La durée des saisons

Jean-Pierre Darou

Résumé : Cette activité a été réalisée par des élèves de seconde qui ont choisi l'option sciences. Un premier paragraphe présente l'option sciences. Je développe ensuite les connaissances nécessaires à ce travail : lois de Kepler, définition et construction d'une ellipse à l'aide d'un logiciel de géométrie, éléments orbitaux de la terre, définition des saisons. J'explique enfin comment les élèves ont pu calculer les durées des saisons par une méthode approchée n'utilisant que la proportionnalité, comment ils ont vérifié la remarquable précision de leurs résultats et comment ils pourraient examiner si la même méthode s'applique aux autres planètes.

Mots-clés : Option sciences - TPE - Modélisation - Proportionnalité - Lois de Kepler - Loi des aires - Ellipse - Périhélie - Aphélie - Saisons - Solstice - Equinoxe - Geogebra - Cabri.

« Bientôt nous plongerons dans de froides ténèbres ;
Adieu vive clarté de nos étés trop courts ! ».
Chanson d'automne, Charles Baudelaire

Si l'été paraît trop bref aux yeux du poète comme, sans doute, à ceux de nos élèves ou étudiants, il n'en est pas moins, dans l'hémisphère nord, la plus longue des quatre saisons. Des élèves de seconde qui suivent l'option sciences ont pu le vérifier !

1. L'option sciences

Cette option existe au lycée Jean Monnet à Strasbourg depuis 1997, elle s'ajoute aux options officiellement offertes (sciences économiques et sociales, langues vivantes) sous forme d'un projet d'établissement. L'APMEP a œuvré sans succès pour qu'elle soit reconnue et proposée sur le plan national, elle ne peut donc exister que localement avec le soutien des autorités ; elle est notamment très répandue dans l'académie de Montpellier. Les élèves y reçoivent un enseignement supplémentaire d'une heure dans chacune des trois disciplines scientifiques (sciences de la vie et de la terre, physique-chimie et mathématiques) ; les trois heures sont groupées pour permettre au besoin des activités plus longues (visites ou conférences notamment). Il n'est évidemment pas nécessaire de l'avoir choisie pour poursuivre ensuite en classe de première S. L'objectif est d'entraîner les élèves à être plus autonomes, à mener une recherche sans être beaucoup guidés, à faire appel à leur imagination et à leur créativité. Nous privilégions les activités communes à au moins deux des trois disciplines sur des thèmes proposés par les professeurs. Je m'étais entendu avec ma collègue de physique sur celui de l'étude simplifiée de la durée des saisons.

L'option sciences permet d'ailleurs de préparer les élèves aux travaux personnels encadrés (les TPE) qu'ils auront à présenter en classe de première comme épreuve anticipée du baccalauréat. La durée des saisons pourrait être la composante mathématique d'un sujet choisi dans les thèmes généraux et sous-thèmes :

- L'homme et la nature, recherche de régularités, de lois. Lois de la gravitation.
- Modèles, modélisation, le modèle outil de simplification. Rotation des planètes.
- Modèles, modélisation, le modèle outil de compréhension. Lois de la gravitation.

2. Les lois de Kepler

Les trois lois de Kepler[1] avaient été énoncées en physique, restreintes aux planètes du système solaire. Les deux premières ont été publiées en 1609, la troisième en 1618. Elles s'étendent à tous les objets gravitant autour d'un astre central à condition de pouvoir négliger les perturbations dues aux attractions de ces objets entre eux.

Portrait de Kepler (1571-1630)[2]
offert à son ami Mathias Bernegger (1582-1640)
qui fut recteur de l'université de Strasbourg.[3]

• Première loi ou loi des orbites : Les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe un des foyers[4].

• Deuxième loi ou loi des aires : Lorsque la planète décrit son orbite, la durée du parcours est proportionnelle à l'aire balayée par le segment qui la joint au Soleil[5].

• Troisième loi ou loi des périodes : Si on désigne par T la période de révolution d'une planète et par a le demi-grand axe de l'ellipse qu'elle parcourt, alors :

$$T^2/a^3 = k,$$

où k est une constante.

Les élèves avaient déjà utilisé en physique la loi des périodes, ils l'avaient appliquée à des calculs de périodes de révolution de différentes planètes dont les distances au soleil étaient données. Je me souviens à ce propos du désarroi des candidats passant leur épreuve de TPE devant une question posée par un collègue de physique : « Que vaut k si on prend comme unités l'année et l'unité astronomique ? » (En admettant que l'unité astronomique soit sensiblement égale au demi grand-axe de la Terre)

Ils n'avaient pas fait beaucoup d'usage de la loi des orbites et de celle des aires, considérant que les orbites sont à peu près circulaires. La déqualification récente de Pluton au rang de planète naine par l'Union Astronomique Internationale permet d'éviter le cas le plus dérangeant !

De l'ellipse ils connaissaient les définitions des demi-axes, de la distance focale et de l'excentricité. Ils avaient calculé l'excentricité de quelques planètes et avaient constaté qu'elle est effectivement le plus souvent très faible.

Si la terre avait une orbite circulaire les quatre saisons auraient exactement la même durée d'environ 91,3 jours et débuteraient presque toujours aux mêmes dates : 21 mars, 20 juin,

[1] Kepler est né à Weil der Stadt, ville située à 30 km à l'ouest de Stuttgart et à 140 km à l'est de Strasbourg.

[2] Cet extrait de tableau provient de l'Histoire Générale des Sciences, Presses Universitaires de France, tome II, planche 21 (voir [2]).

[3] Pour connaître Mathias Bernegger, on lira sur Internet une étude de René Voltz (voir [4]).

[4] Plus précisément, le foyer est situé au centre de masse du système Soleil-planète.

[5] Cette loi est énoncée sous la forme que les élèves utiliseront. La figure de la page de couverture de ce numéro évoque un autre énoncé équivalent : Les aires balayées pendant des durées égales sont égales.

20 septembre et 20 décembre, malgré la petite perturbation due aux années bissextiles. Ils avaient consulté des calendriers et constaté qu'en fait les débuts des saisons peuvent s'écarter de ces dates de plusieurs jours. Pour expliquer cela, ils devaient abandonner l'approximation commode mais insuffisamment précise dont ils s'étaient contentés en physique. On trouve sur le site « Astronomie et mécanique céleste » ([6]) les dates suivantes : 19 au 21 mars pour le printemps, 19 au 22 juin pour l'été, 21 au 24 septembre pour l'automne et 20 au 23 décembre pour l'hiver[6].

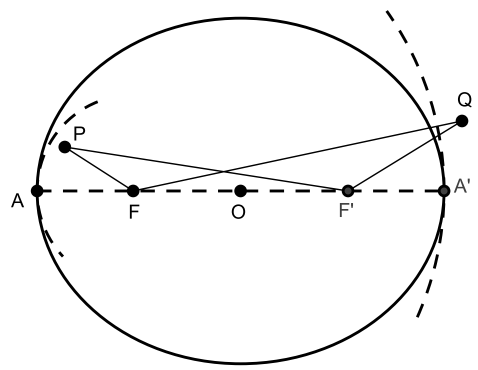
Je leur ai proposé de faire appel aux mathématiques dans l'espoir d'obtenir des résultats plus conformes à la réalité en leur donnant par la même occasion un bel exemple d'application de la loi des aires.

3. L'ellipse

La première tâche était de faire plus ample connaissance avec l'ellipse. La seule définition qui me semble accessible en seconde est celle basée sur la « méthode du jardinier ». Quelques planchettes de bois, deux punaises, une feuille de format A3, un bout de ficelle, en deux temps le tour (d'ellipse) est joué !

Les dessins suggèrent l'existence de symétries que les élèves peuvent justifier sans grande difficulté. Les trous faits par les punaises sont nommés foyers et notés F et F'. La droite (FF') coupe l'ellipse aux points A et A', nous observons et justifions que la distance AA' est égale à la longueur de la ficelle. Lorsque M est un point de l'ellipse son symétrique par rapport à (FF') est aussi sur l'ellipse, lorsque M est un point de l'ellipse son symétrique par rapport à la médiatrice de (FF') est aussi sur l'ellipse, le milieu O de $[FF']$ est donc centre de symétrie. Ces petites démonstrations sont autant d'occasions d'utiliser les notions de médiatrice, de symétrie et les cas d'isométrie des triangles.

Il est un peu moins facile de montrer que AF est la plus petite distance d'un point de l'ellipse au foyer F et que $A'F$ est la plus grande.
Soit P un point n'appartenant pas à la droite (AA'), tel que $FP \leqslant FA$.
Puisque $F'P < FP + FF'$, on a :
$FP+F'P < 2FP+F'F \leqslant 2FA+F'F = AA'$.
Le point P n'appartient donc pas à l'ellipse.
De même, soit Q un point n'appartenant pas à la droite (AA'), tel que $FQ \geqslant FA'$.
Puisque $F'Q > FQ - FF'$, on a :
$FQ+F'Q > 2FQ-FF' \geqslant 2FA'-FF' = AA'$.
Le point Q n'appartient donc pas à l'ellipse.



Les deux points d'intersection A et A' de l'ellipse avec son grand-axe (AA') sont donc respectivement le point le plus proche et le point le plus éloigné du foyer F. Deux occasions de manier les inégalités triangulaires !

Lorsque l'ellipse est la maquette de l'orbite d'une planète, le soleil occupe un des foyers ; plaçons-le en F, Les distances FA et FA' deviennent le *périhélie* et l'*aphélie* de cette planète.

[6]Ces dates sont données dans le calendrier grégorien et ne sont donc valables qu'à partir du 15 octobre 1582.

4. Quel logiciel choisir ?

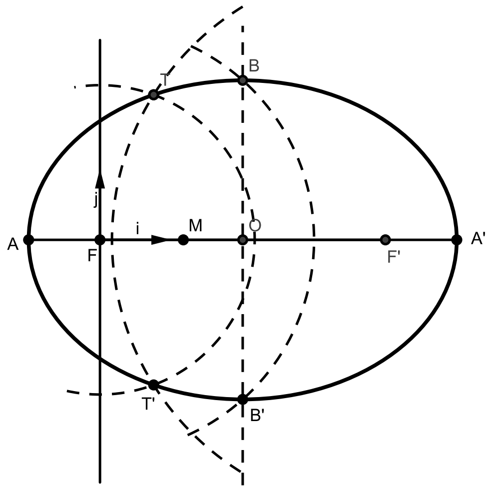
Lorsque j'avais proposé cette activité à mes élèves, nous avions construit les figures et fait les calculs nécessaires avec Cabri-GéomètreII. J'ai découvert depuis Geogebra que j'ai préféré pour reprendre les constructions qui illustrent l'article et pour retrouver les résultats. C'est également une figure construite avec Geogebra qui illustre la page de couverture de ce numéro de l'Ouvert. Les deux logiciels possèdent des avantages différents, mais permettent l'un et l'autre de parvenir à des réalisations assez similaires.
Cabri-GéomètreII me semble plus convivial, la prise en mains est très rapide. La calculatrice est d'un emploi facile et affiche immédiatement les résultats. Les paramètres peuvent être modifiés d'un clic de souris. L'utilisateur a la possibilité de créer des macro-constructions de son choix.
Geogebra est un logiciel libre, donc très intéressant pour les élèves, il peut d'ailleurs être utilisé directement en ligne. Ce logiciel est compatible avec LaTeX et donne des figures d'excellente qualité. Il possède un grand nombre de commandes qui complètent celles qu'on trouve dans la barre d'outil, elles remplacent les macro-constructions. Beaucoup concernent l'analyse, mais certaines sont très pratiques en géométrie. On peut, par exemple, tracer un arc d'ellipse d'extrémités données. On peut aussi calculer l'aire d'un secteur d'ellipse, ce qui permet de traiter ce sujet en suivant une autre méthode, j'y reviendrai après avoir présenté celle proposée aux élèves. Cependant, il semble que la liste des commandes soit figée, on ne peut pas en créer de nouvelles. Il est également facile d'attacher des images aux figures, procédé que j'ai beaucoup utilisé ici et que je préciserai en commentaire du schéma illustrant la définition des saisons.
Un autre logiciel souvent utilisé en lycée est GeoplanW. Avec la version que je possède, le tracé de l'ellipse peut être obtenu comme lieu de points, mais ce lieu n'est pas utilisable pour poursuivre la construction.

5. Maquette de l'orbite d'une planète

La connaissance du périhélie et de l'aphélie détermine une ellipse et devrait donc suffire pour la tracer. Travaillant avec Cabri, mes élèves avaient eu une mauvaise surprise, le logiciel ne permet pas de procéder directement ainsi. Il lui faut cinq points, aucun outil ne permet d'utiliser les axes, le centre ou les foyers. Pourquoi 5 points ? Difficile de répondre à un élève de seconde qui ne connaît pas l'équation générale d'une conique. Nous avions seulement pu observer qu'avec un nombre inférieur de points la forme de la courbe n'est pas stable et n'est même pas toujours une ellipse. Nous avions donc utilisé de nouveau la définition pour examiner sur le papier comment obtenir à l'aide de la règle et du compas les 5 points exigés. Nous avions ensuite appliqué la méthode avec le logiciel.
Geogebra dispose d'une commande « *Ellipse[Foyer,Foyer,Demi-grand axe]* » qui permet d'éviter cette construction. Avec Cabri on pourrait d'ailleurs obtenir l'équivalent de cette commande en réalisant une macro-construction[7]. Je pense cependant qu'il est instructif de montrer comment parvenir au tracé avec le seul outil de base « *Conique définie par cinq points.* » J'indiquerai ensuite comment une commande de Geogebra permet d'obtenir directement l'orbite d'une planète.
Même avec un logiciel, il est plus facile de commencer la construction en prenant des valeurs nettement différentes pour le périhélie et l'aphélie, il sera possible de les modifier ensuite, la figure sera automatiquement actualisée.

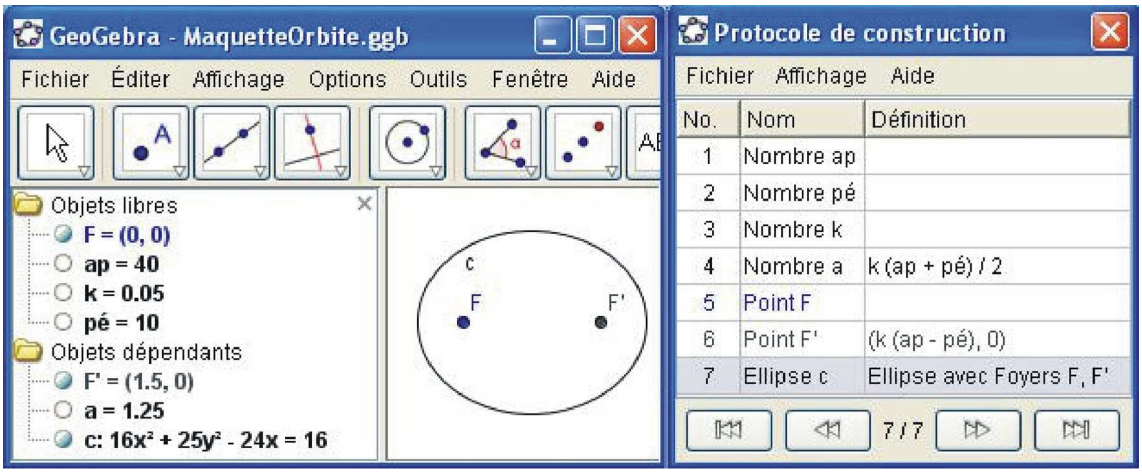
[7]On trouve des explications détaillées et de nombreuses autres macro-constructions concernant les coniques dans la brochure éditée par l'APMEP et rédigée par Roger Cuppens ([3]) .

La figure ci-contre montre comment tracer une ellipse où $FA = 1$ et $FA' = 5$.
On utilise un repère de centre F. Après avoir reporté sur l'axe Ox les points A et A' d'abscisses respectives - 1 et 5, on place le milieu O de $[AA']$ puis le symétrique F' de F par rapport à O. Le cercle de centre F et de rayon OA coupe la perpendiculaire en O à $[AA']$ en deux points B et B' appartenant à l'ellipse. Ce sont les extrémités du petit axe. Pour déterminer un cinquième point, il suffit de choisir un point M n'importe où sur $[FF']$, le cercle de centre F et de rayon MA coupe le cercle de centre F' et de rayon MA' en deux points T et T' qui appartiennent à l'ellipse puisque la somme de leurs distances aux foyers est égale à AA'.



On dispose ainsi des cinq points indispensables au tracé réalisé à l'aide de l'outil « Conique ». On pourrait aussi utiliser l'outil « Lieu » et obtenir l'ellipse comme réunion des lieux de T et de T' lorsque M parcourt $[FF']$, toutefois cette méthode ne permet de poursuivre l'activité qu'avec un logiciel sachant tracer l'intersection d'un lieu avec une droite puisqu'il faudra ensuite déterminer les sommets d'un polygone inscrit dans l'ellipse.
Cette construction est valable aussi bien avec Cabri-GéomètreII qu'avec Geogebra.

Pour modéliser l'orbite d'une planète on remplace les valeurs 1 et 5 de FA et FA' par les valeurs respectives du périhélie et de l'aphélie de la planète, mais il sera nécessaire de les multiplier par un coefficient de réduction k pour que l'ellipse reste visible sur l'écran. Avec Geogebra on peut obtenir le tracé plus facilement grâce à la commande : $Ellipse[F, F', a]$. Les copies d'écrans reproduites ci-dessous montrent comment obtenir une orbite où l'aphélie, le périhélie et le coefficient k valent respectivement 40, 10 et 0,05.

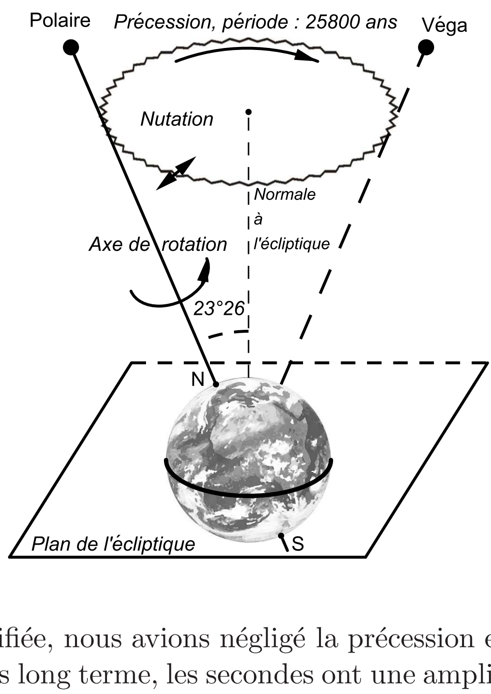


Pour obtenir l'orbite de la Terre on utilise les valeurs, en millions de kilomètres, de l'aphélie et du périhélie : $ap = 152,1$ et $pé = 147,1$. La valeur de k dépend de la taille de l'écran ; pour la figure utilisée dans le paragraphe 8, afin de calculer les durées des saisons terrestres de l'hémisphère nord, j'ai choisi $k = 0,025$. Les élèves pourront calculer l'échelle de la maquette ainsi obtenue.

6. Les saisons

Comme chacun le sait, la nuit la plus courte de l'année, celle de la Saint-Jean et de la fête de la musique, marque le début de l'été ; nous fêtons alors le *solstice d'été*. L'hiver commence avec la nuit la plus longue, au moment du *solstice d'hiver* et nous sommes aux *équinoxes* lorsque la nuit et le jour ont exactement la même durée. Ainsi les nuits sont en moyenne à peu près aussi courtes au printemps qu'en été et aussi longues en automne qu'en hiver, cependant l'inertie thermique fait que l'été est bien la plus chaude des saisons et que l'hiver est bien la plus froide.
Les saisons ne sont pas partout et toujours définies ainsi. En Orient les solstices et les équinoxes sont les milieux des saisons. On dit en anglais « midsummer » pour « solstice d'été », ce qui fait penser que cette date a dû être considérée comme le milieu de l'été. La comédie féérique de Shakespeare « A Midsummer Night's Dream » se déroule durant la nuit de la Saint-Jean. Il importe donc, indépendamment des usages, de donner des définitions précises des quatre saisons en s'appuyant sur des phénomènes astronomiques réguliers et bien déterminés.
Les principales caractéristiques de l'orbite de la Terre avaient été définies en physique. On avait aussi signalé aux élèves le phénomène de *précession* dû au renflement équatorial de la terre. L'axe de la terre ne garde pas toujours la même direction mais décrit en 25800 ans un cône d'axe perpendiculaire au plan de l'écliptique dont le demi-angle au sommet mesure $23° 26'$. Ce mouvement est similaire à celui décrit par l'axe d'une toupie ; de plus il se combine avec de faibles oscillations périodiques, les *nutations*, dont la principale a une amplitude de $20''$ et une période d'environ 19 ans.

La figure ci-contre illustre la précession et les nutations.
Pour que les nutations puissent être visibles, leurs amplitudes et leurs périodes ont été considérablement exagérées. Dans environ 12000 ans Véga, dans la constellation de la Lyre, sera l'étoile qui montrera le nord. Véga est une des étoiles les plus brillantes du ciel, sa magnitude apparente est égale à 0 alors que l'étoile polaire a pour magnitude 2. L'échelle des magnitudes est une échelle logarithmique où une étoile 2,5 fois moins brillante possède une magnitude supérieure d'une unité. On calcule ainsi que Véga est environ 6,25 fois plus brillante que l'étoile Polaire.



Pour ne pas sortir du cadre d'une étude simplifiée, nous avions négligé la précession et les nutations. La première n'a d'incidence qu'à très long terme, les secondes ont une amplitude négligeable. Nous avions considéré que l'axe de rotation de la Terre et, par conséquent, le plan de l'équateur gardent une direction fixe.

Les élèves avaient vu que c'est cette inclinaison d'environ $23° 26'$ de l'axe qui explique l'existence des saisons et non la petite variation de distance de la Terre au Soleil qui joue un rôle minime et ne pourrait d'ailleurs pas donner d'explication cohérente pour les deux hémisphères. On constate sur la figure qui suit que la durée et l'intensité du rayonnement solaire sont effectivement maximales au solstice d'été et minimales au solstice d'hiver.

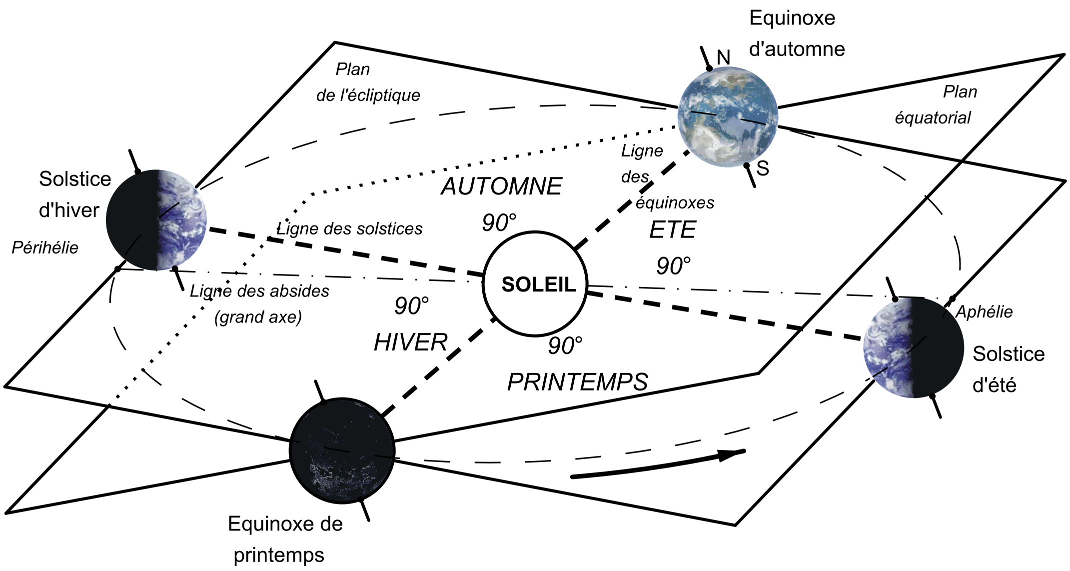


Figure illustrant les saisons[8]

L'intersection du plan parallèle au plan de l'équateur passant par le Soleil avec le plan de l'écliptique est la *ligne des équinoxes* (ou la ligne des nœuds). La Terre coupe cette ligne aux équinoxes de printemps et d'automne. L'axe de la terre est alors orthogonal à la ligne des équinoxes et la zone éclairée par le Soleil est une demi-sphère limitée par un grand cercle contenant les deux pôles et située dans un plan également orthogonal à la ligne des équinoxes, aux deux équinoxes le jour a donc la même durée que la nuit. Le moment précis où la Terre traverse la ligne des équinoxes au printemps est appelé *point vernal*[9]. Par définition, c'est à cet instant que débute le printemps[10]. La droite du plan de l'écliptique perpendiculaire à la ligne des équinoxes est la *ligne des solstices*. La Terre la traverse aux solstices d'été et d'hiver.

L'année *tropique*[11], d'une durée de 365,24 jours environ, est la période écoulée entre deux équinoxes de printemps successifs, elle correspond donc une rotation de 360° de la Terre autour du Soleil. Le début de chacune des trois autres saisons est ainsi exactement défini par la position de la Terre lorsqu'elle a effectué, autour du soleil, une rotation de 90° par rapport à la position qu'elle occupait au début de la saison précédente.

[8] Les photos de la Terre, découpées au préalable avec un logiciel de dessin, ont été insérées puis attachées aux quatre extrémités I, J, K et L de deux diamètres conjugués de l'ellipse représentant l'orbite. Leur rayon est un objet libre r. Pour cela, après avoir placé l'image à un emplacement quelconque, on ouvre le menu « Propriétés » où on détermine les positions de trois des quatre coins. Par exemple, pour l'image attachée au point I, on donne au coin 1, coin inférieur gauche, la position : $I + (-r, -r)$. On procéde de manière similaire pour tous les coins des différentes images. Ainsi il n'y aura pas à se soucier des images si on doit modifier la figure. En changeant la valeur de r on adapte aisément leurs dimensions.

[9] Le mot latin ver, veris signifie printemps.

[10] Cette date n'est pas fixe et ne peut pas l'être puisque le nombre de jours de l'année tropique n'est pas entier. Pour une année donnée la méthode exposée ici ne permet pas de déterminer avec précision la date du début du printemps ou des autres saisons, elle ne permet que le calcul de leurs durées.

[11] J'ai trouvé dans certaines références une différence entre année tropique et année vernale, j'ignore en quoi elle consiste, elle est négligeable.

Il reste à savoir comment situer les différentes saisons sur l'ellipse. Le grand axe de l'ellipse parcourue par la Terre s'appelle la *ligne des absides*. Actuellement la ligne des absides est proche de la ligne des solstices. Il en résulte que, dans l'hémisphère nord, au solstice d'été, la distance entre la Terre et le Soleil est presque maximale et qu'au solstice d'hiver cette distance est presque minimale. Cette situation est variable dans le temps, la ligne des absides tourne avec une période d'environ 21000 ans, ce phénomène s'appelle la précession climatique. Actuellement le passage de la Terre à son périhélie se produit vers le 3 janvier mais dans 10000 ans il aura lieu aux alentours du solstice d'été.

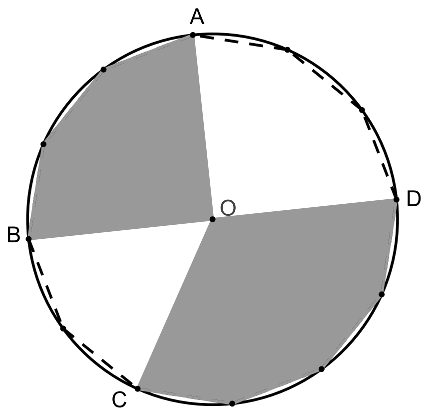
7. Un simple calcul de proportionnalité

La loi des aires de Kepler permet théoriquement d'obtenir les durées des saisons par un calcul de proportionnalité. Il reste cependant un problème de taille : comment calculer les aires des quatre secteurs d'ellipse ?

La solution sera d'approcher les aires cherchées par celles de polygones. Évidemment les élèves ne savent pas davantage calculer les aires de polygones quelconques, en revanche les logiciels le font (Cabri comme Geogebra). Triche-t-on ? Un peu, sans doute, mais l'élève sait qu'on peut calculer des aires de triangles et donc de polygones. Les calculs sont certainement compliqués, mais ils sont concevables, le logiciel devient ainsi un simple outil qui évite les tâches fastidieuses ; d'ailleurs, s'il permet d'effectuer ces calculs, c'est bien parce que quelqu'un a su programmer les formules nécessaires.

Ils ont peut-être entendu parler de la méthode d'Archimède pour le calcul approché de l'aire du disque puisqu'elle figure dans de nombreux livres de seconde parmi les thèmes d'ouverture. On peut d'ailleurs remarquer qu'il ne s'agit pas ici d'évaluer les aires, mais seulement d'obtenir une valeur approchée de leur rapport et qu'on obtient alors beaucoup plus facilement une bonne précision.

Par exemple, le rapport des aires des polygones grisés (figure ci-contre) obtenus en inscrivant dans le cercle un dodécagone est exactement égal au rapport des aires des deux secteurs circulaires OAB et OCD d'angles respectifs 90° et 120°. Pourtant les aires des polygones ne donnent que des valeurs approchées de celles des secteurs.



Cette propriété se généralise, à condition toutefois que les extrémités des arcs limitant les secteurs circulaires soient des sommets d'un polygone régulier.

La méthode prend corps. On approchera l'ellipse par un polygone centré en S, foyer occupé par le Soleil. On choisira pour cela un polygone dont les diagonales successives font entre elles des angles égaux et dont l'ensemble des sommets, situés sur l'ellipse, contient les solstices et les équinoxes.

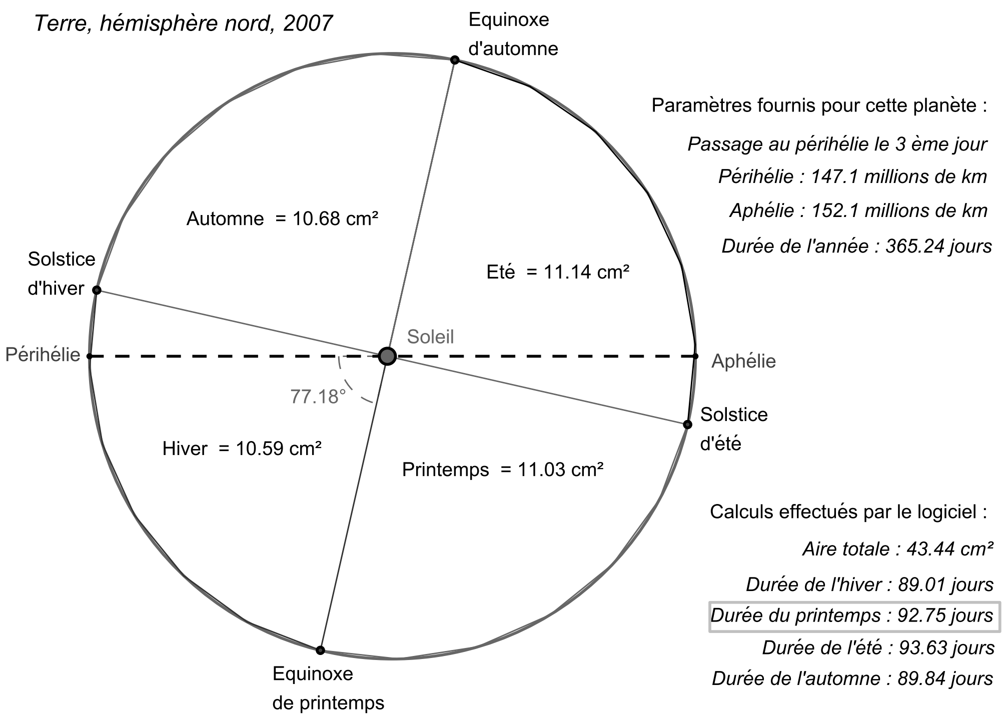
8. Fin de la réalisation de la maquette

On reprend la maquette de l'orbite de la terre dessinée précédemment. L'hiver commence aux environs du 22 décembre et la Terre passe à son périhélie vers le 3 janvier (données de fin 2006, début 2007), on donne la valeur 3 au paramètre « *Passage au périhélie* » auquel on ajoute 10 pour avoir l'écart en jours entre le solstice d'hiver et le périhélie[12]. L'angle orienté entre le périhélie et la position de la Terre à l'équinoxe de printemps est donc d'environ 77°. On peut ainsi placer sur l'ellipse les solstices et les équinoxes.

Quel nombre de côtés est-il judicieux de choisir pour le polygone utilisé afin de déterminer les aires approchées correspondant aux saisons ? On peut faire des essais qui montrent d'ailleurs que, dans le cas de l'ellipse, la propriété mentionnée à propos des secteurs circulaires ne s'applique plus. Les résultats obtenus dépendent du nombre de côtés du polygone, ce qui fait penser qu'ils ne donnent effectivement que des valeurs approchées. Avec un nombre trop important le gain de précision est faible et les tracés deviennent fastidieux. Comme il faut un multiple de quatre, certains élèves ont choisi la valeur 12, d'autres, plus persévérants, sont allés jusqu'à 24, c'est ce nombre que j'ai repris ici.
Une fois les 24 sommets dessinés, on trace les quatre polygones délimitant les différentes saisons et on demande au logiciel d'évaluer leurs aires. Le calcul :

$$\frac{aire\ du\ polygone}{aire\ totale} \times\ dur\acute{e}e\ de\ l'ann\acute{e}e$$

donne, en jours, la durée de la saison représentée par le polygone.



[12]Les valeurs exactes sont : 22 décembre 2006 à 0 heure 21 pour le solstice d'hiver et 3 janvier 2007 à 19 heures 45 pour le périhélie, soit une différence de 12,78 jours et un angle de $12,6^\circ$ ou plutôt $-12,6^\circ$ si l'angle est orienté comme sur la figure. L'angle avec l'équinoxe de printemps est donc de $77,4^\circ$; la valeur indiquée sur la figure est légèrement différente car on n'a pas tenu compte de l'heure.

9. Des résultats d'une surprenante précision !

Le site [7] de l'IMCCE (institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides) donne sans nul doute des résultats fiables et permet de contrôler les valeurs obtenues, on trouve en effet dans la rubrique « *Astronomie pour tous - Saisons* » les dates des débuts des saisons de l'an −4000 à l'an 2500. Les heures sont données en Temps Universel, on peut lire :

Hiver	:	22.12 2006 à 00 h 21	Printemps	:	21.03.2007 à 00 h 07
Eté	:	21.06.2007 à 18 h 06	Automne	:	23.09.2007 à 09 h 50
Hiver	:	22.12.2007 à 06 h 07			

Le site PGJ Astronomie [8] permet le calcul de la durée écoulée entre deux dates données.

On y trouve, en arrondissant au 1/100 :
Hiver : 89,02 jours Printemps : 92,76 jours Eté : 93,63 jours Automne : 89,84 jours
Alors que nous avons obtenu :
Hiver : 89,01 jours Printemps : 92,75 jours Eté : 93,63 jours Automne : 89,84 jours

Cette remarquable précision a bien sûr étonné les élèves ; je l'étais aussi un peu, bien qu'on puisse s'y attendre, compte tenu de la faible excentricité de la Terre. Je me suis d'ailleurs demandé si une méthode similaire n'est pas appliquée par les concepteurs des sites que j'ai cités.

On peut continuer à faire fonctionner le modèle en modifiant des paramètres. Le paramètre « *Passage au périhélie* » indique le nombre de jours écoulés entre le début de l'année et la date du périhélie. Il est facile de le changer, par exemple, en lui donnant la valeur 185, on peut examiner ce qui se passe lorsque la Terre passe à son périhélie en été (c'est à peu près la situation actuelle de l'hémisphère sud), on obtient un résultat auquel on pouvait s'attendre : l'été devient la plus courte des saisons. On peut tout aussi facilement constater que l'été aura chez nous une durée maximale de 94,07 jours lorsque la Terre passera à son périhélie au milieu de l'hiver, vers le 4 février. L'angle entre le périhélie et la position de la Terre à l'équinoxe de printemps sera alors d'environ 45°. Cela se produira vers l'an 3300[13].

On constate ainsi que la durée des saisons dépend de l'angle entre l'axe des absides et la ligne des solstices, en effet les aires des quatre secteurs d'ellipse varient légèrement en fonction de cet angle. Le principal facteur entraînant des différences d'aires de ces quatre secteurs, donc des différences de durées des saisons, est cependant l'excentricité de l'ellipse. Ce paramètre est invariable pour la Terre, on peut cependant examiner son effet en choisissant pour le périhélie et l'aphélie des valeurs fictives ou, plus concrètement, celles d'autres planètes du système solaire.

10. Les saisons de la planète rouge

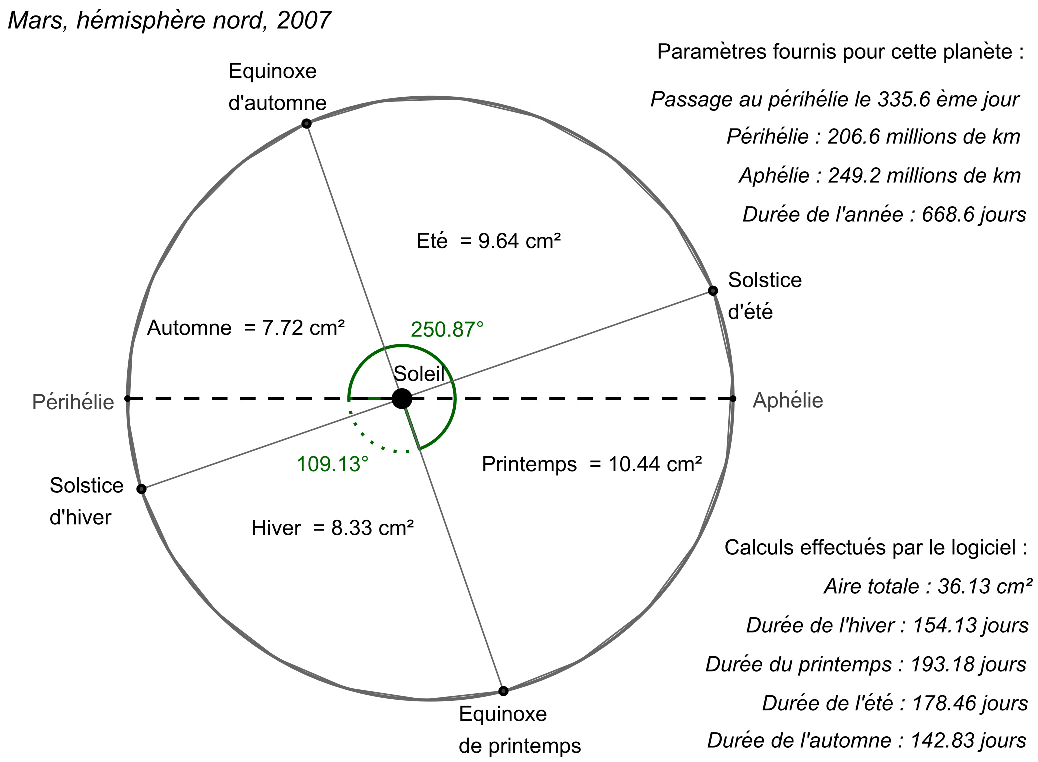
Il est également très facile d'utiliser le modèle pour étudier les saisons sur la planète Mars[14]. Il suffit, sur Geogebra, de modifier les quatre objets libres : *année, aphélie, périhélie, passage au périhélie* et d'adapter le coefficient k.

[13] On a déjà vu que la précession climatique a une période de 21000 ans, un angle de 22° correspond ainsi à une durée d'environ 1300 ans. Il reste à s'assurer que c'est bien vers le futur. Bonne nouvelle, les longueurs des étés sont actuellement en train d'augmenter !

[14] L'étude concernant Mars n'avait pas été faite par les élèves, j'ai ajouté ce paragraphe, ainsi que les suivants, en rédigeant l'article.

L'axe de cette planète a une inclinaison comparable à celle de la terre (il est incliné de $25,1°$ par rapport à la normale au plan de l'écliptique). L'aphélie de Mars est de 249,2 millions de kilomètres, son périhélie est de 206,6 millions de kilomètres, pour ces deux raisons les saisons y sont bien marquées. On obtient une maquette de l'orbite de Mars en prenant les valeurs 206,6 et 249,2 pour le périhélie et l'aphélie, la valeur $k = 0,015$ convenait aux figures qui suivent. Il reste à déterminer la position du périhélie en trouvant la bonne valeur du paramètre « *Passage au périhélie* ».

On appelle longitude solaire (notée en abrégé Ls) l'angle dont a tourné la demi-droite Soleil-Mars entre l'équinoxe de printemps pour l'hémisphère nord et le moment considéré. Il s'agit donc de connaître la longitude solaire du périhélie. Comme elle ne fait pas partie des éléments orbitaux essentiels, elle est rarement indiquée ; je l'ai finalement trouvée sur un livre en ligne [10] *The planet Mars : A history of observation and discovery*. Elle vaut $250,87°$, cela donne un angle périhélie-printemps de $109,13°$. On modifie donc le paramètre « *Passage au périhélie* »[15] afin d'obtenir cette valeur. Il reste à changer la durée de l'année tropique qui dure environ 668,6 jours martiens[16], à indiquer la longitude solaire du périhélie sur la figure et, bien sûr, à remplacer « Terre » par « Mars » dans le titre. Tout est en place, il n'y a plus qu'à lire les résultats.
Les durées calculées sont très proches de celles que j'ai obtenues grâce à plusieurs sources ([1] et [9]). Dans ces deux références on donne les valeurs arrondies : 154 ; 194 ; 178 et 143 jours martiens pour l'hiver, le printemps, l'été et l'automne alors que les valeurs trouvées, données au centième, sont respectivement : 154,13 ; 193,18 ; 178,46 et 142,83 jours. La précision est sans doute un peu moindre car l'excentricité de Mars est plus forte mais on a de nouveau trouvé, à l'aide de la maquette, des valeurs très proches de celles fournies par les spécialistes.

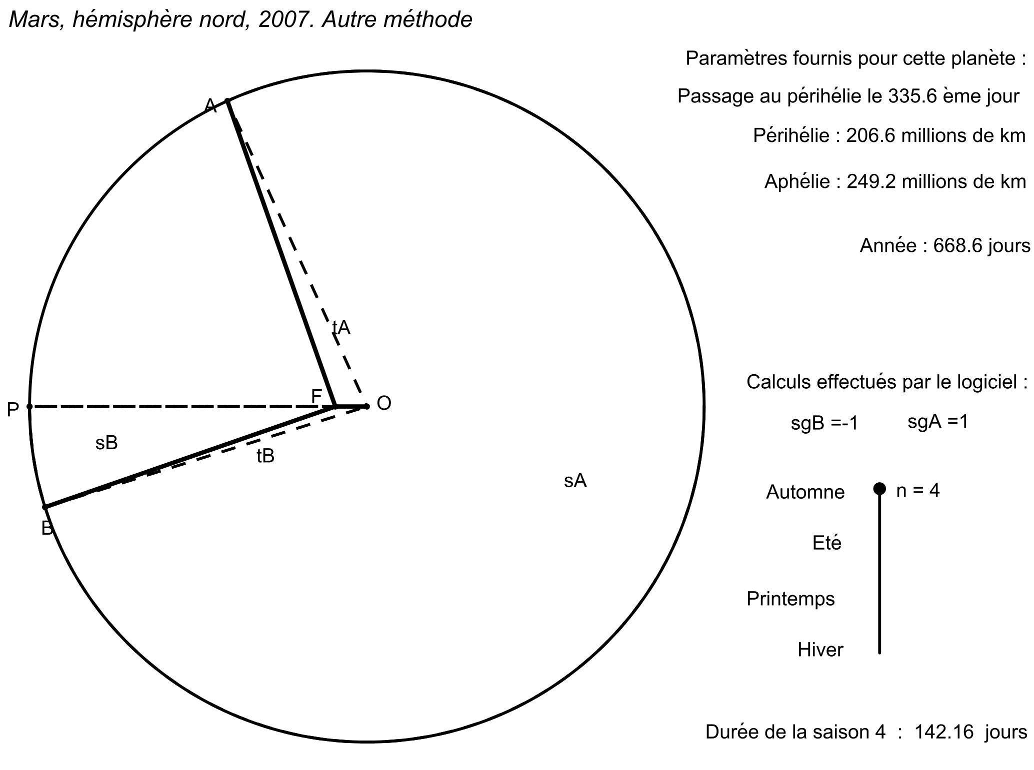


[15] Évidemment ce nombre, basé sur année terrestre de 365 jours, n'a, sur Mars, aucune signification.
[16] Comme la période de rotation de Mars est de 24 heures et 37 minutes, cela correspond à 687 jours terrestres.

On remarque, sur la planète Mars, une très nette différence entre les durées des saisons chaudes et froides de l'hémisphère nord. Il y a 75 jours d'écart entre la période printemps-été et la période automne-hiver. On peut calculer qu'à son aphélie la distance de Mars au Soleil est supérieure de 20% à sa valeur au périhélie (environ 3% seulement pour la Terre). Contrairement à ce qui se passe sur Terre, cette différence d'éloignement a une influence très sensible sur les saisons. L'été est plus long dans l'hémisphère nord mais, Mars se trouvant alors proche de son aphélie, les températures y sont nettement plus froides que celles des étés de l'hémisphère sud. La calotte polaire sud fond souvent entièrement durant la période estivale, ce n'est pas le cas pour celle de la calotte polaire nord[17].

11. Existe-t-il une méthode exacte ?

Geogebra offre toute une palette de commandes concernant les coniques. Je les ai essayées pour voir si on peut éviter d'avoir recours à une méthode géométrique approchée. On va voir que c'est effectivement possible mais on ne peut cependant pas parler de méthode exacte puisqu'on utilise les valeurs approchées des aires que donne le logiciel. La figure ci-dessous illustre cette nouvelle méthode, elle concerne de nouveau la planète Mars. Comme on l'a déjà vu, il suffirait de redéfinir quelques objets libres pour l'adapter à la Terre.



J'utilise un curseur qui permet de faire varier un objet libre n désignant la saison. On le configure pour qu'il ne prenne que des valeurs entières entre 1 et 4. Le Soleil se trouve au foyer F, le point A marque le début de la saison et le point B la fin, les segments [FA] et [FB] sont perpendiculaires. L'angle PFB est donné en degrés par : $n \times 90 - (date + 10) \times 360 \div 365$,

[17] Ces calottes sont formées de gaz carbonique gelé.

où *date* est la valeur du paramètre « *Passage au périhélie* » déterminée dans le paragraphe précédent. On peut ainsi situer la fin de chacune des saisons puis en déduire le début. Sur la figure, on lit $n = 4$, c'est l'automne.

La commande « *Secteur[c,P,A]* » donne l'aire sA du secteur d'ellipse centré en O, d'origine P et d'extrémité A, on obtient de même l'aire sB du secteur d'origine P et d'extrémité B. Les secteurs sont mesurés de l'origine P à l'extrémité, ici dans le sens trigométrique, entre 0 et 360 degrés[18]. La commande « *Aire[c]* » donne l'aire e de l'ellipse. Il s'agit de calculer l'aire de la région délimitée par l'ellipse et les segments FA et FB. On place F à l'origine du repère, P et O sur l'axe des abscisses. On rencontre plusieurs cas selon la position des points A et B, le calcul dépend des signes sgA et sgB des ordonnées de ces points.

- L'aire de la région PFA s'obtient en additionnant à sA l'aire tA du triangle FOA car sgA est positif (il s'agit du secteur rentrant).
- L'aire de la région PFB s'obtient en soustrayant de sB l'aire tB du triangle FOB car sgB est négatif.

On soustrait l'aire de la région PFA à celle de PFB. Lorsque le résultat est négatif, comme c'est le cas sur la figure, la mesure de l'angle POB est supérieure à 360°, ce que le logiciel ne prend pas en compte. On corrige alors ce résultat en ajoutant l'aire e de l'ellipse. On écrit donc dans le champ de saisie :
- $sB + sgB \times\ tB - (sA + sgA \times tA)$ pour avoir une valeur provisoire sf, éventuellement négative, de l'aire cherchée.
- $Si[sf\ >\ 0, sf, e + sf]$ pour obtenir, grâce à cette commande conditionnelle, la valeur définitive de l'aire représentant la saison.

On constate que cette méthode est assez complexe, je ne pense pas qu'on puisse la préconiser à l'intention des élèves !

Le tableau qui suit récapitule les résultats en les comparant à ceux trouvés dans les sites d'astronomie, il y a bien peu de différences. Pour la Terre, la méthode « exacte » s'avère même un peu moins précise[19].

Saison	Terre			Mars		
	Polygones	Secteurs	Site/livre	Polygones	Secteurs	Site/livre
Hiver	89,01	88,99	89,02	154,13	154,07	154
Printemps	92,75	92,77	92,76	193,18	194,60	194
Eté	93,63	93,65	93,63	178,46	177,73	178
Automne	89,84	89,82	89,84	142,83	142,16	143

12. Autres planètes, limite de validité du modèle

Après les études faites pour la Terre et pour Mars, on peut se demander s'il est judicieux de continuer à utiliser le même modèle avec les autres planètes du système solaire.

Les principaux facteurs conduisant à des phénomènes saisonniers plus ou moins marqués

[18] Dans les pays germaniques, les angles sont vus avant tout comme des secteurs circulaires. Geogebra ayant été conçu en Autriche, ils n'est pas surprenant qu'ils soient mesurés ainsi. L'expression « secteur rentrant » se traduit d'ailleurs en allemand par « erhabener Winkel », ce qui signifie au sens propre « angle sublime ou majestueux », c'est dire combien ces angles sont considérés !

[19] J'en ignore la raison, les valeurs des aires des secteurs d'ellipse données par Geogebra ne sont peut-être pas d'une très grande précision. Une étude plus poussée lierait ce problème à la résolution de l'équation de Képler, mais ce n'est plus à la portée des lycéens.

sont l'inclinaison sur l'axe, la distance au Soleil et ses variations dues à l'excentricité, la durée du jour liée à la période de rotation autour de l'axe, l'existence d'une atmosphère.

La modélisation utilisée suppose que l'inclinaison de l'axe de la planète est un facteur essentiel, elle prend également en compte l'excentricité mais les autres facteurs possibles sont négligés. Elle est donc valable pour la Terre et pour Mars où, de plus, les jours ont des durées voisines et courtes qui les distinguent bien des saisons. L'excentricité assez forte différencie, selon les hémisphères, les saisons de Mars. L'atmosphère de Mars étant ténue, son rôle régulateur est moindre, cela est ignoré mais n'a pas d'incidence majeure.
Examinons brièvement les facteurs prépondérants des saisons sur les autres planètes[20].

Pour Mercure et Venus l'inclinaison sur l'axe est faible. Pour chacune de ces planètes l'élément déterminant est la durée du jour, du même ordre de grandeur que celle de l'année[21] ; les variations jour-nuit prennent donc le pas sur les saisons. Ces variations sont particulièrement marquées sur Mercure qui ne possède pratiquement pas d'atmosphère, les écarts de température y sont considérables[22].

L'axe de Jupiter est très peu incliné par rapport à la normale à l'écliptique alors que l'axe d'Uranus est presque dans le pan orbital, ces deux situations extrêmes conviennent mal au modèle. De plus la période de rotation de Jupiter, moins de 10 heures, a pour conséquence une dynamique complexe de l'atmosphère dont les effets peuvent s'apparenter à un phénomène saisonnier, mais ces saisons ne correspondent pas à la définition du modèle. Sur Uranus la position d'une région par rapport au Soleil n'évolue que lentement, les saisons seraient donc extrêmement longues.
En revanche le modèle pourrait s'appliquer à Saturne et à Neptune dont les axes ont des inclinaisons peu différentes de celle de la Terre. Cependant Saturne a une période de rotation brève, voisine de celle de Jupiter, et la présence d'anneaux constitue un nouveau paramètre qui pourrait avoir une certaine influence. Sur Saturne, Uranus et Neptune les éventuelles saisons sont encore mal connues. L'éloignement et les longues périodes de révolution n'ont pas permis de faire suffisamment d'observations.
On constate que le modèle envisagé a des limites de validité, qu'il ne prend pas en compte tous les paramètres possibles et qu'il serait aberrant de chercher à l'utiliser dans les situations pour lesquelles il n'est pas adapté. Il ne convient qu'à la Terre et à Mars.

13. Conclusion

Cette activité n'a demandé aucun calcul difficile, tous sont faits à l'aide d'un logiciel et l'outil mathématique essentiel est la proportionnalité. Peut-on en conclure qu'il n'y a presque pas de maths ? Je me permets cette question car on entend trop souvent cette opinion à propos des TPE. Les élèves qui préparent un TPE tombent facilement dans deux travers opposés : renoncer à toute activité mathématique car ils n'en voient pas dans le sujet qu'ils proposent ou tenter de présenter des notions trop savantes qu'ils ne peuvent pas comprendre.
Des élèves de seconde ont pu faire ici des mathématiques à leur portée ; ils ont découvert des figures géométriques nouvelles et simples à tracer, que ce soit avec un morceau de ficelle ou avec un logiciel de géométrie dynamique ; ils ont pu s'entraîner à voir dans l'espace ; ils

[20]On trouvera des renseignements détaillés sur le site [11] .

[21]La période de rotation sidérale de Mercure est exactement égale aux deux tiers de la période de révolution sidérale mais le jour réel, durée d'exposition au Soleil, dure un peu plus d'une année. La période de rotation sidérale de Vénus est de 243 jours, elle est rétrograde ; sa période de révolution sidérale est de 225 jours ; le jour réel dure près de deux mois.

[22]La température nocturne descend à $-183°$C alors que la température diurne monte à $427°$C.

ont trouvé des méthodes convaincantes de calcul approché ; ils ont constaté que le modèle obtenu est utilisable dans d'autres situations mais qu'il faut être conscient de ses limites. Citant encore Baudelaire, j'espère qu'ils ne penseront pas à propos des mathématiques :

> « *Tout l'hiver va rentrer dans mon être : colère*
> *Haine, frissons, horreur, labeur dur et forcé.* ».

Bibliographie

[1] Jean Audouze et Guy Israël, *Le grand Atlas de l'astronomie*, Encyclopædia Universalis, 1986.

[2] René Taton, *Histoire générale des sciences, tome II, la science moderne*, Presses Universitaires de France, 1969.

[3] Roger Cuppens, *Faire de la géométrie supérieure en jouant avec Cabri-GéométreII, tome 1*, Publication de l'APMEP, numéro 124, 1999.

[4] René Voltz, *L'université impériale germanique (17e siècle)* :
`https://www-physique.u-strasbg.fr/php/institut/histoire/dixseptieme.pdf`

[5] *Théorie simplifiée des saisons* :
`http://www.astrosurf.com/lsais/lessaisons.html`

[6] *Astronomie et mécanique céleste* :
`http://media4.obspm.fr/public/AMC/index.html`

[7] *Institut de mécanique céleste et de calcul des éphémérides* :
`http://www.imcce.fr/imccefr.html`

[8] *PGJ Astronomie* :
`http://pagesperso-orange.fr/pgj/julien.htm`

[9] *Mars aujourd'hui* :
`http://www.nirgal.net/todaymars.html`

[10] *The planet Mars : A history of Observation and Discovery* :
`http://www.uapress.arizona.edu/onlinebks/mars/chap04.htm`

[11] Techno-science.net, *les saisons exotiques du système solaire* :
`http://www.techno-science.net/?onglet=articles\&article=24`

Jean-Pierre Darou
Lycée Jean Monnet, Strasbourg
APMEP, régionale d'Alsace
jean-pierr.darou@ac-strasbourg.fr