Peut-on « voir » dans l'espace à n dimensions ?

Pierre Baumann, Michel Émery

Résumé : Comment une propriété évidente visuellement en dimensions deux et trois s'étend-elle aux autres dimensions ? Voici une situation où l'intuition est trompeuse.

Mots-clés : Vecteur - Trièdre - Produit scalaire - Espace à n dimensions.

Tout angle aigu[1] est inclus dans un angle droit de même sommet. C'est évident, au sens étymologique : cela se voit avec les yeux de l'esprit, sans même avoir à esquisser une figure, du moins pour qui a tant soit peu pratiqué les mathématiques.

Passons à trois dimensions. Un trièdre T dont les trois angles sont aigus est-il toujours inclus dans un trièdre trirectangle ? Oui, cela se voit aussi, quoique moins immédiatement. Plaçons à cet effet le plus grand des trois angles de T dans un plan horizontal. La projection orthogonale sur ce plan de l'arête de T opposée est alors incluse dans cet angle.[2] Dès lors, en faisant pivoter cette arête dans le plan vertical qui la contient, on peut agrandir T de sorte que deux de ses angles deviennent droits. Il ne reste plus qu'à agrandir l'angle horizontal pour le rendre droit.

Un effort est nécessaire pour se représenter mentalement la situation et « voir » que tout cela est possible. Si la difficulté est trop grande, on peut toutefois se ramener à deux dimensions en coupant T par une sphère de rayon unité centrée au sommet de T. La question devient alors : un triangle sphérique dont les longueurs des trois côtés sont au plus $\pi/2$ est-il toujours inclus dans un triangle sphérique trirectangle (dont les trois côtés et les trois angles valent $\pi/2$) ? Il devient ainsi possible de griffonner des figures (sur du papier ou sur une orange) pour se convaincre que c'est vrai ; il s'agit d'un résultat « visible ».

Ce résultat peut s'exprimer de façon moins visuelle. Chaque base orthonormée détermine un trièdre trirectangle, à savoir l'ensemble des vecteurs ayant toutes leurs composantes positives dans la base ; n'importe quel trièdre trirectangle s'obtient d'ailleurs ainsi. En se rappelant que deux vecteurs forment un angle aigu si et seulement si leur produit scalaire est positif, on parvient à la formulation que voici, plus algébrique que géométrique : *Étant donnés dans l'espace trois vecteurs dont les produits scalaires deux à deux sont positifs, il existe nécessairement une base orthonormée dans laquelle toutes les composantes de ces trois vecteurs sont positives.*

Et en dimension supérieure ? Si l'on se donne quatre vecteurs dans l'espace à quatre dimensions, et si les six produits scalaires deux à deux de ces vecteurs sont positifs, est-il

[1] Au sens large : l'angle nul et l'angle droit sont aigus. De même, positif signifiera $\geqslant 0$.

[2] Le lecteur scrupuleux constatera que nous ne prouvons pas cette affirmation : évidence n'est pas démonstration. Nous verrons toutefois plus loin comment écrire une preuve rigoureuse de la propriété que nous annonçons.

toujours possible de grossir la figure ainsi formée de façon à rendre nuls les six produits scalaires ? Plus généralement, pour chaque entier naturel n, on peut se demander si la propriété ci-dessous a lieu :

P(n) : *On se place dans l'espace euclidien à n dimensions. Étant donnés n vecteurs formant deux à deux des angles aigus, il existe toujours une base orthonormée dans laquelle toutes les composantes de ces vecteurs sont positives.*

L'un de nous (M. É.) a rencontré ce problème à l'occasion de recherches en probabilités : ce résultat lui aurait été utile, mais faute d'en trouver une démonstration simple, il s'en est passé et a procédé autrement. Surpris toutefois par la difficulté d'une question d'apparence si élémentaire, il en a parlé autour de lui. La plupart de ses collègues avaient comme lui l'intuition (visuelle) que la réponse devait être positive ; certains lui ont proposé des démonstrations, qui se sont en fin de compte révélées incomplètes. C'est finalement P. B. qui a trouvé la solution : P(6) est fausse ! Nous allons voir que P(n) est vraie pour $n \leqslant 4$ et fausse pour $n \geqslant 5$.

Notre propension de mathématicien à tenter de généraliser aux dimensions supérieures les résultats intuitivement évidents de la géométrie élémentaire conduit ici à une impasse. Il est en effet possible de passer de P(3) à P(4), au prix d'un petit travail. Tant qu'à se fatiguer, on est enclin à chercher directement un argument permettant de passer aussi en toute généralité de P(n) à P($n+1$), ce qui est une fausse piste puisqu'un tel argument ne saurait exister.

Résultat et références

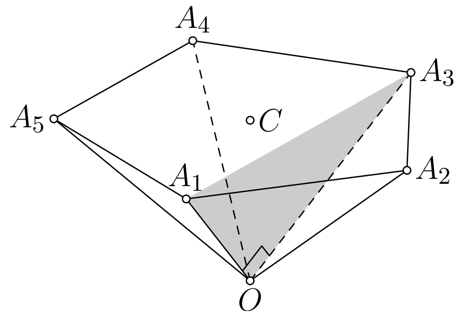
Nous avons déjà dit que P(2), P(3) et P(4) sont vraies, et que P(n) est fausse pour $n \geqslant 5$. Comme c'est si souvent le cas lorsqu'on s'intéresse à des questions élémentaires, ce fait était connu depuis longtemps, mais était en l'occurrence énoncé sous une forme un peu différente. Un argument de dualité permet d'établir l'équivalence entre notre propriété P(n) et celle que DIANANDA appelle $T(n,0)$ dans l'article [1]. Or DIANANDA démontre $T(n,0)$ pour $n \leqslant 4$, et page 25 du même article, un contre-exemple dû à HORN réfute $T(5,0)$. Un autre contre-exemple à P(5) est proposé par HALL, au travers de la matrice de Gram définie par l'équation (15.33) de l'article [2].

Contre-exemple à P(n) pour $n \geqslant 5$

Pour $n \geqslant 5$, nous affirmons donc l'existence d'un contre-exemple, c'est-à-dire d'un système de n vecteurs dans l'espace à n dimensions, dont les produits scalaires deux à deux sont positifs, et tel qu'il soit impossible de trouver une base orthonormée dans laquelle les n^2 composantes de ces n vecteurs soient toutes positives. Un contre-exemple à P(5) est obtenu en prenant $n = 5$ dans la proposition ci-dessous ; pour $n > 5$, on obtiendra un contre-exemple à P(n) en augmentant de cinq à n le nombre de vecteurs par répétition de l'un d'entre eux.

Proposition 1. *Dans un espace euclidien de dimension $n \geqslant 3$, il existe un système de cinq vecteurs formant deux à deux des angles aigus et tel qu'il soit impossible de trouver une base orthonormée dans laquelle les $5n$ composantes de ces vecteurs soient toutes positives.*

La construction à la base de notre démonstration est « visuelle », au sens où certaines de ses propriétés seront plus immédiatement perçues sur une figure que vérifiées par le calcul.



Tridimensionnelle, la figure représente une pyramide régulière $OA_1A_2A_3A_4A_5$, posée sur sa pointe O, et dont la base est un pentagone régulier horizontal $A_1A_2A_3A_4A_5$. Le centre C du pentagone est à la verticale du point O. La hauteur OC de la pyramide est choisie telle que les cinq diagonales A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, A_4A_1 et A_5A_2 du pentagone soient vues de O sous un angle droit. Un tel choix est possible parce que lorsque OC varie de zéro à l'infini, l'angle $\widehat{A_1OA_3}$ varie de $4\pi/5$ (qui est obtus) à 0. Remarquer que les côtés du pentagone sont vus de l'origine sous un angle $\widehat{A_1OA_2}$ aigu, car inférieur à $\widehat{A_1CA_2}$ qui vaut $2\pi/5$.

Mais nous cherchons une construction en dimension $n \geqslant 3$ alors que cette figure n'est que tridimensionnelle. Fixons dans l'espace à n dimensions un sous-espace à 3 dimensions (il y en a pléthore si $n > 3$) ; et dans ce sous-espace choisissons des points A_1, A_2, A_3, A_4 et A_5 qui dessinent avec l'origine O la figure ci-dessus. Les cinq vecteurs dont la proposition affirme l'existence seront $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OA_4}$ et $\overrightarrow{OA_5}$. L'angle entre deux quelconques de ces vecteurs est aigu ; nous avons fait tout ce qu'il faut pour cela.[3]

Il reste à présent à établir qu'il n'existe aucune base orthonormée de l'espace à n dimensions dans laquelle les composantes des cinq vecteurs $\overrightarrow{OA_k}$ soient toutes positives. La démonstration de ce fait occupe les trois alinéas suivants.

Raisonnons par l'absurde en supposant au contraire l'existence d'une telle base. Appelons $a_{k,1}, \ldots, a_{k,n}$ les coordonnées de A_k dans cette base ; chaque $a_{k,i}$ est soit nul, soit strictement positif. Appelons *support* de A_k, et notons S_k, l'ensemble des indices i tels que $a_{k,i} > 0$. Puisque l'angle $\widehat{A_1OA_3}$ est droit, on a $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OA_3} = 0$, c'est-à-dire $a_{1,1}\, a_{3,1} + \cdots + a_{1,n}\, a_{3,n} = 0$. Chaque terme $a_{1,i}\, a_{3,i}$ de cette somme étant positif, tous ces produits $a_{1,i}\, a_{3,i}$ doivent être nuls, et aucun indice i ne peut donc être à la fois dans les deux supports S_1 et S_3. Ceci montre que $S_1 \cap S_3 = \varnothing$; de même, $\widehat{A_1OA_4}$ étant droit, on a $S_1 \cap S_4 = \varnothing$.

Par ailleurs, les trois vecteurs $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ et $\overrightarrow{OA_4}$ ne sont pas coplanaires (voir la figure). Ils forment donc une base de l'espace tridimensionnel contenant la pyramide, et $\overrightarrow{OA_1}$ doit être une combinaison linéaire de ces trois vecteurs. Sa i-ième coordonnée est donc une combinaison linéaire des i-ièmes coordonnées de ces trois vecteurs, et si $a_{1,i}$ n'est pas nul, un au moins parmi $a_{2,i}$, $a_{3,i}$ et $a_{4,i}$ n'est pas nul. Ceci signifie pour les supports l'inclusion $S_1 \subset S_2 \cup S_3 \cup S_4$. Or le paragraphe précédent a montré que S_1 ne rencontre ni S_3 ni S_4 ; on doit donc avoir $S_1 \subset S_2$.

Le même argument en permutant les indices donne $S_2 \subset S_3$; par transitivité, S_1 est donc inclus dans S_3. Mais nous avons vu plus haut que S_1 et S_3 ne se rencontrent pas. Il en résulte que S_1 est vide, c'est-à-dire $A_1 = O$, ce qui est absurde. Cette contradiction achève de démontrer la proposition 1. □

[3]Les angles restent les mêmes, qu'ils soient considérés dans l'espace tridimensionnel ou dans l'espace plus gros à n dimensions. L'angle entre deux vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ est toujours mesuré dans le sous-espace de dimension 2 ou 1 engendré par $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$; l'angle géométrique est déterminé par le produit scalaire, son cosinus valant $\dfrac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\|\,\|\vec{v}_2\|}$.

La proposition 1 réfute par un contre-exemple la propriété P(n) pour tout $n \geqslant 5$. Ce contre-exemple est cependant doublement dégénéré, en ce que d'une part certains des angles initiaux sont nuls ou droits, et d'autre part le système des vecteurs est lié. On voit toutefois facilement qu'il existe aussi des contre-exemples non-dégénérés. De fait, un argument de compacité montre que si un système de n vecteurs de l'espace à n dimensions n'est inclus dans aucun « octant généralisé », il en va de même de tout autre système de n vecteurs suffisamment proche du premier. Or les dégénérescences dont pâtit notre contre-exemple s'évanouissent sous une petite déformation convenablement choisie, tandis que subsiste la propriété de n'être inclus dans aucun « octant généralisé ».

Le cas de la dimension 4

Pour terminer, il reste à prouver que la propriété P(4) est vraie, autrement dit à établir l'énoncé suivant.

Proposition 2. *Soient v_1, v_2, v_3 et v_4 quatre vecteurs dans l'espace euclidien à quatre dimensions. Si les six produits scalaires de ces vecteurs pris deux à deux sont positifs, il existe une base orthonormée de l'espace dans laquelle les seize composantes de ces quatre vecteurs sont positives.*

La démonstration de cette proposition commence par des réductions. Nous pouvons nous ramener à l'étude des cas où les vecteurs satisfont les hypothèses supplémentaires suivantes :

(H1) *Aucun des vecteurs v_i n'est nul, et les demi-droites $\mathbb{R}_+ v_i$ sont toutes différentes.* Supposons au contraire qu'un des vecteurs soit nul ou que deux demi-droites soient confondues. Un vecteur parmi les v_i est alors superflu : de fait, le problème se résume à montrer l'existence d'une base orthonormée de l'espace à quatre dimensions dans laquelle les composantes des trois autres vecteurs sont toutes positives. Or ces trois vecteurs sont dans un sous-espace à trois dimensions, et le fait que P(3) soit vraie entraîne l'existence d'une base orthonormée de ce sous-espace dans laquelle les composantes des trois vecteurs soient toutes positives. Il ne reste dès lors plus qu'à compléter cette base de l'espace tridimensionnel pour obtenir une base orthonormée de l'espace quadridimensionnel qui réponde aux exigences du problème.

(H2) *Chaque v_i est orthogonal à au moins un autre v_j.* Si par exemple v_1 n'est orthogonal ni à v_2, ni à v_3, ni à v_4, on a $v_1 \cdot v_i > 0$ pour chaque $i \in \{2,3,4\}$. Faisons à présent pivoter le vecteur v_1 dans le plan qu'il engendre avec v_2. Pour cela, nous considérons le vecteur $v^\lambda = v_1 - \lambda v_2$ pour des réels $\lambda \geqslant 0$. Pour $i \in \{2,3,4\}$, si $v_2 \cdot v_i = 0$, alors $v^\lambda \cdot v_i$ reste constamment > 0 et l'on pose $\lambda_i = +\infty$; si au contraire $v_2 \cdot v_i > 0$, alors on pose $\lambda_i = (v_1 \cdot v_i)/(v_2 \cdot v_i)$ et on constate que $v^\lambda \cdot v_i = (\lambda_i - \lambda)(v_2 \cdot v_i)$ est > 0 pour $\lambda \in [0, \lambda_i[$ et s'annule pour $\lambda = \lambda_i$. Le minimum μ de $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ est fini puisque λ_2 l'est ; les trois produits $v^\mu \cdot v_2$, $v^\mu \cdot v_3$ et $v^\mu \cdot v_4$ sont positifs et (au moins) l'un d'entre eux est nul. Le nouveau système (v^μ, v_2, v_3, v_4) a alors aussi des produits scalaires positifs, et il a les mêmes relations d'orthogonalité que l'ancien système (v_1, v_2, v_3, v_4), plus au moins une faisant intervenir son premier vecteur. Enfin si le problème est résolu pour ce nouveau système, il l'est aussi pour l'ancien puisque $v_1 = v^\mu + \mu v_2$ est une combinaison linéaire positive de v^μ et v_2.

(H3) *Aucun des v_i n'est orthogonal aux trois autres.* Sinon, il suffit de résoudre le problème pour les trois autres vecteurs dans l'espace tridimensionnel orthogonal à ce v_i, puis de compléter la base par $v_i/\|v_i\|$.

(H4) *Chaque v_i a pour norme 1.* En effet, aucun v_i n'est nul d'après (H1) ; par ailleurs multiplier un v_i par un scalaire $\lambda > 0$ ne change ni l'hypothèse ni la conclusion de la proposition.

Remarque. Comme le souligne la note 2, notre démonstration de P(3) était un peu cavalière. Si l'on souhaite la remplacer par un argument rigoureux, on peut procéder de la manière suivante. Avec les mêmes arguments que ci-dessus, on suppose (H1) et (H2). Mais alors l'un des trois vecteurs doit être orthogonal aux deux autres. Le raisonnement fait ci-dessus en (H3) ramène alors le problème à P(2), et c'est fini.

Terminons de démontrer la proposition 2. La fin de la preuve, malheureusement éloignée de l'intuition géométrique, va nous contraindre à manœuvrer un 4×4, la *matrice de Gram* des quatre vecteurs. Appelons E l'espace euclidien à quatre dimensions.

Definition. La matrice de Gram de quatre vecteurs v_1, v_2, v_3 et v_4 de E est la matrice symétrique G, à quatre lignes et quatre colonnes, de terme général $g_{ij} = v_i \cdot v_j$.

Supposons avoir choisi une base orthonormée dans E. On peut alors considérer la matrice carrée V dont la i-ième colonne est formée des composantes de v_i, et on voit facilement que $G = {}^tVV$. Il en résulte en particulier que $\det G = \det {}^tV \, \det V = (\det V)^2 \geqslant 0$.

On observera également que connaître la matrice de Gram des quatre vecteurs v_i permet aussi de connaître la norme de toute combinaison linéaire de ces vecteurs, donnée par $\left\|\sum \lambda_i v_i\right\|^2 = \sum \lambda_i \lambda_j g_{ij}$. Ceci a pour conséquence une propriété de rigidité : *si un autre système (w_1, w_2, w_3, w_4) a même matrice de Gram (g_{ij}) que (v_1, v_2, v_3, v_4), il existe une isométrie ρ de E sur lui-même telle que $\rho(v_i) = w_i$ pour chaque i.* Pour établir cette propriété, appelons F (respectivement F') le sous-espace de E engendré par les v_i (respectivement par les w_i). Tout vecteur de F s'écrit $\sum \lambda_i v_i$, et ce de plusieurs façons différentes si les vecteurs v_i sont liés ; on peut néanmoins sans ambiguïté lui associer le vecteur $\sum \lambda_i w_i \in F'$, puisque si $\sum \lambda_i v_i = 0$, alors $\left\|\sum \lambda_i w_i\right\|^2 = \sum \lambda_i \lambda_j g_{ij} = \left\|\sum \lambda_i v_i\right\|^2 = 0$, d'où $\sum \lambda_i w_i = 0$. Ceci définit une application linéaire $\rho : \sum \lambda_i v_i \mapsto \sum \lambda_i w_i$ de F dans F' qui préserve la norme euclidienne, car $\left\|\sum \lambda_i w_i\right\|^2 = \sum \lambda_i \lambda_j g_{ij} = \left\|\sum \lambda_i v_i\right\|^2$. L'application ρ est donc une isométrie entre F et F', qui doivent avoir même dimension. Il ne reste qu'à prolonger cette isométrie à l'espace E tout entier en choisissant une isométrie du supplémentaire orthogonal de F sur le supplémentaire orthogonal de F'.

Dans le cas qui nous occupe, on observe de plus que, l'angle formé par chacune des six paires de vecteurs étant aigu, les coefficients de G sont tous positifs. Le lemme suivant fait un pont entre description géométrique et manipulations algébriques.

Lemme. *Soient quatre vecteurs v_1, v_2, v_3 et v_4 dans E ; soit G leur matrice de Gram. Pour qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle les seize composantes de ces quatre vecteurs sont positives, il faut et il suffit qu'il existe une matrice carrée A, à coefficients positifs, telle que ${}^tAA = G$.*

Démonstration. La condition nécessaire est facile (et nous ne l'utiliserons pas) : il suffit de choisir pour i-ième colonne de A les composantes de v_i dans la base en question.

Pour la condition suffisante, on part d'une matrice carrée A à coefficients positifs telle que ${}^tAA = G$. Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Appelons w_i le vecteur dont les coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont données par la i-ième colonne de A ; ainsi G est aussi la matrice de Gram des w_i. Par la propriété de rigidité, il existe une isométrie ρ de E telle que $\rho(v_i) = w_i$. Les composantes de v_i dans la base $\rho^{-1}(\mathscr{B})$ sont alors égales aux composantes de w_i dans la base $\mathscr{B}$. Elles sont donc positives, car ce sont des coefficients de A. □

Revenons à la démonstration de la proposition 2. Notre donnée de départ est celle de quatre vecteurs v_1, v_2, v_3 et v_4 de l'espace à quatre dimensions, formant deux à deux des angles aigus. Nous nous sommes ramenés au cas où ces vecteurs vérifient les hypothèses (H1) à (H3). Nous supposerons en outre que $v_1 \perp v_2$ et $v_3 \perp v_4$; à une permutation des v_i près, c'est la seule possibilité pour satisfaire à la fois (H2) et (H3). La matrice de Gram G de ces quatre vecteurs est à termes positifs, et le lemme dit qu'il suffit de montrer que $G = {}^tAA$ pour une matrice carrée A à coefficients positifs. Nous allons envisager deux cas.

Premier cas. — On suppose qu'une autre relation d'orthogonalité a lieu entre les v_i, par exemple $v_2 \perp v_3$. Par (H4), nous pouvons aussi supposer que $\|v_i\| = 1$ pour chaque i. La matrice de Gram, qui est symétrique, est alors de la forme

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ a & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Pour conclure, il suffit de vérifier que $G = {}^tAA$, où l'on a posé

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{1-\alpha^2-\beta^2}{1-\beta^2}} & 0 & \sqrt{\dfrac{a^2(1-\beta^2)}{1-\alpha^2-\beta^2}} & 0 \\ \dfrac{\alpha}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \sqrt{1-\beta^2} \\ 0 & 0 & \sqrt{\dfrac{1-\alpha^2-\beta^2-a^2(1-\beta^2)}{1-\alpha^2-\beta^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \beta \end{pmatrix} .$$

Remarquons que les coefficients de A ont bien un sens puisque
- les trois produits scalaires a, α et β appartiennent à l'intervalle $[0,1[$ (la valeur 1 est interdite par (H1)) ;
- $1-\alpha^2-\beta^2-a^2(1-\beta^2) = \det G$ est positif comme déterminant d'une matrice de Gram ;
- $a > 0$ car sinon v_3 serait orthogonal à v_1, ce qui contredirait (H3) puisque l'on a déjà $v_2 \perp v_3$ et $v_4 \perp v_3$;
- $1-\alpha^2-\beta^2 \geqslant a^2(1-\beta^2) > 0$, une conséquence des trois points précédents.

Second cas. — On suppose maintenant que $v_1 \perp v_2$ et $v_3 \perp v_4$ sont les deux seules relations d'orthogonalité parmi les quatre v_i. Par (H4), nous supposons aussi $\|v_1\| = \|v_2\| = 1$. (Il est certes loisible de supposer en outre $\|v_3\| = \|v_4\| = 1$, mais cette réduction ne simplifierait pas les calculs que nous allons être amenés à faire.)

Dans une base orthonormée judicieusement choisie, les quatre vecteurs ont pour composantes

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad v_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ 0 \end{pmatrix} , \quad v_4 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} ,$$

où $a\alpha + b\beta + c\gamma = v_3 \cdot v_4 = 0$. La matrice de Gram de ces quatre vecteurs est

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & \alpha \\ 0 & 1 & b & \beta \\ a & b & a^2{+}b^2{+}c^2 & 0 \\ \alpha & \beta & 0 & \alpha^2{+}\beta^2{+}\gamma^2{+}\delta^2 \end{pmatrix} .$$

Les quatre coefficients a, b, α et β de cette matrice sont positifs par hypothèse, et même strictement positifs (sinon il y aurait plus de deux relations d'orthogonalité entre les v_i). De $c\gamma = -a\alpha - b\beta < 0$, on tire $c \neq 0$. Nous allons vérifier que, pour un choix convenable des paramètres $p > 0$ et $q > 0$, on a $G = {}^tAA$, où

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+pc^2}} & 0 & \sqrt{a^2+pc^2} & 0 \\ \sqrt{\dfrac{pc^2}{a^2+pc^2}} & 0 & 0 & \alpha\sqrt{\dfrac{a^2+pc^2}{pc^2}} \\ 0 & \dfrac{b}{\sqrt{b^2+qc^2}} & \sqrt{b^2+qc^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\dfrac{qc^2}{b^2+qc^2}} & 0 & \beta\sqrt{\dfrac{b^2+qc^2}{qc^2}} \end{pmatrix} .$$

Il est facile de voir que les seuls termes de ${}^tAA$ qui ne sont pas trivialement égaux à ceux de la matrice G sont les deux derniers termes sur la diagonale. L'égalité ${}^tAA = G$ se réduit ainsi à deux relations :

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} (a^2+pc^2)+(b^2+qc^2) & = & g_{33} & = & a^2+b^2+c^2 \ ; \\ \alpha^2\,\dfrac{a^2+pc^2}{pc^2} + \beta^2\,\dfrac{b^2+qc^2}{qc^2} & = & g_{44} & = & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 \ . \end{array} \right.$$

La première sera satisfaite dès que $p + q = 1$, et la seconde se simplifie en

$$\frac{1}{p}\,a^2\alpha^2 + \frac{1}{q}\,b^2\beta^2 = c^2(\gamma^2+\delta^2) \ .$$

Appelons $f(p,q)$ le membre de gauche $a^2\alpha^2/p + b^2\beta^2/q$. Lorsque p tend vers $0+$ ou $1-$ et que $q = 1-p$, $f(p,q)$ tend vers $+\infty$; lorsque $p = a\alpha/(a\alpha+b\beta)$ et $q = b\beta/(a\alpha+b\beta)$, on a $f(p,q) = (a\alpha+b\beta)^2 = (-c\gamma)^2 \leqslant c^2(\gamma^2+\delta^2)$. Comme $0 < a\alpha/(a\alpha+b\beta) < 1$, il existe par continuité un $p \in \,]0,1[$ tel que $f(p, 1{-}p) = c^2(\gamma^2+\delta^2)$. Avec cette valeur de p et avec $q = 1-p$, on a donc ${}^tAA = G$. Les valeurs de p et q sont d'ailleurs faciles à expliciter, l'équation étant du second degré. □

Pour finir

Ainsi, on constate un changement à partir de la dimension 5. Il serait évidemment intéressant d'aller un peu plus loin et d'en fournir une explication ; peut-être des lecteurs de L'OUVERT qui sauront rapprocher ce résultat d'autres phénomènes analogues nous feront-ils part de leurs réflexions. En guise de conclusion, nous nous contenterons de proposer une petite généralisation. Au lieu de travailler avec un nombre de vecteurs égal à la dimension de l'espace, on aurait pu s'intéresser à n vecteurs en dimension d. Appelons donc $\mathrm{Q}(n,d)$ la propriété suivante :

Q(n,d) : *Pour tout système de n vecteurs dans $\mathbb{R}^d$, faisant deux à deux des angles aigus, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$ dans laquelle les nd composantes de ces n vecteurs sont positives.*

Nous avons vu que Q$(2,2)$, Q$(3,3)$ et Q$(4,4)$ sont vraies, et notre proposition 1 établit que Q(n,d) est fausse pour $n \geqslant 5$ et $d \geqslant 3$. Qu'en est-il des autres couples (n,d) ? Cette question est laissée en exercice aux lecteurs. Les cas où $d = 2$ sont faciles. Parmi les autres cas, seul celui où $(n,d) = (4,3)$ n'est pas une application du travail déjà fait. Trancher Q$(4,3)$ réclamera un peu d'initiative au lecteur, sans toutefois nécessiter d'idée véritablement nouvelle. Et puisque ce problème concerne quatre vecteurs en trois dimensions, il est bien visuel !

Bibliographie

[1] P.H. DIANANDA (1962), *On non-negative forms in real variables some or all of which are non-negative*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **58**, 17–25.

[2] M. HALL (1962), *Discrete problems*, in A Survey of Numerical Analysis, *John Todd ed., McGraw-Hill.*

Pierre BAUMANN et Michel ÉMERY
Institut de Recherche Mathématique Avancée
CNRS et Université Louis PASTEUR
7, rue René DESCARTES, 67084 Strasbourg Cedex
baumann@math.u-strasbg.fr
emery@math.u-strasbg.fr