général et non plus dans un cas particulier, d'un programme d'actions finalisé exige, dans une certaine mesure, une transformation des programmes d'actions établis dans des cas particuliers en programme détachable des conditions.

Dans ce cas le sujet a produit un raisonnement; de plus il a pris conscience des conditions de fonctionnement des connaissances sur lesquelles s'appuie son raisonnement

Analyse de la situation de formulation lors de la séquence « le nombre le plus grand » :L'enseignant souhaite faire dévolution de la situation de formulation afin que les élèves s'engagent dans l'écriture d'une méthode assimilable à un programme d'action finalisé détachable des conditions c'est-à-dire utilisable pour obtenir le nombre le plus grand quelle que soit la suite de 5 nombres proposée.

Le sujet apprenant va devoir prendre en compte les objets, les règles mais également les conditions dans lesquelles les élèves ont produit chacun des programmes d'actions. Pour produire, à l'aide de ses connaissances, un moyen de comprendre, l'élève apprenant fait une action sur les connaissances mais aussi une action sur lui-même.

Cette prise en considération par le sujet apprenant, de ses actions sur les objets en regard des conditions se situe à un deuxième niveau par rapport à l'analyse de ses actions sur les objets nécessaire à la communication de son programme d'actions (phases 4 et 8 de la séance 1).

L'objectif est de faire produire aux élèves un programme d'actions détachable des conditions dont le domaine de validité soit le plus étendu possible.

Le répertoire d'objets d'un sujet est constitué de noms d'objets, dans le cas de l'écriture de la « méthode » l'une des difficultés c'est précisément la désignation des nombres dans le cas général.

Les élèves peuvent faire référence soit à l'ordre dans lequel les nombres ont été donnés soit à leur rang (le plus grand, le plus petit) en référence à la bande numérique (suite ordonnée des entiers naturels).

La phase de formulation des méthodes vise effectivement à permettre aux élèves une prise de position sur l'action et donc une prise de conscience des décisions sur lesquelles reposent leurs actions. Ceci afin que les élèves puissent produire des procédures dont la validité pourra être mise en débat.

Episode 1 relatif à la phase 11 de la séance 2 (formulation des méthodes) méthode d'Hélène

0.41	M : Qui propose sa méthode ? Vous allez nous lire ce que vous avez écrit.	
	M : On va arranger, je vais les écrire bien… les phrases, on va demander à Hélène. Allez vas-y Hélène.	

	Hélène : Je prends deux plus grands chiffres et je les multiplie. Après je refais pareil. Le dernier nombre qui me reste, je le multiplie.	Hélène formule sa méthode
	E : Eh, comme moi !	
	M : Alors j'écris, vous vérifiez pour voir si c'est bien ça. Alors on prend les deux plus grands	
	Hélène : Deux plus grands chiffres comme ceux que tu nous as donnés	
	M : Les deux plus grands ?	
	Hélène : Deux plus grands.	
	M : Tu prends les deux plus grands ou deux grands au hasard, qu'est-ce que tu veux dire ?	
	Un élève : Mais ça ne veut pas dire forcément les deux plus grands	La maîtresse écrit au tableau : *On prend les deux plus grands nombres et je les multiplie. Après je fais pareil. Le dernier nombre qui me reste je le multiplie.*
	Myriam : Ben oui, elle dit « je prends deux plus grands chiffres »	
	M : Myriam, merci ! Je prends les deux plus grands nombres et je les multiplie (et écrit cette même phrase au tableau en même temps).	
	Hélène : Après je refais pareil.	
	Un élève : Comment ça, elle reprend…	
	Hélène : Après le dernier nombre qui me reste je le multiplie et….	
	M : Et je trouve, je me doute que tu trouves…	
	M : Le résultat, je suppose ?	
	M : Et tu trouves ce que tu veux trouver.	
	M : Tu as vérifié ?	
	Hélène : C'est ce qui m'a permis de trouver le maximum pendant les deux parties.	

Lorsque l'enseignante interroge Hélène à propos de la validité de sa méthode, plus précisément sur le fait qu'elle ait effectué une « vérification », elle a recours à une preuve pragmatique en indiquant « C'est ce qui m'a permis de trouver le maximum pendant les deux parties ».

Episode 2 relatif à la phase 11 de la séance 2, formulation des méthodes, méthode de David et Marc

	M : David…c'est David tout seul ?	La maîtresse interroge un autre élève : David.
	Un élève : Non avec Marc.	

	David et Marc : On multiplie les deux plus grands nombres	
	M : Est-ce que tu peux le dire d'abord on verra si c'est vrai.	
	M : Oui vas-y !	
	David et Marc : On multiplie les deux plus grands nombres, on multiplie les deux plus petits ensemble, on multiplie les autres et on trouve…	
	M : Tu peux me relire car je n'ai pas entendu la fin ?	
	David : On multiplie les deux plus grands, on multiplie les deux plus petits, tu multiplies entre eux les résultats et tu multiplies par celui qui reste, c'est ça.	
	M : Ensemble ?	
	David : Oui, on multiplie les autres et on multiplie les résultats.	
	Un élève : C'est quoi les autres ?	
	David : C'est ceux qui restent !	
	M : Ecoute, je n'ai pas très bien compris ce que cela signifiait	
	Un élève : Eh bien, on multiplie ceux qui restent, les nombres qui restent.	
	M : Je ne comprends pas très bien ce que tu veux dire…ce qui reste, quoi ? Le nombre qui reste.	La maîtresse écrit : *David et Marc : On multiplie les deux plus grands, on multiplie les deux plus petits, on multiplie les résultats entre eux puis on multiplie par celui qui reste.*
	David : Les nombres qui restent	
	M : Et il en reste combien ?	
	David : Un	
	M : Alors tu multiplies.	
	M : Bon, on joue avec cinq nombres !	
	M: Tu prends les deux plus grands, les deux plus petits. Tu prends les deux plus petits, tu les multiplie, tu multiplies entre eux les résultats et tu multiplies par celui qui reste, c'est ça ?	
	David : Oui	
	M : On multiplie les deux plus grands, on multiplie les deux plus petits, on multiplie les deux résultats entre eux. C'est ça que tu n'as pas su dire. Tu comprends, vous comprenez ce que ça veut dire « on multiplie les résultats entre eux »?	

Les deux groupes précédents témoignent de la difficulté des élèves à désigner les nombres dans la formulation de la méthode (dans le cas général). Les élèves de ces groupes ont choisi de se référer à la suite des nombres (droite numérique).

Episode 3 relatif à la phase 11 de la séance 2 (formulation des méthodes) méthode d'Elsa et comparaison des méthodes

	M : Toi, Elsa tu dis que c'est la même méthode	
	Elsa : Pas tout à fait. Eux, ils multiplient les deux plus petits, moi, les deux qui restent	
	M : Tu penses que ça a de l'importance ?	
	Elsa : Non.	
	M : Ca n'a pas du tout d'importance, tu penses que ta méthode est la même que celle de David et Marc.	
	Elsa : Non, moi je n'ai pas tout à fait de méthode. Moi c'est comme à la méthode d'Hélène, de David et de Marc. On trouve le même résultat que ça soit dans n'importe quel sens, on trouvera toujours le même résultat.	
0.48	M: Ah ! Dis-le ! Comment tu peux le dire ? Toi tu penses que ce n'est pas la peine de dire le plus grand ou le plus petit. Dis-nous ce que tu as écrit.	
	Aline: Il faut multiplier tous les nombres entre eux.	Formulation par un élève, Aline, d'une méthode équivalente aux précédentes et dont la formulation est plus simple
	M : Il faut que tu multiplies tous les nombres entre eux, c'est ça ?	
	Aline: Oui, qu'on multiplie les deux plus grands ou les deux plus petits ensemble on trouvera toujours le même nombre.	
	M : Est-ce que vous êtes d'accord avec ce qu'elle dit ?	
	M : C'est pareil mais c'est la manière la plus simple de l'écrire.	
	M : A part qu'il y a une idée en plus : ce n'est pas la peine de chercher les plus grands et les plus petits : Est-ce que vous êtes d'accord que	

	pour le résultat des calculs c'est la même méthode ? Qui a trouvé une autre méthode ? Tout le monde utilise la multiplication ?	
	E : Eh oui, car quand on fait moins, le nombre baisse ; quand on fait divisé, le nombre baisse et quand on fait plus, il augmente qu'un petit peu.	
	M : « Quand on fait plus il augmente un petit peu, et quand on fait fois, il augmente beaucoup », vous êtes d'accord ?	
	M : Vous pensez que c'est une bonne méthode et que ? ça va marcher tout le temps ? Que je peux vous donner n'importe quelle série de cinq nombres, c'est bon ? Vous voulez acheter cette méthode ?	La maîtresse écrit la proposition : *Il faut multiplier tous les nombres entre eux dans n'importe quel ordre.*

Les trois méthodes notées au tableau par la maîtresse, à l'issue de la séance 1, sont :

<u>Méthode 1(Hélène)</u> : *Je prends les deux plus grands nombres et je les multiplie. Après je refais pareil avec les deux plus petits. Le dernier nombre, qui me reste, je le multiplie.*

<u>Méthode 2(David et Marc)</u> : *On multiplie les deux plus grands nombres, on multiplie les deux plus petits ensemble. On multiplie les résultats entre eux et on multiplie avec celui qui reste.*

<u>Méthode 3 (Anne)</u> : *On multiplie tous les nombres entre eux.*
(Qu'on multiplie les plus grands ou les plus petits on trouvera toujours le même nombre.)
Il convient à présent de revenir sur les conditions dans lesquelles ces formulations ont été élaborées

Les méthodes ont été produites par les élèves et elles résultent d'un travail de formulation fondé sur l'écriture de méthode.

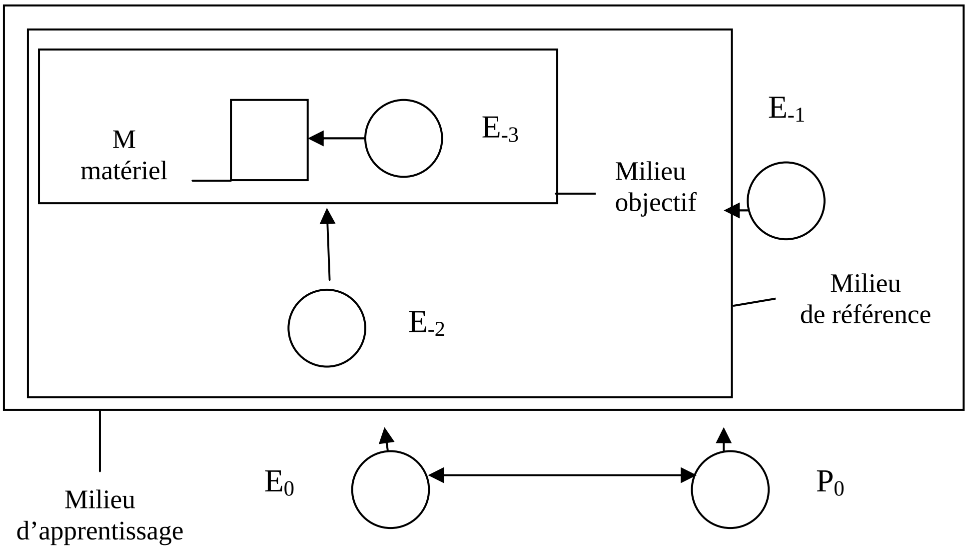
1. Elles ont fait l'objet d'une reconnaissance formelle par l'enseignant et par conséquent elles appartiennent au *répertoire didactique* de la classe de sorte qu'elles sont utilisables par l'ensemble des élèves.

2. Elles sont assimilables à des assertions dans le sens où elles sont correctement formées et consistantes.

Lors des phases suivantes tous les élèves vont devoir s'approprier ces méthodes c'est-à-dire à faire le lien entre leur(s) formulation(s) et leur(s) usage(s) et ainsi percevoir que ces formulations sont équivalentes.

4.4 L'élève et la situation d'apprentissage

Niveau (M0) L'élève et la situation d'apprentissage



Le niveau (M0) est celui des assertions. Au niveau précédent, (M-1), nous étions au niveau des relations mathématiques, la vérité était évidente, la relation était vraie ou fausse mais il n'y avait pas de jugement. Or dans la situation étudiée l'autre arrive avec une culture, avec des exigences qui ne sont pas celles de la situation. Par conséquent à ce niveau, l'action est remplacée par des déclarations sur des variables, il s'agit de déclarations sur les rapports aux connaissances.

L'élève est susceptible de produire une procédure au sens suivant :

C'est un programme d'actions finalisé détachable des conditions tel que le sujet peut le relier à son champ de pertinence et d'adéquation. Le champ de pertinence et d'adéquation du programme sont les connaissances des conditions dans lesquelles son usage s'avère pertinent et adéquat. La prise de conscience par le sujet du domaine de validité du raisonnement produit, permet d'envisager l'usage de ce dernier dans des situations de preuve.

A quelles conditions les raisonnements produits par les élèves en situation d'actions ou de formulation peuvent-ils être utilisés par les élèves dans des situations de preuve ?

Le fait de formuler ces raisonnements est une condition nécessaire mais ce n'est pas une condition suffisante. Brousseau (1997) montre que la formulation ne renforce pas la connaissance et la conviction des élèves.

Présentation d'un élément d'analyse de la situation de validation de la séquence « Le nombre le plus grand » :
Méthodes proposées et écrites au tableau à l'issue de la phase 3 de la séance 2

Méthode 2 (Jérémy, Aline, Mélanie, Sylvain) : On multiplie tous les nombres entre eux dans n'importe quel ordre sauf avec le 0 et le 1 on fait plus.

Méthode 3 (groupe d'Anne) : On multiplie tous les nombres entre eux sauf quand il y a un ou plusieurs 1, on l'additionne ou on les additionne avec le nombre le plus grand et on multiplie tout après.

Méthode 1 (proposée à la séance 1-« Aline et les douze ») : *On multiplie tous les nombres entre eux.*

La méthode 1 a été produite à l'issue de la séance 1 ; l'enseignante conserve son écriture au tableau. A l'issue de la phase de présentation des méthodes (séance 2 phase 4) l'enseignante propose une phase de jeu : phase 5 : Phase de jeu. 5,2,4,0,3.

L'enseignante met les élèves en situation de jeu de manière à ce qu'ils éprouvent les différentes méthodes et qu'ils débattent de la validité des méthodes 1, 2 et 3. La suite de nombres qu'elle leur propose contient un « 0 ».

Phase 6 : Présentation des résultats obtenus à partir des méthodes

0.21.06	M : Allez stop ! Qui a utilisé la méthode d'Aline et les douze ? Combien trouves-tu ?	Suite à la phase de jeu avec la suite **5,2,0,4,3**
	Un élève : 120	
	Des élèves : Non 0.	
	M : Explique-lui !	
	Un autre élève : Non 0 car 5 fois 2 ,fois3, fois 4, fois 0 égal 0.	
	Un autre élève : Non ! Alexandra, tu as fais 5 fois 2 fois 4 fois 3 et après fois 0. Si tu multiplies 5 fois 2 fois 4 fois 3 fois 0, tu trouveras 0.	
0.22.03	M : Est-ce que c'est vrai ? Qu'est-ce qu'elle dit la méthode d'Aline ?	
	Un élève : Qu'il faut multiplier tous les nombres entre eux.	
	M : Tous les nombres. Il ne faut pas laisser le 0 de côté car la méthode d'Aline dit qu'il faut multiplier tous les nombres entre eux. Est-ce que ceux qui ont appliqué la méthode d'Aline vous avez trouvé quelque chose d'intéressant ?	
	Des élèves : 127, 117, 120 (les propositions fusent)	

0.22.36	M : La méthode d'Aline, au début on croyait que c'était bien tout le temps. Vous savez comment ça s'appelle quelque chose…c'était bien pour faire quoi ?	
	Un élève : Trouver le plus grand nombre.	
	Un élève : Pas avec 1 et 0.	
0.22.58	M : Une méthode qui marche pour Aline…il aurait fallu dire : pour trouver le plus grand nombre, il faut multiplier …ça s'appelle un théorème. Or on vient de trouver un exemple qui dit que le théorème d'Aline ça ne va pas : c'est un contre-exemple. Est-ce que vous comprenez ce que ça veut dire ? C'est un exemple qui dit « ça démolit ça ! ».	
0.23.26	Un élève : Cette méthode est bonne pour trouver le plus petit nombre.	
	M : Ah ça, ça démolit le théorème d'Aline. Est-ce que…est-ce que vous avez essayé un autre théorème ? Est-ce que ceci fonctionne avec ce théorème ?	La maîtresse désigne la méthode 2 (Jérémy, Aline, Mélanie, Sylvain) écrite au tableau.
	Un élève : Oui.	
	M : Pour trouver le nombre le plus grand on multiplie les nombres entre eux sauf avec le 0 et le 1 qu'on ajoute.	Elle lit à haute voix la méthode 2.
0.23.52	Anne : Moi je rajoute aussi de mettre 0 ; Mais je ne trouvais pas ça bien utile mais je rajoute aussi « quand il y a 0 on additionne ».	
	M : Ah, tu veux modifier pourquoi ?	
0.24.02	Anne : Parce que moi je n'y avais pas pensé, je me suis dit « on ne va pas mettre un 0 » mais si on fait fois 0 quand même ça fait 0 toujours !	
	Emericq : Mais ça ne change rien parce que si on additionne, ça change rien	
0.24.21	M : Oui, mais tu te souviens que dans le jeu, on doit utiliser tous les nombres. Il fait en faire quelque chose. Puisque vous avez vu un petit peu ce qu'il faut faire, maintenant est-ce que vous êtes capable d'écrire ce qu'il faut faire ? Allez-y !	

Les objectifs de cette phase de jeu (phase 5) sont :

1. Permettre aux élèves de se familiariser avec les méthodes proposées plus précisément faire le lien entre la formulation d'une méthode et son usage (identifier, au travers du programme d'actions mis en œuvre, la « méthode » correspondante sous réserve qu'elle ait été institutionnalisée précédemment).
2. Faire prendre conscience aux élèves, par l'expérimentation sur une suite donnée, de la non-validité de certaines méthodes (elles ne permettent pas de produire le nombre le plus grand).
3. Introduire une nouvelle notion en mathématique : le contre-exemple ; en établissant que pour la suite donnée (5,2,4,0,3) » la méthode d'Aline et les douze ne permet pas d'obtenir le nombre les plus grand (présentée comme un « exemple » qui « démolit le théorème d'Aline et les douze »).
4. Faire prendre conscience à certains élèves du fait que leur méthode ne prend pas en compte les suites de nombres qui contiennent un 0. Et par conséquent qu'il est nécessaire de réfléchir à l'élaboration et à l'écriture d'une nouvelle méthode (qui permette de traiter les cas où la suite comporte un ou plusieurs 0).

A l'issue de cette phase le groupe d'Anne communique une nouvelle méthode

Phase 7 : Proposition d'une nouvelle méthode (par le groupe d'Anne M'3)
M'3(groupe d'Anne) *: On multiplie tous les nombres sauf quand il y a un ou plusieurs 1 ou un ou plusieurs 0 on les additionne.*

Phase 8, épisode 1

0.29.11	Un élève du groupe : Parce que là on dit pour 1 avec 1 si ça marche pas….et tout.	
	M : Tout à fait si tu trouves que c'est bon tu le gardes.	
	Un élève du groupe : Bon moi je le garde.	
	M : Si on trouve que c'est bon on le garde.	
	Anne : Eh ! Denise, moi je trouve que la méthode d'Aline, elle est un petit peu incomplète.	
	M : On l'a jetée, on a dit c'est pas bon.	
	Anne : Non mais la deuxième.	

0.29.30	M : Qu'est-ce qu'elle a d'incomplet à ton avis ?	
	Anne : Eh ! Denise parce que si on multiplie tous les nombres entre eux et qu'après on additionne le 1 ça fait un nombre plus petit que si d'abord …	
0.29.42	M : On refait un jeu !	
	Un élève : C'est ce que j'ai fait Denise on trouve un nombre plus petit.	
0.29.50	M : Chut ! Chut, chut… on écoute ce que dit Elsa. S'il vous plait deux minutes et après on joue.	
0.30.00	Elsa : Si on additionne le 1 à la fin il y est qu'une fois. Si par exemple on l'additionne au plus grand et qu'on le multiplie il y est plusieurs fois, il est répété.	
	Un élève : Mais non.	
	Anne : Mais si ! Eh ! C'est ce que je dis.	
	Elsa : 8 plus 1 ça fait 9, mais si je fais après 9 fois 5, le 1 il y est plusieurs fois ; il y est 5 fois dedans, que si je l'additionne à la fin, il y est qu'une fois.	
0.30.28	Anne : Eh c'est ce que j'ai dit ! Même qu'elle a trouvé 481 et moi j'ai trouvé 540.	
	Un élève : Moi j'étais certain qu'on le multipliait	
	M : D'accord on joue et on va mettre 1 dedans.	

Dans le débat relatif aux méthodes, phase 7, épisode 1 (ci-dessus) une élève, Elsa, établit la preuve que dans le cas où la suite des nombres comporte un 1, la méthode du groupe d'Anne (On multiplie tous les nombres sauf quand il y a un ou plusieurs 1 ou un ou plusieurs 0 on les additionne) permet d'obtenir un résultat plus grand que celle proposée par Jérémy, Aline, Mélanie et Sylvain (On multiplie tous les nombres entre eux dans n'importe quel ordre sauf avec le 0 et le 1 on fait plus).

Sa preuve fait référence aux sens des opérations. Cependant elle ne parvient pas à convaincre certains de ses camarades. Elle ne recourt pas à l'illustration de la preuve par l'expérimentation c'est-à-dire par un exemple sur une suite de nombres qui permettrait à l'ensemble des élèves de comparer les résultats obtenus par chacune des méthodes et ainsi de percevoir la validité de sa déclaration.

Conclusion

L'étude des situations, et plus précisément des conditions qui définissent chacune d'elles, nous a permis d'analyser les différentes actions et les différentes formulations des élèves et de définir, à quelles conditions certaines d'entre elles sont assimilables à des raisonnements. Le schéma de la structuration du milieu est l'outil approprié, non seulement pour d'étudier les conditions théoriques du fonctionnement des raisonnements pour chacune des situation emboitées, mais encore pour analyser a postériori, les actions et les interactions des élèves, en situation d'action, de formulation et de validation.

L'analyse détaillée de la séquence a mis en évidence la possibilité pour les élèves de pratiquer le raisonnement c'est-à-dire de produire des raisonnements, dans des conditions qui le justifient véritablement et non artificiellement. De plus les situations, dévolues aux élèves, leur ont permis de se rendre compte, par eux-mêmes, suite aux rétroactions du milieu ou aux interactions avec leurs pairs, de la validité ou de la non validité des raisonnements qu'ils ont produits. Ainsi les élèves ont pu progresser dans la pratique du raisonnement.

Cette analyse, en théorie des situations didactiques, a montré que les élèves ont produit de nombreux raisonnements dans des fonctions très diverses telles que :

– prendre des décisions afin de produire une réponse et justifier la validité de celle-ci ;

– élaborer et écrire une méthode « générale » lors de la situation de formulation individuelle « le concours de propositions » ;

– argumenter et débattre de la validité et de la pertinence des méthodes de manière à formuler une méthode qui soit la plus complète possible c'est-à-dire qui intègre les cas particuliers.

Cette étude tend à montrer la possibilité pour les élèves de percevoir d'une part le rôle central du raisonnement dans l'activité mathématique, d'autre part ce qu'est « faire des mathématiques » au sens de conjecturer. Il reste cependant de multiples questions à étudier notamment celles concernant la possibilité pour l'élève de réutiliser, dans une situation de preuve, des raisonnements élaborés en situation de formulation.

Bibliographie

BROUSSEAU G. (1988), La relation didactique: le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, **9.3**, 309–336.

BROUSSEAU G. (1997), Théorie des situations didactiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. & CENTENO J. (1991), Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, **11.2**, 167–210.

BROUSSEAU G. & GIBEL P. (2002), *Influence des conditions didactiques sur l'apparition, l'usage et l'apprentissage des raisonnements en classe*, Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, ARDM et IREM Paris 7.

BROUSSEAU G. & GIBEL P. (2005), Didactical Handling of Students, Reasoning Processes in Problem Solving Situations, **59.1**, Educational Studies in Mathematics, KLUWER, 13–58.

DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine; Registres sémiotiques et pensée humaine*, Peter Lang, Berne.

DUVAL R. (1991), Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics*, **22**.

DURAND-GUERRIER V. (1996), *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*, Thèse de doctorat soutenue à l'Université Claude Bernard, Lyon I.

GIBEL P. (2004), *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnements dans la relation didactique en classe de mathématiques à l'école primaire*, Thèse de Doctorat, soutenue à l'Université de Bordeaux 2.

GLAESER G. (1999), *Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.

MARGOLINAS C. (1989), *Le point de vue de la validation: essai d'analyse et de synthèse en didactique des mathématiques*, Thèse soutenue à l'Université Joseph Fourier, Grenoble.

MARGOLINAS C. (1993), *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, Edition La Pensée Sauvage, Grenoble.

MARGOLINAS C. (1998), Étude de situations didactiques "ordinaires" à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur, *Actes de la 8eme Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques.*

OLERON P. (1977), *Le raisonnement*, Presses Universitaires de France, 1977.

PATRICK GIBEL
LACES, équipe DAESL, Université Bordeaux 2
patrick.gibel@aquitaine.iufm.fr