

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES

Revue internationale de didactique des mathématiques

Rédacteurs en chef : ALAIN KUZNIAK & FRANÇOIS PLUVINAGE

IREM de Strasbourg
Université Louis Pasteur

Volume 13

2008

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
ISSN 0987 - 7576

Rédacteurs en chef

ALAIN KUZNIAK
Département de mathématiques
IUFM d'Orléans-Tours
72 rue du Fg de Bourgogne
45000 Orléans
alain.kuzniak@orleans-tours.iufm.fr

FRANÇOIS PLUVINAGE
IREM de Strasbourg
7 Rue René Descartes
67084 Strasbourg
pluvin@math.u-strasbg.fr

Comité de rédaction

ALAIN BRONNER – Montpellier
VIVIANE DURAND-GUERRIER – Lyon
RAYMOND DUVAL – Lille
ATHANASIOS GAGATSIS – Chypre
FERNANDO HITT – Canada
CATHERINE HOUEMENT – Rouen

MICHALIS KOURKOULOS – Crète
GUY NOËL – Mons
LUIS RADFORD - Canada
JEAN-CLAUDE RÉGNIER - Lyon
CARL WINSLOW – Danemark
MONCEF ZAKI – Maroc

Responsable de publication

PHILIPPE NUSS - Directeur de l'IREM de Strasbourg

Mise en page

ALEXANDRA CARMINATI – IREM de Strasbourg

Éditeur

IREM de Strasbourg
Université Louis Pasteur
7, rue René Descartes
F - 67084 Strasbourg CEDEX
Tel. (33) 03 90 24 01 30

Fax (33) 03 90 24 01 65
Bibliothèque : (33) 03 90 24 01 61
<http://irem.u-strasbg.fr>
irem@math.u-strasbg.fr

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES
VOLUME 13 – 2008

SOMMAIRE

ÉDITORIAL	3
Patrick GIBEL (France) <i>Analyse en théorie des situations d'une séquence destinée à développer les pratiques du raisonnement en classe de mathématiques à l'école primaire</i>	5
François PLUVINAGE, Mirela Rigo LEMINI (France, Mexique) <i>Mais non, Marina !</i>	41
Laurent VIVIER (France) <i>De la synthèse sur les nombres à la doxa ensembliste</i>	63
Georges TOUMA (Canada) <i>Activité cognitive d'interprétation</i>	93
Rosa Elvira PÁEZ MURILLO, Felipe ALFARO AGUILAR, Carlos Alberto TORRES MARTÍNEZ (Mexique) <i>Estudiando funciones en contexto a través de simulaciones con estudiantes de ingeniería</i>	113
<i>Présentation analytique en français</i>	114
George KOSPENTARIS, Panayiotis SPYROU (Grèce) <i>Assessing the development of geometrical thinking from the visual towards the analytic-descriptive level</i>	133
INSTRUCTIONS POUR LES AUTEURS	159

ÉDITORIAL

Fidèle à sa vocation initiale, notre revue souhaite contribuer de manière modeste mais significative à l'avancement des recherches en didactique des mathématiques. La rédaction des Annales encourage et publie des articles qui proposent des réponses à des problèmes d'enseignement ou soumettent des questions en phase avec les préoccupations des professeurs en formation ou en exercice. C'est ainsi que dans le présent volume, des questions qui touchent, directement ou indirectement, à la modélisation au sens large apparaissent dans plusieurs des articles. Ces articles considèrent des situations dans lesquelles les objets mathématiques interviennent en relation avec une réalité physique. Le volume n'a certainement pas la prétention de faire le point des réflexions didactiques sur ce vaste sujet¹. En revanche, il illustre dans des cas bien précis qu'il est illusoire de penser que la relation avec le "réel" est en soi un élément facilitateur de l'enseignement mathématique : « Les mathématiques plongées dans un univers concret et familier aux élèves leur sont forcément plus accessibles. » Eh bien, non ! Sans de soigneuses analyses *a priori*, les situations présentées dans des classes peuvent être sources d'obstacles en raison de pièges insoupçonnés et de possibles malentendus. Même des objets mathématiques généralement considérés comme allant de soi, tels les tableaux de valeurs numériques, ne sont pas d'emblée transparents et provoquent l'incompréhension d'élèves, lorsque leur statut et leur fonctionnement n'ont pas été préalablement introduits, présentés, discutés puis arrêtés. On le voit dans l'article *Mais non, Marina*. Et, lorsque la situation physique est un tant soit peu évoluée, sa modélisation mathématique, si on veut la mener jusqu'au niveau quantitatif attendu des physiciens, demande une réflexion spécifique dont des aspects cognitifs sont envisagés dans l'article précisément intitulé *l'Activité cognitive d'interprétation*.

Une autre illusion commune remise en cause par plusieurs des articles de ce volume est celle de l'efficacité pédagogique d'un cheminement linéaire pourvu que chacune de ses étapes soit solidement fondée. Le premier article montre quelle est la complexité didactique de raisonnements produits à partir d'un problème pourtant d'apparence toute simple, ne mettant en jeu que des entiers naturels. Si un enseignement est préparé sans qu'une telle complexité soit imaginée, sans que les diverses progressions possibles soient envisagées, il laisse par la force des choses au bord de la route une partie du public auquel il s'adresse. Et sur ce point

1 On pourra consulter sur le sujet la récente publication collective « Du monde réel au monde des mathématiques » publiée par l'Irem de Paris

notamment, des éléments très utiles sont apportés par des études didactiques comme on peut ainsi le voir dans ce volume en particulier à propos de la géométrie.

Pour faciliter la lecture de ces articles et étendre leur impact, une consultation en ligne d'articles des Annales est possible sur le site web de l'IREM de Strasbourg <<http://irem.u-strasbg.fr>>. Pour réserver la primeur aux acquéreurs de la version imprimée, les articles d'un volume ne sont mis publiquement en ligne que lors de la parution du volume suivant. C'est ainsi que l'accès en ligne aux articles du volume 12 sera libre au moment de la parution de ce volume.

Certains articles qui ont fait l'objet d'une rédaction bilingue sont mis en ligne, dès l'année de parution du volume, dans la version écrite dans la langue autre que celle des exemplaires imprimés. D'autres articles ne sont publiés qu'en anglais ou en espagnol, et nous sommes conscients des problèmes que pose ce choix éditorial. L'article sur le thème de l'introduction des fonctions et concepts associés, tels variables et paramètres, est en espagnol, mais il a d'emblée donné lieu à une présentation analytique en français et devrait donc pouvoir satisfaire des lecteurs sans condition d'être polyglottes. Par contre, l'article qui traite en anglais de géométrie n'a pas bénéficié d'une présentation analytique en français. Si une demande en ce sens est exprimée au travers des réactions de lecteurs, une telle présentation sous la forme d'un fichier consultable en ligne pourra être envisagée.

Alain Kuzniak & François Pluvinage

PATRICK GIBEL

ANALYSE EN THÉORIE DES SITUATIONS D'UNE SÉQUENCE
DESTINÉE À DÉVELOPPER LES PRATIQUES DU RAISONNEMENT EN
CLASSE DE MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE PRIMAIRE

Abstract. Analysing with theory of situations a primary school lesson devoted to improvement of reasoning - The purpose of this article is to take as object of study reasoning processes elaborated by the pupils during a sequence "The biggest number", proposed in a class of fifth graders in a primary school. This research, made within the framework of the theory of didactical situations in mathematics, aims at analyzing on the one hand pupils reasoning processes, on the other hand, more precisely, conditions in which the reasoning processes were produced. We will analyse their possibilities to use them to take a decision, formulate a assertion, express an explanation or elaborate an argument depending on whether the conditions, which define the situation, require, or not, their uses.

Résumé. Le but de cet article est de prendre comme objet d'étude les raisonnements élaborés par les élèves au cours d'une séquence "Le nombre le plus grand", proposée dans une classe de cinquième année de l'école primaire. Cette recherche, effectuée dans le cadre de la théorie des situations didactiques, vise à analyser d'une part les raisonnements produits par les élèves, d'autre part à étudier, précisément, les conditions dans lesquelles les élèves les ont produits. Nous analyserons leurs possibilités de les utiliser pour prendre une décision, formuler une assertion, donner une explication ou produire une argumentation selon que les conditions, qui définissent la situation, requièrent ou non leurs usages.

Mots-clés. Raisonnement, argumentation, situation a-didactique, situation de validation, argumentation, contre-exemple, méthode généralisable, domaine de validité.

Introduction

Nous avons choisi de prendre comme objet d'étude une séquence de classe dans laquelle, explicitement, l'enseignant par la dévolution d'une situation a-didactique cherche à développer les capacités de raisonnement des élèves.

Le choix d'effectuer l'analyse de cette séquence en théorie des situations didactiques vise à apporter des éléments de réponses aux questions suivantes :

Peut-on favoriser la pratique des raisonnements en faisant dévolution, aux élèves, de situations dans lesquelles ils produisent et utilisent leurs raisonnements pour répondre aux exigences de la situation ? En quoi, la théorie des situations, permet-elle une analyse approfondie des conditions qui définissent ces situations d'apprentissages ?

Peut-on enseigner ce qu'est « faire des mathématiques » en confrontant les élèves à des situations a- didactiques ?

Nous définirons dans le paragraphe 1 ce que nous entendons par le terme « raisonnement » en classe de mathématiques à l'école primaire, et nous expliciterons à quelles conditions un « raisonnement supposé » produit par un élève, peut-il être considéré, par l'observateur, comme un « raisonnement effectif ».

Dans le paragraphe 2 nous effectuerons l'analyse a priori de la séquence choisie, « Le nombre le plus grand », dont l'ingénierie didactique a été produite par G. Brousseau et qui a été mise en œuvre en classe de C.M.2 au C.O.R.E.M¹. Cette séquence a été choisie car elle fait clairement apparaître de nombreux raisonnements chez les sujets, sous des formes très variées et dans des fonctions très diverses.

Nous présenterons, dans le paragraphe 3, notre outil d'analyse : le schéma de la structuration du milieu. Ce dernier nous permettra d'analyser, dans le paragraphe 4, d'une part la complexité didactique des raisonnements produits par les élèves dans chacune des « situations emboîtées », d'autre part les possibilités pour les élèves d'utiliser leurs raisonnements dans des fonctions spécifiques (prise de décisions, formulation d'une assertion, explication, argumentation) selon que les conditions, qui définissent la situation, requièrent ou non leur usage.

1. Les raisonnements en classe de mathématiques

1. 1. La détermination d'un raisonnement produit par un sujet : notion de « situation »

En classe de mathématiques, à l'école primaire, le terme « raisonnement » tend à couvrir un champ beaucoup plus vaste que celui des raisonnements formels, logiques ou mathématiques. C'est pour cette raison que nous avons pris comme définition initiale celle proposée par P. Oléron (1977) :

« Un raisonnement est un enchaînement, une combinaison ou une confrontation d'énoncés ou de représentations respectant des contraintes susceptibles d'être explicitées, et conduits en fonction d'un but ».

Pour affirmer que tel observable est l'indice d'un raisonnement dont les éléments sont en grande partie implicites, il est nécessaire de dépasser la définition formelle, pour examiner les conditions dans lesquelles le « raisonnement supposé » peut être considéré, par le chercheur, comme « raisonnement effectif ».

¹ Centre Observation et de Recherches sur l'Enseignement des Mathématiques, école Jules Michelet, 33400 Talence.

Dans le cadre d'une recherche sur l'usage et le traitement des raisonnements des élèves par les professeurs, cf. Brousseau et Gibel (2002), nous avons mis en évidence que, souvent, en situation didactique, le professeur relève, dans les formulations des élèves, des indices et les interprète davantage en fonction de leur utilité pour le déroulement de la leçon que du point de vue du projet initial de l'élève qui en est l'auteur. Par conséquent pour pouvoir déterminer et analyser objectivement les raisonnements produits par les élèves, le chercheur doit suivre une autre voie. Il convient qu'il montre que tel raisonnement complet, dont il n'aperçoit qu'une partie ou que des indices, est bien celui qu'il faut attribuer à son auteur.

Pour cela il convient de montrer que le « supposé raisonnement »

- pourrait être énoncé par le sujet ou, qu'au moins, la connaissance, utilisée implicitement ou explicitement, est connue de lui ;
- est utile (il réduit une incertitude, par exemple, s'il y a doute car une autre règle aurait pu être appliquée). Le lien ne doit pas être l'effet d'une cause, par un mécanisme qui échapperait au jugement et à la volonté du sujet ;
- est motivée par un avantage qu'elle procure au sujet. Elle est l'instrument d'une modification de son environnement qui lui paraît favorable ;
- est motivée par des raisons « objectives », propres : arguments de pertinence, de cohérence, d'adéquation, d'adaptation, qui justifient ce raisonnement là (et pas un autre) par opposition à l'idonéité (la conformité aux attentes du professeur).

Le chercheur doit donc montrer que la production du raisonnement prêté à ce sujet est motivée par une intention de la part de ce dernier, qu'elle répond à un but, qu'elle lui apporte un avantage dans les conditions qu'il perçoit, et avec les connaissances dont il dispose.

Ainsi, comme Brousseau et Gibel (2005) l'ont explicité, parmi toutes les conditions qui accompagnent la production d'un supposé raisonnement, quelques unes seulement – le moins possible - peuvent servir à le déterminer et à le justifier. Ces conditions ne sont pas quelconques. Elles forment un ensemble cohérent que nous appelons « situation ». La situation est une partie seulement du « contexte, ou de l'environnement de l'action de l'élève ou du professeur et elle comprend, mais pas seulement, une sorte de question à laquelle le raisonnement de l'élève est une réponse. Elle n'est réduite ni à l'action du sujet, ni à la connaissance qui la motive mais elle les met en relation rationnelle. Une situation peut expliquer pourquoi un raisonnement faux a été produit par d'autres causes qu'une erreur ou une insuffisance du sujet.

Ce point de vue est un peu différent de celui qui prévaut légitimement chez les professeurs où les seuls raisonnements vraiment utilisables sont les raisonnements entièrement corrects. Un raisonnement faux n'est qu'assez exceptionnellement un objet d'étude.

La théorie des situations a pour objet l'étude et la modélisation des situations ainsi définies. Elle est un instrument pour rechercher les explications minimales des faits observés, qui sont compatibles avec les faits connus.

1.2. Les raisonnements effectifs

Les raisonnements que nous étudierons seront essentiellement modélisables par des inférences c'est-à-dire des relations de la forme « Si la condition A est réalisée alors la condition B l'est (ou le sera) aussi ». Mais cette définition doit être complétée car nous voulons pouvoir distinguer les raisonnements effectifs des citations et intégrer des raisonnements qui se manifestent par des activités aussi bien que par des déclarations, ce qui nous amène à formuler la définition suivante Un *raisonnement* est donc une relation R entre deux éléments A et B telle que :

- A désigne une condition ou un fait observé, contingent ;
- B est une conséquence ou une décision ou un fait prévu ;
- R est une relation, une règle, plus généralement une connaissance empruntée à un répertoire considéré comme connu, accepté. La relation R conduit l'actant, dans la circonstance A, à prendre la décision B ou à prévoir le fait B ou à énoncer que le fait B est vrai.

Un *raisonnement effectif* comprend de plus :

- un agent E (élève ou professeur) qui utilise la relation R ;
- un projet déterminé par une situation S dont la réalisation exige l'usage de cette relation.

On peut dire que pour réaliser le projet déterminé par la situation S, le sujet utilise la relation R qui permet d'inférer B de la condition A. Ce projet peut être convenu et explicité par l'agent ou il peut lui être prêté par le chercheur à partir d'indices.

1.3. Classification des raisonnements d'après la fonction et le type de situation

En conclusion du paragraphe précédent un raisonnement est identifié par sa fonction dans une situation, par le rôle qu'il y joue. Cependant un raisonnement peut avoir des fonctions différentes, décider, informer, convaincre, expliquer. Elles sont différenciées par des modèles de situations mathématiques (d'action, de

formulation, de preuve...) généraux mais différents, pour une présentation plus détaillée nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Brousseau (1997).

De plus, à un moment donné du déroulement d'une leçon, on peut identifier, suivant les intentions des participants, un très grand nombre de situations plus ou moins « emboîtées ». Nous expliciterons, dans le paragraphe 3, cette notion de « situations emboîtées » dont la définition repose sur le concept de « schéma de la structuration du milieu ».

Les raisonnements qui apparaissent dans les situations didactiques se rapportent à leurs différentes composantes, telles que décrites dans la théorie didactique des situations mathématiques :

Dans les situations a-didactiques, le raisonnement est produit par des élèves, pour les besoins de la résolution, sans intervention, appui, ni recours à l'enseignant :

- soit comme un moyen pour un ou plusieurs élèves d'établir leurs décisions dans les situations d'action ;
- soit comme un moyen d'appui un peu formel, pour préciser une information dans une situation de formulation ;
- soit comme moyen de convaincre un ou des condisciples de la validité lors d'une situation de validation.

Dans les situations didactiques, le raisonnement de l'élève s'adresse principalement à l'enseignant,

- soit pour justifier une action ou pour produire une réponse ;
- soit pour satisfaire une demande explicite ou implicite du professeur ; formellement il est une justification considérée comme un objet de l'enseignement en cours, indépendamment de son rapport avec l'action engagée, il s'apparente alors à une citation.

1.4. L'identification des raisonnements

Afin de pouvoir étudier les moyens utilisés par l'enseignant pour gérer les raisonnements apparaissant dans les productions des élèves, il convient de définir ce qui, pour *le chercheur*, est assimilable à un « raisonnement », pour cela faut :

- identifier des observables (textes, gestes, paroles, dessins, *etc.*) produits par un élève, par plusieurs élèves en interaction ou par l'enseignant ;
- relier ces observables par une relation « rationnelle » telle que :

Cette relation s'exprime dans le langage du chercheur, différent a priori de celui des protagonistes.

Elle attribue à ces observables un rôle dans la réalisation du projet proposé par la situation convenue ou dans celle de l'un de ses modèles qui ont la charge de représenter les intentions possibles des protagonistes.

Elle est hypothétique ou formelle :

- identifier un actant : professeur, élève ou groupe d'élèves à qui est attribué l'établissement de la relation dans le cadre d'un projet qui lui est prêté ;
- s'il s'agit d'une hypothèse, établir qu'elle est valide, en montrant, éventuellement à l'aide d'autres indices, qu'elle est la moins improbable des explications.

De plus la relation rationnelle ainsi « observée » par le chercheur doit résulter d'une combinaison « originale », ou considérée comme telle, dans le sens où elle n'a pas fait l'objet d'une institutionnalisation, elle n'a pas été enseignée ou montrée comme objet d'enseignement.

Il est à noter que parmi les raisonnements détectés par le chercheur, certains d'entre eux peuvent être attribués à un ou à plusieurs des protagonistes bien que ces derniers ne les aient pas nécessairement identifiés comme tel.

Dans le paragraphe suivant nous allons effectuer l'analyse a priori de la séquence « Le nombre le plus grand » et expliciter l'ingénierie didactique.

2. Présentation et analyse a priori de la situation a-didactique destinée à développer certaines pratiques du raisonnement

2.1 Origine et enjeux de cette séquence

Le problème de mathématiques a été initialement proposé par G. Glaeser (1999), l'énoncé est le suivant :

Soient cinq nombres naturels quelconques a, b, c, d, e .

Quel est le nombre le plus grand que l'on peut obtenir à partir des quatre opérations élémentaires $\{+ ; - ; \times ; :\}$ appliquées à ces nombres qui ne seront pris dans le calcul qu'une seule fois, une même opération pouvant être utilisée plusieurs fois.

La mise en œuvre de cette séquence est liée à la rencontre de G. Brousseau et de G. Glaeser qui a été à l'origine de ce projet didactique. Le problème proposé est un problème ouvert, G. Brousseau montre l'utilité de la théorie des situations didactiques pour élaborer une ingénierie permettant de mettre en place une situation a-didactique de validation.

L'idée de G. Brousseau est de faire débattre les élèves sur des déclarations mathématiques suivant des règles qui les conduisent à produire des preuves, plus précisément leur faire chercher des contre exemples.

La situation d'argumentation, telle qu'elle a été conçue par G. Brousseau, est une situation a-didactique ou du moins en grande partie a-didactique en effet il est possible et même probable que l'enseignant sera conduit à intervenir de manière à assurer le maintien du processus. Par conséquent l'analyse de cette séquence devrait nous permettre d'apporter des éléments de réponses aux questions que nous avons formulées dans l'introduction mais également aux questions suivantes :

Quelles sont les différentes formes de raisonnements, produits par les élèves, qui apparaissent lors des différentes phases de cette séquence ? Quelles fonctions recouvrent-ils ?

A quelles conditions les raisonnements produits par les élèves en situation d'action ou de formulation peuvent-ils être utilisés par les élèves dans des situations de preuve ?

2.2. La mise en situation d'analyse a priori

2.2.1. Analyse de la nature de la réponse attendue au problème proposé

Pour déterminer la nature de la réponse attendue par l'enseignant il est nécessaire de distinguer les conditions dans lesquelles la réponse doit être produite :

- si la suite de nombres est donnée par l'enseignant alors la réponse attendue est un nombre ainsi que le programme de calculs permettant de l'obtenir ;
- si les cinq nombres ne sont pas explicités, c'est-à-dire si l'on se place dans le cas général, alors la réponse idoine est une méthode de calculs. Cependant il est à noter que l'écriture d'une expression algébrique ne conviendra pas car il est nécessaire de distinguer différents cas selon la suite de nombres considérés.

Dans le second cas nous sommes amenés à considérer l'expression algébrique

$$a \times b \times c \times d \times e$$

où a, b, c, d et e désignent cinq entiers naturels quelconques.

Or cette expression algébrique est valide, pour obtenir le nombre le plus grand, à partir d'un 5-uplet donné, que si les cinq nombres sont tous distincts de 0 et de 1.

Le domaine de validité de cet algorithme «naturel» n'est pas immédiatement évident, il devrait conduire les élèves à s'interroger sur le statut des nombres 0 et 1. Ces derniers ne sont pas des nombres comme les autres, ils ont des caractères didactiques et culturels spécifiques.

Il est à noter que la présence d'un ou plusieurs 0 nécessite, pour obtenir le nombre le plus grand, de déterminer, à partir de la suite constituée par les entiers non nuls, le nombre le plus grand et d'ajouter, ensuite, le ou les entiers nul(s), ce qui nécessite de distinguer des cas particuliers lors de la formulation de la méthode.

Examinons à présent les cas où la suite des cinq nombres contient un ou plusieurs 1 et explicitons pour chacun d'eux la formule permettant d'obtenir le nombre le plus grand.

Cas n°1 : Supposons que la suite de nombres comporte exactement un 1 alors elle est de la forme 1,b,c,d,e

$$1 < b \leq c \leq d \leq e$$

Dans ce cas le nombre le plus grand est donné par la formule

$$(b+1) \times c \times d \times e$$

Cas n°2 : Supposons que la suite de nombres comporte exactement deux 1 alors elle est de la forme 1;1,c,d,e avec

$$1 < c \leq d \leq e$$

Il est alors nécessaire de distinguer deux cas :

Si c=d=2 alors le nombre le plus grand est obtenu par l'algorithme

$$(c+1) \times (d+1) \times e$$

Sinon le nombre le plus grand est donné par

$$(1+1) \times c \times d \times e$$

Cas n°3 : Supposons que la suite de nombres comporte exactement trois 1 alors elle est de la forme 1,1,1,d,e avec

$$1 < d \leq e$$

Le nombre le plus grand est donné par la formule

$$(1+1+1) \times d \times e$$

Cas n°4 : Supposons que la suite de nombres comporte exactement quatre 1 alors elle est de la forme 1,1,1,1,e avec $e > 1$

Si e=2 le nombre le plus grand est donné par la formule

$$(1+1+1) \times (e+1)$$

Si e>2 le nombre le plus grand est donné par la formule

$$(1+1+1+1) \times e$$

Cas n°5 : Supposons que la suite soit formée de cinq 1

Le nombre le plus grand est obtenu par la formule

$$(1+1+1) \times (1+1)$$

La formulation d'une méthode généralisable est liée à l'usage des propriétés de la multiplication, il convient donc de s'intéresser aux connaissances dont disposent les élèves en cinquième année de primaire. Pour ces élèves, l'associativité n'est pas acquise en ce qui concerne l'usage de cette propriété, ni formulable. La commutativité est admise implicitement du point de vue de son usage par les élèves mais ces derniers ne peuvent pas faire référence à la propriété plus précisément à sa désignation.

2.2.2. Analyse didactique de la séquence

Ce qui est visé, c'est l'enseignement des règles du jeu de la preuve, c'est donc une leçon sur le vrai et le faux mais également sur la manière de l'établir. L'un des objectifs de la séquence est de mettre les élèves en situation de débattre de la validité de méthodes permettant d'obtenir le nombre le plus grand quelle que soit la suite de nombres proposée.

Le « rejet » d'une méthode est lié à la production d'un contre-exemple, c'est-à-dire à l'exhibition d'une suite de cinq nombres et d'une méthode conduisant à la production d'un nombre plus grand que celui obtenu par la méthode initialement proposée.

Pour qu'une mise en débat de la validité des méthodes soient envisageable c'est-à-dire pour que la situation de validation puisse être a-didactique il est nécessaire que :

1. Ces méthodes aient été produites par les élèves et donc qu'elles résultent d'un travail de formulation fondé sur l'écriture de méthode.
2. Elles aient fait l'objet d'une reconnaissance formelle par l'enseignant et par conséquent qu'elles appartiennent au *répertoire didactique* de la classe de sorte qu'elles soient utilisables par l'ensemble des élèves.
3. Les élèves parviennent à se les approprier c'est-à-dire à faire le lien entre leur formulation et leur usage.
4. Elles soient assimilables à des assertions dans le sens où elles sont correctement formées et consistantes.

De plus pour qu'il soit envisageable de demander aux élèves d'élaborer des méthodes, il faut dans un premier temps envisager des répétitions de calculs sur des suites de nombres différentes données par l'enseignant afin que les élèves parviennent à élaborer des programmes de calculs que nous appellerons programmes d'actions finalisés.

Il convient d'examiner :

- d'une part les écritures qui correspondent à leur programme de calculs. Dans le cas où les nombres sont spécifiés les élèves peuvent utiliser des écritures comportant des parenthèses ou avoir recours à des arbres de calculs ;
- d'autre part les formulations que les élèves peuvent élaborer afin de désigner les nombres dans le cas général. Dans ce cas les élèves présenteront l'énoncé de leur méthode sous forme d'écriture littérale.

Nous allons à présent nous intéresser à la mise en situation proposée par Brousseau.

L'ingénierie envisagée découle de l'analyse effectuée précédemment. Initialement nous allons mettre les élèves en situation d'action, plus précisément en situation de produire des programmes d'actions finalisés. Pour cela nous allons, dans un premier temps, leur proposer le problème pour des nombres entiers donnés.

A la suite d'une phase de recherche, l'enseignant organisera une phase de confrontation au cours de laquelle les élèves expliciteront les résultats obtenus ainsi que la manière dont ces résultats ont été produits.

La situation a-didactique est une situation de preuve, si l'on considère le schéma de la dialectique de la validation, en théorie des situations, il s'appuie nécessairement sur une situation d'action et sur une situation de formulation.

La situation d'action est le jeu du « nombre le plus grand »; il s'agit pour les élèves de trouver le nombre le plus grand que l'on peut obtenir à l'aide d'un *répertoire* formé des quatre opérations élémentaires $\{+; -; \times; :\}$ appliquées à un ensemble de cinq nombres entiers donnés. La règle précise que l'on ne peut utiliser chacun des nombres qu'une seule fois.

Examinons à présent la situation de formulation.

Les élèves doivent écrire une méthode utilisable quels que soient les cinq nombres entiers proposés et permettant d'obtenir le nombre le plus grand. Les élèves devront passer de l'activité de raisonnement, au sens de la mise en œuvre d'un programme d'actions finalisé à la rédaction d'une « méthode » générale qui permette d'obtenir le nombre le plus grand quelle que soit la suite de 5 nombres proposée.

Nous verrons que les élèves se heurtent à des difficultés. En effet, pour expliciter la méthode nous avons besoin de l'Algèbre, car il est nécessaire d'utiliser des termes pour désigner les nombres qui ne sont pas fixés puisque nous souhaitons obtenir une méthode utilisable pour tous les 5-uplets.

La situation de validation constitue l'élément central de notre étude. L'enseignant fait dévolution aux élèves du jeu des « propositions »- la dénomination correcte adéquate est « conjecture »- dans lequel il y a un concours de propositions entre des équipes, ce qui va donner lieu à la production par les élèves de preuves visant à valider ou à invalider les propositions.

La situation didactique consiste essentiellement à

1. Faire dévolution aux élèves de la situation d'action, c'est-à-dire présenter les règles du jeu du « nombre le plus grand » et amener les élèves à formuler : d'une part le nombre obtenu, d'autre part la justification du programme d'actions finalisé qui lui est associé. Le maître va donner les règles du jeu mais il va, lors des phases de jeu de la première séance, cacher le fait qu'il peut choisir 0 ou 1 dans la suite de nombres ce qui va surprendre les élèves, lors de la rédaction des méthodes, car ils n'avaient pas envisagé cette possibilité.

Le maître, lors du déroulement de la séquence, choisit les nombres qu'il va donner pour mettre en scène les règles convenables, puis ensuite pour éprouver, lorsque cela s'avère nécessaire, la validité des « méthodes » proposées par les élèves lors de la situation de formulation.

2. Faire dévolution de la situation de formulation afin que les élèves s'engagent dans l'écriture d'une méthode assimilable à un programme d'action finalisé détachable des conditions, c'est-à-dire utilisable pour obtenir le nombre le plus grand quelle que soit la suite de 5 nombres proposée.

Compte tenu de la difficulté de la tâche dévolue aux élèves l'enseignant devra leur indiquer très précisément d'une part la finalité c'est-à-dire la production d'une méthode permettant de gagner au jeu du nombre le plus grand quel que soit le 5-uplet donné, d'autre part la forme de l'écrit c'est-à-dire la rédaction d'une méthode sous la forme d'une proposition. Pour que cette dernière soit correctement formulée et consistante, l'enseignant devra vraisemblablement interagir avec l'élève ou les élèves auteurs de la proposition pour les amener à préciser certains termes.

3. Faire dévolution de la situation de validation, c'est-à-dire amener les élèves à prendre position relativement à la validité des méthodes formulées par chacun des groupes. L'enseignant aura à préciser les règles lors de la situation de validation.
4. Intervenir si nécessaire pour maintenir le caractère dédidactifiable de la situation de validation et par conséquent maintenir le processus de validation.

Nous allons à présent expliciter les différentes phases de chacune des séances afin de rendre compte de l'ingénierie dans sa globalité.

2.2.3. Le déroulement de la séquence

La séquence est constituée de 3 séances ; nous allons expliciter, pour chacune d'elles, les différentes phases :

Les différentes phases de la séance 1

Phase 1 : Dévolution du jeu. Suite proposée 3,8,7,5,4.

Phase 2 : Informations complémentaires.

Phase 3 : Recherche individuelle.

Phase 4 : Mise en commun. Etablissement des résultats et désignation des gagnants.

Phase 5 : Comparaison de méthodes.

Phase 6 : Consigne du deuxième jeu 7,3,2,5,8.

Phase 7 : Recherche individuelle.

Phase 8 : Mise en commun. Exposition des résultats et désignation des gagnants.

Phase 9 : Consigne relative au concours de propositions.

Phase 10 : Recherche.

Phase 11 : Regroupement. Formulation des propositions. Débat relatif aux propositions.

Phase 12 : Phase de jeu 2,5,3,2,4.

Phase 13 : Présentation des résultats.

Les différentes phases de la séance 2

Phase 1 : Consigne relative au concours de propositions.

Phase 2 : Recherche en groupe.

Phase 3 : Mise en commun. Explicitation des méthodes.

Phase 4 : Débat relatif aux méthodes.

Phase 5 : Phase de jeu. 5,2,4,0,3.

Phase 6 : Présentation des résultats obtenus à partir des méthodes.

Phase 7 : Proposition de nouvelles méthodes.

Phase 8 : Phase de jeu 8,1,3,0,0.

Phase 9 : Présentation des résultats obtenus à partir des méthodes.

Phase 10 : Proposition d'une nouvelle méthode.

Phase 11 : Recherche d'un contre-exemple à une méthode.

Phase 12 : Propositions de contre-exemples. Débats relatifs à la validité des contre-exemples.

Phase 13 : Proposition de nouvelles méthodes.

Phase 14 : Phase de jeu 7,0,4,3,1.

Phase 15 : Présentation des résultats.

Phase 16 : Recherche de contre-exemples.

Phase 17 : Proposition de contre-exemples.

Les différentes phases de la séance 3

Phase 1 : Mise en commun des résultats suite à la série proposée par Hélène 8,1,1,1,0.

Phase 2 : Débat relatif au statut de la proposition d'Hélène.

Phase 3 : Présentation par la maîtresse d'une série de nombres 1,1,1,1,1.

Phase 4 : Recherche de la méthode correspondante.

Phase 5 : Présentation des méthodes. Explication du contre-exemple.

Phase 5 : Phase de jeu. 1,1,1,1,9.

Phase 6 : Présentation des résultats obtenus à partir des méthodes.

Phase 7 : Recherche de contre-exemples.

Phase 8 : Phase de rédaction individuelle d'une méthode.

3. Un outil pour l'analyse des raisonnements des élèves dans la relation didactique : le schéma de structuration du milieu

3.1. Présentation du schéma de la structuration du milieu

G. Brousseau a présenté à l'école d'été 1986, cf. Brousseau (1988) le modèle suivant sous le titre « schéma de la structuration du milieu didactique » afin de modéliser la relation didactique et d'en prévoir les différents régimes de fonctionnement.

Ce modèle permet de

- combiner des systèmes interactifs pour faire apparaître deux rôles différenciés, celui de l'élève et celui du professeur, par leurs rapports réciproques et leur rapport au savoir ;
- étudier la compatibilité de leurs caractères respectifs.

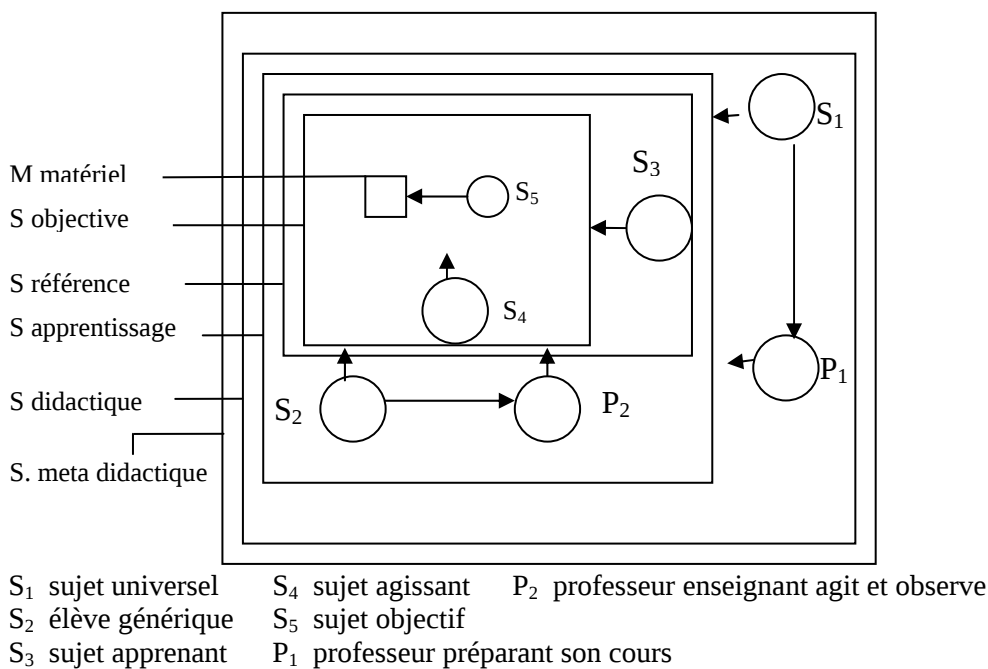


Schéma de structuration du milieu didactique.

C. Margolinas a transformé ce modèle afin de mettre en valeur le caractère central de la situation didactique et pour analyser symétriquement à celle de l'élève, la situation du professeur.

M+3:M-Construction		P+3:P-Noosphérien	S+3: Situation noosphérienne
M+2: M-Projet		P+3:P-Constructeur	S+2: Situation de construction
M+1:M-Didactique	E+1:E-Réflexif	P1: P-Projeteur	S+1: Situation de projet
M0:M-Apprentissage	E0: Elève	P0: Professeur	S0: Situation didactique
M-1:M-Référence	E-1:E-Apprenant	P-1: P-Observateur	S-1: Situation d'apprentissage
M-2: M- Objectif	E-2: E-Agissant		S-2: Situation de référence
M-3: M- Matériel	E-3: E-Objectif		S-3: Situation objective

Tableau de la structuration du milieu présenté par C. Margolinas (1998).

Ce modèle permet ainsi de

- représenter des déroulements effectifs de leçons ;
- concevoir des situations effectivement réalisables ;
- rendre compte des transformations du savoir observables au cours d'un apprentissage local ou d'une genèse historique;
- étudier les conditions théoriques du fonctionnement d'un savoir.

Il faut remarquer que pour chacune des situations emboîtées (situation objective, situation de référence, situation d'apprentissage, situation didactique, situation de projet, situation de construction), les savoirs et les connaissances de l'enseignant et de l'enseigné sont différents, même lorsqu'il s'agit de la même notion mathématique.

L'ensemble des moyens que le professeur pense pouvoir attendre des élèves, par suite de son enseignement, constitue ce que nous appellerons le *répertoire didactique* de la classe. Par conséquent l'enseignant identifie un *répertoire* qu'il juge légitime d'utiliser dans la relation didactique compte tenu des institutionnalisations antérieures, afin de produire la solution ou la réponse attendue.

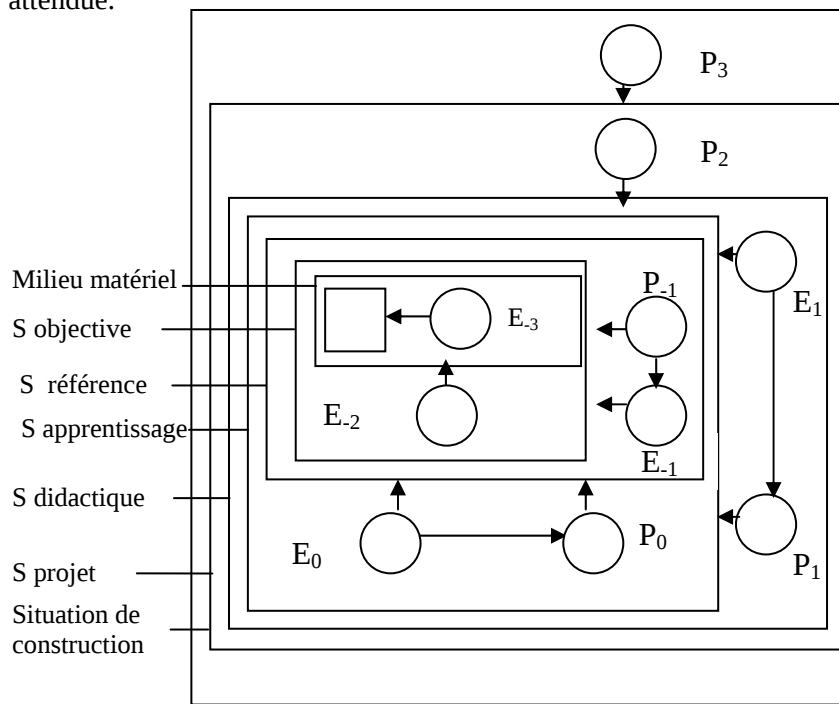


Schéma de la structuration du milieu.

En ce qui concerne l'analyse des fonctions didactiques du raisonnement et de ses éléments, la combinatoire s'articule autour des trois types de situations que sont : l'action, la formulation et la validation.

La modélisation du fonctionnement des connaissances du sujet par l'usage de son répertoire didactique conduit à spécifier les conditions de son utilisation en définissant trois composantes du répertoire didactique : le répertoire d'actions, le répertoire de formulations et le répertoire de validations.

Présentation des principes fondamentaux du schéma :

- l'objet et les moyens d'une activité sont différents ;
- une action porte sur un objet ; elle est déterminée par un *répertoire d'actions* du sujet et par une situation, elle-même étant définie par des conditions et un but à atteindre ;
- une formulation conduit à représenter les objets, les actions et les conditions de la situation d'action dans l'optique où cette dernière sert d'objet à la communication à l'aide d'un *répertoire* dans lequel il y a des objets, des actions, des procédures et des déclarations.

Ce schéma devrait nous permettre de distinguer une action et une modification de cette action dans la mesure où elle peut être justifiée par le sujet, en effet elles vont apparaître sur le schéma à des niveaux différents.

Nous distinguerons la performance de l'élève qu'il s'agisse d'une action, d'un message ou d'un énoncé, du *répertoire didactique* à l'aide duquel elle est produite.

Ce qui était considéré comme un moyen au niveau N est alors considéré comme un objet au niveau N+1 : la structure du schéma transforme en objet ce qui était le moyen au niveau précédent.

3.2. La méthodologie utilisée

Nous souhaitons effectuer une analyse en théorie des situations de la complexité didactique des raisonnements produits ; pour cela nous allons utiliser le schéma de la structuration du milieu didactique, afin d'explicitier d'une part les différentes formes et les différentes fonctions des raisonnements, d'autre part les conditions qui définissent chacune des situations dans laquelle les élèves ont produit les raisonnements.

L'utilisation de ce modèle devrait nous permettre :

1. d'approfondir l'analyse a priori de la séquence, en explicitant, pour chacune des situations emboîtées du schéma, les différentes formes de raisonnements susceptibles d'apparaître dans la relation didactique en

regard des principaux objectifs de l'enseignant et des conditions qui définissent la situation.

2. D'analyser a posteriori dans la séquence «Le nombre le plus grand »
 - les raisonnements produits par les élèves en situation d'action ;
 - les conditions dans lesquelles ils ont été élaborés ;
 - les transformations de ces mêmes raisonnements lorsque les élèves sont conduits à les utiliser en situation de formulation ou de validation.

L'analyse détaillée de cette séquence devrait également nous permettre d'apporter des éléments de réponse à la question, formulée dans l'introduction :

Peut-on, en plaçant les élèves en situation a-didactique, enseigner ce qu'est « faire des mathématiques » au sens de

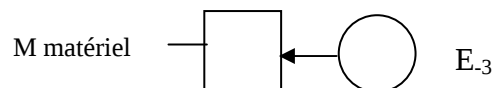
1. Produire des conjectures en écrivant des énoncés, des « méthodes » permettant de gagner au jeu «le nombre le plus grand» proposé par G. Glaeser.
2. Débattre de la validité des méthodes, plus précisément du domaine de validité des méthodes proposées par chacun des groupes.
3. Rechercher un contre-exemple à une méthode.
4. Elaborer et écrire un nouvel énoncé dont le domaine de validité est plus étendu.

4. Analyse des différentes formes et des différentes fonctions des raisonnements associés à chacun des niveaux du schéma

L'objet de notre étude est d'une part de prévoir, pour chacun des niveaux du schéma à quelles conditions les différentes actions des élèves peuvent être assimilées ou non à une forme de raisonnement. et d'autre part de déterminer en effectuant l'analyse a posteriori de la séquence « Le nombre le plus grand » les formes et les fonctions des raisonnements produits par les différents acteurs de la relation didactique.

4.1. L'acteur objectif et le milieu matériel

Niveau (M-3) : l'acteur objectif et le milieu matériel



Quand le professeur prépare son cours, il organise la situation objective à savoir le milieu matériel et l'acteur objectif. L'acteur objectif, E-3, effectue des actions non seulement formulables simplement, mais aussi culturellement repérées, pouvant être répertoriées et qui sont supposées connues puisqu'elles doivent lui être communiquées. Il s'agit donc d'algorithmes et de procédures précédemment institutionnalisés c'est-à-dire appartenant au répertoire didactique de la classe.

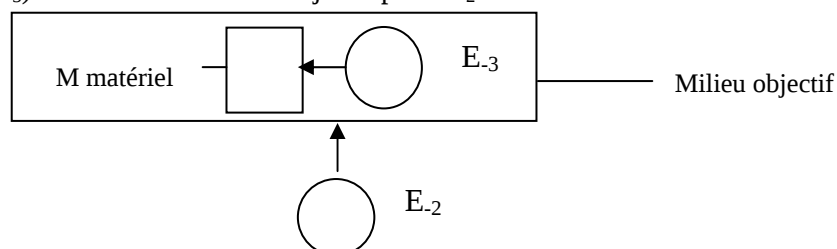
La situation objective, objet de notre étude, est fondée sur le problème de mathématiques proposé par G. Glaeser. C'est donc une situation de jeu pour un 5-uplet donné. Le milieu matériel est constitué par les entiers naturels. Les connaissances du répertoire didactique, que les élèves vont devoir utiliser, relèvent des opérations sur les entiers et de leurs propriétés.

4.2 Le sujet agissant et le milieu objectif

Niveau (M-2) : le sujet agissant et le milieu objectif

E₃ élève objectif ; E₂ élève agissant ;

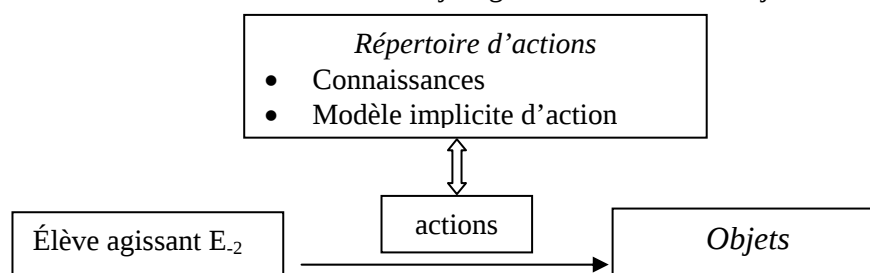
(M₃, E₃) définissent le milieu objectif pour E₂



Sujet agissant et milieu objectif.

Dans le cadre des règles, l'élève va, à l'aide de son *répertoire* de connaissances, établir une action, en général une action sur les objets. Ce qui motive l'action sur les objets c'est le *répertoire* didactique dont dispose l'élève.

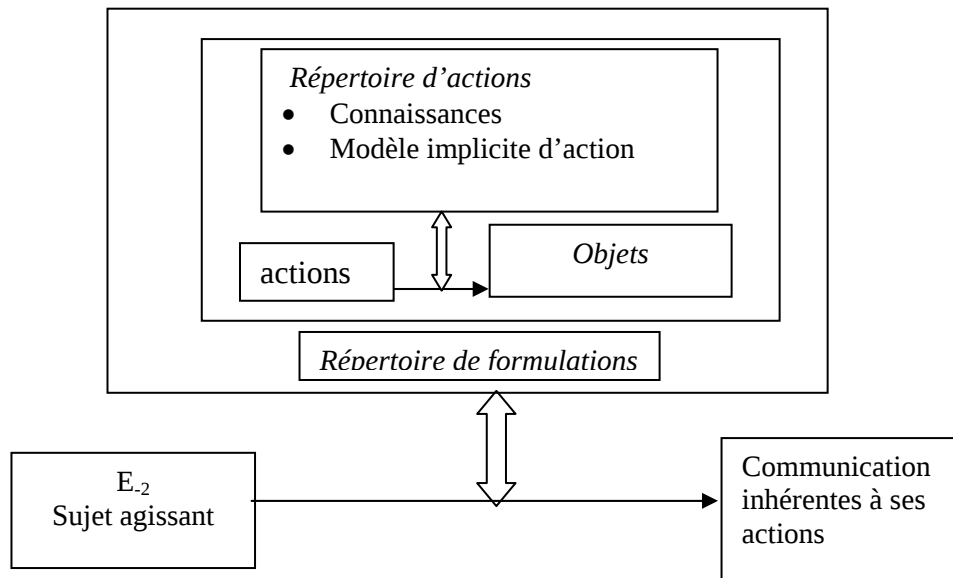
Le schéma suivant modélise l'action du sujet agissant sur le milieu objectif



Modélisation de l'action du sujet sur le milieu objectif.

Certaines actions du sujet sont entièrement déterminées par la situation : l'élève n'a pas réellement de choix à effectuer. Pour que l'élève ait le choix, il faut qu'il y ait plusieurs possibilités effectives, c'est-à-dire il faut pouvoir observer que, dans des conditions similaires, certains élèves font différemment. Il y a choix s'il y a plusieurs possibilités effectives.

On peut envisager à ce niveau (M-2) que le sujet effectue à la demande de l'enseignant une communication inhérente à ses actions c'est-à-dire aux actions sur les objets eux-mêmes.



Modélisation de la communication des actions du sujet agissant.

Une communication inhérente aux actions des élèves vise à amener les élèves à prendre position relativement aux différentes procédures proposées. Cette prise de position nécessite de la part des élèves une capacité à analyser les productions en fonction de différents critères

- la pertinence : ce dont l'élève parle est réalisé dans la situation qui lui a été dévolue ;
- l'adéquation : la procédure mise en œuvre permet d'obtenir la solution ;
- la complexité : le nombre de pas du raisonnement produit ;
- la consistance : ce n'est pas contradictoire avec ce qui a été institutionnalisé précédemment, c'est-à-dire avec le répertoire de connaissances de la classe ;

- la validité : consistance et adéquation. L'élève utilise ses connaissances conformément aux règles d'usage du répertoire didactique pour réaliser l'attendu.

Dans l'analyse de la séquence « Le nombre le plus grand », l'enseignant a pour objectif de faire dévolution aux élèves de la situation d'action, c'est-à-dire présenter les règles du jeu du « nombre le plus grand » et amener les élèves à formuler : le nombre obtenu et la justification du programme d'actions qui lui est associé.

Lors de la phase de mise en commun (phase 4, séance 1) les élèves doivent effectuer une communication inhérente à leur suite d'actions. Les outils d'analyse explicités précédemment nous donnent la possibilité d'analyser la nature des déclarations des élèves : différents éléments nous amènent à considérer qu'il s'agit là de raisonnement :

D'une part les élèves sont confrontés à des choix concernant les nombres et les opérations qu'ils utilisent à chaque étape de leur programme d'actions.

D'autre part chaque étape de la formulation de l'élève est en fait une assertion dont la validité par rapport au calcul, mais également par rapport aux règles du jeu, est débattue par les élèves. Il s'agit d'une dialectique de la validation.

La justification du nombre, donnée par la formulation des étapes du programme d'actions, est assimilable à une preuve : l'élève fait une conjecture (Avec ces cinq nombres, en respectant les règles je peux obtenir..) et pour démontrer la validité de sa conjecture, il va falloir qu'il en apporte la preuve.

Extrait de la phase 4, séance 1, épisode 1, Kévin expose sa réponse à l'issue du premier jeu 3,8,7,5,4

0.07.20	M : Top ! Posez crayon ! ...Allez Kévin ?	
0.07.28	Kévin : 4215 !	
	M : Tu as trouvé 4215 ?	La maîtresse écrit 4215 au tableau
	E : Moi j'aurais pu trouver ce nombre	
	M : Attention, tu viens nous expliquer comment tu as fait	
	M : Non tu restes là, tu me dis comment tu as fait.	
	Kévin : 8 fois 7, 56	La maîtresse écrit $(8 \times 7) + (3 \times 5) + 4$ 56 + 15 + 4
	M : Pardon ?	
	Kevin : 8 fois 7	
	M : Oui, tu as trouvé que ça faisait ?	
	Kevin : 56	

	Kevin : 3 fois 5, 15	
	M : Tu as fait 3 fois 5, 15. Après tu as fait ? Chut !	
	Kevin : J'ai additionné les résultats 56 plus 15 plus 4	
	M : Alors 56 et 15, 66....71	
	M : Et tu trouves 4215 ?	
	Kévin : Non après, j'ai fait 75 fois 56	
	E : Mais tu as utilisé deux fois les mêmes nombres.	La maîtresse interrompt l'écriture du programme d'actions.
	M : Tu as déjà... Chut, on dit rien, annulé ! Tu n'as pas respecté la règle ça ne vaut rien.	

Kevin annonce son résultat (4215), l'enseignante lui demande alors de justifier la manière d'établir son résultat. La validité de son programme d'actions va être examinée par les différents acteurs du point de vue de la règle du jeu «le nombre le plus grand» et du point de vue de la validité des calculs effectués.

Un élève indique à Kevin qu'il a utilisé deux fois les mêmes nombres (8 et 7) ; par conséquent Kevin n'a pas respecté les règles du jeu, la maîtresse annule sa réponse. La maîtresse invalide la proposition de Kevin.

Phase 4, séance 1 épisode 2, Myriam expose sa réponse pour le premier jeu 3,8,7,5,4

	M : (en désignant Myriam) : A toi.	
	Myriam : Moi j'ai trouvé 3360 !	
	E : Moi, aussi !	
	E : Non pas moi, j'ai trouvé plus grand.	
0.09.00	M : 3360, tu expliques. Attention, je t'écoute.	La maîtresse écrit au tableau 3360.
	Myriam : 8 fois 7, 56	La maîtresse écrit le programme de calculs $\begin{array}{r} (8 \times 7) \times (5 \times 4) \times 3 \\ \boxed{} \quad \boxed{} \quad \\ 56 \times 20 \quad \\ \boxed{} \quad \\ 1120 \times 3 \\ \boxed{} \quad \\ 3360 \end{array}$
	M : Alors, tu as fait 8 fois 7, oui.	
	Myriam : Après j'ai fait 5 fois 4, ça fait 20	
	M : Hum ! (<i>ton approbateur</i>)	
0.09.20	Myriam : Après j'ai additionné 56 et ...	
0.09.22	E : Additionné ?	
	Myriam : Non multiplié ; 56 fois 20	
0.09.27	M : C'est-à-dire tu as multiplié ces deux là !	
	Myriam : 56 fois 20, 1120 et après j'ai fait fois 3 et j'ai trouvé 3360.	
0.09.40	M : Et après tu as fait fois 3 pour trouver 3360.	

L'intervention d'un élève (0.09.22 E : Additionné ?) a pour objet de remettre en question la formulation de Myriam concernant le choix de l'opération qui lie les nombres (56 et 20). Dans sa formulation Myriam indique qu'elle additionne ces deux nombres alors qu'elle a choisi (en témoigne le résultat de son calcul) de les multiplier entre eux. L'intervention de son camarade lui permet de prendre conscience de son erreur de formulation et de modifier son discours en conséquence. Elle parvient ainsi à produire, par la formulation de son programme d'actions, le résultat annoncé initialement 3360.

La maîtresse valide le résultat proposé par Myriam du point de vue de sa conformité aux règles du jeu et aux règles de calculs. Le nombre 3360 a été obtenu conformément aux règles du jeu et les calculs sont justes.

4.3 Le sujet apprenant et le milieu de référence

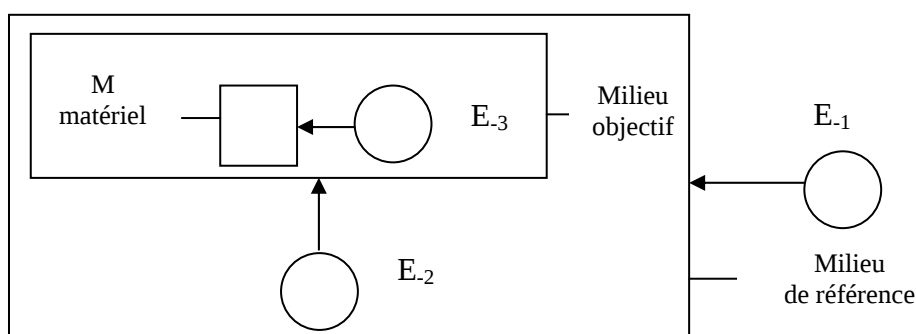
Niveau (M-1) : Le sujet apprenant et le milieu de référence

E₋₃ élève objectif ;

E₋₂ élève agissant ;

(M₋₃, E₋₃) définissent le milieu objectif ;

(M₋₂, E₋₂) constitue le milieu de référence pour le sujet apprenant E₋₁.



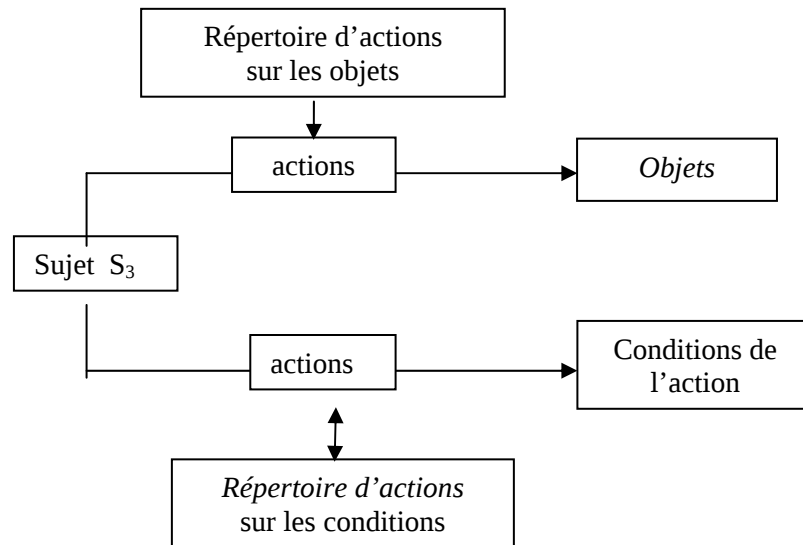
Le sujet apprenant et le milieu de référence.

La situation vise à permettre au sujet apprenant, E₋₁, d'analyser sa suite de décisions. Pour lui, les conditions font partie de son objet d'étude. Il a un *répertoire* de règles d'apprentissage, de connaissances, de savoirs.

Il va prendre en compte les objets, les règles mais également les conditions de son travail. Cette prise en considération par le sujet apprenant, de ses actions sur les objets en regard des conditions se situe à un deuxième niveau par rapport à l'analyse de ses actions sur les objets.

Elle est déterminante en ce qui concerne le rapport du sujet à la situation.

Nous allons essayer de modéliser les différentes formes d'actions du sujet apprenant, en proposant le schéma suivant :



Modélisation des différentes formes d'actions du sujet apprenant.

Le sujet apprenant est amené à produire deux types d'actions qu'il convient de distinguer d'une part une action sur les objets, d'autre part une action sur les conditions de l'action, c'est-à-dire que l'élève est amené à envisager une modification des conditions dans lesquelles il va utiliser les objets.

Ce qui fait fonctionner cet outil d'analyse, c'est le fait que l'on traduise les situations en termes de conditions. Le sujet apprenant peut, dans certaines conditions, être amené à produire un programme d'actions finalisé détachable des conditions défini ainsi :

Le programme d'actions finalisé, établi par un élève, est détachable des conditions (non pertinentes) lorsque l'élève est capable de le simuler i.e. de simuler son fonctionnement dans une situation où justement il n'y a pas de feed-back.

Par exemple la formulation, dans le cas général et non plus dans un cas particulier, d'un programme d'actions finalisé exige, dans une certaine mesure, une transformation des programmes d'actions établis dans des cas particuliers en programme détachable des conditions.

Dans ce cas le sujet a produit un raisonnement; de plus il a pris conscience des conditions de fonctionnement des connaissances sur lesquelles s'appuie son raisonnement

Analyse de la situation de formulation lors de la séquence « le nombre le plus grand » :L'enseignant souhaite faire dévolution de la situation de formulation afin que les élèves s'engagent dans l'écriture d'une méthode assimilable à un programme d'action finalisé détachable des conditions c'est-à-dire utilisable pour obtenir le nombre le plus grand quelle que soit la suite de 5 nombres proposée.

Le sujet apprenant va devoir prendre en compte les objets, les règles mais également les conditions dans lesquelles les élèves ont produit chacun des programmes d'actions. Pour produire, à l'aide de ses connaissances, un moyen de comprendre, l'élève apprenant fait une action sur les connaissances mais aussi une action sur lui-même.

Cette prise en considération par le sujet apprenant, de ses actions sur les objets en regard des conditions se situe à un deuxième niveau par rapport à l'analyse de ses actions sur les objets nécessaire à la communication de son programme d'actions (phases 4 et 8 de la séance 1).

L'objectif est de faire produire aux élèves un programme d'actions détachable des conditions dont le domaine de validité soit le plus étendu possible.

Le répertoire d'objets d'un sujet est constitué de noms d'objets, dans le cas de l'écriture de la « méthode » l'une des difficultés c'est précisément la désignation des nombres dans le cas général.

Les élèves peuvent faire référence soit à l'ordre dans lequel les nombres ont été donnés soit à leur rang (le plus grand, le plus petit) en référence à la bande numérique (suite ordonnée des entiers naturels).

La phase de formulation des méthodes vise effectivement à permettre aux élèves une prise de position sur l'action et donc une prise de conscience des décisions sur lesquelles reposent leurs actions. Ceci afin que les élèves puissent produire des procédures dont la validité pourra être mise en débat.

Episode 1 relatif à la phase 11 de la séance 2 (formulation des méthodes) méthode d'Hélène

0.41	M : Qui propose sa méthode ? Vous allez nous lire ce que vous avez écrit.	
	M : On va arranger, je vais les écrire bien... les phrases, on va demander à Hélène. Allez vas-y Hélène.	

	Hélène : Je prends deux plus grands chiffres et je les multiplie. Après je refais pareil. Le dernier nombre qui me reste, je le multiplie.	Hélène formule sa méthode
	E : Eh, comme moi !	
	M : Alors j'écris, vous vérifiez pour voir si c'est bien ça. Alors on prend les deux plus grands	
	Hélène : Deux plus grands chiffres comme ceux que tu nous as donnés	
	M : Les deux plus grands ?	
	Hélène : Deux plus grands.	
	M : Tu prends les deux plus grands ou deux grands au hasard, qu'est-ce que tu veux dire ?	
	Un élève : Mais ça ne veut pas dire forcément les deux plus grands	La maîtresse écrit au tableau :
	Myriam : Ben oui, elle dit « je prends deux plus grands chiffres »	<i>On prend les deux plus grands nombres et je les multiplie. Après je fais pareil. Le dernier nombre qui me reste je le multiplie.</i>
	M : Myriam, merci ! Je prends les deux plus grands nombres et je les multiplie (et écrit cette même phrase au tableau en même temps).	
	Hélène : Après je refais pareil.	
	Un élève : Comment ça, elle reprend...	
	Hélène : Après le dernier nombre qui me reste je le multiplie et....	
	M : Et je trouve, je me doute que tu trouves...	
	M : Le résultat, je suppose ?	
	M : Et tu trouves ce que tu veux trouver.	
	M : Tu as vérifié ?	
	Hélène : C'est ce qui m'a permis de trouver le maximum pendant les deux parties.	

Lorsque l'enseignante interroge Hélène à propos de la validité de sa méthode, plus précisément sur le fait qu'elle ait effectué une « vérification », elle a recours à une preuve pragmatique en indiquant « C'est ce qui m'a permis de trouver le maximum pendant les deux parties ».

Episode 2 relatif à la phase 11 de la séance 2, formulation des méthodes, méthode de David et Marc

	M : David...c'est David tout seul ?	La maîtresse interroge un autre élève : David.
	Un élève : Non avec Marc.	

	David et Marc : On multiplie les deux plus grands nombres	
	M : Est-ce que tu peux le dire d'abord on verra si c'est vrai.	
	M : Oui vas-y !	
	David et Marc : On multiplie les deux plus grands nombres, on multiplie les deux plus petits ensemble, on multiplie les autres et on trouve...	
	M : Tu peux me relire car je n'ai pas entendu la fin ?	
	David : On multiplie les deux plus grands, on multiplie les deux plus petits, tu multiplies entre eux les résultats et tu multiplies par celui qui reste, c'est ça.	
	M : Ensemble ?	
	David : Oui, on multiplie les autres et on multiplie les résultats.	
	Un élève : C'est quoi les autres ?	
	David : C'est ceux qui restent !	
	M : Ecoute, je n'ai pas très bien compris ce que cela signifiait	
	Un élève : Eh bien, on multiplie ceux qui restent, les nombres qui restent.	
	M : Je ne comprends pas très bien ce que tu veux dire...ce qui reste, quoi ? Le nombre qui reste.	La maîtresse écrit : <i>David et Marc :</i> <i>On multiplie les deux plus grands, on multiplie les deux plus petits, on multiplie les résultats entre eux puis on multiplie par celui qui reste.</i>
	David : Les nombres qui restent	
	M : Et il en reste combien ?	
	David : Un	
	M : Alors tu multiplies.	
	M : Bon, on joue avec cinq nombres !	
	M: Tu prends les deux plus grands, les deux plus petits. Tu prends les deux plus petits, tu les multiplie, tu multiplies entre eux les résultats et tu multiplies par celui qui reste, c'est ça ?	
	David : Oui	
	M : On multiplie les deux plus grands, on multiplie les deux plus petits, on multiplie les deux résultats entre eux. C'est ça que tu n'as pas su dire. Tu comprends, vous comprenez ce que ça veut dire « on multiplie les résultats entre eux »?	

Les deux groupes précédents témoignent de la difficulté des élèves à désigner les nombres dans la formulation de la méthode (dans le cas général). Les élèves de ces groupes ont choisi de se référer à la suite des nombres (droite numérique).

**Episode 3 relatif à la phase 11 de la séance 2 (formulation des méthodes)
méthode d'Elsa et comparaison des méthodes**

	M : Toi, Elsa tu dis que c'est la même méthode	
	Elsa : Pas tout à fait. Eux, ils multiplient les deux plus petits, moi, les deux qui restent	
	M : Tu penses que ça a de l'importance ?	
	Elsa : Non.	
	M : Ca n'a pas du tout d'importance, tu penses que ta méthode est la même que celle de David et Marc.	
	Elsa : Non, moi je n'ai pas tout à fait de méthode. Moi c'est comme à la méthode d'Hélène, de David et de Marc. On trouve le même résultat que ça soit dans n'importe quel sens, on trouvera toujours le même résultat.	
0.48	M: Ah ! Dis-le ! Comment tu peux le dire ? Toi tu penses que ce n'est pas la peine de dire le plus grand ou le plus petit. Dis-nous ce que tu as écrit.	
	Aline: Il faut multiplier tous les nombres entre eux.	Formulation par un élève, Aline, d'une méthode équivalente aux précédentes et dont la formulation est plus simple
	M : Il faut que tu multiplies tous les nombres entre eux, c'est ça ?	
	Aline: Oui, qu'on multiplie les deux plus grands ou les deux plus petits ensemble on trouvera toujours le même nombre.	
	M : Est-ce que vous êtes d'accord avec ce qu'elle dit ?	
	M : C'est pareil mais c'est la manière la plus simple de l'écrire.	
	M : A part qu'il y a une idée en plus : ce n'est pas la peine de chercher les plus grands et les plus petits : Est-ce que vous êtes d'accord que	

	pour le résultat des calculs c'est la même méthode ? Qui a trouvé une autre méthode ? Tout le monde utilise la multiplication ?	
	E : Eh oui, car quand on fait moins, le nombre baisse ; quand on fait divisé, le nombre baisse et quand on fait plus, il augmente qu'un petit peu.	
	M : « Quand on fait plus il augmente un petit peu, et quand on fait fois, il augmente beaucoup », vous êtes d'accord ?	
	M : Vous pensez que c'est une bonne méthode et que ça va marcher tout le temps ? Que je peux vous donner n'importe quelle série de cinq nombres, c'est bon ? Vous voulez acheter cette méthode ?	La maîtresse écrit la proposition : <i>Il faut multiplier tous les nombres entre eux dans n'importe quel ordre.</i>

Les trois méthodes notées au tableau par la maîtresse, à l'issue de la séance 1, sont :

Méthode 1(Hélène) : *Je prends les deux plus grands nombres et je les multiplie. Après je refais pareil avec les deux plus petits. Le dernier nombre, qui me reste, je le multiplie.*

Méthode 2(David et Marc) : *On multiplie les deux plus grands nombres, on multiplie les deux plus petits ensemble. On multiplie les résultats entre eux et on multiplie avec celui qui reste.*

Méthode 3 (Anne) : *On multiplie tous les nombres entre eux.*

(Qu'on multiplie les plus grands ou les plus petits on trouvera toujours le même nombre.)

Il convient à présent de revenir sur les conditions dans lesquelles ces formulations ont été élaborées

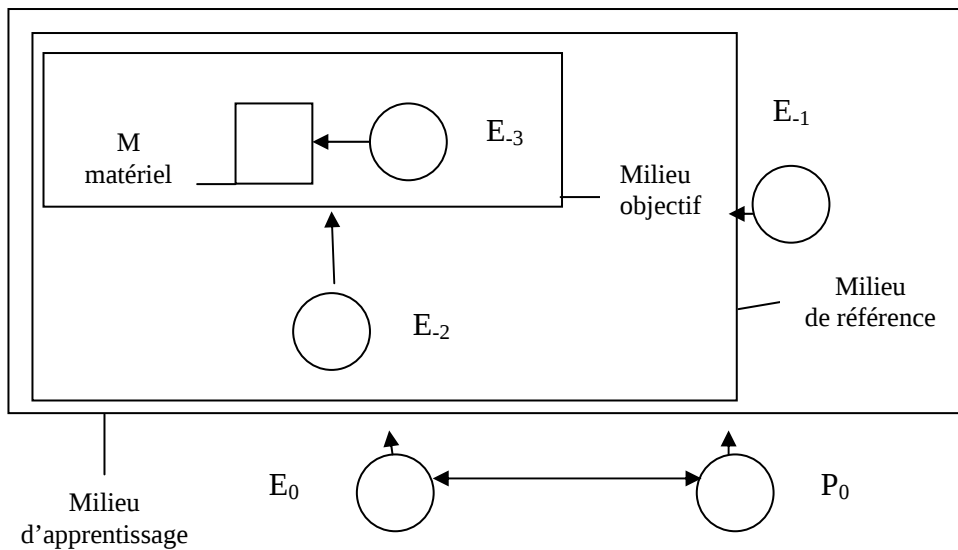
Les méthodes ont été produites par les élèves et elles résultent d'un travail de formulation fondé sur l'écriture de méthode.

1. Elles ont fait l'objet d'une reconnaissance formelle par l'enseignant et par conséquent elles appartiennent au *répertoire didactique* de la classe de sorte qu'elles sont utilisables par l'ensemble des élèves.
2. Elles sont assimilables à des assertions dans le sens où elles sont correctement formées et consistantes.

Lors des phases suivantes tous les élèves vont devoir s'approprier ces méthodes c'est-à-dire à faire le lien entre leur(s) formulation(s) et leur(s) usage(s) et ainsi percevoir que ces formulations sont équivalentes.

4.4 L'élève et la situation d'apprentissage

Niveau (M0) L'élève et la situation d'apprentissage



Le niveau (M0) est celui des assertions. Au niveau précédent, (M-1), nous étions au niveau des relations mathématiques, la vérité était évidente, la relation était vraie ou fausse mais il n'y avait pas de jugement. Or dans la situation étudiée l'autre arrive avec une culture, avec des exigences qui ne sont pas celles de la situation. Par conséquent à ce niveau, l'action est remplacée par des déclarations sur des variables, il s'agit de déclarations sur les rapports aux connaissances.

L'élève est susceptible de produire une procédure au sens suivant :

C'est un programme d'actions finalisé détachable des conditions tel que le sujet peut le relier à son champ de pertinence et d'adéquation. Le champ de pertinence et d'adéquation du programme sont les connaissances des conditions dans lesquelles son usage s'avère pertinent et adéquat. La prise de conscience par le sujet du domaine de validité du raisonnement produit, permet d'envisager l'usage de ce dernier dans des situations de preuve.

A quelles conditions les raisonnements produits par les élèves en situation d'actions ou de formulation peuvent-ils être utilisés par les élèves dans des situations de preuve ?

Le fait de formuler ces raisonnements est une condition nécessaire mais ce n'est pas une condition suffisante. Brousseau (1997) montre que la formulation ne renforce pas la connaissance et la conviction des élèves.

Présentation d'un élément d'analyse de la situation de validation de la séquence « Le nombre le plus grand » :

Méthodes proposées et écrites au tableau à l'issue de la phase 3 de la séance 2

Méthode 2 (Jérémy, Aline, Mélanie, Sylvain) : On multiplie tous les nombres entre eux dans n'importe quel ordre sauf avec le 0 et le 1 on fait plus.

Méthode 3 (groupe d'Anne) : On multiplie tous les nombres entre eux sauf quand il y a un ou plusieurs 1, on l'additionne ou on les additionne avec le nombre le plus grand et on multiplie tout après.

Méthode 1 (proposée à la séance 1-« Aline et les douze ») : *On multiplie tous les nombres entre eux.*

La méthode 1 a été produite à l'issue de la séance 1 ; l'enseignante conserve son écriture au tableau. A l'issue de la phase de présentation des méthodes (séance 2 phase 4) l'enseignante propose une phase de jeu : phase 5 : Phase de jeu. 5,2,4,0,3.

L'enseignante met les élèves en situation de jeu de manière à ce qu'ils éprouvent les différentes méthodes et qu'ils débattent de la validité des méthodes 1, 2 et 3. La suite de nombres qu'elle leur propose contient un « 0 ».

Phase 6 : Présentation des résultats obtenus à partir des méthodes

0.21.06	M : Allez stop ! Qui a utilisé la méthode d'Aline et les douze ? Combien trouves-tu ?	Suite à la phase de jeu avec la suite 5,2,0,4,3
	Un élève : 120	
	Des élèves : Non 0.	
	M : Explique-lui !	
	Un autre élève : Non 0 car 5 fois 2 ,fois3, fois 4, fois 0 égal 0.	
	Un autre élève : Non ! Alexandra, tu as fais 5 fois 2 fois 4 fois 3 et après fois 0. Si tu multiplies 5 fois 2 fois 4 fois 3 fois 0, tu trouveras 0.	
0.22.03	M : Est-ce que c'est vrai ? Qu'est-ce qu'elle dit la méthode d'Aline ?	
	Un élève : Qu'il faut multiplier tous les nombres entre eux.	
	M : Tous les nombres. Il ne faut pas laisser le 0 de côté car la méthode d'Aline dit qu'il faut multiplier tous les nombres entre eux. Est-ce que ceux qui ont appliqué la méthode d'Aline vous avez trouvé quelque chose d'intéressant ?	
	Des élèves : 127, 117, 120 (les propositions fusent)	

0.22.36	M : La méthode d'Aline, au début on croyait que c'était bien tout le temps. Vous savez comment ça s'appelle quelque chose...c'était bien pour faire quoi ?	
	Un élève : Trouver le plus grand nombre.	
	Un élève : Pas avec 1 et 0.	
0.22.58	M : Une méthode qui marche pour Aline...il aurait fallu dire : pour trouver le plus grand nombre, il faut multiplier ...ça s'appelle un théorème. Or on vient de trouver un exemple qui dit que le théorème d'Aline ça ne va pas : c'est un contre-exemple. Est-ce que vous comprenez ce que ça veut dire ? C'est un exemple qui dit « ça démolit ça ! ».	
0.23.26	Un élève : Cette méthode est bonne pour trouver le plus petit nombre.	
	M : Ah ça, ça démolit le théorème d'Aline. Est-ce que...est-ce que vous avez essayé un autre théorème ? Est-ce que ceci fonctionne avec ce théorème ?	La maîtresse désigne la méthode 2 (Jérémy, Aline, Mélanie, Sylvain) écrite au tableau.
	Un élève : Oui.	
	M : Pour trouver le nombre le plus grand on multiplie les nombres entre eux sauf avec le 0 et le 1 qu'on ajoute.	Elle lit à haute voix la méthode 2.
0.23.52	Anne : Moi je rajoute aussi de mettre 0 ; Mais je ne trouvais pas ça bien utile mais je rajoute aussi « quand il y a 0 on additionne ».	
	M : Ah, tu veux modifier pourquoi ?	
0.24.02	Anne : Parce que moi je n'y avais pas pensé, je me suis dit « on ne va pas mettre un 0 » mais si on fait fois 0 quand même ça fait 0 toujours !	
	Emericq : Mais ça ne change rien parce que si on additionne, ça change rien	
0.24.21	M : Oui, mais tu te souviens que dans le jeu, on doit utiliser tous les nombres. Il faut en faire quelque chose. Puisque vous avez vu un petit peu ce qu'il faut faire, maintenant est-ce que vous êtes capable d'écrire ce qu'il faut faire ? Allez-y !	

Les objectifs de cette phase de jeu (phase 5) sont :

1. Permettre aux élèves de se familiariser avec les méthodes proposées plus précisément faire le lien entre la formulation d'une méthode et son usage (identifier, au travers du programme d'actions mis en œuvre, la « méthode » correspondante sous réserve qu'elle ait été institutionnalisée précédemment).
2. Faire prendre conscience aux élèves, par l'expérimentation sur une suite donnée, de la non-validité de certaines méthodes (elles ne permettent pas de produire le nombre le plus grand).
3. Introduire une nouvelle notion en mathématique : le contre-exemple ; en établissant que pour la suite donnée (5,2,4,0,3) » la méthode d'Aline et les douze ne permet pas d'obtenir le nombre le plus grand (présentée comme un « exemple » qui « démolit le théorème d'Aline et les douze »).
4. Faire prendre conscience à certains élèves du fait que leur méthode ne prend pas en compte les suites de nombres qui contiennent un 0. Et par conséquent qu'il est nécessaire de réfléchir à l'élaboration et à l'écriture d'une nouvelle méthode (qui permette de traiter les cas où la suite comporte un ou plusieurs 0).

A l'issue de cette phase le groupe d'Anne communique une nouvelle méthode

Phase 7 : Proposition d'une nouvelle méthode (par le groupe d'Anne M'3)

M'3(groupe d'Anne) : *On multiplie tous les nombres sauf quand il y a un ou plusieurs 1 ou un ou plusieurs 0 on les additionne.*

Phase 8, épisode 1

0.29.11	Un élève du groupe : Parce que là on dit pour 1 avec 1 si ça marche pas....et tout.	
	M : Tout à fait si tu trouves que c'est bon tu le gardes.	
	Un élève du groupe : Bon moi je le garde.	
	M : Si on trouve que c'est bon on le garde.	
	Anne : Eh ! Denise, moi je trouve que la méthode d'Aline, elle est un petit peu incomplète.	
	M : On l'a jetée, on a dit c'est pas bon.	
	Anne : Non mais la deuxième.	

0.29.30	M : Qu'est-ce qu'elle a d'incomplet à ton avis ?	
	Anne : Eh ! Denise parce que si on multiplie tous les nombres entre eux et qu'après on additionne le 1 ça fait un nombre plus petit que si d'abord ...	
0.29.42	M : On refait un jeu !	
	Un élève : C'est ce que j'ai fait Denise on trouve un nombre plus petit.	
0.29.50	M : Chut ! Chut, chut... on écoute ce que dit Elsa. S'il vous plaît deux minutes et après on joue.	
0.30.00	Elsa : Si on additionne le 1 à la fin il y est qu'une fois. Si par exemple on l'additionne au plus grand et qu'on le multiplie il y est plusieurs fois, il est répété.	
	Un élève : Mais non.	
	Anne : Mais si ! Eh ! C'est ce que je dis.	
	Elsa : 8 plus 1 ça fait 9, mais si je fais après 9 fois 5, le 1 il y est plusieurs fois ; il y est 5 fois dedans, que si je l'additionne à la fin, il y est qu'une fois.	
0.30.28	Anne : Eh c'est ce que j'ai dit ! Même qu'elle a trouvé 481 et moi j'ai trouvé 540.	
	Un élève : Moi j'étais certain qu'on le multipliait	
	M : D'accord on joue et on va mettre 1 dedans.	

Dans le débat relatif aux méthodes, phase 7, épisode 1 (ci-dessus) une élève, Elsa, établit la preuve que dans le cas où la suite des nombres comporte un 1, la méthode du groupe d'Anne (On multiplie tous les nombres sauf quand il y a un ou plusieurs 1 ou un ou plusieurs 0 on les additionne) permet d'obtenir un résultat plus grand que celle proposée par Jérémy, Aline, Mélanie et Sylvain (On multiplie tous les nombres entre eux dans n'importe quel ordre sauf avec le 0 et le 1 on fait plus).

Sa preuve fait référence aux sens des opérations. Cependant elle ne parvient pas à convaincre certains de ses camarades. Elle ne recourt pas à l'illustration de la preuve par l'expérimentation c'est-à-dire par un exemple sur une suite de nombres qui permettrait à l'ensemble des élèves de comparer les résultats obtenus par chacune des méthodes et ainsi de percevoir la validité de sa déclaration.

Conclusion

L'étude des situations, et plus précisément des conditions qui définissent chacune d'elles, nous a permis d'analyser les différentes actions et les différentes formulations des élèves et de définir, à quelles conditions certaines d'entre elles sont assimilables à des raisonnements. Le schéma de la structuration du milieu est l'outil approprié, non seulement pour d'étudier les conditions théoriques du fonctionnement des raisonnements pour chacune des situation emboîtées, mais encore pour analyser a posteriori, les actions et les interactions des élèves, en situation d'action, de formulation et de validation.

L'analyse détaillée de la séquence a mis en évidence la possibilité pour les élèves de pratiquer le raisonnement c'est-à-dire de produire des raisonnements, dans des conditions qui le justifient véritablement et non artificiellement. De plus les situations, dévolues aux élèves, leur ont permis de se rendre compte, par eux-mêmes, suite aux rétroactions du milieu ou aux interactions avec leurs pairs, de la validité ou de la non validité des raisonnements qu'ils ont produits. Ainsi les élèves ont pu progresser dans la pratique du raisonnement.

Cette analyse, en théorie des situations didactiques, a montré que les élèves ont produit de nombreux raisonnements dans des fonctions très diverses telles que :

- prendre des décisions afin de produire une réponse et justifier la validité de celle-ci ;
- élaborer et écrire une méthode « générale » lors de la situation de formulation individuelle « le concours de propositions » ;
- argumenter et débattre de la validité et de la pertinence des méthodes de manière à formuler une méthode qui soit la plus complète possible c'est-à-dire qui intègre les cas particuliers.

Cette étude tend à montrer la possibilité pour les élèves de percevoir d'une part le rôle central du raisonnement dans l'activité mathématique, d'autre part ce qu'est « faire des mathématiques » au sens de conjecturer. Il reste cependant de multiples questions à étudier notamment celles concernant la possibilité pour l'élève de réutiliser, dans une situation de preuve, des raisonnements élaborés en situation de formulation.

Bibliographie

- BROUSSEAU G. (1988), La relation didactique: le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, **9.3**, 309–336.
- BROUSSEAU G. (1997), Théorie des situations didactiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage.
- BROUSSEAU G. & CENTENO J. (1991), Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, **11.2**, 167–210.
- BROUSSEAU G. & GIBEL P. (2002), *Influence des conditions didactiques sur l'apparition, l'usage et l'apprentissage des raisonnements en classe*, Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, ARDM et IREM Paris 7.
- BROUSSEAU G. & GIBEL P. (2005), Didactical Handling of Students, Reasoning Processes in Problem Solving Situations, **59.1**, *Educational Studies in Mathematics*, KLUWER, 13–58.
- DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine; Registres sémiotiques et pensée humaine*, Peter Lang, Berne.
- DUVAL R. (1991), Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics*, **22**.
- DURAND-GUERRIER V. (1996), *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*, Thèse de doctorat soutenue à l'Université Claude Bernard, Lyon I.
- GIBEL P. (2004), *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnements dans la relation didactique en classe de mathématiques à l'école primaire*, Thèse de Doctorat, soutenue à l'Université de Bordeaux 2.
- GLAESER G. (1999), *Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- MARGOLINAS C. (1989), *Le point de vue de la validation: essai d'analyse et de synthèse en didactique des mathématiques*, Thèse soutenue à l'Université Joseph Fourier, Grenoble.
- MARGOLINAS C. (1993), *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*, Edition La Pensée Sauvage, Grenoble.
- MARGOLINAS C. (1998), Étude de situations didactiques “ordinaires” à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur, *Actes de la 8^{ème} Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques*.
- OLERON P. (1977), *Le raisonnement*, Presses Universitaires de France, 1977.

PATRICK GIBEL

LACES, équipe DAESL, Université Bordeaux 2
patrick.gibel@aquitaine.iufm.fr

MAIS NON, MARINA !

Abstract. Maieutics live - The authors had the chance to observe a class of 6th grade students in an elementary school in Mexico City. During the lesson observed, which was also video-taped and transcribed, the notion of speed was introduced to the children. The teacher, well-experienced, did not follow the pedagogical prescriptions of collaborative work suggested by the text book presently in use, but rather applied a discursive teaching method in the mode of Socrates' Maieutics. Her main idea was to induce her students to use the ratios that arise from distance divided by time. However during the lesson, difficulties arose in the understanding and application of those ratios. One outstanding student, Marina, proposed a proportionality chart that the teacher initially deemed to be false, rejecting the proposal and failing to give it a place in her teaching process. The article analyzes the tangible parallel between the lesson observed and Socrates' interview of the slave in Plato's *Menon*, and highlights a few exceptions that are interesting in view of their didactic significance.

Résumé. Les auteurs ont pu assister à une classe en sixième année de scolarité à Mexico. Cette classe, dont le thème était l'introduction de la notion de vitesse, a été enregistrée et transcrite. Quoique le manuel scolaire propose une activité prévue pour du travail en groupe suivi de mise en commun, la maîtresse, une enseignante expérimentée, lui préféra un enseignement dialogué, sur le mode de la maïeutique socratique. Elle avait pour objectif d'amener ses élèves à recourir aux rapports entre distances et temps. Des obstacles apparurent durant la classe et une élève douée, nommée Marina, fit une proposition de table de proportionnalité. La maîtresse l'avait tout d'abord crue fausse et l'avait donc rejetée, avant de reconnaître son exactitude sans pour autant lui donner droit de cité. Dans l'analyse de la leçon, nous notons un parallélisme frappant avec le dialogue entre Socrate et l'esclave dans le *Ménon* de Platon avec toutefois quelques exceptions qui, justement, méritent de retenir l'attention.

Mots-clés. Sixième année d'école, observation de classe, maïeutique, proportionnalité, vitesse.

Introduction

Plusieurs des courants actuels de l'enseignement des mathématiques peuvent nous amener à accorder à la maïeutique socratique une place dans la réflexion didactique d'aujourd'hui : l'enseignement dialogué bien sûr, mais aussi l'enseignement fondé sur la résolution de problèmes, ainsi que la RME (Real Mathematics Education)¹ et l'usage de la modélisation. Dans tous ces cas, le présupposé pédagogique est qu'une partie importante des acquisitions mathématiques de l'élève ne lui est pas

¹ Pour une référence sur RME, voir par exemple Gravemeijer & Doorman (1999).

donnée de l'extérieur, mais au contraire résulte de son activité intellectuelle propre. On peut aussi considérer que le principe d'exploitation des zones de développement proximal prôné par Vygotsky (1985, en traduction française) n'est pas étranger à un tel point de vue, puisqu'il s'agit de développer la culture mathématique sur la base des savoirs déjà en place et non pas d'entreprendre une construction de toutes pièces, comme des tenants des mathématiques modernes ont pu prétendre l'instituer. Un texte considéré comme fondateur de la maïeutique est celui du dialogue entre Socrate et l'esclave présenté par Platon dans "Ménon ou de la vertu". Dans la maïeutique socratique, deux éléments sont essentiels pour la construction du savoir par l'étudiant lui-même : ses réminiscences et la prise de conscience de ce qu'il ignore.

Dans le cadre de recherches entreprises sur le thème des convictions des professeurs à propos de l'enseignement des mathématiques et de leurs conséquences dans la conduite des classes, des contacts réguliers sont entretenus avec plusieurs enseignants autour de diverses de leurs activités professionnelles : préparation de classes, élaboration d'évaluations, correction de réponses à des exercices,... D'autres articles aborderont ces aspects, mais celui-ci se limite à l'observation d'une seule classe, à laquelle les auteurs de l'article ont eu l'occasion d'assister et qui a été enregistrée en vidéo, puis transcrite. Ce sont les parallèles entre le déroulement de cette classe et le dialogue du Ménon qui nous ont paru particulièrement remarquables et que nous souhaitons développer et commenter dans cet article.

1. Déroulement d'une classe

On peut considérer que les conditions de l'observation n'ont pas troublé de manière sensible le déroulement habituel de la classe. Nous avons choisi d'observer une classe d'une enseignante avec qui le contact était établi depuis un certain temps, qui conduisait ses classes avec professionnalisme et dont les élèves obtenaient des résultats remarquables aux évaluations externes de fin d'études primaires. La classe qui a été observée se situe en effet en sixième année d'une école de la "colonia" (l'équivalent d'un arrondissement pour Paris) Iztapalapa de Mexico ; cette classe fait encore partie au Mexique de l'enseignement du premier degré, alors que par exemple en France il s'agirait de la première année du collège. Par ailleurs les élèves, habitués à la présence dans la classe de matériel informatique et de vidéoprojection, n'ont pas été perturbés par l'enregistrement vidéo, mais l'ont rapidement intégré à leur environnement scolaire usuel.

Le sujet de l'étude proposée aux élèves dans la classe est tiré du manuel national mexicain d'enseignement des mathématiques. Il s'agit de la leçon 80, qui porte sur les notions de distance, temps et vitesse. L'orientation générale du manuel est d'introduire les concepts par des activités ouvertes, dans laquelle les élèves peuvent

facilement s'engager, mais qui amènent pour être systématisées à institutionnaliser un savoir mathématique précis, dans notre cas la proportionnalité pour des mouvements uniformes. Aucune piste de réflexion n'est au départ privilégiée par le manuel, nous le verrons pour le sujet d'étude observé, mais il est important de noter que les enseignants peuvent évidemment choisir d'adopter une autre ligne de conduite. Au passage, il vaut peut-être la peine de rappeler ici ce qui est sans doute une banalité dans les études didactiques : si, dans leur très grande majorité, les professeurs considèrent qu'ils sont tenus de respecter scrupuleusement les contenus mathématiques des programmes et des ouvrages scolaires, ils se sentent moins liés par toute préconisation d'application dans leurs classes.

Le manuel scolaire présente la table de valeurs suivantes, supposée indiquer des temps de natation réalisés par des jeunes gens.

	Distance	Temps			
		Heures	Minutes	Secondes	
Amalia	100 mètres	0	2	0	
Beto	50 mètres	0	0	50	
Catalina	150 mètres	0	2	51	
Darío	1500 mètres	0	40	0	

Les questions posées dans le manuel à propos de cette table de valeurs sont d'abord relatives aux données elles-mêmes : Qui a nagé la plus grande distance ? Qui a nagé durant le temps le plus court ? Ensuite, il s'agit de déterminer qui a nagé le plus vite. On pourra observer que la variable temps est relevée sur plusieurs colonnes, et qu'une ultime colonne, vide, pourra permettre d'accueillir les valeurs calculées des vitesses.

Le manuel préconise un travail individuel ou en petits groupes, suivi d'une confrontation dans la classe des divers résultats obtenus et des méthodes employées (la formulation de cette consigne est évidemment mise à la portée des élèves, sous forme de la demande d'expliquer comment on a fait pour obtenir un résultat). D'autres activités suivent cette question sur les nageurs, par exemple des questions relatives à des parcours à bicyclette, mais nous ne les rapporterons pas ici.

1.1. L'enseignante et sa classe

En fait, l'enseignante et ses élèves sont habitués à une conduite collective de la classe. La table de valeurs est projetée sur écran (le manuel est enregistré dans des fichiers informatisés du programme mexicain intitulé Enciclomedia) et tous les élèves lisent en chœur les énoncés des questions posées. S'ils le peuvent, ils

répondent immédiatement. Ce qui fonctionne est donc un enseignement dialogué sous forme de questions-réponses, plutôt que la formule de temps de réflexion suivis de mises en commun proposée par le manuel. Les premiers échanges entre l'enseignante et les élèves donnent la tonalité.

Chœur des élèves. - *Lequel des quatre a nagé la plus grande distance ? Dario. Qui a nagé le moins longtemps ? Beto.*

Maîtresse. - *Voyons. Quelle est la première question ?*

Chœur des élèves. - *Lequel des quatre a nagé la plus grande distance ? Dario.*

Maîtresse. - *Dario.*

Chœur des élèves. - *Qui a nagé le moins longtemps ? Beto. Qui a nagé le plus vite ?* Une majorité avance sans trop de conviction la réponse *Catalina*.

Maîtresse. - *Qui a nagé le plus vite ?*

Chœur des élèves. - *Beto.*

A juste titre, la réponse ne satisfait pas la maîtresse, car elle a été donnée à l'instar des questions précédentes sans justification, alors qu'au contraire de celles-là, elle n'est pas directement apparente au vu des valeurs données dans la table. La maîtresse va donc conduire une phase de recherche de ce qui peut justifier la réponse à la question des vitesses. D'emblée, va se dérouler un épisode au cours duquel l'élève Marina va fournir une piste qui sera malheureusement méconnue, car elle n'entre pas dans le cadre de pensée de la maîtresse. Nous sautons cet épisode, intitulé *l'épisode incombant à Marina*, sur lequel portera tout le paragraphe suivant, et passons à l'épisode suivant, dans lequel les échanges mettent en évidence un fonctionnement sur le mode de la maïeutique.

Maîtresse. - *Que pouvons-nous faire pour savoir combien de secondes ont nagé Amalia, Catalina et Dario ?*

Elève D. - *Diviser la distance par le temps.*

Maîtresse. - *Diviser la distance par le temps ! Bien sûr !*

Ce bref échange mérite un commentaire, car il joue un rôle essentiel par rapport au déroulement de la classe. La maîtresse a voulu que soit d'abord réglée la question de la variable temps en se rapportant à une seule unité, la seconde, alors que le tableau affiche des minutes et des secondes (il y a même une colonne pour des heures, mais ne contenant que des 0). Mais un élève fait alors une réponse qui correspond non pas à cette question, mais à une opération ultérieure. Pourquoi alors la maîtresse approuve-t-elle alors cette intervention au lieu de relever qu'elle n'est pas (encore) pertinente ? Socrate, lui, veillait à ne pas laisser passer d'erreur. Mais le fait qu'une clé pour une solution soit formulée par un élève n'a pu manquer de

focaliser l'attention de la maîtresse, au point d'estomper tout examen critique. La réminiscence a donc ici pris le pas sur la prise de conscience de ce qui est erroné. Tout se passe comme si la maîtresse s'était dit : « Puisque réminiscence il y a de la méthode que je veux précisément faire utiliser, relevons la tout de suite avant qu'elle ne s'évanouisse dans la nature. » Le savoir mathématique que la maîtresse souhaitait voir enfanté par la classe semble avoir donné lieu à un accouchement rapide. Difficile de ne pas accueillir le bébé ! Toutefois, le problème préalable de l'unité de temps pour diviser reste à traiter.

Maîtresse. – *A présent, il y a ici un détail : on voit des minutes et des secondes... Que pouvons-nous faire pour rendre tout cela plus facile ? Convertir quoi ?*

Une élève. – *Convertir tout en secondes.*

Maîtresse. – *Tout en secondes, bien vrai ? Voyons, dans la première ligne il y a... deux minutes. Combien cela fait-il de secondes ? Notez ! Tu as déjà compris D, passe au tableau !*

– L'élève D passe au tableau et, avec la contribution de plusieurs de ses camarades pour effectuer les opérations, réalise la table de valeurs suivantes, avec conversion des temps en secondes et calcul des vitesses. Nous traduisons les unités (secondes : *sec* pour *seg* en espagnol, et *m par sec* pour *m por seg* en espagnol), mais y conservons en notation américaine les valeurs décimales obtenues par les élèves, par exemple .83 qui serait 0,83 en notation européenne. Il se peut en effet que la notation américaine où n'apparaît pas le 0 de la partie entière accroisse le risque d'erreur dans des comparaisons de valeurs. On notera plus avant qu'en enseignante expérimentée, la maîtresse est consciente de ce risque.

100	120	.83 m×sec
50	50	1 m×sec
150	171	.87 m×sec
1500	2400	.62 m par sec

Maîtresse. – *Comment répondre ainsi à la dernière question ? Qui a nagé le plus vite ?*

Chœur des élèves. – *Dario.*

Un commentaire s'impose ici pour plusieurs raisons. Bien sûr, la dernière réponse Dario est fausse et nous y reviendrons. Mais il convient tout d'abord de noter que la table est dépourvue d'indication des variables considérées : distances, temps et vitesses. L'attention ne se centre alors pas nécessairement sur la seule dernière colonne quand il y a lieu de considérer des vitesses. De plus on notera des erreurs

dans la désignation de l'unité pour les vitesses : Seule la dernière n'est pas fausse, mais n'est pas non plus conforme à la notation officielle qui est m/sec (ou *m/seg* pour les hispanisants). La maîtresse ne corrige pas et n'apporte aucune modification à la table de valeurs réalisée par les élèves.

Il est remarquable que, dans le *Ménon* de Platon, une difficulté concernant les unités soit également présente. Il y est question d'aires, et les surfaces donnent lieu à une mesure d'aire en *pieds* tout comme les longueurs. Il faudrait évidemment introduire les *pieds carrés* pour la mesure des aires. Mais, dans le dialogue du *Ménon* comme dans la classe, ce sont les résultats exprimés en valeurs numériques qui comptent, plutôt que les unités de mesure.

Maîtresse. – *Levez la main, ceux qui pensent que c'est Dario !*

...

Maîtresse. – *Dites-moi, à combien a nagé Beto ?*

...

Maîtresse. – *Point quatre-vingt trois. Comment le lit-on ?*

Chœur des élèves. – *Quatre-vingt trois centièmes.*

Maîtresse. – *Mais ce sont des centièmes de mètre. Comment cela se dit-il ?*

Un élève. – *Centimètre.*

Maîtresse. – *Donc ce sont quatre-vingt trois quoi ?*

Chœur des élèves. – *Centimètres.*

Maîtresse. – *Centimètres par seconde. Et ensuite, à combien a nagé Catalina ?* Elle amène le chœur des élèves à procéder à voix haute à une seconde lecture des expressions qui apparaissent dans la troisième colonne de la table.

Dans le passage qui précède, on peut noter la demande de lever la main, adressée aux élèves par la maîtresse. Il s'agit là de rompre l'apparente unanimité exprimée par le groupe, en individualisant les réponses. Evidemment, on ne trouve rien de tel dans le *Ménon*, puisque Socrate n'y a qu'un unique élève concerné, Ménon pour sa part étant l'observateur de la démonstration didactique administrée par Socrate. (Peut-on dans ce cas dire de Ménon que c'est un élève au second degré, ou un élève-maître ?) Demandons nous maintenant pourquoi les élèves tendent à proposer Dario, la table de valeurs étant sous leurs yeux au tableau. Une hypothèse qu'il semble raisonnable d'avancer est précisément qu'ils voient tout le tableau et pas seulement sa dernière colonne. La lecture collective à voix haute des expressions de cette dernière colonne n'empêche pas les autres colonnes de rester visibles et donc de pouvoir jouer un rôle perturbateur. Et en effet, les valeurs en regard de

Dario dans les deux premières colonnes, où la comparaison des nombres entiers saute aux yeux, sont les plus élevées ; il est donc tentant à propos de Dario de dire qu'il est « le plus » sans préciser davantage. Dans la transcription de la classe, on peut aussi observer que l'erreur sur l'utilisation des seuls centimètres pour exprimer une vitesse n'a pas été commentée par la maîtresse, qui s'est contentée de compléter en disant *par seconde*. C'est un écart par rapport aux préconisations de Socrate, d'identifier les éléments de méconnaissance. Mais, encore une fois, le primat du résultat numérique semble se manifester là, la maîtresse souhaitant focaliser l'attention sur les comparaisons de nombres en écriture décimale.

Maîtresse. – *Qui a nagé le plus vite ?*

Chœur des élèves. – *Dario.*

Elève Marina. – *Non maîtresse, c'est Beto.*

Maîtresse. – *Etait-ce correct que c'était Dario ?*

Chœur des élèves. – *Non*

Maîtresse. – *Qui a nagé le plus vite ?*

Chœur des élèves. – *Beto*

Maîtresse. – *C'est correct que ce soit Beto, parce que... Un mètre est-il plus petit que soixante deux centimètres ?*

Nous voyons, dans ces derniers échanges entre la maîtresse et la classe, intervenir l'élève Marina. C'est elle qui sauve en quelque sorte la mise à sa maîtresse, en ayant assez de conviction pour répondre *Beto*, en opposition avec ce que l'ensemble de ses camarades persistait à proposer. Cela a permis à la maîtresse de s'en tenir à la ligne de conduite qu'elle s'était fixée, ou, si l'on veut, le contrat qu'elle avait passé avec elle-même, à savoir de faire surgir les réponses de la classe et non pas de les livrer. Mais la difficulté rencontrée dans la réalisation de ce projet n'est pas sans avoir produit un effet en retour. Toucher au but a en effet pu faire oublier à la maîtresse de s'assurer d'une réelle compréhension par l'ensemble des élèves. Le fait simplement de relever, sous forme interro-négative, que la valeur obtenue pour la vitesse de Beto est supérieure à celle de Dario peut-il suffire à rendre évident pour beaucoup d'élèves le fait que la réponse à la question posée résulte du calcul des quotients des distances parcourues par les temps réalisés ? Nous ne le pensons pas, en raison des réponses majoritairement exprimées malgré la présence visible au tableau des valeurs obtenues, et nous avons eu l'impression lors de l'observation que nombre d'élèves restaient perplexes après cet épisode.

La maîtresse aurait cependant pu appliquer le second des principes de la maïeutique, à savoir de rendre un apprenant sensible à ses égarements, ses ignorances, en exploitant une perche que Marina lui avait tendue, mais qu'elle

n'avait pas saisie parce qu'elle était étrangère à la vision qu'elle avait à ce moment du sujet étudié. Il s'agit de l'épisode que nous avons indiqué en signalant que nous le sautions, parce qu'il se situait en marge de la progression instituée, et que nous allons à présent examiner.

1.2. L'épisode incombant à Marina

Maîtresse. – *Comment pouvons-nous savoir qui a nagé le plus vite ?*

Marina. – *Par proportionnalité... Pour voir que si par exemple on a fait 50 m en 50 secondes, on mettra pour 100 m une minute et quarante secondes.*

Maîtresse. – *Pourrais-tu le faire au tableau ?*

– Marina réalise au tableau la table de valeurs suivante.

50		50
100	1	40
150	2	30
1500	25	

On remarquera, comme dans la table que nous avons déjà rencontrée, l'absence de références aussi bien pour les lignes que pour les colonnes, ce qui amène l'intervention suivante de la maîtresse.

Maîtresse. – *En haut, ce sont des minutes et des secondes, pas vrai ? A présent, comment pouvons-nous savoir qui a fait le meilleur temps ?... Comment pouvons-nous comparer ces quantités ? Que devrions nous faire pour comparer ?*

Marina. – *En voyant cela (elle montre ce qu'elle a écrit au tableau) par rapport à ce qu'ils ont fait, pour en tirer les écarts...*

Maîtresse. – *Oui, comment ça serait ?*

Marina. – *Amalia a fait 100 m, elle a mis 2 min, mais ici il y a 1 min 40 sec.*

Maîtresse. – *Amalia a fait 100 m, mais je crois que le temps que tu lui as mis n'est pas le bon. Cent mètres en combien ? Vérifie le !*

– Marina observe les valeurs qu'elle a écrites au tableau.

Maîtresse. – *Quelqu'un veut-il lui dire ce qu'il en est pour Amalia ? voyez le tableau ! Cent mètres en 1 min 40 sec ?*

Elève A. – *Non*

Maîtresse. – *Il y a là une erreur, ma belle. Efface !*

– Ligne après ligne, la table complète élaborée par Marina est effacée pour être remplacée par l'exacte copie de la table du manuel. Marina, en élève disciplinée, n'émet aucune objection. L'élève A apporte à la « correction » une contribution active.

Dans le début de cet épisode, la maîtresse est totalement passée à côté de la proposition de Marina. Dans un premier temps, elle n'a pas vraiment prêté attention aux valeurs inscrites pour les temps. Ensuite, quand Marina signale l'écart entre un temps qu'elle a obtenu, à savoir 1 min 40 sec, et le temps donné par l'énoncé, 2 min, la maîtresse prend cette différence pour une erreur de Marina et non pas pour un résultat. Ici, l'utilisation des unités de temps parfois dites complexes a pu jouer, car il ne saute pas aux yeux que 1 min 40 sec est le double de 50 sec. A tête reposée, on en prend très vite conscience, mais cela échappe facilement lorsque l'on est en train de diriger une classe. De plus, seule la première intervention de Marina a indiqué, et encore de manière allusive, qu'elle prenait pour référence le temps de Beto. Quel lecteur peut certifier que dans les mêmes circonstances il aurait saisi la proposition de Marina, s'il n'y avait pas réfléchi au préalable ? On peut aussi imaginer que le déroulement de l'épisode aurait été différent si Marina avait dressé un tableau à seulement deux colonnes : les distances en mètres et les temps en secondes, dont les valeurs numériques se seraient trouvées être rigoureusement les mêmes, par exemple 100 et 100 pour la deuxième ligne, ou 1500 et 1500 pour la dernière.

Maîtresse. – *Comment allons nous comparer ces temps et ces distances ? Comment pouvons-nous faire pour comparer ?...Tu m'as déjà plus ou moins dit une idée, Marina, donne-la nous !*

Marina. – *C'est que j'avais déjà fait la table, mais vous ne m'avez pas comprise.*

Maîtresse. – *Ah ! Je te comprends.*

Marina. – *Je m'étais appuyée sur ce qu'avait fait Beto.*

Maîtresse. – *Tu as fait la table de ce qu'a fait Beto, autrement dit la table n'était que celle de Beto.*

Marina. – *C'était pour savoir, parce que j'ai pensé que c'était Beto le plus rapide. Alors si nous saisissons que Beto a fait 50 secondes aux 50 mètres, alors il aurait nagé différemment... (sous-entendu : des autres personnages de l'énoncé)*

Maîtresse. – *Très bien ! Que pouvons-nous faire pour savoir combien de secondes ont nagé Amalia, Catalina et Dario ?*

Ainsi l'épisode provoqué par Marina est-il conclu, en quelque sorte par une fin de non recevoir déguisée (sous forme de l'appréciation élogieuse *Très bien !*). La maîtresse passe à la question qui amène l'épisode présenté dans le paragraphe

précédent (l'enseignante dans sa classe). Ayant en tête son idée de faire calculer les rapports $\frac{\text{distances}}{\text{temps}}$, elle ne se rend pas compte que l'intervention de Marina ne

constitue pas une diversion, mais au contraire peut permettre à des élèves en situation d'incompréhension ou de doute d'avoir un accès au sens de ces rapports.

Des réflexions sur la proportionnalité telles celles de Vergnaud (1983) permettent de bien éclairer la question : l'invariance de rapports de type scalaire (ou interne), c'est-à-dire concernant les mêmes grandeurs, est plus simple à comprendre que celle de rapports de type fonctionnel (ou externe), c'est-à-dire concernant des grandeurs différentes. C'est ce qui est exploité dans l'intervention de Marina : Un mouvement de vitesse constante est caractérisé par le fait que, par exemple, le temps est doublé si la distance l'est et plus généralement que les rapports internes des temps sont égaux aux rapports internes des distances. Le rapport externe entre distances et temps qui définit la vitesse d'un mouvement uniforme est nettement moins intuitif. Outre le problème des unités, que nous avons signalé au passage, il soulève un problème même de signification, que l'on peut d'ailleurs percevoir dans l'intervention de la maîtresse concluant l'épisode de l'enseignante dans sa classe, sous forme de la question qui doit conduire les élèves à produire une réponse évidemment négative : *Un mètre est-il plus petit que soixante deux centimètres ?* Cette question exprime des distances, alors qu'elle porte sur des vitesses, ce qui signifie que l'idée sous-jacente est que la vitesse est la distance parcourue lors de l'unité de temps. Cela impliquerait que le concept de vitesse est tributaire d'une unité de temps. Or les spectateurs d'une course n'ont pas besoin d'une unité de temps pour apprécier qualitativement les vitesses des participants ! L'approche du contexte abordée par Adjage (2005), puis développée par Adjage & Pluvina (2007), vise à séparer d'abord, puis à coordonner, l'étude de l'environnement physique et celle des objets mathématiques. L'intervention de Marina aurait très bien pu être exploitée dans une telle approche.

Pour conclure ce point de l'étude, montrons que, loin de détourner de la prise en compte du rapport entre distances parcourues et temps (l'objectif d'apprentissage visé par la maîtresse), cette exploitation peut permettre de concourir à son acquisition. Ci-après, voici la table dans laquelle apparaissent côte à côte les valeurs de l'énoncé et celle des temps que Beto aurait réalisés en continuant à nager à la même vitesse que sur son 50 m, pris comme temps de référence. Il est important pour la bonne compréhension que les lignes et les colonnes de telles tables soient labelisées (ou : étiquetées). Dans une situation de classe, on peut être amené à travailler pendant une phase d'action sur des tables non étiquetées, mais en passant à une phase de validation, il convient de compléter lignes et colonnes par l'étiquetage.

	Distance en mètres	Temps en secondes	Temps de référence en secondes
Amalia	100	120	100
Beto	50	50	50
Catalina	150	171	150
Dario	1500	2400	1500

De la considération de chaque ligne de la table, il ressort que le temps de référence est moindre que celui réalisé par le nageur considéré. Ainsi Amalia réalise un temps de 120 sec tandis que le temps de référence est de 100 sec. La présentation sous forme de l'écriture fractionnaire peut alors amener à braquer le projecteur sur les rapports des distances aux temps :

$$\frac{100}{120} < \frac{100}{100}, \frac{150}{171} < \frac{150}{150}, \frac{1500}{2400} < \frac{1500}{1500}.$$

Le recours à l'écriture fractionnaire est exposé en particulier dans l'article déjà cité Adjage & Pluinage (2007). L'idée n'est pas de faire passer en force cette écriture en l'imposant d'emblée pour toute étude liée à la proportionnalité, il s'agit d'amener les élèves à se convaincre eux-mêmes, sur bien d'autres exemples que celui que nous venons de considérer, de sa pertinence et de l'intérêt d'y recourir.

2. Le dialogue du Ménon vu à la lumière de la déconstruction dimensionnelle

Dans le dialogue du Ménon de Platon, considéré du point de vue didactique notamment par Glaeser (1999), Socrate a envisagé l'erreur résultant de la confusion entre longueurs et aires, mais il ne pose pas la question des différentes démarches possibles de résolution. Or pour l'analyse *a priori* d'une situation didactique, une telle question se trouve posée. Dans les épisodes de classe précédemment considérés, la prise en compte d'études didactiques, telle celle de Vergnaud (1983) qui a été indiquée, permet dans l'analyse *a priori* d'envisager le recours à des tableaux du type de celui que nous avons présenté *in fine*.

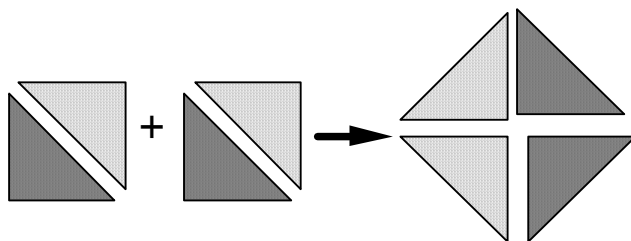
Qu'en est-il pour le problème que Socrate pose dans le Ménon, à savoir l'obtention d'un carré d'aire double de celle d'un carré donné ? La mesure des surfaces, objets de dimension 2, ou unités figurales 2D selon la terminologie de Duval (2005), se trouve confrontée à la difficulté due au fait que les surfaces ont des formes variées. La mesure des longueurs, correspondant à des unités figurales 1D, ne rencontre pas la même difficulté. Ainsi deux segments de droite mis bout à bout constituent encore un segment de droite, tandis que deux carrés mis côte à côte ne forment

jamais un carré. N'y a-t-il pas cependant des figures géométriques dont l'assemblage s'accompagne d'une conservation de forme ?

Pour qui a eu l'occasion de jouer avec les pièces du puzzle intitulé Tangram, cette question conduit à une réponse simple, qui résulte de la considération de triangles rectangles isocèles. L'assemblage de *deux* tels triangles isométriques produit un nouveau triangle rectangle isocèle, dont les côtés de l'angle droit sont les hypoténuses des deux triangles de départ. C'est ce que montre la figure ci-dessus, tracée à la manière des dessins dans le sable qui pouvaient illustrer les propos de Socrate et que l'on trouve dans le document du Ménon traduit en français et mis en ligne par Bernard SUZANNE (2000).

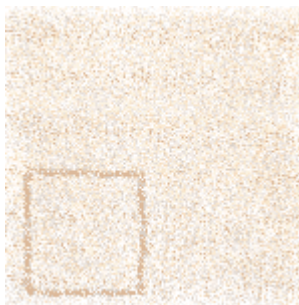


Dans des remarques qu'il nous a envoyées au moment de la rédaction du présent article, Raymond DUVAL signale qu'en conséquence un traitement figural possible repose exclusivement sur la prise en compte des unités figurales 2D et sur un travail de reconfiguration des unités figurales 2D. Il peut être réalisé matériellement en partant de deux formes carrées d'aires égales (on a donc d'emblée la condition à réaliser).



Voyons, après cette analyse, des extraits commentés du dialogue du Ménon de Platon, dans la traduction française de Bernard SUZANNE (2000). Pour ne pas alourdir, nous ne reproduisons pas l'intégralité du dialogue, ce qui ne nuit pas à notre propos. Nous avons numéroté les phrases du texte complet et reproduit cette numérotation dans les extraits, afin que le lecteur désireux de consulter le texte complet du Ménon puisse facilement s'y retrouver.

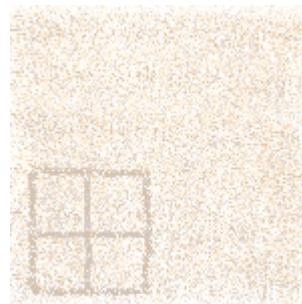
1. SOCRATE.-- *Maintenant, dis-moi, mon garçon, sais-tu que ceci est un espace carré ?*
2. L'ESCLAVE.—*Certes*
- ...
7. SOCRATE.-- *Un tel espace ne pourrait-il être soit plus grand, soit plus petit ?*
8. L'ESCLAVE.-- *Très certainement.*
9. SOCRATE.-- *Si donc ce côté-ci était de deux*



pieds et celui-là de deux, de combien de pieds serait le tout ? Mais examine [les choses] ainsi : si celui-ci était de deux pieds, mais celui-là d'un pied seulement, n'est-il pas vrai que l'espace serait d'une fois deux pieds ?

10. L'ESCLAVE.-- *Oui.*

11. SOCRATE.-- *Mais puisque celui-là est aussi de deux pieds, cela ne fait-il pas deux fois deux ?*



...

16. L'ESCLAVE.-- *Quatre, Socrate.*

17. SOCRATE.-- *Ne pourrait-il y avoir, par rapport à cet espace, un autre, double, mais semblable, ayant toutes les lignes égales, comme celui-ci ?*

18. L'ESCLAVE.-- *Si.*

19. SOCRATE.-- *De combien de pieds serait-il ?*

A ces deux dernières répliques, nous pouvons imaginer que puisse se substituer l'échange suivant, si nous mettons, à la place de l'esclave, une élève Marina ayant pensé à l'assemblage de triangles rectangles isocèles.

MARINA à la place de L'ESCLAVE.-- Nous avons vu deux espaces carrés mis côte à côte : ils ne forment pas un espace carré. Mais, Socrate, deux moitiés de carré égales ne s'assemblent-elles pas pour former un espace semblable double ?

SOCRATE qui n'a pas compris cette intervention. -- Mais non, deux moitiés de carré côte à côte forment ou bien le carré, ou bien un espace dont un côté serait quadruple de l'autre. Restons à nos carrés, de combien de pieds serait notre espace double ?

20. L'ESCLAVE.-- *Huit.*

21. SOCRATE.-- *Eh bien, voyons ! Essaye de me dire de quelle longueur sera chaque ligne ce celui-ci. Celle de celui-là est en effet de deux pieds ; mais qu'en sera-t-il de celle de celui qui est double ?*

22. L'ESCLAVE.-- *Il est tout à fait évident, Socrate, qu'elle sera double.*

23. SOCRATE.-- *Tu vois, Ménon, que je ne lui enseigne rien, mais que j'interroge continuellement. Et pour l'instant, celui-ci pense savoir quelle est celle à partir de laquelle on construira l'espace de huit pieds. Ou bien n'est-ce pas ton avis ?*

Il y a un parallélisme, remarquable jusque dans certaines particularités comme l'existence de difficultés sur les unités, entre l'épisode de classe que nous avons rapporté et ce dialogue. La difficulté sur les unités qui est présente ici est relative aux aires : celles-ci y sont évaluées en pieds tout comme les longueurs, au lieu de l'être en pieds carrés, comme nous le ferions aujourd'hui si nous n'étions pas passés au système métrique. On comprend que l'amalgame puisse être source de confusions ! Par exemple un carré de quatre pieds peut être soit un *espace de quatre pieds* (d'aire), qui aura un côté de deux pieds, soit un carré de quatre pieds de côté, qui aura une aire de seize pieds. A côté de cela, l'évaluation de la vitesse en kilomètres par heure conduisant à se demander s'il faut multiplier ou diviser les kilomètres par les heures fait figure de cas simple.

24. MÉNON.-- *Si, en effet.*

25. SOCRATE.-- *Le sait-il donc ?*

26. MÉNON.-- *Non certes.*

27. SOCRATE.-- *Mais il pense assurément [que c'est] à partir de la double ?*

28. MÉNON.-- *Oui.*

...

35. SOCRATE.-- *Dessignons donc d'après celle-ci quatre [lignes] égales. Ne serait-ce pas là ce que tu dis être l'espace de huit pieds ?*

36. L'ESCLAVE.-- *Tout à fait.*

37. SOCRATE.-- *Eh bien, n'y a-t-il pas dans celui-ci ces quatre-là, dont chacun est égal à celui de quatre pieds ?*

38. L'ESCLAVE.-- *Si.*

39. SOCRATE.-- *De quelle grandeur est-il donc ? N'est-il pas quatre fois aussi grand ?*

40. L'ESCLAVE.-- *Comment non ?*

41. SOCRATE.-- *Est donc double ce qui est quatre fois aussi grand ?*

42. L'ESCLAVE.-- *Non, par Zeus.*

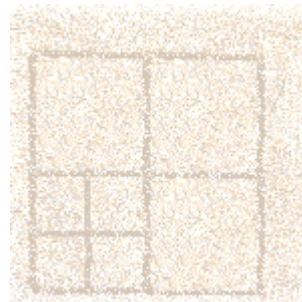
43. SOCRATE.-- *Alors, combien de fois plus grand ?*

44. L'ESCLAVE.-- *Quatre fois plus grand.*

45. SOCRATE.-- *A partir de la [ligne] double, donc, mon garçon, l'espace devient, non pas double, mais quadruple.*

...

65. SOCRATE.-- *Eh bien alors, si celle-ci est de trois et celle-ci de trois, l'espace entier devient de trois fois trois pieds.*



66. L'ESCLAVE.-- *C'est clair.*
 67. SOCRATE.-- *Mais combien de pieds font trois fois trois ?*
 68. L'ESCLAVE.-- *Neuf.*
 69. SOCRATE.-- *Mais de combien de pieds le double devait-il être ?*
 70. L'ESCLAVE.-- *Huit.*
 71. SOCRATE.-- *Ce n'est donc pas encore à partir de celle de trois pieds que se forme l'espace de huit pieds.*
 72. L'ESCLAVE.-- *Non, certes !*
 73. SOCRATE.-- *Mais alors, à partir de laquelle ? Essaie de nous le dire exactement, et si tu ne veux pas dire un nombre, alors montre à partir de laquelle.*
 74. L'ESCLAVE.-- *Mais, par Zeus, Socrate, je n'en sais vraiment rien !*

Ici, à la suite de son intervention précédente, l'élève Marina aurait pu réagir.

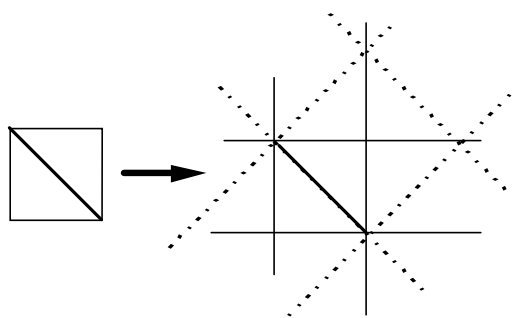
MARINA à la place de L'ESCLAVE.-- Mais, par Zeus, Socrate, mon idée des moitiés de carré me paraît utilisable pour montrer laquelle !

...

87. SOCRATE.-- *... Dis-moi donc, toi : ceci n'est-il pas pour nous l'espace de quatre pieds ? Comprends-tu ?*
 88. L'ESCLAVE.-- *Certes.*
 89. SOCRATE.-- *Mais nous pourrions lui accoler un autre qui lui soit égal ?*
 90. L'ESCLAVE.-- *Oui.*
 91. SOCRATE.-- *Et ce troisième ici, égal à chacun d'eux ?*
 92. L'ESCLAVE.-- *Oui.*
 93. SOCRATE.-- *Et ne pourrions-nous pas combler ce vide dans le coin ?*
 94. L'ESCLAVE.-- *Tout à fait.*
 95. SOCRATE.-- *N'est-il donc pas vrai qu'il en résulte quatre espaces égaux là ?*
 96. L'ESCLAVE.-- *Si.*
 97. SOCRATE.-- *Quoi encore ? Ce tout, combien de fois plus grand que celui-ci devient-il ?*
 98. L'ESCLAVE.-- *Quatre fois plus grand.*
 99. SOCRATE.-- *Or il devait devenir double pour nous ; ne t'en souviens-tu pas ?*
 100. L'ESCLAVE.-- *Tout à fait.*
 101. SOCRATE.-- *Eh bien, cette ligne d'angle à angle ne coupe-t-elle pas en deux chacun de ces espaces ?*



Dans les remarques, déjà citées, qu'il nous a adressées, Raymond Duval signale que le traitement du problème par Socrate repose exclusivement sur la prise en compte des unités figurales 1D. Il suppose que l'on oublie la vision "surface" ou la focalisation sur les unités figurales 2D, et que l'on se concentre sur une vision "lignes" et donc sur les unités figurales 1D, autrement dit que l'on effectue une déconstruction dimensionnelle des formes. Et pour Raymond Duval, il y a là un saut cognitif considérable par rapport au traitement présenté dans notre analyse *a priori*.



102. L'ESCLAVE.—*Si.*

103. SOCRATE.— *Eh bien, cela ne fait-il pas quatre lignes égales, entourant l'espace que voici ?*

104. L'ESCLAVE.-- *Ça les fait.*

...

115. SOCRATE.-- *Alors, pour celui-ci, combien de pieds cela fait-il ?*

116. L'ESCLAVE.-- *Huit.*

117. SOCRATE.-- *Sur quelle ligne ?*

118. L'ESCLAVE.-- *Sur celle-ci.*

119. SOCRATE.-- *Sur celle qui est tracée d'angle à angle dans celui de quatre pieds ?*

120. L'ESCLAVE.-- *Oui.*

121. SOCRATE.-- *Or les spécialistes l'appellent justement « diagonale » ; de sorte que, si « diagonale » est son nom, ce serait sur la diagonale, à ce que tu dis, serviteur de Ménon, que se formerait l'espace double.*

Pour achever le parallèle avec l'épisode qui a incombé à Marina, nous pouvons imaginer de substituer à ces deux dernières répliques les suivantes :

MARINA à la place de L'ESCLAVE. -- Justement, Socrate, la moitié de carré dont je parlais est limitée par une diagonale.

SOCRATE. – A présent, je comprends quelles moitiés de carré tu voulais assembler pour obtenir encore une moitié de carré. Tes moitiés de carré n'avaient pas une forme rectangulaire, mais triangulaire.

122. L'ESCLAVE.-- *Très certainement, Socrate.*

Conclusion et questions

Notre expérience d'observation de classes nous conduit à dire que, si la maïeutique socratique est loin d'être l'unique pratique pédagogique mise en œuvre dans les classes, et c'est heureux, on rencontre en revanche des moments de pratiques maïeutiques dans beaucoup de classes. Des dialectiques de validation au sens de Guy Brousseau, voire d'institutionnalisation, peuvent aisément se prêter à de telles mises en œuvre. Et tout professeur sent à certains moments que ses élèves sont en possession des éléments pour répondre ou conclure par eux-mêmes. De ce point de vue, la maîtresse de notre observation n'apparaît donc pas comme singulière au sein du corps enseignant.

Cela dit, nous avons observé une application seulement partielle de la maïeutique par la maîtresse, malgré les qualités professionnelles de cette dernière, attestées lors de l'observation par l'implication de l'ensemble de ses élèves. S'agit-il d'une caractéristique qui lui est personnelle, ou n'y aurait-il pas une tendance générale des professeurs, lors d'une pratique maïeutique de classe, à accorder à l'expression par les élèves eux-mêmes du savoir à acquérir la primauté sur la sensibilisation des élèves à leurs ignorances, leurs errements ? La question mérite d'être posée.

L'étude des vitesses que le manuel présentait était envisagée par les auteurs comme une étude introductive. Mais la maîtresse de la classe observée l'a plutôt prise comme un exercice d'application d'une définition mathématique, celle de la vitesse

donnée comme rapport de la distance parcourue au temps : $v = \frac{d}{t}$. S'agit-il d'une

tendance à l'*impatience pédagogique*, la maîtresse souhaitant que soit abordé au plus vite l'objet d'apprentissage visé ? Ou est-ce dû à ce que la maîtresse n'a pas étudié *a priori* une question essentielle en didactique, celle des différentes démarches de résolution possibles, pas plus que Socrate ne l'a fait dans le Ménon ? Soulignons encore une fois l'efficacité professionnelle générale de l'enseignante, qui nous permet plus facilement de relever en contrepoint un certain "*manque à apprendre*" dans la leçon observée.

Le dialogue du Ménon, pour sa part, est une illustration de patience pédagogique, mais on peut aussi y pointer certain "*manque à apprendre*". En ce qui concerne la terminologie, tout ce qui eut pu être dit de relatif aux triangles, en particulier le triangle rectangle isocèle et son hypoténuse, est totalement absent. Pour ce qui est de la géométrie, tout son aspect dynamique, à commencer par la considération de déplacements de figures, reste ignoré. Il faut toutefois reconnaître à ce sujet que la géométrie grecque, étude de figures plus que du plan en général, ne conduisait guère à une telle vision dynamique. Et reconnaissons aussi que, contrairement aux élèves d'une classe, l'esclave du dialogue n'est pour Socrate qu'un élève de circonstance, pour lequel il n'y a pas un projet de formation.

Annexe : transcription originale en espagnol des épisodes rapportés

Ejemplo 1. Papel protagónico de la Maestra

1. Maestra: -¿Qué podemos hacer para saber cuántos segundos hizo Amalia, Catalina y Darío?
2. Di: -Dividiendo la distancia entre el tiempo
3. Maestra: -¡Dividiendo la distancia entre el tiempo! (con énfasis) ¡Claro!
- ...
4. Maestra: ahora, hay otro detalle ahí, hay minutos y hay segundos ... ¿Qué podemos hacer para que se nos haga más fácil todo? ¿Convertir qué cosa?
5. Alumna: convertir todos a segundos
6. Maestra: Todos a segundos ¿verdad? A ver, en la primera ya está, ahora ... dos minutos ¿cuántos segundos serían?... ... anótenlo...
- ...
7. Maestra: tú ya entendiste Di, pasa al pizarrón...

100	120	.83 m x seg
50	50	1 m x seg
150	171	.87 m x seg
1500	2400	.62 m por seg

8. Tabla que realizan los alumnos en el pizarrón. (Previamente han realizado en este espacio las operaciones correspondientes)
9. Maestra: - ¿Cuál sería la que respondería a la última pregunta? ¿Quién fue el que nadó más rápido?
10. Grupo: -Darío
11. Maestra: ¿por qué Darío? ... ¿Cuántos metros por segundo nadó Darío? ... (y continúa la lectura a coro de las siguientes expresiones que aparecen en la tercera columna bajo la dirección de la Maestra: ejemplo: Maestra: Cuánto nadó Amalia? Alumnos: punto 83 metros por segundo, etc.)
- ...
12. Maestra: -¿Quién nadó más rápido?
13. Grupo: -Darío
14. Maestra: Levantamos la mano los que creemos que fue Darío...
- ...
15. Maestra: Díganme: ¿cuánto nadó Beto?
-
16. Maestra: Punto ochenta y tres ¿cómo se lee?
17. Alumnos: ochenta y tres centésimos
18. Maestra: Pero centésimos en metro ¿cómo se dice?
19. Alumno: Centímetro
20. Maestra: ... entonces son ochenta y tres ¿qué?
21. Alumnos: Centímetros
22. Maestra. Centímetros por segundo

23. Maestra. Y luego ¿cuánto nadó Catalina?... (continúa la segunda lectura a coro de las expresiones que aparecen en la tercera columna bajo la dirección de la Maestra)

...

...

24. Maestra: - ¿Quién nadó más rápido?

...

25. Grupo: -Darío

26. Mar: - No Maestra, fue Beto

27. Maestra: ¿Estaba correcto que era Darío?

28. Alumnos: No

29. Maestra: ¿Quién nadó más rápido?

30. Alumnos: Beto

31. Maestra: -Es correcto, fue Beto ... porque ... ¿un metro es más chico que sesenta y seis centímetros?

Ejemplo 2. Papel protagónico de una estudiante (Marina)

1. Maestra: -¿Cómo podríamos saber quién nadó más rápido?

2. Marina: -Por proporcionalidad... Para ver si por ejemplo 50 m. lo hicieron en 50 seg. en 100 tuvieron que hacer un minuto con cuarenta segundos

3. Maestra: Me lo podrías hacer en el pizarrón?

50		50
100	1	40
150	2	30
1500	25	

4. Tabla que realiza Mar en el pizarrón

5. Maestra: Arriba es minutos y segundos ¿verdad?

6. Maestra: Ahora ¿cómo podemos saber quién hizo más tiempo? ... ¿cómo podríamos compara esas cantidades (las que anotó Marina en el pizarrón) ¿Qué tendríamos nosotros que hacer para comparar?

...

7. Marina: viendo esto (señala lo que escribió en el pizarrón) con lo que hicieron, para ir sacando cuánto falta ... (para ver) ... cuánto tiempo hicieron...

8. Maestra: sí ¿cómo sería?

9. Marina: -"Amalia hizo 100 m, ella hizo 2 min., pero aquí está teniendo 1 min. 40 seg. (señala la cantidad que aparece en la tabla del pizarrón)

10. Maestra: -Amalia hizo 100 metros, pero creo que la cantidad está mal ¿100 metros en cuánto? ¡Chécale!

11. Marina: (observa las cantidades que escribió en el pizarrón)

12. Maestra: "¿Alguien le quiere decir qué pasa con Amalia? ¡Vean el pizarrón!

13. Maestra: ¿cien metros es un minuto 40 segundos?

14. Ale: No!

...

15. Maestra: Ahí hay un error, mi amor ¡bórrale!

(Se corrige fila a fila toda la tabla que hizo Mar en el pizarrón, aduciendo que es incorrecta, sin dar mayor explicación y se copia textual la que aparece en el libro de texto. En esto participa activamente Ale).

...

16. Maestra: ¿Cómo comparamos este tiempo y estas distancias? ¿Cómo podemos hacer para comparar? ... Ya me dijiste más o menos Marina una idea ¡hazla! ...

17. Marina: Es que ya había hecho la tabla, pero ustedes no me entendieron

18. Maestra. ¡Ah! Ya te entendí

19. Marina. Me basé a lo que hizo Beto

20. Maestra. Hiciste la tabla de lo que hizo Beto, o sea, era de Beto nada más la tabla

21. Marina. Era para saber, porque yo pienso que Beto era más rápido, entonces si agarramos que Beto hizo 50 segundos (para) 50 metros, entonces hubiera nadado diferente...

22. Maestra: Muy bien ¿Qué podemos hacer para saber cuántos segundos hizo Amalia, Catalina y Darío?

Bibliographie

ADJIAGE R. (2005), Diversité et invariants des problèmes mettant en jeu des rapports, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 95–129.

ADJIAGE R. & PLUVINAGE F. (2007), An experiment in teaching ratio and proportion, *Educational Studies in Mathematics*, **65**, 149–175.

DUVAL R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **10**, 5–54.

DUVAL R. & GODIN M. (2005), Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N*, **76**, 7–27.

GLAESER G. (1999), *Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques*, Textes rassemblés et préparés par Blochs B. & Régnier J.-C., La Pensée Sauvage éditions, Grenoble.

GRAVEMEIJER K. & DOORMAN D. (1999), Context problems in Realistic Mathematics Education: a calculus course as an example, *Educational Studies in Mathematics*, **39**, 111–129.

SUZANNE B. (2000), Traduction annotée du Ménon de PLATON, en ligne à http://plato-dialogues.org/fr/tetra_3/meno/traductions.htm et http://plato-dialogues.org/fr/tetra_3/meno/t80d_86d.htm

VERGNAUD G. (1983), Multiplicative Structures, in *Acquisition of mathematics concepts and processes* (Eds. LESH R. & LANDAU M.), Academic Press, New York, 127–174.

VYGOTSKY L.S. (1985), Le problème de l'enseignement et du développement mental à l'âge scolaire, dans *Vygotsky aujourd'hui* (Eds. SCHNEUWLY B. & BRONCKART J. P.), Delachaux & Niestlé, Neuchâtel, Paris, 95–117.

PLUVINAGE FRANÇOIS
pluvin@math.u-strasbg.fr

RIGO LEMINI MIRELA
CINVESTAV del IPN México
[MIRELA RIGO LEMINI <mirelarigo@prodigy.net.mx>](mailto:mirelarigo@prodigy.net.mx)

LAURENT VIVIER

DE LA SYNTHÈSE SUR LES NOMBRES À LA DOXA ENSEMBLISTE

Abstract. From number synthesis to belief in naïve set theory - In this work we study the number summary required by the French curriculum for 14 and 15 years old pupils. We point out that, in textbooks and class lessons, the role played by the five classical number sets is huge for this synthesis. We discuss this fact by identifying what is relevant for mathematics in French secondary education. The analysis focuses on French mathematics curricula, textbooks and classrooms. We use the notion of settings defined by Régine Douady, the semiotic theory of Raymond Duval and the anthropologic theory of Yves Chevallard. Throughout this article we propose some ideas for a real number summary.

Résumé. Dans cet article nous étudions comment est pratiquée la synthèse sur les nombres en fin de collège et au début du lycée dans l'enseignement des mathématiques en France. Plus spécifiquement, nous interrogeons l'apport réel, et non supposé, des cinq ensembles usuels de nombres pour une synthèse sur les nombres dans l'enseignement secondaire. L'analyse porte sur les programmes, leurs accompagnements et les manuels des classes de troisième et de seconde ainsi que sur l'observation de trois classes de seconde lors de l'introduction des ensembles de nombres. Tout au long de l'article nous proposons des pistes pour produire de réelles synthèses sur les nombres. Nous utilisons, en les articulant, la référence cognitive aux cadres de Régine Douady, la théorie sémiotique de Raymond Duval et la théorie anthropologique du didactique de Yves Chevallard.

Mots-clés. Nombres, ensembles de nombres, synthèse, cadre, registre sémiotique, praxéologie.

Introduction

Les programmes français de mathématiques des classes de troisième et de seconde¹, grades 9 et 10, requièrent une synthèse sur les nombres mais ne donnent que des indications sommaires aux enseignants pour mener à bien leur tâche. La lecture des accompagnements de programmes ne permet pas de combler cette lacune. Tout se passe comme si synthétiser l'enseignement des nombres du primaire et du collège était une évidence. Nous montrons en quoi consiste cette *évidence* et nous nous interrogeons sur les possibilités réelles de produire une synthèse sur les nombres.

Il est certes compréhensible de procéder à une synthèse sur les nombres à la fin d'un cycle pour la classe de troisième et au début d'un nouveau cycle pour la classe de seconde. Mais ce qui nous intéresse ici est la manière de procéder à cette

¹ Il s'agit des programmes en vigueur à la rentrée 1999 pour la classe de troisième et 2002 pour la classe de seconde.

synthèse. De manière générale, on estime que parler d'ensemble de nombres implique une synthèse sur les nombres. Cette relation est sujette à interrogation en soi. Nous montrons, par une double analyse sémiotique et praxéologique, que l'apport des ensembles de nombres n'est pas à chercher dans les savoirs et savoir-faire mais dans l'élaboration du langage mathématique. Nous en déduisons que, dans l'enseignement secondaire français, la synthèse sur les nombres par les ensembles de nombres se révèle être une *doxa*. La *synthèse* proposée aux élèves se contente de couvrir le concept de nombre par une couche d'ensembles. Finalement, la synthèse sur les nombres disparaît au profit d'un bilan sur les ensembles de nombres, bilan d'une grande pauvreté mathématique.

Nous proposons au cours de cet article des pistes qui nous semblent pouvoir produire une réelle synthèse sur les nombres dans l'enseignement secondaire. Les développements décimaux nous paraissent à ce sujet très intéressants. Les écritures décimales sont bien entendu rencontrées dans notre étude, mais l'enseignement des mathématiques au secondaire ne les exploite pas suffisamment. Nous exposons l'intérêt de cette écriture des nombres réels pour classer et unifier les nombres.

Notre étude s'appuie sur la théorie des registres de représentation de Raymond Duval ainsi que sur la théorie anthropologique du didactique de Yves Chevallard. Ces deux théories nous semblent être au cœur de l'activité mathématique et nous les articulons pour les besoins de notre analyse. Nous utilisons également les cadres de Régine Douady afin de rendre la différence entre nombres et ensembles de nombres opérationnelle. L'analyse principale porte sur les programmes et leurs accompagnements des classes de troisième et de seconde, ainsi que sur 7 manuels de troisième et 18 de seconde. Nous faisons l'hypothèse que les manuels étudiés forment un panel représentatif – ce sont les manuels envoyés par les éditeurs au centre IUFM de La Seyne-sur-Mer. Cette étude curriculaire est complétée par l'observation de classes : nous avons assisté aux cours traitant de la synthèse sur les nombres de 3 enseignants de seconde dans un lycée du Var. Les classes de ces trois professeurs, nous nommons ces trois personnes P_A , P_B et P_C , ont permis de préciser l'étude. En particulier, les réactions des élèves et des professeurs révèlent les problèmes que l'étude des textes officiels et des manuels ne peut qu'esquisser.

En section 1 nous focalisons notre étude sur l'aspect sémiotique dont nous exploitons les résultats en section 2 pour mettre à jour la *doxa* ensembliste. L'articulation avec la théorie anthropologique fait l'objet de la section 3. Nous terminons notre étude en section 4 par les représentations graphiques des ensembles de nombres.

1. Analyse sémiotique

Nous distinguons deux cadres au sens de Douady (1986) qui vont nous permettre de mieux comprendre les conversions de registres sémiotiques : le cadre numérique élémentaire C0 qui a pour objets mathématiques les nombres, et le cadre ensembliste C1 qui a pour objets mathématiques les ensembles. La différence notable entre ces deux cadres réside dans la notion de nombre : d'objet premier auquel on a un accès direct dans C0, il devient second dans C1 puisqu'un nombre est un élément d'un ensemble.

1.1. Les registres

Nous exposons dans cette section les registres de représentation (Duval, 1995) associés aux cadres C0 et C1.

1.1.1. Les registres numériques

Le cadre C0 se construit dans l'enseignement en parallèle avec les registres de représentation décimal, fractionnaire et scientifique en nous limitant au système de numération en base dix. Nous considérons également le registre intrinsèque, ou algébrique, pour lequel un nombre peut être représenté par une lettre, sans référence directe à un système de numération. Ces registres forment un réseau plus ou moins solide selon leurs coordinations. Nous notons R0 ce réseau de registres et nous ne distinguons pas les différents registres dont R0 est composé sauf lorsque le besoin s'en fera ressentir. Ce que nous appelons une conversion de R0 vers un autre registre de représentation R est en fait une conversion d'un registre du réseau R0 vers ce registre R.

Nous considérons également comme faisant partie de ce réseau de registres R0 : le nombre π et les nombres qui s'écrivent en fonction de π , les puissances, les radicaux et les développements décimaux illimités. Les développements décimaux illimités pourraient constituer un registre de l'institution Enseignement des Mathématiques du Secondaire (EMS) définie par Bronner (1997b). Il n'en est rien : l'institution EMS n'utilise presque pas les développements décimaux car elle se limite pour l'essentiel aux périodiques. Pourtant, ce registre des développements décimaux serait d'une grande utilité pour l'enseignement des nombres et particulièrement pour la synthèse sur les nombres.

En revanche, nous ne considérons pas le registre de représentation sur une droite graduée comme un registre de R0 pour deux raisons. D'une part on sort du cadre numérique C0 et d'autre part on utilise presque systématiquement un des registres qui composent R0 pour placer les points sur une droite.

Les registres qui composent le réseau R0 sont coordonnés, ce qui permet de donner du sens et de procéder à des traitements et des conversions comme pour le calcul

de « $3,1+2/3$ » ou pour écrire « $1/4 = 0,25$ »². De ce fait, le réseau de registres R0 répond au fonctionnement cognitif de base pour les mathématiques puisqu'il satisfait, relativement au cadre C0, les deux conditions explicitées par Duval (1996) : « le fait de disposer *non pas d'un* mais de *plusieurs systèmes* de signes qui vont fonctionner comme des registres de représentation pour des fonctions cognitives de traitement et d'objectivation » et « la nécessaire coordination de ces registres ». Néanmoins, la coordination des registres de R0 n'est pas parfaite. Ceci a des incidences sur les apprentissages numériques des élèves de EMS comme l'a pointé la commission Kahane pour le calcul (Kahane, 2002).

1.1.2. Le registre ensembliste

Il serait inutile de considérer pour notre propos que C1 est le cadre axiomatique de la théorie des ensembles car il n'apparaît pas dans EMS. Le cadre C1 est donc relatif à une théorie naïve des ensembles, non axiomatisée, où les objets *ensembles* sont à prendre dans un sens intuitif. Les ensembles de nombres sont déclarés sans être réellement définis ce qui est conforme au programme de seconde qui parle de « notations » et non d'objets. Ainsi, C1 qui pourrait apparaître à première vue comme un cadre n'est en fait, dans l'institution EMS, qu'une utilisation d'une partie du système sémiotique relatif à ce cadre. Nous notons R1 ce registre de représentation dont les signes principaux sont $\in$, $\notin$, $\subset$, $\dots$, $\{$, $\}$ et les notations des cinq ensembles usuels de nombres **N**, **Z**, **D**, **Q** et **R**.

Nous pourrions ajouter les symboles $\cup$, $\cap$ et $\emptyset$ qui apparaissent aux côtés des précédents en page 8 de l'*Accompagnement du programme de seconde*, ainsi que $+\infty$, $-\infty$, $]$ et $[$. Mais bien que souvent utilisés, leurs usages se cantonnent au chapitre sur les intervalles : ils forment un registre sémiotique qui semble indépendant de ce que nous notons R1. Bien sûr, les intervalles sont des ensembles et même des ensembles de nombres. Mais, dans les manuels de seconde, ils n'apparaissent pas dans le chapitre sur les ensembles de nombres. Le lien entre les intervalles et les *ensembles de nombres* n'est pas fait même si l'on note dans 7 manuels sur les 18 l'affirmation que **R** est un intervalle. Nous excluons les intervalles de notre propos pour nous concentrer sur les cinq ensembles usuels de nombres et la synthèse sur les nombres.

Bien entendu, les nombres sont des objets de C1 puisqu'ils sont les éléments des ensembles de nombres. Il est nécessaire de les déclarer et donc d'utiliser les registres de R0. Mais les nombres sont seconds et *inertes* dans le sens où aucun traitement n'est requis dans le cadre ensembliste comme l'atteste l'absence – ou la très faible occurrence – des structures algébriques des ensembles de nombres (cf.

² Les exemples du premier type sont d'une grande rareté et le second exemple est emprunté à Duval (1996).

section 1.2.3). Nous faisons l'hypothèse que l'utilisation des registres de R0 ne sert, dans le cadre C1, que pour déclarer les éléments des ensembles.

R1 est bien un registre de représentation défini par Duval (1996) puisqu'il permet les trois fonctions cognitives fondamentales : la fonction de communication, comme lorsque l'on écrit « $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ », la fonction de traitement, comme lorsque l'on écrit « comme $5,1 \in \mathbf{D}$ alors $5,1 \in \mathbf{Q}$ », et la fonction d'objectivation, comme lorsque l'on déclare l'objet $\mathbf{N}$ pour désigner *tous les entiers naturels*.

1.2. L'apport sémiotique du registre R1

1.2.1. L'objectivation

L'objectivation est la fonction méta-cognitive définie par Duval (1996) comme « la possibilité pour le sujet de prendre conscience de ce dont jusqu'alors il n'avait pas eu conscience et de ce dont il ne peut avoir encore une conscience claire tant qu'un travail d'extériorisation à des fins de réorganisation n'est pas encore accompli ». Il s'agit d'une grande fonction assumée par R1. L'objectivation se produit par la prise de conscience que des nombres partagent les mêmes propriétés et qu'ils peuvent être ainsi classés dans les ensembles usuels de nombres.

On trouve rapidement la nécessité de classer les nombres chez les trois enseignants, et même les élèves de P_B devancent leur professeur sur ce point. Mais les élèves pensent aux catégories usuelles des nombres et ils n'ont naturellement pas l'idée d'introduire des ensembles. Les professeurs sont donc obligés de forcer la main à ce moment avec, pour P_C , une référence au programme : « un des objectifs de cette leçon c'est qu'un élève de seconde soit capable de classer le nombre qu'on lui présente dans les ensembles là, $\mathbf{N} \mathbf{Z} \mathbf{D} \mathbf{Q} \mathbf{R}$ ». Ce passage en force n'est pas étonnant, car à ce stade du curriculum il manque l'objet mathématique *ensemble*. Ainsi, l'objectivation ne peut qu'être incomplète.

Plus précisément, on note que seuls $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}$ ont des écritures dans le registre R1 avec accolades et points de suspension du type $\{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$ ou $\{\dots -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots\}$. Ces écritures³, observées dans 9 manuels de seconde sur les 18 étudiés et chez deux professeurs, permettent l'objectivation des ensembles de nombres du fait de l'énumération des éléments.

Si les manuels sont très partagés sur la manière d'objectiver $\mathbf{N}$ et $\mathbf{Z}$ – utilisation ou non de R1 –, en revanche ils sont tous en phase, à de très petites variations près, pour $\mathbf{D}$ et $\mathbf{Q}$. On ne peut plus énumérer leurs éléments dans l'ordre, donc on déclare ces ensembles en compréhension. Le registre R1 n'est jamais utilisé, et il faut se contenter de, par exemple pour le manuel **a** : « Les nombres rationnels sont

³ Voir également l'extrait de manuel proposé par Bronner en Annexe (Bronner, 1997b). On y retrouve les déclarations principales dont nous discutons ici.

les quotients a/b où a est un entier relatif et b un entier relatif non nul. L'ensemble des nombres rationnels se note $\mathbf{Q}$. »⁴. L'objectivation se produit dans le registre de la langue naturelle, comme si on se refusait d'utiliser R1 pour remplir la fonction d'objectivation relative à ces deux ensembles de nombres. La fonction d'objectivation, si elle est remplie par R1, l'est de manière différente selon les propriétés fondamentales des ensembles de nombres considérés qui influencent la manière avec laquelle on peut organiser les éléments.

En ce qui concerne $\mathbf{R}$, 11 manuels de seconde l'introduisent par la droite numérique, 4 en le définissant comme l'ensemble qui contient les rationnels et les irrationnels et 3 comme l'ensemble de tous les nombres. Si la majorité des manuels est conforme au programme de seconde⁵, plus d'un tiers d'entre eux ne donnent qu'un simulacre de définition car, soit ils ne disent pas ce qu'est un irrationnel, soit ils ne disent pas ce qu'est un nombre. Ces deux questions ne trouvent évidemment leur réponse que dans la construction de $\mathbf{R}$, et l'on rejoint la conclusion de Bronner sur le vide didactique des nombres réels (Bronner 1997a,b). Il est difficile de parler d'objectivation : d'une part, pour les 11 premiers manuels, l'objet est déjà là – la droite graduée – il ne s'agit que d'une nouvelle représentation dans un autre registre et d'autre part, pour les 7 autres manuels, aucune prise de conscience ne peut avoir lieu puisque l'on se base sur des objets dont on n'a pas conscience. Les trois professeurs qui sont confrontés à d'autres contraintes se doivent de donner une justification plus consistante : ils résolvent le problème en déclarant à leurs élèves que « les réels existent ».

1.2.2. Indépendance de la langue naturelle

Le registre R1 participe à l'indépendance de la langue mathématique par rapport à la langue naturelle. Avec les seuls registres composant R0 il est impossible d'avoir un discours sur la nature des nombres et la fonction apophantique de constitution d'énoncé complet (Duval, 1995) de la langue naturelle est incontournable. Comment dire, avec les seuls registres de R0, « 3,1 est décimal » ou déclarer « la somme de deux rationnels est un rationnel » ? En se limitant à R0, il faut se contenter de « 3,1 » et de, par exemple, « $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ ». Certes ces deux expressions contiennent toute l'information mais l'interprétation reste à faire.

⁴ Tous les manuels proposent ce type de définition pour $\mathbf{Q}$. Il en est de même pour $\mathbf{D}$ même si on relève deux *définitions* d'un nombre décimal : fraction $a/10^n$ ou *nombre à virgule*.

⁵ Il subsiste une ambiguïté dans ces onze premiers manuels : on peut légitimement se demander comment cette droite a été graduée.

En revanche, R1 permet cette fonction de discours sur C0. Sur nos exemples nous pouvons écrire : « $3,1 \in \mathbf{D}$ » ou « si $x \in \mathbf{Q}$ et $y \in \mathbf{Q}$ alors $x+y \in \mathbf{Q}$ »⁶. Bien entendu, c'est à partir de la langue naturelle que cette fonction de R1 se développe, mais ceci est propre à tous les systèmes sémiotiques (Duval, 1996). P_C assume complètement ce développement de la langue mathématique et indique à plusieurs reprises l'intérêt des notations et des symboles nouveaux qui sont introduits en classe de seconde.

1.2.3. Les structures algébriques

Les deux exemples précédents ne sont pas choisis au hasard car il s'agit des seules utilisations de R1 relevées dans les manuels de seconde mettant en jeu directement les nombres. L'intérêt des écritures, relatives à la nature des nombres, du type « $3,1 \in \mathbf{D}$ » est très restreint du point de vue mathématique, nous en discuterons plus longuement à la section suivante. En revanche, les expressions du type « si $x \in \mathbf{Q}$ et $y \in \mathbf{Q}$ alors $x+y \in \mathbf{Q}$ » sont très intéressantes car les structures algébriques des ensembles de nombres sont à portée. Mais l'analyse montre que cela reste tout à fait confidentiel car si certains manuels de seconde s'en préoccupent, c'est toujours de manière anecdotique, et uniquement dans des exercices.

Ainsi la possibilité d'exposer les structures algébriques, sans nécessairement trop s'y attarder, est une potentialité non exploitée. Il faut comparer cet état actuel de EMS avec d'autres institutions pour comprendre que ce n'est pas toujours la position des programmes. En effet, les programmes des classes du collège de l'époque des Mathématiques Modernes ou, de nos jours, la première année de Classe Préparatoire aux Grandes Ecoles, section scientifique, proposent tous deux, aux côtés de C1 et R1 les structures algébriques de base. Dans EMS, seul subsiste le registre R1 et des bribes du cadre C1 sans que n'apparaissent les structures algébriques qui peuvent motiver l'introduction de R1. Nous pensons que cet état de EMS provient d'une transposition institutionnelle dont l'étude reste à faire.

1.3. La conversion entre R0 et R1 : une excellente congruence

1.3.1. A l'oral : l'expansion discursive de la langue naturelle

Nous venons de voir que l'utilisation de R1 était essentiellement centrée sur la nature des nombres et que R0 ne peut porter ce discours seul car la langue naturelle est nécessaire. De ce fait, il n'y a pas vraiment de conversion de registres au sens de Duval entre R0 et R1. Reprenons l'exemple « $3,1 \in \mathbf{D}$ ». Cet énoncé dans R1

⁶ Nous ne tenons pas compte des mots de liaison qui sont issus de la langue naturelle car il serait artificiel d'écrire « $x \in \mathbf{Q}, y \in \mathbf{Q} \Rightarrow x+y \in \mathbf{Q}$ ».

peut être converti dans la langue naturelle en « 3,1 appartient à D »⁷. Nous avons constaté que la fonction apophantique de la langue naturelle permet de dire « 3,1 est un décimal »⁸. Le passage se produit donc dans la langue naturelle entre « trois virgule un appartient à D » et « 3,1 est un décimal » : il s'agit de la fonction d'expansion discursive de la langue naturelle (Duval, 1995).

On voit cette fonction d'expansion discursive de la langue naturelle à l'œuvre dans le discours des professeurs comme le montre ce passage relevé dans le cours de P_A :

P_A : Ainsi quand j'écris $\frac{2}{3}$ appartient à **Q** comme ça. [il écrit au tableau $\frac{2}{3} \in \mathbf{Q}$]
Voilà. ça veut dire $\frac{2}{3}$ est un nombre rationnel.

Elèves : c'est quoi le petit e là avec...

P_A : ça ça veut dire appartient.

Elèves : ça veut dire quoi appartient ?

P_A : $\frac{2}{3}$ est un rationnel, $\frac{2}{3}$ appartient à l'ensemble des rationnels

Elèves : Ah oui, c'est l'ensemble...

P_A : L'ensemble de tous les rationnels, voilà je note

Elèves : Dès qu'on a une fraction, c'est **Q**

Pour P_A il s'agit bien de l'expansion discursive de la langue naturelle car les deux expressions « $\frac{2}{3}$ est un rationnel » et « $\frac{2}{3}$ appartient à l'ensemble des rationnels » ont du sens pour lui. Ce n'est évidemment pas le cas pour ses élèves pour lesquels le registre R1 est en construction.

Cette construction de R1 s'observe dans les manuels. Par exemple, le manuel **a** précise la conversion entre le registre R1 et la langue naturelle : « on écrit $3 \in \mathbf{N}$ » et « on lit 3 appartient à **N** ». Néanmoins, nous préférons considérer cette conversion comme une conversion entre les registres ostensifs écrit et oral de R1 (Bosch et Chevallard, 1999).

1.3.2. A l'écrit : une conversion très congruente

Afin de faire ressortir une conversion entre R0 et R1, il est nécessaire de neutraliser la fonction d'expansion discursive de la langue naturelle. On considère alors dans cette section les ostensifs écrits car, comme nous l'avons vu avec P_A, pour la nature des nombres l'expansion discursive de la langue naturelle fonctionne essentiellement à l'oral. A l'écrit, l'on dispose de : « 3,1 est décimal » pour R0 épaulé par la langue naturelle et de « $3,1 \in \mathbf{D}$ » pour R1.

Nous faisons ainsi apparaître une conversion entre les ostensifs écrits dont la congruence est excellente comme l'indique la correspondance des unités signifiantes :

⁷ Toutes les unités sont signifiantes dans R1 alors que des variations, cognitivement neutres, sont possibles dans la langue naturelle car on peut tout aussi bien dire « est élément de ».

⁸ On relève encore des variations cognitivement neutres : « est un (nombre) décimal ».

R0 et langue naturelle	3,1	est	décimal
R1	3,1	∈	D

La congruence est accentuée par les initiales. Très forte pour **D** et **R**, elle l'est un peu moins pour **N**, **Q** et **Z**. Certains manuels (5 sur les 18) utilisent ces initiales sans doute pour faciliter la conversion. Les professeurs ne peuvent y échapper et les trois que nous avons observés y font référence à des stades divers avec une participation active des élèves de P_B . La congruence est également forte avec les inclusions : « tout décimal est un rationnel (ou quotient) » et « **D** ⊂ **Q** ».

Cette forte congruence, bien qu'intéressante pour les élèves, l'est moins du point de vue cognitif. Après avoir posé la coordination des registres comme un des deux points-clés de l'apprentissage, Duval (1996) précise le type de coordination dont il affirme l'importance :

Cette coordination se traduit par la capacité de changer de registre en cas de non-congruence. En effet, un changement de registre s'effectue spontanément dans toutes les situations où il y a congruence entre les représentations qui constituent le départ et l'arrivée de la conversion. Car, dans ce cas, la représentation, du registre de départ est comme transparente à celle du registre d'arrivée. Mais lorsqu'il n'y a plus congruence, la conversion requiert la capacité de discriminer les unités significatives pertinentes ou les valeurs visuelles pertinentes à la fois dans la représentation du registre de départ et dans celle du registre d'arrivée, étant donné qu'il n'y a plus de correspondance directe possible entre elles. Des performances obtenues pour des tâches dont l'accomplissement n'implique pas de façon décisive des changements de registre peuvent donc être trompeuses sur la portée et la valeur des acquisitions.

Nous verrons en section 4 qu'effectivement les réussites des élèves masquent de sérieux problèmes.

2. La *doxa* ensembliste

Cette analyse sémiotique nous permet, à travers l'étude des manuels des classes de troisième et de seconde, de dévoiler une puissante *doxa*⁹.

2.1. La classe de troisième : une impossible synthèse

Comme il est écrit dans le programme en page 77, la classe de troisième se doit « de faire une première synthèse sur les nombres avec un éclairage historique et

⁹ Le terme *doxa* est utilisé dans son sens platonicien pour désigner le discours commun, l'opinion commune par opposition à la pensée personnelle et réfléchie.

une mise en valeur des processus algorithmiques »¹⁰. Le registre R1 est absent des textes officiels du collège, hormis le symbole d'appartenance qui figure au programme et le symbole de non appartenance qui est aussi utilisé¹¹. Ils constituent des indicateurs importants dont nous cherchons l'utilisation dans le chapitre sur le théorème de Thalès puisqu'il s'agit du seul endroit du programme où l'on trouve des expressions du type « point sur une droite » qui peut être formalisé à l'aide de ce symbole. Mais afin de produire une analyse plus fine nous avons besoin d'autres indicateurs. Nous relevons les éventuelles déclarations des ensembles de nombres ainsi que l'expression « ensemble de nombres ». Nous regardons également si une classification des nombres est produite et si des exercices sur la nature des nombres sont proposés. Le résultat de nos investigations se trouve en Annexe 1.

Sur les 7 manuels de troisième analysés, deux types de manuels se distinguent particulièrement bien : le type M0 constitué par les manuels qui n'utilisent pas, ou très peu, les symboles de R1 ni d'expressions issues de C1 et le type M1 constitué des manuels qui les utilisent de manière assumée. On remarque immédiatement que les manuels du type M1 font tous une synthèse sur les nombres en proposant une classification et des exercices sur la nature des nombres alors que ceux du type M0, à une exception près, n'en font aucune. Par suite, 6 manuels sur les 7 ne suivent pas le programme soit parce qu'aucune synthèse n'est faite soit parce que le registre R1 et le cadre C1 sont utilisés pleinement. Les six manuels en question supposent, implicitement, l'assertion suivante : *aucune synthèse sur les nombres ne peut être réalisée sans les ensembles de nombres*. Cette assertion est évidemment fausse.

Observons le manuel *Nouveau Pythagore* : il produit une synthèse sur les nombres en restant bien dans C0, avec le réseau de registres R0, tout en proposant un regard historique. Ce que propose ce manuel est en fait parfaitement banal puisqu'il se contente de suivre les instructions du programme qui demande un « éclairage historique ». Il faut donc que la force de cette fausse assertion soit grande pour se retrouver au cœur de la grande majorité des manuels et faire fi des programmes.

Cette fausse assertion révèle une *doxa* : il suffit de parler d'ensemble de nombres pour produire une synthèse sur les nombres. Elle s'accompagne d'un corollaire : il est inutile de chercher, ou proposer, une synthèse sur les nombres qui ne soit pas ensembliste.

¹⁰ Pour notre propos, le nouveau programme de troisième, en vigueur à la rentrée 2008, diffère très peu du programme de 1999 étudié dans cet article. On note toutefois la disparition des programmes du mot *irrationnel* et des processus algorithmiques.

¹¹ Un peu comme les symboles $=$ et $\neq$ dont seul le premier est déclaré dans les textes officiels.

2.2. La classe de seconde

2.2.1. Une stabilité retrouvée

Nous nous intéressons maintenant à la manière dont est traitée la synthèse sur les nombres en classe de seconde. On lit en page 9 du Programme de Seconde de 2002 que le premier objectif est « d’approfondir la connaissance des différents types de nombres », puis en page 10 : « nature et écriture des nombres. Notations **N**, **Z**, **D**, **Q**, **R**. ». La synthèse n’apparaît explicitement que dans l’Accompagnement de programme, en page 13 : « Le programme rassemble sous un titre unique un bilan sur les ensembles de nombres, les problèmes de calculs numériques et algébriques et l’étude des fonctions. C’est une invitation forte à chaque enseignant pour qu’il construise son cours en faisant interagir ces différents éléments : [...] » suivi par une liste de ces éléments où l’on note l’absence significatives des ensembles de nombres. Puis, dans la sous-rubrique « **Nombres, Nature et écriture des nombres** » : « On fera une synthèse des connaissances rencontrées jusque-là par les élèves et on introduira les notations usuelles des différents ensembles. Les élèves devront savoir reconnaître à quels ensembles appartiennent les nombres rencontrés. »

Comme l’on peut s’y attendre avec la *doxa*, tous les manuels s’engouffrent dans le registre R1 pour produire une synthèse sur les nombres. Il est à noter que ce point de vue est tout à fait conforme au programme de seconde, même si ce dernier distingue clairement la synthèse sur les nombres et les ensembles de nombres.

2.2.2. Le symbole d’inclusion, nouveau révélateur de la doxa

Le nouveau symbole d’inclusion $\subset$, qui apparaît dans l’accompagnement de programme de la classe de seconde, est utilisé quasi-systématiquement dans le chapitre sur les ensembles de nombres. Nous comparons son utilisation avec le chapitre de géométrie dans l’espace où il nous paraît avoir tout à fait sa place. Malgré l’absence de ce symbole et de l’expression « est inclus dans » dans les textes officiels, nous faisons l’hypothèse qu’à l’instar de l’utilisation du symbole $\in$ au collège, le symbole $\subset$ peut être utile pour désigner les positions relatives d’une droite et d’un plan. Or, si le symbole d’inclusion apparaît dans la grande majorité des manuels au chapitre sur les ensembles de nombres, il n’est utilisé dans le chapitre de géométrie de l’espace dans moins de la moitié des manuels (cf. Annexe 3). Ainsi, le registre R1 qui fait l’unanimité pour la synthèse sur les nombres a une utilisation partagée lorsque l’on sort du discours sur les ensembles de nombres.

Ce phénomène est très surprenant et renforce celui observé dans la classe de troisième. En effet, il est toujours possible de choisir d’utiliser ou non un symbole. Ce choix didactique est parfaitement détecté dans le chapitre de géométrie dans

l'espace pour le symbole d'inclusion. Mais il semble, une fois de plus, que lorsque l'on traite des ensembles de nombres, il est impossible de faire un quelconque choix puisque l'on se doit d'utiliser le symbole d'inclusion pour ces ensembles. De même qu'en troisième, la voie semble toute tracée, la *doxa* montre le chemin. Le symbole d'inclusion révèle la *doxa* dans la classe de seconde.

2.3. La *doxa* en question

Dans cette section nous montrons, sur des exemples en classes, que l'apport du registre R1 ne résout pas les problèmes d'ordre numérique. Ceci n'est d'ailleurs pas surprenant une fois la *doxa* délaissée. Nous présentons des moments des cours observés où il est clair, contrairement à l'habitude et au discours commun, que les ensembles de nombres ne peuvent suffire pour faire une synthèse sur les nombres. Les problèmes sont révélés par les réactions, très liées au sémiotique, des élèves.

2.3.1. Des entiers un peu moins naturels

Les différents registres qui composent R0 apparaissent dans les cours des trois enseignants. En particulier, P_A et P_B demandent aux élèves des nombres qui servent de référence pour le cours. Les élèves ont beaucoup de mal à sortir des entiers et donnent des entiers de plus en plus grands pour répondre aux désirs de leurs professeurs qui en veulent des « plus compliqués ».

Le passage suivant, du début du cours de P_B, montre que la nature des nombres dans R0 est problématique pour les élèves. Le professeur est d'ailleurs embarrassé car il n'avait pas anticipé les réactions de ses élèves. P_B vient juste de finir la partie sur l'ensemble **N** et veut introduire l'ensemble **Z** :

P_B : J'ai parlé d'entiers naturels, ce qui laisserait penser qu'y'a des entiers qu'on ne qualifiera pas de naturels. Dites-moi, parmi les exemples qui sont au tableau, est-ce que vous ne voyez pas un nombre entier un peu moins naturel que 36.

Elèves : 10 puissance 2

P_B : 10 puissance 2, c'est, c'est quoi si on l'écrit

Elèves : c'est 100

P_B : c'est 100, donc 100, 36, c'est un nombre un petit peu de la même nature, c'est un nombre entier.

Elèves : racine de 18

P_B : j'ai dit un nombre entier, ah ! Racine de 18, alors là, racine de 18 s'écrit bien avec un nombre entier, mais tu vois bien qu'on a modifié, tu vois bien qu'on n'a pas 18, bon, c'est racine de 18, hein, c'est, c'est pas 18, c'est pas un nombre entier. Tout à l'heure, c'est pas un nombre entier, on y reviendra...

Elèves : -4

P_A, à la fin de son cours a eu le même genre de problème concernant 3^2 et son éventuelle irrationalité. Nous remarquons que la nature des nombres dans R0 pose problème, même au niveau le plus élémentaire. Le seul apport du registre R1 ne

peut faire disparaître ces problèmes. Un travail spécifique dans le cadre numérique est nécessaire pour répondre aux questions relatives aux natures de 10^2 , 3^2 et $\sqrt{18}$.

2.3.2. Les développements décimaux illimités évincés

Ce nouveau passage de P_B , voir ci-dessous, montre que les développements décimaux illimités arrivent immédiatement après l'écriture décimale des décimaux, sans passer par Q et les rationnels. A partir du registre décimal, la distinction décimal/idécimal (Bronner, 1997) est bien plus naturelle que la distinction rationnel/irrationnel communément admise.

P_B : Alors dites-moi, là ça se complique un p'tit peu, mais, est-ce que vous n'avez pas envie de fabriquer un nouvel ensemble ? A partir de ce qu'on vient de voir. Bah on a vu que les décimaux ça suffisait pas puisqu'il y avait des nombres vous m'avez donné une fraction, celle-là était un décimal, l'autre n'était pas un décimal. Qu'est-ce qu'on pourrait...

Elève : (*inaudible*)

P_B : tu as envie de dire les nombres ? Vas-y dis-le

Elève : qui n'ont pas de fin

P_B : Qui n'ont pas de fin, Ah ! C'est une idée ça. C'est à dire que tu voudrais fabriquer un ensemble dans lequel il y ait des nombres comme celui-ci, avec des chiffres, in-infinité de chiffres après la virgule. Ben oui c'est ça. Alors ce que l'on va faire déjà, et on voit que c'est difficile à, enfin difficile pour vous à le dire, à le trouver, mais on a vu que ce nombre là qui se notait avec une fraction - d'accord ? - et bien n'était pas un nombre décimal. Alors on n'a qu'à considérer, alors vous allez mettre l'ensemble des rationnel, des nombres rationnels, l'ensemble des nombres rationnels, alors ce sera le grand 4.

P_B est un peu gêné par le bon sens de ses élèves qui va à l'encontre de son plan de cours (il venait d'exposer D et s'apprêtait à introduire Q). Il y met toute son autorité avec un « grand 4 » pour que Q arrive en scène. On sent ici tout le poids de la *doxa* : après D , c'est Q .

3. Analyse praxéologique

L'analyse de la section 1 a permis de préciser l'apport sémiotique du registre R1 et la section 2 a proposé une explication de son introduction. Dans cette section, nous étudions plus spécifiquement le fonctionnement mathématique induit par ce nouveau registre. Afin de préciser les conversions et les traitements en jeu, nous faisons une analyse praxéologique. Nous nous focalisons sur la classe de seconde pour deux raisons. D'une part la synthèse sur les nombres est pratiquée en tout début de cette année scolaire, ce qui implique que les praxéologies relatives à R0 des classes de troisième et de seconde sont potentiellement identiques. D'autre part, nous voulons comparer les organisations mathématiques relatives à R0 et R1,

et bien que R1 apparaisse parfois en classe de troisième, sa présence n'est ni systématique, ni complète, ni officielle, contrairement à la classe de seconde.

3.1. Les types de tâches

Nous exposons les types de tâches relatifs à la nature des nombres qui apparaissent dans les manuels de seconde en nous limitant aux plus généraux afin de ne pas multiplier les notations.

3.1.1. Les types de tâches

L'analyse des manuels de troisième et de seconde a permis d'identifier des types de tâches relatifs à la nature des nombres. Les types de tâches relatifs à R0 sont déjà visibles en troisième et semblent être remplacés en seconde par ceux relatifs à R1. Nous les regroupons dans le tableau ci-dessous. Nous avons choisi de rassembler dans un même type de tâches *montrer* et *reconnaître*¹², ainsi que *est* et *n'est pas* alors qu'il ne s'agit manifestement pas des mêmes genres de tâches. La distinction n'aurait fait que compliquer le propos sans que le gain soit significatif. Ces types de tâches recouvrent en outre des types de tâches que l'on trouve effectivement comme *montrer, ou reconnaître, qu'un nombre est un décimal non entier* (par T_0^d et T_0^z).

R0	R1
T_0 : Trouver la nature d'un nombre	T_1 : Trouver le plus petit ensemble de nombres contenant un nombre
T_0^n : montrer, ou reconnaître, qu'un nombre est, ou n'est pas, un entier naturel	T_1^N : montrer qu'un nombre appartient, ou n'appartient pas, à $\mathbf{N}$
T_0^z : montrer, ou reconnaître, qu'un nombre est, ou n'est pas, un entier relatif	T_1^Z : montrer qu'un nombre appartient, ou n'appartient pas, à $\mathbf{Z}$
T_0^d : montrer, ou reconnaître, qu'un nombre est, ou n'est pas, un décimal	T_1^D : montrer qu'un nombre appartient, ou n'appartient pas, à $\mathbf{D}$
T_0^q : montrer, ou reconnaître, qu'un nombre est un rationnel	T_1^Q : montrer qu'un nombre appartient, ou n'appartient pas, à $\mathbf{Q}$
T_0^{ir} : montrer, ou reconnaître, qu'un nombre est un irrationnel	T_1^R : montrer qu'un nombre appartient, ou n'appartient pas, à $\mathbf{R}$

Pour simplifier les notations, T_0^x fera référence aux cinq types de tâches T_0^n , T_0^z , T_0^d , T_0^q et T_0^{ir} , et T_1^X aux cinq types de tâches T_1^N , T_1^Z , T_1^D , T_1^Q et T_1^R .

En revanche nous avons exclu de notre propos les types de tâches du style *résoudre dans X une équation polynomiale*, où $\mathbf{X}$ est un ensemble de nombres. Ceux-ci sont plus en rapport avec une autre organisation mathématique et ce malgré leurs présences non négligeables dans le chapitre sur les ensembles de nombres. Par

¹² *Reconnaître* signifie qu'aucun traitement n'est requis et *montrer* signifie qu'un calcul ou une preuve est nécessaire (cf. section 3.3).

ailleurs, on remarque à ce propos que les intervalles sont une fois de plus exclus de ces types de tâches alors qu'il est bien plus courant de devoir résoudre une équation dans $[-1 ; 1]$ ou $[0 ; +\infty[$ que dans **D** ou **Q**.

3.1.2. La correspondance des types de tâches

Les types de tâches relatifs à R0, hormis les deux derniers, se retrouvent convertis sans autre modification que la référence au registre R1. Même les types T_0 et T_1 sont en parfaite correspondance. Pour T_0 il s'agit bien de la nature et non d'une nature car bien sûr -5 est décimal mais ce n'est pas la réponse attendue pour T_0 . Cette imprécision disparaît avec T_1 , son correspondant dans R1, même si la référence à la liste **NZDQR** est sous-entendue. T_1 se décompose fréquemment de manière explicite avec les cinq types de tâches relatifs aux cinq ensembles dans un tableau où il s'agit de mettre une croix, ou le symbole d'appartenance, pour dire si un nombre appartient ou non à l'ensemble en question.

Intéressons-nous à la dernière ligne du tableau et aux derniers types de tâches. Dans R0, c'est T_0^{ir} qui regroupe les tâches problématiques en laissant à T_0^q les cas plus simples tandis que dans R1, c'est le type de tâches T_1^Q qui est problématique. La correspondance entre les types de tâches de R0 et de R1 s'opère de manière couplée pour les deux dernières natures : $(T_0^q ; T_0^{ir}) \leftrightarrow (T_1^Q ; T_1^R)$.

3.1.3. Le nécessaire couplage

Pour une bonne correspondance directe entre les types de tâches des deux colonnes, il faudrait soit considérer le type de tâches T_0^r (*montrer, ou reconnaître, qu'un nombre est, ou n'est pas, un réel*) soit le type de tâches T_1^{RQ} (*montrer qu'un nombre appartient à **R** mais pas à **Q***) qui correspondraient respectivement à T_1^R et à T_0^{ir} . Les absences de ces deux types de tâches rendent le couplage nécessaire.

Le type de tâches T_0^r n'apparaît que deux fois¹³ dans le manuel **q**, en exercice 77 page 62 où il faut dire si « $-1 ; 2/3$ et π sont des réels » est vrai ou faux, et dans le manuel **I** en exercice 41 page 64 : « Parmi les écritures suivantes, quelles sont celles qui indiquent un nombre réel ? $\sqrt{5} ; \sqrt{(-2)^2} ; \sqrt[3]{3} ; \sqrt{5+\sqrt{6}} ; \sqrt{-16}$ ». Même si, pour ce dernier, la question est mal posée car il faut plutôt la comprendre comme *quelles sont les écritures qui ont du sens*, ce qui ne renvoie pas explicitement à T_0^r mais au bon usage des registres sémiotiques. L'utilisation extrêmement faible, et quasi inexistante, de T_0^r est sans doute due à son *absurdité* car à quoi bon montrer qu'un nombre est un nombre.

Pour les mêmes raisons, le type de tâches T_1^R est aussi absurde. Mais l'enseignement des mathématiques au lycée nécessite l'ensemble **R**, on peut donc en disposer. De plus, cet ensemble est requis dans les nombreux exercices sous

¹³ Il apparaît également deux fois dans le manuel *Diabolo* de troisième.

forme de tableau où il faut répondre si oui ou non un nombre appartient aux ensembles de nombres : il serait étrange de ne mettre que des « non ». De ce fait, il n'est pas surprenant que les occurrences du type de tâches T_1^{RQ} soient peu nombreuses – voir par exemple l'exercice 4 du manuel **f**. Mais il semble également que si T_1^{RQ} n'a pas sa place aux côtés des T_1^N , T_1^Z , T_1^D et T_1^Q c'est aussi qu'il ne leur est pas homogène : $R \setminus Q$ n'est pas un ensemble de nombres au sens où il ne fait pas partie *des ensembles de nombres*. L'ensemble $R \setminus Q$ est exclu des ensembles de nombres au même titre que les intervalles. La raison réside peut-être dans les structures algébriques intéressantes du point de vue de EMS puisque $R \setminus Q$ et la plupart des intervalles ne sont stables ni par la somme ni par le produit. Les structures algébriques, déjà discutées en section 1.2.3, bien qu'absentes semblent influencer l'organisation mathématique de EMS.

3.2. Une organisation mathématique incomplète

Rapidement, nous remarquons à l'étude des manuels que nous ne disposons que d'une unique technique, notée τ_1 , faisant intervenir le registre R1 : *un nombre qui appartient à un ensemble de nombres appartient à tous les ensembles dans lequel il est inclus*. Citons, par exemple, le manuel **i**, page 27 : « indication : ne pas oublier que si un nombre appartient à un ensemble, il appartient aussi à tous les ensembles *plus grands* ».

Les inclusions entre les cinq ensembles sont très importantes, comme il est dit dans le manuel **e**, page 45 : « La propriété $N \subset Z \subset D \subset Q \subset R$ permet de dire que si un nombre est élément d'un ensemble, il est aussi élément de tout ensemble écrit à sa droite. ». Ainsi, les inclusions, que ce soit en chaîne ou deux à deux, constituent l'élément le plus important d'une nouvelle technologie θ_1 puisqu'il explique, produit et éclaire l'unique technique τ_1 . Il se trouve par ailleurs très souvent dans des encarts intitulés, par exemple, « A retenir » ou « Point repère ».

Nous obtenons l'*organisation mathématique* relative à la nature des nombres dans R1 suivante $[T_1, T_1^X; \tau_1; \theta_1]$. Malheureusement, les types de tâches ne peuvent être accomplis puisque tout ce que l'on sait c'est, par exemple, « si $x \in Z$, alors $x \in Q$ ». Mais comment savoir si $x \in Z$? Ce n'est pas une organisation mathématique et nous devons affiner notre analyse.

3.3. L'organisation mathématique de C0

Pourtant, les types de tâches T_1 et T_1^X sont accomplis en seconde. La raison est simple : implicitement on utilise une autre organisation mathématique OM_0 que nous allons expliciter. Tout s'éclaire lorsque l'on entre dans le détail des techniques.

3.3.1. La technique de reconnaissance d'écriture

Les manuels précisent souvent la méthode :

- « Méthode : Pour trouver la nature d'un nombre, on recherche le plus petit ensemble de nombres auquel il appartient. Très souvent, on simplifie ce nombre à l'aide des règles de calcul, mais en gardant toujours la valeur exacte ! », manuel **j** page 13 ;
- « Méthode : Pour reconnaître la nature d'un nombre, on commence par l'écrire le plus simplement possible. », manuel **q**, page 49.

La méthode est claire : c'est bien sur le nombre lui-même, ou plutôt sur ses écritures, que l'on agit. Le but est d'obtenir, par une certaine technique (cf. ci-dessous), une écriture à partir de laquelle l'on sait donner la nature dans R_0 . Cette reconnaissance d'écriture est une technique, nous la notons $\tau_0^{\text{écrit}}$. Elle recouvre pour l'essentiel la fonction apophantique de la langue naturelle nécessaire à R_0 pour avoir un discours sur la nature des nombres (cf. sections 1.2.2 et 1.3.1).

3.3.2. Les techniques de calcul

La citation précédente du manuel **j** fait également référence à des calculs, c'est-à-dire des traitements relatifs aux registres de R_0 . Nous considérons les calculs qui peuvent être interprétés comme des traitements relatifs à un même registre de R_0 , sans conversion, comme une technique τ_0^{calc} . Bien entendu, τ_0^{calc} recouvre plusieurs techniques distinctes, mais il n'y a en général aucune ambiguïté sauf pour les fractions d'entiers : on peut interpréter a/b comme une opération à faire entre deux entiers ou comme un nombre écrit dans le registre fractionnaire. Lorsque la division *tombe juste* (comme pour $-48/3$, cf. la section 3.4.2) on utilise la technique τ_0^{calc} . Si ce n'est pas le cas, nous devons utiliser une nouvelle technique, notée τ_0^{div} , expliquée en page 15 du manuel **g** : « Un quotient d'entiers non nuls a/b est, par définition, un rationnel. En divisant a par b , on peut savoir si a/b appartient également à **N**, **Z** ou **D**. » Précisons que cette technique n'est effectivement pas englobée dans la technique τ_0^{calc} car, dans le cas où a n'est pas divisible par b , elle entraîne une conversion de registres.

3.3.3. Les techniques relatives au registre fractionnaire

Nous avons trouvé deux techniques de transformation d'écriture fractionnaire qui permettent essentiellement de traiter T_0^d . La première, que nous notons τ_0^{fd} , permet de mettre une fraction sous forme d'une fraction décimale. Cette technique ne peut être efficace que si le nombre est décimal. Or, comme on ne le sait pas *a priori*, on préfère souvent utiliser la technique τ_0^{fi} qui s'appuie sur une mise sous forme irréductible de la fraction et une décomposition du dénominateur en facteurs premiers.

3.3.4. Les techniques qui s'appuient sur l'écriture décimale

Nous relevons la technique τ_0^{ddp} de reconnaissance de la nature d'un nombre écrit dans le système décimal, que le développement soit fini ou infini périodique – elle est proche de τ_0^{div} et τ_0^{ecrit} . Cette technique est justifiée par une technique, notée $\tau_0^{\text{équ}}$, de conversion de registres, qui est une sorte de réciproque à τ_0^{div} : *montrer qu'un développement décimal périodique est un rationnel par l'utilisation d'une équation*¹⁴.

La technique $\tau_0^{\text{équ}}$ apparaît dans tous les manuels sans jamais être appliquée aux décimaux¹⁵. On remarque alors que la conversion du registre décimal dans le registre fractionnaire, type de tâches noté $T_0^{\text{d} \rightarrow \text{f}}$, a une place très limitée, voire nulle, dans les manuels. Sans doute est elle considérée comme évidente. Toutefois, ce type de tâches se révèle être très problématique pour les élèves de P_A et P_B . S'il est aisé de trouver une fraction égale à 32,5 en passant au double, les élèves se heurtent vite à des difficultés car ils ne pensent pas à multiplier par une puissance de 10. Cette dernière technique, notée $\tau_0^{\text{d} \rightarrow \text{f}}$, n'est produite et institutionnalisée qu'après un long travail improvisé par les enseignants. Notons que l'on peut interpréter cette nouvelle technique comme une adaptation de $\tau_0^{\text{équ}}$.

3.3.5. Les techniques pour montrer l'irrationalité

Les techniques pour prouver l'irrationalité d'un nombre sont finalement toutes fondées sur une *démonstration par l'absurde*. Elles se limitent en général aux expressions affines contenant des radicaux ou π qui sont reconnus comme des irrationnels notoires, nous la notons τ_0^{irr} . On note également quelques techniques de démonstration d'irrationalité de certaines racines carrées, nous les regroupons sous une unique technique, notée $\tau_0^{\text{irr}\sqrt{}}$ – la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ est un thème d'étude. La portée de ces techniques est bien plus grande que l'exploitation qui en est faite. Nous ne nous y attardons pas.

3.3.6. La praxéologie numérique

Nous pouvons maintenant expliciter l'organisation mathématique propre à la nature des nombres dans le registre R_0 :

$$OM_0 : [T_0, T_0^x, T_0^{\text{d} \rightarrow \text{f}}; \tau_0^{\text{calc}}, \tau_0^{\text{ecrit}}, \tau_0^{\text{div}}, \tau_0^{\text{fd}}, \tau_0^{\text{fi}}, \tau_0^{\text{ddp}}, \tau_0^{\text{d} \rightarrow \text{f}}, \tau_0^{\text{équ}}, \tau_0^{\text{irr}\sqrt{}}, \tau_0^{\text{irr}}; \theta_0]$$

¹⁴ Dans cette technique, l'équation ne permet pas la détermination d'une inconnue, puisque le nombre est connu, mais mène à une nouvelle écriture. L'objet *équation* acquiert un nouveau statut qui se démarque de son rapport institutionnel usuel.

¹⁵ Un élément technologique important sur les décimaux passe de ce fait complètement inaperçu : les décimaux ont deux écritures décimales. Seuls quelques manuels proposent de montrer l'identité $0,999\dots=1$, mais sans aller plus loin.

où θ_0 est une technologie sur les différentes représentations des nombres avec les opérations usuelles. Elle est relative aux décimaux (développement décimal et fractions décimales), aux rationnels (développements décimaux périodiques et fractions d'entiers), à certains irrationnels comme les racines carrées de rationnels et le nombre π , et contient un peu d'arithmétique des nombres entiers.

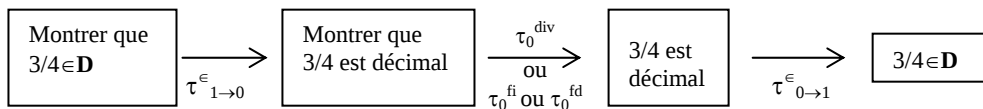
3.4. L'organisation mathématique OM_1

Il nous faut maintenant expliquer comment cette organisation mathématique OM_0 est utilisée pour exécuter les types de tâches relatifs au registre R1.

3.4.1. Les techniques d'expansion discursive

Pour connecter les types de tâches relatifs à R1 et OM_0 il est nécessaire de considérer une nouvelle technique $\tau_{0 \rightarrow 1}^\epsilon$ afin de pouvoir recourir à OM_0 : *exprimer dans le registre R1 la nature d'un nombre exprimée dans R0*. Elle est explicitée en page 8 du manuel **d** : « Pour exprimer que n est un entier naturel, on écrit $n \in \mathbf{N}$. » Cette technique est essentielle pour plonger les techniques de OM_0 dans le registre R1. Par exemple on utilise $\tau_0^{\text{écrit}}$ pour reconnaître que $2/3$ est un rationnel puis $\tau_{0 \rightarrow 1}^\epsilon$ pour écrire $2/3 \in \mathbf{Q}$. Cette technique décrit la fonction d'expansion discursive de la langue naturelle (cf. le dialogue entre P_A et ses élèves en section 1.3.1).

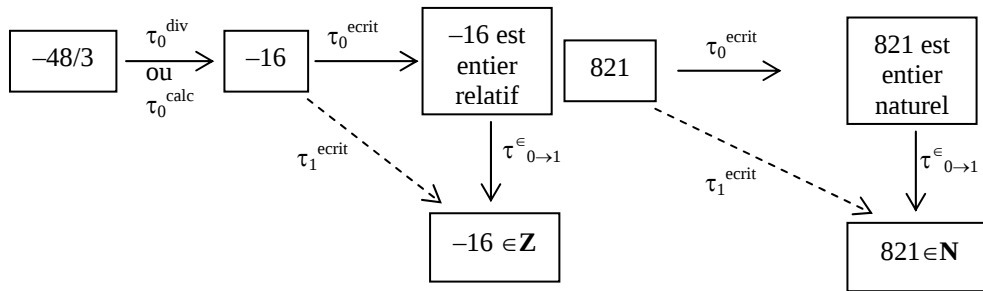
Il est alors naturel de penser à une autre technique, $\tau_{1 \rightarrow 0}^\epsilon$, réciproque de la précédente : *exprimer une relation d'appartenance à un ensemble de nombres dans R0*. Et en y regardant de plus près, elle est nécessaire pour certaines tâches, comme par exemple dans l'exercice 2, page 11, du manuel **f** : « montrer que $3/4 \in \mathbf{D}$ ». On peut décrire le fonctionnement de la manière suivante :



Ces deux nouvelles techniques $\tau_{0 \rightarrow 1}^\epsilon$ et $\tau_{1 \rightarrow 0}^\epsilon$ passent quasiment inaperçues. Quelques rares manuels les déclarent, à condition de lire entre les lignes, comme en page 15 du manuel **g** : « -5 est un entier négatif. Donc $-5 \in \mathbf{Z}$ ».

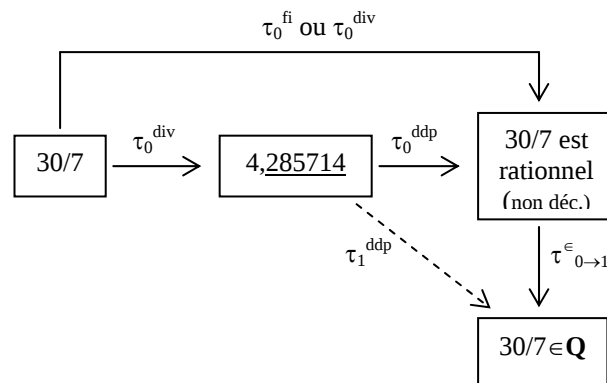
3.4.2. De nouvelles techniques de reconnaissance d'écriture

On peut comprendre le fonctionnement qui juxtapose les techniques $\tau_0^{\text{écrit}}$ et $\tau_{0 \rightarrow 1}^\epsilon$ comme la production d'une nouvelle technique $\tau_1^{\text{écrit}}$. Nous explicitons ce fonctionnement par les trois schémas suivants, qui illustrent la solution de l'exercice page 9 du manuel **r** : « • $-48/3 = -16$, donc $-48/3 \in \mathbf{Z}$. • $13/5 = (13 \times 2)/(5 \times 2) = 26/10$, donc $13/5 \in \mathbf{D}$. • $30/7 = 4,285714$ a une écriture décimale périodique (qui n'est pas 0), donc $30/7 \in \mathbf{Q}$. • $-7 \in \mathbf{Z}$. • $821 \in \mathbf{N}$. »



Le cas de $-48/3$, tout comme celui de $13/5$, montre qu'un traitement dans R0 est nécessaire avant de pouvoir procéder à une conversion dans R1. En revanche, le cas de 821, tout comme celui de -7 , est plus direct puisque la forme de l'écriture est immédiatement reconnaissable. On peut sans doute penser que cette nouvelle technique τ_1^{ecrit} est bien intégrée par les professeurs, mais on peut en douter pour les élèves, surtout si son utilisation reste du domaine de l'implicite. On peut une fois de plus espérer que la forte congruence entre R0 et R1 vienne à leur secours.

Il reste enfin le cas un peu plus complexe de $30/7$ où, selon notre nomenclature, c'est τ_0^{ddp} qui se retrouve convertie dans R1. Mais notons tout de même que si le manuel **r** procède de cette manière, la plupart des autres manuels auraient sans doute utilisé soit τ_0^{div} directement sans écrire un développement décimal périodique ou alors la technique τ_0^{fi} qui donne directement le résultat puisque la fraction est sous forme irréductible.



Cette production de nouvelles techniques provient d'une caractéristique commune à τ_0^{ddp} et τ_0^{ecrit} : ces deux techniques utilisent la fonction apophantique de la langue naturelle dont on n'a plus besoin une fois le registre R1 institué. Nous rejoignons le

propos de la section 1.2.2 sur l'indépendance des mathématiques de la langue naturelle.

3.4.3. La nouvelle organisation mathématique

Finalement, à OM_0 constituée pour l'essentiel en fin de collège, on ajoute le registre R1 ce qui fait émerger la nouvelle organisation mathématique OM_1 suivante :

$$[T_0, T_0^x, T_1, T_1^X; \tau_0^{calc}, \tau_0^{ecrit}, \tau_0^{div}, \tau_0^{fd}, \tau_0^{fi}, \tau_0^{ddp}, \tau_0^{equ}, \tau_0^{ir\sqrt{}} , \tau_0^{irr}, \tau_1, \tau_{0 \rightarrow 1}^{\infty}, \tau_{1 \rightarrow 0}^{\infty}; \theta_0, \theta_1]$$

Toutefois, la liaison entre les deux technologies θ_0 et θ_1 est loin d'être claire et ne semble pouvoir être faite que grâce à $\tau_{0 \rightarrow 1}^{\infty}$ et $\tau_{1 \rightarrow 0}^{\infty}$. Nous ne précisons pas le niveau théorique qui ne peut réellement apparaître dans EMS. En effet, la théorie Θ relative à cette organisation mathématique OM_1 réconcilie les deux cadres et les différents registres : c'est en se fondant sur la théorie des ensembles que les nombres sont construits de la manière la plus rigoureuse.

Nous pouvons désormais répondre à la question de l'apport de R1 pour la synthèse sur les nombres : rien de vraiment nouveau n'apparaît du point de vue mathématique. En particulier, cette nouvelle praxéologie ne naît pas d'un manque de technique, contrairement au cas général que remarque Chevallard (1999). Nous concluons une deuxième fois que les ensembles de nombres ne suffisent pas, loin s'en faut, pour éclaircir les problèmes relatifs aux nombres : l'analyse praxéologique montre que tout se joue dans OM_0 . La *doxa* recouvre ces problèmes d'une chape d'ensembles, faisant comme si on avait tout dit, tout résolu, alors que c'est bien plutôt dans OM_0 qu'il faudrait puiser la synthèse désirée.

3.5. Une technologie fondée sur les développements décimaux

La technologie θ_0 est partielle alors que, dans la perspective d'une synthèse sur les nombres, on pourrait espérer une technologie permettant un lien entre les différentes représentations des nombres réels. Il nous semble que cette technologie est à portée de EMS même si cela entraînerait une modification profonde de OM_0 . Nous avons constaté en section 2.3.2 que les élèves n'ont pas de mal à imaginer les développements décimaux illimités à partir des décimaux. Il ne reste plus qu'à distinguer les différentes formes de développements décimaux recouvrant les catégories classiques des nombres. Mais il faudrait pour cela que les développements décimaux, finis, infinis périodiques ou infinis non périodiques, soient déclarés comme de *vrais* nombres.

L'analyse des manuels montre que le problème semble résider dans le fait qu'une écriture décimale illimitée n'est pas déclarée explicitement comme un nombre sauf dans le cas périodique. Alors que les formulations du style « Soit $x=0,12121212\dots$ » de l'exercice 102 page 27 du manuel **n** apparaissent

fréquemment, seuls deux manuels proposent des développements décimaux non périodiques : le manuel **e**, en page 61, qui propose le nombre de Champernowne¹⁶ et le manuel **o** qui propose ce même nombre en page 34 et le nombre 0,12112111211112... en page 322 en précisant, pour ce dernier, que l'on peut « construire à volonté » des nombres irrationnels.

Pour ce dernier nombre il est relativement évident qu'il n'est pas rationnel puisque non périodique. Le recours à une démonstration rigoureuse n'est pas nécessaire, contrairement au cas de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ bien plus problématique pour les élèves. Une simple reconnaissance de l'écriture avec une compréhension de l'algorithme de formation des décimales suffit. Il s'agit ici simplement d'une généralisation de la technique τ_0^{ddp} qui prendrait en charge les développements décimaux quels qu'ils soient. Ce serait la technique de reconnaissance de la nature d'un nombre la plus générale. Bien entendu, elle serait inopérante pour des nombres dont l'algorithme de formation des décimales est inconnu ou complexe, comme pour $\sqrt{2}$ ou π .

Il faudrait également généraliser bon nombre de techniques. Ces généralisations sont pour la plupart problématiques et nous ne citons que celle qui permettrait de faire la somme de deux développements décimaux illimités. Sans vouloir à tout prix obtenir une technologie parfaite, on peut proposer des sommes de développements décimaux illimités relativement simples à traiter. On obtiendrait ainsi une technologie sur les nombres réels qui réaliserait bien mieux une synthèse que l'organisation mathématique actuelle.

4. Les représentations graphiques des ensembles de nombres

Les représentations graphiques des cinq ensembles de nombres apparaissent dans tous les manuels de seconde et chez les trois professeurs. Elles sont de deux sortes : en droites et en diagrammes-*patates*. Nous allons constater que les premières, bien qu'étant explicitement au programme de la classe de seconde, sont sous-exploitées alors que les secondes, bien que n'apparaissant pas dans le programme de la classe de seconde et son accompagnement, sont très présentes. Nous dégageons à la suite un glissement : la synthèse sur les nombres a disparu au profit d'un bilan sur les ensembles de nombres.

4.1. Les droites

Que ce soit du point de vue historique, épistémologique ou encore du niveau technologico-théorique de OM_1 , et même d'une organisation plus large constituant

¹⁶ Il s'agit du nombre, défini en 1933 par le mathématicien anglais D. Champernowne, qui concatène la suite des entiers écrits dans le système décimal usuel : 0,123456789101112...

la géométrie analytique, la droite numérique réelle est une des représentations les plus importantes des ensembles de nombres. Chez les enseignants et dans les manuels (hormis les manuels **j** et **r**), elle possède une place de grande importance pour représenter, et même définir, **R**. Ceci est tout à fait conforme au programme. Mais la droite ne sert, finalement, qu'à représenter l'ensemble **R** sur laquelle sont représentés quelques nombres. Pourtant, de véritables types de tâches pourraient être proposés aux élèves comme, par exemple, les situations de mesures rationnelles proposées par Ratsimba-Rajohn (1982).

Il est toutefois notable que la représentation en droite ne soit utilisée que dans un seul manuel pour **N** et **Z**, ce que nous avons noté DD pour droite discrète dans le tableau en Annexe 3. Bien entendu, l'on pourrait penser qu'il est compréhensible que les manuels et les enseignants se passent de ce type de représentation pour **D** et **Q** car cela conduirait à une même représentation pour trois ensembles différents. Mais pourquoi cacher ce fait mathématique aux élèves ? Il nous semble que justement cela permettrait de problématiser le passage de **Q**, ou **D**, à **R** par la notion fondamentale de la topologie, la continuité. Cela n'est pas impossible car le manuel **c** adopte cette position – c'est le seul – et propose de « boucher les trous » de la droite rationnelle ce qui permet de commencer à combler le vide didactique des réels (Bronner, 1997a,b).

4.2. Les diagrammes-patates

Comme la représentation précédente, les diagrammes qui représentent les cinq ensembles de nombres par l'intérieur d'une courbe homéomorphe à un cercle, strictement inclus les uns dans les autres, sont très fréquents : seuls 4 manuels et un des 3 professeurs de seconde ne les utilisent pas¹⁷. Pourtant, ce type de représentation n'est nullement mentionné dans le programme de seconde et son accompagnement. On remarque une nouvelle habitude bien ancrée dont on ne discute pas. En outre, un glissement méta-cognitif apparaît puisqu'il est nécessaire d'expliquer la représentation avec les termes de contour, de frontière, de couronne, d'intérieur, d'extérieur, etc. – chacun de ces termes a été utilisé par au moins un professeur parmi les trois. Implicitement on change de cadre et de problème puisque ce sont des notions topologiques.

Ce type de représentation graphique constitue des ostensifs avec une valeur instrumentale (Bosch et Chevallard, 1999) très faible. On ne représente, finalement,

¹⁷ Ce type de diagramme apparaît également dans le manuel *Cinq sur Cinq* de troisième, mais avec une différence notable : **R** n'est pas représenté. A côté des 4 ensembles de nombres **N**, **Z**, **D** et **Q** *inclus* les uns dans les autres figure une *patate* représentant les irrationnels. Cette représentation est contraire à ce que l'on observe dans les manuels de seconde et est à rapprocher de la transformation (rationnels, irrationnels) en **(Q,R)** discutée à la section 3.1.3 pour les types de tâches.

que la chaîne d'inclusions et, par suite, la technique τ_1 – ceci est tout à fait cohérent avec notre analyse de la section 3. Les natures très particulières des cinq ensembles de nombres disparaissent totalement et il ne subsiste que des ensembles, sans aucune structure. Et même s'il est aisé d'augmenter l'intérêt mathématique de cette représentation – on pourrait facilement y faire figurer la distinction positif/négatif – on ne pourra pas éviter de suggérer que ces cinq ensembles sont identiques, à la taille près.

4.2.1. Les variations structurales

L'analyse structurale, dans le registre graphique, que propose Duval (1995, 1996) pour déterminer les unités signifiantes est particulièrement éclairante. On note dans les manuels que toutes les représentations en diagramme des ensembles de nombres sont des portions convexes du plan. La forme des contours est toujours soit des ellipses – pour beaucoup de manuels –, soit des rectangles – mais pas de carrés –, soit des rectangles aux *coins* arrondis¹⁸. A chaque diagramme, ces contours ont toujours des éléments liés : des côtés rectilignes parallèles, les axes focaux des ellipses parallèles ou confondus. Toutes ces variations structurales sont cognitivement non pertinentes, auxquelles il faudrait ajouter le choix des couleurs. La signification de la représentation est contenue dans les cinq courbes strictement incluses les unes dans les autres.

L'observation de la classe de P_B a, sur ce point, été très instructive. Lors de la prise de note du cours, les élèves devaient reproduire ces diagrammes, et certains élèves ont commencé par tracer des cercles en lieu et place des usuelles *patates*. Ceci a soulevé l'indignation du professeur qui signale à plusieurs reprises « pas avec le compas ! ». Pourtant, les élèves ne font que reproduire à l'extrême les unités non signifiantes des manuels, il n'y a en effet pas de différence pour notre propos entre un cercle et une ellipse. Et l'on serait même tenté de dire qu'à défaut de renseignement utile pour les dessiner, soit on prend un instrument de géométrie, soit on trace des courbes isotropes, un peu comme les cercles d'Euler. On ne peut donc pas en vouloir aux élèves car aucun argument valable n'est à opposer à leur comportement.

4.2.2. Un nouveau type de tâches problématique

Pour conclure le chapitre sur les ensembles de nombres, P_B a proposé un exercice qui semblait anodin : placer des nombres dans le diagramme des cinq ensembles de nombres que les élèves avaient reproduits sur leurs cahiers. Il apparaît, à la lecture

¹⁸ Ces contours ne sont pas assumés car aucune explication ou déclaration n'accompagne ces représentations graphiques. Il est à noter que le manuel italien cité par Bagni (2006) expose justement la manière de représenter les ensembles, par des ellipses. Ainsi, le cadre ensembliste dispose d'un nouveau registre de représentation. Cet éclaircissement n'empêche pas les problèmes dans l'utilisation de ce registre (Bagni, 2006).

du passage que nous citons, que les élèves ont beaucoup de mal à s'acquitter de ce nouveau type de tâches que nous notons T_2 .

P_B : on va placer ces nombres donc qu'on a rencontrés au cours de la leçon sur ce schéma. Alors, je vais représenter chaque nombre par un point ou une croix, de manière à savoir pouvoir déterminer parfaitement s'il est à l'intérieur d'un ensemble ou à l'extérieur. Par exemple, si je dois placer par une croix le nombre 3, représenter par une croix le nombre 3 où est-ce que je le mets ?

Elèves : $\mathbf{N}$

P_B : $\mathbf{N}$, 3 est un entier naturel, je fais comme ça, l'avantage de faire une petite croix c'est si jamais vous écrivez sur la frontière ben vous savez que le nombre est à l'intérieur, 3 est un entier naturel. -4, je le place où ?

[...]

P_B : si je le mets là [il désigne l'intérieur de la courbe *entourant* $\mathbf{N}$] je le mets dans $\mathbf{Z}$, ça veut dire que c'est pas assez précis ton truc hein. Qu'est-ce que tu dois dire ?

Elèves : le mettre que dans $\mathbf{Z}$

P_B : Que dans $\mathbf{Z}$! C'est à dire on va être plus précis, dans $\mathbf{Z}$ mais pas

Elèves : pas dans $\mathbf{N}$

P_B : dans $\mathbf{Z}$ mais pas dans $\mathbf{N}$, [...]

suivent d'autres nombres avec quelques problèmes sans grandes incidences

P_B : Chuuut ! Ensuite, $30/7$, où est-ce que vous le mettez $30/7$?

Elèves : dans $\mathbf{R}$

P_B : Ho mais j'ai l'impression que vous n'avez pas bien compris hein. $30/7$ c'est une fraction donc c'est un rationnel, dans $\mathbf{Q}$ mais pas dans $\mathbf{D}$. Quant aux autres $\sqrt{2}$ et π ?

Elèves : dans $\mathbf{R}$

P_B : Dans $\mathbf{R}$ mais pas dans $\mathbf{Q}$, ce sont des irrationnels, ils ne sont pas rationnels, ils sont, on va les noter là.

Ce type de tâches T_2 est en fait très problématique, car il ne s'agit pas seulement de savoir à quels ensembles un nombre appartient, mais aussi à quels ensembles il n'appartient pas, ce qui correspond à peu près à T_1 , et de repérer ensuite la portion du plan où il doit se situer. Ce nouveau type de tâches ne fait pas partie du curriculum officiel. Comme le remarque P_B à la fin de son cours pour $30/7$, les élèves ne semblent pas avoir tout compris, alors que jusque là ils avaient l'air de suivre le propos. Ceci confirme les propos de Duval, cités à la fin de la section 1.3.2 : une forte congruence peut être trompeuse sur les apprentissages des élèves. Car s'il est facile de dire « $30/7 \in \mathbf{Q}$ » à partir de « $30/7$ est un quotient », le problème de la nature de $30/7$ n'est pas complètement élucidé. Ici, une nouvelle conversion est requise, une conversion non congruente cette fois, qui révèle le problème cognitif.

4.3. Le bilan sur les ensembles de nombres

Nous reprenons ici les citations du programme de seconde et de son accompagnement que l'on peut trouver en section 2.2.1 La lecture de ces documents fait apparaître un glissement. Tout d'abord il semble que la synthèse sur

les nombres doit être réalisée par les ensembles de nombres, c'est la *doxa* dont nous avons déjà discuté. Mais en page 13 de l'accompagnement on lit que le programme requiert un « bilan sur les ensembles de nombres ». Ainsi, au lieu de faire un bilan sur les nombres avec les ensembles de nombres, c'est un bilan sur les ensembles de nombres. La différence est grande car les nombres qui étaient déjà relégués au second plan par la *doxa* disparaissent totalement. Ce glissement que l'on observe dans le curriculum officiel peut expliquer la nécessité de trouver une représentation unique pour les cinq ensembles de nombres. Les diagrammes-patates remplissent parfaitement ce rôle d'unification. Mais c'est une représentation *a minima* où l'on a gommé toutes les singularités de ces ensembles si particuliers.

Certains manuels, pas tous, placent quelques exemples de nombres dans ces diagrammes. On peut se demander pourquoi. Pour revenir au nombre ? Pour donner des éléments afin de bien spécifier que les ensembles sont strictement inclus les uns dans les autres ? Du côté des professeurs, le type de tâches T_2 tente de remettre les nombres au centre des préoccupations puisque ce sont les nombres du début du cours qui sont utilisés. Mais T_2 est très problématique et contient un implicite fort. On peut douter de l'éclaircissement qu'il est sensé apporter au nombre. Le bilan sur les ensembles de nombres est fait, même s'il est d'une grande pauvreté, mais la synthèse sur les nombres reste à faire comme nous l'avons déjà constaté.

Conclusion

L'analyse croisée utilisant les praxéologies de Chevallard et les registres de représentation de Duval constitue une première tentative d'articulation entre ces deux cadres théoriques. La perspective de cette double analyse nous semble riche de promesses.

L'apport des ensembles de nombres pour la nature des nombres est uniquement sémiotique, en permettant un discours sur les nombres dans la langue mathématique. Mais finalement, la synthèse sur les nombres est entièrement prise en charge par l'organisation mathématique numérique, sans les ensembles de nombres. Il faut avoir conscience que, dans l'enseignement secondaire, les ensembles de nombres n'apportent rien pour la synthèse sur les nombres, si ce n'est des catégories dont on disposait déjà. Deux questions découlent de cette constatation : de quels ensembles de nombres a-t-on besoin au lycée ? Comment faire cette synthèse sur les nombres ?

La question de la nécessité des ensembles de nombres dans le secondaire est posée. Que fait-on de ces ensembles de nombres ? Les enseignants interrogés disent que ce chapitre de début de seconde sur les ensembles de nombres est complètement isolé. Bien sûr, $\mathbf{R}$ est nécessaire au lycée pour l'analyse, mais il a beaucoup plus sa

place dans la partie sur les intervalles. **N** également peut être utile pour les suites numériques et la démonstration par récurrence. En revanche, on pourrait tout à fait se passer des trois autres au lycée.

Pour réaliser une vraie synthèse sur les nombres, il faudrait aller beaucoup plus loin et développer le niveau technologico-théorique de l'organisation mathématique numérique. Les développements décimaux, limités ou non, nous paraissent être le meilleur registre sémiotique pour unifier tous les nombres réels. On renforcerait l'idée que la nature des nombres et le sémiotique sont étroitement liés. Car finalement, nous nous devons de répondre à cette question au sens fort, formulée par les professeurs à leurs élèves : qu'est-ce qu'un nombre ?

En caricaturant à peine la situation, on peut affirmer que les ensembles de nombres dans l'enseignement secondaire français ne servent à rien si ce n'est à masquer les lacunes du numérique. L'enseignement de la synthèse sur les nombres est ainsi biaisé. Tout est déjà réglé par avance. Non pas par les mathématiques, ce qui serait naturel, mais par une *doxa* que nous avons qualifiée d'ensembliste. Cette *doxa* ensembliste est visible dès qu'il est question de la synthèse sur les nombres. Elle n'est pas seulement véhiculée par les manuels. Les pratiques des enseignants sont très semblables à ce que l'on trouve dans les manuels pour produire cette synthèse, alors même que deux des trois professeurs observés n'utilisent aucun manuel pour le chapitre sur les ensembles de nombres. La *doxa* est telle que la transparence est presque totale : beaucoup de manuels proposent des sections d'exercices intitulées « ensembles de nombres » où ne figurent que peu de ces ensembles, voire aucun.

Au-delà du thème traité dans cet article on peut légitimement se demander si d'autres parties des mathématiques ne souffrent pas également d'une *doxa* qui biaiserait les enseignements et les apprentissages. Nous pensons que c'est le cas. Il reste à savoir quelles sont ces parties et le poids de ces *doxa* dans l'enseignement.

Annexe 1

Les manuels de troisième

	Manuels de math. de troisième	$\in$ ou $\notin$	« ensembles de nombres »	notations des ensembles de nombres	classification des nombres	exercice sur la nature des nombres
M0	Triangle	/	/	/	/	/
	Dimathème	/	/	/	/	/
	Nouveau Pythagore	/	/	/	oui (histoire)	oui
	Math 3 ^e Magnard	$3 \in$ et $1 \notin$	/	/	/	1 seul
M1	Trapèze	oui, les 2	cours exercices	/	oui	oui
	Diabolo	oui, les 2	/	N Z D Q R	oui	oui
	Cinq sur cinq	oui, les 2	/	Z D Q patates	oui	oui (dont T ₁)

Annexe 2

Les professeurs de seconde

Les professeurs	N-Z	initiales	Représentations graphiques	inclusions
P _A	extensions	seul R	DN	N$\subset$Z chaîne
P _B	extensions	Q : P _B DR : élèves	DN patates	2 à 2 chaîne
P _C	/	oui	« frise historique » patates	chaîne

Annexe 3

Les manuels de seconde

Manuels de seconde	N-Z	R interv.	initiales	Définition R	rep. graph.	inclusions	⊂ Géo.
a : Dimathème Didier, 2000		/	oui	DN	DN	2 à 2 chaîne	/
b : Delagrave , 2000		/	oui	rationnels & irratio.	DD DN	chaînes	oui
c : Pyramide 2000, Hachette Education	extension	oui	/	tous les nombres	DN	chaîne	oui
d : Bréal , 2004	extension	/	oui	DN	DN	chaîne	oui
e : Axiale 2004, Hatier	extension	oui	/	DN	DN <i>patates</i>	2 à 2 chaîne	oui
f : Math'x 2005, Didier	extension	oui	/	DN	DN <i>patates</i>	2 à 2	/
g : Transmath 2000, Nathan		oui	/	tous les nombres	DN <i>patates</i>	2 à 2 chaîne	/
h : Abscisse 2004, Magnard		/	/	DN	DN <i>patates</i>	2 à 2 chaîne	/
i : Nathan		/	/	DN	DN <i>patates</i> (2)	chaînes	/
j : Décllic 2^{de} 2004, Hachette Education	extension	oui	/	rationnels & irratio.	sans DN <i>patates</i>	chaîne	oui
k : Indice 2000, Bordas		/	oui	DN	DN <i>patates</i>	/	/
l : Fractale 2000, Bordas		/	/	DN ???	DN <i>patates</i>	chaîne	/
m : Point Math 2000, Hatier		/	/	DN	DN <i>poupées russes</i>	«inclusions»	/
n : Nouveau Pythagore 2000, Hatier	extension	oui	/	tous les nombres	DN <i>patates</i> sans D	chaîne sans D	oui
o : Belin , 2000	extension	/	/	DN	DN <i>patates</i>	2 à 2	oui
p : Modulo 2004, Didier	extension	/	/	rationnels & irratio.	DN <i>patates</i> (2)	2 à 2 chaîne	/
q : Hyperbole 2003, Nathan	extension	oui	oui	DN	DN <i>patates</i>	2 à 2	/
r : Repères 2004, Hachette Education		en exercice	/	rationnels & irratio.	sans DN <i>patates</i>	2 à 2 sans R	oui

Bibliographie

- BAGNI G. T. (2006), Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory, *Educational Studies in Mathematics*, **62**, 259–280.
- BOSCH M. & CHEVALLARD Y. (1999), Sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19.1**, 77–123.
- BRONNER A. (1997a), *Etude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée*, Thèse, Université J. Fourier, Grenoble.
- BRONNER A. (1997b), Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objets « nombre réel » et « racine carrée », *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **17.3**, 55–80.
- CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **19.2**, 222–265.
- DOUADY R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **7.2**, 5–31.
- DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Berne.
- DUVAL R. (1996), Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ?, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **16.3**, 349–382.
- KAHANE J.-P. (ed.) (2002), *L'enseignement des sciences mathématiques, Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Paris, Odile Jacob.
- RATSIMBA-RAJOHN H. (1982), Eléments d'étude de deux méthodes de mesure rationnelle, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, **3.1**, 65–113.

LAURENT VIVIER

IUFM d'Orléans-Tours, La Guignière 37230 Fondettes
laurent.vivier@orleans-tours.iufm.fr

GEORGES TOUMA

ACTIVITÉ COGNITIVE D'INTERPRÉTATION

Abstract. Interpretation Cognitive Activity – During the process of scientific phenomena's algebraic modelling, pupil must switch from a physic rationality frame to a mathematic rationality frame mobilising different semiotics registers. In this article, we raised the problem of discontinuity and rupture of semiotic register (Duval, 1995) inherent to rationality frame switch (Lerouge, 2000) during algebraic modelling activity in experimental science. More specifically, we raised the limits and the lakes of the three semiosis cognitive activities – formation of a representation in a semiotic register - treatment and conversion – so that the pupils has access to the conceptual meaning of a mathematic representation of an experimental science phenomenon. We also defined the interpretation cognitive activity.

Key words. Algebraic modelling, rationality frame, semiotic register, experimental science, semiosis, treatment, conversion.

Résumé. Durant le processus de modélisation mathématique d'un phénomène scientifique, en particulier en physique, l'élève doit passer d'un cadre de rationalité physique à un cadre de rationalité mathématique mobilisant des registres sémiotiques différents. Dans cet article, nous avons soulevé les problèmes de discontinuité et de rupture des registres sémiotiques (Duval, 1995) inhérents à un changement de cadre de rationalité (Lerouge, 2000), lors d'une activité de modélisation algébrique en sciences expérimentales. Plus spécifiquement, nous avons soulevé les limites et l'insuffisance des trois activités cognitives liées à la sémosis - la formation de représentations dans un registre sémiotique, le traitement et la conversion - pour que l'élève ait accès au contenu conceptuel d'une représentation mathématique d'un phénomène en sciences expérimentales. Nous avons aussi défini l'activité cognitive d'interprétation.

Mots-clés. Modélisation algébrique, cadre de rationalité, registre sémiotique, sciences expérimentales, sémosis, traitement, conversion.

Introduction

Pour la plupart des chercheurs scientifiques, dont Galilée fut le précurseur, «*faire de la science*» signifie mettre sur pied une expérimentation contrôlée, prendre des mesures, reconnaître la présence de fluctuations dans les données et tenter de repérer ou de construire un modèle mathématique (algébrique) général qui convienne aux données. Ainsi, cette démarche se joue dans l'interaction triple entre mesures réelles, modèle mathématique et jugement (numériquement appuyé) du chercheur. Dans cet article, en nous appuyant sur le concept de modélisation scientifique, sur la théorie de registres sémiotiques (Duval, 1995) et sur la théorie

de cadres de rationalité (Lerouge, 2000), nous voudrions aborder, discuter et analyser les différentes activités cognitives liées à la sémiosis susceptibles d'aider l'élève à compléter et à réussir cette démarche, en particulier l'activité de modélisation mathématique des phénomènes scientifiques.

1. Modélisation mathématique en sciences expérimentales

En sciences expérimentales, Nonnon (1986, p. 29), Johsua et Dupin (1999, p. 49) semblent s'entendre bien sur les différentes étapes des phases inductive et déductive de la modélisation scientifique. Dans la phase inductive, en interaction avec la réalité, c'est-à-dire avec un phénomène réel en sciences, l'élève identifie les variables en jeu et prédit ensuite leur interaction sous forme d'une hypothèse qui sera à son tour formalisée dans un schème de contrôle de variables lui permettant ainsi de planifier l'expérimentation. À partir des résultats recueillis, l'élève pourra dégager alors une ou des lois. Ensuite, la synthèse explicative de ces lois lui permettra de construire un modèle ou une théorie. Dans la phase déductive, l'élève tente, avec ce modèle, de répondre à une question donnée reliée au phénomène de départ.

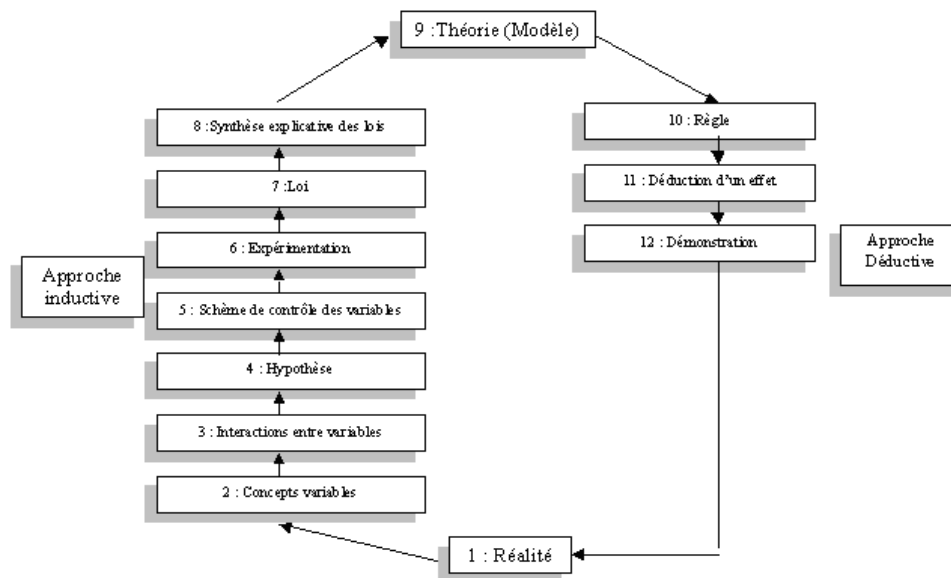


Figure 1 : Modélisation scientifique (Nonnon, 1986).

Ensuite, il formule des propositions ou des effets qui lui permettront non seulement d'expliquer ou de répondre à la question mais aussi de déduire ou prédire des résultats de l'expérience. Afin d'infirmer ou de confirmer le modèle construit dans

la phase inductive, l'élève compare les résultats prédits ou déduits avec des données provenant de la réalité, des données nouvelles tirées par exemple d'une nouvelle expérience où il aurait modifié la variable indépendante.

En se référant aux travaux de Nonnon (1986), Johsua et Dupin (1999, p. 149) nous pourrions alors résumer l'activité de modélisation mathématique en sciences expérimentales par le schéma suivant:

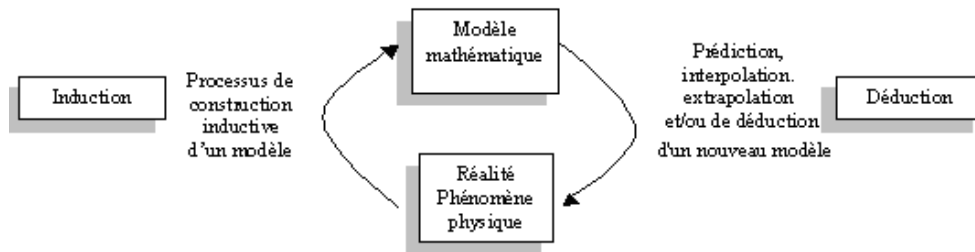


Figure 2 : Modélisation mathématique en sciences expérimentales.

Nous considérons que les phases inductive et déductive ne sont pas parfaitement disjointes comme la figure 2 pourrait le laisser croire. À l'intérieur d'une phase inductive, lors de la formulation d'une hypothèse, nous pouvons aussi avoir recours à la déduction : c'est le raisonnement hypothético-déductif, qui met à profit des lois supposées vraies ou des relations déjà étudiées pour élaborer de nouvelles suppositions ou inductions. Dans la phase inductive de l'activité de modélisation mathématique, l'élève construit le modèle mathématique correspondant au phénomène scientifique en particulier en physique. Cette activité consiste donc à transformer la représentation sémiotique des données expérimentales en une représentation sémiotique qui correspond à objet mathématique. Dans la phase de déduction, l'élève valide son modèle à partir des activités de prédiction, d'interpolation, et/ou de déduction d'un nouveau modèle.

À notre avis, le processus cognitif de construction et de validation du modèle mathématique mobilise chez l'élève plusieurs activités cognitives liées à la sémiosi et demande un changement de cadre de rationalité. Par la suite, nous allons analyser les difficultés liées aux tâches cognitives de la modélisation mathématique en sciences expérimentales en nous appuyant sur les théories de registres sémiotiques et de cadre de rationalité.

2. Registre sémiotique

Duval (1995) attend des registres de représentation sémiotique qu'ils permettent d'accomplir les trois activités cognitives fondamentales de la pensée : représentation, traitement et conversion. Plus précisément, il s'agit de :

- « constituer une trace ou un assemblage de traces perceptibles qui soient identifiables comme une représentation de quelque chose dans un système déterminé » ;
- « transformer les représentations par les seules règles propres au système de façon à obtenir d'autres représentations pouvant constituer un apport de connaissance par rapport aux représentations initiales » ;
- « convertir les représentations produites dans un système en représentations d'un autre système, de telle façon que ces dernières permettent d'explicitier d'autres significations relatives à ce qui est représenté » (p. 21).

L'analyse des difficultés relatives à la conceptualisation, au développement du raisonnement scientifique et de l'activité cognitive de construction et de validation d'un modèle mathématique d'un phénomène scientifique par l'élève, fait face à trois phénomènes reliés entre eux. Le premier est celui de la « *diversification des registres de représentation sémiotique* » (Duval, 1995, p. 21) dont chacun pose des problèmes et des questions d'apprentissage spécifiques. Le deuxième est celui de la « *différenciation entre représentant et représenté* » (Duval, 1995, p. 22). Le troisième phénomène est celui de la « *coordination entre les différents registres* » (Duval, 1995, p. 22). Selon la théorie des registres sémiotiques, ces trois phénomènes sont engendrés par quatre activités cognitives liées à la sémosis : la formation de représentations dans un registre sémiotique, le traitement, la conversion et la coordination. En didactique des mathématiques, plusieurs recherches ont démontré que l'élève, pour avoir accès à un objet mathématique à travers ses représentations et le conceptualiser, doit absolument réussir ces quatre activités cognitives fondamentales à la sémosis. La réussite à ces quatre activités sur un objet mathématique en sciences expérimentales suffira-t-elle aux élèves pour pouvoir accéder au contenu conceptuel de cet objet? Pour répondre à cette question, il est important de discuter ces activités dans les prochains paragraphes.

1.1. Formation de représentations dans un registre sémiotique

Selon Duval (1995, p. 37-38), l'activité de formation de représentations dans un registre sémiotique doit respecter ses règles de conformité. Ses règles portent essentiellement sur :

- « la détermination (strictement limitée, ou au contraire ouverte) d'unités élémentaires (fonctionnellement homogènes ou hétérogènes...) : symboles, vocabulaire... » ;

- « les combinaisons admissibles d'unités élémentaires pour former des unités de niveau supérieur : règles de formation pour un système formel, grammaire pour les langues naturelles... » ;
- « les conditions pour qu'une représentation d'ordre supérieur soit une production pertinente et complète : règles canoniques propres à un genre littéraire ou à un type de production dans un registre. »

Cette activité cognitive est essentielle à la réussite de la modélisation mathématique en sciences expérimentales. En effet, elle permettra à l'élève de reconnaître le registre sémiotique auquel la représentation des données expérimentales appartient (registre numérique, registre graphique, etc.) et ce, grâce aux règles de conformité de ce registre. Toutefois, cette reconnaissance n'implique pas nécessairement, ni la compréhension de ce que cette représentation dénote, ni son utilisation, ni son exploitation en mathématiques et en sciences expérimentales. D'autres types d'activités cognitives sont nécessaires dont le traitement, la conversion et la coordination pour permettre une compréhension, une utilisation et une exploitation efficace de cet objet en mathématique et en sciences expérimentales. Où se situent les activités de traitement, de conversion et de coordination dans le processus de modélisation mathématique d'un phénomène scientifique ?

1.2. Activité de traitement

Pour Duval (1995), un traitement est une activité cognitive permettant la transformation d'une représentation, d'un objet, d'une situation ou d'une information en une autre, mais dans le même registre. Cette activité de transformation est tout à fait interne à un registre donné. Par exemple, l'équation $ax - y + b = 0$ est le résultat d'un traitement algébrique sur l'équation d'une droite de type $y = ax + b$. L'activité de traitement d'une représentation d'un objet mathématique bien défini est engendrée par des règles d'expansion propres à cette représentation. Selon ces règles, la nouvelle représentation produite à partir de celle du départ sera établie dans le même registre de départ.

Durant la phase inductive de la modélisation mathématique des phénomènes scientifiques, l'objet mathématique sera construit à partir des données expérimentales. Dans cette phase, l'élève est amené à transformer la représentation sémiotique des données expérimentales en une représentation qui correspond à un objet mathématique. Notons que même si cette activité de transformation se fait à l'intérieur du même registre de départ, elle ne peut pas être une activité de traitement puisque cette dernière requiert a priori un objet mathématique. La validation de l'objet mathématique construit dans la phase inductive se fait dans la phase déductive de la modélisation mathématique des phénomènes scientifiques.

C'est dans cette phase qu'une activité de traitement sur cet objet construit est possible (ex. : déduction d'un nouveau modèle algébrique à partir d'une activité de traitement sur l'objet construit). Il est donc important que l'élève puisse réussir l'activité cognitive de traitement pour accomplir avec succès la modélisation mathématique des phénomènes scientifiques. Il est bien important de noter aussi que dans la phase inductive, il est possible que l'élève recoure à une activité de traitement sur un objet mathématique pour construire le modèle mathématique en question.

1.3. Activité de conversion

La conversion est une activité cognitive permettant la transformation d'une représentation, d'un objet, d'une situation ou d'une information dans un registre, en une autre qui représente le même objet, situation ou information de départ, cette fois, dans un registre différent. Contrairement à l'activité cognitive de traitement, la conversion est tout à fait externe par rapport au registre et à la représentation de départ. Par exemple, le passage d'une équation algébrique d'une droite à sa représentation graphique ou inversement, la mise en évidence de la correspondance entre le coefficient directeur du registre algébrique et l'angle formé avec l'axe des abscisses du registre graphique permettraient la conversion de cette droite entre ces deux registres. Selon Duval (1995, p. 41), « *la conversion requiert que l'on perçoive la différence entre ce que Frege appelait le sens et la référence des symboles ou des signes, ou entre le contenu d'une représentation et ce qu'elle représente* ». Sans ce discernement, la conversion deviendrait alors une activité impossible voire même une activité incompréhensible. Plusieurs recherches en didactique des mathématiques montrent que « *la conversion des représentations sémiotiques constitue l'activité cognitive la moins spontanée et la plus difficile à acquérir chez la grande majorité des élèves* » (Duval, 1995, p. 44). La conversion dépend du degré de non congruence entre les deux représentations de départ et d'arrivée. « *Pour déterminer si deux représentations sont congruentes ou non, il faut commencer par les segmenter en leurs unités signifiantes respectives, de telle façon qu'elles puissent être mises en correspondance.* » (Duval, 1995, p. 47). Pour ce chercheur, il n'y a pas de méthodes spécifiques ou de règles générales selon lesquelles l'élève, en les appliquant, sera capable de réussir la conversion, cela, pour deux raisons. La première correspond au phénomène de non-congruence dont les cas sont toujours des cas particuliers et qui ne peuvent pas être généralisés. La seconde est celle de l'identification des unités signifiantes dans les deux registres de départ et d'arrivée d'un objet. Cette identification dépend du type des registres de départ et d'arrivée ainsi que de l'objet représenté lui-même. Donc, la discrimination des unités signifiantes varie en fonction de l'objet et des registres où il est représenté. Cette activité cognitive de discrimination est le cœur, voire la condition nécessaire de toute activité cognitive de conversion donc de toute activité

de coordination entre plusieurs registres hétérogènes. Pour cet auteur, « *l'activité conceptuelle implique la coordination des registres de représentation* ». Il précise ensuite que, pour que l'élève puisse « *discriminer le représentant et le représenté, ou la représentation et le contenu conceptuel que cette représentation exprime, instancie ou illustre* », il doit parvenir au stade de la coordination inter-registre. Duval (1995) note que seul l'apprentissage fondé sur la coordination entre registres entraîne une compréhension intégrative qui donnera ces possibilités de transfert.

Comme dans le cas d'une activité cognitive de traitement, la conversion requiert à priori un objet mathématique sur lequel l'élève exercera une transformation de la représentation de cet objet. Donc, dans la phase inductive de l'activité de modélisation mathématique en sciences expérimentales, la construction d'un modèle mathématique ne peut pas être considérée une activité de conversion puisque l'objet mathématique est inconnu à priori et il sera construit à partir de la représentation sémiotique des données expérimentales. Il est important de noter que dans la phase inductive, il est possible que l'élève recoure à une activité de conversion sur un objet mathématique pour construire le modèle mathématique en question. Durant la phase déductive de la modélisation mathématique, les activités de conversion et de coordination sur l'objet mathématique construit dans la phase inductive est possible voire même obligatoire pour valider le modèle et pour déduire un nouveau modèle algébrique. Il est donc important que l'élève puisse réussir l'activité cognitive de conversion et de coordination pour accomplir avec succès la modélisation mathématique des phénomènes scientifiques. Par conséquent, et puisque l'activité de construction d'un modèle mathématique d'une représentation sémiotique des données d'un phénomène scientifique n'est ni une activité de traitement ni une activité de conversion, l'apprentissage fondé sur la coordination entre registres ne garantirait pas nécessairement un accès au contenu conceptuel de cette représentation. À notre avis, cette activité de construction est fondée sur une activité de coordination inter-cadre (mathématique et physique) puisque les représentations sémiotiques de départ et d'arriver se trouvent respectivement de le cadre des sciences expérimentales (ex : physique) et dans le cadre mathématique. Pour analyser et comprendre davantage les difficultés des élèves rencontrées dans une activité de modélisation algébrique des phénomènes scientifiques, il est nécessaire d'analyser les difficultés inhérentes aux changements de cadre de rationalité c'est-à-dire de cadre disciplinaire.

2. Cadre de rationalité

En tenant compte de la dialectique entre rationalité personnelle et culturelle, et de la dualité familier/scientifique mise en évidence par Vygotski (1962) au sujet des processus de conceptualisation, Lerouge (2000) retravaille la définition de cadre de Douady (1984). Il propose la notion de cadre de rationalité dont la définition est

« un ensemble cohérent de fonctionnement local de la rationalité culturelle ou personnelle “cadré” en fonction d’un apprentissage particulier » (Lerouge, 2000, p. 176). Il est caractérisé par quatre composantes : son monde d’objets, ses processus et procédures de conceptualisation et de validation et leurs registres de signifiants, sémiotiques et symboliques. Les processus et les procédures de traitement et de validation en mathématiques sont opérationnalisés par un raisonnement déductif à partir des axiomes tandis qu’en physique ces derniers sont souvent opérationnalisés par un raisonnement inductif élaborant la formulation d’une loi à partir d’un ensemble fini de données expérimentales. Par conséquent, grâce à ces différentes composantes, nous pouvons distinguer les cadres de rationalité personnelle et culturelle des mathématiques des cadres de rationalité personnelle et culturelle de la physique.

2.1. Instabilité des structures des registres sémiotiques

Les recherches de Malafosse, Dusseau et Lerouge (2000-2001) sur l’utilisation des registres graphiques et algébriques en physique, en particulier l’« *Étude en interdidactique des mathématiques et de la physique de l’acquisition de la loi d’Ohm au collège : changement de cadre de rationalité* » (Malafosse, Lerouge, Dusseau, 2001), ont montré que, durant une activité de modélisation mathématique, lors d’un changement d’un cadre de rationalité à un autre, les structures de ces derniers sont instables, c’est-à-dire que « *le principe d’unité de représentation dans un registre donné n’est pas maintenu* » (Malafosse, 2002, p. 64) et que la continuité entre chacun de ces registres est illusoire.

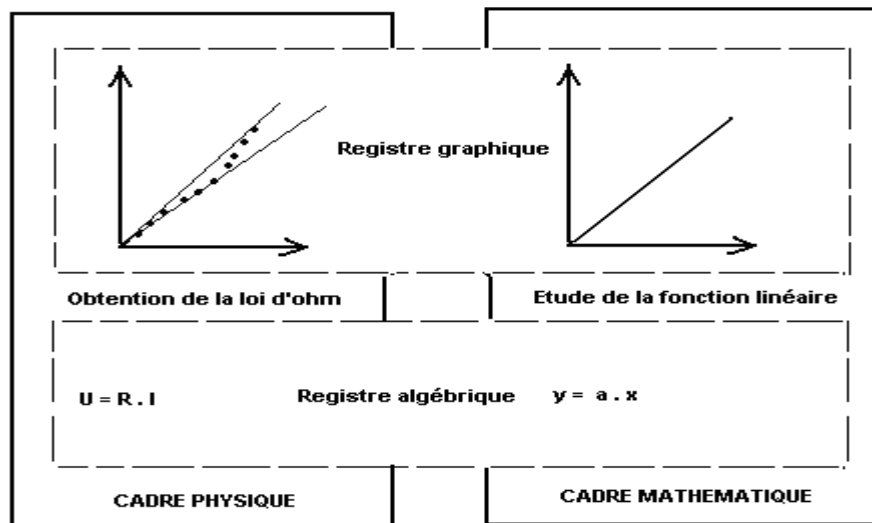


Figure 3 : Instabilité des structures des registres sémiotiques.

Selon ces auteurs, le point graphique en mathématique ressemble beaucoup au point graphique du plan (U, I) nécessaire à la vérification expérimentale de loi d'Ohm. En revanche, « les relations structurelles du registre graphique qui autorisent les passages entre le point et la droite résistent moins bien au changement de cadre de rationalité : les changements de registre graphique/algébrique, et inversement s'en trouvent alors fortement affectés », et « lorsqu'on change de cadre disciplinaire, le principe d'unité de représentation dans un registre n'est pas maintenu » (Malafosse, 2002, p. 64) ce que résume le tableau 1 qui consiste à distinguer les propriétés caractéristiques des objets conceptuels suivant : point, droite et axe dans chaque cadre de rationalité en physique et en mathématique.

Cadre scolaire de la physique de troisième	Cadre scolaire mathématique
Tout point graphique du plan représente un état accessible au système mesuré. Pour tenir compte des incertitudes des mesures, on associe à tout couple de mesures (U, I) soit un point plus ou moins incertain, soit une surface (tache) dont la forme et l'aire dépendent de la qualité de la mesure.	A tout couple de nombres (x, y) on associe par bijection un point graphique du plan XOY de coordonnées x et y . Ce point a les propriétés géométriques d'un point géométrique.
Les axes graphiques ont les propriétés géométriques des droites orientées mais ils sont dimensionnés (par exemple, l'axe des abscisses a pour dimension une intensité, alors que l'axe des ordonnées est un axe de tension).	Les axes graphiques ont aussi les propriétés géométriques des droites orientées mais ils ne sont pas dimensionnés.
La forme et l'aire de chaque tache dépendent des conventions de mesure et de représentation (vecteurs unitaires dont la longueur dépend du choix des unités de mesures, convention de branchement des appareils de mesure).	Le point reste un point par changement d'unité des axes de coordonnées.
L'ensemble des taches graphiques représente l'ensemble des états probablement accessibles au système, à la précision des mesures près. Les incertitudes expérimentales ne permettent pas d'établir une relation de bijection entre l'ensemble des points graphiques couverts par les taches et l'ensemble des couples de mesures.	L'ensemble des points graphiques est une droite graphique. La tache graphique n'a pas de sens.

La juxtaposition des taches donne une autre tache encore affectée d'incertitude. La propriété de continuité est occultée par celle d'imprécision des mesures.	
Pour des raisons de limites expérimentales et d'imprécision des mesures, la bande est de longueur et d'épaisseurs finies.	Les propriétés géométriques de la droite graphique sont celles de la droite géométrique (longueur infinie, épaisseur nulle, etc.).
Le passage de la tache au point graphique et de la bande à la droite graphique se fait dans la perspective d'une idéalisation des procédures expérimentales et par interpolation et extrapolation de nature inductive des résultats expérimentaux idéalisés. Cette phase d'idéalisation conserve aux unités significatives du registre graphique des éléments de rationalité du cadre de la physique. En particulier, tout point graphique est affecté d'autant de dimensions physiques (tension et intensité) que de dimensions géométriques (deux pour une représentation plane).	Pour Duval (1988a, p. 14), « <i>la figuration d'un point relève d'une autre procédure de représentation que celle de la droite : elle est marquage d'une pure localisation, résultant d'une pure visée déictique, ou de croisement de deux droites tracées</i> ». « <i>Le tracé de la droite se génère dans un mouvement et la propriété de continuité relève de cette représentation dynamique</i> ».
Tant qu'elle n'est pas tracée, la droite graphique n'est pas convertible dans le registre algébrique sous la forme d'une relation fonctionnelle. C'est par construction de la droite qu'on crée le signifié.	La représentation graphique de la droite et sa conversion dans le registre analytique sous forme d'une relation fonctionnelle de type affine coexistent toujours. Le signifié correspondant existe par définition.

Tableau 1 : Tiré de Malafosse (2002, p. 64-65).

2.2. Registres sémiotiques transversaux

Le souci d'analyser la rupture et la continuité des registres sémiotiques en changeant de cadre de rationalité amène Lerouge (2000) à postuler l'existence d'un registre transversal en rapport contextuel avec chacun des cadres mobilisés. Il considère donc qu'un registre sémiotique au sens de Duval « *peut être commun à plusieurs cadres ou spécifique à un cadre particulier, mais qu'il est typé par chacun des cadres dans lequel il fonctionne* ». Il considère ensuite que dans un

cadre de rationalité donné, il apparaît un registre intra-cadre que nous pouvons considérer stable au sens de Duval, et un registre inter-cadre dont il postule l'instabilité dans le changement de cadre.

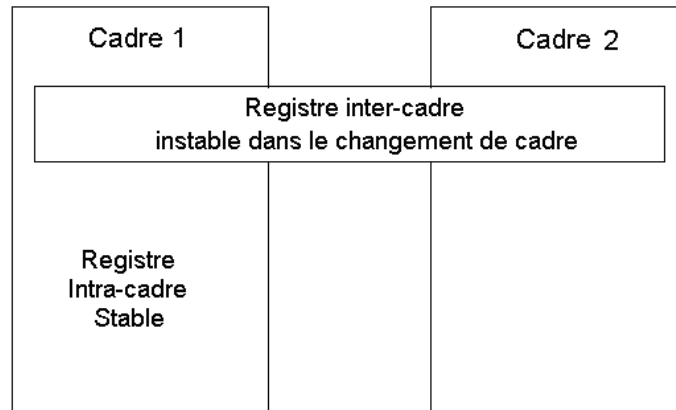


Figure 4 : Registre sémiotique inter-cadre (Lerouge, 2000).

Lerouge (2000) postule qu'au niveau sémiotique, le jeu intra- ou inter-registres développe la distanciation du signe et de l'objet conceptuel, mais que la validité sémantique de ce jeu est à rechercher dans les cadres de rationalité. Or cet auteur souligne que souvent, *les enseignants se placent généralement dans l'hypothèse de continuité des registres sémiotiques entre les mathématiques et la physique, ce qui met les élèves dans l'illusion de continuité quand on change de cadre disciplinaire* » (Malafosse, Lerouge, Dusseau 1999). À notre avis, si les professeurs du secondaire et du collège se placent dans cette hypothèse de fausse continuité, c'est parce qu'ils n'ont pas les outils en mathématiques appliquées nécessaires pour enseigner la modélisation algébrique en tenant compte des incertitudes de mesures. En fait, la réalité expérimentale (les ensembles de points issus de mesure) est à priori informe et polymorphe, ce polymorphisme étant aggravé par le flou des incertitudes. D'autre part, les élèves n'ont guère d'appréhension du polymorphisme algébrique et de la constructibilité d'un modèle mathématique : c'est dans ce rapport que se joue la conversion inter-registre. Ainsi, cette hypothèse de continuité ne permet pas à l'élève d'exercer ce jeu afin de distancier le signe de l'objet conceptuel et d'accéder au contenu conceptuel de la représentation sémiotique. Nous nous posons alors la question suivante : Comment aider l'élève à réussir ce jeu pour accéder de façon autonome au contenu conceptuel d'une représentation sémiotique d'un phénomène scientifique (ex : loi d'Ohm et loi des gaz parfaits ci-après) ?

Notons que le jeu intra ou inter-cadre (cadres mathématique et physique), intra et/ou inter-registre s'inscrit dans l'activité de modélisation mathématique de

l'élève. Puisque par ce jeu l'élève construit ses modèles mathématiques, nous allons dans le paragraphe suivant préciser les différentes étapes de l'activité de modélisation mathématique durant le processus de modélisation scientifique.

3. Interprétation inductive d'un modèle mathématique

Nous définissons l'activité de construction inductive d'un modèle mathématique en sciences expérimentales par le processus cognitif avec lequel l'élève construit un objet conceptuel mathématique (ou un modèle mathématique : fonction d'une variable, droite, parabole, etc.) d'une représentation sémiotique d'un ensemble de données expérimentales d'un phénomène scientifique, en particulier en physique (ex. : loi d'Ohm). Ce processus de construction requiert alors un changement de cadre de rationalité. En effet, la représentation sémiotique d'un phénomène physique s'inscrit au départ dans le cadre de rationalité de la physique (Figure 5). Dans ce cas, l'objet conceptuel mathématique de cette représentation sémiotique de départ n'existe pas *a priori*. Ceci est dû aux caractères probabiliste et discontinu des données expérimentales (Figure 5). Il faut donc le transférer et le construire dans le cadre de rationalité mathématique (Figure 5). Cette construction consiste à transformer et à interpréter sous forme mathématique cet ensemble de couples de points informe et polymorphe du domaine de la physique.

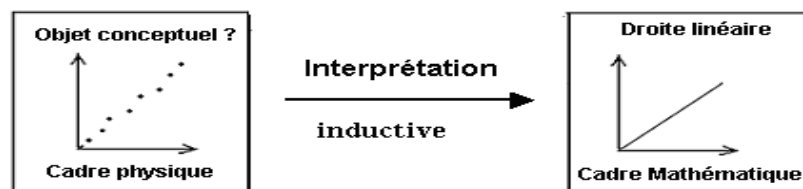


Figure 5 : Interprétation inductive.

Cette activité cognitive de transformation n'est pas prise en compte par Duval (1995). Comme nous l'avons mentionné, elle n'est, selon nous, ni une activité de conversion ni une activité de traitement puisque, selon Duval (1995), un traitement ou une conversion requiert à priori un objet conceptuel pour pouvoir transformer sa représentation sémiotique soit dans le même registre sémiotique de départ (traitement), soit dans un autre (conversion) (Figure 6).

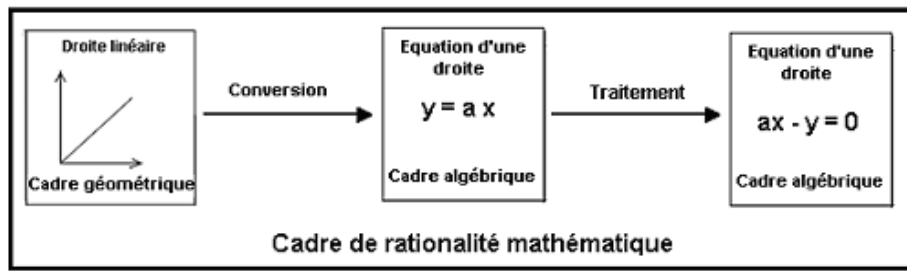


Figure 6 : Conversion et Traitement.

Notons aussi que ces deux activités cognitives (conversion et traitement) s'inscrivent dans le même cadre de rationalité mathématique. Or, dans notre cas (loi d'Ohm), l'activité de transformation requiert un changement de cadre de rationalité disciplinaire. Dans ce cas, l'objet conceptuel sera construit durant le processus de modélisation algébrique. L'ensemble des points issus de l'expérimentation nécessite donc une interprétation, qui permet d'identifier et de choisir le modèle mathématique pour permettre à l'apprenant de changer de cadre de rationalité avant d'exercer les activités de conversion et de traitement telles que Duval les définit. Pour distinguer cette activité de transformation des deux activités cognitives de traitement et de conversion au sens de Duval (1995), nous allons la désigner par interprétation inductive (Figure 6a).

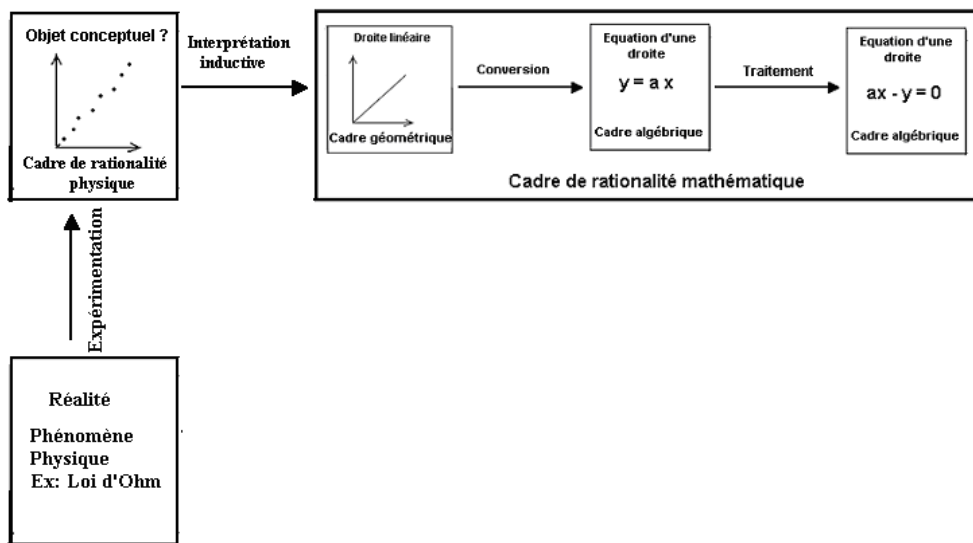


Figure 6a : Interprétation inductive.

4. Interprétation déductive d'un modèle mathématique

En sciences expérimentales, très souvent, les quantités et les variables auxquelles nous nous intéressons ne se prêtent pas directement à la mesure expérimentale. Ainsi, il faut les calculer ou les prédire à partir du modèle mathématique et de l'objet conceptuel construit dans la phase inductive. Pour ce faire, nous devons d'abord avoir accès au contenu conceptuel ou au concept de cet objet mathématique. Cependant, il ne suffit plus de parvenir au stade de coordination au sens de Duval, c'est-à-dire de pouvoir mettre en correspondance les unités significantes des différentes représentations sémiotiques de cet objet. Nous devons aussi être capables de les mettre en correspondance avec les propriétés, les caractéristiques des objets phénoménaux et les conditions expérimentales parce que souvent ces derniers agissent sur la représentation sémiotique. Cette activité de mise en correspondance est nécessaire pour la validation des prédictions et la cohérence interne du modèle mathématique. Ainsi, nous désignons cette activité cognitive de mise en correspondance par interprétation déductive.

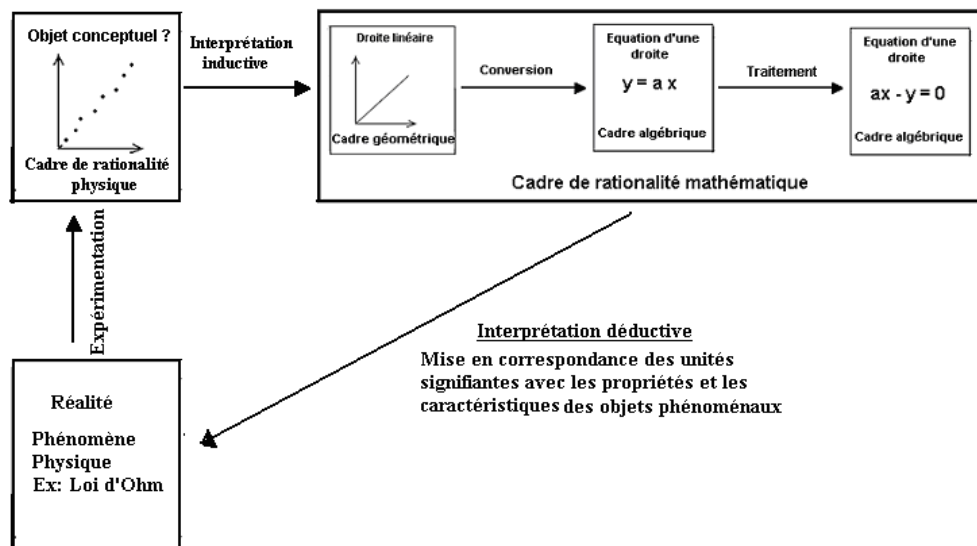
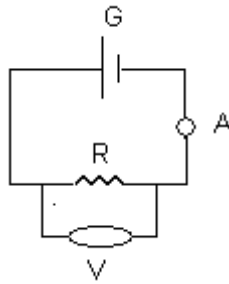


Figure 6b : Interprétation déductive.

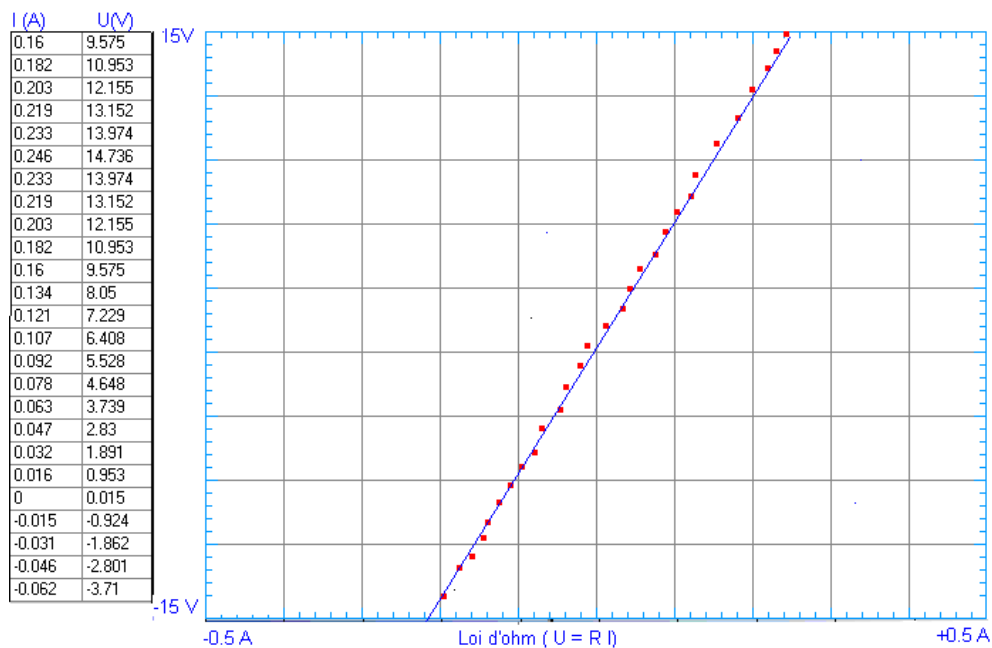
Pour mieux nous faire comprendre, nous allons donner deux exemples. Le premier est celui de la loi d'Ohm et le deuxième est celui de la loi des gaz parfaits.

Exemple 1

Soit un circuit électrique (Figure 7) formé d'un générateur, d'un ampèremètre, d'une résistance et d'un voltmètre aux bornes de la résistance :

**Figure 7 : Loi d'Ohm.**

Pour étudier le voltage, aux bornes de la résistance, en fonction du courant, nous avons pris plusieurs mesures du courant et du voltage. Avec ces mesures, nous avons formé plusieurs représentations sémiotiques : une table de valeurs et un graphique (Figure 8).

**Figure 8 : Loi d'Ohm.**

Dans la phase inductive, nous élaborons un modèle algébrique en trouvant l'équation de la meilleure droite passant par cet ensemble de couples de mesures. Jusqu'à cette étape, la mise en correspondance des unités signifiantes, au sens de Duval, nous permettrait seulement de déduire que le voltage est directement proportionnel au courant, c'est-à-dire que leur rapport est constant. Par contre, elle

ne nous donne pas accès aux contenus conceptuels de ce rapport, c'est-à-dire à son sens réel. Il faut alors mettre ce rapport en correspondance avec la résistance du circuit électrique du référent empirique et ses propriétés (longueur, surface, température et nature du matériel). Pour ce faire, nous devrions pouvoir prédire la valeur de ce rapport (ou le coefficient directeur de la droite) comme étant la valeur de la résistance du circuit électrique (telle que donnée par le fabricant). Or, ce rapport ou coefficient directeur n'est jamais parfaitement égal à la valeur exacte de la résistance. Nous devrions déterminer cette approximation de la résistance en évaluant en même temps son incertitude de mesure. Ainsi, et grâce à cette incertitude de mesure, nous pourrions déduire que ce rapport correspond, à une incertitude près, à la valeur de la résistance, bien que ces deux paramètres ne soient pas exactement égaux numériquement.

Exemple 2

Pour étudier la loi des gaz parfaits en chimie, il est possible, avec plusieurs instruments de mesures en sciences expérimentales, de mesurer la pression en fonction du volume. Comme dans le cas de la loi d'Ohm, la mise en correspondance des unités significatives de la représentation graphique de la pression de l'eau en fonction du volume, au sens de Duval, nous permettrait seulement de déduire que la pression de l'eau est inversement proportionnelle au volume. Par contre, elle ne nous donne pas accès aux contenus conceptuels du produit (Pression×Volume), c'est-à-dire à son sens réel. Il faut alors mettre ce produit en correspondance avec les propriétés et les caractéristiques du gaz à l'étude (température, volume molaire, constante universelle des gaz parfaits, etc.), d'où l'importance de l'activité d'interprétation déductive.

4. Activité cognitive d'interprétation

Étant donné que les phases cognitives d'induction et de déduction s'inscrivent dans le cycle itératif du processus de modélisation scientifique, nous considérons que ces deux activités s'effectuent aussi dans un cycle itératif. Ainsi, par interprétation, nous désignons l'ensemble de ces deux activités cognitives d'induction et de déduction.

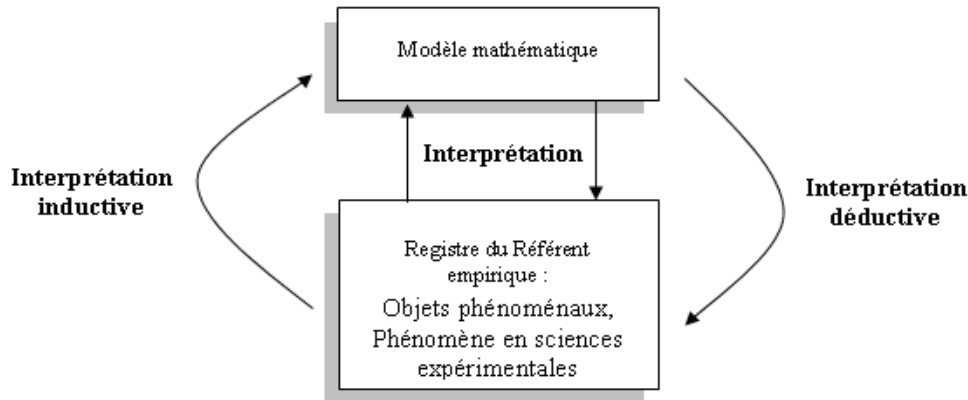


Figure 9 : Activité d'interprétation.

Nous postulons que, pour que l'élève puisse réussir le jeu intra- ou inter-registres et substituer à un modèle explicatif expérimental un modèle calculable et prédictif, et ait accès au contenu conceptuel d'une représentation graphique d'un objet mathématique, il devrait parvenir au stade de l'interprétation. C'est-à-dire qu'il devrait parvenir aux deux stades de l'interprétation inductive et déductive tels que nous les avons discutés précédemment.

Conclusion

Pour analyser les difficultés rencontrées par les élèves durant le processus de modélisation mathématique des phénomènes scientifiques, nous devons prendre en considération le changement de cadre de rationalité. Pour ce faire, et pour réussir l'activité d'interprétation, l'élève devrait pouvoir construire le modèle mathématique en tenant compte de l'incertitude de mesure. Jusqu'en 2006, au secondaire et au collège, à cause de l'incertitude de mesure, les théorèmes et axiomes qui sont enseignés dans les cours de mathématiques ne sont pas applicables en physique pour déterminer le modèle algébrique (linéaire, parabolique, hyperbolique, sinusoïdal, exponentiel, logarithmique, *etc.*) correspondant à un ensemble de points issu d'une interaction des variables d'un phénomène scientifique. Pour le déterminer, nous devrions utiliser des méthodes en mathématiques appliquées de niveau universitaire, par exemple :

- 1) la méthode des moindres carrés de Gauss-Legendre ;
- 2) la méthode des moindres carrés pondérés ou généralisés pour les fonctions non linéaires.

Ces méthodes ne peuvent évidemment pas être incluses dans le curriculum. Même si les calculatrices programmables ou des tableurs permettent de les utiliser, la

compréhension du rationnel sous-jacent reste hors de portée de l'élève, ce qui ne peut selon nous que nuire à un apprentissage raisonné de l'activité d'interprétation. Sur la complexité de ces méthodes, Beaufils (1993, p. 124) note que : « *les démarches dites “du physicien” présentées aux élèves sont souvent fondées sur une mise en avant exclusive de l'expérience (découverte de loi, induction de théorie, expérience cruciale, etc.)...[...]... Si l'alternative centrée sur les méthodes modernes de modélisation relève d'une épistémologie plus satisfaisante en ce qui concerne la relation théorie/expérience, elle reste problématique au niveau de l'enseignement secondaire dès lors qu'elle se place sur un plan **quantitatif et mathématique**. Elle ne peut en effet être mise en œuvre de façon immédiate du fait, en particulier, de la limitation de la complexité des modèles mathématiques et des méthodes informatiques* ». Ainsi, le manque d'outils en mathématiques ne laissait pas nos élèves exercer le jeu inter ou intra-registre ou cadre ainsi que l'activité d'interprétation. Ce problème a amené l'auteur de cet article à élaborer et à concevoir une méthode de régression polynomiale, rationnelle, exponentielle, logarithmique et sinusoïdale, la Régression Graphico-Statistique (RGS) (Touma, 2006) publiée dans sa thèse de doctorat à l'Université de Montréal. Le rationnel de cette méthode est de niveau secondaire et collégial. Les résultats de nos recherches sur son utilisation et son impact sur l'activité d'interprétation feront l'objet de nos futures publications.

Bibliographie

BEAUFILS D. (2005), *L'ordinateur outil de laboratoire en physique : quelles transpositions?*, Paris, INRP.

DUVAL R. (1988a), Écarts sémantiques et cohérence mathématique : introduction aux problèmes de congruences, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **1**, 7–25.

DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*. Berne, Peter Lang.

JOHSUA S. & DUPIN J.-J. (1999), *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*, Paris, PUF.

LEROUGE A. (1992), La notion de cadre de rationalité. À propos de la droite au collège, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **20.2**, 171–207.

MALAFOSSE D. & LEROUGE A. & DUSSEAU J.-M (2000), Étude en interdidactique des mathématiques et de la physique de l'acquisition de la loi d'Ohm au collège : espace de réalité, *Didaskalia*, **16**, 81–106.

MALAFOSSE D. & LEROUGE A. & DUSSEAU J.-M (2001), Étude en interdidactique des mathématiques et de la physique de la loi d'Ohm au collège : changement de cadre de rationalité, *Didaskalia*, **18**, 61–98.

MALAFOSSE D. (2002), Pertinence des notions de cadre de rationalité et de registre sémiotique en didactique de la physique, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, **22.1**, 31–76

NONNON P. (1986), *Laboratoire d'initiation aux sciences assisté par ordinateur*,. Thèse de doctorat, Université de Laval.

TOUMA G. (2006), *Un paradigme d'expérimentation au laboratoire de sciences pour l'identification et l'optimisation statistique d'un modèle algébrique par interaction visuo-graphique*, Thèse de doctorat, Université de Montréal.

VYGOTSKI, L. S. (1962), *Thought and Language*, Cambridge (MAS), MIT Press.

GEORGES TOUMA

Université d'Ottawa, Faculté d'éducation
Pavillon Lamoureux
145, Jean-Jacques-Lussier
Ottawa, ON, Canada, K1N 6N5
Georges.touma@uottawa.ca

**ROSA ELVIRA PÁEZ MURILLO, FELIPE ALFARO AGUILAR,
CARLOS ALBERTO TORRES MARTÍNEZ**

**ESTUDIANDO FUNCIONES EN CONTEXTO A TRAVÉS DE
SIMULACIONES CON ESTUDIANTES DE INGENIERÍA**

Abstract. Studying functions through simulations with engineering students. This paper shows the results coming out from a research led at the Autonomous University of Mexico City, in the context of a national project about teaching of calculus for engineering students. In order to identify the difficulties encountered in learning and building the concepts of co-variation and function, the use of the virtual simulation of a concrete situation was selected: transmission of movements by a fixed pulley. The students under observation received printed work sheets along with HTML pages using Java Applets for interactive work. Three research activities were prepared, ordered by growing difficulty. Two of them are reported in this paper, as they were considered to be illustrative of the difficulties that students face in understanding process of the phenomenon. This experience also showed that some elements from the simulation, as well as the misunderstanding of the involved mathematical notions (variables, parameters, algebraic relationships, domain and rank of a real function) can generate learning obstacles.

Resumen. En el presente artículo se reportan los primeros resultados que se han obtenido de una investigación con estudiantes universitarios de ingeniería del curso de cálculo diferencial acerca de las dificultades de aprendizaje y construcción del concepto de covariación y función, haciendo uso de problemas en contexto, los cuales se presentan mediante simulaciones a través de applets. Estas primeras evidencias recolectadas señalan dificultades para entender una situación física mostrada a través de una simulación y en ella identificar variables, parámetros, relaciones algebraicas, y dominios y rangos de funciones; al igual que se detecta que los elementos que se utilizan para la simulación causan obstáculos en los estudiantes. Las actividades que se han preparado para este proyecto corresponden al caso de una polea fija. Son tres applets en orden creciente de complejidad que fueron diseñados por el Dr. François Pluvinage, para cada uno se elaboró una hoja de trabajo que se entregó a cada estudiante. Estas actividades se aplicaron a cuatro grupos de la misma universidad.

Résumé. La simulation dans l'étude de fonctions pour des étudiants en ingénierie. L'article rapporte les premières observations qui résultent d'une recherche, conduite à l'Université Autonoma de la Ciudad de Mexico dans le cadre d'un projet national mexicain sur l'enseignement de l'analyse pour des étudiants en formation d'ingénierie. Pour identifier les difficultés d'apprentissage et la formation des concepts de covariation et de fonction, on a simulé sur ordinateur une situation concrète : la transmission de mouvement par une poulie fixe. Des pages html avec des Applets Java pour la manipulation sont accompagnées de feuilles de travail distribuées aux étudiants. Trois cas de complexité croissante étaient prévus, mais les observations qui se limitent aux deux premiers suffisent à mettre en évidence des types de difficultés liées soit à la compréhension de la situation

physique simulée, où certains éléments dressent des obstacles pour les étudiants, soit à l'identification des notions mathématiques qui s'y rapportent : variables, paramètres, relations algébriques, ensembles de départ et d'arrivée de fonctions.

Mots-clés. Fonction, fonction linéaire, simulation, variable, paramètre.

Présentation analytique

Afin que les lecteurs des Annales disposent en français d'une information détaillée sur le contenu du présent article rédigé en espagnol, il est précédé d'une présentation analytique élaborée par la rédaction des Annales.

L'introduction de l'article met l'accent sur le fait que beaucoup d'étudiants qui abordent un cours d'analyse éprouvent des difficultés à propos du concept même de fonction et des concepts dérivés (variables et paramètres, covariation, domaines). Pour tirer profit de l'étude du calcul différentiel proprement dit, les étudiants doivent comprendre et pouvoir utiliser ces premiers concepts. Une piste pour ce faire est de leur proposer des problèmes dits *en contexte*, recourant à des simulations sur ordinateur de situations physiques. Les étudiants n'ont pas à programmer, mais plus simplement à travailler sur des pages HTML permettant notamment des animations et à rédiger des réponses sur des questionnaires imprimés (reproduits en annexes de l'article). Cet environnement a été mis en place dans le cadre d'un séminaire national au Mexique portant sur l'enseignement de l'analyse, auquel participe notamment l'UACM (Universidad Autónoma de la Ciudad de México), où les observations dont l'article rend compte ont été effectuées. Dans d'autres centres, ainsi l'UAEM (Universidad Autónoma del Estado de México), l'environnement a pu différer, par exemple avec l'introduction de programmes didactiques (tel CalcVisual) et de questionnaires partiellement en ligne amenant à faire usage de système de gestion de données (de type MySQL). Ceci pourra être l'objet d'autres articles.

L'article ne porte pas sur la totalité du projet d'enseignement de l'analyse à l'UACM, mais se limite à présenter une analyse descriptive des observations effectuées lors du déroulement des premières activités. En effet, il est apparu qu'à elles seules elles méritaient une analyse en raison de leur intérêt et de leur richesse, s'avérant très révélatrices non seulement des savoirs des étudiants sur les premiers concepts fonctionnels, mais aussi d'autres aspects que la pratique des situations considérées a permis de mettre en lumière.

Le paragraphe 1, *Méthodologie*, présente les trois situations proposées aux étudiants, représentant toutes les trois une transmission par poulie simple fixe, de rayon négligeable par rapport à la longueur de câble, mais dans des contextes différents. Dans la première situation, le point de traction est libre et il s'agit

d'observer les mouvements de la charge qui sont associés aux déplacements du point de traction. Dans les deux situations suivantes, le plan est rapporté à un repère orthonormé ; le point de traction M est astreint à se déplacer sur l'axe Ox et la charge N se déplace sur Oy. Ce qui distingue ces deux situations est que, dans la première des deux, qui réfère à une bête de somme tirant de l'eau d'un puits au dessus duquel se trouve la poulie, le point de fixation de la poulie est O, alors que dans la dernière, la poulie P se trouve placée en un point quelconque de Oy (c'est la situation illustrée sur la figure ci-contre). Dans le cas particulier où la poulie P est en O, le lieu du point (x, y) dont les projections orthogonales sur les axes sont M et N se réduit à un segment de droite. Dans le cas général, on montre que ce lieu est un arc d'hyperbole.

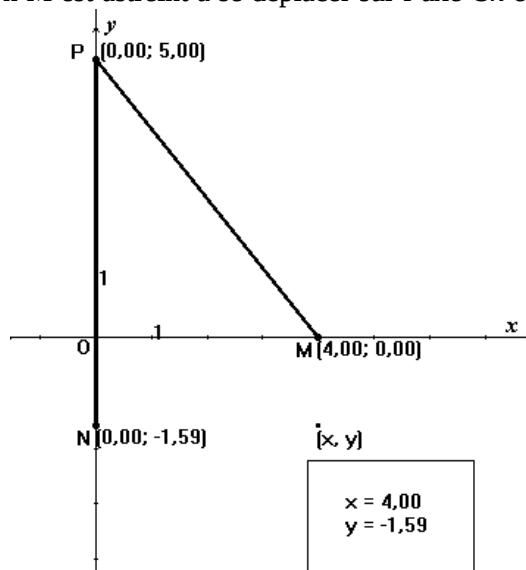


Figure pour la troisième situation.

Dans son application, la troisième situation s'est avérée pour les étudiants d'un niveau de complexité suffisamment élevé pour donner lieu à plusieurs séances de travail. Les observations effectuées à propos des deux premières situations (point de traction libre et eau tirée du puits) ont déjà permis de recueillir un corpus assez fourni pour faire à elles seules l'objet de l'article.

L'observation du travail des étudiants est traitée dans le point 2 de l'article, selon plusieurs rubriques. La première est relative à la compréhension de la situation physique représentée et à l'identification de la relations entre les variables, à longueur de câble donnée. Il est apparu des amalgames entre les désignations des objets par des lettres, à savoir M, N et P, et les variables numériques (les distances entre ces points). Ainsi un étudiant a répondu à propos de la première activité : « Selon qu'on lâche M, la longueur de N varie. Si M diminue, N augmente, et si M augmente, N diminue. » Lorsque la deuxième activité a été appliquée, une semaine après la première, les étudiants qui avaient fourni la première fois une réponse correcte et complète à la question de la relation entre la longueur x de MP et la longueur y de PN se contentèrent de réponses purement qualitatives, à l'exception d'un étudiant qui fournit à nouveau les réponses exactes. Les étudiants avaient été répartis en quatre groupes de travail, et toutes les réponses exactes dans la seconde activité furent données par les étudiants d'un même groupe, le seul où une session

de synthèse avait été organisée après la première activité. Les difficultés observées ont souligné la complexité de la description d'une situation physique simplement en langage naturel, et *a fortiori* de sa traduction en langage algébrique. Par ailleurs, des confusions ont pu être remarquées dans des références à la proportionnalité (cette dernière sera évidemment importante lorsque la dérivation sera abordée) ; ainsi des étudiants ont pu parler à tort de quantités directement ou inversement proportionnelles pour exprimer des variations dans le même sens ou dans des sens opposés, alors que les relations étaient additives.

La seconde rubrique, numérotée 2.2, est relative aux ensembles de départ et d'arrivée. Certains étudiants n'ont pas été sensibles aux limitations que la longueur du câble impose. Quinze d'entre eux ont répondu pour la première situation qu'aussi bien x que y peuvent prendre n'importe quelle valeur positive. D'autres se sont rapportés strictement à la manipulation qu'ils ont faite du modèle et ne produisent pas comme réponse l'intervalle $[0, 10]$, si la longueur de câble sur le modèle est de 10 cm, mais un intervalle plus réduit, tel que $[0,02 ; 9,98]$. Enfin, dans la situation qui est rapportée à un repère, certains n'ont pas pris en compte dans leurs réponses le signe négatif de y .

L'identification des variables et paramètres est l'objet de la rubrique numérotée 2.3. La variété des réponses obtenues pour la première situation apparaît dans un tableau de résultats, où par exemple la question sur la variable indépendante a donné lieu à six réponses différentes.

Pour illustrer les difficultés qui peuvent se rencontrer à l'occasion de conversions entre registres de représentation, rubrique numérotée 2.4, l'article présente une étude de cas. Un étudiant qui répond de manière correcte à la fois verbalement et algébriquement, se trompe au moment de dresser une représentation graphique. A cause de sa méconnaissance de l'écriture scientifique des petits nombres, telle que le logiciel la présente sous la forme $1,59\text{e-}14$, pour $1,59 \times 10^{-14}$, il prend en compte simplement la valeur 1,59, ce qui l'amène, en contradiction pourtant avec ce qu'il a déjà répondu, à dresser deux graphiques erronés.

Une ultime rubrique numérotée 2.5 aborde la généralisation du modèle. Elle se contente de signaler que tous les étudiants du groupe dans lequel avait été organisée une session de synthèse ont réussi à généraliser.

Les réflexions proposées en conclusion s'opposent à des affirmations qui concluent nombre de recherches et qui paraissent exagérément optimistes aux auteurs. Ils évoquent aussi l'hypothèse qu'une manipulation de poulies réelles eut pu changer ensuite le regard sur les situations simulées. Si l'expérience menée n'est pas une panacée pour remédier aux difficultés des étudiants, elle présente au moins l'intérêt de bien mettre toutes ces difficultés sur le devant de la scène au moment d'aborder l'étude de l'analyse.

Introducción

Estudios realizados sobre la construcción de concepto de función (Hitt, 1998; Sajka, 2003) y límite (Páez, 2001 y 2004), sugieren que antes de enfrentarse a conceptos de cálculo complejos: el de límite o derivada, deberían estudiarse nociones básicas como la de variable, parámetro y función. Por ello, la investigación que se está realizando con estudiantes universitarios, se centra en cuestionar las dificultades de aprendizaje y construcción del concepto de covariación y función, haciendo uso de problemas en contexto, los cuales se presentan a través de simulaciones con applets.

Así mismo, investigaciones realizadas por Carlson (1998, 2002), Nemirovsky y Rubin (1991), Noble y Nemirovsky (1995), entre otros, nos reportan que la experiencia con la naturaleza física del fenómeno tiene cualidades que promueven el desarrollo de estructuras internas en el estudiante, permitiendo así que ellos puedan establecer conexiones entre diferentes representaciones del modelo físico. Además, Carlson (2002) manifiesta que las habilidades de razonamiento referente a covariación son importantes para interpretar y representar la naturaleza de cambio de funciones dinámicas (que modelan movimiento).

Esta investigación se enmarca desde una perspectiva de la construcción de conceptos basada en la teoría de representaciones semióticas (Duval, 1998 y 1999; Hitt, 2003). En particular, consideramos de importancia las producciones semióticas de los estudiantes en el proceso de construcción del concepto de variable y de función. Al igual que se considera esencial la posibilidad de detectar en ellos procedimientos que reflejen cierto tipo de conocimiento, al que se identifica como una concepción¹ en el sentido de Duroux (1983).

Las preguntas de investigación que orientan este estudio son: ¿Qué concepciones se presentan en los estudiantes del primer semestre de ingeniería, cuando están aprendiendo los conceptos de variable y función?, ¿Qué nivel de dificultad se presenta en los estudiantes al analizar situaciones en contexto, de los procesos de conversión entre diferentes registros de representación (verbal, algebraico, numérico y gráfico)?, ¿Qué dificultades se detectan cuando los estudiantes utilizan tecnología para resolver problemas?

Esta investigación de tipo exploratorio forma parte de un estudio sobre la enseñanza del cálculo (Seminario nacional “Enseñanza del cálculo”, dirigido desde el Centro de Investigación y estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional)

¹Duroux (1983) define este término como un saber local que se produce cuando se privilegian ciertas situaciones, en menoscabo de otras, en la adquisición del conocimiento. Por lo tanto, una concepción es operante sobre una parte de lo que Vergnaud designa como campo conceptual y por ende presenta necesariamente insuficiencias.

en donde participan cuatro universidades y un centro de investigación de México, proyecto que tiene por objetivo general mejorar la enseñanza y aprendizaje del curso de cálculo diferencial. La propuesta específica es la reestructuración del programa de estudios, y la implementación del uso de tecnologías en dos vertientes: el uso de un software tutorial de cálculo para funciones polinomiales y la implementación de applets con simulaciones de situaciones físicas; en este caso la polea simple y el globo inflable, las cuales tienen como fin explorar el conocimiento que poseen los estudiantes en relación a los conceptos primarios de variable independiente, variable dependiente, parámetro y función, para situaciones en contexto.

Dentro del marco del proyecto “Enseñanza del cálculo”, investigadores de la Universidad Autónoma del Estado de México (centro universitario del Valle de Chalco) reportan que durante los tres últimos años de su investigación, el uso del software específico y de los applets mencionados, en su curso de cálculo ha ocasionado que los índices de reprobación disminuyan y que las dificultades de aprendizaje de los estudiantes evolucionen más rápido. Asimismo, la actitud de los estudiantes hacia la matemática ha mostrado cambios notables al tomar un papel más activo y propositivo, lo mismo en las sesiones de laboratorio que en el aula, es decir, el estudiante asume un rol diferente al que está acostumbrado tradicionalmente.

En este artículo nos centramos, no a considerar la totalidad del proyecto sino a presentar un análisis descriptivo de los resultados de las dos primeras actividades de polea y mostrar dificultades de aprendizaje con que inician los estudiantes con respecto a los conceptos primarios ya mencionados. Nos interesa estudiar los resultados de la pre-experimentación desde un punto de vista cualitativo más que cuantitativo debido a que el principal interés en esta etapa es analizar la actuación de los estudiantes en base a sus concepciones.

1. Metodología

En esta primera parte de la investigación participaron cuarenta estudiantes, todos ellos alumnos de ingeniería del curso de cálculo diferencial de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Las actividades preparadas para este proyecto, corresponden al caso de una polea fija, son tres applets en orden creciente de dificultad. En el primero, se presenta el modelo de polea simple fija que el estudiante manipula libremente con una cuerda dividida por la polea en dos segmentos, cuyas longitudes son las variables a considerar (ver Figura 1).

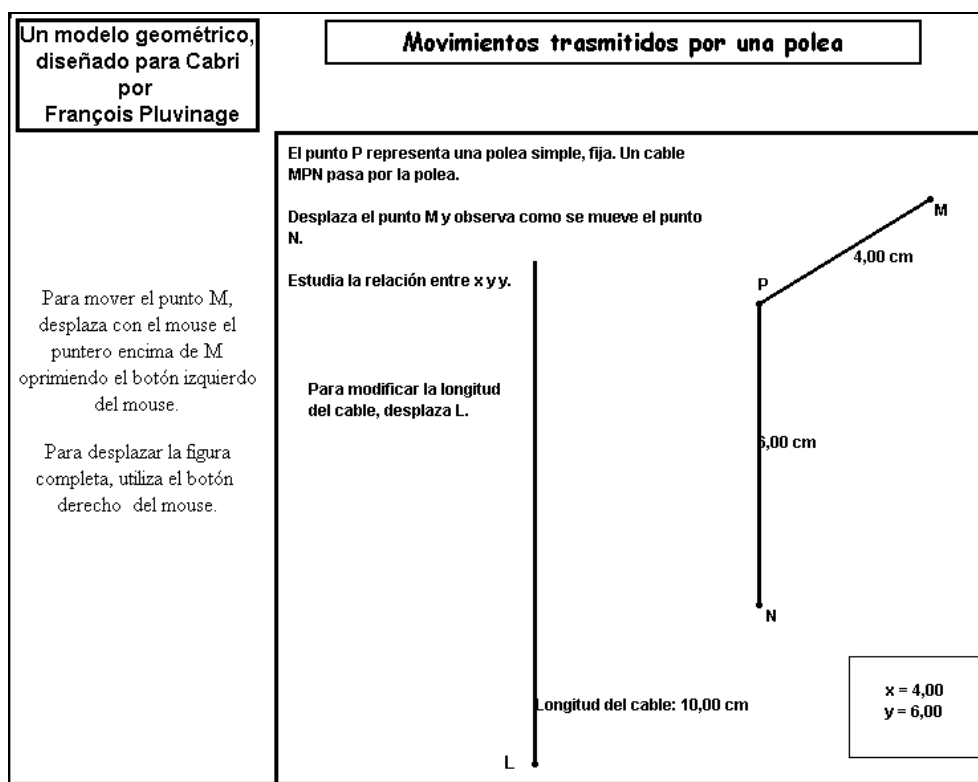


Figura 1: Applet de la actividad uno.

En el segundo applet, se plantea la consideración adicional de que la cuerda de la polea se mueve en un sistema de coordenadas cartesianas (ver Figura 2). Escenario que se generaliza en el tercer applet, al permitir que el punto de apoyo P de la polea se fije en cualquier posición del eje de las ordenadas y; esto implica un aumento en el grado de complejidad, pues la relación entre variables cambia de lineal a hiperbólica. La dificultad de la tercera actividad fue inconsistente con la experiencia previa de los estudiantes, por lo que la información recabada después de su aplicación fue escasa y no se tomó en cuenta para la elaboración de este artículo.

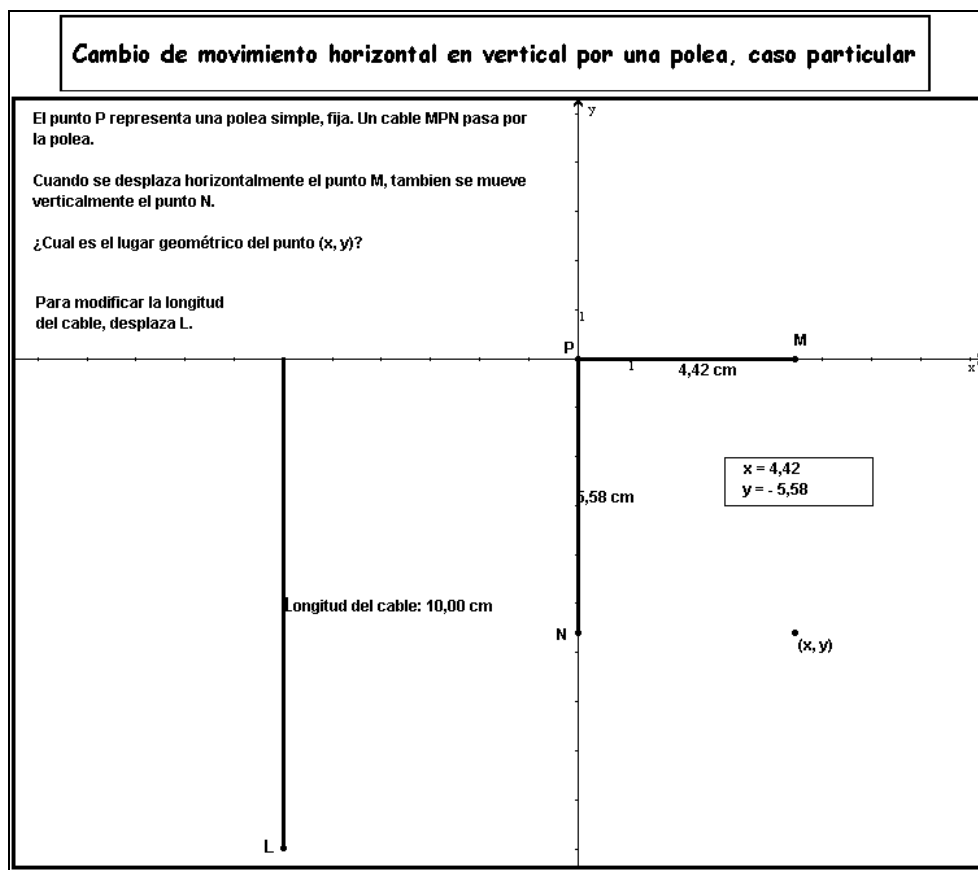


Figura 2: Applet de la actividad dos.

Para cada una de las tres actividades se diseñó una hoja de trabajo (ver anexos uno y dos) que se entregó a cada estudiante, junto con un disquete que contenía los archivos de cada simulación. En la hoja de trabajo se daban las indicaciones respectivas sobre los archivos y tareas a realizar. Las aplicaciones de la primera y segunda actividad tuvieron una duración de 75 minutos cada una y con un intervalo de una semana después. La tercera actividad resultó más compleja, por lo que se necesitó rediseñar la hoja de trabajo, y tener tres sesiones de 90 minutos cada una. El desarrollo de las actividades fue realizado de manera individual por el estudiante, y sin colaboración de los investigadores.

Algunas de las preguntas de la actividad uno y de la actividad dos son idénticas, sólo que como ya lo mencionamos, la situación física en la actividad uno se realiza sin ningún sistema de coordenadas cartesianas. Los objetivos de las preguntas de las actividades eran: identificar si los estudiantes reconocen cuáles son las variables que intervienen en esta situación en contexto, los parámetros, y las relaciones entre

las variables en los diferentes registros de representación (numérico, algebraico, verbal y gráfico), y si había articulación entre los diferentes registros que utilizaban los estudiantes.

2. Observación del trabajo de estudiantes

De acuerdo al marco teórico se examinan las respuestas dadas por los estudiantes en las hojas de trabajo, y para efectos de este artículo de investigación, se engloban las principales dificultades que presentan los estudiantes en los diferentes registros y la conversión entre ellos.

2.1. Comprensión del problema e identificación de la relación entre las variables

Pregunta: *¿Qué relación algebraica descubriste entre los valores de x y y obtenidos por diversas ubicaciones del punto M , cuando no se cambia la longitud de la cuerda?*

Al respecto, cabe decir que la palabra “algebraica” se agregó después de haber aplicado la primera actividad a uno de los cuatro grupos participantes, al detectar que ésta era ambigua, y que las interpretaciones se estaban desviando a descripciones de tipo cualitativo, no lográndose el objetivo deseado de hallar una ecuación que relacionara las dos variables. Con la modificación realizada a los siguientes tres grupos, en la primera actividad, seis de cuarenta estudiantes respondieron con éxito, ya sea en lenguaje algebraico o en lenguaje verbal, y el resto de los participantes continuaron dando interpretaciones de tipo cualitativo.

Un aspecto que nos llamó la atención sobre las respuestas a esta pregunta, es que los elementos del applet, como las letras M y N usadas para identificar a los puntos extremos de la cuerda, y la letra P para identificar a la polea, actuaron como distractores al ser frecuentes respuestas donde relacionan a estos objetos como las variables del sistema, como lo podemos evidenciar en la siguiente que dio una estudiante: *“Entre más alargue M , la longitud de N , va variando con respecto a M . Si M disminuye, N aumenta, y cuando M aumenta, N disminuye”*.

Para la actividad dos, la situación se mantuvo, el número de estudiantes que proporcionaron la relación algebraica fue aproximadamente igual, y el resto de los estudiantes proporcionaron interpretaciones de tipo cualitativo. Una diferencia que es necesario resaltar es que, los estudiantes que respondieron bien a esta pregunta en la primera actividad, ya no lo hicieron en la segunda que se aplicó una semana después, y se limitaron a dar respuestas de corte cualitativo, con una sola excepción de una estudiante que mantuvo respuestas correctas en ambas actividades.

Debemos señalar que, durante el experimento, antes de aplicar la segunda actividad, realizamos una sesión previa a uno de los cuatro grupos participantes. Con ellos se reflexionó sobre la situación física que se les estaba planteando y lo que estrictamente solicitábamos en la pregunta, ya que notamos que ésta les causó mucha confusión. Fue en este grupo, donde se obtuvieron todas las respuestas correctas a la pregunta sobre cuál es la relación algebraica entre las variables x y y .

Los resultados obtenidos para esta pregunta, tanto en la actividad uno como en la dos, determinan dificultades que tienen los estudiantes en traducir a un lenguaje algebraico o natural, la relación funcional lineal inmersa en un problema físico. Al respecto, Carlson (2002) señala la complejidad de esta situación debido a que las acciones para coordinar y entender el cambio de una variable con respecto a la otra, involucran toda una representación mental de la operación de coordinación entre dos objetos.

Además, se evidenció concepciones, en el sentido de Durox (1983), relacionadas con el concepto de proporcionalidad, por ejemplo, el solo hecho de que una variable aumente y la otra disminuya o aumente, hace que los estudiantes afirmen que son inversamente o directamente proporcionales respectivamente. Esto se evidenció en tres estudiantes en la primera actividad y en cinco en la segunda actividad. Carlson (2002) describe a este tipo de “relación” entre las variables, que resulta del modelo físico, como “Estructuras de Covariación”.

2.2. Identificación del dominio y rango

Preguntas:

- *La cuerda teniendo una longitud determinada ¿puede tomar x cualquier valor positivo? Si no ¿cuáles son sus valores posibles?*
- *La cuerda teniendo una longitud determinada ¿puede tomar y cualquier valor positivo? Si no ¿cuáles son sus valores posibles?*

Esta parte nos permitió identificar dificultades que tienen los estudiantes acerca de la identificación de dominio y rango de una relación funcional. Los resultados obtenidos en la actividad uno, nos muestran que dieciséis estudiantes son capaces de identificar el dominio y el rango de esta relación algebraica. Quince estudiantes manifiestan que tanto x como y pueden tomar cualquier valor positivo. Algunos estudiantes responden estrictamente dentro de las limitaciones del applet, en el sentido que al manipular la cuerda, la variable x no alcanza los valores extremos del dominio, es decir, 0 o L , por lo que escriben dominios con intervalos del siguiente estilo $[0.02, 9.98]$ para una cuerda de longitud $L=10$ cm. En la actividad dos podemos identificar representaciones espontáneas para notación de intervalos, como lo expresa Hitt (2003), ya que expresan que los valores que puede

tomar la variable y con un valor específico de la cuerda de 10 cm, es de 0 a -10, y lo representan como $[0, L]$ sin tomar en cuenta el signo negativo.

2.3. Identificación de variables y parámetros

Indicación: *En el fenómeno estudiado te proponemos introducir las palabras: variable dependiente, variable independiente, parámetro. De los elementos presentados en la página Internet, escoge los que te parezcan más convenientes en cada caso.*

Este enunciado corresponde únicamente a la actividad uno, y los resultados obtenidos los podemos evidenciar en las siguientes tablas:

Variable dependiente		Variable independiente		Parámetro	
	Número de estudiantes		Número de estudiantes		Número de estudiantes
y	14	x	14	L	27
M	6	P	1	P	2
N	13	N	4	M	2
P	2	M	14	N	2
x	4	L	2	Otras respuestas	4
No Responden	1	y	4	No Responden	5
		No Responden	1		

Como podemos observar en estos resultados, hubo seis respuestas distintas para seleccionar a la variable independiente, y otras tantas para la variable dependiente, inclusive llegaron a proponer el punto de apoyo de la polea P como variable.

Los resultados aquí obtenidos ratifican lo ya mencionado por Carlson (2002) sobre la complejidad de lo que implica el coordinar y entender el cambio de una variable con respecto a la otra, conllevando así a la dificultad para identificar los distintos elementos presentes en el applet, por ejemplo, confunden el punto extremo M de la cuerda, donde se jala para levantar la carga, con la variable x (la longitud del segmento de cuerda entre la polea y el punto M), a pesar de que en la simulación se muestra claramente el valor numérico cambiante de la longitud de este segmento de cuerda, el cual se identifica en un pequeño recuadro con el símbolo x . Esta misma confusión se muestra al identificar el punto extremo N de la cuerda donde se

encuentra la carga, como la longitud del segmento de cuerda entre la polea y la carga, que en realidad es la variable y .

2.4. Conversión entre representaciones: Un estudio de caso

Indicación: Para cada una de las longitudes que seleccionaste y con los valores de la tabla de la pregunta 1.

- a. Elabora una gráfica con los valores de x y y que se corresponden (x en abscisa, y en ordenada).
- b. ¿Cómo cambia la gráfica al cambiar el parámetro L en la situación planteada?

Uno de los aspectos importantes a señalar en este punto, es que si bien se solicita graficar usando los datos obtenidos en la simulación, ninguno de los seis estudiantes que encontró la relación algebraica entre variables x y y , relacionó ambas formas de representación. No utilizaron las técnicas aplicadas en el curso para graficar funciones lineales, por ejemplo, la identificación de la pendiente y ordenada al origen; todos ellos usaron el tabulado de puntos. Tampoco establecieron una vinculación del aspecto gráfico con el dominio y rango, esto es, no limitaron sus gráficas a los dominios dados por ellos mismos, las “recortaban” de acuerdo a los datos usados en el tabulado de puntos, o bien las “extendían” más allá de su dominio sin precaución alguna.

Para ejemplificar lo que acabamos de mencionar, exponemos a continuación el caso de un estudiante. Para la actividad uno, en la pregunta 2 se solicita identificar la relación algebraica entre variables, describiéndola correctamente usando un lenguaje verbal (ver Figura 3). También describe correctamente cuáles son las variables dependiente e independiente, y sus intervalos de definición (ver Figura 4), sin embargo, no es capaz de plasmar dicha relación en la representación gráfica (ver Figuras 5a y 5b) y en la representación numérica. Tampoco se percata de su contradicción entre el dominio dado verbalmente, y el dominio que muestra en su representación gráfica, pues en la figura utiliza valores negativos.

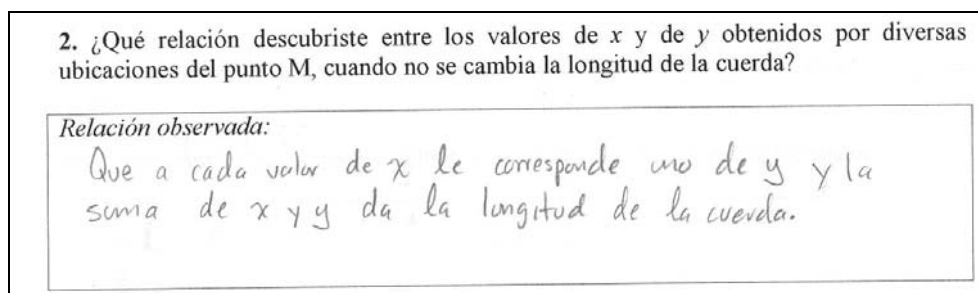


Figura 3

3. La cuerda teniendo una longitud determinada ¿puede tomar x cualquier valor positivo? Si no ¿cuales son sus valores posibles?

Valores posibles de x :

Solo puede tomar valores positivos no mayores que la longitud de la cuerda, y los valores de y podrian acercarse al cero a medida que x aumente cada vez más

Figura 4

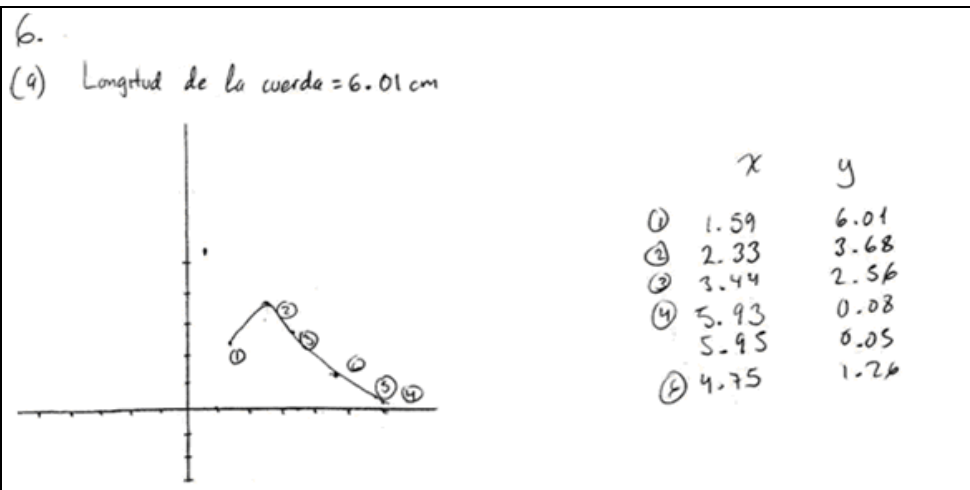


Figura 5a

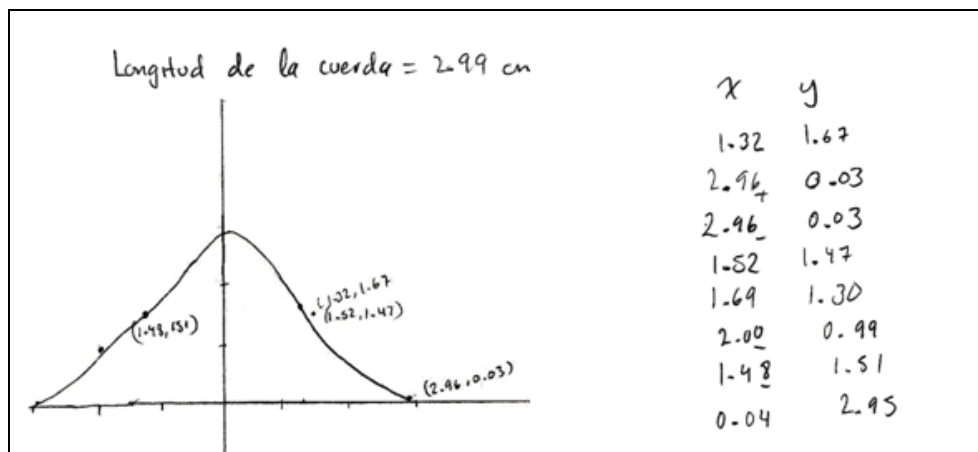


Figura 5b

Un aspecto más que llama la atención es que en la pregunta uno para una longitud de la cuerda de 6.01, el estudiante escribe un valor para x de $1.59\text{e-}14$ y un valor para y de 6.01 cuando el punto M casi coincide con el punto de apoyo P de la polea. Al pasar a la pregunta seis, transcribe el valor para x como 1.59 despreciando el factor exponencial, mostrando dificultades en la lectura de números reales, específicamente con la lectura de exponentes negativos, al igual que no relaciona los datos numéricos con la relación algebraica que expone en la pregunta dos (ver Figura 3). En la gráfica realizada (ver Figura 5a) se evidencia también la falta de control o de vinculación con los datos numéricos que tiene con una relación lineal. También existen problemas de precisión entre la situación física y el modelo matemático, sólo se limita a escribir los datos que aparecen en la simulación sin tener una comprobación de la relación algebraica entre variables.

Por la trayectoria observada en este estudiante, el profesor lo identifica como uno de los más destacados en el curso de cálculo, ya que demuestra disciplina, dominio de algunos conocimientos y capacidad autodidacta. Sin embargo, parece “extraviarse” dentro de la dinámica del applet y no identifica como lineal a la relación que da entre ambas variables y , por lo tanto, no lo asocia con una línea recta en su representación gráfica. Está claro que tampoco asocia su respuesta dada en un lenguaje verbal (Figura 3), con una ecuación o una función que le sirva para graficar los distintos valores que va obteniendo de ambos segmentos de cuerda. Tampoco detecta sus errores en el llenado de datos a las dos tablas (una para cada longitud de la cuerda), a pesar de ser una relación sencilla, y de ser muy pocos los elementos visuales que participan en el ejercicio de la polea simple. Al respecto, Carlson (2002) manifiesta que los estudiantes pueden coordinar imágenes de dos variables que cambian bajo cierta relación, pero al parecer no pueden aplicar su razonamiento en el contexto de una gráfica o fórmula. Expresa además que los estudiantes son más espontáneos y de manera subconsciente se apoyan en estructuras internas que adquirieron o relacionaron con alguna experiencia o evento.

Continuando con el análisis de esta pregunta, inciso *b*), *¿Cómo cambia la gráfica al cambiar el parámetro L en la situación planteada?*, es importante resaltar que en la primera actividad ningún estudiante identificó el efecto de dicho parámetro, y en la actividad dos, sólo dos estudiantes lograron traducir en un lenguaje natural lo que sucede en la gráfica al variar el valor de L . Cabe señalar que, nuestra intención con esta pregunta era que identificaran desde el punto de vista geométrico, la traslación vertical que sufre la gráfica al cambiar el valor del parámetro, pero de acuerdo a la diversidad de respuestas difusas, consideramos que la pregunta estuvo *mal planteada*.

2.5. Generalización del modelo

Preguntas:

- *¿Cómo cambia el modelo que planteaste si el burro se mueve a la izquierda?*
- *¿Cómo escribirías el modelo para que el burro se pueda mover a la derecha y a la izquierda?*

En estas preguntas exclusivas de la actividad dos, todos los estudiantes del grupo al que se le hizo la reflexión sobre la situación en contexto, lograron plantear dicho modelo.

3. Reflexiones

Uno de los aspectos que se pueden resaltar de la aplicación de las actividades seleccionadas es la mala asociación de objetos contenidos en el applet con los conocimientos que ya poseen. Además, puede existir confusión entre los diferentes elementos que aparecen en la simulación, como son: variables con objetos físicos (punto extremo, punto de apoyo de la cuerda, *etc*). A diferencia de los resultados exitosos que reportan investigadores como Nemirovsky y Rubin (1991), Noble y Nemirovsky (1995), al hacer que los estudiantes tuvieran contacto con la situación física para luego generar el modelo, en esta parte de pre-experimentación de las actividades, la manipulación del fenómeno físico en el applet no surtió el efecto esperado en los estudiantes. Esto se debió quizás a que se omitió la manipulación física con una polea real y de discusión sobre lo qué es una polea y sus diferentes clases que existen.

El estudiante no establece conexiones entre los diferentes tipos de representaciones del concepto de función, esto se hace visible en el momento en que proporciona respuestas contradictorias referentes a las representaciones gráficas y algebraicas.

Otro aspecto fundamental a considerar tiene que ver con las representaciones institucionales (Hitt, 2003), que usa el profesor, los libros, o los simuladores y las que utiliza el estudiante para comunicar sus conocimientos. Son los diferentes casos que se presentaron, por ejemplo, la notación matemática que escribe para expresar los intervalos del dominio y del rango, el lenguaje verbal usado para expresar dichos intervalos, o la doble interpretación que le proporciona a un mismo objeto que se usa en la simulación (es el caso de los puntos M y N que representa para él a la vez un punto y una longitud).

Anexo 1

ACTIVIDAD UNO²: POLEA LIBRE

Nombre: _____ Matricula: _____

Carrera: _____ Plantel: _____

Instrucciones

I. En el disquete que se te ha proporcionado, en la carpeta Actividad Uno Polea Libre abre el archivo PoleaMlibre. Aparecen en la pantalla unas indicaciones y una figura que representa un cable que pasa por una polea simple fija P. Puedes manipular este modelo con el Mouse de la computadora. Prueba los movimientos posibles.

II. Si quieres recargar en cualquier momento la página, para regresar a la situación inicial, da clic a la flecha de recarga en la barra de herramientas superior del navegador.

III. Con un doble-clic del Mouse abre una barra de herramientas debajo de la figura. Cuando el puntero está encima de un icono de dicha barra, aparece una indicación, por ejemplo, “escoger las trazas”, o “resorte de animación”. Si se quiere la obtención de lo indicado, hace falta seleccionar primero el icono, luego en la figura los puntos deseados, y finalmente regresar al icono seleccionado. Solamente después de estas tres etapas aparece el efecto indicado.

IV. Responde por escrito cada una de las preguntas siguientes. Al terminar la actividad el cual tiene **una duración de 30 minutos, deberás entregar dicho informe.**

Preguntas o indicaciones

1. Elige dos longitudes distintas para la cuerda y completa las siguientes tablas

Longitud de la cuerda: $L = \underline{\hspace{2cm}}$ cm		Longitud de la cuerda: $L = \underline{\hspace{2cm}}$ cm	
x	y	x	y

2. ¿Qué relación algebraica descubriste entre los valores de x y de y obtenidos por diversas ubicaciones del punto M, cuando no se cambia la longitud de la cuerda?

Relación observada:

² Instrumento tomado del proyecto de investigación Cinvestav-UACM y modificado para el curso de CD

3. La cuerda teniendo una longitud determinada ¿puede tomar x cualquier valor positivo? Si no ¿cuales son sus valores posibles?

Valores posibles de x :

4. La cuerda teniendo una longitud determinada ¿puede tomar y cualquier valor positivo? Si no ¿cuales son sus valores posibles?

Valores posibles de y :

5. En el fenómeno estudiado te proponemos introducir las palabras: variable dependiente, variable independiente, parámetro. De los elementos presentados en la página Internet, escoge los que te parezcan más convenientes en cada caso.

¿Cuál sería la variable dependiente? _____

¿Cuál sería la variable independiente? _____

¿Cuál sería el parámetro? _____

6. Para cada una de las longitudes que seleccionaste y con los valores de la tabla de la pregunta 1.

a. Elabora una gráfica con los valores de x y y que se corresponden (x en abscisa, y en ordenada).

b. ¿Cómo cambia la gráfica al cambiar el parámetro L en la situación planteada?

7. a. Si x aumenta una unidad, ¿qué sucede con y ?

7 b. Si x aumenta dos unidades, ¿qué sucede con y ?

7 c. ¿Qué relación observas entre los incrementos del valor de x y los incrementos del valor y ?

8. En la gráfica, ¿cuál es el valor de la pendiente?

Anexo 2

ACTIVIDAD DOS³: POLEA CASO PARTICULAR

Nombre: _____ **Matricula:** _____

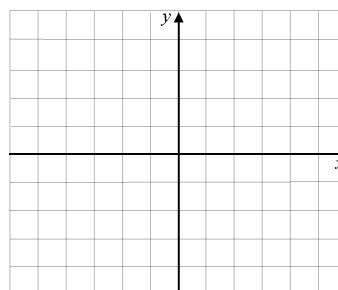
Carrera: _____ **Plantel:** _____

Instrucciones: En el disquete que se te ha proporcionado, en la carpeta Actividad Dos Polea CR abre el archivo PoleaCoord0... (siguen las mismas instrucciones del anexo 1)

Situación: Imagina que quieres sacar agua de un pozo y para ello utilizas una polea fija. En el lado vertical de la polea está la vasija y del otro lado se encuentra un burro que jala de la cuerda para subir el agua.

Preguntas o indicaciones

1. Dibuja esta situación dentro de un sistema de coordenadas rectangulares de tal manera que la polea fija está en el punto (0,0).



2. Elige dos longitudes distintas para la cuerda y completa las siguientes tablas

Longitud de la cuerda: $L =$ _____ cm

x	y

Longitud de la cuerda: $L =$ _____ cm

x	y

3. ¿Qué relación algebraica descubriste entre los valores de x y de y obtenidos por diversas ubicaciones del punto M, cuando no se cambia la longitud de la cuerda?

Relación observada:

4. La cuerda teniendo una longitud determinada ¿puede tomar x cualquier valor positivo? Si no ¿cuales son sus valores posibles?

Valores posibles de x:

³ Instrumento tomado del proyecto de investigación Cinvestav-UACM y modificado para el curso de CD

5. La cuerda teniendo una longitud determinada ¿puede tomar y cualquier valor positivo? Si no ¿cuales son sus valores posibles?

Valores posibles de y :

6. Para cada una de las longitudes que seleccionaste y con los valores de la tabla de la pregunta 1.

a. Elabora una gráfica con los valores de x y y que se corresponden (x en abscisa, y en ordenada).

b. ¿Cómo cambia la gráfica al cambiar el parámetro L en la situación planteada?

7 a. Si x aumenta una unidad, ¿qué sucede con y ?

7 b. Si x aumenta dos unidades, ¿qué sucede con y ?

7 c. ¿Qué relación observas entre los incrementos del valor de x y los incrementos del valor y ?

8. En la gráfica, ¿cuál es el valor de la pendiente?

9. ¿Cómo cambia el modelo que planteaste si el burro se mueve a la izquierda?

10. ¿Cómo escribirías el modelo para que el burro se pueda mover a la derecha y a la izquierda?

Bibliografía

- CARLSON M. (1998), A cross-sectional investigation of the development of the function concept, *Research in collegiate mathematics education*, 7, 114–162.
- CARLSON M. (2002), Physical enactment: a powerful representational tool for understanding the nature of covarying relationships, in Hitt F., (Editor), *Representations and mathematics visualization*, CINVESTAV-IPN México, 63–77.
- DUROUX A. (1983), La valeur absolue : Difficultés majeures pour une notion mineure, *Petit X*, 3, 43–67.
- DUVAL R. (1999), *Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales*, Universidad del Valle, Santiago de Cali.
- DUVAL R. (1998), Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, *Investigaciones en Matemática Educativa II*, Grupo Editorial Ibero América, México, 173–201.
- HITT F. (1998), Difficulties in the Articulation of Different Representations Linked to the Concept of Function, *Journal of Mathematical Behaviour*, 17-1, 123–134.
- HITT F. (2003), Le caractère fonctionnel des représentations, *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, 8, IREM de Strasbourg, 255–271.
- NEMIROVSKY R. & RUBIN A. (1991), It makes sense if you think about how the graphs work in reality, in F. Furunghetti (ed.) *Proceedings of the 15th annual Conference International Group for Psychology of Mathematics Education*, 3, 57–64.
- NOBLE T. & NEMIROVSKY R. (1995), Graphs that go backwards, in L. Meir and D. Carraher (eds.) *Proceedings of the 19th annual Conference International Group for Psychology of Mathematics Education*, 2, 256–263.
- PÁEZ R. (2001), *Dificultades de aprendizaje en el concepto de límite: Ideas del infinito*, Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México.
- PÁEZ R. (2004), *Procesos de construcción del concepto de límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión*, Tesis de Doctorado, CINVESTAV-IPN, México.
- SAJKA M. (2003), A secondary school student's understanding of the concept of function –A case study, *Educational Studies in Mathematics* 53, 229–254.

Rosa E. PÁEZ MURILLO

Felipe ALFARO AGUILAR

Carlos A. TORRES MARTÍNEZ

rosa.paez@uacm.edu.mx, eltiopi@yahoo.com, inocencio3@gmail.com

Universidad Autónoma de la Ciudad de México (UACM)

ASSESSING THE DEVELOPMENT OF GEOMETRICAL THINKING FROM
THE VISUAL TOWARDS THE ANALYTIC-DESCRIPTIVE LEVEL

Abstract. The transition to a more advanced stage of geometrical thinking, identified by Van Hiele as the transition from Level 1 to Level 2, is characterised by the gradual primacy of geometrical structures over the gestalt unanalysed visual forms and by the application of the geometrical properties of the shapes. The solution techniques adopted by students of different educational levels and of a range of formal geometrical education experience have been investigated through a number of specially designed for this purpose items. The results indicate that the perceptual strategies are present in the students' strategy choices, including university students. It is suggested that the typical tests that assess the development of geometrical thinking should be complemented with items focusing on this issue.

Résumé. L'évaluation du développement de la pensée géométrique du niveau visuel au niveau analytique – La transition vers un stade plus avancé de la pensée géométrique, identifiée par Van Hiele comme la transition du niveau 1 au niveau 2, se caractérise par une primauté graduelle que les structures géométriques prennent sur les figures perçues dans leur globalité et par l'application de propriétés géométriques des formes. On a mené, grâce à des exercices mis au point dans ce but, une recherche sur les techniques de résolution adoptées par les élèves de différents niveaux scolaires, ayant des vécus variés de l'enseignement formalisé de la géométrie. Il apparaît des choix de stratégies perceptives jusque chez des étudiants à l'université. Une préconisation pour évaluer le développement de la pensée géométrique est de compléter les tests classiques par des questions centrées sur ce point précis.

Key-words. Visual level, Analytic level, Transition, Visual strategies, Geometry I & II.

Introduction

Van Hiele (1986), describing the evolution of his theory since 1955, regrets the fact that initially he “had not seen the importance of visual level”, but finds that “nowadays the appreciation of the first level has improved” (p. 41). As Hershkowitz (1990) nicely puts it: “Visualization and visual processes have a very complex role in geometrical processes ... More work is needed to understand better the positive and negative contributions of visual processes” (p. 94).

Visual intuition is related strongly to a particular mode of doing geometry: the higher the level of formal geometrical reasoning, the less dominant the visual component becomes. Thus, it would seem quite productive to have also at our disposal the terminology introduced by Houdement and Kuzniak (2003), that

assigns the strategies of the primary geometrical thinking to Geometry I, the spatial domain of the real world, allowing experimental and perceptual validations and estimations, contrary to the more advanced and rigorous Geometry II, the natural axiomatic geometry modelled according to Euclid's Elements. The use of these last notions of different geometrical paradigms can facilitate the analysis and make more explicit the relation between the geometrical "world" within the learner acts and the particular level of the learner's geometrical thinking development.

The results presented in this paper are part of a wider research attempting to elucidate certain aspects of the aforementioned "positive or negative contributions of visual processes" to the development of geometrical thinking and vice versa (i.e. the effect of geometry learning on the development of visual processes). In this paper we confine ourselves to the results related exclusively to the problem of the transition from Van Hiele's Level 1 to Level 2. Assuming in principle Van Hiele's stage theory combined with the different Geometry paradigms taxonomy, we could phrase (and appropriately rephrase) the question posited in this research as follows:

- To what extent secondary education students have substantially progressed from "visual" Level 1 to the "descriptive-analytic" Level 2?
- Do they *apply* the geometric structures pertaining to Geometry II in a visually differentiated context that reminds them Geometry I? Or more specifically;
- Do secondary students tend to use "visual" (more appropriate to Geometry I) or "analytic" (characterizing Geometry II) strategies to solve tasks which allow both procedures?

1. Theoretical considerations

1.1. Some remarks upon Van Hiele level 2

Certainly, Van Hiele considered as main characteristic of Level 2 the fact that the visual figure recedes to the background and the shape is represented by the totality of its properties. He stressed however that the discovery of these properties should be made by the pupils themselves and not be offered ready-made by the teacher (Van Hiele, 1986). But this is not sufficient: Level 2 is characterized by the pupil's ability to "*apply* operative properties of well-known figures" (*ibid.* p. 41). In a similar vein, Kuzniak & Rauscher (2006) characterise this particular stage as pertaining to Geometry I Prop(erty) towards Geometry II, contrasting it to Geometry I Experimental (where student use measurement and drawing tools to solve a problem) and Geometry I Perceptual (where the solution is based on visual perception). Hence, we should keep in mind that in order for a student's

geometrical thinking to be characterised as Level 2, the students should not simply recollect the learned properties of a shape, but should manifest a more active state: a mode of mental activity that strives to both find new properties and *apply* the already known ones to assess spatial relations in a deductive way.

1.2. Type and content of test items

Reviewing the research literature on Van Hiele levels we find that the test items specific to Level 2 can be roughly described as follows: A simple, basic geometric shape (e.g. a rhombus) is shown to the student. Then the student is asked to either “list its properties” (Gutiérrez & Jaime, 1998; Jaime & Gutiérrez, 1994), or identify a particular quadrilateral in a set including a variety of different types (Burger & Shaughnessy, 1986) or select among propositions referring to known properties of basic shapes (Usiskin, 1982).

Considering what have been said above about the importance of student’s ability to apply properties, it is clear that this kind of tasks put a rather one-sided weight upon the recollection of properties over their application in novel situations. Hoffer (1983, 1986) and Fuys et al. (1988) considered in their work the skill of applicability of properties. Following Van Hiele, Hoffer (1983, 1986) focuses on the development of “insight” in the students, an ability to perform in a possible unfamiliar situation competently and intentionally. Fuys et al. (1988) revised and extended the initial version of Van Hiele’s model. They suggested general descriptors of each level recast in behavioral terms. These terms were examined and approved by Van Hiele himself. They set additional criteria such as: “discovering of new properties by deduction” (Fuys et al., 1988, p. 65) (Level 3) (“deduction” refers to the ability of geometrical argumentation, without grasping neither the axiomatic structure nor the interrelationships of networks of theorems), “comparing shapes according to relationships among their components” (*ibid.* p. 60), “discovering properties of an unfamiliar class of figures” (*ibid.* p. 60), and “solving problems by using known properties of figures or by insightful approaches” (*ibid.* p. 60)(Level 2).

Another matter of concern is the up to date one-sided dealing with the concept of “congruence” (of line segments or angles) and neglecting other topics, like, for example, the fundamental geometrical concepts of “similarity” or “area”, a matter that has also been stressed by Senk (Senk, 1989).

2. Method

2.1. Some general remarks

If we assign a student any geometrical problem in the context of a Geometry lesson, this particular context *imposes* on her/his the need to act in Geometry I or II, regardless of how comfortably s/he feels doing so. The level of the student's competence in some particular topic and her/his demonstrative style of Geometry II have a substantial effect upon the solution the student finally produces or the time s/he consumes for this (and not upon the student's choice of mode of thinking): *all* students will *try* to find a solution anyway pertaining to Geometry II. This research project emphasizes the importance of exactly this issue: the *choice* of the solution strategy. We propose to integrate to the typical Geometry Levels assessment tests the criterion of "*decidability*". In other words, we suggest to consider in the assessment criteria not just the degree of the student's competence to deal with Geometry II structures, but something that acts before that: the student's *preference* to act in Geometry I or Geometry II environment. The student interprets the visual context of the problem and then decides which solution mode to employ. And this *decision* is not of negligible significance: students should be aware of the unreliability of visual estimates and the superiority of geometrical thought. Hence, it was of considerable importance to structure the problems' context in such a way that it would not impose on the student some particular "strategic choice".

First consequence: the visual aspect of the problem had in any case to counterbalance the geometrical/reasoning aspect of it.

Second consequence: we had to minimize every factor that could lead to any implication alluding to Geometry lesson. The questionnaire was not administered during a Geometry classroom session. The students were told vaguely that a research about "the way students deal with shapes" was in progress, not about geometrical aptitude. The only hint in the instructions we gave: "You can use any method you prefer to answer these tasks. You can use whatever method you deem appropriate, even your geometrical knowledge, if you wish". Finally, we avoided to ask students to justify their answers, in order to prevent the participants to make the conceptual link: "justification" → "demonstration" → "Geometry II".

2.1. On the specific tasks

Following the above considerations a number of geometrical tasks were designed. The content of these tasks derived from three essential concepts: (C)ongruence, (S)imilarity and (Ar)ea. Recall that the main idea is to present a spatial problem in visual context different to what can be found in a usual geometry textbook. The correct answer could be found either by some geometrical reasoning pertaining to Geometry II or by a visual estimate. Nevertheless the latter will lead, with the

higher degree of certainty attainable, to perceptual misjudgement, due to the inherent limitations of the human's visual system capacities.

This means that the visual setting was constructed in a way that it was as far as possible to produce visual ambiguity or error, rendering the visual estimation precarious. Consequently, the deliberate aim of the setting of the problem was to test the students' *choice* concerning the appropriate strategy (against their presumed knowledge of the limitations of visual estimations), rather than their perceptual efficiency or exactness.

There were two tasks for each topic and two alternative versions (to prevent students from cheating, depending on the classroom conditions), six in all for each student. Fig. 1 (see Annexe) shows the test items related to the congruence of figures (C1 & C2) and line segments (C3 & C4), for the application of the definitional property of circle and rectangle. C2 is a more demanding task, compared to C1, about the congruence of triangles, while C3 is the known Müller-Lyer optical illusion against a background of parallel lines and circle arcs that provide cues for rigorous geometrical reasoning.

Virtually every task concerning congruence and involving visual estimation entails some degree of ambiguity (since visual estimations are reliable on a certain level, see section 4 below). Despite that, we considered necessary to include tasks on this topic, at the expense of complete unambiguity, since congruence is probably the most fundamental concept in secondary education Geometry. Moreover, we thought these test items to be just complementary to the traditional tools and, additionally, as novel ones, more interesting to be investigated.

Constructing a congruence problem of this kind one faces the following situations:

- i) The shapes are congruent and they also seem compellingly congruent. All the typical problems in Geometry II are of this type, providing all the necessary data to prove the asked conclusion without interferring with the visual aspect. Answers based on visual estimates do not count (in Geometry II), as they are irrelevant to the rules imposed by the teacher.
- ii) The shapes are congruent but they seem compellingly not congruent. If the problem provides the means to prove that they are congruent, running counter to the perceptual inclination, we have tasks like C1, C3 or C4. In this case the visualizer is "punished" (as far as possible) and the reasoner is "rewarded".
- iii) The shapes are not congruent. If the means to *prove* they are *not* congruent are provided, this ceases to be a congruence task and becomes a quite specific and demanding geometrical problem. Thus, it is not possible to construct congruence tasks of this type. This situation can be ameliorated by asking the student, not to

prove the incongruence, but at least not to say the congruence (which is compelling to the eye) *for lack of evidence*.

The purpose of C2 is to address exactly this last situation:

(i) The student is provided with the means to prove by geometrical reasoning that triangles A and C are congruent (two equal sides and included angles having sides perpendicular), using the explicit and implicit data of the picture. We could explicitly mention that the points appearing in the figure as circle centers, are really so (the same in C1), but we avoided it, not to overweigh the figure with so many elements. Nevertheless, in case a student asked whether or not the particular points were indeed the centers, as they seemed to be, we immediately provided the information (“yes, they are the centers”). Such instances actually occurred.

(ii) The task asks the student *not* to try to prove triangle B=A or C, due to the lack of sufficient evidence (only one side is equal to a corresponding side of A or C and it is quite apparent from the picture that nothing relates other elements of B to anything of A or C). In case a student tried to prove B=A or B=C, despite the lack of the required data, consuming time in this effort, significantly decreases this student’s chance to be included in Geometry II category.

Tasks S1 and S2, and their alternate versions S3 and S4, with exactly the same underlying geometrical idea but different visual context, are shown in Fig. 2 (see Annexe). Tasks Ar1 and Ar2, and their corresponding variations Ar3 and Ar4, were about the concept of area (Fig. 3, Annexe). Note that Ar2 is the same task by means of which Piaget (Piaget & Inhelder, 1960) investigated the relation between length and area.

The paper and pencil test battery included 11 items in all. The remaining five items tested other spatial capacities and were not time consuming: to identify, for example, an asymmetrical figure among symmetric ones or to find the result of a plane rotation.

We allowed 25 minutes for the whole process. Note that, the final choice of the test items, the decision to implement temporal upper bound, as well as other practical details were the result of analysing a number of empirical observations in the preliminary phase of this study. The students involved were from the 1st and 2nd grade of upper secondary school (Lyceum) and the time consumed rarely exceeded 20 min. We added another 5 minutes to ease even more the time limitations. Besides that, we have never been strict on the time limits. There have been cases where one or two said they needed more time to work on some item and we permitted them to do so until the bell rang, even afterwards. The 25 min. time limit is not excessively smaller than the net time remaining if from the official 45 min. of a classroom session we subtract the time needed for the students’ entrance and full accomodation, for the introduction of ourselves and our research project, for

giving of the instructions, for the collection of papers. Leaving the papers on students' hands after the majority of them had finished, led to attempts for cooperation and influencing each other.

This test questionnaire was administered to 478 students (ages ranging 15 to 23). This sample was composed of two main groups (A and B), each divided in two subgroups (A1, A2 and B1, B2 respectively). For comparison reasons, we sought for a population, inside this age range, that had undergone the minimum possible geometrical instruction, because another research matter was to elucidate the pattern of the effect of various types and contents of the formal geometrical education upon the process of the development of some spatial capacities. A population fitting these criteria was a group (labelled A1) of 80 students attending Bakery-Pastry Practical Apprentiship School (under the supervision of Greek State Organization for the Employment of the Working Force). These students had received some basic geometry instruction in elementary and lower secondary school, but probably their involvement in the educational process was limited. A second subgroup (A2) consisted of the typical tenth graders (154 in number) entering the upper secondary school and ready to attend the Euclidean Geometry syllabus (mandatory for all students of this level in Greece).

In sum, the members of group A were young adolescents with non-systematic instruction in a Geometry II environment. On the other hand, Group B consisted of two subgroups; 150 upper secondary twelfth graders (B1; age 17-18) and 94 Mathematics Department students in Athens University (B2; age 20-23), both subject to substantial and systematic geometrical instruction (adequate knowledge of Geometry II concepts and techniques).

The test battery was administered in the period between April 2004 and October 2005 in the corresponding classrooms.

Since, students were not carrying special geometrical instruments with them when they were given the test questionnaire, all worked in homogeneous conditions concerning this issue. It is true that some students carry with them small straightedges in daily basis, but the comparison measurements required for congruence tasks (C1,2,3,4) could be also accomplished by some offhand, improptu tool: we indeed observed students using the page edge of a copybook or other paper, marking on it the line segments end(s) in order to compare it to another.

We assumed that wrong answers mainly implied either unsuccessful visual estimates or flawed geometrical reasoning. However, in case of a correct answer there was the possibility that a student might have used the visual estimate strategy. This particular difference mattered substantially for the transition to an analytic-descriptive level. As explained above (2.1), a written instruction asking "How you

worked it out?” shouldn’t be included in the paper test for the following reasons: a) the aim of the study was to test the student’s spontaneous reaction and immediate choice without any clue relating the task to any specific Geometry I or II, b) the student’s reply “By the eye” doesn’t necessarily preclude another more analytic strategy (Geometry II) at her/his disposal as an alternate, second choice, c) it would be of considerable interest to check whether or not this questionnaire could serve as a reliable, convenient and independent instrument for level 2 assessment, and d) for general methodological reasons (for example triangulation; the implementation of more than two methods of observation).

Following these, we interviewed a number of students of the subgroups A1 (14), A2 (101) and B1 (42). The short interview protocol was based on three questions; first question: “How did you obtain the answer to this question?” (for correct answers only); in case the student answered “By the eye”, we proceeded to the second question: “Could you imagine a different, more secure, way to solve it?”; in case of a negative answer we asked the third question: “What about using some property of the shapes you see, for instance, this is a circle, etc.”.

In order to compare the students’ performance in a more typical Van Hiele assessment instrument, we composed two variations of Usiskin’s test (1982), each including ten tasks aiming at Levels 1 and 2. These tests were administered to a number of students from groups A2 (70 students) and B1 (50 students).

Finally, for two subgroups (A1 and B1) an indicator of the students’ mathematics and geometry formal education competence in school was taken into consideration. For group A1 we had at our disposal each student’s marks in mathematics lesson for his/her three years in lower secondary school, of which we calculated the average. The curriculum in lower secondary school includes the above topics of congruence, area and similarity, taught in a transitory way between Geometry I and II. Only a few elements of Geometry II are presented: the basic theorems are only experimentally verified, with the exception of 2-3 quite simple proofs, and the problem solving style is mainly that of Geometry I Prop. For group B1, we considered the average marks in the Geometry lesson for the two years it is taught in upper secondary level (Lyceum).

3. Results

The alternate versions C3, C4 (see Fig. 1), S3, S4 (see Fig.2) and Ar3, Ar4 (see Fig. 3) were administered only to a number of students of subgroups A2 and B1. Differences in performance for these groups across tasks C1, C3 and C4 were insignificant ($X^2=1.273$, d.f. =2, n.s. and $X^2=1.226$, d.f. =2, n.s., correspondingly), so we pooled these data, under a general label C1. This was possible also for

similarity and area tasks except for the tasks S1 and S3 for subgroup B1 ($X^2=11.97232$, d.f. =1, $p<0.005$).

As can be seen from Fig. 1 task C2 demanded more complex reasoning, so we present the corresponding results separately. Group B2 outperformed significantly the other three in task C1 ($X^2=41.62$, d.f. =3, $p<0.0001$), S2 ($X^2=61.97$, d.f. =3, $p<0.0001$), Ar1 ($X^2=43.23$, d.f. =3, $p<0.0001$) and Ar2 ($X^2=71$, d.f. =3, $p<0.0001$), all other differences between groups A1, A2 and B1 being insignificant, except in task S2 ($X^2=20.54$, d.f. =2, $p<0.005$). The correct response rate (%) for each group and task is presented in Table 1.

Moreover, we calculated each student's total score by counting one point for each correct answer the student produced. ANOVA single factor analysis conducted with these score data showed significant difference between groups ($F(4,474)=33.77$, $p<0.001$). Post hoc comparison test between groups limited this difference to B2 relative to the other three and to B1 relative to A1 and A2 (in the A2-B1 comparison using Bonferoni and Scheffé test a significant difference was found ($t(474)=-2.68$, $p<0.0083$ and $F(1,474)=7.228$, $p<0.01$, correspondingly), but applying Tukey HSD test this difference rendered insignificant ($q=3.237$)).

Group \ Task	A1	A2	B1		B2
C1 (C3,C4)	47.5	58.46	65.53		90.42
C2	68.75	71.79	54.25		59.57
S1 (S3)	50	37.01	55.31	16.07	51.06
S2 (S4)	1.25	2.59	14		32.97
Ar1 (Ar3)	43.75	44.80	57.33		81.91
Ar2 (Ar4)	21.25	19.48	30		68.08

Table 1: Correct rate (%) of the subgroups in the six tasks.

We present now three examples of the interview procedure (the questions concern right answers only, as already mentioned above).

This student was classified as one having of course an initial response pertaining to a visual strategy, but after probing during the interview, as being able to state

geometrical inferences of Geometry II. Despite his initial choice to perform in a Geometry I mode, he is nevertheless able to act in a more analytic level.

Student G.L. (group B1, task C1):

“Interviewer: So how did you work it out?

G. L.: By the eye!

Interviewer: Could you imagine a more secure way to solve it? By the eye you are not so certain, are you?

G. L.: Eh ... eeh...No ...I think I cannot find something.

Interviewer: Look, how about using some geometrical properties that you know? Here, for example, it says something about circle radii... What do you know about them?

G. L.: They are all equal...So, ...eeh...all these line segments are equal.... hence the rectangles are congruent?

Interviewer: Does it suffice? ...To have two sides equal, I mean?

G. L.: I think so ... Yes.

Interviewer: O.K. You're right!”

This student was classified as one having the same response before and after the interview. It is clear that she cannot act in a Geometry II mode, and we can assign her to the Geometry I Perceptual.

Student M.L. (group B1, task Ar2):

“Interviewer: And this one how did you work it out?

M. L.: I put the small one [T] inside the big ones [she has on the test paper a T square inside each one of the bigger squares, see Fig. 4, Annexe] and estimated by the eye the remaining area to be equal to that of T...

Interviewer: And in the case of B you found that the remaining area is the same as that of T? Well, this seems quite difficult to me! ... Isn't there some other more certain and easy way to find it?

M. L.: What else... Nothing comes into my mind.

Interviewer: Maybe something that has to do with the area of certain geometrical shapes?

M. L.: Oh, sir, geometry has never been my strong point!”

The following is an example of a clear case classified as one implementing geometrical reasoning in the initial response.

Student S. K. (group B1, task S1):

“Interviewer: And how did you find the answer to this one?

S. K.: I found the ratio of the two sides and compared these ratios ... similar rectangles have the same sides ratio”.

Furthermore, some students had written the corresponding computations on their paper, making apparent the formal geometrical mode of their strategy. See Fig. 5 for some examples of these responses.

One not uncommon misconception has been revealed from the students' responses: taking as line segment's length the number of the dots indicating the units in the segment (Fig. 6). This erroneous mode of measuring combined often with correct geometrical reasoning.

	A1	A2				B1						
Geometrical reasoning in	0	0	1	2	3	0	1	2	3	4	5	6
task	task	task	task	tasks	tasks	task	task	tasks	tasks	tasks	tasks	tasks
Initial response	100	84.15	12.87	2.97	0	54	24	4	2	2	8	6
During the interview	100	60.39	25.74	10.89	2.97	40	30	12	0	2	6	10

Table 2: Interviews' results (percentages).

The results of the interviews are shown in Table 2. In the first row the number of tasks, in which a student used some form of geometrical reasoning, is indicated. We included in the correct geometrical reasoning even techniques of Geometry I Experimental, such as "measurement by straightedge, compass, pencil, etc.". In the second row the corresponding percentages of the students are presented. For example, 24% of group B1 had an initial response involving some form of geometrical reasoning in only one task or 2.97% of A2 in two tasks or none of A1 in whatever task. After the interviewer's intervention some of the students found eventually another solution and the percentages of the second row have increased. For example, the percentage of group B1 using geometrical reasoning in one task became 30%, while the initial 2.97% of A2 that gave geometric solutions in two tasks became 10.89% during the interview.

According to our version of the typical Van Hiele test and using the "strict criterion" (4 correct answers in 5 questions, see next paragraph), the 42.85% of the sample of group A2 and 61.64% of the sample of group B1 had acquired already Level 2.

The Pearson product moment correlation coefficient between performance in formal mathematical education (specifically geometrical for group B1) and the six tasks of our test found $r=0.381$ for group A2 and $r=0.284$ for group B1.

4. Discussion

Attainment of Level 2, in Van Hiele's terminology, seems to be critical for the subsequent progress of a student in more abstract geometrical education (Senk, 1989). Consequently, it is crucial to reliably and validly identify the students' geometrical thinking level at the beginning of upper secondary and university education. In section 1.2 we argued for a broadening both in type and content of the test items employed to identify the students' transition from Geometry I to Geometry II (or, talking from the individual learner's perspective, for Level 2 against the "visual" Level 1).

It is evident that the choice of the criteria and the corresponding tests may have substantial effect upon the assignment of a particular level to a student. In the traditional Van Hiele research paradigm two standard criteria have been put forward: a) the "strict criterion" which means that a particular level is assigned to a student if she/he answers correctly to 4 out of 5 questions pertaining to this level, and b) the "lax criterion", where we have 3 correct answers out of 5 questions.

The choice of the success rate that should be considered as the appropriate qualifier for a student is clearly a matter of discussion. Indicatively, in the current study, we could accept as a "lax criterion" of Level 2 attainment, considering the difficulty of these tasks compared to the traditional instruments as well, 3 correct answers out of 6 (50% success rate). Taking additionally into account the fact that performance in congruence tasks (C1-C4) can be based quite efficiently on visual strategies (as is well established in cognitive science experimental research and actually confirmed by the present results; see Levine (2000) and Newcombe et al. (2000) for an overview), we can set as criterion the following:

Criterion C: "At least 3 correct answers but, in case of 3 correct answers, not 2 of them pertaining both to congruence tasks".

Applying this criterion, only 22% of A2 could be classified in level 2, compared to 44% of the traditional test (with application of the "lax criterion"), and only 38% of B1, compared to 62% of the traditional test. These percentages are closer to those revealed by the interviews, where 15% and 40% of groups A2 and B1, respectively, managed to find some form of geometrical reasoning in more than 2 problems. Almost 100% of A1 sample, 60% of A2 and 40% of B1, insisting on visual strategies in all tasks even after probing during the interview, we might say that are still acting in a Geometry I Perceptual mode. In Chart 1 the percentages for all groups concerning our written test are shown.

As clearly mentioned above, setting another criterion would of course result in quite different percentages. Criterion C has been applied post hoc. Between the 14 individuals of A1 group that consented to answer our questions (the rest were not so cooperative), only 2 belonged to the category that passed criterion C and they said (Table 2) that they relied on perceptual estimates. Consequently we cannot know for sure whether between the remaining 10 (passing C) there were some that used different methods (measurements are not improbable).

Furthermore, this particular group had some peculiarities. Officially they ought to be at the same level as A2 (having completed the mandatory 12 years education), but they were not absolutely homogeneous educationally: a few of them had attended one or two years at upper secondary school and then dropped out to seek some vocational instruction.

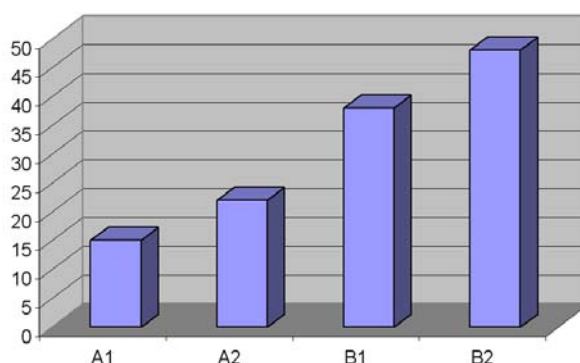


Chart 1: Percentage of students that have attained level 2 according to criterion C (written responses).

Taking into account the idea that different criteria could be applied to different groups we could set a more strict criterion for some students group. For example, a stricter criterion could be:

Criterion C:* “At least 4 correct, but only one of C1 or C2”.

According to this criterion only two members of A1 pass to Geometry II. In any case, considering the interview results, it is not unreasonable to expect that, if we combine these test tasks with some traditional Geometry II items, this percentage will practically be reduced to this low level.

The choice of the component capacities that constitute the so-called Van Hiele Level 2 or the corresponding ability to act sufficiently in Geometry II mode is a matter of interpretation and enrichment of the original theoretical frameworks. Failure to meet “criterion C” may not disqualify completely a student for the Geometry II requirements; we can talk about a “lower degree of Geometry I Prop

acquisition” with “strong attachments to Geometry I Perceptual or Geometry I Experimental modes of thinking” and strong tendencies to “regress” any time to them depending on the conditions. Nevertheless the results strongly suggest that for these students the required substructure underlying the more abstract situations of Geometry II, characterised by logical relations and ordering of properties, is not adequately solid. The kind of understanding of higher mathematics they can attain is really a matter of question. This may prove a quite crucial point as far as it concerns syllabus design and the corresponding instructional methods employed.

The results imply that the typical tests putting exclusive stress on recollection of properties of figures or formal definitions (especially Usiskin’s test questions pertaining to Level 2, where the questions have not easy quantifiers and the figures do not play any role except in one) rather fail to capture the specific difficulties of the transition from the visual level to a more analytic one. For example, Senk (1989), using Usiskin’s questionnaire, found that in her sample consisting of 9th to 11th graders, almost 70% had already mastered level 2. Gutiérrez & Jaime (1998) (using only recognition and classification tasks including recollection of text book properties definitions and simple proofs) reported that the percentage of the 10th graders having attained level 2 and up is greater than 70%.

It is interesting to stress here, in addition to the style of the problem set, the matter of tasks’ content: similarity and area were not at all taken into account by the above researchers, while the error rates at our S2 and Ar2 tasks were 85%. See also Chart 2 for a comparison between our test and the variation of the typical Usiskin test.

These comparisons suggest that the percentage of High School final graders acting in a Geometry II mode is lower than until now thought. This is in accordance with Houdement and Kuzniak (2003). Therefore traditional test instruments might be complemented with items like the ones presented here.

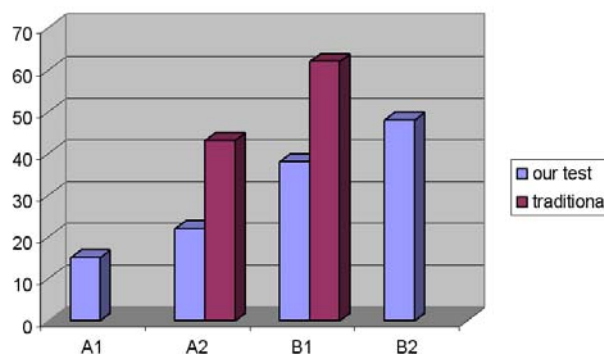


Chart 2: Comparison between traditional Van Hiele test and ours. Traditional tests lead us to take for granted that the majority of High School students have already mastered level 2.

The overall performance of group B2, as was reasonably expected, is higher than that of the others. But the fact that a not negligible percentage of Mathematics students have not yet attained some form of the *geometrical* concept of similarity (see also Kospentaris & Spyrou, 2005) or the relation between square's side and its area, should not pass unnoticed. When the geometrical reasoning demands of the task were harder all groups tended to take recourse to visual estimation. The extensive use of visual-perceptual strategies can be seen clearly by the results in the more demanding task C2 or S1. In these tasks this led to loss of whatever geometrical advantage group B2 might have relative to the other groups, reducing the effect of educational experience.

Visual perception can be quite accurate in estimation of length or distance, as already mentioned above, that fact been established experimentally in cognitive science. The same can be said about the geometrically similar shapes, as this visual mechanism supports the scale invariance of moving objects in the visual field (for a more detailed analysis of the relation of results in S1 task and perception, see Kospentaris & Spyrou, 2005).

Relying solely on visual strategies subgroup A1 outperformed group B in C2 and scored quite above chance level in C1 and S1! (This difference in C2, statistically insignificant as it is, cannot be reasonably attributed to other than chance factor. In the hypothesised case that some B group students tried to find a Geometry II solution and failed because of missing data, time limitations or the difficulty of the required geometrical reasoning, nothing prevented them from giving the last moment a quick visual estimation. We do not have any reason to presume that geometric sophistication diminishes visual abilities (on the contrary). A factor that could explain this difference, if it was not accidental, would be some systematic error in geometrical reasoning of which the solver was not aware, such as that has been observed in S2 (S4) (see below), but no such evidence has been found).

Estimating area, however, is rather difficult, whereas even the “visualizers” in some instances tried to aid themselves by some kind of pictorial computation (for example, the case of student M.L. above was not unique).

It is noteworthy at this point to mention that the above given examples of geometrical misconceptions about a side's length (Fig. 6, Annexe) were not the only ones observed. Another common misconception was that of misidentifying “similar shapes” as those “having the same area” or the linear (proportional) relation between shape's side and area. These and other, like, for instance, a more idiosyncratic use of corrupt geometrical “knowledge” or effort to apply some absolutely irrelevant geometrical tool (Fig.7, Annexe), had of course a negative contribution. In other words, in order for geometrical reasoning to be productive it has to be correct; otherwise it is worse than naïve visual thinking. These specific

misconceptions are more likely to be revealed in such tasks. Consequently, we argue that they should be taken into account in educational design.

Returning to the difficulties observed in B2, it would be relevant to refer to Van Hiele's (1986) view that a person after having attained Level 2 even in *visual thinking* the formed structures of this level are always at his/her disposal, but with one exception: if he/she thinks in another context. But this effect of visual set seems not to be evenly distributed among tasks and may be related to the content of the task (so it can be attributed, for example, to specifically inadequate or ineffective instruction in similarity and area). This raises the following question: Have these students really attained some adequate capacity to perform in Geometry II mode, but have trouble applying simple structures of it in a visually differentiated context? Or are they still acting as in the initial stages of Geometry I (Perceptual and Experimental), at least for these particular topics? Previous research (Mayberry, 1983; Gutiérrez & Jaime, 1987) in fact revealed that preservice elementary school teachers usually act in Van Hiele Level 1 or 2, but B2 is a student's group derived from a mathematically sophisticated population.

Another result worth noticing is the marginal difference between B1 and A2, despite the great amount of geometrical instruction the former have received (3 or 2 hours per week for 2 years in Euclidean Geometry and 5 in Analytic Geometry during 11th grade for almost 80% of them) and the observed low correlation to school geometry performance.

Van Hiele himself appears to have retained his initial view that "in practice thanks to education nearly *all* pupils attain the two levels [first and second] sooner or later" (1986, p.44). Interestingly, Piaget & Inhelder (1960) claim that reaching Stage IV children understand the appropriate relation between a square's side and its area and can give an adequately approximate answer to this task (Ar2). Piaget (*ibid*), studying the formulation of the concept of geometrical similarity and its relationship to the concept of proportion, accepts that Stage IV is marked by the attainment of true proportionality. Hence, according to Piaget, at this particular age range (15-25), and since Stage IV is attained by almost *all* children around the age of 13, we could expect for S2 and Ar2 tasks the overwhelming majority of students to find a solution more oriented to Geometry I or II. For Piaget the passage to higher levels of spatial cognition is somehow inscribed into the order of things and constitutes an ineluctable part of the developmental process (we could probably characterize his view as a more nativistic one). On the other hand, according to other schools of developmental theorists (like, for instance, Van Hiele) the cultural environmental context (in our case, schooling) acquires a far greater importance.

The results of this study strongly support Van Hiele's thesis about the irreplaceably crucial role of school instruction upon the formation of the fundamental geometrical concepts (see A1 results). Transition from Level 1 to Level 2 is an

arduous process demanding great instructional effort, without which students remain forever at level 1 (group A1). But as far as concerns progress to level 3, that presupposes a complete mastering of level 2, or the percentage of the students' population that substantially reach this stage, things do not allow us to take anything for granted. Maybe we could attempt to put forward some tentative explanation for this obvious discrepancy between former and recent studies: it is not unlikely that pupils grown in the particular educational and cultural milieu of pre-war and first after-war decades in European countries had developed a cognitive style more familiar to formal, abstract geometry. But nowadays children are more tuned to the visual, holistic style of TV watching and computer gaming, and this influence has considerably reduced the analytic parameter of their thought (see also Healy, 1999).

Considering that the main goal of secondary geometrical education is to at least provide the students with an adequate knowledge of Geometry II structures, a necessary prerequisite in order to enter into the Geometry III paradigm, do we have before us an evident educational inefficiency? These tasks and students' responses show, in the best of cases, that geometrical concepts and procedures of Geometry II are not "getting out" of the typical textbook context to "function" in real world situations (Geometry I). It is likely that these structures are quite precarious and easy to disintegrate with the context change.

A plausible description of the processes taking place is this: the majority of the students finishing elementary and lower secondary education remain at Level 1 or, in the best case, at a low degree of Level 2 acquisition. At the beginning of the upper secondary school the syllabus and the instructional methods put them suddenly in the Geometry II "world". Most students find some way to cope with the situation, mainly by replicating the algorithmic procedures presented by the teacher without real understanding, but the connection with the concrete spatial situations of Geometry I is lost. The structures of the lower levels remain unaffected. The observed above low correlation with the school marks in formal Geometry and a previous finding of geometry levels research that some students appear to act at two levels simultaneously, tend to support this view. Students appear to replicate some of the superficial aspects of Geometry II paradigm, whereas their geometrical thinking remains deeply into Geometry I.

Working in Geometry II from an early stage is probably the source of these problems, as Van Hiele warns (1986, p. 66):

It is very usual, though always condemnable, to speak to pupils about concepts belonging to a level that have not at all attained. This is the most important cause of bad results in the education of mathematics. The result of such instruction is that the pupils are obliged to imitate the action structure of the teacher. By doing so they usually succeed in mastering operations belonging to the level. But because the

action structure does not result from a real understanding (i.e. not by analysis of lower structures), it must result from a global structure of acting. The success is seemingly complete: In the long run the pupil is able to calculate as fast as the teacher.

The teacher does not use low (visual) structures when he computes, neither do his pupils. But whereas the teacher (as we suppose and hope) has obtained the knowledge of computing by a transformation of the structures of a lower level, with the pupils such a relation is absolutely absent. With the teacher, computing will generally be connected with concrete material. He will, in a new concrete situation, usually be able to apply his knowledge. In such cases, however, the pupils be powerless.

Besides the need to extend the period dedicated to Geometry I, another crucial point is the instructional method: situations, activities and adequate time that give the opportunity to the student to discover the relations and structures of this domain by himself, seem indispensable. Van Hiele stresses this point also (*ibid.* p. 63):

If pupils do not find the network of relations of a given level by themselves, when starting from a concrete situation, will have difficulties returning to the corresponding signification in the developed network of relations, unless the concrete situation happens to be that of the teacher's original situation.

Insistence to present ready made the deductive structure and logical relations of Geometry II immediately at the beginning of upper secondary school without reliably assessing students' level, as things continue to happen until today in Greece, implies that we take for granted that they mastered level 2. The above results posit serious questions about this assumption.

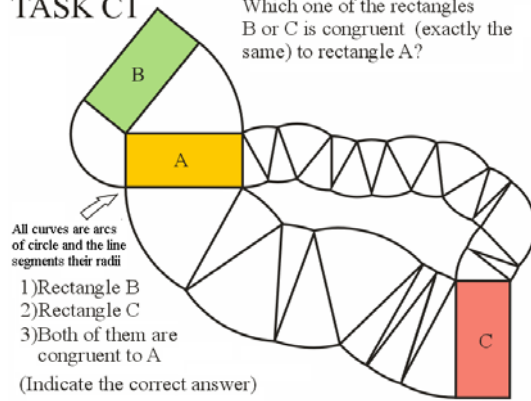
Annexe

TASK C: Congruence

(Pictures are scaled-down to approximately one half of the original).

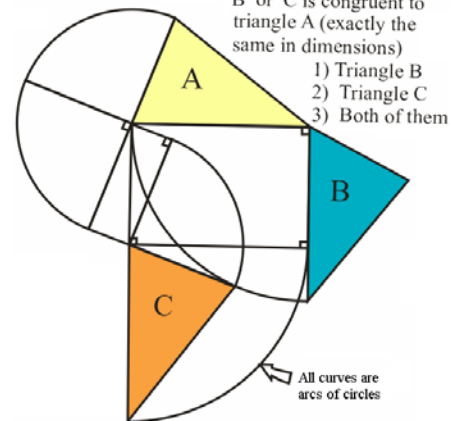
TASK C1

Which one of the rectangles B or C is congruent (exactly the same) to rectangle A?



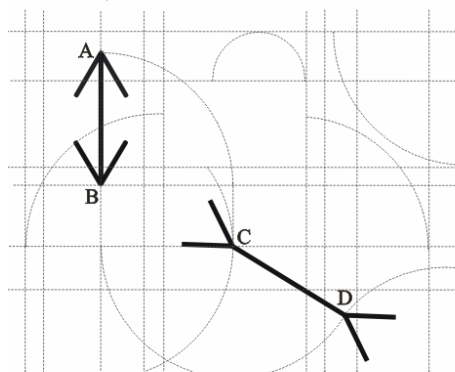
TASK C2

Which one of the triangles B or C is congruent to triangle A (exactly the same in dimensions)?



TASK C3

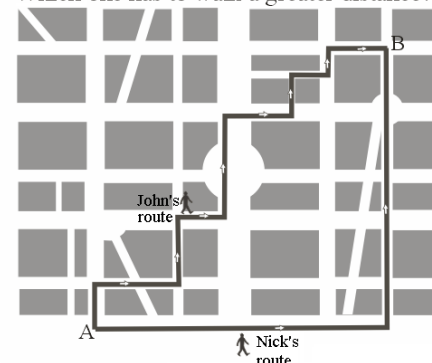
Which one of the line segments AB or CD has greater length? (Horizontal and vertical lines are parallel and the curves are arcs of circles)



- 1) AB is greater in length
 - 2) CD is greater in length
 - 3) None of them
- (Check the correct)

TASK C4

In this picture we can see the section of a town map. Two friends, John and Nick, walk the distance from A to B, following the pictured different routes. Which one has to walk a greater distance?



- 1) Nick's course is shorter
- 2) John's course is shorter
- 3) It's the same for both of them

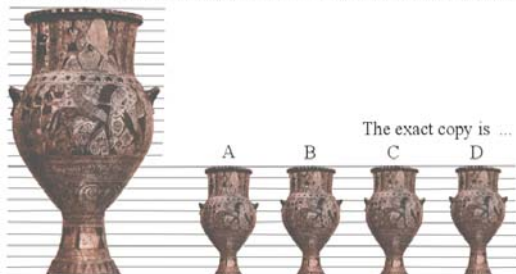
(Indicate the correct answer)

TASK S: Similarity

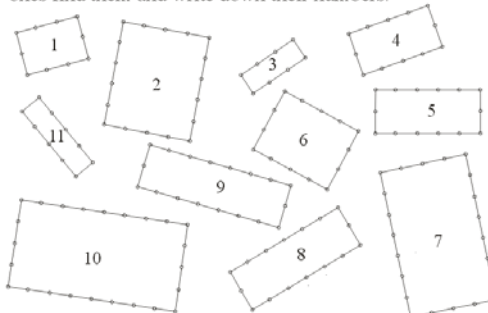
(Pictures are scaled-down to approximately one half of the original).

TASK S1

We have made 4 copies of the great urn pictured below. If it is known that 3 of them have dimensional deformities, which is the correct one?

**TASK S2**

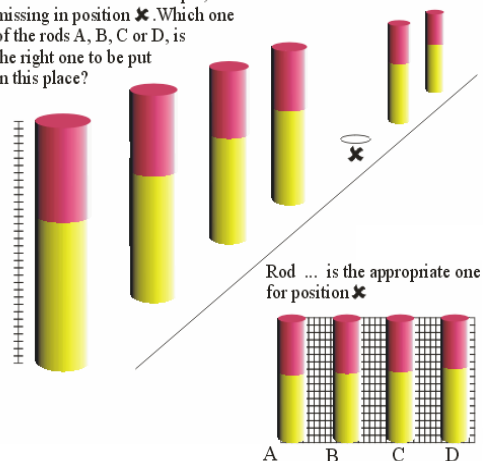
Among the pictured rectangles below exist two similar ones find them and write down their numbers.



Similar rectangles are ... and

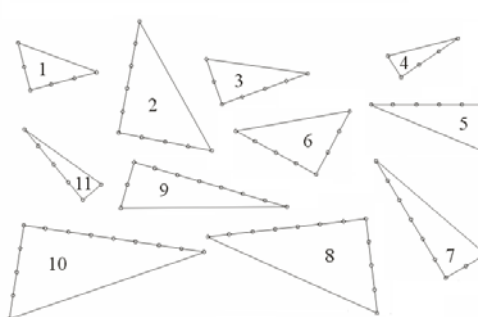
TASK S3

In the sequence of the same rods below, that are viewed to recede in depth, one is missing in position ✕. Which one of the rods A, B, C or D, is the right one to be put in this place?

**TASK S4**

Among the right-angled triangles below there exist two similar ones.

Find them and write down their numbers.



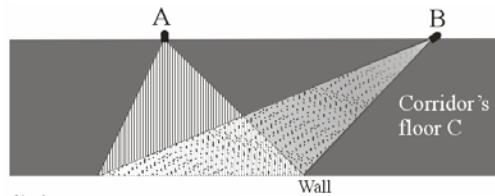
Similar triangles are ... and ...

TASK Ar: Area

(Pictures are scaled-down to approximately one half of the original).

TASK Ar1

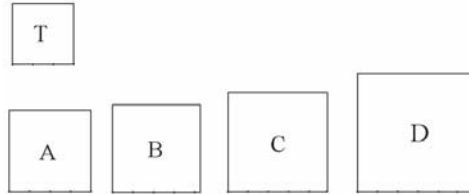
Two spots A and B light the wall of a corridor C.
Whose light beam covers greater area on the corridor's floor? (Indicate the correct answer)



- 1) A covers greater area
- 2) B covers greater area
- 3) They cover the same area

TASK Ar2

Which one of the squares A, B, C, or D has double area of that of square T?



The square with area double of that of T is ...

TASK Ar3

On a poster we want to write the word “ΔOKIMH”*.
Select slope A or B in order to spent less ink.



Smaller quantity of ink is needed

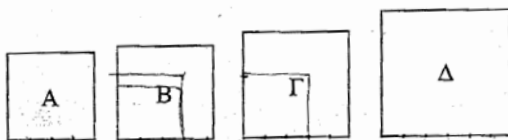
* Is the Greek word for “TEST”

- 1) In case A
- 2) In case B
- 3) The same in both cases

TASK Ar4

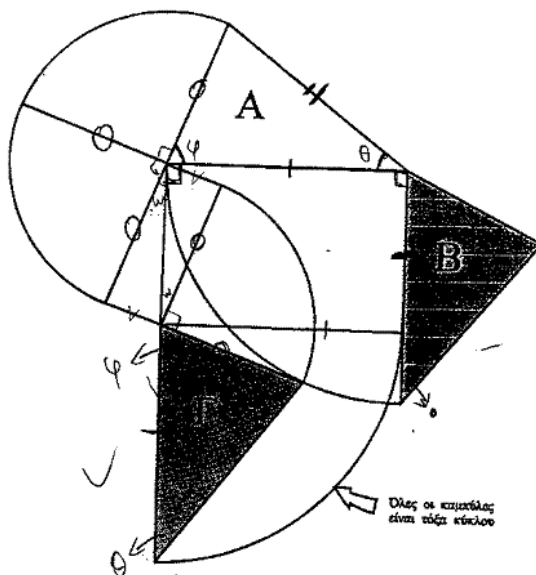
Exactly the same as Ar2, the sole difference being the length of the square's side (5 units)

Ποιο από τα παρακάτω τετράγωνα A, B, Γ ή Δ καλύπτει έκταση διπλάσια από αυτή του τετραγώνου T;



Εμβαδό διπλάσιο του T έχει το τετράγωνο ...B

Fig. 4: Student's M.L. (group B1) response, a case of visual estimation (with correct results!).



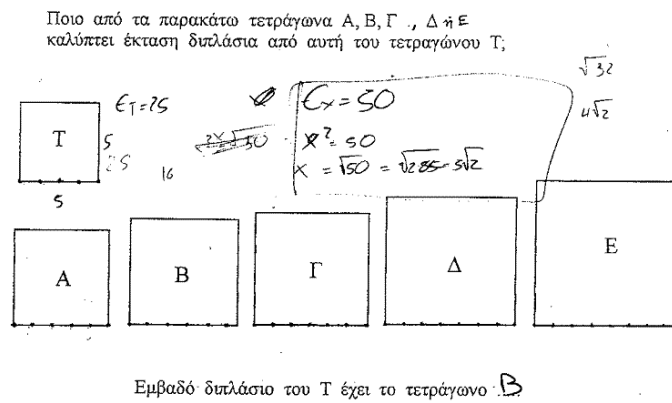
Geometrical reasoning:

group B1

Το τρίγωνο A με ποιό από τα δύο άλλα τρίγωνα B ή Γ είναι ίσο (ακριβώς ίδιο σε διαστάσεις);

- 1) με το B
- 2) με το Γ
- 3) και με τα δύο

Figure 5a



Geometrical reasoning: group B1

Figure 5b

Figure 5: Students' responses with explicit geometrical computations.

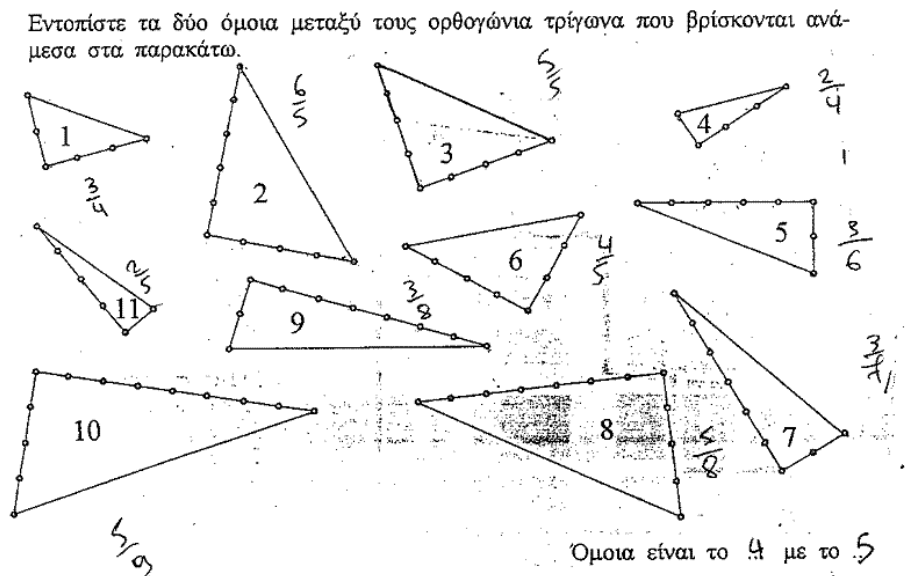
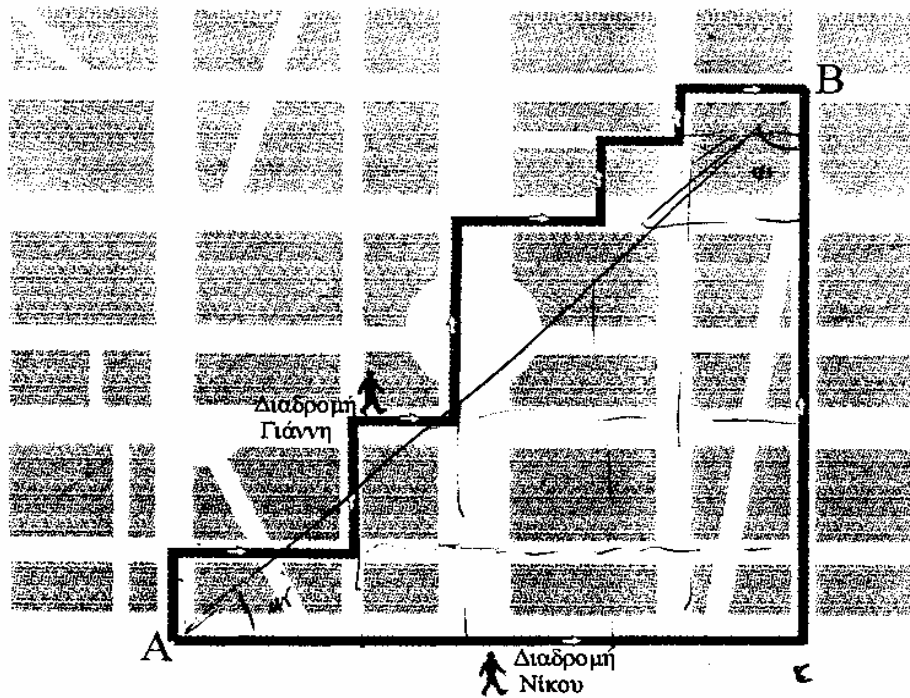


Figure 6: A case of correct geometrical reasoning with erroneous measurement.



$8a^2$

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$2 \frac{a^2}{x^2} = 1 \quad \text{or} \quad \frac{a^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

1) Πιο σύντομο δρόμο κάνει ο Νίκος

2) Πιο σύντομο δρόμο κάνει ο Γιάννης

3) Χάνουν και οι δύο το ίδιο

(Βάλτε σε κύκλο τη σωστή απάντηση)

$$x^2 = \frac{2}{3} a^2$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{3} a$$

0

Figure 7: Indiscriminate application of unrelated geometrical reasoning (group B1).

References

- BURGER W. F. & SHAUGHNESSY J. M. (1986), Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry, *Journal for Research in Mathematics Education*, **17**, 31–48.
- FUYS D., GEDDES D. & TISCHLER R. (1988), The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents, *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, **3**, 1–198.
- GUTIÉRREZ A. & JAIME A. (1987), Study of the characteristics of the Van Hiele Levels, in *Proceedings of the 11th International Conference of PME* (Eds J. Bergeron, R. Hershkowitz & C. Kieran), **3**, 131–137, Montreal, Canada.
- GUTIÉRREZ A. & JAIME A. (1998), On the assessment of the Van Hiele Levels of Reasoning, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, **20**, No. **2** & **3**, Spring and Summer Edition.
- HEALY J. M. (1999), *Endangered Minds*, Touchstone Books, Simon & Schuster, New York.
- HERSHKOWITZ R. (1990), Psychological aspects of learning geometry, in *Mathematics and Cognition* (Eds. P. Nesher & J. Kickpatrick), Cambridge University Press, 70–95.
- HOFFER A. (1983), Van Hiele-based research, in *Acquisition of mathematics concepts and processes* (Eds. R. Lesh & M. Landau), 205–227, Academic Press, New York, USA.
- HOFFER A. (1986), Geometry and visual thinking, in *Teaching Mathematics in grades K-8: Research based methods* (Ed. T. R. Post), 233–261, Allyn & Bacon, Newton, MA.
- HOUEMENT C. & KUZNIAK A. (2003), Elementary Geometry Split into Different Geometrical Paradigms, *Proceedings of CERME 3*, Belaria, Italy, http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG7/TG7_Houement_cerme3.pdf.
- JAIME A. & GUTIÉRREZ A. (1994), A Model of Test Design to Assess the Van Hiele Levels, *Proceedings of the 18th PME Conference*, **3**, 41–48, PME, Lisboa, Portugal.
- KOSPENTARIS G. & SPYROU P. (2005), The construction of the concept of similarity and proportions and the educational experience, *Proceedings of 4th Mediterranean Conference in Mathematics Education*, **1**, 239–245, Palermo, Italy.

KUZNIAK A. & RAUSCHER J. (2006), On the Geometrical Thinking of Pre-Service School Teachers, *Proceedings of CERME 4*, 738–747.
<http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/7/kuzrau.pdf>.

LEVINE M. W. (2000), *Fundamentals of Sensation and Perception*, Oxford University Press.

MAYBERRY J. (1983), The Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduates Preservice Teachers, *Journal for Research in Mathematics Education*, **14**, No. 1, 58–69.

NEWCOMBE N. S. & HUTTENLOCHER J. (2000), *Making Space: The Development of Spatial Representation and reasoning*, MIT press, Cambridge, Massachusetts.

PIAGET J. & INHELDER B. (1960), *Child's Conception of Space*, Routledge and Kegan Paul, London.

SENK S. (1989), Van Hiele Levels and Achievement in Writing Geometry Proofs, *Journal for Research in Mathematics Education*, **20**-3, 309–321.

USISKIN Z. (1982), *Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*, ERIC, Columbus, USA.

VAN HIELE P. M. (1986), *Structure and Insight: A theory of Mathematics Education*, Academic Press Inc., London.

GEORGE KOSPENTARIS

Adresse

25aris@math.uoa.gr

PANAYIOTIS SPYROU

Adresse

pspirou@math.uoa.gr

G. KOSPENTARIS & P. SPYROU

UNIVERSITY OF ATHENS

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

PANEPISTIMIOUPOLIS

ATHENS

GREECE 15784

INFORMATIONS AUX AUTEURS

Les Annales de didactique et de sciences cognitives sont une revue annuelle éditée par l'IREM de Strasbourg, Université Louis Pasteur. Elle a été fondée en 1988 par R. Duval et F. Pluvinage.

La revue publie des articles de recherches propres à développer et à stimuler la réflexion sur l'enseignement des mathématiques en direction de tous les types de publics : écoliers, lycéens, étudiants et adultes en formation. Les présentations de recherches concernant la formation initiale et continue des enseignants et sur l'enseignement dans des contextes socioculturels variés sont les bienvenues.

Les articles peuvent être de nature théorique en relation étroite avec une expérimentation dans le cadre d'un enseignement. Ils peuvent être aussi des comptes rendus d'une expérience d'enseignement appuyée sur un cadre théorique explicite. Les domaines théoriques de références sont issus de la didactique des mathématiques. Lorsqu'ils s'insèrent dans une problématique d'enseignement des mathématiques, les travaux peuvent aussi prendre appui sur la psychologie cognitive et sur la linguistique.

Les articles ne doivent généralement pas dépasser vingt pages mais exceptionnellement ils peuvent être plus longs et permettre ainsi à l'auteur de développer un point de vue original et émergeant dans le champ de recherche. Il est aussi possible de présenter une synthèse des recherches menées dans un domaine particulier de la didactique des mathématiques. Les articles proposés sont soumis à un arbitrage avant publication. Le cas échéant, des demandes de modifications, aménagements ou compléments des textes présentés seront adressées aux auteurs.

La langue de la revue est le français. Des articles peuvent être publiés dans d'autres langues (notamment anglais et espagnol) ; ils seront alors précédés d'une présentation analytique rédigée en français par l'auteur ou par l'équipe de rédaction.

Les articles proposés pour publication dans les *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* de l'IREM de Strasbourg peuvent être transmis sous forme de documents attachés à des messages électroniques. Il convient d'adresser ces messages à l'un des rédacteurs en chef, à l'adresse électronique indiquée ci-après.

Un modèle d'article au format des Annales se trouve sous forme de fichier *word* à l'adresse URL :

http://irem/data/publi/annales/templates/modele_annales_didactiques.doc

Après ouverture et enregistrement sous un nouveau nom, il permet d'introduire par copier-coller aux emplacements appropriés, en respectant les fontes de caractères et les tailles :

- le nom de l' (des) auteur(s) ;
- le titre complet ;
- le titre éventuellement abrégé, figurant dans l'en-tête des pages impaires ;
- le bloc “abstract – résumé - mots clés” ;
- le texte proprement dit de l'article proposé ;
- la bibliographie sous forme normalisée (s'inspirer du modèle où apparaissent les différents cas pour la présentation des références).

Pour composer un article sans utiliser le modèle, par exemple en recourant à LaTeX, voici des précisions sur le format des pages et les caractères utilisés.

Feuille A4 portrait, avec les marges suivantes :

Haut :	3 cm
Bas :	8 cm
Gauche :	4 cm
Droite :	4 cm
Reliure :	0 cm
En tête :	2 cm
Pied de page :	7 cm

Caractères :

- Auteur(s) en première page : Arial 12 points, gras, petite capitale, Centré ;
- Titre en première page : Arial 14 points, petite capitale, Centré ;
- Abstract – Résumé - Mots clés : Times New Roman 10 points ;
- En-tête : Arial 9 points ;
- Corps de texte : Times New Roman 11 points.

Pour la pagination d'un article proposé, commencer par le numéro 1.

Adresses électroniques :

- pour des commandes de volumes mailto :
`bibirem@math.u-strasbg.fr`
- pour des propositions d'articles mailto :
`alain.kuzniak@orleans-tours.iufm.fr`
`pluvin@math.u-strasbg.fr`