Retour de vacances

Michel Émery

Résumé : Solution d'un problème.

Mots-clé : Problème - Dénombrement - Cercle - Longueur d'arc - Probabilité.

En page 62 du numéro 115, L'Ouvert proposait le problème ci-dessous, que je remercie Freddy Delbaen de m'avoir fait connaître. Merci aussi à Nicole Bopp, pour son temps, ses nombreux commentaires et ses talents d'illustratrice.

Énoncé

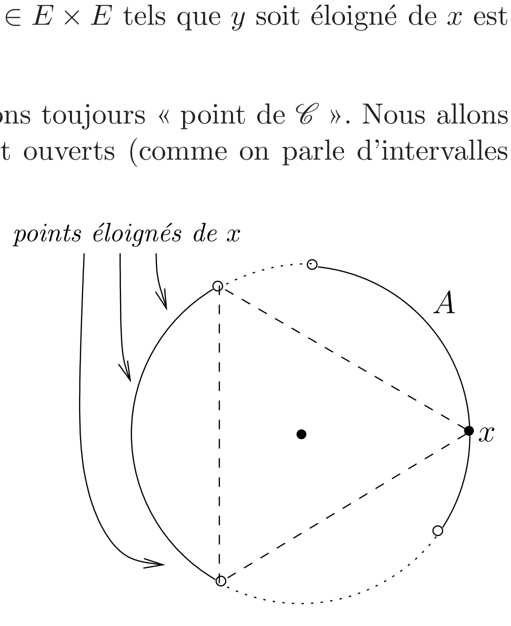
Un cercle $\mathscr{C}$ est fixé une fois pour toutes. Deux points de $\mathscr{C}$ seront dits *proches* s'ils sont joints par un arc de $\mathscr{C}$ mesurant au plus $2\pi/3$ radians. (Deux sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans $\mathscr{C}$ sont proches ; deux points de $\mathscr{C}$ plus éloignés ne le sont pas.)

Étant donné un ensemble E de n points de $\mathscr{C}$, montrer que, parmi les n^2 couples ordonnés formant l'ensemble $E \times E$, au moins la moitié sont des couples de points proches.

Une solution

Disons qu'un point du cercle est *éloigné* d'un autre si ces deux points ne sont pas proches. Il s'agit d'établir que le nombre de couples $(x, y) \in E \times E$ tels que y soit éloigné de x est inférieur ou égal à $\frac{1}{2}\, n^2$.

Par « point » sans autre précision, nous entendrons toujours « point de $\mathscr{C}$ ». Nous allons nous intéresser aux arcs de $\mathscr{C}$ de mesure $2\pi/3$ et ouverts (comme on parle d'intervalles ouverts : les extrémités n'en font pas partie) ; appelons-les *ticos*, pour TIers de Cercle Ouverts. Ils possèdent les deux propriétés suivantes :



(P1) Les points éloignés d'un point x donné sont tous dans un même *tico* (le *tico* centré au point diamétralement opposé à x).

(P2) Si un point x appartient à un *tico* A, tout point éloigné de x est dans le complémentaire $\mathscr{C} \setminus A$ de ce *tico*.

Chaque *tico* contient un certain nombre, entre 0 et n, de points de E. Appelons m le nombre maximum de points de E contenus dans un même *tico*, et fixons une fois pour toutes un *tico* A maximal, c'est-à-dire contenant m points de E. Son complémentaire $\mathscr{C} \setminus A$ contient évidemment $n - m$ points de E.

Pour compter les couples (x, y) de $E \times E$ tels que y soit éloigné de x, ou plutôt pour majorer leur nombre, nous allons les répartir en deux classes.

- Premièrement, ceux tels que x soit dans A. En raison de (P2), y doit alors être dans $\mathscr{C} \setminus A$. Le nombre de tels couples (x, y) est donc majoré par le produit

$$m\,(n-m)$$

du nombre de points de E dans A par le nombre de points de E dans $\mathscr{C} \setminus A$.

- Deuxièmement, les autres, c'est-à-dire les (x, y) de $E \times E$ tels que x soit dans $\mathscr{C} \setminus A$ et que y soit éloigné de x. Le nombre de choix possibles pour x est $n - m$; et, pour chaque x, le nombre de y possibles est au maximum m, puisque par (P1) tous ces y sont dans un même *tico*, qui ne peut contenir plus de m points de E (maximalité de m). L'effectif de ces (x, y) est donc majoré par

$$(n-m)\,m\ .$$

En tout, le nombre de couples éloignés est majoré par $2m\,(n-m)$; il ne reste pour conclure qu'à invoquer l'inégalité élémentaire $2m\,(n-m) \leqslant n^2/2$.

Malgré sa simplicité, cette démonstration est difficile à trouver parce qu'elle brise une symétrie du problème : y est éloigné de x si et seulement si x l'est de y. L'instinct mathématique pousserait au contraire à tirer partie de cette symétrie, alors que dans cette solution, certains (x, y) sont dans la même catégorie que le (y, x) correspondant, d'autres pas.

Généralisations

En examinant la démonstration qui précède, on voit sans peine qu'elle se laisse mettre sous une forme plus abstraite :

Pour x appartenant à E, notons $L(x)$ l'ensemble des points de E qui sont éloignés de x, et $\operatorname{Card} L(x)$ le nombre de ces points. Les propriétés (P1) et (P2) entraînent que, si y est éloigné de x, $L(x) \cap L(y)$ est vide ; on en tire $\operatorname{Card} L(x) + \operatorname{Card} L(y) \leqslant n$:

$$(*) \qquad \forall\, x \in E \quad \forall\, y \in E \qquad y \in L(x) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Card} L(y) \leqslant n - \operatorname{Card} L(x)\ .$$

Cette propriété $(*)$ suffit pour résoudre le problème : oubliant le cercle, on peut comme ci-dessus montrer qu'en toute généralité, *étant donnés un ensemble E ayant n éléments et une application L de E vers $\mathscr{P}(E)$ vérifiant $(*)$, il existe dans $E \times E$ au plus $\frac{1}{2}n^2$ couples (x, y) tels que $y \in L(x)$.*

Nous laissons aux lecteurs cette généralisation. Elle permet par exemple de vérifier que le même résultat subsiste, sans changement et pour la même raison, si l'on remplace le cercle $\mathscr{C}$ par une sphère, puisque, tout comme sur le cercle, on a la propriété

$$y \in L(x) \quad \Longrightarrow \quad L(y) \subset E \setminus L(x)\ ,$$

qui est plus forte que $(*)$. Dans ces deux cas, cercle et sphère, la relation d'éloignement $y \in L(x)$ est en outre antiréflexive et symétrique ; mais ces propriétés ne jouent ici aucun rôle, et ne font que rendre la solution moins facile à trouver.

Il est d'ailleurs possible, toujours avec la même démonstration, d'obtenir un résultat un tout petit peu plus fort que celui prouvé ci-dessus, et dans lequel la relation n'est plus symétrique : orientons le cercle et disons qu'un point y est éloigné d'un point x si la mesure de l'arc orienté d'origine x et d'extrémité y est dans l'intervalle $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right[$ (au lieu de $\left]\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right[$ comme précédemment). Comme la valeur $\frac{2\pi}{3}$ est maintenant autorisée, il est devenu un tout petit peu plus facile à deux points d'être éloignés, mais (P1) et (P2) subsistent pour ces arcs semi-ouverts, la démonstration marche encore et il reste vrai que l'effectif des couples (x, y) tels que y soit éloigné de x est au plus $n^2/2$.

Problème probabiliste

Le problème de probabilités se résout de la même façon. Rappelons-en l'énoncé : *étant données deux variables aléatoires X et Y indépendantes et de même loi, à valeurs dans le cercle, il s'agit de montrer que la probabilité pour que Y soit éloigné de X est au maximum $\frac{1}{2}$.*

À tout arc A du cercle, associons la probabilité $p(A)$ pour que le tirage de X (ou de Y, puisque sa loi est la même) tombe dans A. Parmi tous les *ticos*, cherchons-en un dont la probabilité est maximale. Un tel *tico* n'existe pas nécessairement, parce que le maximum peut ne pas être atteint, mais, pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver un *tico* A (qui dépend de ε) tel que $p(B) \leqslant p(A) + \varepsilon$ pour tout autre *tico* B. Maintenant, tirons au sort le point aléatoire X, et envisageons deux cas.

- Premièrement, X a pu tomber dans A ; ceci s'est produit avec probabilité $p(A)$. En ce cas, par (P2), tout point éloigné de la valeur obtenue X est dans $\mathscr{C} \setminus A$; donc lorsque Y sera tiré, il aura une probabilité au plus $1 - p(A)$ de se trouver éloigné de X. Ainsi,

$$\begin{aligned}&\text{Prob}\left[\, X \text{ est dans } A \text{ et } Y \text{ est éloigné de } X \,\right] \\ &\qquad\qquad \leqslant \text{Prob}\left[\, X \text{ est dans } A \text{ et } Y \text{ dans } \mathscr{C} \setminus A \,\right] = p(A)\left(1 - p(A)\right) .\end{aligned}$$

- Deuxièmement, X a pu atterrir dans le complémentaire de A ; ceci a eu lieu avec probabilité $1-p(A)$. Une fois X observé, (P1) dit que Y sera éloigné de X à condition de tomber dans un certain *tico* ; mais la probabilité de tomber dans ce *tico* (ou dans n'importe quel autre) est majorée par $p(A) + \varepsilon$, car A est presque maximal. Donc

$$\text{Prob}\left[\, X \text{ est dans } \mathscr{C} \setminus A \text{ et } Y \text{ est éloigné de } X \,\right] \leqslant \left(1 - p(A)\right)\left(p(A) + \varepsilon\right) .$$

Il ne reste qu'à additionner ces inégalités pour obtenir

$$\text{Prob}\left[\, Y \text{ est éloigné de } X \,\right] \leqslant \left(1 - p(A)\right)\left(2\,p(A) + \varepsilon\right) \leqslant 2\,p(A)\left(1 - p(A)\right) + \varepsilon .$$

L'inégalité $2t(1-t) \leqslant \frac{1}{2}$ entraîne que cette probabilité est majorée par $\frac{1}{2} + \varepsilon$, et comme ε était arbitraire, elle ne peut dépasser $\frac{1}{2}$.

Michel Émery
I.R.M.A.
7 rue René Descartes
67 084 Strasbourg Cedex
emery@math.u-strasbg.fr