

SOMMAIRE

INTRODUCTION	3
Chapitre 1 : PRIORITÉS DES OPÉRATIONS ET EXPRESSIONS LITTÉRALES	5
Chapitre 2 : DISTRIBUTIVITÉS ET CALCUL LITTÉRAL	23
Chapitre 3 : ÉGALITÉ ET COMPARAISON DE FRACTIONS	43
Chapitre 4 : OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS.....	63
Chapitre 5 : NOMBRES RELATIFS	81
Chapitre 6 : PROPORTIONNALITÉ	103
Chapitre 7 : TRIANGLE ET CERCLE CIRCONSCRIT	127
Chapitre 8 : SYMÉTRIE CENTRALE	143
Chapitre 9 : ANGLES DU TRIANGLE.....	163
Chapitre 10 : ANGLES ET SYMÉTRIE	183
Chapitre 11 : PARALLÉLOGRAMMES.....	199
Chapitre 12 : PARALLÉLOGRAMMES PARTICULIERS.....	219
Chapitre 13 : AIRES	237
Chapitre 14 : SOLIDES	259
BIBLIOGRAPHIE	283

INTRODUCTION

Présentation de la brochure

La présente brochure, fruit de quatre années de travail, a été rédigée par le groupe « Ressources pour le programme de 5^{ème} » de l'IREM de Strasbourg composé de : Anne ARCHIS – Gilles BOURDENET – Jean-Luc GASSER – Samuel GONZALES – Claude PELNARD – Rémi REGOURD – Gabrielle ROESCH – Michèle ZIEGLER. Elle couvre la quasi totalité du programme de cinquième. Pour des raisons de lisibilité, nous avons choisi de la présenter sous formes de chapitres, à l'instar des manuels scolaires. Nous conseillons cependant de ne pas traiter un chapitre donné en une seule fois, mais d'y revenir tout au long de l'année. Il en est ainsi par exemple du chapitre « distributivité et calcul littéral » qui peut paraître très dense, et qui dans notre optique, doit être travaillé sur toute l'année scolaire afin d'être correctement assimilé par l'élève. Notons que les activités et les exercices de cette brochure ont été testés dans nos différentes classes.

Chacun des chapitres est organisé de la manière suivante :

- Il débute par des activités qui doivent permettre à l'enseignant d'avoir un accès aux représentations des élèves, le plus souvent par le biais des erreurs commises. La capacité de verbaliser, de repérer ses erreurs et, enfin, de les corriger, joue un rôle fondamental dans la construction du savoir. Il est donc essentiel que chaque élève puisse s'exprimer au travers de ces activités, et qu'il y ait aussi confrontation entre les différents points de vue. Le temps consacré à l'analyse et au traitement des erreurs permet de faire évoluer les représentations des élèves et de redonner confiance à ceux qui sont les plus en difficulté.
Un commentaire accompagne chaque activité pour en préciser les objectifs et donner des indications sur sa gestion en classe.
- Il se poursuit par un cours qui se veut le plus complet possible.
- Suit une partie « points de repère-méthodes » à laquelle on peut renvoyer l'élève pour la résolution de certains exercices. Il n'y s'agit pas d'institutionnaliser une méthode, mais d'analyser de manière détaillée et raisonnée une démarche possible pour résoudre ces exercices.
- Sont proposés des exercices variés classés par thèmes et commentés permettant de donner du sens aux notions étudiées.
- Les chapitres numériques s'achèvent par une partie intitulée « calculs à entretenir ». Il s'agit d'une liste, non exhaustive, de calculs qui peuvent revenir de manière récurrente tout au long de l'année scolaire. Nous donnons plus loin un mode de fonctionnement possible.

Cette brochure est accompagnée d'un CD-ROM contenant le texte intégral.

Nous tenons à remercier Alexandra CARMINATI, Secrétaire de l'IREM, pour l'excellent travail de mise en page.

Les auteurs

Conscients de la nécessité pour l'élève de pratiquer le calcul mental automatisé ou réfléchi, tout au long de l'année, nous avons élaboré un outil de travail et un mode de fonctionnement que nous décrivons maintenant.

- | | | | | | |
|----------|--|--|--|--|--|
| Question | | | | | |
| Réponse | | | | | |
| Question | | | | | |
| Réponse | | | | | |

- Un des avantages d'une telle grille est que, d'une séance à l'autre, l'élève peut mettre à profit la correction d'un calcul pour traiter un calcul similaire donné ultérieurement. Il peut revoir les calculs à la maison et repérer ses erreurs récurrentes.

Le moment de la correction de chaque calcul donne tout son sens à ce travail. Dans cette optique, la correction elle doit prendre en compte les différentes procédures existant dans la classe, analyser les erreurs commises par chaque élève (cela peut sembler fastidieux, mais le plus souvent il y a des « classes d'erreurs »). On privilégiera toujours le sens du calcul à son aspect technique.

Il faut prévoir entre cinq et dix minutes en début d'heure pour l'ensemble, correction comprise. La durée est cependant variable : la correction de certains calculs nécessite parfois de revenir sur des notions à consolider. Ce temps a priori « perdu » est largement gagné par la suite. Cette méthode permet de consolider, d'entretenir ou d'introduire de nombreuses notions.

CHAPITRE 1

PRIORITÉS DES OPÉRATIONS ET EXPRESSIONS LITTÉRALES

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Savoir effectuer une suite d'opérations en respectant les priorités.
- Écrire une expression correspondant à une succession donnée d'opérations.
- Écrire la solution d'un problème sous la forme d'une suite d'opérations.
- Reconnaître une somme et un produit.
- Connaître et utiliser les conventions usuelles de simplification d'écriture.
- Donner du sens aux expressions littérales à l'aide de programmes de calcul.
- Donner du sens aux expressions littérales à l'aide de schémas fléchés.
- Donner du sens aux expressions littérales en remplaçant la variable par une valeur numérique.
- Donner du sens aux expressions littérales en utilisant le registre géométrique.

REPÈRES POUR LE CONTENU DU COURS

- Vocabulaire lié aux opérations courantes.
- Règles de priorité dans une suite d'additions et de soustractions (ou de multiplications et de divisions).
- Règles de priorité dans un calcul avec parenthèses.
- Règles de priorité dans un calcul sans parenthèses.
- Parenthèses cachées.

ACTIVITÉ

ACTIVITÉ 1 : PRIORITÉS

- 1) Sans calculatrice, effectuer les calculs suivants :
 $(5 \times 7) + 11$; $5 \times (7 + 11)$; $5 + (7 \times 11)$; $(5 + 7) \times 11$;
 $(20 \times 6) - 3$; $20 \times (6 - 3)$; $20 - (6 \times 3)$; $(20 - 6) \times 3$;

- 2) On considère les calculs suivants :
 $5 \times 7 + 11$; $5 + 7 \times 11$; $20 \times 6 - 3$; $20 - 6 \times 3$
 a) Quel lien y a-t-il entre ces calculs et ceux de la question 1 ?
 b) A l'aide d'une calculatrice scientifique, effectuer les quatre calculs.
 c) Comparer les résultats obtenus aux questions 1 et 2. Quels sont les calculs qui donnent le même résultat ?

- 3) La calculatrice scientifique effectue les calculs en respectant les règles courantes appliquées en mathématiques : par convention, les parenthèses autour des multiplications peuvent ne pas être écrites. Dans un calcul sans parenthèses, on effectue les multiplications et les divisions avant les additions et les soustractions. En utilisant cette règle, effectuer les calculs suivants. Vérifier avec la calculatrice :

$2 + 3 \times 9$	$4 \times 6 + 8$	$10 + 12 \times 0,25$
$0,3 \times 4 + 1,17$	$3,8 + 0,9 \times 6$	$0,6 \times 0,9 + 3,1$

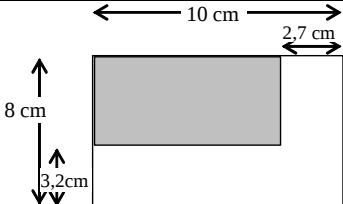
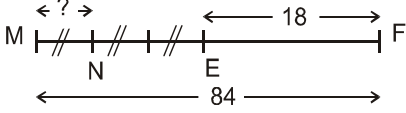
Objectifs et commentaires

Comprendre qu'en l'absence de parenthèses, une règle est nécessaire pour effectuer un calcul comportant une multiplication et une autre opération (addition ou soustraction). Dégager cette règle de priorité à l'aide de comparaisons de résultats et appliquer la règle dégagée à d'autres calculs. Il est important de dire aux élèves que cette règle est universelle à tous les mathématiciens, qu'elle a été établie de telle sorte qu'elle soit cohérente avec tout ce qu'ils vont étudier plus tard et, qu'en conséquence, c'est la seule à pouvoir être utilisée.

ACTIVITÉ 2 : PROBLÈMES ET SOLUTIONS EN UNE EXPRESSION

Compléter le tableau suivant :

Énoncé	Calculs en une seule expression
1) J'ai acheté un pain à 1,10 € et quatre croissants à 0,60 € l'un. <i>Calculer le montant de la dépense.</i>	Montant de la dépense (en euros) : $(4 \times 0,60 \text{ €}) + 1,10 \text{ €} = 3,50 \text{ €}$ ou $4 \times 0,60 \text{ €} + 1,10 \text{ €} = 3,50 \text{ €}$
2) J'achète un livre à 12 € et une calculatrice à 15 €. Je paie avec un billet de 50 €. <i>Quelle somme d'argent me rend-t-on ?</i>	
3) J'achète 4 cahiers et 4 protège-cahiers. Un cahier coûte 1,20 € et un protège-cahier coûte 0,45 €. <i>Calculer le montant de la dépense.</i>	
4) Dans une école, il y a 20 salles. Dans chaque salle, il y a 15 tables. A chaque table, on peut faire asseoir 2 élèves. <i>Combien y a-t-il de places assises dans cette école ?</i>	
5) Pour décorer leurs vitrines, les 17 commerçants du boulevard de Lyon et les 7 commerçants de la rue de Molsheim se sont répartis également 84 m de guirlande électrique. <i>De quelle longueur chacun dispose-t-il ?</i>	

6)  Quelle est l'aire du rectangle gris ?	
7)  L'unité de longueur est le cm. Calculer la distance MN.	

Objectifs et commentaires

- Écrire des expressions numériques comportant plusieurs opérations à partir d'un texte de problème.
- Écrire ces expressions avec le moins de parenthèses possibles.

On peut d'abord demander à l'élève de résoudre le problème pas à pas au brouillon, pour travailler le sens des opérations, et pour que la signification de chaque réponse intermédiaire, dans le contexte du problème, soit précisée. Ensuite, les calculs sont écrits en une expression où les seuls nombres utilisés sont ceux donnés dans l'énoncé, chaque calcul intermédiaire étant mis entre parenthèses. Pour finir, on demande à l'élève d'écrire l'expression avec le moins de parenthèses possibles. Il applique ainsi les règles de priorités pour supprimer certaines parenthèses. La discussion qui s'engage souvent dans les classes permet de faire comprendre que supprimer certaines parenthèses change la signification du calcul.

Les problèmes proposés permettent non seulement d'aborder la règle de priorité de la multiplication et de la division sur l'addition et la soustraction, mais aussi l'associativité de la multiplication et de différencier $a - b$ de $b - a$.

ACTIVITÉ 3 : RECONNAISSANCE DE FORMES

Voici un point de vocabulaire

Lorsque, dans une expression comportant une suite d'opérations, la **dernière opération à effectuer** en respectant les règles de priorité des opérations est une **addition (ou une soustraction)**, on dit que cette expression est **une somme (ou une différence) de termes**.

Lorsque, dans une expression comportant une suite d'opérations, la **dernière opération à effectuer** en respectant les règles de priorité des opérations est une **multiplication**, on dit que cette expression est **un produit de facteurs**.

- 1) Entourer le signe correspondant à la dernière opération à effectuer dans la colonne « expression » puis compléter le tableau :

Expression	Nature	nombre de termes/ facteurs ?	détails des termes ou facteurs
$12 + 3$	somme	deux termes	12 et 3 sont les deux termes
52×6	produit	deux facteurs	52 et 6 sont les deux facteurs
$3 \times (12 - 8)$			
$6 + 8 \times 14$			
$(42 - 24) \times 11$			
$25 \times 13 + 15 \times 14$			
$(41 - 19) \times (25 - 8)$			
	produit		11 + 4 et 9 sont les deux ...
$..... \times \times$			25 et 13 + 15 et 14 sont les trois ...
	somme		15 $\times$ 11 et 16 sont les deux ...
	produit	deux	23 + 6 et 5 + 7 sont les deux ...
$6 \times 5 + 7 + 9 \times 8$			

2) Compléter le tableau suivant :

Expression en langue française	Nature	Nombre de termes/facteurs	Détails des termes ou facteurs	Expression en langage mathématique
la somme de 15 et du produit de 5 par 7				
le produit de 8 par la somme de 19 et de 4				
				$12 - 7 \times 4$
				$\frac{12}{5 + 1}$

3) Écrire sous forme d'une expression numérique les nombres suivants :

Le nombre *A* est égal au **produit** de 56 **par** 27.

Le nombre *B* est égal à la **somme** de 15 **et** du produit de 5 par 7.

Le nombre *C* est égal à la somme du produit de 6 par 7 et de 12.

Le nombre *D* est égal au produit de 8 par la somme de 19 et de 4.

Le nombre *E* est égal au produit de la différence entre 15 et 7 par 9.

Objectifs et commentaires

- Savoir reconnaître si une expression comportant plusieurs opérations est une somme ou un produit.
- Utiliser le vocabulaire « terme » et « facteur ».
- Savoir passer de l'expression donnée en langue naturelle à l'expression symbolique.

La structure du tableau facilite le changement de registre du symbolique à la langue naturelle (somme, terme, facteur, produit). On peut suggérer d'effectuer le calcul pour mieux repérer quelle est la dernière opération à effectuer, celle-ci déterminant la nature de l'expression donnée.

Ce travail favorise la reconnaissance des sommes et des produits. Il est indispensable pour une bonne approche des notions de développement et de factorisation, de la cinquième à la troisième : de nombreux élèves développent et factorisent de façon mécanique, sans vraiment donner du sens à ce qu'ils font. Il est fréquent de voir des élèves développer au lieu de factoriser et vice-versa ; les techniques semblent alors connues, mais elles sont mal utilisées.

D'autre part, la demande d'explicitation de termes et de facteurs permet de travailler ce vocabulaire et conduit l'élève à considérer des expressions telles $12 - 8$ ou 25×14 comme un seul nombre.

Le travail est fait dans les deux sens : reconnaissance et écriture de sommes et de produits. Pour l'écriture, l'oubli éventuel de parenthèses (fréquent chez certains élèves) entraîne un changement de nature de l'expression considérée.

La deuxième partie de l'activité permet de travailler le changement de registre entre l'écriture symbolique et la langue naturelle.

Dans la troisième partie de l'activité, on effectue le changement de registre de la langue naturelle vers l'écriture symbolique.

La segmentation de la phrase qui ne faisait pas l'objet de la première partie va être déterminante pour la réussite de la tâche. Dans la pratique, les élèves segmentent la phrase sans appliquer de règles particulières ; par exemple, dans la phrase « somme du produit de 6 par 7 et de 12 », ils séparent la partie langue naturelle de celle des nombres « somme du produit / de 6 par 7 et de 12 », ce qui peut donner comme réponse $6 + 7 \times 12$! On voit bien les difficultés auxquelles les élèves vont être confrontés, pour distinguer dans une phrase les termes d'une somme ou les facteurs d'un produit. Pour éviter d'obtenir des réponses très variées et pour beaucoup fausses, il faut très rapidement leur donner un moyen d'identifier les « mots clés ». C'est l'association du mot « somme » au mot « et » ou du mot « produit » au mot « par » qui va permettre la bonne segmentation de la phrase : demander aux élèves d'entourer le premier mot (« somme » ou « produit ») et le mot associé (« et » ou « par ») fait apparaître clairement les parties de la phrase correspondant aux termes ou aux facteurs et sera une aide appréciable pour les élèves. A partir de ces reconnaissances, le travail est simplifié. Ces « mots clés » sont en gras dans les trois premières expressions.

ACTIVITÉ 4 : PROGRAMMES DE CALCUL

Dans une expression comportant des calculs avec des lettres qui désignent des nombres, le signe $\times$ peut ne pas être écrit :

- Entre un **nombre et une lettre**, le nombre s'écrit en premier : $3 \times x$ s'écrit $3x$
 $x \times 4$ s'écrit $4x$
- Entre **deux lettres** : $a \times b$ s'écrit ab
- Entre un **nombre** et une **parenthèse ouvrante** : $3 \times (x + 4)$ s'écrit $3(x + 4)$
 $(x + 4) \times 5$ s'écrit $5(x + 4)$

1) Compléter le tableau ci-dessous en donnant, pour la dernière colonne, l'expression simplifiée. :

Choisir un nombre	2	0,6	x
Ajouter 7 à ce nombre			
Multiplier le résultat obtenu par 3			
Ajouter 1			

2) Compléter le tableau ci-dessous en donnant, pour la dernière colonne, l'expression simplifiée. :

Choisir un nombre	2	0,6	x
.....			$3x$
Ajouter 2 au résultat			
Multiplier le résultat obtenu par 5			

3) a) Compléter le tableau ci-dessous en donnant, pour la dernière colonne, l'expression simplifiée. :

Choisir un nombre	2	0,6	x
.....			
.....			
.....			$2(3x - 1)$

Objectifs et commentaires

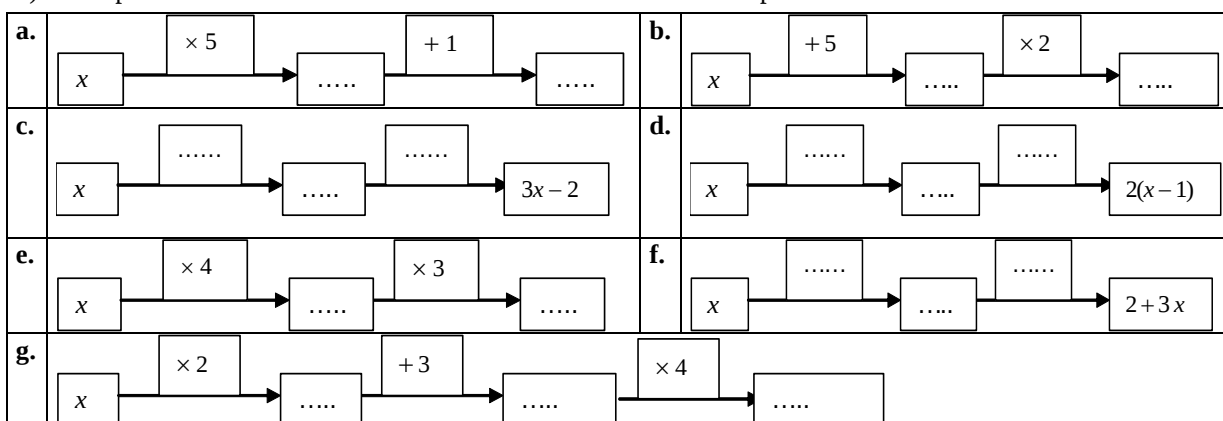
- Travailler le changement de registre du symbolique vers la langue naturelle et vice versa.
- Faire fonctionner un programme de calcul dans les deux sens.
- Continuer à travailler les conventions usuelles d'écriture.

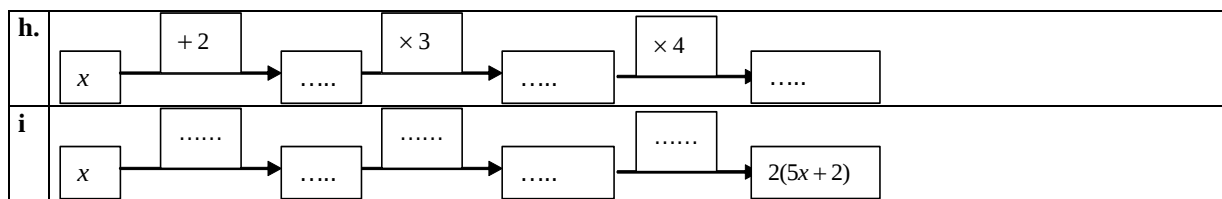
La présentation sous forme de tableau permet une bonne confrontation numérique-littéral. L'expression littérale prend du sens à travers la langue naturelle, l'élève est amené à écrire lui-même des expressions littérales ; dans les deux premiers cas, l'introduction de la lettre x , qui remplace les deux nombres choisis auparavant, permet de généraliser le procédé.

Dans le troisième cas, le travail est effectué dans l'autre sens. Il faut retrouver les instructions du programme, connaissant l'expression littérale finale.

ACTIVITÉ 5 : SCHÉMAS FLÉCHÉS

1) Compléter les schémas fléchés suivants en utilisant l'écriture simplifiée :





Objectifs et commentaires

- Comprendre, utiliser, se familiariser avec les conventions d'écriture.
- Voir une expression littérale comme un enchaînement d'opérations.

Dans cet exercice, on effectue des changements de registres, du registre symbolique de l'écriture littérale au registre graphique des schémas fléchés. Ces changements de registre permettent une bonne appréhension et compréhension des expressions littérales considérées.

Les schémas fléchés permettent de considérer une expression littérale comme une suite d'opérations (ce qui préfigure ce qui sera vu en lycée avec la composition des fonctions). Ici aussi, on travaille dans les deux sens : trouver l'expression connaissant le schéma, trouver le schéma connaissant l'expression. Dans cette phase de travail, l'élève est aussi confronté de façon active à la simplification d'écriture. Il doit prendre des initiatives, comme écrire $5x$ pour $x \times 5$, mettre des parenthèses autour de $x + 5$ pour le multiplier par 2, et, ensuite écrire $2(x + 5)$ pour $(x + 5) \times 2$.

Ces schémas fléchés seront aussi très utiles pour la résolution des équations du type $ax + b = c$, équations dont la résolution est directement liée au sens des opérations.

COURS

VOCABULAIRE

a et b désignent deux nombres.

$a + b$ est la **somme de a et de b** .

$a \times b$ est le **produit de a par b** .

$a - b$ est la **différence entre a et b** .

$\frac{a}{b}$ ou $a \div b$ est le **quotient de a par b**

Les nombres a et b sont appelés les **termes** de cette somme.

Les nombres a et b sont appelés les **facteurs** de ce produit

Les nombres a et b sont appelés les **termes** de cette différence.

Le nombre b doit être **différent de zéro**.

SUITES D'ADDITIONS ET DE SOUSTRATIONS

Propriété 1 : Dans une suite d'additions et de soustractions, en l'absence de parenthèses, on effectue les calculs de la gauche vers la droite.

Exemple

$$25 - 6 - 7 + 3$$

$$= 19 - 7 + 3$$

$$= 12 + 3$$

$$= 15$$

Cette suite d'opérations ne comporte que des additions et des soustractions.

On commence par effectuer le calcul le plus à gauche, c'est-à-dire $25 - 6$.

On remplace $25 - 6$ par 19 et on recopie le reste du calcul. On effectue alors $19 - 7$.

On remplace $19 - 7$ par 12 et on recopie le reste du calcul.

Remarque : Ce calcul peut aussi se lire ainsi : on part de 25, on enlève 6, on enlève 7 et on ajoute 3. Il peut alors être remplacé par : on part de 25, on ajoute 3, on enlève 6 puis on enlève 7, c'est-à-dire $25 + 3 - 6 - 7$.

SUITES DE MULTIPLICATIONS ET DE DIVISIONS

Propriété 2 : Dans une suite de multiplications et de divisions, en l'absence de parenthèses, on effectue les calculs de la gauche vers la droite.

Exemple

$$48 \div 6 \div 2 \times 10$$

Cette suite d'opérations ne comporte que des multiplications et des divisions.

On commence par effectuer le calcul le plus à gauche, c'est-à-dire $48 \div 6$

$$\begin{aligned}
 &= \underline{8 \div 2} \times 10 && \text{On remplace } 48 \div 6 \text{ par } 8 \text{ et on recopie le reste du calcul. On effectue alors } 8 \div 2. \\
 &= 4 \times 10 && \text{On remplace } 8 \div 2 \text{ par } 4 \text{ et on recopie le reste du calcul.} \\
 &= 40
 \end{aligned}$$

Remarque : Diviser un nombre par 6 puis le résultat par 2 revient à diviser le nombre de départ par 12. Ce calcul peut donc aussi s'effectuer ainsi : $48 \times 10 \div 6 \div 2 = (48 \times 10) \div (6 \times 2) = 480 \div 12 = 40$.

PRIORITÉ DES OPÉRATIONS EN L'ABSENCE DE PARENTHÈSES

Propriété 3 : Dans une suite d'opérations, en l'absence de parenthèses, on effectue d'abord les multiplications et les divisions.

Ensuite, on effectue les additions et les soustractions restantes de gauche à droite.

Exemples

- 1) $12 - \underline{2 \times 5}$ Cette suite d'opérations ne comporte pas de parenthèses. On effectue d'abord la multiplication.
 $= 12 - 10$ On remplace 2×5 par 10.
 $= 2$
- 2) $12 - \underline{\frac{15}{3}}$ Cette suite d'opérations ne comporte pas de parenthèses. On effectue d'abord la division.
 $= 12 - 5$ On remplace $\frac{15}{3}$ par 5.
 $= 7$

PRIORITÉ DES OPÉRATIONS EN PRÉSENCE DE PARENTHÈSES

Propriété 4 : Dans une suite d'opérations comportant des parenthèses, on effectue d'abord les opérations entre parenthèses. A l'intérieur de ces parenthèses, on respecte les règles **des propriétés 1, 2 et 3**.

S'il y a des parenthèses emboîtées, on commence par effectuer les calculs situés dans les parenthèses les plus intérieures.

Exemples

- 1) $7 \times (12 - 2)$ Cette suite d'opérations comporte des parenthèses. On effectue d'abord le calcul entre parenthèses.
 $= 7 \times 10$ On remplace $12 - 2$ par 10.
 $= 70$
- 2) $2 \times (10 - \underline{2 \times 3})$ Cette suite d'opérations comporte des parenthèses. Dans le calcul entre parenthèses, on commence par effectuer la multiplication.
 $= 2 \times (10 - 6)$ On remplace 2×3 par 6. On effectue alors le calcul qui reste entre parenthèses.
 $= 2 \times 4$ On remplace $10 - 6$ par 4.
 $= 8$
- 3) $25 - [12 - (5 - 3)]$ Cette suite d'opérations comporte des parenthèses emboîtées. On commence par effectuer le calcul situé dans les parenthèses les plus intérieures.
 $= 25 - (12 - 2)$ On remplace $5 - 3$ par 2. On effectue alors le calcul qui reste entre parenthèses.
 $= 25 - 10$ On remplace $12 - 2$ par 10.
 $= 15$

PARENTHÈSES CACHÉES

Remarque : Les écritures suivantes comportent des parenthèses cachées :

$$\frac{12}{6-3} \text{ signifie } \frac{12}{(6-3)} \text{ ou } 12 \div (6-3) \qquad \frac{7+5}{3} \text{ signifie } \frac{(7+5)}{3} \text{ ou } (7+5) \div 3.$$

POINTS DE REPÈRE / MÉTHODES

Reconnaître si une expression est une somme ou un produit

Méthode générale : on cherche quelle est la dernière opération à effectuer lorsqu'on calcule l'expression en respectant les règles de priorité. On précise ensuite quels sont les termes ou les facteurs.

Exemples

Chacune des expressions suivantes est-elle une somme ou un produit ?

$$A = 7 + 3 \times 2$$

$$B = (7 + 3) \times 2$$

$$C = 9 \times 5 + (7 + 3) \times 2$$

$A = 7 + 3 \times 2$	On repère les opérations utilisées : une addition et une multiplication. Il n'y a pas de parenthèses. On effectue donc en premier la multiplication.
$A = 7 + 6$	La dernière opération à effectuer est une addition.

Comme la dernière opération à effectuer est une addition, l'expression A est une somme.

Plus précisément : A est la somme des deux termes 7 et 6 ou encore,
 A est la somme des deux termes 7 et 3×2 .

Conclusion : $7 + 3 \times 2$ est la somme des deux termes 7 et 3×2 .

$B = (7 + 3) \times 2$	On repère les opérations utilisées : une addition et une multiplication. Il y a des parenthèses. On effectue donc en premier le calcul placé dans les parenthèses.
$B = 10 \times 2$	La dernière opération à effectuer est une multiplication.

Comme la dernière opération à effectuer est une multiplication, l'expression B est un produit.

Plus précisément : B est le produit des deux facteurs 10 et 2 ou encore,
 B est le produit des deux facteurs $7 + 3$ et 2.

Conclusion : $(7 + 3) \times 2$ est le produit des deux facteurs $(7 + 3)$ et 2.

$C = 9 \times 5 + (7 + 3) \times 2$	On repère les opérations utilisées : des additions et des multiplications. Il y a des parenthèses. On effectue donc en premier le calcul placé dans les parenthèses.
$C = 9 \times 5 + 10 \times 2$	Il reste deux multiplications et une addition : on effectue d'abord les multiplications.
$C = 45 + 20$	La dernière opération à effectuer est une addition.

Comme la dernière opération à effectuer est une addition, l'expression C est une somme.

Plus précisément : C est la somme des deux termes 45 et 20 ou encore,
 C est la somme des deux termes 9×5 et 10×2 ou encore,
 C est la somme des deux termes 9×5 et $(7 + 3) \times 2$.

Conclusion : $9 \times 5 + (7 + 3) \times 2$ est la somme des deux termes 9×5 et $(7 + 3) \times 2$.

Traduire en français une expression

Vocabulaire

En français, on dit : « **somme de et de** ». Par exemple, $3 + 4$ est la **somme de 3 et de 4**.
« **produit de ... par ...** ». Par exemple, 3×4 est le **produit de 3 par 4**.

Exemples

Traduire en français les expressions $D = 9 + 12 \times 5$ et $E = (15 - 3) \times 4$.

Solution

$D = 9 + 12 \times 5$	On repère les opérations utilisées : une addition et une multiplication. Il n'y a pas de parenthèses.
$D = 9 + 12 \times 5$	En respectant les règles de priorité, on remarque que la dernière opération à effectuer est une addition.
$D = \boxed{9} + \boxed{12 \times 5}$	L'expression D est donc la somme de deux termes : 9 et 12×5
$D = \boxed{9} + \boxed{12 \times 5}$	L'expression D est donc la somme de $\boxed{9}$ et du $\boxed{\text{produit de 12 par 5}}$.

Conclusion : L'égalité $D = 9 + 12 \times 5$ se traduit par : « D est la somme de 9 et du produit de 12 par 5 ».

$E = (15 - 3) \times 4$	On repère les opérations utilisées : une soustraction entre parenthèses et une multiplication.
$E = (15 - 3) \times 4$	En respectant les règles de priorité, on remarque que la dernière opération à effectuer est une multiplication.
$E = \boxed{(15 - 3)} \times \boxed{4}$	L'expression E est donc le produit de deux facteurs : $15 - 3$ et 4 .
$E = \boxed{(15 - 3)} \times \boxed{4}$	L'expression E est donc le produit de <u>la différence entre 15 et 3</u> par <u>4</u> .

Conclusion : L'égalité $E = (15 - 3) \times 4$ se traduit par : « E est le produit de la différence entre 15 et 3 par 4 ».

Traduire en une expression numérique une phrase en français

Exemples

a) Traduire en une expression numérique la phrase suivante :

Le nombre F est le produit de 5 par la somme de 14 et de 7.

Solution

Le nombre F est le produit de 5 par la somme de 14 et de 7.	On souligne « produit de ... par ... »
Le nombre F est le produit de 5 par la somme de 14 et de 7.	F est un produit , l'opération principale est donc une multiplication : $F = \dots \times \dots$
Les deux facteurs sont : $\boxed{5}$ et <u>la somme de 14 et de 7</u>	$F = \boxed{5} \times (\dots)$
Le deuxième facteur s'écrit : $\boxed{14 + 7}$	d'où l'expression : $F = 5 \times (14 + 7)$

Conclusion : « F est le produit de 5 par la somme de 14 et de 7 » se traduit par : $F = 5 \times (14 + 7)$.

b) Traduire de même : Le nombre G est la somme du produit de 5 par 9 et de 8.

Solution

Le nombre G est la somme du produit de 5 par 9 et de 8	On souligne « somme de ... et de ... », qui est ici : « somme du ... et de ... ».
Le nombre G est la somme du produit de 5 par 9 et de 8	G est un somme , l'opération principale est donc une addition : $G = \dots + \dots$
Les deux termes sont : <u>le produit de 5 par 9</u> et $\boxed{8}$	$G = (\dots) + \boxed{8}$
Le premier terme s'écrit : $\boxed{5 \times 9}$	d'où l'expression : $G = (5 \times 9) + 8$ La multiplication est prioritaire sur l'addition, donc : $G = 5 \times 9 + 8$

Conclusion : « G est la somme du produit de 5 par 9 et de 8 » se traduit par : $G = 5 \times 9 + 8$.

EXERCICES

CALCULS

L'exercice 1 est un exercice purement technique permettant de vérifier les acquis en ce qui concerne l'application des propriétés. On donnera régulièrement des calculs de ce type pour entretenir ces acquis. Certains peuvent être travaillés durant les séances de calcul réfléchi.

1. Effectuer :

- a) $1,6 + 3 \times 0,8$; $(1,6 + 3) \times 0,5$; $2 + 3 \times (5 - 2 \times 1,3)$.
 b) $0,4 \times 7 + 1,2$; $1,2 + 0,4 \times (0,7 + 1,2)$; $0,8 \times 1,1 - 0,5$.
 c) $26 - 24 \times 0,25$; $(7 - 2,3) \times 4 - 1,2 + 5$; $3,2 - 0,3 \times (5 - 2,9)$.

Les exercices 2 à 7 sont des exercices classiques et motivants. Certains, dont la résolution demande patience et persévérance, peuvent occuper les élèves les plus rapides de façon autonome.

2. Placer les parenthèses manquantes dans les expressions ci-dessous :

- a) pour obtenir 55 $5 \times 3 + 8$.

- b) pour obtenir 56 $12 - 5 \times 8$.
 c) pour obtenir 37 $9 + 4 \times 7$.
3. Placer les parenthèses manquantes dans les expressions ci-dessous :
 a) pour obtenir 29 $7 + 2 \times 8 + 3$.
 b) pour obtenir 26 $3 \times 4 + 2 \times 7$.
 c) pour obtenir 49 $3 + 4 \times 2 + 5$.
4. Placer les parenthèses manquantes dans les expressions ci-dessous :
 a) pour obtenir 71 $3 \times 2 + 5 \times 5 - 10$ b) pour obtenir 17 $2 \times 4 + 3 \times 12 - 9$.
 c) pour obtenir 163 $5 \times 3 + 2 \times 4 + 9 \times 7$ d) pour obtenir 767 $5 \times 3 - 2 \times 9 \times 7 - 4$.
5. Placer les parenthèses manquantes dans les expressions ci-dessous :
 a) pour obtenir 9 $8 \div 2 + 5$ b) pour obtenir 1 $8 \div 2 + 6$.
 c) pour obtenir 4 $8 \times 8 \div 4 \times 4$ d) pour obtenir 64 $8 \times 8 \div 4 \times 4$.
6. Dans chacune des égalités ci-dessous, compléter par un des nombres 2, 3, 5, 6 ou 7 pour qu'elle soit exacte :
 $\dots + \dots \times \dots = 47$ $\dots \times \dots \times \dots = 60$ $(\dots + \dots) \times \dots = 60$.
 $\dots \times \dots \div \dots = 60$ $(\dots + \dots) \times \dots = 26$ $\dots \times \dots + \dots \times \dots = 31$.
7. Dans chacune des égalités ci-dessous, compléter les points de suspension par une des quatre opérations usuelles et placer des parenthèses pour que l'égalité obtenue soit vraie :
 $2 \dots 2 \dots 2 \dots 2 = 3$ $2 \dots 2 \dots 2 \dots 2 = 6$ $3 \dots 3 \dots 3 \dots 3 = 4$ $3 \dots 3 \dots 3 \dots 3 = 8$.
 $4 \dots 4 \dots 4 \dots 4 = 6$ $4 \dots 4 \dots 4 \dots 4 = 28$ $5 \dots 5 \dots 5 \dots 5 = 5$ $5 \dots 5 \dots 5 \dots 5 = 6$.

Dans les exercices 8 et 9, on reste dans le registre symbolique, on travaille l'équivalence entre le symbole opératoire de la division et le trait de fraction. La vérification à la calculatrice permet de détecter des erreurs de représentation (oublis de parenthèses). Dans l'exercice 1, on travaille aussi la correspondance entre multiplier par 0,5 et diviser par 2, multiplier par 0,1 et diviser par 10, multiplier par 0,2 et diviser par 5.

8. a) Effectuer :
 $A = 8 + 24 \times 0,5$ $B = 8 + 24 \times 0,1$ $C = 0,2 \times 24 + 8$
- b) Chacun des nombres D , E et F est égal à un des nombres précédents. Établir les correspondances sans effectuer :
 $D = 8 + \frac{24}{5}$ $E = 8 + \frac{24}{2}$ $F = \frac{24}{10} + 8$
- c) Effectuer les calculs ci-dessous :
 $G = \frac{6}{3} + 4 \times 5$ $H = \frac{9+6}{5}$ $I = \frac{24}{5+1}$ $K = \frac{15}{3} + \frac{12}{4}$
9. a) Effectuer :
 $A = \frac{6+12}{3}$ $B = \frac{35}{8+6}$ $C = \frac{27+17}{5+1}$ $D = \frac{48}{3 \times 2}$
- b) Effectuer les opérations de la question a) avec une calculatrice, et comparer aux résultats obtenus en a).
- c) Parmi les expressions suivantes, reconnaître celle qui est égale au nombre A :
 $6 + 12 \div 3$ $6 + (12 \div 3)$ $(6 + 12) \div 3$
- d) Écrire les nombres B , C et D en remplaçant le trait de fraction par le signe de la division $\div$.
- e) Écrire les nombres suivants sous forme fractionnaire :
 $E = (6 + 5) \div 2$ $F = 5 + (9 + 3) \div 4$ $G = (15 - 7) \div (1 + 3)$ $H = 45 \div (3 \times 5)$.

ÉCRIRE DES EXPRESSIONS

L'objectif de l'exercice 10 est de donner du sens à des expressions numériques à travers le registre géométrique. On demande à l'élève de faire le lien entre une expression donnée et le périmètre ou l'aire d'une figure. Des allers-retours entre registres géométrique et symbolique sont alors nécessaires. Dans la question suivante, l'élève doit lui-même écrire l'expression adéquate, il sera ainsi amené à faire le choix de mettre ou non des parenthèses.

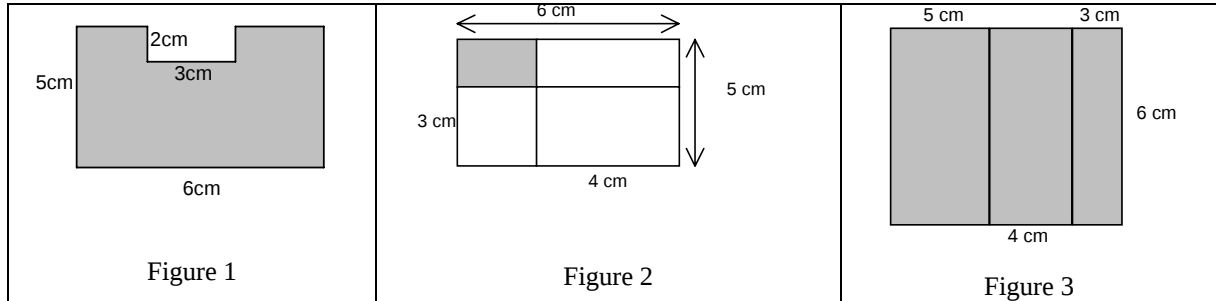
10. Les figures grisées ci-dessous sont toutes formées de rectangles. Les expressions A , B et C suivantes permettent de calculer le périmètre et l'aire de certaines d'entre elles.

$$A = (6 - 4) \times (5 - 3)$$

$$B = 2 \times (6 + 5 + 4 + 3)$$

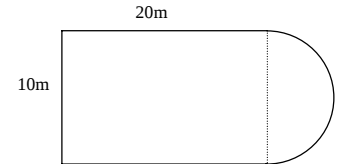
$$C = 2 \times 5 + 2 \times 2 + 2 \times 6.$$

- a) Pour chaque expression, indiquer ce qu'elle permet de calculer.
b) Pour chaque figure, écrire une expression permettant de calculer son aire et son périmètre.

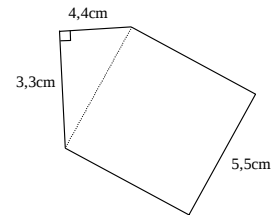


Dans les exercices 11 et 12, l'élève est encore amené à écrire des expressions numériques pour des périmètres et aires de figures données. C'est aussi une occasion de revoir le périmètre du cercle, abordé en classe de 6^{ème}.

11. a) Écrire une expression permettant de calculer le périmètre de la figure ci-contre, composée d'un rectangle et d'un demi-cercle.
b) Calculer cette expression.



12. a) Écrire une expression permettant de calculer le périmètre de la figure ci-contre, composée d'un carré et d'un triangle rectangle.
b) Calculer cette expression.
c) Écrire une expression permettant de calculer l'aire de la figure ci-contre.
d) Calculer cette expression.



DESCRIPTION DES OPÉRATIONS

L'exercice suivant porte sur la reconnaissance de forme. On pourra se reporter au POINT DE REPÈRE / MÉTHODES du cours.

13. Dans les expressions ci-dessous, entourer chacun des termes en vert s'il s'agit d'une somme, entourer chacun des facteurs en rouge s'il s'agit d'un produit :

$$5 + 6 \times 11$$

$$19 \times 14 + 25$$

$$6 + 15 + 18$$

$$2 \times 9 + 3 + 5 \times 6$$

$$(12 + 15) \times (20 - 5)$$

$$9 \times 5 + 6 \times 4$$

$$5 \times 9 \times 13$$

$$3 \times (6 + 7) \times 7$$

Dans les exercices 14 et 15, on passe du registre symbolique à la langue naturelle. En début d'apprentissage, on peut se contenter, par exemple pour A , de la réponse : « A est la somme de 15 et de 6×4 » et réserver les traductions plus complètes aux exercices ultérieurs.

Dans les exercices 16 à 19, on travaille le passage dans l'autre sens : de la langue naturelle à l'écriture symbolique.

14. Traduire les suites d'opérations ci-dessous en français, en utilisant les expressions : « somme de ... et de ... » ou « différence entre ... et ... » ou « produit de ... par ... » ou « quotient de ... par ... ».

$$A = 15 + 6 \times 4$$

$$B = 78 \times (6 + 8)$$

$$C = 5 \times 3 + 7 \times 96$$

$$D = 54 - 8 \times 3$$

$$E = \frac{6}{3} + 9$$

$$F = (9 + 5) \times (12 - 3)$$

$$G = \frac{24}{7 + 5}$$

$$H = \frac{6 + 3}{3}$$

15. Même consigne que l'exercice précédent :

$$A = 2,5 \times 4 + 7$$

$$B = 3,2 \times 0,01 + 9 \times 0,1$$

$$C = (7 + 5) \times 0,1$$

23. Compléter le tableau ci-dessous :

Voici un nombre	1	4,1	b
Le multiplier par 2			
Ajouter 3			
Multiplier le résultat par 4			

24. Compléter le tableau ci-dessous :

Voici un nombre	3	0,7	z
Le multiplier par 4			
Soustraire 2			
Multiplier le résultat par 5			

L'exercice suivant fait travailler le changement de registre dans l'autre sens : on traduit une expression littérale par un programme de calcul. L'élève doit énoncer la succession des opérations en respectant les règles de priorités et en partant du nombre désigné par une lettre. Une des difficultés est que l'ordre dans lequel les opérations se succèdent dans le programme n'est pas forcément l'ordre dans lequel elles apparaissent dans l'expression.

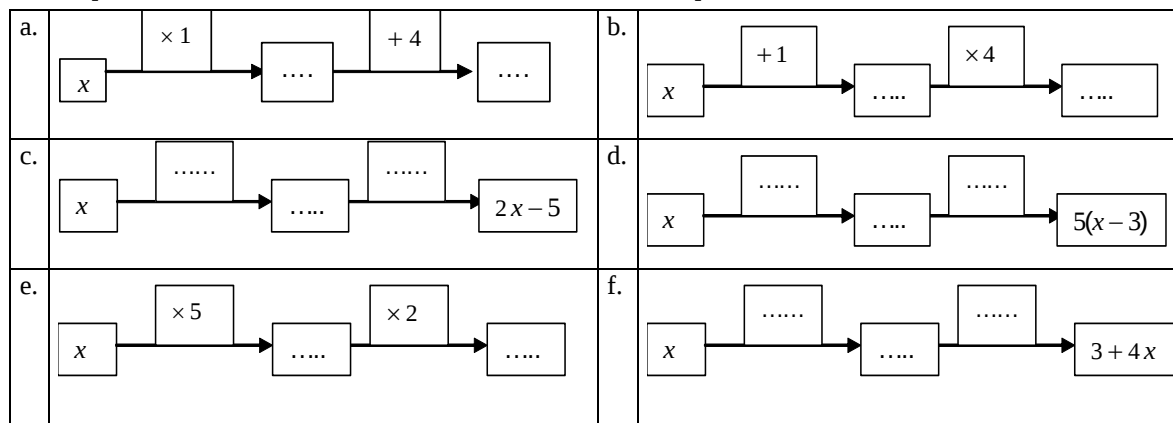
25. Écrire le programme de calcul aboutissant aux expressions suivantes :

- a) $5 \times a + 2$; b) $5 \times (a + 3)$; c) $3 + 5 \times a$; d) $4 \times (6 \times a + 7)$.

SCHÉMAS FLÈCHES

Les objectifs des exercices 26 et 27 sont les mêmes que ceux de l'activité 3, le changement de registre de l'écriture symbolique vers le schéma fléché est travaillé dans les deux sens.

26. Compléter le schéma fléché suivant en utilisant l'écriture simplifiée :

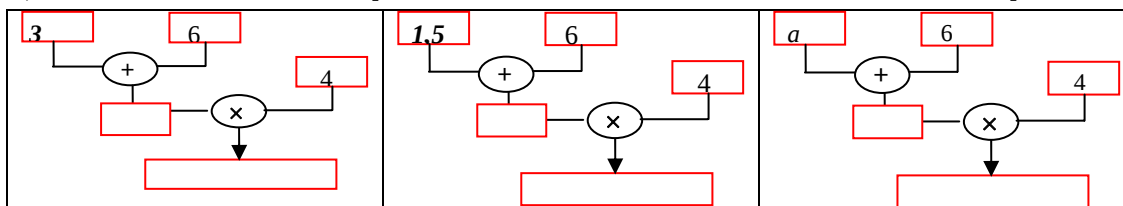


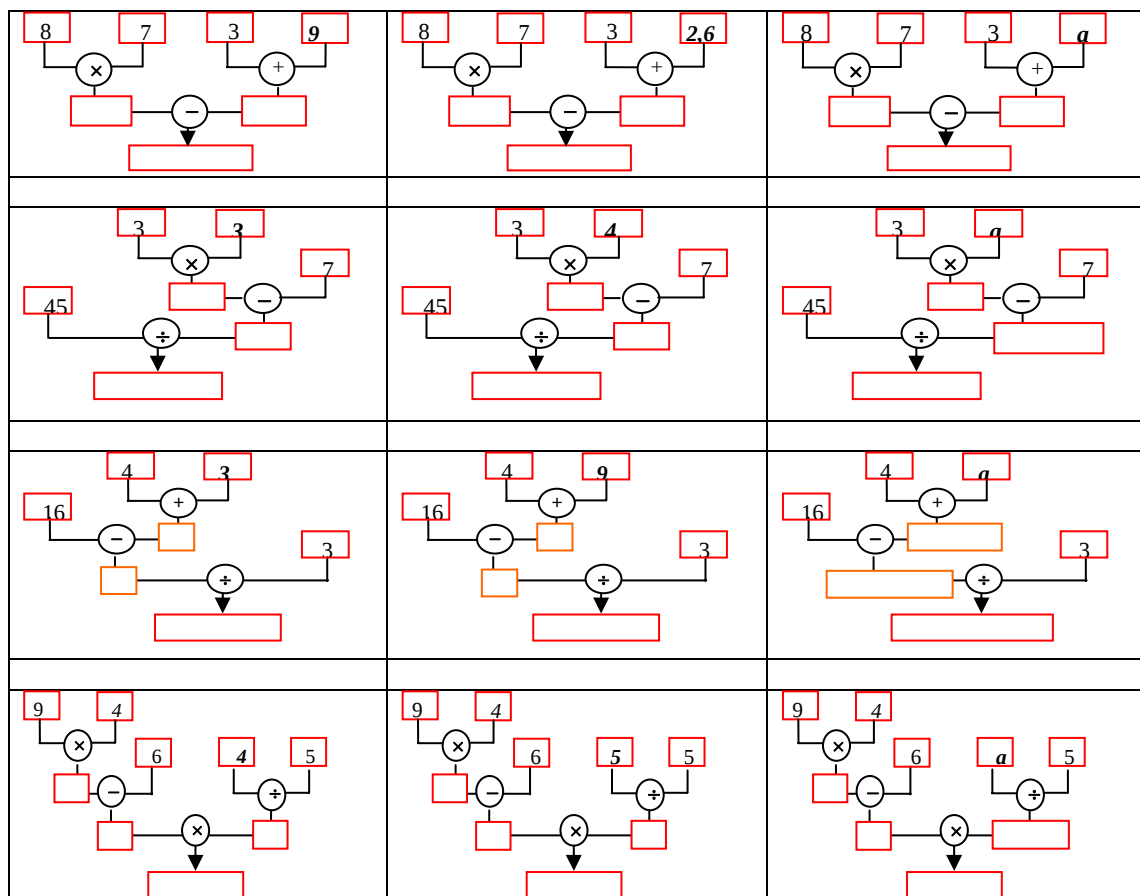
27. Écrire les schémas fléchés aboutissant à chacune des expressions suivantes :

- a) $4a + 7$; b) $4(a + 7)$; c) $2(a + 10) - 5$; d) $3 + 5a$;
 e) $7(a - 2)$; f) $(3 + 7a) \times 2$; g) $8(5 + 6a)$; h) $2 + 3(a + 8)$.

L'exercice 28 présente une autre façon de construire le sens d'une expression numérique ou littérale, l'expression littérale prenant appui sur deux expressions numériques correspondantes.

28. a) Effectuer les calculs donnés, puis écrire la suite de calculs ainsi effectués en une seule expression :





b) Inversement, écrire les schémas fléchés aboutissant à chacune des expressions suivantes :

$7 + 5 \times a - 10$	$(a \times 3 + 2) \div 10$	$a \times 3 + 2 \div 10$

EXPRESSIONS LITTÉRALES

L'exercice 29 porte sur la reconnaissance de formes. On pourra se reporter au POINT DE REPÈRE / MÉTHODES du cours.

29. Compléter le tableau ci-dessous :

Expressions mathématiques	Descriptions en langue française
	La somme de a et 5.
$7a$	
	La somme de 3 et du produit de a par 7.
$5(a + 9)$	
	La différence entre 9 et a .
$\frac{a}{8}$	
	Le quotient de a par la différence entre a et 7.

Dans l'exercice 30, on sous-entend systématiquement les signes de multiplication, et on travaille aussi l'écriture a^2 . Il est souvent utile de faire écrire les expressions littérales en rétablissant les signes sous-entendus avant de remplacer les lettres par les valeurs numériques.

30. Calculer les expressions suivantes pour $a = 10$, $b = 0,4$ et $c = 5$:

$$\begin{array}{llllll} 2a & ; & 3b & ; & ab + c & ; & a(c - b) & ; & 3a + 2b ; \\ 10a + b & ; & a^2 & ; & b^2 & ; & 5a + 3(2b + 3) & ; & 3 + 2(a - 4). \end{array}$$

L'exercice 31 travaille dans le sens inverse du précédent pour les changements d'écriture.

31. Simplifier l'écriture des expressions suivantes :

$$\begin{array}{llllll} a \times 7 & ; & 2 \times b \times 3 & ; & 5 \times a + 2 & ; & b \times 3 + 4 ; \\ a \times a & ; & b \times (3 + 4) & ; & 4 \times (a + 2) & ; & (2 + a) \times 5. \end{array}$$

L'exercice 32 travaille la priorité de la multiplication sur l'addition tout en préparant la distributivité.

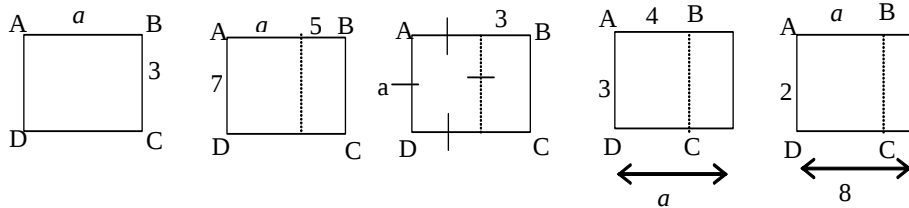
32. a) Compléter le tableau suivant en effectuant les calculs pour les valeurs de a indiquées :

a	8	10	2	5
$5a$				
$2 + 3a$				
$2a + 3a$				

b) Que remarque-t-on ?

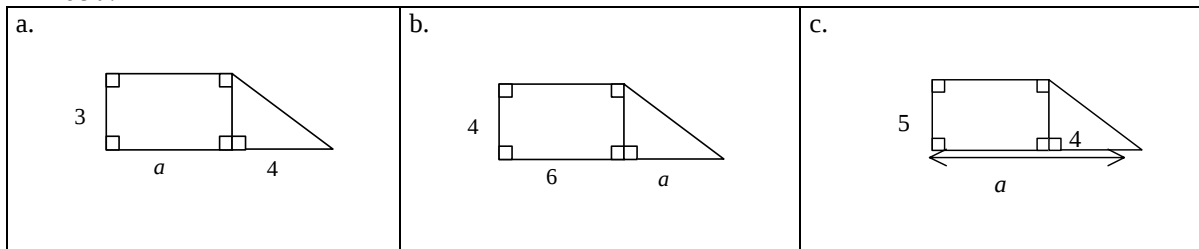
L'exercice 33 prépare la distributivité. Il permet à l'élève d'écrire lui-même des expressions littérales, comportant ou non des parenthèses et d'utiliser les conventions usuelles d'écriture de son initiative.

33. Toutes les dimensions sont en cm et les aires en cm^2 . Exprimer l'aire de chaque rectangle ABCD en fonction de a .



Dans l'exercice 34, on travaille encore le passage du registre géométrique au registre symbolique, avec les mêmes objectifs que dans l'exercice précédent.

34. Toutes les dimensions sont exprimées en cm et les aires en cm^2 . Exprimer l'aire de chaque figure en fonction de a .



PROBLÈMES

Les exercices 35 et 36 proposent un travail inverse du travail habituel. Ils donnent aux élèves l'occasion de rédiger un texte et de donner du sens à des expressions numériques.

35. Dans chacun des cas ci-dessous, on donne une expression qu'on obtient en résolvant un problème. Écrire un énoncé dont la solution serait donnée par le calcul :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } 23,5 \times 4 + 7 & \text{b) } (13,5 + 2,5) \times 3 & \text{c) } 183 - (25 - 2) \times 3 & \text{d) } \frac{42 + 8}{10}. \end{array}$$

36. Dans chacun des cas ci-dessous, on donne une expression qu'on obtient en résolvant un problème. Les unités de chacun des nombres sont écrites à côté. Écrire un énoncé dont la solution serait donnée par le calcul (on ne demande pas d'effectuer ces expressions) :

$$1) \quad 4 \times 175 + 150 \qquad 175 \text{ et } 150 \text{ sont en euros.}$$

- 2) $1,7 \times 1,3 + 0,300 \times 14,5$ 1,7 et 0,300 sont en kg. 1,3 et 4,5 sont en euros par kg.
- 3) $25,6 \times 120 + 54$ 25,6 est en mètres et 54 est en euros.
- 4) $60 - 7 \times 3,2$ 60 est en euros et 7 est en mètres.
- 5) $\frac{14 - 0,8 \times 1,3}{2,4}$ 86 est en euros. 8,5 et 14,6 sont en euros par kg et 0,8 est en kg.

Dans les exercices 37 à 49, on demande de donner la réponse à la question du problème sous la forme d'une seule expression numérique, comme dans l'activité 2.

Dans les exercices 37 à 40, on a l'occasion de faire un retour sur les pourcentages vus en sixième. Pour faciliter la compréhension de ce genre d'énoncé, on pourra demander au préalable de remplir un tableau du type suivant, ce tableau n'ayant, bien sûr, qu'un statut de brouillon :

Prix avant la réduction	60 €
Montant de la réduction	40% de 60 €
Prix après la réduction	60 € - 40% de 60 €

Ce tableau peut être vu comme un outil transitoire pour passer du registre texte en langue naturelle au registre symbolique des calculs. Il permet d'insister de nouveau sur le fait que le montant de la réduction est bien 40% de 60 et non 40% seuls, erreur qui est fréquente dans nos classes.

Il ne reste alors plus qu'une difficulté pour écrire le calcul du prix final, celle de comprendre que 40% de 60 s'écrit en langage symbolique $\frac{40}{100} \times 60$ ou $\frac{4}{10} \times 60$ ou $0,4 \times 60$. Le travail de l'élève, après la mise en place du

tableau (« outil brouillon ») consiste à écrire que le prix final est $60 + \frac{4}{10} \times 60$. Ce travail pourra être poursuivi en 4^{ème}, le tableau pourra ainsi être très utile dans la recherche d'un prix initial.

37. Un article vaut normalement 60 €. Il est soldé avec 40% de réduction. Écrire en une expression le calcul correspondant au nouveau prix de cet article.
38. Un pantalon vaut 49 €. Son prix augmente de 10%. Calculer son nouveau prix.
39. Un objet vaut 120 €. Calculer son nouveau prix :
a) après une réduction de 10 % ; b) après une réduction de 20 % ; c) après une réduction de 1 %.
40. Un objet vaut 90 €. Calculer son nouveau prix :
a) après une augmentation de 10 % ; b) après une augmentation de 5 % ; c) après une augmentation de 20 %.

Exercices 41 à 49 : Passage du registre « texte » au registre numérique.

Ces problèmes donnent l'occasion d'écrire des séquences de calcul et d'appliquer les règles de priorité. Dans un premier temps, on pourra écrire les parenthèses « inutiles » pour bien comprendre l'organisation des calculs. Un tableau similaire à celui présenté à propos des pourcentages pourra être utilisé pour améliorer la compréhension de l'énoncé.

Exercices 41 à 44 : Dans ces exercices, on multiplie des entiers par des décimaux.

41. Pour chacun des problèmes ci-dessous, écrire le calcul à faire en une seule expression, puis répondre à la question posée :
- 1) Luc a un billet de 20 € ; il achète 4 croissants à 0,73 € chacun, une place de cinéma à 6,36 € et un journal à 0,80 €. Combien d'argent lui reste-t-il ?
- 2) Julie achète 4 CD à 19,70 € chacun. Elle a reçu 3 bons de réduction de 2 € chacun qu'elle utilise pour cet achat. Combien dépense-t-elle ?
- 3) Le sac de voyage de Pierre pèse tout juste 20 kg. Il contient trois paires de chaussures pesant 0,8 kg chacune, dix T-shirts pesant 200 g chacun et quatre bermudas pesant 700 g chacun. Il contient aussi des livres pesant en tout 5,4 kg, et une paire de patins à roulettes 3 kg. Divers objets viennent alourdir son sac de 3,2 kg. Combien pèse le sac vide ?
42. En payant avec un billet de 20 €, j'achète deux revues à 3 € l'une et une bande dessinée qui coûte 6,5 €. Combien d'argent va me rendre la vendeuse ?
43. Le prix affiché pour une mobylette est de 1200 €. Pour l'acheter, on peut verser un acompte de 400 € et payer le reste en 6 mensualités égales. Calculer le montant de chaque mensualité.
44. J'ai acheté trois bandes dessinées de même prix et deux disques à 14 € chacun. J'ai payé au total 49 €. Calculer le prix d'une bande dessinée.

Dans les exercices 45 à 49, les nombres choisis permettent de travailler et de donner du sens à la multiplication des nombres décimaux dans des problèmes de proportionnalité classiques, qui ont commencé à être étudiés en sixième. Ainsi, l'élève, dans une recherche au brouillon, pourra procéder avec des schémas du type :

Exercice 45

Prix des pommes		1 kg coûte 0,8 € 1,5 kg coûte
Prix des poires		1 kg coûte 1,2 € 0,7 kg coûte
Somme payée	??????????	

Exercice 46

Prix du chocolat		1000 g coûtent 12 € 250 g coûtent
Somme rendue	??????????	

45. Une personne achète 1,5 kg de pommes à 0,8 € le kg et 700g de poires à 1,2 € le kg. Quelle est la somme payée ?
46. Une personne achète 250 g de chocolat à 12 € le kg. Elle paie avec un billet de 10 €. Quelle est la somme rendue ?
47. Un enfant achète 3 tablettes de chocolat à 0,9 € l'une et 100g de bonbons à 6 € le kg. Il paie avec un billet de 5 €. Quelle est la somme rendue ?
48. Une personne achète 600 g de pommes à 1,2 € le kg et 2,3 kg de pommes de terre à 0,9 € le kg. Quelle est la somme payée ?
49. Une personne achète 500 g de chocolat à 14 € le kg. Elle paie avec un billet de 10 €. Quelle est la somme rendue ?

CALCULS À ENTRETENIR

Types de calcul	Objectifs, méthodes, commentaires
Sommes et différences de décimaux : $7 - 1,2$; $2,4 + 0,15$; ...	Entretenir dès le début de l'année les acquis de 6ème.
Produits de décimaux : $1,3 \times 0,2$; $2,4 \times 0,5$; $16 \times 0,75$.	Idem.
Calculs avec priorités : $7 - 2 \times 3,2$; $0,8 + 0,3 \times 2$; ...	Réinvestir les calculs précédents dans des expressions plus complexes.
$a = 5$ $3a = \dots$ Simplifier $a \times 4 + 5$.	Travailler régulièrement les conventions d'écriture.
Écriture décimale du quotient de deux entiers : écrire sous forme décimale : $\frac{17}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{11}{4}$...des fractions ayant pour dénominateur 2, 4, 5 voire 6 ou 8. $\frac{18}{9}$, $\frac{36}{12}$...des quotients entiers.	Pour exprimer $\frac{11}{4}$ sous forme décimale, une des procédures est la suivante : En 11, il y a 2 fois 4. Il reste 3 unités à diviser en 4, ce qui donne 0,75 unités. $\frac{11}{4}$ est donc égal à 2,75.
Produit d'un entier ou d'un décimal par une fraction : $12 \times \frac{7}{3}$ $12 \times \frac{15}{5}$.	On entretient ici les acquis de sixième. Les stratégies varient selon les calculs ($12 \div 3$) $\times$ 7 pour le premier calcul et 12×3 pour le deuxième.
Écrire 5 en tiers ou compléter $5 = \frac{\dots}{3}$; etc.....	Écrire un nombre entier sous forme fractionnaire, utilisation de la langue naturelle. Entretenir le lien entre fraction, division et multiplication. Prépare la somme d'un entier et d'une fraction.

Changer l'écriture d'un nombre pour pouvoir effectuer plus simplement un calcul : $12 \times 0,25 \dots 12 \times 0,75 \dots 112 \times 0,5 \dots$	Changer l'écriture d'un nombre pour pouvoir effectuer plus simplement un calcul.
Prendre un pourcentage : 10% de 15.....25% de 36.....3% de 120...	Changer l'écriture d'un nombre pour pouvoir effectuer plus simplement un calcul. Travailler les pourcentages tout au long de l'année.
Quotients dont le dénominateur peut-être décomposé : $\frac{1}{200} = (1 \div 2) \div 100 \dots$	On peut aussi voir $\frac{1}{200}$ comme $\frac{5}{1000}$.
Quotient d'un décimal par un entier : $2,4 \div 4$; $0,24 \div 4$; ; $9,1 \div 7 \dots$; $0,1 \div 2$; ...	Relier régulièrement division et multiplication.
Trouver la valeur décimale ou une valeur approchée de certains quotients tels que $\frac{1}{3}$ ou $\frac{5}{4}$, $\frac{1}{6}$	Donner un sens à l'écriture fractionnaire. Parler de valeur approchée.
Compléter des schémas du type : $4 \xrightarrow{\times \dots} 5$ $6 \xrightarrow{\times \dots} 5$	La réponse attendue peut-être sous forme fractionnaire ou sous forme décimale, ce qui provoque des débats intéressants dans la classe. Pour certains élèves, $\frac{5}{4}$ ou $\frac{5}{6}$ ne peuvent pas être des réponses.
Compléter des schémas de proportionnalité du type : 1 kg coûte 6 € 1,2 kg coûte 4 kg coûtent 6 € 5 kg coûtent	L'étude de problèmes de proportionnalité a commencé en sixième. Il est important de trouver une place en début de cinquième pour entretenir régulièrement ce genre de problèmes. Plusieurs procédures sont possibles dans le deuxième problème (retour à l'unité, utilisation du coefficient $\frac{5}{4}$ ou 1,25). Une place pour chacune d'elles devra être envisagée.

CHAPITRE 2

DISTRIBUTIVITÉ ET CALCUL LITTÉRAL

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Illustrer les égalités $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$ dans le cadre numérique et le cadre géométrique.
- Utiliser les égalités $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$ sur des exemples numériques :
 - Savoir utiliser un développement et une factorisation dans un calcul numérique.
- Utiliser les égalités $k(a + b) = ka + kb$ et $k(a - b) = ka - kb$ sur des exemples littéraux :
 - Savoir utiliser un développement et une factorisation dans un calcul littéral.
 - Relier la réduction d'une expression à la factorisation.
- Continuer à travailler les conventions usuelles d'écriture.
- Justifier l'égalité de deux expressions littérales à l'aide de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ou à la soustraction.
- Justifier la « non-égalité » de deux expressions littérales à l'aide d'un contre-exemple.
- Travailler le statut de l'égalité.
- Tester une égalité.

REPÈRES POUR LE CONTENU DU COURS

- Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et à la soustraction.
- Développer une expression.
- Factoriser une expression.

ACTIVITÉ

ACTIVITÉ 1 : À LA DÉCOUVERTE DE LA DISTRIBUTIVITÉ

La grand-mère

Une grand-mère a dix petits enfants. Pour Noël, elle prépare dix colis identiques. Chaque colis contient un livre à 14,60 € et un ballotin de chocolats à 9,75 €. Elle voudrait connaître sa dépense totale. Pour cela, il y a deux méthodes possibles :

Première méthode : calculer la dépense effectuée chez le libraire, celle effectuée à la pâtisserie, puis la dépense totale.

Deuxième méthode : calculer la valeur de chaque colis, puis la dépense totale.

- 1) Écrire en une expression le calcul correspondant à la première méthode et indiquer si cette expression est une somme ou un produit.
- 2) Écrire en une expression le calcul correspondant à la deuxième méthode et indiquer si cette expression est une somme ou un produit.
- 3) Calculer les expressions obtenues en 1) et 2). Que remarque-t-on ?

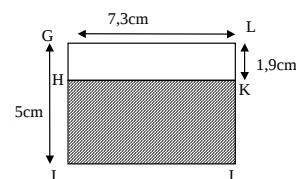
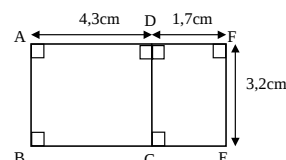
Illustration géométrique

- a) Pour calculer l'aire hachurée du rectangle AEFB, deux élèves ont proposé les expressions suivantes :

Xavier : $X = (4,3 + 1,7) \times 3,2$.

Laurène : $L = 4,3 \times 3,2 + 1,7 \times 3,2$.

- 1) Indiquer comment procède chacun d'eux.
- 2) Vérifier que X et L donnent le même résultat.
- 3) Préciser pour chaque expression s'il s'agit d'une somme ou d'un produit, indiquer les termes ou les facteurs.
 - b) Proposer deux expressions différentes pour calculer l'aire hachurée du rectangle IJKH, en précisant à chaque fois s'il s'agit d'une différence ou d'un produit, préciser les termes ou les facteurs.
 - c) A l'aide de rectangles bien choisis, expliquer pourquoi les égalités suivantes sont vraies (inutile de faire des calculs) :
 - a. $2,7 \times 1,8 + 2,7 \times 4,3 = 2,7 \times (1,8 + 4,3)$.
 - b. $4,3 \times (8,2 - 3,6) = 4,3 \times 8,2 - 4,3 \times 3,6$.



Objectifs et commentaires

- Illustrer la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Cette activité vise à illustrer la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition dans deux cadres : l'un numérique lié à un problème, l'autre géométrique. La notion de distributivité est intuitive chez la plupart des élèves en début de cinquième : ils l'utilisent dans de nombreux calculs à faire mentalement, ils ont pu l'utiliser dans la construction des tables de multiplication. Dans le premier problème, l'élève doit suivre les méthodes indiquées pour écrire, dans le premier cas, une somme et, dans le deuxième cas, un produit. Il doit ensuite vérifier que ces deux expressions donnent le même résultat. Le professeur peut ensuite demander d'écrire l'égalité entre ces deux expressions. On procède de façon analogue dans la partie géométrie, avec, en plus, un travail dans l'autre sens, où on demande d'illustrer des égalités données.

Ces égalités ne font qu'illustrer la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ; ce ne sont que des exemples. Il est indispensable de bien signifier aux élèves que la propriété de distributivité, qui ne peut pas être démontrée à ce niveau, est vraie pour tous les nombres k , a et b et que les égalités vues auparavant ne sont que des cas particuliers d'application.

ACTIVITÉ 2 : IDENTIFICATION

Compléter le tableau ci-dessous en utilisant les égalités $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ et $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$.

	k	a	b	Égalités à compléter	Résultat du calcul
1.	12	100	3	$12 \times (100 + 3) = \dots \times \dots + \dots \times \dots$	
2.		8	20	$\dots \times (\dots + \dots) = 16 \times \dots + 16 \times \dots$	
3.				$15 \times 24 - 15 \times 4 =$	
4.				$(10 + 0,8) \times 6 =$	
5.	17			$17 \times 16 + 3 \times \dots =$	
6.				$\dots \times 3 + 2 \times 7 = 2 \times (\dots + 7)$	
7.	10	8		$\dots \times (\dots - 4,1) = \dots \times \dots - 4,1 \times \dots$	
8.				$(9 - 2,4) \times 5 =$	
9.				$12 \times \dots - 12 \times \dots = \dots \times (20 - 12)$	
10.				$8 \times 25 + 25 =$	

Objectifs et commentaires

- Faire fonctionner les règles liées à la distributivité par identification des coefficients.

L'objectif de l'activité 2 est de permettre à l'élève de travailler sur l'identification des coefficients. Elle permet de ne pas figer, pour les élèves, le sens de l'égalité donnée dans le cours (développement ou factorisation). Pour trouver le résultat, les élèves seront amenés à choisir l'expression qui conduit au calcul le plus simple. On pourra leur suggérer de vérifier, à l'aide de la calculatrice, les égalités écrites. Certaines lignes comme la septième et huitième permettent de rappeler la commutativité de la multiplication et la non commutativité de la soustraction. En effet, certains élèves se trompent dans le développement à la huitième ligne du fait de la place du coefficient k . Ils écrivent alors $(9 - 2,4) \times 5 = 5 \times 2,4 - 5 \times 9$. Les deux dernières lignes déstabilisent certains élèves par la répétition d'un même nombre pour deux des coefficients ou par l'absence du coefficient multiplicatif dans le deuxième terme, difficultés qu'ils vont retrouver, par exemple, dans les réductions du type $x + 5x$. Ainsi, il est important que l'élève soit amené à prendre conscience que 25 peut s'écrire 25×1 .

ACTIVITÉ 3 : DES LETTRES POUR DÉMONTRER

On souhaite calculer les périmètres de certains rectangles.

On s'intéresse à une famille particulière de rectangles : leur longueur est égale à trois fois leur largeur.

- Dessiner à main levée un schéma codé représentant un rectangle de cette famille.
- Compléter le tableau suivant sachant que ces rectangles appartiennent tous à cette famille :

	Rectangle 1	Rectangle 2	Rectangle 3	Rectangle 4
Longueur (en cm)			15	
Largeur (en cm)	3	0,5		2
Périmètre (en cm)				

- Quel lien semble-t-il y avoir entre la largeur et le périmètre de ces rectangles ?
- Est-ce vrai pour tous les rectangles de cette famille ? Le démontrer.

On considère une autre famille de rectangles : les rectangles dont la longueur mesure 2 cm de plus que la largeur. Reprendre les questions précédentes puis trouver une formule exprimant le périmètre d'un de ces rectangles en fonction de sa largeur x .

Objectifs et commentaires

- Nécessité du calcul littéral pour démontrer une conjecture.

On établit grâce au tableau une conjecture sur le lien entre la largeur et le périmètre de ces rectangles. L'affirmation de la validité de cette formule pour tous les rectangles de cette famille donne lieu à un débat avec les élèves. La nécessité d'introduire une lettre pour parler de « toutes les largeurs possibles » apparaît alors, ainsi que le besoin d'une démonstration par rapport à une affirmation non justifiée.

ACTIVITÉ 4 : COMPARAISON D'EXPRESSIONS

1) Compléter le tableau suivant :

x	0	1	2	10	0,5	1,3
$2x + 5x$						
$2 + 5x$						
$7x$						

- 2) a) L'égalité $2 + 5x = 7x$ est-elle vraie pour une valeur de x ? Justifier.
 b) L'égalité $2 + 5x = 7x$ est-elle vraie pour n'importe quelle valeur de x ? Justifier.
- 3) a) L'égalité $2x + 5x = 7x$ est-elle vraie pour une valeur de x ? Justifier.
 b) L'égalité $2x + 5x = 7x$ est-elle vraie pour n'importe quelle valeur de x ? Justifier.

Objectifs et commentaires

- Tester une égalité pour une valeur de la variable.
- Savoir justifier qu'une égalité est vraie pour n'importe quelle valeur de x en utilisant une propriété.
- Savoir justifier qu'une égalité est fausse en utilisant un contre-exemple.
- Comprendre que $2x + 5x = 7x$ est une application de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

La réduction possible ou non d'expressions littérales simples du type $2x + 5x$ ou $2 + 5x$ est un enjeu important du calcul littéral. Dans la première question, on donne du sens à chaque expression, en donnant à x le statut de variable. C'est l'occasion de revoir la signification des écritures comme $2x = 2 \times x$. La règle de priorité de la multiplication est alors mise en évidence, elle servira aussi à justifier en partie que $2 + 5x$ n'est pas égal à $7x$. Les réponses aux questions 2 et 3 pourront s'appuyer sur les résultats obtenus dans la question 1, mais la notion d'égalité vraie pour n'importe quelle valeur de x demande de dépasser les quelques valeurs données dans le tableau. L'élève devra prendre conscience que pour justifier que $2x + 5x = 7x$ pour n'importe quelle valeur de x , il doit nécessairement faire appel à la propriété de distributivité.

ACTIVITÉ 5 : DES PROGRAMMES DE CALCUL

Programme 1

a) Compléter le tableau ci-dessous :

Choisir un nombre	4	5	10	3,1	3		
Lui soustraire 3							
Multiplier le résultat par 4							
Additionner 12 au résultat précédent.							

- b) On observe que, pour obtenir le résultat, il suffit de
- c) En est-il ainsi pour n'importe quel nombre choisi au départ ? Justifier.

Programme 2

a) Compléter le tableau ci-dessous :

Voici un nombre	0	1	2	5	4,1		
Le multiplier par 3							
Le multiplier par 7							
Additionner ces deux résultats							

- b) On observe que, pour obtenir le résultat, il suffit de
- c) En est-il ainsi pour n'importe quel nombre choisi au départ ? Justifier.

Programme 3

- a) Compléter le tableau ci-dessous :

Voici un nombre	0	1	2	3	4,1		
Le multiplier par 10							
Le multiplier par 2							
Soustraire ces deux résultats							

- b) On observe que, pour obtenir le résultat, il suffit de
- c) En est-il ainsi pour n'importe quel nombre choisi au départ ? Justifier.

Programme 4

- a) Compléter le tableau ci-dessous :

Choisir un nombre	0	1	2	3	4,1		
Lui additionner 5							
Multiplier le résultat par 2							
Soustraire du résultat le nombre choisi au départ							

- b) On observe que, pour obtenir le résultat, il suffit de
- c) En est-il ainsi pour n'importe quel nombre choisi au départ ? Justifier.

Objectifs et commentaires

- Le calcul littéral comme outil de preuve.
- Nécessité de la lettre pour justifier.
- Production d'une expression littérale.
- Utilisation de la distributivité pour transformer cette expression.

La disposition dans un tableau évite des difficultés de présentation, facilite les calculs et leur contrôle. On réservera l'avant-dernière colonne aux calculs faits avec un nombre choisi par l'élève et la dernière colonne à l'usage de la lettre, après avoir émis la conjecture demandée.

Dans un premier temps, l'élève effectue les calculs pour les nombres donnés. Ces calculs sont décrits en langue naturelle : il s'agit pour l'élève d'interpréter correctement les consignes, en particulier de savoir si l'opération s'applique au nombre de départ ou au résultat obtenu précédemment. Dans l'avant-dernière colonne, l'élève choisit lui-même un nombre : cette démarche est un élément important pour la construction du sens de la lettre en calcul algébrique. De plus, au sein d'une classe, de nombreuses valeurs auront été choisies, ce qui donne un intérêt accru à l'énoncé de la conjecture et surtout à sa démonstration. Il conviendra cependant de faire remarquer les limites de chaque programme : ainsi l'élève n'a pas les connaissances nécessaires pour mener les calculs avec un nombre inférieur à 3.

Dans un deuxième temps, on demande à l'élève d'émettre une conjecture (avec les réserves émises plus haut) et de la justifier. C'est ici que la nécessité de la lettre se fait sentir, c'est grâce à son usage que la démonstration demandée peut être menée. L'élève est ainsi amené à produire une expression littérale et, pour cela, à écrire sous forme symbolique un calcul donné en langue naturelle (dernière colonne).

Ainsi dans le programme 1, le résultat s'écrit

$$(a - 3) \times 4 + 12 \quad \text{ou} \quad 4(a - 3) + 12$$

et dans le programme 2, il s'écrit :

$$a \times 3 + a \times 7 \quad \text{ou} \quad 3a + 7a.$$

L'énoncé de la conjecture concernant le passage du nombre de départ au résultat final constitue une étape importante. En effet, l'opération annoncée doit s'appliquer aux quatre nombres utilisés, ce qui n'est pas évident pour tous les élèves. Cela permet aussi de déceler rapidement les erreurs de calcul puisque les élèves n'ont pas tous employé les mêmes nombres. Dans ce contexte, ils acceptent très facilement de vérifier et de reprendre leurs calculs.

Enfin, l'utilisation de la distributivité apporte la preuve que la conjecture émise est vraie. Dans les programmes 2 et 3, la distributivité est employée pour factoriser, dans le programme 1 pour développer, et, dans le programme 4, pour développer puis pour factoriser.

ACTIVITÉ 6 : EXPRIMER EN FONCTION DE a

- 1) Calculer le périmètre de chacune des figures ci-dessous pour $a = 3$.
- 2) Dans la deuxième ligne, on a écrit, dans le désordre, le périmètre des figures de la deuxième ligne en fonction de a . Associer chaque figure à son périmètre. Expliquer chaque choix.

fig 1 	fig 2 	fig 3 	fig 4 	fig 5
$4a$	$2a + 4$	$12a$	$8 + 4a$	$6a$

Objectifs et commentaires

- Écrire des expressions littérales.
- Travailler le changement de registre du symbolique vers le géométrique.
- Donner l'occasion de vérifier.
- Travailler encore les conventions d'écriture.

Cette activité permet de donner du sens à certaines expressions littérales, de comparer des expressions telles que $12a$ et $8 + 4a$, $6a$ et $2a + 4$, qui donnent des résultats différents pour $a = 3$ et qui ont des représentations géométriques différentes. Ce sont ces confrontations, mais aussi la référence aux propriétés en jeu, qui vont permettre aux élèves de progresser dans la maîtrise du calcul littéral de base.

ACTIVITÉ 7 : ÉGALITÉ VRAIE, ÉGALITÉ FAUSSE

Relier chacune des égalités à l'affirmation ou aux affirmations qu'elle satisfait puis justifier :

a.	$x + 3 = 7$	C'est toujours vrai C'est toujours faux Cela peut être vrai Cela peut être faux	Explications
b.	$2x + 3 = 5x$	C'est toujours vrai C'est toujours faux Cela peut être vrai Cela peut être faux	Explications
c.	$2x + 3 = 5$	C'est toujours vrai C'est toujours faux Cela peut être vrai Cela peut être faux	Explications
c.	$2x + 3x = 5x$	C'est toujours vrai C'est toujours faux Cela peut être vrai Cela peut être faux	Explications
d.	$7x = 9$	C'est toujours vrai C'est toujours faux Cela peut être vrai Cela peut être faux	Explications
e.	$7x = 8x$	C'est toujours vrai C'est toujours faux Cela peut être vrai Cela peut être faux	Explications

f.	$x = x + 1$	C'est toujours vrai C'est toujours faux Cela peut être vrai Cela peut être faux	Explications
----	-------------	--	---------------------

Objectifs et commentaires

- Comprendre que lorsque le signe « = » est écrit entre deux expressions littérales, l'égalité obtenue n'est pas toujours vraie.
- Rechercher la ou les valeurs rendant cette égalité vraie.

Cette activité a été fortement inspirée d'une idée originale de Bernard MARTINI, de l'IREM d'Aix-Marseille¹.

Elle permet de travailler le statut du signe « = » en même temps que la compréhension de certaines expressions littérales. On amène ainsi l'élève à se poser des questions comme « Existe-t-il des nombres tels que... ? ». Cette activité encourage l'élève à procéder par essai-erreur ; elle provoque ainsi d'intéressants débats dans la classe et peut donc être envisagée en travail de groupes.

Ainsi, de fréquentes erreurs peuvent être pointées, comme celle consistant à écrire $2x + 3 = 5x$, peuvent être traitées avec une autre vision. Cette égalité est vraie pour $x = 0$, mais fausse pour toutes les autres valeurs de x . L'élève pourra, à l'aide d'essais, confirmer que l'égalité peut être vraie, mais peut aussi être fausse. La différence avec l'égalité $2x + 3x = 5x$ sera donc clairement marquée, puisque cette dernière est toujours vraie, on le justifie avec l'application de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

De nombreux élèves pensent que les deux dernières égalités sont toujours fausses : de nombreux décimaux sont ainsi essayés pour tester l'égalité $7x = 9$, le recours à une valeur fractionnaire n'étant pas « naturel ». On montre ainsi la limite des nombres décimaux et on redonne du sens à l'écriture $\frac{9}{7}$: le nombre $\frac{9}{7}$ est bien le nombre qui,

multiplié par 7, donne 9. Dans l'égalité suivante, il faut que l'élève ait l'idée que zéro est bien un nombre, ce qui n'est pas toujours le cas.

Pour terminer, l'égalité $x = x + 1$ est ici pour avoir un exemple d'égalité toujours fausse. Après de nombreux essais, les élèves peuvent prendre conscience que le résultat du membre de droite de l'égalité est toujours supérieur d'une unité au membre de gauche. On pourra alors conclure qu'un nombre ne peut pas être égal à ce même nombre augmenté de 1 et, qu'en conséquence, l'égalité est toujours fausse.

ACTIVITÉ 8 : TESTER UNE ÉGALITÉ

Compléter le tableau suivant, sachant que chaque égalité est vraie pour une seule valeur de x :

	Égalités	Test pour $x = 1$	Test pour $x = 2$	Valeurs de x pour lesquelles l'égalité est vraie
a.	$3x = 6$			
b.	$3x = 12$			
c.	$3x = 5$			
d.	$x + 0,5 = 6,1$			
e.	$x - 1,3 = 1,24$			
f.	$2x + 5 = 14$			
g.	$8x + 5 = 35$			
h.	$2x + 5x = 14$			
i.	$2x + 5x = 35$			
j.	$2x + 3 = 1 + 3x$			
k.	$2x + 5 = 4x - 1$			

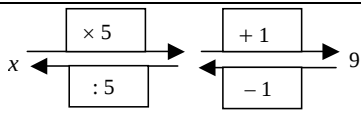
¹ Bernard MARTINI (2000), *L'apport du numérique dans l'apprentissage du raisonnement au collège*, 49 pages, IREM de Marseille.

Objectifs et commentaires

- Tester une égalité pour plusieurs valeurs de la variable
- Comprendre les notions d'égalité vraie et d'égalité fausse.

On poursuit le travail commencé dans l'activité précédente sous une autre forme. La recherche de la valeur pour laquelle l'égalité est vraie se fait par essai-erreur. Certains élèves trouveront l'une ou l'autre solution en ayant recours au sens des opérations en jeu, ce qui permet, par exemple, de débloquer la recherche de la solution de l'équation $3x = 5$.

ACTIVITÉ 9 : TROUVER LA SOLUTION

Égalité	Schéma correspondant	Calcul donnant la valeur de x pour laquelle l'égalité est vraie	Vérification
a. $5x + 1 = 9$		$x = \frac{9-1}{5} = \frac{8}{5} = 1,6$	$5 \times 1,6 + 1 = 9$
b. $x - 2,6 = 9$			
c. $7x = 9$			
d. $4x - 5 = 9$			

Objectifs et commentaires

- Relier la recherche de la solution de certaines équations (du type $ax + b = c$) au sens des quatre opérations de base.

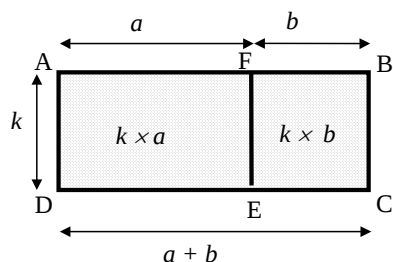
Cette activité est à la limite du programme qui précise qu'il faut « éviter la mise en œuvre d'algorithmes dépourvus de véritable sens ». Ici, un sens est donné à chaque expression littérale, on poursuit le travail sur les schémas fléchés commencé dans le chapitre 1. Ce travail permet de donner du sens aux expressions du type $ax + b$.

Ainsi, l'équation $7x = 9$ est vue comme : « je prends un nombre x , je le multiplie par 7 et je trouve 9 ». Pour trouver x , il faut donc diviser 9 par 7. Le schéma fléché permet de mettre en évidence ce type de raisonnement. La vérification pourra être confiée à la calculatrice, afin que l'erreur éventuelle soit bien localisée.

COURS

DISTRIBUTIVITÉ DE LA MULTIPLICATION PAR RAPPORT À L'ADDITION ET À LA SOUSTRACTION

La propriété de *distributivité* de la multiplication par rapport à l'addition peut être illustrée géométriquement par deux méthodes différentes du calcul de l'aire du rectangle ABCD :



- l'aire du rectangle ABCD est égale au **produit** $AD \times AB$:

$$k \times (a + b)$$

- l'aire du rectangle ABCD est égale à la **somme** des aires des rectangles AFED et FBCE :

$$k \times a + k \times b$$

POINTS DE REPÈRE / MÉTHODES

EXERCICE RÉSOLU 1

Développer l'expression suivante, puis calculer : $2,9 \times (100 + 5)$.

Solution

$2,9 \times (100 + 5)$ est un produit de deux facteurs.

Le premier facteur est le nombre 2,9.

Le deuxième facteur est la somme des deux termes 100 et 5.

On peut donc utiliser la propriété de distributivité : $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$.

On remplace k , a et b par les valeurs numériques de l'expression à développer :

$k \times (a + b)$	k	a	b	$k \times a + k \times b$
$2,9 \times (100 + 5)$	2,9	100	5	$2,9 \times 100 + 2,9 \times 5$

On obtient :

$$2,9 \times (100 + 5) = 2,9 \times 100 + 2,9 \times 5$$

Réponse : $2,9 \times (100 + 5) = 2,9 \times 100 + 2,9 \times 5 = 290 + 14,5 = 304,5$.

EXERCICE RÉSOLU 2

Développer l'expression suivante, puis calculer : $(20 - 5) \times 38$.

Solution

$(20 - 5) \times 38$ est un produit de deux facteurs.

Le premier facteur est la différence des deux nombres 20 et 5.

Le deuxième facteur est le nombre 38.

On sait que $(20 - 5) \times 38 = 38 \times (20 - 5)$

On peut donc utiliser la propriété de distributivité : $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$.

On remplace k , a et b par les valeurs numériques de l'expression à développer :

$k \times (a - b)$	k	a	b	$k \times a - k \times b$
$38 \times (20 - 5)$	38	20	5	$38 \times 20 - 38 \times 5$

On obtient :

$$38 \times (20 - 5) = 38 \times 20 - 38 \times 5$$

ou

$$(20 - 5) \times 38 = 20 \times 38 - 5 \times 38$$

Réponse : $(20 - 5) \times 38 = 20 \times 38 - 5 \times 38 = 760 - 190 = 570$.

EXERCICE RÉSOLU 3

Développer l'expression suivante : $3(4x + 5)$.

Solution

$3(4x + 5) = 3 \times (4x + 5)$.

$3 \times (4x + 5)$ est un produit de deux facteurs.

Le premier facteur est le nombre 3.

Le deuxième facteur est une somme des **deux** termes : $4x$ et 5.

On peut donc utiliser la propriété de distributivité : $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$.

On remplace k , a et b par les valeurs de l'expression à développer :

$k \times (a + b)$	k	a	b	$k \times a + k \times b$
$3 \times (4x + 5)$	3	$4x$	5	$3 \times 4x + 3 \times 5$

On obtient :

$$3 \times (4x + 5) = 3 \times 4x + 3 \times 5$$

En effectuant, on trouve : $3 \times 4x + 3 \times 5 = 3 \times 4 \times x + 15 = 12 \times x + 15$.

Réponse : $3(4x + 5) = 12x + 15$.

EXERCICE RÉSOLU 4

Factoriser l'expression suivante, puis calculer : $64,3 \times 98 + 64,3 \times 2$.

Solution

$64,3 \times 98 + 64,3 \times 2$ est une somme de deux termes :

$$64,3 \times 98 + 64,3 \times 2 = \boxed{64,3 \times 98} + \boxed{64,3 \times 2}.$$

Le premier terme est le produit de 64,3 par 98.

Le deuxième terme est le produit de 64,3 par 2.

64,3 est un facteur commun aux deux termes de la somme :

$$64,3 \times 98 + 64,3 \times 2 = \mathbf{64,3} \times 98 + \mathbf{64,3} \times 2$$

On peut donc utiliser la propriété de distributivité : $k \times a + k \times b = k \times (a + b)$.

On remplace k , a et b par les valeurs numériques de l'expression à développer :

$k \times a + k \times b$	k	a	b	$k \times (a + b)$
$\boxed{64,3 \times 98} + \boxed{64,3 \times 2}$	64,3	98	2	$64,3 \times (98 + 2)$

Réponse : $64,3 \times 98 + 64,3 \times 2 = 64,3 \times (98 + 2) = 64,3 \times 100 = 6\,430$.

EXERCICE RÉSOLU 5

Factoriser l'expression suivante, puis calculer : $21,9 \times 19 + 21,9$.

Solution

$21,9 \times 19 + \boxed{21,9}$ est une somme de deux termes.

Le premier terme est un produit de deux facteurs.

Le deuxième terme est le nombre 21,9. On peut écrire 21,9 sous forme d'un produit. $21,9 = 21,9 \times 1$.

$$\boxed{21,9 \times 19} + \boxed{21,9} = \boxed{21,9 \times 19} + \boxed{21,9 \times 1}.$$

21,9 est un facteur commun aux deux termes de la somme.

On peut donc utiliser la propriété de distributivité : $k \times a + k \times b = k \times (a + b)$.

On remplace k , a et b par les valeurs numériques de l'expression à développer :

$k \times a + k \times b$	k	a	b	$k \times (a + b)$
$\boxed{21,9 \times 19} + \boxed{21,9 \times 1}$	21,9	19	1	$21,9 \times (19 + 1)$

Réponse : $21,9 \times 19 + 21,9 = 21,9 \times (19 + 1) = 21,9 \times 20 = 438$.

EXERCICES

DISTRIBUTIVITÉ DE LA MULTIPLICATION PAR RAPPORT A L'ADDITION

L'objectif de l'exercice 1 est de faire appliquer l'égalité $k(a + b) = ka + kb$ par identification de k , a et b . L'utilisation d'un tableau permet un changement de registre et aide à structurer le raisonnement. Dans la dernière colonne, b , qui est égal à 1, n'est pas « visible » comme dans les autres colonnes.

1. Compléter le tableau suivant, sans effectuer les calculs, en utilisant l'égalité $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$:

k	12				
a	7				
b	8				
$k \times (a + b)$		$15 \times (16 + 9)$		$(12 + 19) \times 18$	
$k \times a + k \times b$			$16 \times 7 + 35 \times 7$		$25 \times 12 + 25$

Dans les exercices 2 et 3, on applique l'égalité $k(a + b) = ka + kb$ pour différentes valeurs de k , a et b . Il reste alors à faire le choix de l'expression donnant le calcul le plus simple.

2. Dans chacun des cas ci-dessous, utiliser l'égalité $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$ avec les valeurs proposées, puis trouver le résultat en prenant l'expression la plus simple.

- a) $k = 6$ $a = 10,3$ $b = 9,7$ b) $k = 15,7$ $a = 10$ $b = 2$

c) $k = 21,4$ $a = 10$ $b = 100$ d) $k = 82,4$ $a = 36$ $b = 64$

3. Dans chacun des cas ci-dessous, utiliser l'égalité $k \times (a - b) = k \times a - k \times b$ avec les valeurs proposées, puis trouver le résultat en prenant l'expression la plus simple pour ne pas poser d'opérations.

a) $k = 87$ $a = 118$ $b = 18$ b) $k = 15,7$ $a = 100$ $b = 2$
 c) $k = 24,1$ $a = 34,7$ $b = 14,7$ d) $k = 39,2$ $a = 100$ $b = 2$

Le travail fait dans les exercices précédents doit permettre à l'élève de repérer les égalités justes.

4. Compléter par le signe « = » si l'égalité est vraie, et par le signe « ≠ » si l'égalité est fausse.

a) $15 \times (12 - 7) \dots 15 \times 12 - 15 \times 7$ $23 + 7 \times 5 \dots 23 \times 5 + 7 \times 5$ $5 \times (18,3 - 2,7) \dots 5 \times 18,3 - 2,7$.
 b) $(18 \times 6) \times 67 \dots 18 \times 67 + 6 \times 67$ $18 + 18 \times 23 \dots (1 + 23) \times 18$ $24 \times 18 - 13 \times 24 \dots (18 + 13) \times 24$.

Dans les exercices 5 et 6, on poursuit l'objectif du premier exercice en y ajoutant un travail littéral. Ainsi, l'élève sera amené à voir x^2 comme $x \times x$, dans les deux sens. Dans l'exercice 6, $15x$ devra être reconnu comme $5 \times 3x$ à l'aide des propriétés d'associativité et de commutativité de la multiplication : il est important de dégager dans les séances de calcul réfléchi, que, par exemple, $5x \times 3 = 3 \times 5 \times x = 15 \times x = 15x$ et de relier ces égalités à des propriétés de la multiplication.

5. Compléter le tableau suivant :

k	2				
a	x				
b	8				
$k \times (a + b)$		$4 \times (x + 9)$		$x(x + 1)$	
$k \times a + k \times b$			$16 \times x + 35 \times x$		$x^2 + 3x$

6. Compléter le tableau suivant :

k	4	5	x		
a				5	x
b				$3x$	3
$k \times (a + b)$					
$k \times a + k \times b$	$4x + 12$	$15x + 20$	$x^2 + 6x$	$10 + 6x$	$3x^2 + 9x$

Les exercices 7, 8 et 9 sont complémentaires. Dans l'exercice 7, on apprend à utiliser l'égalité de la distributivité par identification, les valeurs de k , a et b pouvant ici être des lettres. Dans l'exercice 8, on travaille dans le sens inverse : connaissant l'égalité, il faut retrouver les valeurs de k , a et b correspondantes. On continue à travailler l'égalité $k(a + b) = ka + kb$ dans l'exercice 9 sous un aspect encore différent.

7. Remplacer k , a et b par les valeurs proposées dans l'égalité $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$. Simplifier les écritures obtenues.

a) $k = 7$ $a = x$ $b = 1$ b) $k = 2$ $a = y$ $b = 59$
 c) $k = 5$ $a = 3$ $b = x$ d) $k = x$ $a = x$ $b = 5$

8. On considère l'égalité $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$. Dans chacun des cas ci-dessous, préciser quels sont les nombres k , a , b .

a) $3(x + 5) = 3x + 15$ b) $14x + 7 = 7(2x + 1)$ c) $x(3x + 2) = 3x^2 + 2x$ d) $7x = 3x + 4x$

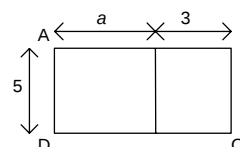
9. En utilisant l'égalité $k \times (a + b) = k \times a + k \times b$, compléter les égalités suivantes pour qu'elles soient vraies :

a) $2 \times (\dots + 7) = \dots \times 3 + \dots \times 7$ b) $5 \times (x + \dots) = \dots \times \dots + 5 \times 2$
 c) $\dots \times (6 + \dots) = y \times 6 + \dots \times a$ d) $\dots \times (7 + \dots) = 4 \times \dots + \dots \times x$

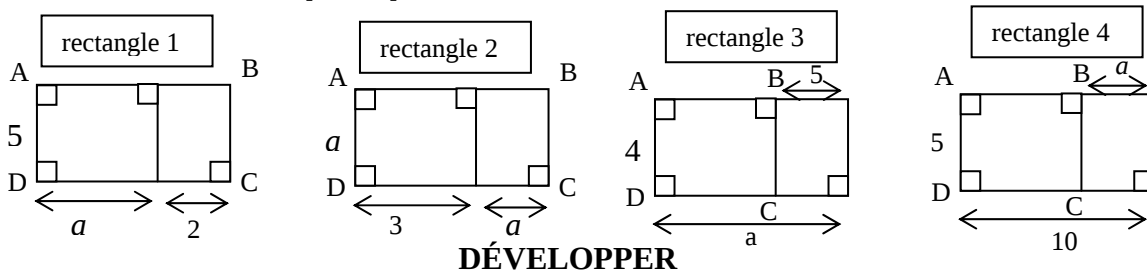
Les exercices 10 et 11 visent à illustrer l'égalité liée à la distributivité dans le registre géométrique. On pourra demander aux élèves d'écrire cette égalité.

10. Parmi les écritures proposées, certaines donnent l'aire du rectangle ABCD. Les entourer puis indiquer si ce sont des sommes ou des produits.

$3a \times 5$ $3 + 5 \times a$ $(3 + a) \times 5$
 $5a + 15$ $5a + 3$ $5a + 8$
 $5 \times a + 5 \times 3$ $5 \times a + 3$ $5(a + 3)$



11. Dans chaque cas, exprimer de deux façons différentes l'aire du rectangle ABCD en fonction de a, tout d'abord sous la forme d'un produit puis sous la forme d'une somme ou d'une différence.



Les exercices 12 à 14 sont des exercices de technique qui nécessitent parfois des changements de registre dans le cadre numérique, comme $0,25 = 1/4$ ou $0,5 = 1/2$. Ce genre de calculs est à entretenir dans les séances de calcul réfléchi. Les vérifications de calculs sur les décimaux peuvent donner l'occasion de donner des ordres de grandeur.

12. Calculer en utilisant un développement :

a) 34×102	37 $\times$ 99	12 $\times$ 34	101 $\times$ 2,4
b) 1,2 $\times$ 103	24 $\times$ 22	16 $\times$ 31	15 $\times$ 301

13. Calculer en utilisant un développement :

a) 11 $\times$ 3,7	12 $\times$ 2,8	31 $\times$ 9,9	2,9 $\times$ 34
b) 24 $\times$ 1,9	15 $\times$ 3,02	43 $\times$ 2,9	15 $\times$ 3,01

14. Calculer en utilisant un développement :

a) 28 $\times$ 2,25	12 $\times$ 3,25	24 $\times$ 2,5	16 $\times$ 3,75
e) 34 $\times$ 3,75	26 $\times$ 10,5	32 $\times$ 4,25	16 $\times$ 9,75

L'exercice 15 vise à investir la distributivité et les autres propriétés de la multiplication en utilisant des résultats disponibles.

15. a) Calculer les produits suivants : 759×2 759×3 759×7 .
 b) En déduire les résultats des calculs suivants sans poser de multiplication et en détaillant les étapes des transformations d'écriture :
 759×5 759×73 759×68 759×302 759×270 759×732 .

Le but de l'exercice 15 est d'amener l'élève à justifier les propriétés intuitives de linéarité de la proportionnalité.

16. Compléter le tableau suivant :

4	7	11	18	
6	10,5	a	b	

Comment obtient-on le nombre a sans faire de multiplications ? Expliquer.

Comment obtient-on le nombre b sans faire de multiplications ? Expliquer.

FACTORISER

Les exercices 17 à 23 utilisent la langue naturelle et permettent de dégager les structures utilisées tout en utilisant un vocabulaire rigoureux qu'on réinvestira sans cesse par la suite. Ce changement de registre permet de donner un peu plus de sens à la factorisation.

Exercice 17 : reconnaissance de formes. La présentation en tableau permet la décomposition des tâches à effectuer.

somme	termes	facteur commun	deuxième facteur	produit
$4 \times 5 + 8 \times 4$	4×5 et 8×4	4	$5 + 8$	$4 \times (5 + 8)$
$3x + 3 \times 7$		7	$10 + 3$	
$42 + 6 \times 11$		6		
$4x + 9x$				
	7×10 et 5×10 et 10×4			
				$5(x + 2)$

18. Quel est le facteur commun aux termes de la somme $0,4 \times 5 + 15 \times 0,4$?
Transformer cette somme en un produit en utilisant le facteur commun trouvé.
19. Écrire la somme de $9x$ et de 9×11 sous la forme d'un produit.
20. Écrire la somme des trois termes 8×20 , 3×20 et 20×7 .
Trouver le facteur commun puis factoriser cette somme.
21. Écrire la somme $4a + 44$ sous la forme d'un produit, sachant que 4 est le facteur commun.
22. Écrire la différence $45 - 5x$ sous la forme d'un produit, sachant que 5 est le facteur commun.
23. Écrire la somme $15 + 10x$ sous la forme d'un produit, sachant que 5 est le facteur commun.

Les exercices 24 et 25 sont des exercices de recherche d'un bon niveau.

24. Écrire la somme $3 \times 1,29 + 10 \times 2,58 + 12,90$ sous forme d'un produit sachant que 1,29 est le facteur commun.
25. Parmi les sommes suivantes, trouver celles qui ont un facteur commun puis factoriser si possible :
- | | |
|--|---|
| $5,8 \times 6 + 2,9 \times 6 + 6 \times 5,8$ | $4 \times 3 \times 7 + 12 \times 5 + 3 \times 10$ |
| $6 + 23 \times 5 + 23 + 5 \times 6$ | $5 + 9 \times 5 + 11 \times 5 + 3$ |

Les exercices 26 à 28 sont des exercices de technique. Parfois l'élève est amené à décomposer un nombre sous forme de produit, comme $17 = 17 \times 1$ ou $46 = 23 \times 2$. Ce genre de calculs est à entretenir dans les séances de calcul réfléchi. Les vérifications de calculs sur les décimaux peuvent donner l'occasion de donner des ordres de grandeur.

26. Calculer en utilisant une factorisation :
- | | | |
|--|--|---|
| a) $5,63 \times 8,3 + 5,63 \times 1,7$ | 6,42 $\times$ 14,7 – 6,42 $\times$ 4,7 | 100 $\times$ 19,53 – 100 $\times$ 19,5 |
| b) 124,7 $\times$ 11 – 124,7 | 25,2 $\times$ 35 + 25,2 $\times$ 47 + 25,2 $\times$ 18 | 36,9 $\times$ 125 – 36,9 $\times$ 48 + 36,9 $\times$ 23 |
27. Calculer en utilisant une factorisation :
- | | | |
|--|-------------------------------------|--------------------------------------|
| a) $2,1 \times 7,8 + 2,1 \times 2,2$ | 0,15 $\times$ 32 + 32 $\times$ 0,85 | 1,75 $\times$ 125 – 1,75 $\times$ 25 |
| b) $0,17 \times 13,5 - 0,07 \times 13,5$ | $7 \times 3,7 + 1,3 \times 7$ | $12 + 12 \times 99$ |
28. Calculer en utilisant une factorisation :
- | | | |
|---|------------------------------------|-------------------------------------|
| a) $12 + 13 \times 27 + 13 \times 73$ | 999 $\times$ 25 + 25 | 11 $\times$ 12 + 11 $\times$ 7 + 11 |
| b) $1,4 \times 7,2 - 7,2 \times 0,6 - 7,2 \times 0,5$ | $99 \times 72 + 72$ | $3 + 17 \times 82 - 17 \times 2$ |
| c) $13 \times 15 + 15 \times 4 + 4 \times 15 - 15$ | $17 \times 32 + 17 \times 17 + 17$ | $23 \times 98 + 46$ |

PROGRAMMES DE CALCUL

Les objectifs des exercices 29 à 31 sont les mêmes que ceux de l'activité 4.

29. a) Compléter le tableau suivant :

Voici un nombre	2	8	21	a
Le multiplier par 2				
Ajouter 1				
Multiplier par 5 le nombre obtenu				

- b) Compléter : Pour trouver rapidement le nombre final, il suffit de multiplier le nombre de départ par.... et d'ajouter... Justifier.
- c) Le nombre final est 165. Quel est le nombre de départ ?

30. a) Compléter le tableau suivant :

Voici un nombre	2	10	20	a
Le multiplier par 2				
Ajouter 2				
Multiplier le résultat par 3				
Ajouter le nombre de départ				

- b) Compléter la phrase suivante : Pour trouver rapidement le nombre final, il suffit de multiplier le nombre de départ par.... et d'ajouter... Justifier.
- c) Le nombre final est 41. Quel est le nombre de départ ?

31. Donner les instructions manquantes pour qu'on obtienne toujours, en fin de programme, le nombre choisi au départ.

Voici un nombre	6	10	20	a
Retrancher 1				
Doubler le nombre obtenu				
.....				
.....				a

CALCUL LITTÉRAL

Dans les exercices 32 et 33, on entretient le travail commencé dans le chapitre « priorités » sur les conventions usuelles d'écriture.

32. Écrire sans utiliser le signe « $\times$ » si c'est possible :

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & 3 \times a + 7 & x \times 6,5 & y \times 3,4 & 5 \times (2 \times x + 6). \\ \text{b)} & 5 \times x \times 7 & a \times b + 3 \times 7 & 2 \times \pi \times R & 4a \times 2b. \end{array}$$

33. Calculer pour $a = 4$ et $b = 1,5$:

$$4a + 3b \quad 2 + 3b \quad 4(b + 1) \quad b(3 + a) \quad 2b(a + 2).$$

Dans les exercices 34 et 35, on travaille l'égalité $k \times (a + b) = ka + kb$ dans le cadre du calcul littéral. On lui donne du sens à travers un changement de registre vers la langue naturelle, de reconnaissance de sommes et de produits.

34. Voici trois phrases. Écrire les expressions correspondantes et trouver une égalité entre deux des expressions.

Le produit de deux facteurs, le premier est 7 et le deuxième est $a + 3$.

La somme de deux termes, le premier est $7a$ et le deuxième est 3.

La somme de deux termes, le premier est $7a$ et le deuxième est 21.

35. Même exercice avec :

Le produit de deux facteurs, le premier est 4 et le deuxième est la somme de a et 3.

La somme de deux termes, le premier est 12 et le deuxième est le produit de 4 par a .

La somme de deux termes, le premier est le produit de 4 par a et le deuxième est 12.

L'exercice 36 travaille la technique du développement.

36. Donner une autre écriture des expressions suivantes en les développant :

$$4(a - 8) \quad 7(a + 5) \quad a(a + 2) \quad 5(2a + 9) \quad 3a(4a + 9)$$

Les exercices 37 et 38 amènent l'élève à réfléchir sur le sens de la factorisation dans le calcul littéral, sur l'utilité de la lettre pour généraliser.

37. On considère l'expression $A = 68 \times x + 32 \times x$.

- a) Avec la calculatrice, calculer le nombre A pour les valeurs suivantes de x :

$$x = 17 \quad x = 49 \quad x = 259.$$

Au vu des résultats, proposer une formule qui permet d'obtenir la réponse en fonction de x . Justifier.

- b) Appliquer cette formule pour calculer, sans calculatrice, la valeur de A pour $x = 3,94$

38. On considère l'expression $B = 201 \times x - x$

- a) Avec la calculatrice, calculer le nombre B pour les valeurs suivantes de x :

$$x = 13 \quad x = 45 \quad x = 234$$

Au vu des résultats, proposer une formule qui permet d'obtenir la réponse en fonction de x . Justifier

- b) Appliquer cette formule pour calculer, sans calculatrice, la valeur de B pour $x = 2,8$.

Les exercices 39 et 40 prolongent l'activité 3.

39. 1) Compléter le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4,1	5,2
$7x - x$						
$7 - x$						
$6x$						

- 2) a) L'égalité $7x - x = 7 - x$ est-elle vraie pour une valeur de x ? Justifier.
 b) L'égalité $7x - x = 7 - x$ est-elle vraie pour n'importe quelle valeur de x ? Justifier.

- 3) a) L'égalité $7x - x = 7$ est-elle vraie pour une valeur de x ? Justifier.
 b) L'égalité $7x - x = 7$ est-elle vraie pour n'importe quelle valeur de x ? Justifier.
- 4) a) L'égalité $7x - x = 6x$ est-elle vraie pour une valeur de x ? Justifier.
 b) L'égalité $7x - x = 6x$ est-elle vraie pour n'importe quelle valeur de x ? Justifier.

40. 1) Compléter le tableau suivant :

x	0	1	2
$2(x + 5)$			
$2x + 5$			
$10 + 2x$			

- 2) a) L'égalité $2(x + 5) = 2x + 5$ est-elle vraie pour une valeur de x ? Justifier.
 b) L'égalité $2(x + 5) = 2x + 5$ est-elle vraie pour n'importe quelle valeur de x ? Justifier.
- 3) a) L'égalité $2(x + 5) = 10 + 2x$ est-elle vraie pour une valeur de x ? Justifier.
 b) L'égalité $2(x + 5) = 10 + 2x$ est-elle vraie pour n'importe quelle valeur de x ? Justifier.

Les exercices 41 à 43 travaillent le sens d'une égalité. La conclusion est que l'égalité est fausse pour telle ou telle valeur de x ou bien qu'elle semble vraie pour n'importe quelle valeur de x . Dans ce dernier cas, la justification attendue se fait à l'aide de la distributivité.

41. Dans chacun des cas ci-dessous, a-t-on l'égalité proposée pour les valeurs de x indiquées ? Donner une conclusion dans chaque cas et la justifier.
- a) $3(x + 5) = 3x + 5$ pour $x = 0$; $x = 1$ b) $3(5 + x) = 15 + x$ pour $x = 0$; $x = 7$; $x = 0,1$
 c) $3(5 - x) = 8 + 3 - x$ pour $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$ d) $3(5 + x) = 15 + 3x$ pour $x = 0$; $x = 0,1$; $x = 2$; $x = 10$
42. Dans chacun des cas ci-dessous, a-t-on l'égalité proposée pour les valeurs de x indiquées ? Donner une conclusion dans chaque cas et la justifier.
- a) $(3 + x) \times 5 + 7x = 15 + 12x$ pour $x = 0$; $x = 1$; $x = 5$ b) $5x \times 3x = 15x$ pour $x = 0$; $x = 1$; $x = 2$
 c) $5 + 3x = 8x$ pour $x = 1$; $x = 0$; $x = 2$ d) $8x + 4 = 12x$ pour $x = 1$; $x = 0,1$; $x = 3$.
43. Dans chacun des cas ci-dessous, a-t-on l'égalité proposée pour les valeurs de a indiquées ? Donner une conclusion dans chaque cas et la justifier.
- a) $7 \times (a + 2) - 14 = 7a$ pour $a = 0$; $a = 1$; $a = 5$ b) $(2a + 3) \times 4 - 3a = 5a + 12$ pour $a = 0$; $a = 1$; $a = 3$
 c) $6a + a = 7a$ pour $a = 54$; $a = 0$; $a = 2$ d) $9a + 2a = 11a$ pour $a = 1$; $a = 0,1$; $a = 3$

Dans l'exercice 44, on attend de l'élève qu'il justifie que l'égalité est vraie par une propriété et qu'elle est fausse par un contre-exemple. Le travail fait dans les exercices précédents doit l'y amener.

44. Les égalités suivantes sont-elles justes ou fausses ? Expliquer.

$$\begin{array}{llll} 5 \times (a + 3) = 5a + 15 & 7(4 + a) = 4 + 7a & 6a - 12 = 6(a - 2) & 2 + 8a = 10a \\ 3 - 6a = 3(1 - 2a) & 4a + 3a = 7a & a(a + 2) = a^2 + 2a & 2a + 3a = 6a \end{array}$$

Les exercices 45 à 48 sont des exercices de technique qui viennent après un travail sur le sens de la distributivité et sur le sens de l'égalité. Les résultats peuvent être vérifiés en testant par une valeur numérique.

45. Donner une autre écriture des expressions suivantes en les factorisant :

$$3a + 12 \quad 20a - 35 \quad 8 + 24a \quad a^2 + 6a \quad 6a + 6.$$

46. Réduire les expressions suivantes en les factorisant :

$$7a + 9a \quad 12a + a \quad 15a - a \quad 5a + 3 + 4a \quad a + a + a \quad 9a - a - 5.$$

47. Écrire le plus simplement possible :

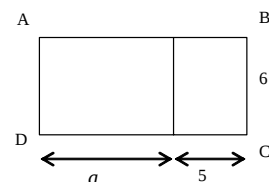
$$32 \times x + 68 \times x \quad 17a - 7a \quad 20a - 10 \quad 8b + 2b \quad 17c + c \quad 3 + 7x.$$

48. Trouver les expressions qui sont égales :

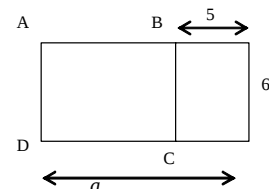
$$\begin{array}{lllll} A = 21a + 7a & B = 21a \times 7 & C = 21a + 7 & D = 28a & E = 30a - 2a. \\ F = 7(3a + 1) & G = 147a & H = 22a & I = 21a + a + 6a & J = 6a + 1 + 15a + 6. \end{array}$$

Pour les exercices 49 et 50, la première question ne fait qu'illustrer la distributivité. La deuxième utilise les techniques de réduction. La lettre prend ici du sens dans le registre géométrique.

49. 1) Exprimer l'aire du rectangle ABCD en fonction de a , de deux façons différentes.
2) Exprimer le périmètre du rectangle ABCD en fonction de a .



50. 1) Exprimer l'aire du rectangle ABCD en fonction de a , de deux façons différentes.
2) Exprimer le périmètre du rectangle ABCD en fonction de a .



Les exercices 51 à 55 permettent de prolonger le travail commencé dans les activités 7 à 9. Ainsi, l'élève procédera par essai-erreur dans les exercices 51, 52 et 54. Les questions des exercices 53 et 55 sont moins ouvertes mais permettent de cibler deux objectifs : tester une égalité pour une valeur donnée de la variable pour l'exercice 53, travailler le sens d'une expression littérale du type $ax + b$ dans l'exercice 55.

51. a) En complétant le tableau ci-dessous, trouver pour quelle valeur de x les expressions $2x + 9$ et $3x + 4$ sont égales.

x	$2x + 9$	$3x + 4$	Égalité $2x + 9 = 3x + 4$
7	23	25	Fausse

- b) Compléter : L'égalité $2x + 9 = 3x + 4$ est vraie pour $x = \dots$

52. Procéder comme dans l'exercice 1 pour répondre aux questions suivantes :

- a) L'égalité $2x + 7 = 3x - 1$ est vraie pour $x = \dots$
b) L'égalité $3x + 1 = 5x - 4$ est vraie pour $x = \dots$
c) L'égalité $x + 18 = 6x + 4$ est vraie pour $x = \dots$
d) L'égalité $3x + 1 = 6x$ est vraie pour $x = \dots$

Dans l'exercice 53, on revoit le calcul fractionnaire.

53. a) Tester si l'égalité $5 - x = 2x + 4$ est vraie pour $x = 2$ puis pour $x = \frac{1}{3}$.
b) Tester si l'égalité $10 - x = 2x + 4$ est vraie pour $x = 5$ puis pour $x = \frac{1}{7}$.
c) Tester si l'égalité $10x - 3 = 7x - 1$ est vraie pour $x = 1$ puis pour $x = \frac{2}{3}$.

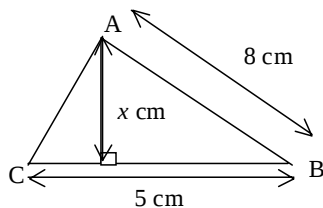
54. Compléter après avoir fait des essais :

- a) Les expressions $3x + 4$ et $2x + 7$ sont égales pour $x = \dots$, leur valeur commune est alors
b) Les expressions $10x - 5$ et $5x + 1$ sont égales pour $x = \dots$, leur valeur commune est alors
c) Les expressions $4x + 3$ et $2x + 8$ sont égales pour $x = \dots$, leur valeur commune est alors
d) Les expressions $6x - 5$ et $12 + 2x$ sont égales pour $x = \dots$, leur valeur commune est alors
e) Les expressions $3x + 5$ et $11x - 20$ sont égales pour $x = \dots$, leur valeur commune est alors
f) Les expressions $2x + 9$ et $5x + 1$ sont égales pour $x = \dots$, leur valeur commune est alors

55. Trouver la valeur de x pour laquelle l'égalité est vraie, en utilisant un schéma fléché, comme dans l'activité 9. Vérifier

- a) L'égalité $3x + 1 = 7$ est vraie pour $x = \dots$ b) L'égalité $7x = 2$ est vraie pour $x = \dots$
c) L'égalité $7x + 2 = 9$ est vraie pour $x = \dots$ d) L'égalité $x + 1,3 = 7,01$ est vraie pour $x = \dots$
e) L'égalité $x - 2,3 = 1,24$ est vraie pour $x = \dots$ f) L'égalité $3x - 1 = 7$ est vraie pour $x = \dots$
g) L'égalité $4x = 9$ est vraie pour $x = \dots$ h) L'égalité $2x + 6x = 12$ est vraie pour $x = \dots$

56. Trouver x , sachant que l'aire de triangle mesure 16 cm^2



57. Le périmètre d'un cercle mesure $18,84 \text{ cm}$. Trouver une valeur approchée de son rayon en prenant $3,14$ comme valeur approchée de π .
58. Le périmètre d'un carré est égal à celui d'un cercle de 5 cm de rayon. Trouver une valeur approchée du côté du carré.
59. Le périmètre d'un cercle est égal à celui d'un carré de $4,5 \text{ cm}$ de côté. Trouver une valeur approchée du rayon de ce cercle en prenant 3 comme valeur approchée de π .

PROBLÈMES

Les exercices 60 à 63 permettent de laisser travailler les élèves les plus rapides de façon autonome et de les mettre en situation de recherche.

60. On a écrit ci-dessous quatre affirmations. Indiquer lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et illustrer chaque affirmation par un exemple :

- 1) « Le double d'une somme de deux termes est égale à la somme des doubles de chacun des termes ».
- 2) « Le double d'un produit de deux facteurs est égal au produit des doubles de chacun des facteurs ».
- 3) « La moitié d'une différence de deux termes est égale à la différence des moitiés de chacun des termes ».
- 4) « Le tiers du produit de deux facteurs est égal au produit du tiers de chacun des facteurs ».

61. a) Donner la valeur exacte de la somme $307\,432,56 \times 213,05 + 307\,432,56 \times 786,95$.

- b) Sans poser de multiplication calculer la valeur exacte de $547\,893 \times 999\,999$.

62. 1) Observer la disposition bien connue de la multiplication de 253 par 27 ci-contre. Sans faire aucun calcul, compléter la suite de calculs ci-dessous :

$$\begin{array}{r}
 253 \\
 \times 27 \\
 \hline
 1771 \\
 5060 \\
 \hline
 6831
 \end{array}
 \quad
 \begin{aligned}
 &253 \times 27 \\
 &= 253 \times (20 + 7) \\
 &= 253 \times 20 + 253 \times \dots \\
 &= \dots + 1771 \\
 &= 6831
 \end{aligned}$$

- 2) A l'aide des opérations posées ci-dessous, détailler le calcul en colonne des produits qui sont ainsi effectués (s'aider de la question 1)) :

$$\begin{array}{r}
 74 \\
 \times 36 \\
 \hline
 444 \\
 2220 \\
 \hline
 2664
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 253 \\
 \times 187 \\
 \hline
 1771 \\
 2024 \\
 2530 \\
 \hline
 47311
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 483 \\
 \times 203 \\
 \hline
 1449 \\
 9660 \\
 \hline
 98049
 \end{array}$$

- 3) A l'aide des calculs en ligne ci-dessous, reconstituer sans faire aucun calcul, la disposition classique de la multiplication de deux nombres correspondante :

546×37	$238 \times 2\,006$	407×305	$\dots \times 36$
$= 546 \times (30 + 7)$	$= 238 \times (2\,000 + 6)$	$= (400 + 7) \times 305$	$= 487 \times (\dots + 6)$
$= 546 \times 30 + 546 \times 7$	$= 238 \times 2\,000 + 238 \times 6$	$= 400 \times 305 + 7 \times 305$	$= 487 \times 30 + \dots \times \dots$
$= 16\,380 + 3\,822$	$= 476\,000 + 1\,428$	$= 122\,000 + 2\,135$	$= \dots + 2\,922$
$= 20\,202$	$= 477\,428$	$= 124\,135$	$= \dots$

63. a) On considère la suite de calculs suivante :

$$\begin{array}{ll} \text{Calcul 1 :} & 1 + 1 \times 1 \\ \text{Calcul 2 :} & 2 + 2 \times 2 \\ \text{Calcul 3 :} & 3 + 3 \times 3 \\ \text{Calcul 4 :} & 4 + 4 \times 4 \\ \text{Calcul 5 :} & 5 + 5 \times 5 \end{array}$$

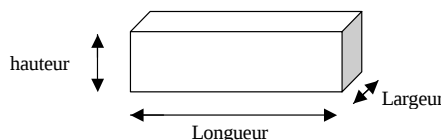
- b) Quels sont les 3 calculs suivants ? Les effectuer.
 c) Pour chaque calcul, on peut obtenir le résultat en n'effectuant qu'une seule multiplication. Quelle est cette multiplication ?
 d) Écrire le calcul 39 et donner son résultat.
 e) Écrire le calcul n. Écrire alors le résultat sous la forme d'un produit.

L'exercice 64 est un exercice où l'utilisation d'une formule est naturelle pour simplifier le travail.

64. a) On considère un cube d'arête 3 cm. Calculer la longueur totale des arêtes du cube si on les met bout à bout.
 b) Calculer le plus rapidement possible la longueur totale des arêtes mises bout à bout d'un cube de 5 cm d'arête.
 c) Trouver une formule donnant la longueur totale des arêtes d'un cube quelconque si on appelle « a » la longueur d'une arête.

Dans l'exercice 65, on utilise la même stratégie que dans l'activité 3, en faisant des essais pour établir une conjecture (questions a et b). Le passage à la formule nécessite l'introduction d'une lettre, un changement de registre de la langue naturelle vers l'expression algébrique pour obtenir l'expression puis une simplification de cette expression.

65. On considère une famille de pavés droits, dont la largeur est toujours 3 cm, et dont la longueur est le double de la hauteur.
- a) Soit un pavé droit de cette famille, dont les dimensions sont : 2 cm de haut, 3 cm de large, et dont la longueur est le double de la hauteur. Quelle longueur totale obtient-on si on additionne les longueurs de toutes les arêtes ?
 b) Même question pour un pavé droit de la même famille, de 3 cm de haut (et toujours 3 cm de large).
 c) Trouve une formule qui donne la longueur totale des arêtes d'un pavé de cette famille si on appelle « h » la hauteur en cm.



L'objectif de l'exercice 66 est l'analyse d'un texte et le tri des informations. Le professeur peut inciter à effectuer un changement de registre de la langue naturelle vers l'expression algébrique, mais l'élève peut très bien rester dans le registre de la langue naturelle avec une formule du style « dix fois plus de fenêtres que de côtés longs ».

66. Cléopâtre et l'architecte :

Cléopâtre et César n'arrivent pas à se décider sur le nombre de fenêtres et de portes de leur nouveau palais. Ils convoquent leur architecte et lui disent : « Nous désirons un palais qui ait un certain nombre de côtés : il y aura des côtés longs, et quatre fois plus de côtés courts que de côtés longs. Tous les côtés longs auront la même longueur et tous les côtés courts aussi. Sur chaque côté long, on trouvera une porte et six fenêtres et sur chaque côté court une fenêtre. »

Cléopâtre et César voudraient savoir combien de fenêtres possèdera leur palais. Mais ils n'arrivent pas à se décider sur le nombre de côtés.

- a) S'ils choisissent deux côtés longs, combien de fenêtres aura leur palais ?
 b) Même question avec trois côtés longs, puis avec un seul côté long.
 c) Trouve une formule qui donne le nombre de fenêtres en fonction du nombre de côtés longs.
 d) Si Cléopâtre et César souhaitent avoir mille fenêtres, combien leur palais doit-il avoir de côtés longs ? Combien aura t-il de côtés en tout ? Si un côté long mesure cinq mètres, quel sera le périmètre de ce palais ?

Exercice 67 : en lui faisant analyser le texte et trier les informations, on incite l'élève à utiliser une formule, méthode plus efficace lors du changement de données de départ que de refaire les calculs. La variable est explicitement définie puisque toutes les longueurs se rapportent à la ligne droite de départ. La fin de l'exercice ne s'y réfère plus directement. L'élève doit alors s'y rapporter de lui-même.

67. Dans une course automobile, un circuit est constitué de plusieurs parties :

1. Une ligne droite de départ.
 2. Un long virage à gauche, de longueur deux fois la ligne droite du départ.
 3. Une longue ligne droite de longueur trois fois la ligne droite du départ.
 4. Une chicane, de longueur la moitié de la ligne droite de départ.
 5. Un dernier très long virage à gauche, de longueur trois fois la ligne droite du départ.
- a) Sachant que la ligne droite de départ mesure 120 mètres, quelle est la longueur du circuit ?
- b) Et si la ligne droite ne mesure en fait que 119m ? Ou bien 121m ? Quelle méthode utiliser pour éviter d'avoir à refaire tous les calculs depuis le début ?
- c) On modifie le circuit en ajoutant deux virages, le premier long comme trois fois la chicane du 4, et l'autre aussi long que le dernier long virage à gauche du 5. Quelle est la longueur du circuit si ce dernier virage mesure 330 mètres ?

CALCULS À ENTREtenir

Types de calcul	Objectifs, méthodes, commentaires
<i>En règle générale, tous les types de calculs des chapitres précédents, auxquels s'ajoutent les calculs suivants</i>	
Utilisation de la distributivité dans les calculs : 34×101 ; 34×99 ; $34 \times 1,02$; ... $18 \times 1,5$; $24 \times 2,5$; ... $12 \times 3,25$; $12 \times 3,75$; ... $12 \times 99 + 12$; ...	On peut commencer avant le chapitre distributivité, en exploitant la distributivité intuitive de nos élèves, ce qui permet une entrée en « douceur » dans le chapitre. Ce genre de calculs est à entretenir tout au long de l'année. Rester également en contact avec les quarts, la moitié d'un nombre.
Réduire des expressions du type : $3a + 4a$; $3a - a$; $2a + 3 + 7a$.	Lors de la correction, une grande attention sera apportée à l'interprétation des erreurs commises, à la justification reliée à la distributivité. On sera ainsi amené à remplacer a par une valeur pour vérifier.
Simplifier des expressions du type : $2 + 3 \times a$; $3 \times 5a$; $2a \times 7$; $3a \times a$.	Toujours la même attention pour l'interprétation des erreurs, ne pas hésiter à parler de commutativité et d'associativité de la multiplication.
Développer des expressions : $3(4 + x)$; $2(3x + 4)$; ...	Toujours la même attention pour l'interprétation des erreurs.

CHAPITRE 3

ÉGALITÉ ET COMPARAISON DE FRACTIONS

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Donner un sens à l'écriture fractionnaire.
- Reconnaître deux fractions égales.
- Comparer une fraction et un entier donné.
- Comparer deux fractions.
- Déterminer un pourcentage.
- Ramener une division dont le diviseur est décimal à une division dont le diviseur est entier et savoir l'effectuer.

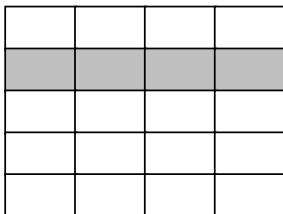
REPÈRES POUR LE CONTENU DU COURS

- Égalité de deux fractions.
- Comparaison de deux fractions.
- Pourcentage.

ACTIVITÉ

ACTIVITÉ 1 : FRACTIONS D'AIRES

1) On considère le rectangle ci-dessous :



- a) Trouver des fractions de dénominateurs différents représentant la surface coloriée du rectangle.
- b) Comment faire pour trouver d'autres fractions correspondant aussi à cette aire coloriée ? Rappeler la règle utilisée.

2) Tracer un rectangle de 6 carreaux sur 4 puis colorier la fraction de son aire indiquée. Écrire ensuite la façon de procéder, comparer les différentes procédures dans la classe :

- a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{5}{6}$ e) $\frac{5}{24}$

3) Comment choisir le rectangle si on veut colorier facilement les trois cinquièmes de ce rectangle ?

Objectifs et commentaires

- Reprise de ce qui a été fait en 6^{ème}.
- Visualiser l'égalité de deux fractions.

Par cette représentation, on ne peut travailler que sur les fractions inférieures à 1.

Dans cette activité, on amène l'élève à se représenter deux fractions égales à travers un changement de registre, du numérique au graphique. Ainsi dans la première partie, à la question a, on peut voir la partie grisée comme une ligne sur cinq ou comme quatre carreaux sur vingt. Bien sûr, ce n'est qu'une visualisation, ce n'est pas la démonstration de l'égalité $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$. Pour cela, on peut demander d'effectuer ces deux quotients. Dans la question b, le graphique ne peut plus être utilisé. On attend de l'élève qu'il applique une propriété, vue en sixième.

La deuxième question fait travailler l'élève dans l'autre sens afin qu'il soit capable de visualiser une fraction d'un tout.

Pour colorier $\frac{3}{4}$ de l'aire, plusieurs procédures peuvent être envisagées, parmi lesquelles :

3 lignes (ou 3 colonnes) sur 4.

Colorier $\frac{1}{4}$ de 24 carreaux puis $\frac{3}{4}$ de 24 carreaux.

Utiliser l'égalité $\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$.

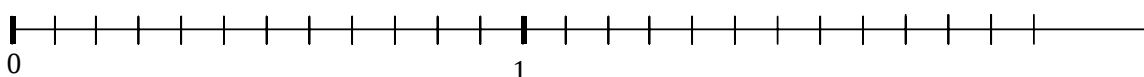
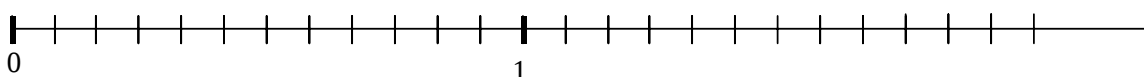
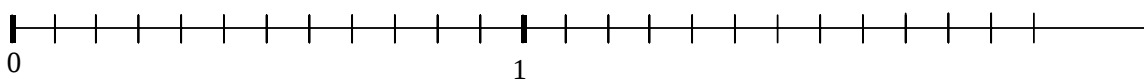
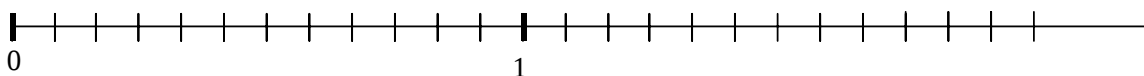
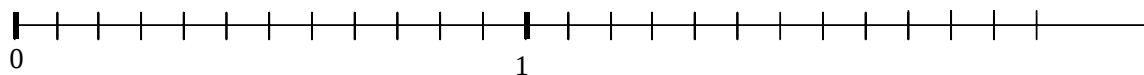
Différentes représentations peuvent alors être construites pour une même fraction : $\frac{4}{6}$ peut être vu comme $4 \times \frac{1}{6}$, égal à $\frac{2}{3}$...

Il peut-être alors intéressant de poser, en fin d'activité la question « combien de fois y a-t-il $\frac{2}{3}$ dans $\frac{4}{6}$? » et de comparer le double de deux tiers avec quatre sixièmes, par le biais de la langue naturelle.

ACTIVITÉ 2 : DROITE GRADUÉE

1) Placer :

- sur la première droite les nombres $\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \dots$ tous les nombres fractionnaires possibles ayant pour dénominateur 12.
- sur la deuxième droite, tous les nombres fractionnaires possibles ayant pour dénominateur 6.
- sur la troisième droite, tous les nombres fractionnaires possibles ayant pour dénominateur 4.
- sur la quatrième droite, tous les nombres fractionnaires possibles ayant pour dénominateur 3.
- sur la cinquième droite, tous les nombres fractionnaires possibles ayant pour dénominateur 2.



2) Écrire le nombre 2 :

- Sous la forme d'une fraction de dénominateur 2.
- Sous la forme d'une fraction de dénominateur 3.
- Sous la forme d'une fraction de dénominateur 4.
- Sous la forme d'une fraction de dénominateur 6.
- Sous la forme d'une fraction de dénominateur 12.

3) Reprendre la question 2 avec les nombres 3 et 5.

Objectifs et commentaires

- Graduer une droite à l'aide de nombres écrits sous la forme de fractions.
- Dans le registre graphique, donner du sens à l'écriture fractionnaire.
- Travailler le lien entre différentes écriture d'un même nombre.
- Trouver l'écriture fractionnaire d'un entier.

A travers la droite graduée, la notion de fraction peut prendre du sens. La notion de droite graduée mérite d'être explicitée (unité, intervalles de même longueur, nombre d'intervalles, $\frac{1}{6}$ signifie un sixième de l'unité donc $\frac{1}{6}$ de 12 intervalles). La fraction $\frac{5}{6}$ est alors vue comme cinq fois le sixième de l'unité.

Avec cette activité on familiarise l'élève avec cet outil qui permet de passer du registre symbolique de l'écriture fractionnaire au registre graphique de la droite graduée et vice-versa.

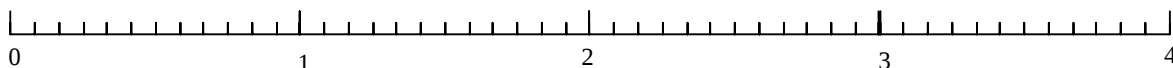
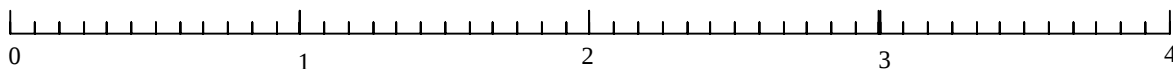
Dans les questions 2 et 3, on prolonge les observations faites dans la première, comme $\frac{12}{12} = 1$ ou $\frac{6}{3} = 2$, pour amener l'élève à voir la fraction comme un quotient de deux entiers : il pourra ainsi écrire $10 = \frac{30}{3}$ en faisant le lien avec $3 \times 10 = 30$.

ACTIVITÉ 3 : MÉTHODES POUR COMPARER DES FRACTIONS

Utiliser les droites graduées ci-dessous pour répondre aux questions de chacune des parties suivantes.

1) Placer

- Tous les nombres fractionnaires possibles ayant pour dénominateur 3 sur la première droite.
- Tous les nombres fractionnaires possibles ayant pour dénominateur 4 sur la deuxième droite.
- Tous les nombres fractionnaires possibles ayant pour dénominateur 6 sur la troisième droite.



2) Comparaison d'une fraction à l'unité.

En observant les trois droites graduées, émettre une conjecture permettant de reconnaître une fraction plus petite que 1.

3) Comparaison de fractions à l'aide d'entiers.

- Peut-on placer $\frac{17}{3}$ sur une telle graduation ? Pourquoi ?
- Encadrer $\frac{15}{4}$ entre deux entiers consécutifs.
- Comparer $\frac{15}{4}$ et $\frac{17}{3}$ à l'aide des remarques précédentes.
- Encadrer $\frac{9}{4}$ et $\frac{19}{6}$ entre deux entiers consécutifs, puis comparer ces deux fractions.

4) Comparaison de fractions de même dénominateur.

- On veut maintenant comparer $\frac{23}{6}$ et $\frac{10}{3}$. Pourquoi la méthode précédente ne convient-elle pas ?
- Donner une autre écriture de $\frac{10}{3}$ permettant de comparer $\frac{10}{3}$ et $\frac{23}{6}$.
- Comparer avec la même méthode $\frac{17}{6}$ et $\frac{5}{2}$.

5) Comparaison de fractions à l'aide de calculs de quotients.

On veut maintenant comparer $\frac{11}{6}$ et $\frac{17}{9}$.

- Encadrer ces deux fractions entre deux entiers consécutifs.
- Pourquoi ne peut-on rien en conclure pour la comparaison de $\frac{11}{6}$ et $\frac{17}{9}$?
- A l'aide de calculs de quotients, donner un encadrement de $\frac{11}{6}$ et un autre de $\frac{17}{9}$ permettant de comparer ces deux nombres.

Objectifs et commentaires

- Utilisation de la droite graduée pour donner du sens à la comparaison de nombres.
- Comparaison d'une fraction à l'unité.
- Comparaison d'une fraction avec l'unité, encadrement d'une fraction par deux entiers consécutifs.
- Diverses méthodes de comparaison.

A l'aide de la droite graduée, plusieurs méthodes de comparaisons peuvent naturellement être abordées. Il faut, à tout moment, en cas de blocage, renvoyer l'élève aux droites graduées qui ont été complétées au début de l'activité.

Certaines questions peuvent amener un débat collectif intéressant dans la classe (3a, 5c,...).

Il est intéressant de faire le lien entre la décomposition $\frac{23}{6} = 3 + \frac{5}{6}$ et la division euclidienne.

ACTIVITÉ 4 : CALCUL RÉFLÉCHI ET QUOTIENTS DE DÉCIMAUX TOUT AU LONG DE L'ANNÉE

Notre pratique

Nous proposons l'approche du quotient de deux décimaux à l'aide du calcul réfléchi, suivant les modalités décrites après l'introduction. Cette activité se déroulera tout au long de l'année scolaire.

Quotients de décimaux : une progression possible

1. Calculs du type 0,6 : 0,2

On peut commencer par proposer le calcul **0,6 : 0,2** sans avoir abordé le cours, ni la technique correspondante.

On récolte alors l'ensemble des résultats dans la classe, sans faire de commentaire au départ.

En général, la plupart des élèves donnent comme résultat 0,3 ou 0,03, en appliquant des algorithmes liés à la somme ou au produit de deux décimaux. Ainsi, ils effectuent $6 : 2$ et « mettent un chiffre après la virgule » (algorithme de l'addition) ou « mettent deux chiffres après la virgule » (algorithme de la multiplication). Notre rôle est, dans un premier temps, de leur montrer leur erreur en vérifiant avec une multiplication : $0,3 \times 0,2 = 0,06$ et $0,03 \times 0,2 = 0,006$. On pourra aussi leur faire prendre conscience qu'il y a plus d'une fois 0,2 dans 0,6 et, donc, que $0,6 : 0,2$ est plus grand que 1.

La langue naturelle permet de prendre conscience que la question sous-jacente est « Combien de fois y-a-t-il 0,2 dans 0,6 ? » ou « Combien de fois y-a-t-il 2 dixièmes dans 6 dixièmes ? ». C'est en répondant aux questions précédentes que la réponse 3 prend sens.

On pourra alors faire remarquer que $0,6 : 0,2 = 6 \text{ dixièmes} : 2 \text{ dixièmes} = 6 : 2 = 3$, on vérifiera avec le produit correspondant. Cette vérification est essentielle pour ramener les élèves au sens du quotient.

2. Calcul du type 6 : 0,2

On peut proposer, l'heure suivante, le calcul **6 : 0,2** en procédant comme précédemment.

En général, beaucoup d'élèves proposent 0,3. Il convient alors de leur rappeler ce qui a été vu l'heure précédente, le lien entre multiplication et division. La grille de calcul leur permet d'avoir une trace écrite des calculs des séances précédentes. Ainsi, le calcul du produit $0,3 \times 0,2$ est là aussi essentiel pour prendre conscience de l'erreur. C'est la question « combien de fois y-a-t-il 0,2 dans 6 ? » transformé en « combien de fois y-a-t-il 2 dixièmes dans 60 dixièmes ? » qui permet de conclure. On pourra alors faire remarquer que $6 : 0,2 = 60 \text{ dixièmes} : 2 \text{ dixièmes} = 60 : 2 = 3$, on vérifiera avec le produit correspondant. Cette vérification est essentielle pour ramener les élèves au sens du quotient.

3. Calculs du type 6 : 0,02 ou 0,6 : 0,02

On procède comme dans les calculs précédents, en commençant par l'analyse et le traitement des erreurs.

La question « combien de fois y-a-t-il 2 centièmes dans 600 centièmes ? » permet de redonner le sens et de conclure sur $6 : 0,02 = 300$.

On peut procéder par essai-erreur et vérifier avec les produits correspondants :

$$\frac{6}{0,02} \text{ n'est pas égal à } 0,03 \text{ car } 0,03 \times 0,02 = 0,0006.$$

$$3 \times 0,02 = 0,06 \quad 30 \times 0,02 = 6 \quad 300 \times 0,02 = 6 \quad \text{donc } \frac{6}{0,02} = 300$$

On peut déboucher sur : $6 : 0,02 = \frac{6}{0,02} = \frac{600}{2} = 300$, en contrôlant que $300 \times 0,02 = 6$.

4. Calculs du type 4 : 0,1 ou 4 : 0,01...quotients de décimaux par 0,1 ou par 0,01 ou par 0,001.....

Là aussi, on commence par repérer, analyser et traiter les erreurs, comme précédemment. On peut aussi amener les élèves sur un autre point de vue : «comme multiplier un nombre par 0,1 revient à le diviser par 10, alors diviser un nombre par 0,1 revient à le multiplier par 10 ».

5. Réactiver ces connaissances tout au long de l'année, avec des calculs comme $\frac{4,8}{0,4}$ ou $\frac{2,4}{0,06}$ ou $\frac{1,2}{0,001}$

ACTIVITÉ 5 : POURCENTAGES

1) On donne les pourcentages suivants : 10% ; 50% ; 20% ; 25% ; 75% ; 40% ; 70%.

- Trouver une fraction simple représentant chacun de ces pourcentages.
- Donner la valeur décimale de chacune de ces fractions.

2) A l'issue d'entraînements de basket-ball, on a pu relever les données suivantes :

	Nombre de paniers réussis	Nombre de paniers tentés
Joueur A	7	20
Joueur B	11	44
Joueur C	14	40
Joueur D	24	60
Joueur E	8	30
Joueur F	2	7

- Quel est celui des joueurs A et C qui a la meilleure réussite ? Justifier en utilisant des fractions.
- Quel est celui des joueurs A et B qui a la meilleure réussite ? Justifier en utilisant des fractions.
- Écrire une fraction de dénominateur égal à 100 pour évaluer la réussite de chacun des joueurs A, B, C et D.
- Pour les joueurs E et F, trouver un arrondi au centième du quotient $\frac{\text{Nombre de paniers réussis}}{\text{Nombre de paniers tentés}}$. En déduire une valeur approchée de leurs pourcentages de réussite.
- Classer les joueurs A, B, C, D, E et F dans l'ordre croissant de leurs réussites.

Objectifs et commentaires

On vise à approcher la notion de pourcentage sous deux aspects :

- A l'aide de fractions égales, trouver une fraction de dénominateur 100.
- A l'aide de calculs de quotients, trouver le nombre de centièmes, faire le lien avec le pourcentage.

On pourra également faire le lien entre pourcentage et proportionnalité

Langage lié aux fractions	Langage lié à la proportionnalité												
$\frac{24}{60} = \frac{8}{20} = \frac{40}{100}$	<table><tr><td></td><td>Nombre de paniers tentés</td><td>Nombre de paniers réussis</td></tr><tr><td>: 3</td><td>60</td><td>24</td></tr><tr><td></td><td>20</td><td>8</td></tr><tr><td>× 5</td><td>100</td><td>40</td></tr></table>		Nombre de paniers tentés	Nombre de paniers réussis	: 3	60	24		20	8	× 5	100	40
	Nombre de paniers tentés	Nombre de paniers réussis											
: 3	60	24											
	20	8											
× 5	100	40											

COURS

NUMÉRATEUR ET DÉNOMINATEUR D'UNE FRACTION

Définition : Dans l'écriture $\frac{a}{b}$, le nombre a s'appelle le *numérateur* et le nombre b , non nul, le *dénominateur*.

Remarque : Dans l'écriture $\frac{2}{7}$, le *dénominateur* est 7 ; il permet de dénommer la fraction : ce sont des septièmes. Le *numérateur* est 2. Son rôle est de compter le nombre de septièmes.

CHANGEMENT D'ÉCRITURE D'UN NOMBRE FRACTIONNAIRE

Propriété : On ne change pas un nombre en écriture fractionnaire en multipliant ou en divisant son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

$$\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b} \quad b \neq 0 \text{ et } k \neq 0$$

$\times k$
 $\swarrow$
 $\frac{a}{b}$
 $\nwarrow$
 $\times k$

Applications

Écriture décimale de certains quotients : on cherche à les écrire sous forme de dixièmes ou de centièmes.

$$\frac{17}{5} = \frac{34}{10} = 3,4 \quad \text{ou} \quad \frac{17}{5} = \frac{17 \times 2}{5 \times 2} = \frac{34}{10} = 3,4.$$

$$\frac{11}{25} = \frac{44}{100} = 0,44 \quad \text{ou} \quad \frac{11}{25} = \frac{11 \times 4}{25 \times 4} = \frac{44}{100} = 0,44.$$

Simplification de fractions :

$$\frac{36}{45} = \frac{4}{5} \quad \text{ou} \quad \frac{36}{45} = \frac{9 \times 4}{9 \times 5} = \frac{4}{5}.$$

On a simplifié $\frac{36}{45}$ par 9.

Rappels : critères de divisibilité. Ils sont utiles lorsqu'on veut simplifier des fractions.

Un nombre est divisible par **2** s'il se termine par **0, 2, 4, 6 ou 8**.

Un nombre est divisible par **5** s'il se termine par **0 ou 5**.

Un nombre est divisible par **3** si la **somme de ses chiffres** est divisible par **3**.

Un nombre est divisible par **9** si la **somme de ses chiffres** est divisible par **9**.

Un nombre est divisible par **4** si le **nombre formé des deux derniers chiffres** est divisible par **4**.

COMPARAISON DE DEUX NOMBRES EN ÉCRITURE FRACTIONNAIRE

Comparaison d'une fraction à l'unité

Propriété : Si le numérateur d'une fraction est plus grand que le dénominateur, alors cette fraction est plus grande que 1.

Exemples

15 est plus grand que 11 donc $\frac{15}{11} > 1$.

9 est plus petit que 11 donc $\frac{9}{11} < 1$.

Comparaison de deux fractions de même dénominateur

Propriété : Si deux fractions ont le même dénominateur alors elles se rangent dans le même ordre que leurs numérateurs.

Exemple

Sept onzièmes sont plus petits que dix onzièmes, ce qui s'écrit : $\frac{7}{11} < \frac{10}{11}$.

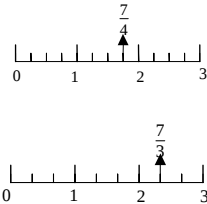
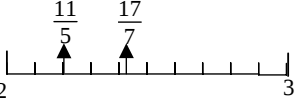
Remarque : Lorsque les fractions ne sont pas écrites dans la même unité (avec le même dénominateur), on les réduit au même dénominateur.

Exemple

Pour comparer $\frac{5}{6}$ et $\frac{17}{18}$, on utilise que : $\frac{5}{6} = \frac{15}{18}$ et on conclut que $\frac{5}{6} < \frac{17}{18}$.

Comparaison de deux fractions à l'aide d'encadrements de quotients

Méthode : Pour comparer deux fractions, on peut effectuer la division du numérateur par le dénominateur pour trouver un encadrement du quotient obtenu.

Exemple 1 La partie entière du quotient suffit pour conclure. Comparer $\frac{7}{4}$ et $\frac{7}{3}$	En 7, il y a 1 fois 4. En 7, il n'y a pas 2 fois 4. En 7, il y a 2 fois 3. En 7, il n'y a pas 3 fois 3.	$1 < \frac{7}{4} < 2$ $2 < \frac{7}{3} < 3$ $\frac{7}{4} < \frac{7}{3}$	
Exemple 2 La partie entière du quotient ne suffit pas. Comparer $\frac{17}{7}$ et $\frac{11}{5}$	On pose la division de 17 par 7. $\begin{array}{r} 17 \\ - 14 \\ \hline 30 \\ - 28 \\ \hline 2 \end{array}$ $\frac{11}{5} = \frac{22}{10} = 2,2$	$2,4 < \frac{17}{7} < 2,5$ $\frac{11}{5} < \frac{17}{7}$ $\frac{11}{5} = 2,2$	

QUOTIENTS DE DÉCIMAUX

Méthode : Pour effectuer le quotient de deux nombres décimaux, on peut écrire un quotient qui lui est égal et dont le dénominateur est entier.

Exemples

$$2,4 : 0,8 = \frac{2,4}{0,8} = \frac{2,4 \times 10}{0,8 \times 10} = \frac{24}{8} = 3. \quad ; \quad 12 : 0,5 = \frac{12}{0,5} = \frac{12 \times 2}{0,5 \times 2} = \frac{24}{1} = 24.$$

$$4 : 0,001 = \frac{4}{0,001} = \frac{4 \times 1000}{0,001 \times 1000} = \frac{4000}{1} = 4000. \quad ; \quad 3,4 : 0,01 = \frac{3,4}{0,01} = \frac{3,4 \times 100}{0,01 \times 100} = \frac{340}{1} = 340.$$

POURCENTAGES

Un pourcentage est représenté par un nombre fractionnaire qui a pour dénominateur 100.

Transformation d'une fraction en pourcentage

a) Utilisation de la règle $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$.

Exemples

$$\frac{3}{25} = \frac{12}{100} \quad ; \quad \frac{180}{240} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\%.$$

$$\frac{3}{25} \text{ représente } 12\% \quad ; \quad \frac{180}{240} \text{ représente } 75\%.$$

b) Utilisation de la division :

Exemples

$$\frac{3}{5} = 0,6 = \frac{60}{100} \quad ; \quad \frac{3}{7} \approx 0,429 \quad \text{et} \quad 0,429 = \frac{42,9}{100} = 42,9\%.$$

$$\frac{3}{5} \text{ représente } 60\% \quad ; \quad \frac{3}{7} \text{ représente environ } 42,9\%.$$

Calculs de pourcentages dans des problèmes**Exemple 1**

Dans une ville de 5600 habitants, 420 sont allés voir un spectacle. Exprimer ce résultat en pourcentage.

420 habitants sur 5600 sont allés voir un spectacle.

$$\frac{420}{5600} = \frac{60}{800} = \frac{7,5}{100} \quad . \quad 7,5\% \text{ des habitants sont allés voir un spectacle.}$$

Exemple 2

Le prix d'un objet passe de 150 € à 120 €. Calculer le pourcentage de baisse. Il y a une baisse de 30 € sur un article valant initialement 150 €. On cherche quel serait le montant de la baisse sur un article valant 100 €.

$$\frac{30}{150} = \frac{1}{5} = \frac{2}{100} \quad . \quad \text{Le pourcentage de baisse est de } 2\%.$$

POINTS DE REPÈRE / MÉTHODES

Simplification d'une fraction

Méthode générale : On cherche un diviseur commun du numérateur et du dénominateur. Pour cela, on examine si le numérateur et le dénominateur sont divisibles par 2, 3, 5 ou 10, en utilisant les critères de divisibilité. Ensuite, on regarde s'ils sont divisibles par 7, 11 ou tout autre nombre en utilisant les tables de multiplication. Après une première simplification, on regarde si on peut encore simplifier la fraction obtenue.

Énoncé : Simplifier les fractions $\frac{26}{24}$; $\frac{12}{21}$; $\frac{70}{105}$; $\frac{32}{8}$; $\frac{6}{18}$.

simplification de $\frac{26}{24}$. On remarque que 26 et 24 sont des nombres pairs ; ils sont donc divisibles par 2. On écrit alors : $\frac{26}{24} = \frac{2 \times 13}{2 \times 12} = \frac{13}{12}$. On a simplifié $\frac{26}{24}$ par 2.	Autre présentation des calculs
simplification de $\frac{12}{21}$. 12 est pair mais 21 ne l'est pas ; on ne peut donc pas simplifier $\frac{12}{21}$ par 2. On essaye 3. On remarque que 12 et 21 sont divisibles par 3. On écrit alors : $\frac{12}{21} = \frac{3 \times 4}{3 \times 7} = \frac{4}{7}$. On a simplifié $\frac{12}{21}$ par 3.	Autre présentation des calculs
simplification de $\frac{70}{105}$. On remarque que 70 et 105 ont pour derniers chiffres 0 et 5 ; ils sont donc divisibles par 5. On écrit alors : $\frac{70}{105} = \frac{5 \times 14}{5 \times 21} = \frac{14}{21}$. Grâce aux tables, on remarque à présent que 14 et 21 sont divisibles par 7 ; on peut donc simplifier la fraction obtenue par 7. On écrit : $\frac{14}{21} = \frac{7 \times 2}{7 \times 3} = \frac{2}{3}$. On a simplifié $\frac{70}{105}$ par 5 puis par 7, c'est-à-dire par 35.	Autre présentation des calculs

simplification de $\frac{32}{8}$ On remarque que 32 est divisible par 8. La division de 32 par 8 donne l'entier 4. On peut donc écrire : $\frac{32}{8} = 4$. On a simplifié $\frac{32}{8}$ par 8.	Autre présentation des calculs
simplification de $\frac{6}{18}$ On remarque que 18 est divisible par 6. On écrit : $\frac{6}{18} = \frac{6 \times 1}{6 \times 3} = \frac{1}{3}$. On a simplifié $\frac{6}{18}$ par 6.	Autre présentation des calculs

Comparer des fractions

On utilise principalement deux méthodes :

- écrire les fractions avec un même dénominateur et appliquer la propriété du cours : « Si deux fractions ont le même dénominateur, elles sont rangées dans le même ordre que leurs numérateurs ».
- diviser le numérateur par le dénominateur pour trouver un encadrement de chaque fraction permettant de les comparer.

Exemple 1

Comparer $\frac{17}{6}$ et $\frac{13}{6}$.

Observation : les deux fractions ont le même dénominateur.

Choix de la méthode : on utilise la propriété du cours.

Raisonnement : $17 > 13$ donc $\frac{17}{6} > \frac{13}{6}$.

Exemple 2

Comparer $\frac{5}{4}$ et $\frac{17}{12}$.

Observation : les deux fractions n'ont pas le même dénominateur, mais 12 est un multiple de 4.

Choix de la méthode : on convertit les quarts en douzièmes, puis on utilise la propriété du cours.

Raisonnement :

$$\begin{array}{c} \nearrow \times 3 \\ \frac{5}{4} = \frac{15}{12} \\ \searrow \times 3 \end{array}$$

$$15 < 17$$

$$\text{donc } \frac{15}{12} < \frac{17}{12}$$

$$\text{et donc } \frac{5}{4} < \frac{17}{12}$$

Exemple 3

Comparer $\frac{15}{11}$ et $\frac{10}{3}$.

Observation : les deux fractions n'ont pas le même dénominateur et 11 n'est pas un multiple de 3.

Choix de la méthode : on divise le numérateur par le dénominateur pour trouver un encadrement de chaque fraction.

Calculs	Raisonnement	Droite graduée
En 15, combien de fois 11 ? 1 fois $15 = (1 \times 11) + 4$ En 10, combien de fois 3 ? 3 fois $10 = (3 \times 3) + 1$	$1 < \frac{15}{11} < 2$ donc $\frac{15}{11} <$ $3 < \frac{10}{3} < 4$ $\frac{10}{3}$	

Exemple 4

Comparer $\frac{18}{7}$ et $\frac{20}{9}$.

Observation : les deux fractions n'ont pas le même dénominateur et 9 n'est pas un multiple de 7.

Choix de la méthode : on divise le numérateur par le dénominateur pour trouver un encadrement de chaque fraction.

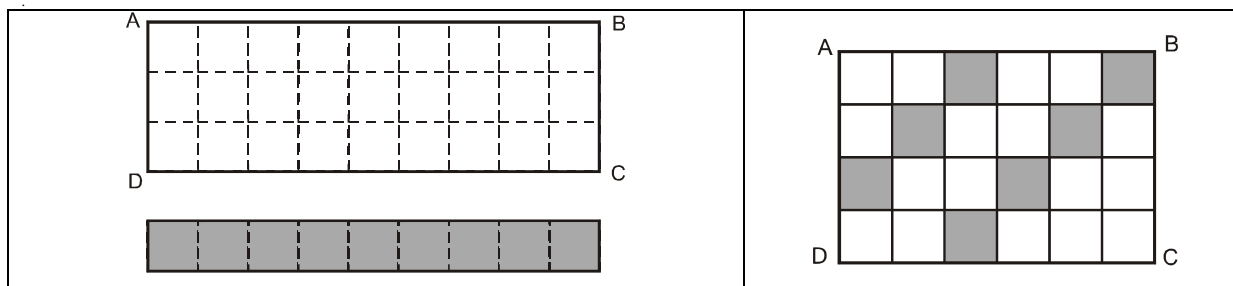
Calculs	Raisonnement	Droite graduée
1^{ère} étape : En 18, combien de fois 7 ? 2 fois $18 = (2 \times 7) + 4$ En 20, combien de fois 9 ? 2 fois $20 = (2 \times 9) + 2$	$2 < \frac{18}{7} < 3$ $2 < \frac{20}{9} < 3$ On ne peut pas conclure ; on poursuit les divisions.	
2^e étape : $\begin{array}{r} 18 \quad 7 \\ 40 \quad 2,5 \\ 5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 20 \quad 9 \\ 20 \quad 2,2 \\ 2 \end{array}$	$2,5 < \frac{18}{7} < 2,6$ $2,2 < \frac{20}{9} < 2,3$ donc $\frac{18}{7} > \frac{20}{9}$	

EXERCICES

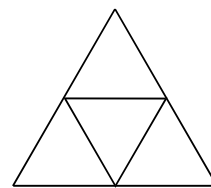
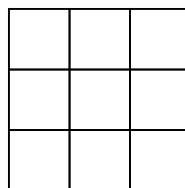
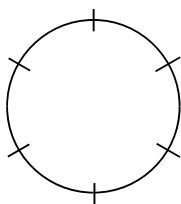
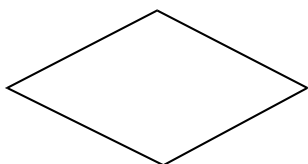
FRACTIONS D'AIRES

Les exercices 1 à 4, qui sont une reprise de ce qui a été vu en 6^{ème}, permettent le changement du registre symbolique au registre géométrique et vice-versa. Ce changement de registre permet de donner du sens aux fractions. Certaines conventions, non écrites (cercle partagé en parties égales, triangles équilatéraux...) sont à préciser aux élèves avant tout travail. L'exercice 5 est un exercice plus difficile, pour approfondir.

1. Pour chaque cas, indiquer à quelle fraction de l'aire du rectangle ABCD correspond la partie grisée :

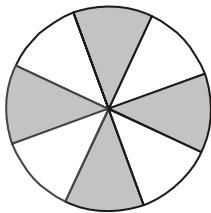


2. Voici quatre surfaces. Colorier $\frac{3}{4}$ de l'aire du losange, $\frac{2}{3}$ de l'aire du disque, $\frac{5}{9}$ de l'aire du carré et $\frac{1}{4}$ de l'aire du triangle.

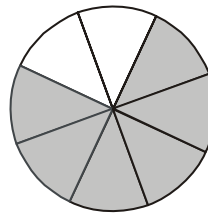


3. Compléter :

La partie grisée représente : huitièmes de l'aire du disque ou un de l'aire du disque.



La partie grisée représente : huitièmes de l'aire du disque ou trois de l'aire du disque.



4. Pour chacun des cas suivants, dessiner un rectangle de 9 carreaux sur 4 carreaux, puis colorier la fraction de la surface indiquée.

a) $\frac{2}{9}$; b) $\frac{3}{4}$; c) $\frac{5}{36}$; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{2}{3}$.

5. Indiquer pour chacune des figures ci-dessous quelle fraction de l'aire du grand rectangle a été coloriée :

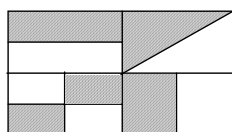


Figure 1

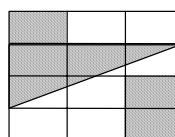
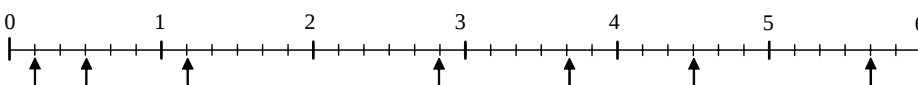
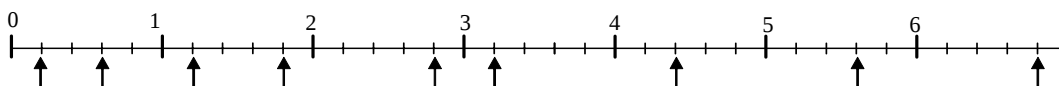
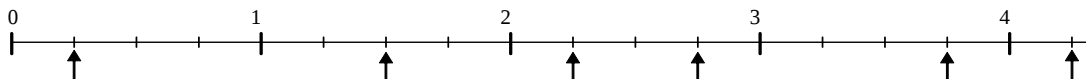


Figure 2

DROITE GRADUÉE

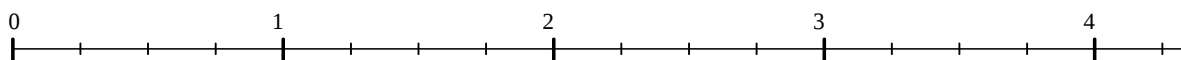
Le passage du registre symbolique des fractions à celui de la droite graduée permet de renforcer le sens des fractions. Il est important de faire ce changement de registre dans les deux sens.

6. Donner une écriture fractionnaire et une écriture décimale, si possible, des nombres repérés par une flèche :



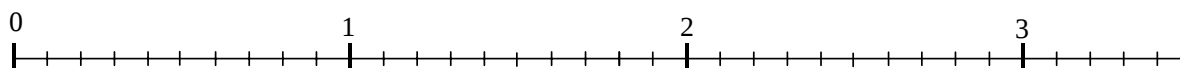
Dans les exercices 7 à 10, on travaille dans le sens inverse de l'exercice précédent : on place des points d'abscisses données. Pour placer $\frac{3}{4}$, on peut conseiller à l'élève de placer d'abord $\frac{1}{4}$ puis de voir $\frac{3}{4}$

comme $3 \times \frac{1}{4}$. Faire de même pour les autres fractions.

7. a) Sur la droite graduée ci-dessous, placer les nombres $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{16}{4}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{6}{2}$ et $\frac{5}{2}$.

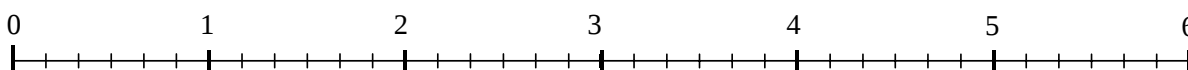
b) Compléter : $3 = \frac{\dots}{4}$; $3 = \frac{\dots}{2}$; $4 = \frac{\dots}{4}$; $4 = \frac{\dots}{2}$.

8. a) Sur la droite graduée ci-dessous, placer les nombres $\frac{7}{10}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{17}{5}$, $\frac{20}{10}$, $\frac{15}{5}$ et $\frac{4}{10}$



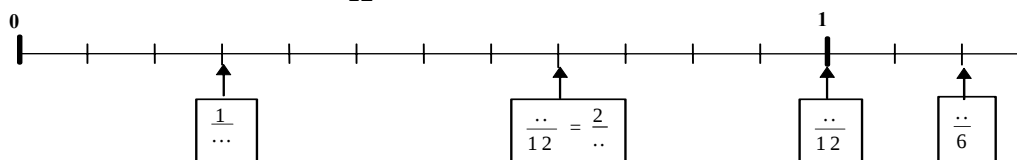
- b) Compléter : $3 = \frac{\dots}{5}$; $3 = \frac{\dots}{10}$; $4 = \frac{\dots}{10}$; $4 = \frac{\dots}{5}$.

9. a) Sur la droite graduée ci-dessous, placer les nombres $\frac{5}{6}$, $\frac{24}{6}$, $\frac{15}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{13}{3}$ et $\frac{17}{3}$.

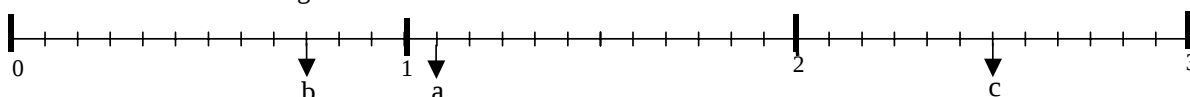


- b) Compléter : $3 = \frac{\dots}{6}$; $3 = \frac{\dots}{3}$; $4 = \frac{\dots}{6}$; $4 = \frac{\dots}{3}$.

10. Placer le point A d'abscisse $\frac{5}{12}$ puis compléter les cases ci-dessous :



11. On considère la droite graduée ci-dessous :



- a) Placer $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{6}$ et $\frac{25}{12}$.

- b) Compléter : $a = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$; $b = \frac{\dots\dots\dots}{4}$; $c = \frac{5}{\dots\dots\dots}$.

FRACTIONS ÉGALES

Dans les exercices 12 à 14, on travaille la technique de simplification, après avoir donné du sens à celle-ci dans les activités précédentes (droite graduée, fractions d'aires...). L'enchaînement des égalités pose problème. Il est préférable de travailler régulièrement ce genre de technique, dans les séances de calcul réfléchi, plutôt que de vouloir tout épuiser à l'intérieur de ce chapitre.

12. Compléter :

a) $\frac{48}{36} = \frac{4}{\dots\dots}$; $\frac{4}{5} = \frac{88}{\dots\dots}$; $\frac{15}{6} = \frac{\dots\dots}{42}$; $\frac{24}{56} = \frac{\dots\dots}{7}$.

b) $\frac{12}{15} = \frac{\dots\dots}{5} = \frac{36}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{60}$; $\frac{6}{8} = \frac{3}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{12} = \frac{45}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{40} = \frac{18}{\dots\dots}$.

13. Simplifier au maximum les fractions suivantes :

a) $\frac{18}{27}$; $\frac{150}{600}$; $\frac{500}{750}$; $\frac{56}{49}$; $\frac{24}{40}$; $\frac{150}{350}$.
 b) $\frac{55}{33}$; $\frac{75}{210}$; $\frac{48}{12}$; $\frac{63}{39}$; $\frac{78}{210}$; $\frac{63}{45}$.
 c) $\frac{63}{39}$; $\frac{78}{210}$; $\frac{54}{72}$; $\frac{132}{33}$; $\frac{48}{72}$; $\frac{165}{110}$.

14. Simplifier, si possible :

$\frac{2 \times 3}{5 \times 3}$; $\frac{5 + 3}{7 + 3}$; $\frac{7 \times 3}{4 \times 14}$; $\frac{7 + 3}{14 + 4}$; $\frac{12 \times 13}{4 \times 6}$; $\frac{7 \times 18}{4 \times 12}$.

QUOTIENTS DE DÉCIMAUX

L'objectif des exercices 15 à 17 est l'obtention du quotient de deux décimaux à partir du quotient d'entiers ; les divisions sont à faire à la main, c'est le moment d'entretenir la technique de la division posée.

15. Compléter :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{12,7}{8,5} = \frac{\dots \times \dots}{\dots \times \dots} = \frac{\dots}{85} & ; & \frac{13,56}{0,6} = \frac{\dots \times \dots}{\dots \times \dots} = \frac{\dots}{6} & ; & \frac{0,3}{0,02} = \frac{\dots \times \dots}{\dots \times \dots} = \frac{\dots}{2} \\ \text{b) } \frac{21,7}{6,5} = \frac{\dots \times \dots}{\dots \times \dots} = \frac{\dots}{65} & ; & \frac{23,54}{0,7} = \frac{\dots \times \dots}{\dots \times \dots} = \frac{\dots}{7} & ; & \frac{0,5}{0,02} = \frac{\dots \times \dots}{\dots \times \dots} = \frac{\dots}{2} \end{array}$$

16. Calculer en utilisant l'écriture fractionnaire et sans poser d'opérations :

- a) $1,25$; $36 \div 0,18$; $1,8 \div 300$; $2,7 \div 0,18$.
 b) $0,5 \div 0,1$; $0,02 \div 40$; $0,12 \div 0,4$; $12 \div 50$.
 c) $12 \div 200$; $2,7 \div 1,8$; $4 \div 25$; $17 \div 0,5$.
 d) $12 \div 25$; $12 \div 16$; $35 \div 2,8$; $5 \div 200$.
 e) $5 \div 0,2$; $19 \div 0,5$; $19 \div 0,05$; $19 \div 380$.
 f) $0,12 \div 0,8$; $0,24 \div 0,16$; $7 \div 200$; $1,5 \div 0,01$.

17. Effectuer les quotients suivants sans poser d'opération :

$$7 \div 0,25 \quad ; \quad 12 \div 2,5 \quad ; \quad 12 \div 1,6 \quad ; \quad 14,3 \div 0,22.$$

18. Calculer une valeur arrondie au centième près des quotients suivants :

$$1,45 \div 1,3 \quad ; \quad 14 \div 0,11 \quad ; \quad 0,92 \div 0,7 \quad ; \quad 15 \div 2,1.$$

19. Effectuer les divisions suivantes. Détailler les calculs.

$$\frac{15}{1,5} \quad ; \quad \frac{12,6}{0,15} \quad ; \quad \frac{4,375}{3,5}.$$

20. Effectuer les divisions suivantes. Détailler les calculs.

$$25 \div 2,5 \quad ; \quad 14,7 \div 0,7 \quad ; \quad 7,875 \div 3,5.$$

21. Donner la valeur décimale exacte ou écrire un encadrement au centième près des nombres suivants :

$$a = \frac{15}{7} \quad ; \quad b = \frac{21}{8} \quad ; \quad c = \frac{32}{11} \quad ; \quad d = \frac{25}{16}.$$

22. Exprimer les nombres suivants sous la forme d'une fraction la plus simple possible :

$$a = 1,25 \quad ; \quad b = 2,4 \quad ; \quad c = 0,75 \quad ; \quad d = 1,2.$$

Dans les exercices 23 à 30, l'élève est amené à faire des raisonnements de proportionnalité. On prendra en compte les différentes procédures.

23. a) Des clémentines sont vendues 3 € le kg. Calculer le prix de 720 g de ces clémentines.
 b) 2,5 kg de pommes coûtent 8 €. Calculer le prix d'un kg de ces pommes.
 c) 600 g d'oranges coûtent 1,5 €. Calculer le prix d'un kg de ces oranges.
 d) 400 g de fraises coûtent 2,4 €. Calculer le prix d'un kg de ces fraises.
 e) Le filet de cabillaud est vendu 12 € le kg chez un poissonnier. Calculer la quantité achetée pour 21 €.
 f) Un fromage à la coupe est vendu 9 € le kg. Calculer la quantité achetée pour 5,4 €.

24. Des pommes sont vendues 2,4 € le kg. Compléter le tableau ci-dessous, indiquer les calculs effectués :

QUANTITES	PRIX A PAYER
400 g	
700 g	
	1,8 €
	2,7 €
	6,3 €

25. Un ballotin de chocolat de 250 g est vendu 12 €. Que calcule-t-on lorsqu'on effectue :

- a) 12×2 ; b) $12 \div 0,25$; c) 12×4 .

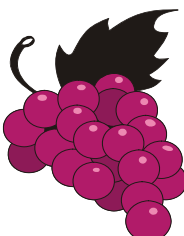
26. Un morceau de fromage pesant 200 g est vendu 1,2 €. Que calcule-t-on lorsqu'on effectue :
 a) $1,2 \times 2,5$; b) $1,2 \div 0,2$; c) $1,2 \times 5$; d) $1,2 \div 2$.
27. Compléter le tableau ci-dessous après avoir détaillé chaque raisonnement, à l'aide, par exemple, d'un schéma fléché :

	Prix au kg	Quantité achetée	Prix payé
1	1,5 €	1,400 kg	
2	...	800 g	2 €
3	10 €		31,5 €
4	12 €		9 €
5	4 €	600 g	
6	4 €		3 €
7		1,200 kg	15 €

28. Compléter les étiquettes suivantes :

Cookies au chocolat
Prix au kg :
3,25 €

0,65 €
Poids :



Nectar pur raisin
« Super Fruit »
 la brique de 1,5 litre 0,78 €
 soit le litre

Brioche tranchée pur beurre
fabriquée en France
 la pièce de 450 g
 soit le kg 2,20 €



Eau de parfum
Nénuphara
 le flacon de 75 ml
10,58 €
 soit le litre

29. a) Une pochette de 50 feuilles de papier photo « Superscan », papier glacé 190 g, format 10×15, coûte 10,50 €. Combien coûte une feuille ?
 b) Le professeur de musique a acheté des places pour l'opéra « Carmen » de Bizet. Il a payé 624,84 €. La place coûte 7,62 €. Combien de places a-t-il achetées ?
30. Offre promotionnelle : **glace « Delizio »**, différents parfums au choix,
 1 litre + 10% gratuit pour 3,89 €.
 A combien revient le litre de glace ?

LANGUE NATURELLE

Dans les exercices 31 à 35, on passe du registre de la langue naturelle au registre numérique pour donner plus de sens à la simplification. De nombreux élèves, tout en écrivant le symbole « = » entre les fractions $\frac{2}{3}$ et

$\frac{4}{6}$, pensent que $\frac{4}{6}$ est le double de $\frac{2}{3}$. Travailler avec les mots double, simplifier.... peut permettre à certains de ne plus commettre cette erreur. Les exercices travaillent alors la simplification dans tous les sens (simplifier, trouver le nombre par lequel on a simplifié, savoir si on a multiplié une fraction par un nombre ou si on a simplifié cette fraction, recherche d'une fraction, d'une opération ou d'une expression en langue naturelle...)

31. On considère la fraction quatre dixièmes.
 a) Simplifier cette fraction par deux.
 b) Donner le double de cette fraction.

c) Multiplier cette fraction par trois.

32. On considère la fraction $\frac{72}{60}$.

- a) Simplifier cette fraction par six.
- b) Multiplier cette fraction par 10.
- c) Simplifier cette fraction par douze.

33. Compléter les pointillés avec la fraction qui convient :

- a) On a simplifié par 7 la fraction $\frac{35}{21}$ pour trouver
- b) On a multiplié par 3 la fraction $\frac{9}{5}$ pour trouver
- c) On a simplifié par 4 la fraction pour trouver $\frac{6}{5}$.

34. Compléter les pointillés avec l'expression française qui convient :

- a) On a la fraction $\frac{15}{9}$ pour trouver $\frac{5}{3}$.
- b) On a la fraction $\frac{4}{3}$ pour trouver $\frac{8}{3}$.

35. Compléter les pointillés avec la fraction qui convient :

- a) On a simplifié par 6 la fraction pour trouver $\frac{5}{3}$.
- b) On a multiplié par 3 la fraction pour trouver $\frac{24}{15}$.
- c) On a simplifié par 4 la fraction pour trouver $\frac{6}{5}$.

FRACTIONS DE DURÉES

Dans les exercices 36 à 40, on commence par des conversions de durées, qui sont un objectif du programme.

Ainsi, pour convertir 0,3 h en minutes, plusieurs stratégies sont possibles : $0,3 \times 60$ min ou $\frac{3}{10} \times 60$ min, la

transformation de 0,25 en $\frac{1}{4}$ permet une conversion rapide de 0,25 h. A chaque exercice, on associe l'exercice correspondant qui travaille dans le sens inverse. Il est ensuite recommandé d'entretenir régulièrement ces techniques dans les séances de calculs réfléchis, afin qu'une certaine aisance se fasse sentir lorsque les calculs relatifs aux distances, durées et vitesses seront abordés.

36. Écrire en fraction d'heure :

40 min ; 48 min ; 45 min ; 36 min.

37. Écrire en minutes :

0,3 h ; 0,25 h ; 0,02 h ; 0,5 h.

38. Écrire en minutes :

$\frac{2}{3}$ h ; $\frac{3}{5}$ h ; $\frac{5}{6}$ h ; $\frac{3}{10}$ h ; $\frac{5}{12}$ h.

39. Compléter :

1,75 h = hmin ; 3,6 h =hmin.

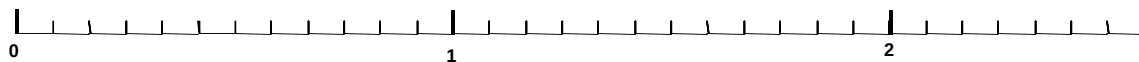
40. Écrire en heures décimales :

4h 6 min =h ; 1h 15 min =h.

COMPARAISON

Placer des nombres sur une droite graduée permet de visualiser leur ordre. Progressivement, l'élève devra être capable de comparer ces nombres sans utiliser la droite. Ces nombres auront pris du sens.

41. a) Placer sur la droite graduée ci-dessous les nombres $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{7}{6}$ et $\frac{7}{12}$.



- b) Ranger les nombres ci-dessus dans l'ordre croissant.

42. Placer $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{6}$ sur une même droite graduée puis comparer ces deux nombres.

43. Placer $\frac{5}{4}$ et $\frac{7}{8}$ sur une même droite graduée puis comparer ces deux nombres.

44. Comparer chacune des fractions suivantes au nombre 1 :

$$\frac{7}{8} ; \quad \frac{19}{18} ; \quad \frac{196}{201} ; \quad \frac{306}{305}.$$

45. Encadrer par deux entiers consécutifs chacune des fractions suivantes :

$$\frac{9}{5} ; \quad \frac{19}{7} ; \quad \frac{34}{7} ; \quad \frac{29}{3}.$$

46. Comparer les fractions suivantes après les avoir écrites avec le même dénominateur :

$$\text{a) } \frac{7}{8} \text{ et } \frac{15}{16} ; \quad \text{b) } \frac{7}{9} \text{ et } \frac{11}{18} ; \quad \text{c) } \frac{37}{24} \text{ et } \frac{11}{8}.$$

47. Comparer les nombres suivants à l'aide d'une division. Justifier.

$$\text{a) } \frac{7}{5} \text{ et } \frac{3}{2} ; \quad \text{b) } \frac{13}{8} \text{ et } \frac{9}{5} ; \quad \text{c) } \frac{12}{7} \text{ et } \frac{13}{9}.$$

48. Comparer les fractions ci-dessous en indiquant le principe de comparaison utilisé (sans faire de division):

$$1 \text{ et } \frac{24}{25} ; \quad \frac{7}{6} \text{ et } \frac{5}{12} ; \quad \frac{5}{8} \text{ et } \frac{5}{7}.$$

49. Comparer les fractions suivantes, justifier :

$$\text{a) } \frac{4}{11} \text{ et } \frac{7}{22} ; \quad \text{b) } \frac{17}{4} \text{ et } \frac{19}{6} ; \quad \text{c) } \frac{29}{9} \text{ et } \frac{42}{17} ; \quad \text{d) } \frac{2}{3} \text{ et } \frac{3}{5}.$$

$$\text{e) } \frac{7}{6} \text{ et } \frac{47}{42} ; \quad \text{f) } \frac{5}{3} \text{ et } \frac{34}{12} ; \quad \text{g) } 7 \text{ et } \frac{27}{4} ; \quad \text{h) } \frac{7}{6} \text{ et } \frac{10}{9}.$$

50. Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants. Justifier.

$$\frac{11}{4} ; \quad \frac{1}{4} ; \quad \frac{3,5}{4} ; \quad \frac{0,7}{0,4} ; \quad \frac{15}{40} ; \quad \frac{3}{2}.$$

Dans les problèmes de comparaison, les types de nombres intervenant amènent à différents procédés de comparaison.

51. Dans un collège, on demande aux élèves de 5^e à quels clubs ils aimeraient participer $\frac{11}{20}$ des élèves aimeraient participer au club «théâtre», $\frac{3}{4}$ au club «informatique» et $\frac{7}{10}$ au club «jeux de sociétés». Quel est le club le plus demandé ?

52. Alain et Paul ont chacun un kilogramme de pommes. Alain en mange les trois cinquièmes et Paul les cinq huitièmes. Qui a mangé la plus grande quantité de pommes, Alain ou Paul ?

53. Deux sœurs, Anna et Mathilde, ont reçu chacune la même somme d'argent de leur grand-mère. Elles achètent chacune un jeu vidéo. Anna dépense ainsi les $\frac{4}{7}$ de la somme qu'elle a reçue et Mathilde les $\frac{2}{3}$ de sa somme. Quel est le jeu vidéo le moins cher, celui d'Anna ou celui de Mathilde ?

PROBLÈMES

Pour organiser les données dans les problèmes 54 à 60, on peut proposer aux élèves de rentrer ces données dans un tableau, ce qui leur permet de mieux s'appropriier l'énoncé. Deux exemples sont ainsi donnés. Les fractions demandées sont à calculer comme rapport entre la quantité examinée et la quantité de départ, ce rapport étant à simplifier. Ce n'est que dans le chapitre suivant que le calcul fractionnaire entre en jeu.

54. Je dispose de 270 €. J'en dépense les $\frac{3}{5}$. Quelle somme d'argent me reste-t-il ? Quelle fraction de la somme de départ me reste-t-il ?
55. Je dispose de 600 €. J'en dépense les $\frac{3}{4}$ puis le tiers du reste. Quelle somme d'argent me reste-t-il ? Quelle fraction de la somme de départ me reste-t-il ?
56. Trois amis jouent ensemble au loto. Julien mise 4 €, Matthieu mise 5 € et Lise 3 €.
- Quelle fraction de la mise totale chacun a-t-il donnée ?
 - Ils ont la chance de gagner 2412 €. Comment vont ils se répartir cette somme ?
57. Un pantalon vaut 52 €. Calculer son prix soldé avec 30% de réduction.
- Présentation sous forme de tableau :

Prix initial	52 €
Montant de la réduction	30% de 52 €
Prix soldé	52 € – 30% de 52 €

Dans le cadre de l'éducation à la citoyenneté, les exercices 58 et 59 sont une occasion pour définir les sigles en question et pour renseigner les élèves sur la fonction de la T.V.A.

58. Un article vaut 150 € hors taxes. Calculer son prix T.T.C. avec un taux de T.V.A. de 19,6%.
59. Un article vaut 2000 € hors taxes. Calculer son prix T.T.C. avec un taux de T.V.A. de 5,5%.
60. Un pantalon vaut 64 €. Calculer son prix soldé avec 25% de réduction.
61. Dans un club sportif, 10% des membres font du volley, $\frac{2}{5}$ font du basket et les autres du football. Il y a 700 membres dans ce club.
- Trouver le nombre de footballeurs.
 - Quelle fraction du nombre total de membres représente le nombre de footballeurs ?
62. Dans une serre, il y a 420 plantes. Les $\frac{3}{4}$ des plantes sont des fleurs et les $\frac{2}{5}$ des fleurs sont des tulipes.
- Combien y a-t-il de tulipes ?
 - Quelle fraction du nombre de plantes représentent les tulipes ?
 - Quel pourcentage du nombre de plantes représentent les tulipes ?
63. On partage 1000 € entre 3 personnes. La première reçoit 400 €, la deuxième reçoit les $\frac{2}{3}$ du reste.
- Quelle somme d'argent reçoit la troisième ?
 - Quelle fraction de la somme totale représente la part de chacun ?

Présentation sous forme de tableau :

Somme à partager	1000 €
Somme reçue par la première personne	400 €
Somme reçue par la deuxième personne	$\frac{2}{3}$ du reste
Somme reçue par la troisième personne	1000 € – 400 € – $\frac{2}{3}$ du reste

POURCENTAGES

64. Trouver un pourcentage, arrondi au dixième, qui représente chacune des fractions suivantes :
- a) $\frac{1}{4}$ $\frac{11}{20}$ $\frac{7}{25}$ $\frac{19}{50}$; b) $\frac{9}{12}$ $\frac{12}{15}$ $\frac{13}{130}$ $\frac{36}{150}$.
65. Transformer les fractions suivantes en pourcentages, donner une valeur approchée au dixième près :
- a) $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{9}$; b) $\frac{1}{11}$ $\frac{5}{7}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{5}{6}$.
66. Lors d'une élection, parmi les 600 votants, le candidat Dupont a obtenu 180 voix. Quel pourcentage des voix a-t-il obtenu ?
67. Le prix d'un article passe de 15 € à 21 €. Calculer le pourcentage d'augmentation.
68. Lors de l'élection des délégués au conseil d'administration d'un collège, parmi les 480 votants, Matthieu a obtenu 180 voix, Laure 120 voix, Etienne 30 voix et Pauline 150 voix. Calculer les pourcentages de voix de chacun d'eux.
69. Dans une classe de 30 élèves, il y a 13 filles et 17 garçons. Calculer les pourcentages de filles et de garçons de cette classe. Donner une valeur arrondie au dixième près.

CALCULS À ENTRETENIR

Types de calcul	Objectifs, méthodes, commentaires
Sommes et différences de décimaux : $7 - 1,2$; $2,4 + 0,15$; ...	Entretenir dès le début de l'année les acquis de 6 ^{ème} .
Produits de décimaux : $1,3 \times 0,2$; $2,4 \times 0,5$; $16 \times 0,75$	Idem.
Écriture décimale du quotient de deux entiers : écrire sous forme décimale : $\frac{17}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{7}{5}$; $\frac{11}{4}$; ... des fractions ayant pour dénominateur 2, 4, 5 voire 6 ou 8. $\frac{18}{9}$; $\frac{36}{12}$; ... des quotients entiers	Idem.
Produit d'un entier ou d'un décimal par une fraction : $2 \times \frac{7}{3}$; $12 \times \frac{15}{5}$ les stratégies varient selon les calculs.	Idem
Écrire 5 en tiers ou compléter $5 = \frac{\dots}{3}$; etc.	Écrire un nombre entier sous forme fractionnaire, utilisation de la langue naturelle. Entretenir le lien entre fraction, division et multiplication.
Changer l'écriture d'un nombre pour pouvoir effectuer plus simplement un calcul : $12 \times 0,25$; $12 \times 0,75$; $112 \times 0,5$; ...	Entretenir les acquis de 6 ^{ème} .
Prendre un pourcentage : 10% de 15 ; 25% de 36 ; 3% de 120 ; ...	Entretenir les acquis de 6 ^{ème} .
Quotients dont le dénominateur peut-être décomposé : $\frac{1}{200} = (1 \div 2) \div 100$; ...	Entretenir les acquis de 6 ^{ème} .
Quotient d'un décimal par un entier : $2,4 \div 4$; ... $0,24 \div 4$; $9,1 \div 7$; $0,1 \div 2$; ...	Entretenir les acquis de 6 ^{ème} .
Trouver la valeur décimale ou une valeur approchée de certains quotients tels que $\frac{1}{3}$ ou $\frac{5}{4}$; $\frac{1}{6}$;	Donner un sens à l'écriture fractionnaire. Parler de valeur approchée.

Simplifications de fractions : $\frac{15}{25}$ $\frac{12}{24}$ $\frac{24}{36}$ $\frac{75}{100}$	Voir régulièrement ce genre de calculs en s'attachant à passer le temps nécessaire sur le traitement des erreurs commises est plus efficace que de donner une grosse batterie d'exercices. C'est une occasion d'utiliser les caractères de divisibilité. En général, le taux de réussite est satisfaisant, les techniques sont plutôt bien assimilées, ce qui ne veut pas pour autant dire que tout est compris : après qu'ils aient simplifié $\frac{15}{25}$ et trouvé $\frac{3}{5}$, si on demande aux élèves combien de fois il y a $\frac{3}{5}$ dans $\frac{15}{25}$, la réponse nettement majoritaire est 5 !! L'élève écrit donc $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$ mais ne comprend pas vraiment cette égalité. Une mise au point est alors nécessaire pour leur faire comprendre qu'il y a une fois $\frac{3}{5}$ dans $\frac{15}{25}$, et que ce 1 provient de $\frac{5}{5}$.
Transformations de fractions en pourcentages : $\frac{7}{25}$ $\frac{7}{20}$ $\frac{21}{60}$	Voir régulièrement ce genre de calculs en s'attachant à passer le temps nécessaire sur le traitement des erreurs commises est plus efficace que de donner une grosse batterie d'exercices. Dans les deux premiers types de calcul, le pourcentage se trouve directement, alors que dans le troisième, il faut simplifier au préalable.
Utilisations de simplifications écrire sous forme décimale certains quotients : $\frac{54}{12} ; \frac{49}{70}$	Le calcul d'un quotient peut-être fait de diverses façons : pour diviser 54 par 12, on peut se ramener à diviser 9 par 2...
Calculs du type $\frac{11}{5} \quad \frac{11}{0,5} \quad \frac{11}{0,25}$ Le dénominateur est 5 ou 0,5 ou 50.... Le dénominateur est 25 ou 0,25	Chaque quotient peut se ramener à un quotient dont l'écriture fractionnaire a un dénominateur égal à une puissance de 10 : $\frac{11}{0,5} = \frac{22}{1}$ ou $\frac{11}{5} = \frac{22}{10}$. On peut alors conjecturer après expérimentation que diviser par 0,5 c'est multiplier par 2 et diviser par 0,25, c'est multiplier par 4, et faire le lien avec la multiplication par 0,5 ou 0,25.

CHAPITRE 4

OPÉRATIONS SUR LES FRACTIONS

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Donner du sens à l'addition des fractions.
- Savoir additionner deux fractions, le dénominateur de l'une étant un multiple du dénominateur de l'autre.
- Savoir additionner une fraction et un entier.
- Donner du sens à la multiplication de deux fractions.
- Savoir multiplier une fraction par un entier.
- Savoir multiplier deux fractions.

REPÈRES POUR LE CONTENU DU COURS

- Règle d'addition de deux fractions.
- Règle de multiplication de deux fractions.

ACTIVITÉ

ACTIVITÉ 1 : SOMMES DE FRACTIONS

- 1) Compléter en toutes lettres :
 - Deux neuvièmes plus cinq neuvièmes égalent
 - Un septième plus six septièmes égalent ou
 - Trois huitièmes plus treize huitièmes égalent ou
- 2) Tracer un rectangle de 3 carreaux sur 5 carreaux. Colorier en rouge un cinquième de son aire et en vert deux tiers de son aire, de telle sorte qu'aucun carreau ne soit colorié des deux couleurs. Quelle fraction du rectangle a été coloriée ? En déduire le résultat du calcul $\frac{1}{5} + \frac{2}{3}$. Justifier la réponse.
- 3) Recommencer la question précédente avec un rectangle de 4 carreaux sur 2 carreaux et avec les fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$.
- 4) Recommencer la question précédente avec un rectangle de 3 carreaux sur 2 carreaux et avec les fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$.
- 5) a) Quelle règle semble se dégager pour l'addition des fractions ?
 b) Compléter :
 - Pour calculer $\frac{2}{7} + \frac{3}{14}$, on commence par écrire $\frac{2}{7}$ sous la forme d'une fraction de dénominateur égal à
 - $\frac{2}{7} + \frac{3}{14} = \frac{\dots}{14} + \frac{3}{14} = \frac{\dots}{\dots}$
- 6) Appliquer la règle précédente pour effectuer les calculs suivants :
 $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$; $\frac{7}{8} + \frac{3}{4}$; $\frac{11}{9} + \frac{4}{3}$; $\frac{7}{5} + \frac{3}{20}$.

Objectifs et commentaires

- Comprendre que pour ajouter deux fractions, il est impératif de les réduire au même dénominateur.
- Dégager une règle en français pour l'addition des fractions. L'enseignant doit préciser que cette règle est admise.
- Appliquer cette règle.

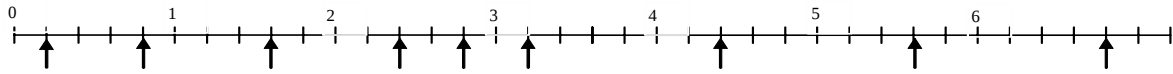
On cherche à donner du sens à l'addition des fractions à l'aide d'un changement de registre, du registre symbolique des fractions au registre géométrique. On utilise également le registre de la langue naturelle pour démarrer. On peut envisager une addition du type $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, même si ce type d'addition n'est pas exigible, afin que l'élève ne pense pas que l'on doit toujours choisir le plus grand dénominateur comme dénominateur commun (ce qui est le cas lorsqu'un dénominateur est multiple de l'autre, comme c'est écrit dans les programmes).

Dans l'énoncé de la règle, la majorité des élèves commence par écrire « pour ajouter deux fractions, il faut obligatoirement qu'elles aient le même dénominateur » ; ils oublient en général d'écrire qu'il faut alors ajouter les numérateurs.

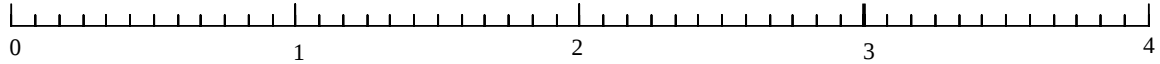
ACTIVITÉ 2 : SOMME D'UN ENTIER ET D'UNE FRACTION

1) Pour chacun des nombres repérés par une flèche :

- Donner une écriture sous la forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.
- Donner une écriture décimale.



2)



a) Placer sur la graduation ci-dessus les points suivants :

le point A d'abscisse $2 + \frac{1}{3}$

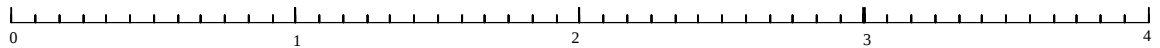
le point B d'abscisse $4 - \frac{2}{3}$

le point C d'abscisse $1 + \frac{5}{6}$

le point D d'abscisse $3 + \frac{5}{6}$

b) Écrire sous forme d'une seule fraction les abscisses des points A, B, C, et D.

3)



a) Placer sur la graduation ci-dessus les points A et B d'abscisses $\frac{8}{3}$ et $\frac{17}{6}$.

b) Exprimer $\frac{8}{3}$ et $\frac{17}{6}$ sous la forme d'une somme d'un entier et d'une fraction plus petite que 1.

c) Écrire de la même façon les nombres suivants : $\frac{11}{4}$; $\frac{11}{6}$; $\frac{17}{12}$; $\frac{7}{3}$.

d) Placer les nombres de la question précédente sur la droite graduée.

Objectifs et commentaires

- Comprendre la somme d'un entier et d'une fraction.
- Écrire un nombre sous la forme de la somme d'un entier et d'une fraction.

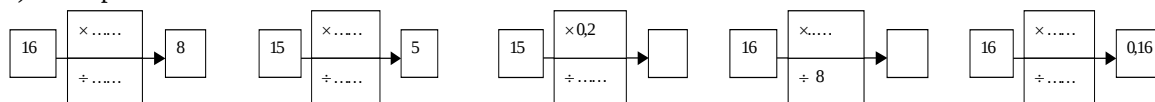
Comme dans le chapitre « égalité de deux fractions », la droite graduée permet de donner du sens aux fractions. Ce sont les allers-retours entre l'écriture symbolique et la droite graduée qui permettent dans un premier temps de pouvoir comprendre une égalité comme $2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$, après avoir pris conscience que $2 = \frac{6}{3}$. Cette prise de conscience peut être facilitée en graduant entièrement la partie visible de la droite graduée. Le passage de l'écriture sous la forme d'une seule fraction à l'écriture sous la forme de la somme d'un entier et d'une fraction plus petite que l'unité permet à l'élève d'avoir une meilleure représentation de la fraction considérée.

ACTIVITÉ 3 : PRODUITS DE FRACTIONS

1) Compléter les phrases suivantes :

- Diviser un nombre par 2, c'est le multiplier par ou $\frac{\dots}{\dots}$.
- Diviser un nombre par, c'est le multiplier par 0,1 ou $\frac{\dots}{\dots}$.
- Diviser un nombre par, c'est le multiplier par 0,25 ou $\frac{\dots}{\dots}$.
- Diviser un nombre par 3, c'est le multiplier par

2) Compléter les schémas suivants :



3) Compléter les phrases suivantes :

- Diviser un nombre par 2 puis diviser le résultat par 3 revient à diviser ce nombre par
- Diviser un nombre par 7 puis diviser le résultat par 3 revient à diviser ce nombre par
- Diviser un nombre par 3 puis diviser le résultat par revient à diviser ce nombre par 15.
- Diviser un nombre par puis diviser le résultat par 10 revient à diviser ce nombre par 40.

4) Compléter les schémas suivants :

Multiplier un nombre par $\frac{1}{3}$ puis multiplier le résultat par $\frac{1}{2}$ revient à multiplier le nombre de départ par ... Donc $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{\dots}{\dots}$.	Multiplier un nombre par $\frac{1}{4}$ puis multiplier le résultat par revient à multiplier le nombre de départ par ... Donc $\frac{1}{4} \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{1}{8}$.	Multiplier un nombre par puis multiplier le résultat par revient à multiplier le nombre de départ par $\frac{1}{9}$. Donc $\frac{\dots}{\dots} \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{1}{9}$.

5) Compléter de même : $\frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \dots\dots\dots$; $\frac{1}{5} \times \dots\dots\dots = \frac{1}{15}$.

6) Compléter :

$$\frac{5}{2} = 5 \times \dots\dots$$

$$\frac{5}{2} \times \frac{1}{3} = \left(5 \times \frac{\dots}{\dots} \right) \times \frac{1}{3} = 5 \times \left(\frac{\dots}{\dots} \times \frac{1}{3} \right) = 5 \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} \quad \text{donc } \frac{5}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\dots}{\dots}.$$

$$\frac{7}{3} \times \frac{5}{4} = \left(7 \times \frac{\dots}{\dots} \right) \times \left(5 \times \frac{\dots}{\dots} \right) = 7 \times 5 \times \left(\frac{\dots}{\dots} \times \frac{\dots}{\dots} \right) = 35 \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots} \quad \text{donc } \frac{7}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{\dots}{\dots}.$$

7) Quelle règle semble se dégager pour la multiplication des fractions ?

Objectifs et commentaires

- Comprendre qu'une multiplication peut se transformer en une division et réciproquement.
- Comprendre que diviser un nombre par a puis le résultat par b revient à diviser le nombre de départ par le produit de a et b.
- Comprendre le produit de deux fractions.
- Dégager une règle en français pour la multiplication des fractions. L'enseignant doit préciser aux élèves que cette règle est admise.

Nous avons choisi, dans cette activité, de travailler avec la fraction vue comme opérateur. La compréhension d'une question étant nécessaire pour aborder la question suivante, il est important de mener l'activité en effectuant une synthèse avec la classe question par question.

Le lien entre la multiplication et la division permet de donner un autre sens à certaines écritures et, par la suite, à la multiplication des fractions.

Dans les questions 1 à 3, on réinvestit des acquis de la classe de sixième : multiplier un nombre par $\frac{1}{3}$, c'est multiplier ce nombre par 1 puis diviser le résultat par 3, ce qui revient donc à diviser ce nombre par 3, étant donné que le produit par 1 n'opère en rien sur le nombre donné.

Pour répondre à la question 3, on peut demander aux élèves de faire des tests avec des nombres. On s'appuiera sur l'opération inverse pour corriger les éventuelles erreurs : comme multiplier un nombre par 3 puis le résultat par 2 revient à multiplier le nombre de départ par 6, diviser un nombre par 3 puis le résultat par 2 revient à diviser le nombre de départ par 6.

Dans la question 4, on cherche à faire le lien entre deux divisions successives et le produit de deux fractions, en utilisant les résultats des questions précédentes. Les cases grisées correspondent au nombre de départ qui est quelconque. Ici la fraction est vue comme un opérateur.

Dans la question 6, on arrive au produit de deux fractions en utilisant les résultats des questions précédentes : on utilise l'associativité et la commutativité de la multiplication étendues aux nombres rationnels.

ACTIVITÉ 4 : FRACTION DE FRACTION

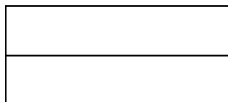
1) Compléter les phrases suivantes :

- Prendre la moitié d'un nombre revient à diviser ce nombre par ou à le multiplier par
- Prendre le septième d'un nombre revient à diviser ce nombre par ou à le multiplier par
- Prendre le..... d'un nombre revient à diviser ce nombre par 5 ou à le multiplier par
- Prendre led'un nombre revient à diviser ce nombre par ou à le multiplier par $\frac{1}{9}$.
- Prendre les $\frac{3}{4}$ d'un nombre revient à
diviser ce nombre par et.....le résultat par.....
multiplier ce nombre par et.....le résultat par.....
ouce nombre par

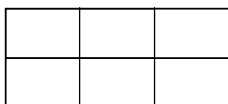
2) a) Compléter les pointillés dans les phrases suivantes :



On considère le rectangle ci-contre.

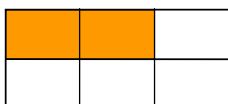


Chaque partie représente la moitié du rectangle.



On a partagé chaque moitié obtenue en parts égales.

Finalement, le rectangle est partagé en parts égales.



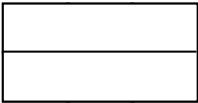
La partie coloriée représente les.....de la moitié du rectangle ou les..... du rectangle.

Conclusion : $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ représente $\frac{2}{6}$.

Quels calculs fait-on pour trouver $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$?

b) Tracer un rectangle, colorier les deux tiers du tiers de ce rectangle. Quelle fraction du rectangle est coloriée ?

3) Compléter le tableau suivant :

Fraction de fraction	Représentation géométrique avec des considérations d'aires	Fraction du total	Calcul correspondant
Les $\frac{3}{4}$ de la moitié			
Les deux tiers des trois quarts			
			$\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}$

Objectifs et commentaires

- Comprendre que prendre une fraction d'une quantité revient à multiplier cette quantité par une fraction.

L'illustration géométrique permet de donner du sens à des expressions comme deux tiers de trois quarts d'une quantité. Cette illustration pourra être utilisée pour la résolution de problèmes.

COURS

MULTIPLIER DES NOMBRES EN ÉCRITURE FRACTIONNAIRE

Propriété : Pour multiplier deux nombres écrits sous forme fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux. Les lettres a , b , c et d désignent des nombres ; b et d sont différents de zéro :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

$\swarrow$ produit des numérateurs
 $\swarrow$ produit des dénominateurs

Exemple 1

$$\frac{4}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4 \times 2}{3 \times 5} = \frac{8}{15}$$

Exemple 2

$$\frac{6}{14} \times \frac{7}{8} = \frac{6 \times 7}{14 \times 8} = \frac{2 \times 3 \times 7}{2 \times 7 \times 8} = \frac{3}{8}$$

Pour faciliter les calculs, il est judicieux de commencer, si cela est possible, par simplifier la fraction obtenue avant d'effectuer le produit des numérateurs et le produit des dénominateurs. Dans cet exemple, on a simplifié par 2×7 , c'est-à-dire par 14.

Application : fraction d'une fraction

Propriété : Pour calculer une fraction d'une fraction, on multiplie ces deux fractions entre elles.

Exemples

Calculer les deux tiers de $\frac{3}{5}$: on effectue $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$.

Calculer la moitié de $\frac{5}{4}$: on effectue $\frac{1}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{8}$.

AJOUTER DES NOMBRES EN ÉCRITURE FRACTIONNAIRE

Propriété : Pour calculer la somme (ou la différence) de deux fractions, on transforme cette somme (ou cette différence) en une somme (ou une différence) de deux fractions ayant les **mêmes dénominateurs**. Alors :

- on additionne les numérateurs.
- On garde le dénominateur commun.

Les lettres a , b et d désignent des nombres, d est différent de zéro :

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$$

← somme des numérateurs
← dénominateur commun

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$$

← différence des numérateurs
← dénominateur commun

Exemple 1

$$\frac{11}{9} + \frac{4}{9} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}.$$

Onze neuvièmes plus quatre neuvièmes égalent quinze neuvièmes. On simplifie ensuite la fraction quinze neuvièmes.

Exemple 2

$$\frac{11}{7} - \frac{5}{7} = \frac{6}{7}.$$

Onze septièmes moins cinq septièmes égalent six septièmes.

Exemple 3

$$\frac{7}{3} + \frac{13}{9} = \frac{21}{9} + \frac{13}{9} = \frac{34}{9}.$$

On ne peut pas ajouter directement des tiers et des neuvièmes : on convertit d'abord les tiers en neuvièmes.

Exemple 4

$$4 + \frac{7}{3} = \frac{12}{3} + \frac{7}{3} = \frac{19}{3}.$$

De même, on ne peut pas ajouter directement un entier à des tiers : on convertit d'abord cet entier en tiers.

POINTS DE REPÈRE / MÉTHODES

Multiplier des fractions

Méthode générale

- on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.
- on simplifie, si possible, la fraction obtenue.

Exemple 1

Calculer $\frac{4}{3} \times \frac{5}{6}$.

Les nombres sont petits : on suit la méthode générale.

$$\frac{4}{3} \times \frac{5}{6} = \frac{4 \times 5}{3 \times 6} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}.$$

Exemple 2

Calculer $5 \times \frac{8}{3}$.

L'un des facteurs est un entier : 5 fois huit tiers font 40 tiers.

$$5 \times \frac{8}{3} = \frac{5 \times 8}{3} = \frac{40}{3}.$$

Seul le numérateur est multiplié par 5.

Remarque : on peut aussi appliquer la méthode générale en écrivant le nombre entier 5 sous forme de fraction : $\frac{5}{1}$.

$$5 \times \frac{8}{3} = \frac{5}{1} \times \frac{8}{3} = \frac{5 \times 8}{1 \times 3} = \frac{40}{3}.$$

Exemple 3

Calculer $\frac{11}{21} \times \frac{35}{33}$.

Les nombres sont grands : les résultats des multiplications 11×35 et 21×33 ne sont pas directement donnés par les tables ; il faudrait poser les opérations. Dans ce cas, on décompose les nombres 35, 21 et 33 et on simplifie la fraction avant d'effectuer le produit des numérateurs et le produit des dénominateurs.

Ainsi, on remplace 35 par 5×7 ; 21 par 3×7 et 33 par 3×11 .

$$\frac{11}{21} \times \frac{35}{33} = \frac{11 \times 35}{21 \times 33} = \frac{11 \times 5 \times 7}{3 \times 7 \times 3 \times 11} = \frac{5}{3 \times 3} = \frac{5}{9}.$$

Exemple 4

Calculer $\frac{7}{3} \times 3$ et $\frac{7}{3} \times \frac{3}{4}$. Dans ces deux calculs, la simplification par 3 est évidente.

$$\frac{7}{3} \times 3 = \frac{7 \times 3}{3} = 7 ; \quad \frac{7}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{7 \times 3}{3 \times 4} = \frac{7}{4}.$$

Exemple 5

Calculer $\frac{7}{5} \times 15$ et $\frac{7}{5} \times \frac{15}{4}$. Dans ces deux calculs, la simplification par 5 est évidente.

$$\frac{7}{5} \times 15 = \frac{7 \times 3 \times 5}{5} = 21 ; \quad \frac{7}{5} \times \frac{15}{4} = \frac{7 \times 3 \times 5}{5 \times 4} = \frac{21}{4}.$$

Ajouter ou soustraire des fractions

Méthode générale : on regarde les dénominateurs.

S'ils sont égaux, alors :

- On additionne les numérateurs.
- On garde le dénominateur commun aux deux fractions.

Si les dénominateurs des fractions sont différents, alors on réduit les fractions au même dénominateur et on applique la méthode précédente.

Exemple 1 <u>Effectuer</u> $\frac{4}{7} + \frac{5}{7}$. On remarque que les dénominateurs sont égaux à 7. La somme sera donc une fraction de dénominateur 7. Son numérateur est la somme des numérateurs : $\frac{4}{7} + \frac{5}{7} = \frac{4+5}{7} = \frac{9}{7}.$	Exemple 2 <u>Effectuer</u> $\frac{4}{5} + \frac{7}{15}$. On compare les dénominateurs : ils sont différents. Il faut donc d'abord réduire les fractions au même dénominateur. Ici on peut transformer $\frac{4}{5}$ en quizièmes. $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15}.$ On a maintenant deux fractions qui ont le même dénominateur : $\frac{12}{15} \text{ et } \frac{7}{15}.$ On conserve alors ce dénominateur, et on additionne les numérateurs : $\frac{4}{5} + \frac{7}{15} = \frac{12}{15} + \frac{7}{15} = \frac{12+7}{15} = \frac{19}{15}.$	Exemple 3 <u>Effectuer</u> $\frac{4}{3} + 8$. On a la somme d'une fraction de dénominateur 3 et un entier. Il faut donc d'abord transformer l'entier en une fraction de dénominateur 3 : $8 = \frac{24}{3} \text{ car } 3 \times 8 = 24.$ On a maintenant deux fractions qui ont le même dénominateur : $\frac{4}{3} \text{ et } \frac{24}{3}.$ On conserve alors le dénominateur, et on effectue l'addition des numérateurs : $\frac{4}{3} + 8 = \frac{4}{3} + \frac{24}{3} = \frac{4+24}{3} = \frac{28}{3}.$
--	---	---

Utilisation d'un tableau pour résoudre un problème

Exemple 1

Dans une serre, les trois quarts des plantes sont des fleurs et le tiers des fleurs sont des tulipes. Quelle fraction du nombre de plantes représentent les tulipes ?

On peut utiliser un tableau pour mieux se représenter le problème :

Nombre de plantes		On cherche à exprimer le nombre de tulipes en une fraction du nombre de plantes. On remplace donc nombre de fleurs par $\frac{3}{4}$ du nombre de plantes .
Nombre de fleurs	$\frac{3}{4}$ du nombre de plantes.	
Nombre de tulipes	$\frac{1}{3}$ du nombre de fleurs. ou $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$ du nombre de plantes.	

Les tulipes représentent $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$ du nombre de plantes : $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Les tulipes représentent donc $\frac{1}{4}$ du nombre de plantes.

Exemple 2

Lors d'un test organisé par une société de consommateurs, les produits testés sont classés en 3 catégories A, B et C. Le sixième des produits est classé A, les deux tiers de ces produits sont classés B. Quelle fraction représente le nombre total de produits classés C ?

Nombre de produits		On remarque que ce sont des fractions de la même grandeur, elles peuvent donc s'ajouter.
Nombre de produits classés A	$\frac{1}{6}$ des produits	
Nombre de produits classés B	$\frac{2}{3}$ des produits	
Nombre de produits classés C	$\frac{\dots}{\dots}$ des produits	

La fraction représentant le total des produits classés A et B est : $\frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{5}{6}$.

$\frac{5}{6}$ des produits sont classés A ou B.

La fraction représentant les produits classés C est donc : $\frac{6}{6} - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.

$\frac{1}{6}$ des produits sont classés C.

EXERCICES

TECHNIQUE DE L'ADDITION ET DE LA SOUSTRACTION

L'exercice 1 propose un changement de registre de la langue naturelle vers le registre numérique, pour préparer la somme d'un entier et d'une fraction.

1. Écrire :

Le nombre trois sous la forme de cinquièmes.

Le nombre sept sous la forme de quarts.

Le nombre quatre sous la forme de tiers.

Le nombre sept sous la forme de septièmes

Dans l'exercice 2, on travaille le lien entre division et multiplication dans tous les sens. Ceci est à revoir régulièrement dans les séances de calcul réfléchi, pour fixer l'image correspondante.

2. Compléter :

a) $\frac{36}{3} = \dots$; $\frac{\dots}{4} = 7$; $\frac{24}{\dots} = 6$; $8 = \frac{\dots}{4}$.

b) $3 = \frac{\dots}{6}$; $6 = \frac{\dots}{5}$; $\frac{36}{\dots} = 3$; $6 = \frac{\dots}{3}$.

Les calculs classiques des exercices 3 et 4 sont à revoir régulièrement dans les séances de calcul réfléchi, cela s'avère plus efficace que d'en faire une grosse quantité dans ce chapitre.

3. Effectuer les calculs suivants :

$$A = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} ; \quad B = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} ; \quad C = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} ; \quad D = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} ; \quad E = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} ; \quad F = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} ; \quad G = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}.$$

$$H = \frac{5}{6} + \frac{2}{3} ; \quad I = \frac{1}{2} + \frac{5}{6} ; \quad J = \frac{3}{4} - \frac{1}{12} ; \quad K = \frac{1}{4} + \frac{5}{12} ; \quad L = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} ; \quad M = \frac{5}{6} - \frac{7}{18} ; \quad N = \frac{5}{12} + \frac{1}{3}.$$

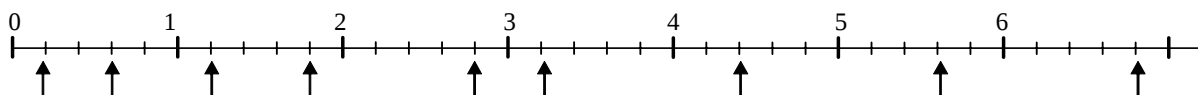
4. Effectuer les calculs suivants :

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} ; \quad \frac{5}{2} - \frac{5}{6} ; \quad \frac{1}{2} + \frac{5}{8} ; \quad \frac{3}{4} - \frac{5}{8} ; \quad \frac{1}{21} + \frac{2}{7} ; \quad \frac{15}{4} + \frac{5}{8}.$$

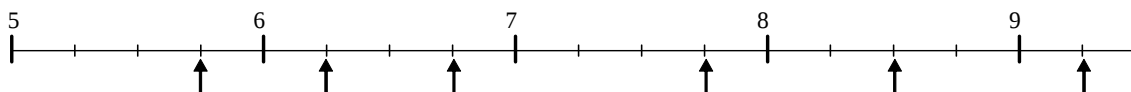
DROITE GRADUÉE

Dans les exercices 5 à 11, on continue à travailler le changement de registre du symbolique vers le graphique, dans les deux sens, avec également le passage de l'écriture décimale à l'écriture fractionnaire. Dans l'exercice 5, la présence de l'origine sur la graduation permet de pouvoir procéder par "comptage", alors que dans les exercices suivants, on est amené à raisonner avec la somme d'un entier et d'une fraction. La droite graduée peut alors permettre de contrôler la vraisemblance du résultat.

5. Donner une écriture fractionnaire et une écriture décimale des nombres repérés par une flèche :



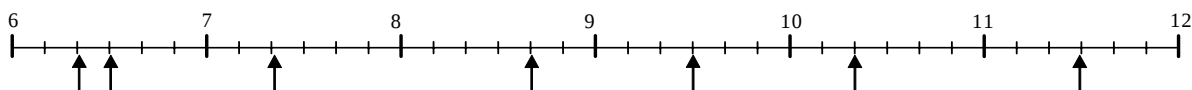
6. Donner une écriture fractionnaire et une écriture décimale des nombres repérés par une flèche :



7. Donner une écriture fractionnaire et une écriture décimale des nombres repérés par une flèche :



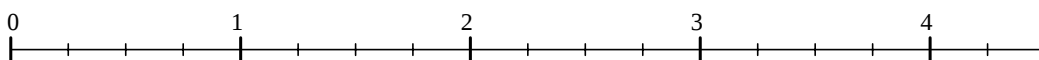
8. Donner une écriture fractionnaire et une écriture décimale (si elle existe) des nombres repérés par une flèche :



Dans l'exercice 9, on place des nombres écrits sous différentes formes. La reconnaissance des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme de quarts est un objectif important qui est également travaillé régulièrement dans les séances de calcul réfléchi.

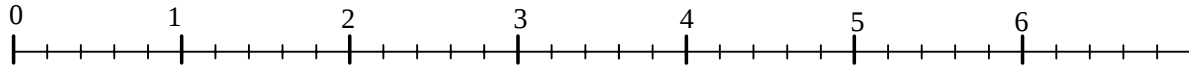
9. Placer les nombres ci-dessous sur la droite graduée :

$$\frac{1}{2} ; \quad 0,75 ; \quad \frac{7}{4} ; \quad 2,25 ; \quad 4,50 ; \quad 2 + \frac{2}{4} ; \quad 4 - \frac{1}{4}.$$



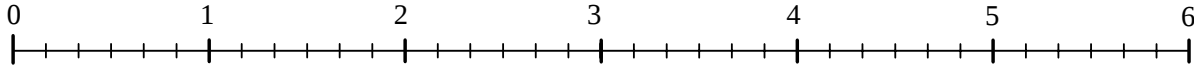
10. Placer les nombres ci-dessous sur la droite graduée :

$$\frac{2}{5} ; \quad 3,6 ; \quad \frac{9}{5} ; \quad 6,8 ; \quad \frac{14}{5} ; \quad 3 + \frac{1}{5} ; \quad 5 - \frac{2}{5} ; \quad 4 - \frac{3}{5}.$$



11. Placer les nombres ci-dessous sur la droite graduée :

a) $\frac{5}{6}$; 2,5 ; $\frac{13}{6}$; $2 + \frac{2}{6}$; $5 - \frac{1}{6}$; $3 + \frac{5}{6}$; $2 - \frac{4}{6}$; $\frac{23}{6}$



b) $3 + \frac{1}{2}$; $7 - \frac{3}{5}$; $7 + \frac{5}{8}$; $9 - \frac{1}{9}$; $4 - \frac{1}{4}$; $7 + \frac{1}{9}$.

L'exercice 12 permet de travailler la somme d'un entier et d'une fraction dans les deux sens. Le lien entre fraction et quotient est fondamental pour comprendre une égalité du type $\frac{25}{3} = 8 + \frac{1}{3}$, égalité qui donne du sens à la fraction $\frac{25}{3}$. Ce travail doit également être prolongé dans les séances de calcul réfléchi.

12. Écrire chacun des nombres fractionnaires suivants sous la forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1.

$\frac{17}{5}$; $\frac{29}{6}$; $\frac{35}{4}$; $\frac{41}{3}$; $\frac{51}{2}$; $\frac{25}{12}$; $\frac{33}{7}$.

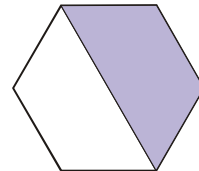
FRACTION DE FRACTION

Dans les exercices 13 à 16, on approche la notion de fraction de fraction à travers plusieurs changements de registres. On utilise ainsi les registres graphique, numérique et celui de la langue naturelle pour aider l'élève à se représenter $1/2$ de $1/3$...

13. Compléter les phrases suivantes :

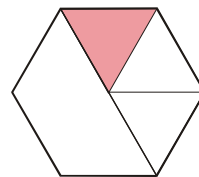
a) On a partagé l'aire du premier hexagone en parties égales.

L'aire de la partie grisée représente donc $\frac{\dots}{\dots}$ de l'hexagone.



b) On a partagé la moitié de l'aire de l'hexagone en parties égales. L'aire du triangle grisé représente $\frac{\dots}{\dots}$ de $\frac{\dots}{\dots}$ de l'aire

de l'hexagone, c'est-à-dire $\frac{\dots}{\dots}$ de l'aire de l'hexagone.

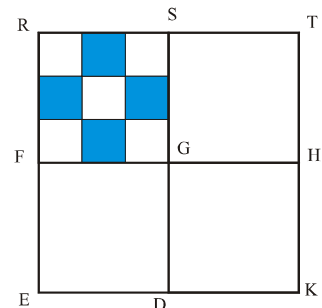


14. Compléter les deux phrases suivantes :

a) L'aire de la partie grisée représente $\frac{\dots}{\dots}$ de l'aire du carré FRSG.

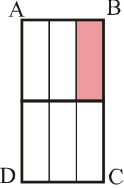
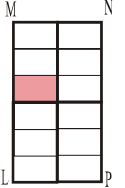
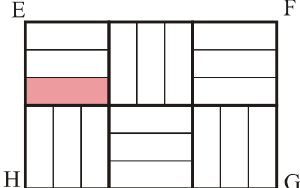
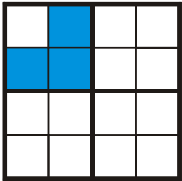
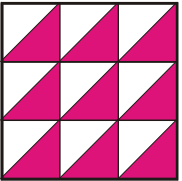
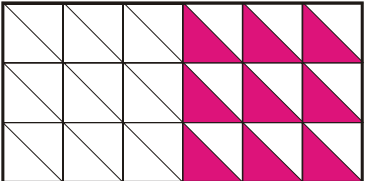
b) L'aire de la partie grisée représente $\frac{\dots}{\dots}$ de $\frac{\dots}{\dots}$ de l'aire du

carré ERTK, c'est-à-dire $\frac{\dots}{\dots}$ de l'aire du carré ERTK.



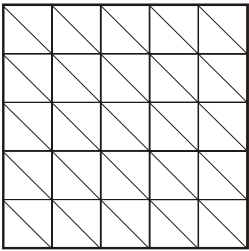
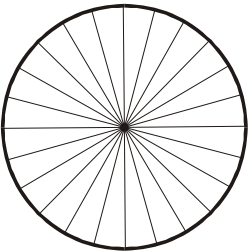
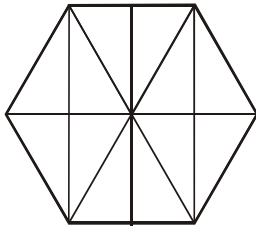
Dans l'exercice 15, les figures 5 et 6 sont difficiles et nécessiteront sans doute l'intervention du professeur.

15. Compléter les phrases suivantes à l'aide des figures du tableau :

figure 1  On a partagé la moitié de l'aire du rectangle ABCD en parties égales. L'aire du rectangle grisé représente $\frac{\dots}{\dots}$ de $\frac{\dots}{\dots}$ de l'aire du rectangle ABCD, c'est à dire $\frac{\dots}{\dots}$ de l'aire du rectangle ABCD. Cette représentation montre que : $\frac{\dots}{\dots}$ de $\frac{\dots}{\dots}$ représente $\frac{\dots}{\dots}$ ou que $\frac{\dots}{\dots} \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$	figure 2  On a partagé le de l'aire du rectangle MNPL en 3 parties égales. L'aire du rectangle grisé représente $\frac{\dots}{\dots}$ de $\frac{\dots}{\dots}$ de l'aire du rectangle MNPL, c'est à dire $\frac{\dots}{\dots}$ de l'aire du rectangle MNPL. Cette représentation montre que : $\frac{\dots}{\dots}$ de $\frac{\dots}{\dots}$ représente $\frac{\dots}{\dots}$ ou que $\frac{\dots}{\dots} \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$	figure 3  On a partagé le de l'aire du rectangle EFGH en 3 parties égales. L'aire du rectangle grisé représente $\frac{\dots}{\dots}$ de $\frac{\dots}{\dots}$ de l'aire du rectangle EFGH, c'est à dire $\frac{\dots}{\dots}$ de l'aire du rectangle EFGH. Cette représentation montre que : $\frac{\dots}{\dots}$ de $\frac{\dots}{\dots}$ représente $\frac{\dots}{\dots}$ ou que $\frac{\dots}{\dots} \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$
figure 4  Cette représentation montre que : $\frac{\dots}{\dots}$ de $\frac{\dots}{\dots}$ représente $\frac{\dots}{\dots}$ ou que $\frac{\dots}{\dots} \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$	figure 5  Cette représentation montre que : $\frac{\dots}{\dots}$ de $\frac{\dots}{\dots}$ représente $\frac{\dots}{\dots}$ ou que $\frac{\dots}{\dots} \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$	figure 6  Cette représentation montre que : $\frac{\dots}{\dots}$ de $\frac{\dots}{\dots}$ représente $\frac{\dots}{\dots}$ ou que $\frac{\dots}{\dots} \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{\dots}{\dots}$

Dans l'exercice 16, on travaille dans le sens inverse des exercices précédents. En général, on laisse le soin aux élèves de tracer des rectangles avec des dimensions qu'ils doivent trouver. Ici, la difficulté vient de la diversité des supports.

16. Colorier une partie de la figure pour que son aire corresponde à la fraction de l'aire totale proposée :

La moitié de $\frac{2}{5}$ soit $\frac{\dots}{\dots}$ de l'aire du carré. figure 9 	$\frac{5}{6}$ de $\frac{1}{4}$ soit $\frac{\dots}{\dots}$ de l'aire du disque. figure 10 	$\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$ soit $\frac{\dots}{\dots}$ de l'aire de l'hexagone. figure 11 
--	---	---

17. Tracer un segment [AB] de douze centimètres de longueur. Repasser en rouge les quatre cinquièmes du segment, puis hachurer le tiers des quatre cinquièmes du segment. Quelle fraction de [AB] a été hachurée ?
18. a) Émilie fait un gâteau d'anniversaire rectangulaire, elle le découpe en 5 rangées verticales et 3 rangées horizontales. Faire un dessin représentant le gâteau.
- b) Elle ne sert à table que les $\frac{4}{5}$ du gâteau. Colorier la partie du gâteau qu'elle va servir.
- c) Parmi les invités, seulement $\frac{2}{3}$ d'entre eux mangent leur part. En utilisant le dessin, trouver à quelle fraction du gâteau cela correspond.
- d) Retrouver la fraction précédente par le calcul.

Dans l'exercice 19, on continue le travail des exercices précédents dans le registre de la langue naturelle, en prenant soin de le faire dans tous les sens. Dans l'exercice 20, on termine ce travail dans le registre symbolique.

19. Compléter les phrases suivantes :
- Prendre des quarts de cinquièmes donne un partage en
 - Prendre des tiers de septièmes donne un partage en
 - Prendre des de cinquièmes donne un partage en vingt-cinquièmes.
 - Prendre des quarts de donne un partage en trente-deuxièmes.
 - Prendre des de donne un partage en vingt-et-unièmes.
 - Prendre des de donne un partage en trente-sixièmes.
20. Compléter les phrases suivantes :
- $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$ est égal à ; b) $\frac{1}{5}$ de $\frac{\dots}{\dots}$ est égal à $\frac{1}{15}$.
21. Écris les calculs correspondant à chaque phrase :
- "Je prends les trois quarts de deux septièmes".
 - "Je prends le tiers de deux cinquièmes".
 - "Je prends les dix onzièmes de cinq".
22. Écris les phrases correspondant aux calculs suivants :
- $\frac{3}{4} \times \frac{7}{2}$; b) $\frac{5}{6} \times 3$.

TECHNIQUE DE LA MULTIPLICATION

Les calculs classiques des exercices 23 et 24 sont à revoir régulièrement dans les séances de calcul réfléchi, cela s'avère plus efficace que d'en faire une grosse quantité dans ce chapitre.

23. On donnera le résultat sous forme de fraction simplifiée au maximum ou d'un entier.

$$A = \frac{3}{7} \times \frac{8}{11} ; \quad B = 15 \times \frac{3}{5} ; \quad C = \frac{4}{7} \times \frac{21}{8}$$

$$D = 5 \times \frac{3}{7} ; \quad E = \frac{28}{7} \times 5 ; \quad F = \frac{12}{5} \times \frac{7}{4}$$

24. Calculer et simplifier au maximum :

$$A = \frac{3}{5} \times \frac{4}{3} ; \quad B = \frac{2}{8} \times 15 ; \quad C = 14 \times \frac{17}{7} ; \quad D = \frac{1}{12} \times \frac{4}{15} ; \quad E = \frac{19}{18} \times \frac{9}{38}$$

$$F = \frac{8}{4} \times \frac{16}{4} ; \quad G = \frac{50}{9} \times \frac{27}{25} ; \quad H = 3 \times \frac{10}{6} ; \quad I = \frac{6}{7} \times \frac{28}{31} ; \quad \boxed{}$$

Dans les exercices 25 et 26, on travaille la multiplication dans un autre sens.

25. Recopier et compléter pour que les égalités soient exactes :

$$\frac{8}{5} \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{16}{15} ; \quad \frac{5}{4} \times \dots = 10 ; \quad \frac{\dots}{\dots} \times \frac{2}{7} = 1 ; \quad \frac{1}{6} \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{2}{5}$$

26. Compléter les pointillés pour que les égalités suivantes soient exactes :

$$\frac{3}{5} \times \frac{\dots}{\dots} = \frac{21}{20} \quad ; \quad 10 \times \frac{7}{\dots} = 35 \quad ; \quad 8 \times \frac{\dots}{24} = 5 \quad ; \quad \frac{\dots}{7} = 1 \quad ; \quad \frac{9}{\dots} = 9.$$

OPERATIONS MÉLANGÉES

27. Avant de répondre, lire d'abord les deux questions pour mieux comprendre ce qui est demandé !

- a) Recopier l'opération suivante. Sans la calculer, réécrire l'expression E en remplaçant tous les signes « ÷ » par des écritures fractionnaires pour que le résultat de l'opération reste le même :

$$E = (26 + 4) \div 5 + 2 + 4 \div 5 - 3.$$

- b) C'est l'exercice inverse de la question a). Recopier l'expression F ci-dessous. Sans la calculer, remplacer tous les traits de fraction « — » par le signe ÷ en rajoutant les parenthèses indispensables pour que le résultat du calcul ne change pas.

$$F = \frac{8}{6-2} + 5 + \frac{15-3}{3} - 2.$$

Les calculs classiques des exercices 28 à 36 sont à revoir régulièrement dans les séances de calcul réfléchi, cela s'avère plus efficace que d'en faire une grosse quantité dans ce chapitre.

28. Calculer, et donner le résultat sous la forme la plus **simple** possible.

$$B = 5 \times \frac{6}{10} \quad ; \quad C = \frac{3}{7} + 4 \quad ; \quad D = 2 - \frac{3}{5}.$$

$$E = \frac{4}{3} + \frac{2}{9} \quad ; \quad F = \frac{7}{3} \times \frac{15}{3} \quad ; \quad H = \frac{11}{5} \times \frac{9}{11}.$$

29. Calculer, et donner le résultat sous la forme la plus **simple** possible.

$$A = \frac{4}{5} + \frac{7}{5} \quad ; \quad B = 3 \times \frac{10}{6} \quad ; \quad C = \frac{4}{5} + 2 \quad ; \quad D = 3 - \frac{2}{9}.$$

$$E = \frac{4}{5} + \frac{3}{10} \quad ; \quad F = \frac{8}{4} \times \frac{16}{4} \quad ; \quad H = \frac{3}{5} \times \frac{4}{3} \quad ; \quad I = \frac{15}{8} \times \frac{4}{5}.$$

30. Calculer, et donner le résultat sous la forme la plus **simple** possible.

$$\frac{3}{7} - \frac{15}{42} \quad ; \quad \frac{31}{36} - \frac{25}{36} \quad ; \quad \frac{5}{12} + \frac{8}{12} \quad ; \quad 1 - \frac{3}{8} \quad ; \quad \frac{3}{28} + \frac{5}{7}.$$

$$\frac{4}{8} \times \frac{10}{2} \quad ; \quad \frac{5}{3} \times \frac{7}{2} \quad ; \quad 12 \times \frac{5}{36} \quad ; \quad \frac{3}{28} + \frac{5}{4} \quad ; \quad \frac{2}{5} + 3.$$

31. Effectuer les calculs suivants et donner la réponse sous forme d'une fraction simplifiée au maximum :

$$A = \frac{5}{7} + 4 \quad ; \quad B = 5 - \frac{8}{3} \quad ; \quad C = \frac{2}{3} \times \frac{6}{4} \times \frac{8}{9} \quad ; \quad D = \frac{2}{3} + \frac{3}{12}.$$

32. Calculer et simplifier au maximum en détaillant les calculs:

$$\frac{7}{5} + \frac{4}{15} \times \frac{3}{2} \quad ; \quad \frac{9+1}{8+1} \times \frac{13-1}{16-1} \quad ; \quad \frac{8}{3} + \frac{5}{3} \times \frac{6}{25} \quad ; \quad \frac{9+1}{8+1} \times \frac{13-1}{16-1}.$$

33. Calculer, et donner le résultat sous la forme la plus **simple** possible.

$$2 + \frac{8}{3} \quad ; \quad \frac{5}{24} + \frac{7}{24} \quad ; \quad \frac{9}{7} - \frac{23}{56} \quad ; \quad 5 \times \frac{3}{7}.$$

$$\frac{18}{7} - 1 \quad ; \quad \frac{4}{7} \times \frac{21}{28} \quad ; \quad \frac{15}{66} \times 11 \quad ; \quad \frac{5}{3} + \frac{7}{6} + \frac{13}{12}.$$

34. Calculer et simplifier au maximum :

$$A = \frac{3}{5} + \frac{3}{10} \quad ; \quad B = \frac{8}{9} - \frac{2}{3} \quad ; \quad D = \frac{18}{39} + \frac{7}{13} \quad ; \quad C = \frac{10}{3} \times \frac{9}{8} \quad ; \quad E = \frac{7}{2} \times \frac{5}{2}.$$

$$F = 12 \times \frac{3}{4} ; \quad G = \frac{15}{4} + \frac{15}{8} ; \quad H = \frac{16}{4} \times \frac{2}{8} ; \quad I = \frac{1}{6} - \frac{3}{4} \times \frac{2}{9} ; \quad J = 4 \times \frac{27}{12} + \frac{9}{5}.$$

35. Calculer les nombres suivants, et simplifier au maximum la fraction obtenue. Il est indispensable de détailler les calculs !

LANGUE NATURELLE

Dans l'exercice 36, on amène l'élève à voir la fraction $\frac{15}{14}$ sous plusieurs formes. Les questions sont plus ouvertes que de simples calculs, on s'attachera à prendre en considération les différentes réponses.

36. Écrire la fraction comme indiqué. Proposer plusieurs solutions lorsque c'est possible. :

- a) $\frac{15}{14}$ sous la forme du produit de deux fractions.
- b) $\frac{15}{14}$ sous la forme du produit d'un entier par une fraction.
- c) $\frac{15}{14}$ sous la forme de la somme de deux fractions de même dénominateur.
- d) $\frac{15}{14}$ sous la forme de la somme de deux fractions de dénominateurs multiples l'un de l'autre.
- e) $\frac{15}{14}$ sous la forme de la somme de deux fractions de dénominateurs différents. (Hors programme).

37. Même exercice que le n°36 avec la fraction $\frac{20}{63}$.

Beaucoup d'élèves pensent, même après avoir écrit l'égalité $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, que $\frac{4}{6}$ est le double de $\frac{2}{3}$. Le but des exercices 38 et 39 est de tordre le cou à cette idée qui est parfois ancrée jusqu'à la classe de 3^{ème} et même après... L'utilisation de la langue naturelle permet de donner du sens à travers un changement de registre. On s'appuie sur la langue naturelle pour comprendre que quatre sixièmes divisés en deux représentent deux sixièmes

38. On considère la fraction quatre sixièmes.

- a) Simplifier cette fraction par deux.
- b) Prendre la moitié de cette fraction.
- c) Donner le double de cette fraction.
- d) Prendre le tiers de cette fraction.

39. On considère la fraction douze dix-huitièmes

- a) Prendre le tiers de cette fraction.
- b) Simplifier cette fraction par trois.
- c) Donner la moitié de cette fraction.
- d) Simplifier cette fraction par deux.
- e) Donner le triple de cette fraction.

40. Compléter les pointillés pour obtenir dans chaque cas une phrase vraie :

- a) On a simplifié par 6 la fraction pour trouver $\frac{5}{3}$.
- b) On a divisé par 5 la fraction pour trouver $\frac{15}{35}$.
- c) On a multiplié par 3 la fraction pour trouver $\frac{24}{15}$.
- d) On a pris les quatre cinquièmes de la fraction pour trouver $\frac{28}{15}$.

PROBLÈMES LIÉS À LA MULTIPLICATION

Pour chaque problème, on peut suggérer aux élèves, de le représenter par un schéma (rectangle avec coloriage...) ou par un tableau, comme dans la partie « points de repère ».

41. a) Quatre cent vingt candidats se présentent à un examen en 2007. Le quart des candidats est autorisé à passer l'épreuve orale. Les trois cinquièmes de ceux qui ont passé l'épreuve orale sont admis définitivement à l'examen. Combien de personnes sont finalement admises à cet examen ?
 b) En 2006, les trois quarts des candidats avaient été autorisés à passer l'épreuve orale, et parmi ceux-ci, le tiers avait été admis définitivement à l'examen. Sachant que 81 personnes ont été admises définitivement cette année là, combien de candidats se sont présentés à l'examen ?
42. Dans un collège, six onzièmes des élèves sont musiciens, et parmi eux, trois quarts jouent de la flûte. Quelle est la fraction des élèves du collège qui jouent de la flûte ?
43. Invente un énoncé de problème dont la solution serait obtenue par le calcul suivant : $\frac{1}{4} \times \frac{3}{5}$.
44. Dans une classe de 24 élèves, les deux tiers des élèves ont les cheveux bruns et parmi les élèves aux cheveux bruns, un quart a les yeux bleus.
 a) Quelle fraction de la classe a les yeux bleus **et** les cheveux bruns ?
 b) Combien d'élèves ont les cheveux bruns **et** les yeux bleus ?

PROBLÈMES LIÉS À L'ADDITION

Les exercices 45 et 46 permettent de présenter une situation où la somme d'un entier et d'une fraction est travaillée dans les deux sens. Ils sont à entretenir régulièrement dans les séances de calcul réfléchi et leur maîtrise sera très utile dans les problèmes liés aux calculs de durées, vitesses et distances.

45. Écrire en fraction d'heure :
 1h 40 min ; 2h 48 min ; 1h 45 min ; 3h 36 min.
46. Écrire en heures minutes :
 $\frac{7}{3}$ h ; $\frac{7}{5}$ h ; $\frac{17}{6}$ h ; $\frac{17}{4}$ h ; $\frac{19}{10}$ h.

On peut suggérer aux élèves, pour chaque problème, de le représenter par un schéma (rectangle avec coloriage...) ou par un tableau, comme dans la partie « points de repère ».

47. Céline décide de dépenser le contenu de sa tirelire pour acheter des cadeaux de Noël. Elle utilise $\frac{1}{3}$ de ce contenu pour acheter un cadeau à Jérôme et $\frac{2}{9}$ de ce contenu pour un cadeau à Charlotte.
 a) Quel est le cadeau qui coûte le plus cher ? Expliquer.
 b) Quelle fraction de ses économies reste-t-il à Céline pour faire un cadeau à son frère Patrick ?
48. La famille Pensatout dispose d'un budget pour ses dépenses mensuelles, qui se répartissent ainsi :
 $\frac{1}{3}$ pour la nourriture ; $\frac{2}{15}$ pour les habits ; $\frac{2}{15}$ pour la voiture ; $\frac{1}{5}$ pour le loyer ; $\frac{1}{15}$ pour la scolarité des enfants ; le reste pour les loisirs.
 a) Quelle fraction du budget reste-t-il pour les loisirs ?
 b) Sachant que le budget est de 1440 euros, quelle est la somme dépensée chaque mois en dehors des loisirs ?
 c) Quelle est la somme attribuée aux loisirs ?

PROBLÈMES

On peut suggérer aux élèves, pour chaque problème, de le représenter par un schéma (rectangle avec coloriage...) ou par un tableau, comme dans la partie « points de repère ». Une difficulté supplémentaire par rapport aux problèmes précédents : il faut choisir la bonne opération, en enchaîner plusieurs.

49. Deux enfants sont devant une galette :
Claude : « moi, j'en veux le tiers de la moitié ».
Sylvia : « moi, j'en veux le quart des deux tiers ».
Qui en veut le plus ? Expliquer soigneusement.
50. Construire un rectangle de 15 cm sur 6 cm. En combien de carrés de 1 cm de côté peut-on le partager ? Catherine a hachuré en noir trente carrés de 1 cm de côté. Quelle fraction du rectangle a-t-elle hachuré ? Pierre a repassé au « fluo » jaune un carré hachuré sur deux. Quelle est la fraction du rectangle coloriée au « fluo » jaune ? A quel calcul sur les fractions cela correspond-il ?
51. Voici plusieurs situations où interviennent des calculs avec des fractions. Pour chaque cas, indiquer le ou les types de calcul à faire (addition, soustraction, multiplication, division), puis effectuer ces calculs et simplifier au maximum le résultat final obtenu.
- a) Une tablette de chocolat comporte 24 carreaux. Osmane en mange les deux tiers. Combien de carreaux a-t-il mangés ?
 - b) Delphine a mangé un sixième du gâteau, puis elle a repris un huitième du gâteau. Quelle est la part du gâteau qu'elle a dégustée au total ?
 - c) Floriane a partagé la tarte flambée en six parts égales. Elle en a distribué quatre. Quelle est la fraction qui représente le reste ?
 - d) Marc a coupé la tarte flambée en quatre, puis a recoupé chaque part en deux portions égales. Quelle est la fraction de tarte que représente une part ?
 - e) Cathia sait que pour trouver 15% de 210 €, elle doit calculer $\frac{15}{100}$ de 210 €. Quel est le résultat de son calcul ?
52. Vanessa veut s'acheter une veste. Au départ, la veste coûte 75 €. Elle est ensuite soldée : 10% de réduction. Vanessa hésite encore. La semaine suivante, nouvelle démarque de 20% sur le prix déjà réduit. Quel est le prix final de la veste ? Quel est le pourcentage de réduction total sur le prix de départ ?
53. Dès la première semaine, Anne a dépensé les $\frac{3}{4}$ de son argent de poche du mois. La deuxième semaine, elle dépense les $\frac{2}{3}$ de ce qui lui reste.
- a) Quelle fraction de son argent de poche du mois a-t-elle dépensé la deuxième semaine ?
 - b) Quelle fraction de son argent de poche du mois a-t-elle dépensé pendant les deux premières semaines ?
 - c) Quelle fraction de son argent de poche du mois va-t-il lui rester pour les deux dernières semaines ?
 - d) Anne avait 48 euros au début de la première semaine. Combien d'argent lui restera-t-il pour les deux dernières semaines ?
54. Dans le jardin, il y a deux sortes de fleurs : des roses et des marguerites. $\frac{1}{6}$ du jardin est couvert de roses, et les $\frac{2}{5}$ de ce qui reste est couvert de marguerites. Quelle fraction du jardin est-elle couverte de fleurs ?

CALCULS À ENTRETENIR

Types de calcul	Objectifs, méthodes, commentaires
Simplifications de fractions : $\frac{12}{24}$; $\frac{15}{21}$; ...	Le faire régulièrement plutôt que de grosses batteries d'exercices en cours. Voir les critères de divisibilité.
Transformations de fractions en pourcentages : $\frac{7}{25}$; $\frac{7}{20}$; $\frac{21}{60}$; ...	Le faire régulièrement plutôt que de grosses batteries d'exercices en cours.
Utilisations de simplifications pour les calculs de certains quotients : écrire sous forme décimale $\frac{54}{24}$, $\frac{49}{70}$...	Le calcul d'un quotient peut-être fait de diverses façons : pour diviser 54 par 24, on peut se ramener à diviser 9 par 4...
Calculs du type $\frac{11}{0,5}$; $\frac{11}{0,25}$; $\frac{11}{5}$... Le dénominateur est 5 ou 0,5 ou 50... Le dénominateur est 25 ou 0,25 ...	Se ramener à un dénominateur égal à une puissance de 10. Comprendre après expérimentation que diviser par 0,5 c'est multiplier par 2 et diviser par 0,25 c'est multiplier par 4.
Fraction et entier : Calculer $2 + \frac{3}{7}$. Écrire sous la forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 : $1 \div \frac{27}{7}$; ...	Donner un peu plus de sens à l'écriture fractionnaire.
Sommes de fractions : $\frac{2}{7} + \frac{3}{14}$; ...	Le faire régulièrement plutôt que de grosses batteries d'exercices en cours.
Produits de fractions : $\frac{3}{4} \times \frac{4}{7}$; $\frac{33}{4} \times 4$; $\frac{33}{4} \times 8$...	Préférer des multiplications pour lesquelles la simplification est immédiate ou presque.

CHAPITRE 5

NOMBRES RELATIFS

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Relier le sens d'un nombre relatif à la droite graduée.
- Utiliser la droite graduée pour ranger des nombres relatifs.
- Effectuer la somme de deux nombres relatifs.
- Transformer une soustraction en une addition des opposés.
- Simplifier des sommes et des différences de nombres relatifs.
- Calculer des sommes algébriques.
- Sur des exemples numériques, écrire en utilisant correctement des parenthèses, un programme de calcul portant sur des sommes ou des différences de nombres relatifs.

REPÈRES POUR LE CONTENU DU COURS

- Notion de nombre relatif, opposé d'un nombre.
- Comparaison de deux nombres relatifs.
- Règle d'addition de deux nombres relatifs.
- Règle de soustraction.
- Sommes algébriques.

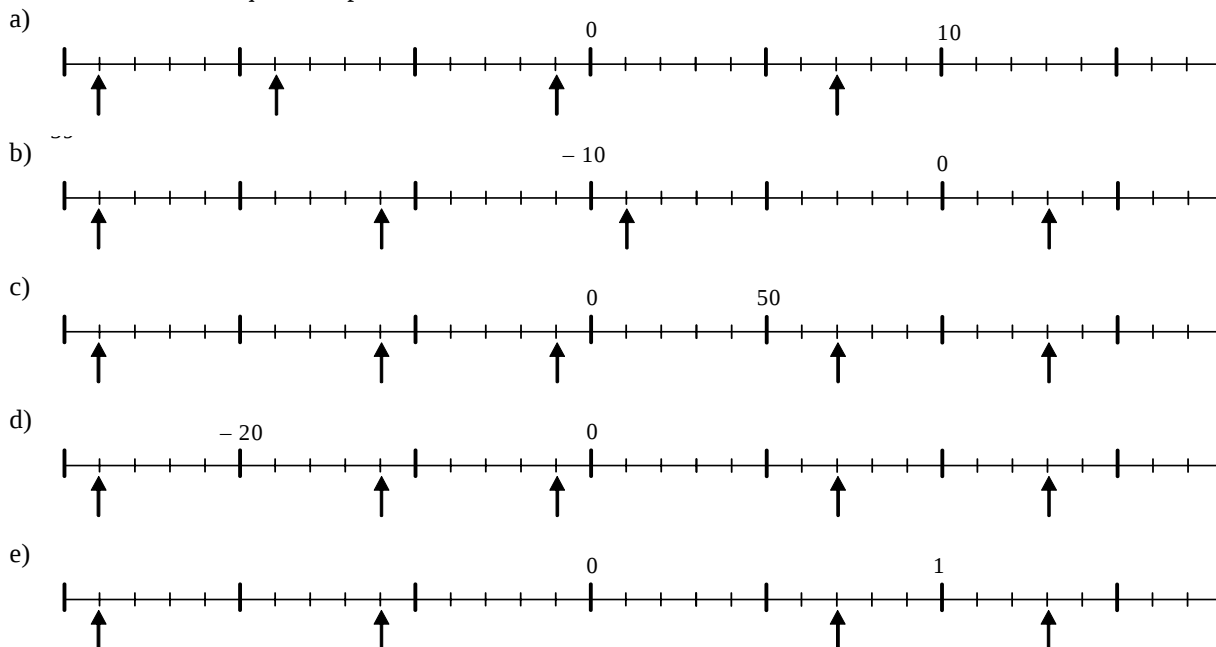
COMMENTAIRES GÉNÉRAUX

Ce chapitre est à traiter en plusieurs temps. Il est important que l'élève soit confronté aux nombres relatifs tout au long de l'année scolaire. Ainsi on peut, dès le début de l'année, entraîner l'élève aux calculs de sommes de relatifs dans les séances de calcul réfléchi, après avoir vu la droite graduée comme dans l'activité 2. Les deux nombres à ajouter seront écrits entre parenthèses, avec leurs signes, pour qu'il n'y ait pas de confusion entre le signe opératoire de la soustraction et le signe « prédicatoire » du nombre. En effet, écrire trop rapidement, par exemple, $-7 + 9$ au lieu de $(-7) + (+9)$ peut engendrer quelques confusions de sens. Nous conseillons ensuite d'aborder plus loin dans l'année les activités 1 et 3 et de laisser reposer quelques semaines avant d'aborder la soustraction et les sommes algébriques.

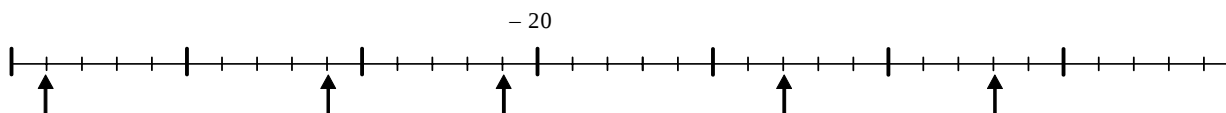
ACTIVITÉ

ACTIVITÉ 1 : DROITE GRADUÉE ET COMPARAISON DES NOMBRES RELATIFS

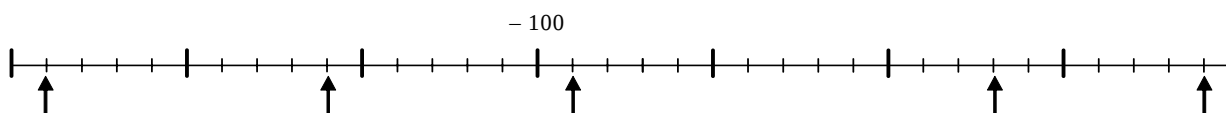
1) Trouver les nombres qui correspondent aux flèches :



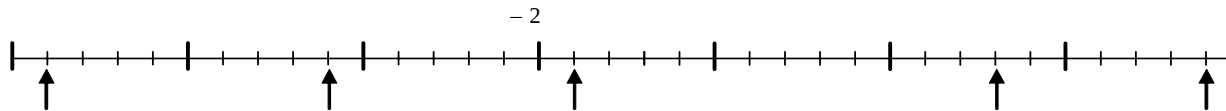
2) Trouver les nombres qui correspondent aux flèches, sachant qu'une graduation correspond à une unité :



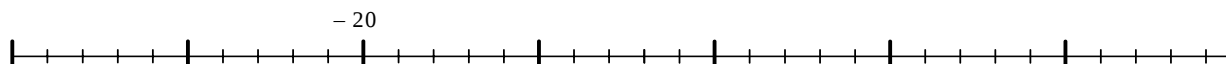
3) Trouver les nombres qui correspondent aux flèches, sachant qu'une graduation correspond à 10 unités :



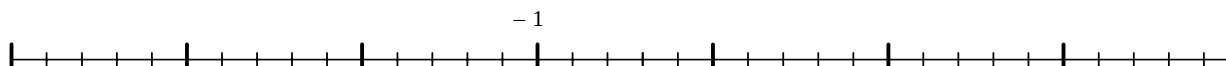
4) Trouver les nombres qui correspondent aux flèches, sachant qu'une graduation correspond à 0,1 unité :



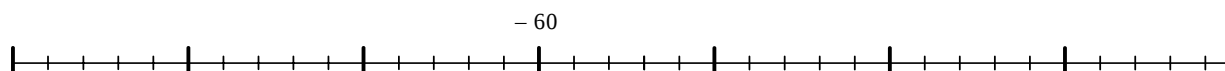
5) Sur la droite graduée suivante, une graduation correspond à 1 unité. Placer les nombres -19 , -25 , $+2$ et -16 puis ranger ces nombres dans l'ordre croissant :



6) Sur la droite graduée suivante, une graduation correspond à 0,1 unité. Placer les nombres -2 , $-1,9$, $-2,5$, $+0,8$ et $-0,6$ puis ranger ces nombres dans l'ordre croissant :



- 7) Sur la droite graduée suivante, une graduation correspond à 1 unité. Placer les nombres -61 , -50 , -45 , -70 , -72 puis ranger ces nombres dans l'ordre croissant :



- 8) a) Quelle règle semble se dégager pour la comparaison de deux nombres relatifs négatifs ?
 b) Quelle règle semble se dégager pour la comparaison d'un nombre relatif positif et d'un nombre relatif négatif ?

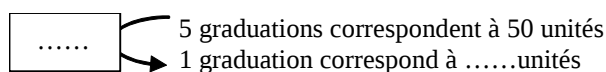
Objectifs et commentaires

- Travailler le repérage sur une droite graduée.
- Dans le registre graphique, donner du sens au nombre relatif négatif.
- Passer du registre graphique au registre symbolique numérique.
- Passer du registre symbolique au registre graphique.
- Relier le rangement des nombres relatifs à leurs positions sur la droite graduée.

En travaillant avec la droite graduée, la notion de nombre relatif peut prendre un sens. Sur cette droite, l'élève doit pouvoir identifier, par exemple, le nombre -6 comme étant placé 6 unités à la gauche de l'origine, 0, dont le rôle est primordial.

Dans la question 1, on travaille le changement de registre du graphique vers le symbolique numérique. L'origine est toujours visible, on peut recommander à l'élève, dans un premier temps, de « numéroté » chaque graduation avant de trouver les nombres demandés.

Pour les questions 1a et 1b, une graduation correspond à une unité. Pour les questions 1c et 1d, on demande en plus un travail sur la proportionnalité, du type suivant :

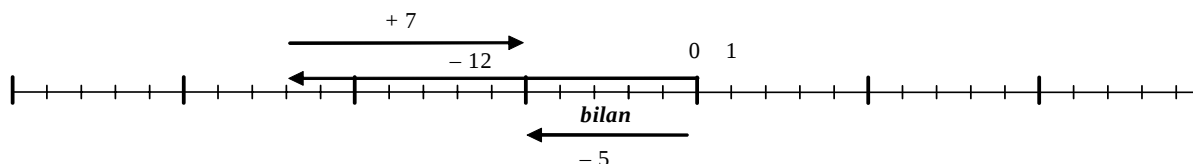


La question 1d permet de représenter le décimal relatif. Dans les questions 2 et 3, on donne la correspondance entre graduation et nombre d'unités.

Dans les questions 2 à 4, on poursuit le travail précédent avec une origine non visible. Les nombres étant rangés dans l'ordre croissant quand on parcourt la droite graduée de la gauche vers la droite, l'élève doit avoir intégré, à partir des questions précédentes, que, par exemple, -10 se situe à droite de -20 (ou que -10 est plus près de 0 que -20) et que -30 se situe à gauche de -20 .

Dans les questions 5 à 7, on passe du registre symbolique au registre graphique pour donner du sens à l'ordre des nombres relatifs. Ce sont ces images mentales de nombres placés sur une droite graduée qui favoriseront une bonne maîtrise de la comparaison des nombres relatifs : ainsi, sur la droite graduée, -15 est à droite de -20 , ce qui entraîne que $-15 > -20$.

ACTIVITÉ 2 : APPROCHE DE LA SOMME DE DEUX ENTIERS RELATIFS



Sur la graduation ci-dessus, on a illustré deux déplacements successifs :

-12 (12 vers la gauche) suivi de $+7$ (7 vers la droite).

Le déplacement « bilan » est -5 . On écrit alors : $(-12) + (+7) = -5$.

- 1) Illustrer de même les déplacements suivants, puis donner le déplacement bilan :

-12 suivi de -4 ; -12 suivi de $+16$; $+9$ suivi de 15 ; $+9$ suivi de -8 .

2) En imaginant les déplacements correspondants sur la droite graduée, donner les résultats des calculs suivants :

$$(-15) + (+7) \quad ; \quad (-25) + (+27) \quad ; \quad (+15) + (-7) \quad ; \quad (-15) + (-17).$$

Objectifs et commentaires

- Donner du sens à l'addition de deux nombres entiers relatifs en utilisant le registre graphique.
- Relier l'addition de deux entiers relatifs au bilan de deux déplacements successifs, un déplacement vers la gauche étant noté négativement, un déplacement vers la droite positivement.

Cette activité est primordiale pour donner du sens à la somme de deux nombres relatifs. Nous avons choisi, pour le début de l'apprentissage, de laisser les deux termes de la somme avec leurs signes et entre parenthèses, afin de favoriser une bonne identification des deux nombres sur lesquels le calcul est à effectuer.

La question 2 demande du temps : pour que l'élève s'imagine les déplacements, sans faire de dessin, et puisse ainsi prendre de l'aisance sur ce genre de calculs, il faut y revenir régulièrement, sans excès, avec un travail approfondi sur chaque erreur. On peut donc proposer cette activité très tôt dans l'année puis entretenir régulièrement, dans les séances de calcul rituel, la somme de deux entiers relatifs, afin qu'au moment où le chapitre « nombres relatifs » commence, l'élève soit familier avec cette représentation. On fait augmenter, de façon raisonnable, la taille des nombres pour que l'élève puisse progressivement se dégager de la droite graduée qui est un outil transitoire dans l'apprentissage.

ACTIVITÉ 3 : ADDITION DES NOMBRES RELATIFS

1) Compléter le tableau suivant :

Somme $a + b$	a	b	Les nombres sont-ils de même signe ?	Nombre qui a la plus grande partie numérique	Signe du résultat	Opération sur les parties numériques	Résultat
$(-7) + (-23)$					-	$7 + 23$	-30
$(-26) + (+2)$							
$(-12) + 16$							
$(-12) + (-16)$							
					-	$15 + 9$	
					-	$15 - 9$	
$(-5,4) + (-4,9)$							
$11,4 + (-5,1)$							
$5,3 + (-9,4)$							
$(-7) + 11,4$							
					-	$5,2 - 2,9$	
					-	$5,7 + 2,4$	

2) Quelle règle semble se dégager pour l'addition de deux nombres relatifs ?

Objectifs et commentaires

- Comprendre le lien entre la somme de deux nombres relatifs et l'opération en jeu sur leurs parties numériques.
- Réduire le nombre d'erreurs du type $5,4 - 7 = 2,4$ et $3,6 - 5,3 = -2,3$.

Cette activité ne peut être menée que si un travail important et régulier du type de l'activité 2 a été engagé. Ainsi la somme de deux nombres relatifs a pris du sens, des repères se sont installés et l'élève a déjà pu se faire une idée sur l'opération en jeu sur les parties numériques. Il est alors important que l'élève prenne conscience que pour effectuer certaines additions, l'opération à faire sur les parties numériques est une soustraction, et qu'il faut soustraire la plus petite partie numérique de la plus grande. Le tableau donné permet un vrai questionnement sur cette partie du raisonnement en commençant avec des entiers et en poursuivant avec des décimaux.

ACTIVITÉ 4 : SOUSTRACTION DE RELATIFS

1) Compléter les six premières lignes du tableau suivant. *On s'arrêtera à la ligne grisée.*

a	b	écriture de l'expression $a - b$	résultat de $a - b$	a	$\text{opp}(b)$	écriture de l'expression $a + \text{opp}(b)$	résultat de $a + \text{opp}(b)$
5	0			5			
5	1			5			
5	2			5			
5	3			5			
5	4			5			
5	5			5			
5	6			5			
5	7			5			
5	8			5			
5	9			5			
5	10			5			

2) En observant les résultats de la colonne « résultat de $a - b$ », compléter :

« *lorsque b augmente de 1, le résultat de $a - b$ * ».

3) La remarque précédente est toujours vraie. Compléter alors les cinq dernières lignes du tableau.

4) Quelle conjecture peut-on formuler ?

5) Compléter les six premières lignes du tableau suivant. *On s'arrêtera à la ligne grisée.*

a	b	écriture de l'expression $a - b$	résultat de $a - b$	a	$\text{opp}(b)$	écriture de l'expression $a + \text{opp}(b)$	résultat de $a + \text{opp}(b)$
5	5			5			
5	4			5			
5	3			5			
5	2			5			
5	1			5			
5	0			5			
5	-1			5			
5	-2			5			
5	-3			5			
5	-4			5			
5	-5			5			

6) En observant les résultats de la colonne « résultat de $a - b$ », compléter :

« *lorsque b diminue de 1, le résultat de $a - b$ * ».

7) La remarque précédente est toujours vraie. Compléter alors les cinq dernières lignes du tableau.

8) Quelle conjecture peut-on formuler ?

9) La conjecture $a - b = a + \text{opp}(b)$ est vraie pour tous les nombres a et b .

Compléter alors :

$$-3 - (-9) = -3 + \dots = \dots \quad ; \quad -8 - (-9) = -8 + \dots = \dots$$

$$3 - 9 = 3 + \dots = \dots \quad ; \quad -8 - 9 = -8 + \dots = \dots$$

Objectifs visés et commentaires

- Introduire la règle de soustraction entre relatifs à partir d'une conjecture formulée par les élèves, en tant que prolongement de la soustraction entre deux nombres positifs a et b avec $a > b$.
- Obtenir le résultat de calculs du type " $\dots - (-\dots)$ " d'une façon qui paraît naturelle aux élèves.

La question 1 est une entrée en matière : elle permet à l'élève de comprendre le fonctionnement du tableau et le vocabulaire qui lui est lié ($\text{opp}(b)$ par exemple devra être expliqué).

La question 2 est fondamentale. C'est elle qui formalise la règle apparaissant dans le tableau « **lorsque b augmente de 1, le résultat de $a - b$ diminue de 1** ». C'est la formalisation de cette règle qui permet à l'élève d'accepter les résultats du tableau qui apparaissent après, comme $5 - 7 = -2$ par exemple. Attention à bien faire respecter la consigne de « l'arrêt à la ligne grisée », le risque étant que les élèves, emportés par leur élan, ne prennent pas le temps de répondre à la question 2, et remplissent donc le tableau sans en comprendre le sens. Dans ce cas, ils auront un tableau rempli mais ne seront aucunement convaincus, une fois l'activité terminée, que $5 - 7$ donne bien -2 .

La question 3 confirme cette règle et permet donc de remplir le tableau *en l'appliquant*.

Les questions 5 à 9 reprennent ce processus pour donner du sens aux calculs du type $5 - (-4)$, puis à ceux du type $-3 - (-4)$.

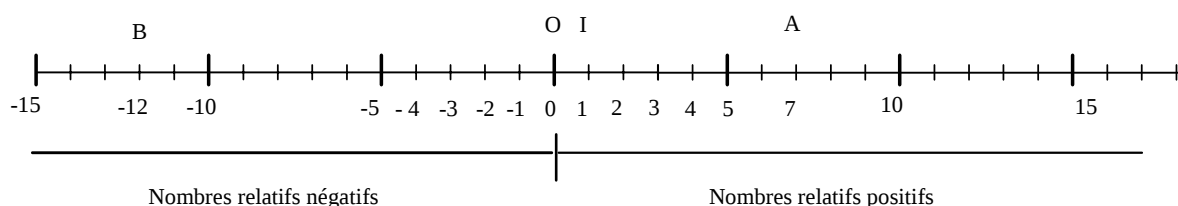
Le cours peut alors être écrit directement après cette activité.

COURS

NOMBRE RELATIF

Motivation

Sur la droite graduée ci-dessous, le point B ne peut pas être repéré par un nombre entier naturel (0,1,2,3,4,5,6.....). De nouveaux nombres sont nécessaires pour repérer ce point.



Sur la droite graduée ci-dessus, le point O est l'origine du repère (O,I) il a pour abscisse 0 et le point I a pour abscisse 1.

Le point A a pour abscisse (+7) ou 7.

Le signe + indique la position de A par rapport à l'origine O : A est du côté des nombres positifs.

La distance du point A à l'origine O est 7 unités.

Le point B a pour abscisse (-12).

Le signe - indique la position de B par rapport à l'origine O : B est du côté des nombres négatifs.

La distance du point B à l'origine O est 12 unités.

L'écriture d'un nombre relatif est composée de deux parties :

- son signe, + (pour un nombre **positif**) ou - (pour un nombre **négatif**) ;
- sa partie numérique qui représente sa distance à l'origine sur la droite graduée.

Remarque : On a l'habitude d'écrire les nombres positifs sans leur signe : le nombre + 8 s'écrit aussi 8.

Nombres opposés : deux nombres relatifs opposés sont deux nombres qui ont la même partie numérique et des signes contraires.



+ 5 et - 5 sont opposés.

Sur la droite graduée, les points qui les représentent sont symétriques par rapport à l'origine.

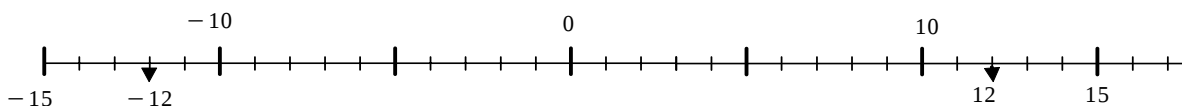
COMPARAISON

1er cas : les **deux nombres** sont **positifs**. On emploie les règles connues.

2ème cas : les **deux nombres** sont **négatifs**. Ils sont rangés dans le sens contraire de leurs parties numériques.

3ème cas : les **deux nombres** sont **de signes contraires**. Le plus grand est le nombre positif.

Exemple



12 est inférieur à 15 mais -12 est supérieur à -15 .

$12 < 15$ mais $-12 > -15$.

RÈGLE D'ADDITION

1er cas : les deux nombres sont de même signe.

- Le signe du résultat est le signe commun aux deux nombres.
- On ajoute les parties numériques des deux nombres pour trouver celle du résultat.

Exemples

a	b	$a + b$	Signe du résultat	Opération sur les parties numériques	Résultat
-27	-14	$(-27) + (-14)$	$-$	$27 + 14$	-41
$+37$	$+25$	$(+37) + (+25)$	$+$	$37 + 25$	$+62$
$-3,9$	-7	$(-3,9) + (-7)$	$-$	$3,9 + 5$	$-8,9$

Remarque : $(+37) + (+25)$ peut aussi s'écrire $37 + 25$

2ème cas : les deux nombres sont de **signes contraires**.

- Le signe du résultat est le signe du nombre qui a la plus grande partie numérique.
- On soustrait la plus petite partie numérique de la plus grande pour trouver la partie numérique du résultat.

Exemples

a	b	$a + b$	La plus grande partie numérique	Signe du nombre qui a la plus grande partie numérique	Opération sur les parties numériques	Résultat
-6	$+2,7$	$(-6) + (+2,7)$	6	$-$	$6 - 2,7 = 3,3$	$-3,3$
$+1,4$	$-5,1$	$(+1,4) + (-5,1)$	5,1	$-$	$5,1 - 1,4 = 3,7$	$-3,7$
$-7,4$	$+11$	$(-7,4) + (+11)$	11	$+$	$11 - 7,4 = 3,6$	$+3,6$

Remarque :

$(-6) + (+2,7)$ peut s'écrire $-6 + 2,7$.

$(+1,4) + (-5,1)$ peut s'écrire $1,4 + (-5,1)$.

$(-7,4) + (+11)$ peut s'écrire $-7,4 + 11$.

RÈGLE DE SOUSTRACTION

Règle : Pour soustraire un nombre relatif, on additionne son opposé. On peut donc transformer toute soustraction en addition.

$a \text{ et } b \text{ sont deux nombres quelconques,}$
 $a - b = a + \text{opp}(b)$

Exemples

a	b	$\text{opp}(b)$	$a - b$	$a + \text{opp}(b)$	Écriture simplifiée de $a - b$	Résultat
-6	$2,7$	$-2,7$	$(-6) - 2,7$	$-6 + (-2,7)$	$-6 - 2,7$	$-8,7$
9	$-2,1$	$2,1$	$9 - (-2,1)$	$9 + 2,1$	$9 + 2,1$	$11,1$
19	36	-36	$19 - 36$	$19 + (-36)$	$19 - 36$	-17
-17	-15	15	$-17 - (-15)$	$-17 + 15$	$-17 + 15$	-2

SOMMES ALGÈBRIQUES

Calculs de sommes algébriques de nombres relatifs.

Définition : Une somme algébrique est une suite d'additions et de soustractions.

Exemple

$$A = 7 - 4 + 8 - (-3) - 9 + (-6).$$

Méthode 1

On transforme A en une somme de nombres relatifs :

$$A = 7 + (-4) + 8 + 3 + (-9) + (-6).$$

On peut alors changer l'ordre des termes et les grouper comme on veut, par exemple :

$$A = 7 + 3 + 8 + (-4) + (-6) + (-9).$$

$$A = 18 + (-19).$$

$$A = (-1).$$

Méthode 2

calculs en écriture simplifiée (sans parenthèses).

On écrit A sans parenthèses :

$$A = 7 - 4 + 8 + 3 - 9 - 6.$$

On lit *mentalement* A comme une somme de nombres relatifs et on change l'ordre des nombres :

$$A = 7 + 3 + 8 - 4 - 6 - 9.$$

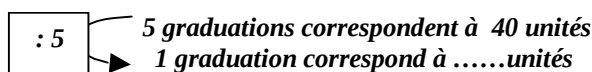
$$A = 18 - 19.$$

$$A = -1.$$

EXERCICES

DROITE GRADUÉE

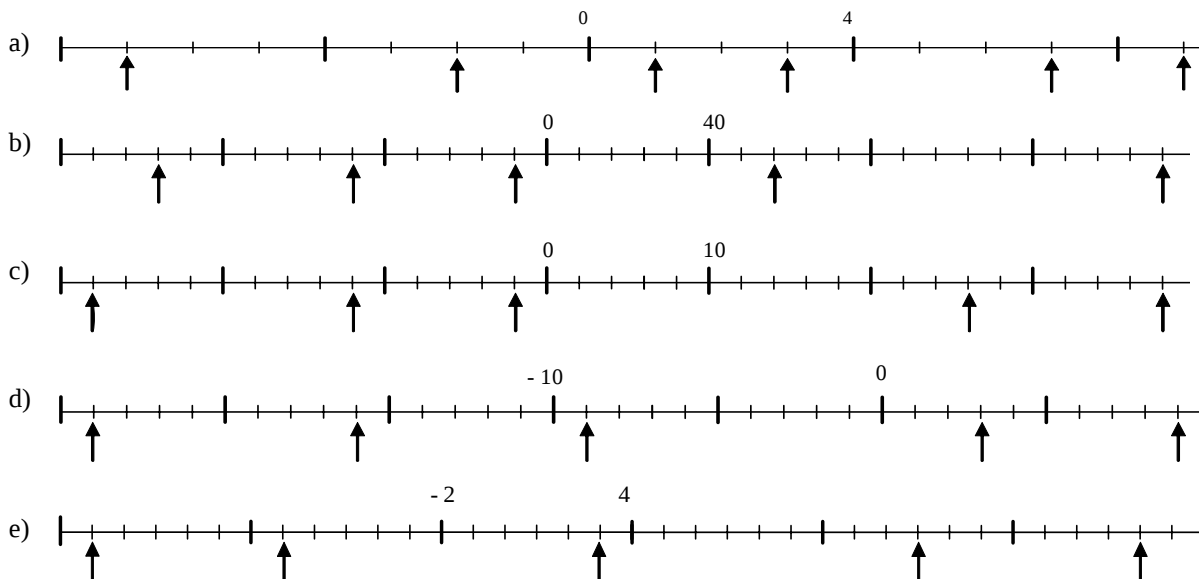
Pour aider l'élève à se représenter le nombre relatif, le changement de registre de l'écriture symbolique vers la droite graduée est fondamental. En plus du raisonnement sur les nombres relatifs, une réflexion de type problème de proportionnalité est aussi attendue. Pour la question 1b, par exemple, on pourra encourager l'élève en difficulté à faire un schéma comme celui qui suit :



On pourra éventuellement commencer par faire placer le symétrique de chaque nombre par rapport à l'origine et vérifier le placement des nombres négatifs à l'aide de cette symétrie.

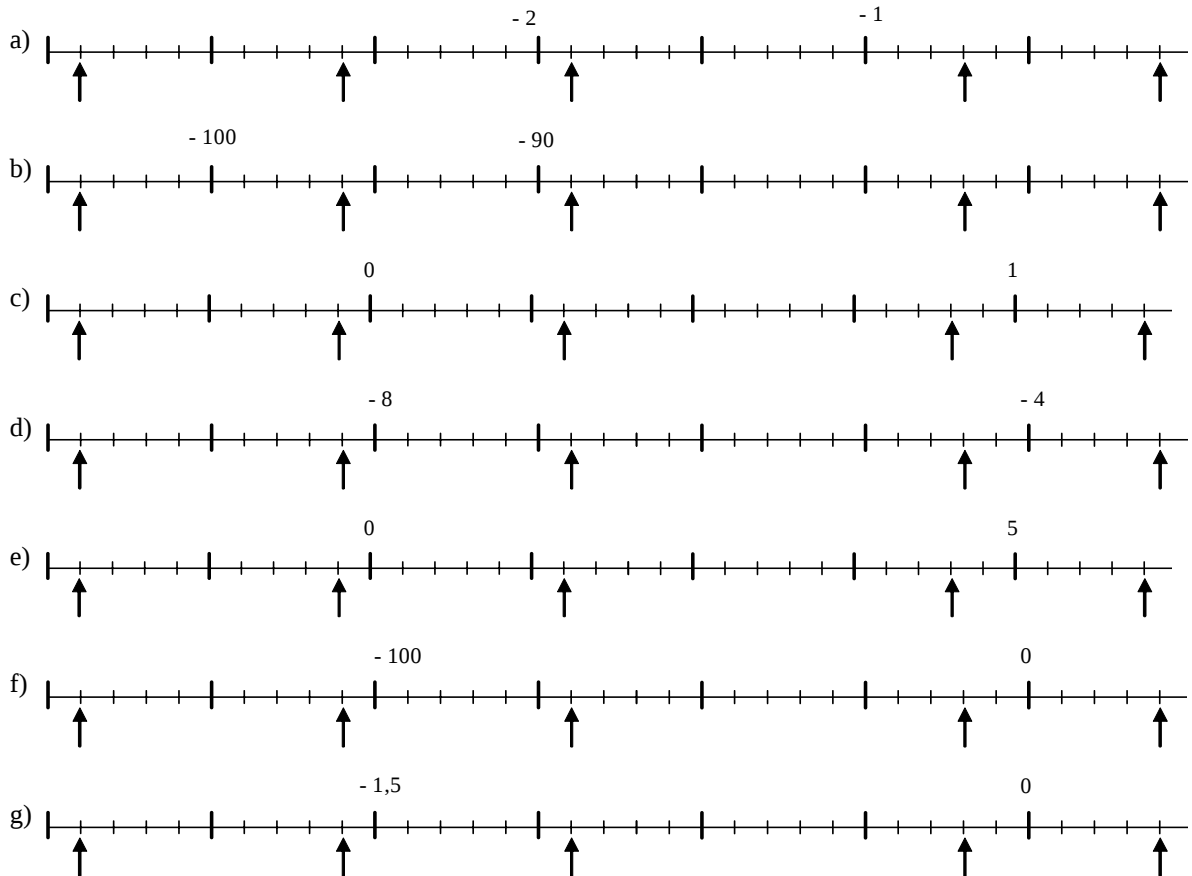
Pour la question 1e, il faut aussi comprendre qu'entre - 2 et 4 il y a 6 unités.

1. Trouver le nombre correspondant à chaque flèche :



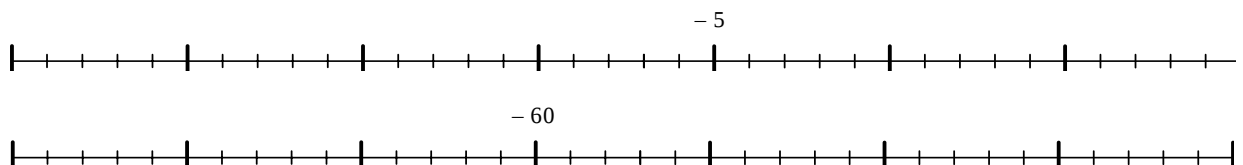
Les objectifs de l'exercice 2 sont les mêmes que ceux de l'exercice 1, le travail sur la proportionnalité étant plus important pour les questions c, e, f et g. Une autre difficulté est l'absence de l'origine sur la plupart des graduations. La question 1g, plus difficile, peut être réservée aux élèves les plus à l'aise. Le recours au schéma présenté dans les commentaires ci-dessus s'avère souvent nécessaire.

2. Trouver le nombre correspondant à chaque flèche :



Dans les exercices 3 à 5, on travaille dans le sens inverse. On passe du registre symbolique du nombre au registre graphique de la droite graduée. L'élève doit ainsi apprendre à s'orienter sur la droite graduée pour placer les nombres donnés : ainsi, -90 est à droite de -100 . Les unités changent d'un exercice à l'autre, permettant un travail annexe sur la proportionnalité.

3. Sur la droite graduée suivante, une graduation correspond à 1 unité. Placer les nombres -91 , -105 , -81 et -78 .
4. Sur la droite graduée suivante, une graduation correspond à 0,1 unité. Placer les nombres $-5,7$, $-4,9$, $-6,7$ et $-5,2$.
5. Sur la droite graduée suivante, une graduation correspond à 5 unités. Placer les nombres -65 , -50 , -45 et -70 .



COMPARAISON

Dans les exercices 6 et 7, on utilise le registre graphique de la droite graduée pour la comparaison et le rangement de nombres négatifs. Dans l'exercice 8, l'élève doit imaginer la place des nombres sur la droite graduée pour en déduire leurs comparaisons.

6. Placer sur une droite graduée les nombres $-5,6$ et -6 puis comparer ces deux nombres.

7. Placer sur une même droite graduée les nombres -65 , -72 et -58 puis ranger ces nombres dans l'ordre croissant.
8. a) On considère les nombres $-7,2$ et -8 . Sur une droite graduée, lequel de ces deux nombres est le plus proche de 0 ? Comparer alors ces deux nombres.
b) Répondre à la question précédente avec les nombres $-4,12$ et $-4,2$.

Dans les exercices 9 et 10, l'objectif est de lier la comparaison de deux nombres négatifs à celle de leurs opposés. On travaille de nouveau cet objectif dans les questions a et b de l'exercice 11.

9. a) Placer sur une même droite graduée les nombres 7 puis 6,4 puis -7 et $-6,4$.
Compléter alors par $<$ ou $>$: $7 \dots 6,4$ mais $-7 \dots -6,4$.
b) Reprendre la question a) avec les nombres 3,5 ; 4,2 ; $-3,5$; $-4,2$.
10. Compléter par $<$ ou $>$:
Comme $3,6 \dots 4$, on en déduit que $-3,6 \dots -4$; Comme $4,15 \dots 4,2$, on en déduit que $-4,15 \dots -4,2$.
Comme $4,6 \dots 4$, on en déduit que $-4,6 \dots -4$; Comme $4,15 \dots 4,1$, on en déduit que $-4,15 \dots -4,1$.

11. Encadrer par deux entiers consécutifs :
- a) $< 6,9 < \dots$; $\dots < 0,75 < \dots$; $\dots < 7,5 < \dots$
b) $< -6,9 < \dots$; $\dots < -0,75 < \dots$; $\dots < -7,5 < \dots$
c) $< -8,9 < \dots$; $\dots < 5,75 < \dots$; $\dots < -9,6 < \dots$

Dans l'exercice 12, on utilise la langue naturelle pour questionner l'élève sur les entiers relatifs les plus proches de décimaux relatifs donnés. Le passage par la visualisation sur la droite graduée peut être intéressant.

12. a) Trouver un nombre entier relatif inférieur à $-3,71$
b) Trouver un nombre entier relatif compris entre $-2,89$ et $-1,45$.
c) Quel est l'entier relatif le plus proche de $-5,64$? de $-3,36$? de $3,2$?
d) Combien d'entiers relatifs se trouvent entre $-4,72$ et $2,2$?
13. Negatus est né en -71 et Relativus en -52 . L'un des deux est le père, l'autre est son fils. Quel est le prénom du père ?

L'exercice 14 est un exercice purement technique de comparaison. Il doit être renouvelé régulièrement dans les séances de calcul réfléchi.

14. Compléter par $<$, $=$ ou $>$
- | | | | | |
|-----------------|---|------------------------|---|--------------------|
| $-13 \dots 2$ | ; | $-8,80 \dots -8,79$ | ; | $5 \dots -1$. |
| $-25 \dots -22$ | ; | $-2,305 \dots -2,3050$ | ; | $0 \dots -8$. |
| $4 \dots -12$ | ; | $-11,49 \dots -11,50$ | ; | $-17 \dots -21$. |
| $-33 \dots -38$ | ; | $-4,217 \dots -4,2170$ | ; | $-100 \dots -99$. |
15. Ranger dans l'ordre croissant les nombres suivants :
- a) $-3,4$; $-3,42$; -4 ; $-3,5$; $2,5$; $2,32$; -3 .
b) $-6,4$; $-6,12$; $-6,04$; $-6,5$; -6 ; -5 ; $-6,2$.

ADDITION

Dans l'exercice 16, on reprend la structure en tableau de l'activité sur l'addition des relatifs. Ce tableau permet à l'élève de se poser les questions nécessaires à la compréhension du mécanisme de la somme de deux nombres relatifs. Les cases à compléter varient pour travailler cette compréhension dans tous les sens. Dans cet exercice, les deux termes de chaque somme peuvent encore être écrits entre parenthèses, mais, si le travail de l'activité a bien fonctionné, on peut commencer à supprimer les parenthèses autour du premier terme de chaque somme, $(-8) + (-5)$ s'écrivant $-8 + (-5)$ et à identifier les nombres relatifs positifs aux nombres entiers naturels sans signes (écrire $4 + (-8)$ au lieu de $+4 + (-8)$ en identifiant 4 à $+4$).

16. Compléter le tableau ci-dessous :

a	b	$a + b$	La plus grande partie numérique (ne compléter cette case que lorsque c'est nécessaire)	Signe du résultat	Opération sur les parties numériques	Résultat
-6	+4,7					
+5,2	-5,1					
-9	-4,7					
-8,4	+12					
				-	$3,2 + 5$	
				-	$7 - 3,4$	
	-5,5					-12,5
	5,5					-12,5
				+	$7 - 2,3$	
-3						7,2
3,8						7,2

L'exercice 17 permet un entraînement mental et une observation éventuelle de continuité ou de rupture de terminaison (-2,4 puis -1,4 puis -0,4 puis 0,6 puis 1,6...).

17. a) Compter de 1 en 1 à partir de -6,4 jusqu'à obtenir un nombre supérieur à 3,2. (Présenter ainsi les calculs : $-6,4 + 1 = -5,4$; $-5,4 + 1 = -4,4$)
- b) Compter de 2 en 2 à partir de -11,4 jusqu'à obtenir un nombre supérieur à 3,2.
- c) Compter de -1 en -1 à partir de 2,1 jusqu'à obtenir un nombre inférieur à -5.
- d) Compter de 0,7 en 0,7 à partir de -3,1 jusqu'à obtenir un nombre supérieur à 3.
- e) Compter de -0,8 en -0,8 à partir de 3,1 jusqu'à obtenir un nombre inférieur à -5.

Les exercices 18 à 20 sont des exercices purement techniques qui ne peuvent être efficaces que si le travail sur le sens de la somme de deux nombres relatifs a été fait autour des activités proposées. Nous avons volontairement choisi des nombres ayant, pour la plupart d'entre eux, deux chiffres significatifs pour éviter une compréhension superficielle par « complétion ». En effet, il arrive souvent que certains élèves obtiennent facilement que $-5 + 7 = 2$ (de 5 à 7, il y a 2) et avec le même raisonnement, obtiennent $-3,4 + 5,1 = 2,3$ (de 3 à 5, il y a 2 et de 4 à 1, il y a 3).

18. Calculer :

$$\begin{array}{llll}
 A = (-17) + 23 & ; & E = (-32) + (+60) & ; & I = 37 + (-50) & ; & M = (-41) + 19. \\
 B = (-14) + (-10) & ; & F = (-18) + 18 & ; & J = (-16) + (-18) & ; & N = (-44) + 18. \\
 C = 14 + (-20) & ; & G = (-15) + (-15) & ; & K = (-22) + (-19) & ; & O = (-23) + 6. \\
 D = (-15) + (-42) & ; & H = -27 + (+42) & ; & L = 51 + (-25) & ; & P = (-9) + 17.
 \end{array}$$

19. Calculer :

$$\begin{array}{llll}
 A = 1,4 + (-2,5) & ; & D = (-4,2) + (+6,8) & ; & G = 1,5 + (-10) & ; & J = (1,4) + (-1,4). \\
 B = (-3,8) + (-2,9) & ; & E = 1,4 + (-14) & ; & H = 7,1 + (-10) & ; & K = (-5) + (+3,6). \\
 C = 8 + (-4,3) & ; & F = (-8) + (+4,5) & ; & I = (-1,3) + 1,3 & ; & L = (-2,5) + (-3,6).
 \end{array}$$

20. Compléter les tableaux ci-dessous :

+	-5	2,5	-3,4	-10	0,12
-4,2					
-5,6					
3,4					
9					
-7					

+	-0,2	5	-9	-0,08	-2,9
-8					
-2,1					
7,34					
0,8					
7					

Dans les exercices 21 à 24, l'objectif est d'entraîner les élèves à aborder les calculs de façon réfléchie, en utilisant les propriétés d'associativité et de commutativité de l'addition des nombres relatifs. On sous-entend d'ailleurs, par l'écriture des calculs, que $a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$. Une méthode est proposée dans les exercices 22 et 23. Elle est à trouver dans l'exercice 24.

21. Calculer de deux façons différentes :

$$\begin{array}{ll}
 A = (+21) + (-47) + (+13) & ; & B = (-25) + (-17) + (+20). \\
 C = (-21) + (+12) + (+13) & ; & D = (-25) + (+17) + (+20).
 \end{array}$$

22. Calculer en commençant par modifier l'ordre des termes de chaque somme de telle sorte qu'il n'y ait qu'une soustraction à effectuer et que celle-ci soit en fin de calculs :

$$A = (+21) + (-12) + (+13) + (-14) + 15 + (-16) ; \quad B = (-25) + (-17) + (+20) + (-11) + (+18).$$

$$C = (-21) + (-17) + (+11) + (-14) + 15 + (-16) ; \quad D = (+25) + (-17) + (+22) + (-11) + (+18).$$

23. Calculer après avoir remarqué que certains termes sont opposés :

$$A = (+29) + (-502) + (-29) ; \quad B = (-25) + (-7) + (+25) + (-11) + (-17).$$

$$C = (-21) + (-31) + (+21) + (-10) + 41 ; \quad D = (+25) + (-7) + (+22) + (-122) + (-18).$$

24. Calculer de la manière la plus simple possible :

$$A = (+29) + (-558) + (+29) ; \quad B = (-25) + (-17) + (-25) + (+34) + (-17).$$

$$C = (-46) + (+36) + (-21) + (+10) + 21 ; \quad D = (-25) + (-17) + (+42) + (-12) + (-18).$$

Dans les exercices 25 à 27, on travaille de nouveau la commutativité et l'associativité de l'addition, en cherchant à regrouper des termes opposés.

25. Calculer le plus astucieusement possible, en indiquant les étapes intermédiaires :

$$A = (-4) + (-6,5) + 10 + 6,5.$$

$$B = 2,43 + (-7) + 3 + (-7) + (-5,43).$$

$$C = (-6) + (-6) + 6 + (-6).$$

26. Calculer, en indiquant les étapes intermédiaires :

$$(-7) + 3 + 8 + (-5) ; \quad 1,4 + (-8) + 10 + (-1,4) + (-2) + (-7).$$

$$(-6) + 5 + 7 + (-8) ; \quad 2,3 + (-9) + 10 + (-2,3) + (-1) + (-6).$$

27. Calculer, en écrivant les étapes intermédiaires :

$$10 + (-6) + 14 + (-22) ; \quad 3,5 + (-40) + (-2,44) + 9,5 + 2,44.$$

$$(-5) + 8 + (-21) + 13 ; \quad 4,5 + (-1,79) + 8,5 + 1,79 + (-30).$$

L'exercice 28 permet de prolonger le travail fait dans les trois exercices précédents de façon plus ludique.

28. a) Compléter

$$1 + (-2) =$$

$$1 + (-2) + 3 =$$

$$1 + (-2) + 3 + (-4) =$$

$$1 + (-2) + 3 + (-4) + 5 =$$

$$1 + (-2) + 3 + (-4) + 5 + (-6) =$$

$$1 + (-2) + 3 + (-4) + 5 + (-6) + 7 =$$

b) Imaginer et effectuer les 4 calculs suivants.

c) Prévoir le résultat de $1 + (-2) + 3 + (-4) + 5 + (-6) + 7 + \dots + (-26)$.

Dans les exercices 29 à 31, on approche la notion d'équation. On ne cherche pas de mécanisme de résolution et on peut encourager l'élève à vérifier avec la calculatrice. Cette vérification permet de redonner du sens aux calculs et contribue à développer l'esprit critique de l'élève lorsqu'il se pose lui-même la question de l'origine de son erreur.

29. Compléter :

$$\dots + (-9) = (-20) ; \quad (-8) = \dots + (-3).$$

$$17 + \dots = 10 ; \quad (-1,2) + \dots = 19 + (-1,2).$$

$$(-15) + \dots = (-8) ; \quad (-4) + 3 + \dots = (-1).$$

$$(-6) + \dots = (+11) ; \quad (-7) + \dots = (+13).$$

30. Compléter les tableaux suivants :

a)	b)	c)	d)																																																
<table border="1"> <tr><td>+</td><td></td><td>-8</td><td></td></tr> <tr><td>3,2</td><td></td><td></td><td>2</td></tr> <tr><td>-7</td><td>-5,3</td><td></td><td></td></tr> </table>	+		-8		3,2			2	-7	-5,3			<table border="1"> <tr><td>+</td><td></td><td>4,8</td><td>-5</td></tr> <tr><td>-2</td><td>3,1</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>-1</td></tr> </table>	+		4,8	-5	-2	3,1						-1	<table border="1"> <tr><td>+</td><td></td><td>-2</td><td>-1,2</td></tr> <tr><td>-7</td><td>1,4</td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td>5</td></tr> </table>	+		-2	-1,2	-7	1,4						5	<table border="1"> <tr><td>+</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td>-7</td><td></td><td>4,1</td><td></td></tr> <tr><td>3,2</td><td>5</td><td></td><td>-1,3</td></tr> </table>	+				-7		4,1		3,2	5		-1,3
+		-8																																																	
3,2			2																																																
-7	-5,3																																																		
+		4,8	-5																																																
-2	3,1																																																		
			-1																																																
+		-2	-1,2																																																
-7	1,4																																																		
			5																																																
+																																																			
-7		4,1																																																	
3,2	5		-1,3																																																

31. Trouver dans chaque cas le nombre x vérifiant l'égalité donnée :

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & -7 + x = -19 & ; \quad -27 + x = 19 & ; \quad 7 + x = -19. \\ \text{b)} & x - 6,7 = -1,2 & ; \quad x - 5,7 = -6 & ; \quad x - 8 = 9,1. \\ \text{c)} & x + 7,2 = -3 & ; \quad x + 2,6 = -10 & ; \quad x + 4,8 = 1,2. \\ \text{d)} & 14 + x = -1,9 & ; \quad -32 + x = -10 & ; \quad 12 + x = 1,9. \end{array}$$

SOUSTRACTION

L'exercice 32 a pour objectif de consolider le travail fait dans l'activité 4 : obtenir des différences de proche en proche en comptant de 1 en 1, puis retrouver les résultats grâce à la méthode générale.

32. a) Voici quatre séries de soustractions. Dans chaque série, le premier terme de chaque différence est toujours le même, mais le deuxième terme augmente ou diminue de 1. Compléter :

1°)		2°)		3°)		4°)	
$4 - 2 =$	;	$3 - 1 =$	;	$(-2) - (-1) =$	;	$(-3) - 1 =$	
$4 - 1 =$	;	$3 - 2 =$	;	$(-2) - 0 =$	;	$(-3) - 0 =$	
$4 - 0 =$	;	$3 - 3 =$	;	$(-2) - 1 =$	;	$(-3) - (-1) =$	
$4 - (-1) =$	;	$3 - 4 =$	;	$(-2) - 2 =$	;	$(-3) - (-2) =$	
$4 - (-2) =$	;	$3 - 5 =$	;	$(-2) - 3 =$	;	$(-3) - (-3) =$	
$4 - (-3) =$	;	$3 - 6 =$	;	$(-2) - 4 =$	;	$(-3) - (-4) =$	

- b) Retrouver le résultat des calculs suivants en commençant par les transformer en sommes :

$$4 - (-2) \quad ; \quad 3 - 5 \quad ; \quad (-2) - 1 \quad ; \quad (-2) - 3 \quad ; \quad (-3) - (-1) \quad ; \quad (-3) - (-4).$$

L'exercice 33 doit permettre à l'élève de s'approprier cette méthode générale. Pour cela, il doit d'abord identifier les deux termes de la différence, donner l'opposé du deuxième et enfin écrire la différence sous la forme d'une somme. La première étape d'identification des termes est primordiale pour que l'élève adopte une démarche correcte.

33. Effectuer les soustractions données en complétant le tableau :

$a - b$	a	b	$\text{opp}(b)$	$a + \text{opp}(b)$	Résultat
$9 - 21$	9	21	(-21)	$9 + (-21)$	
$13 - (-12)$					
$(-10) - 6$					
$(-23) - (-10)$					
$(-5) - (-9,2)$					
$(-8,7) - 9,5$					

L'exercice 34 reprend en partie les objectifs de l'exercice 33. On y ajoute l'écriture simplifiée et un travail dans les autres sens, on procède alors par identification.

34. Compléter le tableau suivant :

a	b	$\text{opp}(b)$	$a - b$	$a + \text{opp}(b)$	Écriture simplifiée de $a - b$	Résultat
-6	2,7					
9	-16					
-32	-9					
18		14				
			$9 - 36$			
			$-17 - (-15)$			
				$-15 + (-8)$		
				$-24 + 17$		
			$-25 - 32$			
					$-8 + 19$	

Dans les exercices 35 à 39, on cherche à lier les nombres relatifs à des situations de la vie courante ou à des jeux dont les règles permettent de manipuler ces nombres.

35. a) Le collège Euler organise tous les ans un concours d'orthographe entre les classes de 5^{ème}. Chaque mot orthographié correctement rapporte 1 point à l'équipe, (noté +1 dans le tableau des scores), chaque faute fait perdre un point à l'équipe, (noté -1). On peut passer son tour. Compléter le tableau suivant :

Classe	bleue	verte	rouge	jaune	blanche	rose	orange
Score positif (mots corrects)	+12	+4	+7	+10	+9	+8	+12
Score négatif (mots faux)	-6	-8	-7	-1	-10	-7	-5
Score final							

- b) Madame Dico voudrait savoir si la nouvelle méthode d'apprentissage de l'orthographe a permis de faire progresser les élèves. Elle a donc essayé de reconstituer les scores des élèves de l'an passé. Elle a retrouvé certains résultats qui sont présentés dans le tableau suivant, qu'il faut compléter :

Classe	bleue	verte	rouge	jaune	blanche	rose	orange
Score positif (mots corrects)	+ 4	+6		+11			
Score négatif (mots faux)		- 7	- 6		- 4	- 4	-2
Score final	+2		- 3	+ 5	0	+6	- 4

- c) Mme Dico discute avec les élèves et ses collègues et ils décident qu'il faut pénaliser les classes qui ne répondent pas. Chaque fois qu'une classe passe, elle perd 0,5 point (noté - 0,5 dans le tableau). Mme Dico reprend donc le tableau de l'année qu'il faut compléter :

Classe	bleue	verte	rouge	jaune	blanche	rose	orange
Score positif (mots corrects)	+12	+ 4	+7	+ 10	+9		+12
Score négatif (mots faux)	- 6	- 8	- 7		- 10	- 7	- 5
Score négatif (mots passés)	-1	-3	-3	-4,5	-1	-2,5	
Score final				+ 4,5		- 1,5	+ 5,5

36. Pour le cours de sciences, Julie a relevé les températures de soir et du matin durant une semaine. La variation de température est la différence entre la température du soir et celle du matin. Par exemple, pour lundi, la variation se calcule par $10 - 7 = 3$; la température est montée de 3 degrés.

Recopier et compléter le tableau suivant :

Jours	lundi	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi	dimanche
Température du matin en degrés	7	2	- 5	- 7	- 2	- 6	0
Température du soir en degrés	10	3	2	- 4	- 6	5	- 5
Calcul à effectuer	$10 - 7$						
Variation de température entre le soir et le matin							

37. Allarik est né en 1976. Quel calcul fait-on pour connaître son âge en 2006 ? Effectuer ce calcul. Tite-Live (historien latin) est né en - 59 (59 ans avant JC) et est mort en 17. A quel âge est-il mort ? Écrire le calcul correspondant à ce résultat. Même question pour Thalès (mathématicien grec) né en - 625 et mort en -547.

38. 1988 est la 1988^{ème} année après Jésus Christ et on peut la noter : (+1988) ; par contre, la 15^{ème} année avant Jésus Christ peut se noter : ...Voici un tableau indiquant les années de naissance de quelques personnes, leurs durées de vie ou leurs années de mort.

- Représenter, sur une droite graduée, les différentes années indiquées et représenter par des couleurs différentes les durées de vie des différentes personnes.
- Compléter le tableau.

Nom	Année de naissance	Durée de vie	Année de mort	Opération
Jeanne	+ 27	52 ans		
Julie	- 19	42 ans		
Antigone	- 110	42 ans		
Pierre	- 150		- 83	
Stanislas	- 41		+ 15	
Charles	+ 15		+ 89	
Paul	- 15		34	

39. Pour passer le temps en voiture, Jean et Lucien inventent des jeux. Aujourd'hui, ils n'ont qu'un dé que Jean a fabriqué. Sur les faces du dé, Jean a noté les nombres pairs en positif (+2 ; +4 ; +6) et les nombres impairs en négatif (-1 ; -3 ; -5). La règle du jeu est la suivante : Jean et Lucien partent chacun d'un score de 20 et soustraient le nombre obtenu par lancé au score précédent. Le premier qui arrive exactement à 0 a gagné. Par exemple, l'évolution du score de Lucien pour la première partie est 18, obtenu en calculant $(20 - 2)$ puis $23 (18 - (-5))$.

Première partie :

Lancer de Jean		2	6	- 3	4	- 1	6	- 1	4	- 1	2	2
Évolution du score	20											
Lancer de Lucien		2	- 5	6	4	- 1	- 3	6	- 1	- 3	4	4
Évolution du score	20	18	23									

Qui a gagné cette partie ?

Deuxième partie : Compléter le tableau

La deuxième partie est interrompue par la fin du voyage, un des garçons pouvait-il gagner au tirage suivant ?

Lancer de Jean		- 1	6		6			4	-1	- 1
Évolution du score	20			16		6	7			
Lancer de Lucien		6			4			-3	2	- 1
Évolution du score	20		8	11		1	- 5			

Les exercices 40 à 43 sont des exercices d'entraînement classiques ; la consigne de transformer la différence en somme avant d'effectuer est encore écrite dans les deux premiers. L'élève y rencontre aussi des nombres non entiers. Ce genre de calculs est à entretenir régulièrement.

40. Transformer en somme puis effectuer :

$$\begin{array}{lll} (-17) - (-2) & ; & (-8) - (+4) & ; & 5,3 - (+8). \\ 3 - (-6) & ; & 15 - (+23) & ; & (-4,6) - (-7,2). \end{array}$$

41. Transformer en somme puis effectuer :

$$\begin{array}{lll} 4 - (-7) & ; & 16 - (+24) & ; & 10,8 - (+13). \\ (-11) - (+10) & ; & (-18) - (-3) & ; & (-7,2) - (-9,6). \end{array}$$

42. Transformer chacune des expressions suivantes en somme puis effectuer :

$$\begin{array}{lll} A = (+15,2) - (+12,7) & ; & B = (+21,4) - (+22,2) & ; & C = (+18,7) - (-14,2). \\ D = (+19,7) - (-14,2) & ; & E = (-11,7) - (+3,2) & ; & F = (-14,2) - (-16,3). \\ G = (+7,9) - (-7,9) & ; & H = 0 - (+9,9) & ; & I = 0 - (-9,9). \end{array}$$

43. Compléter les tableaux ci-dessous :

	- 5	2,5	- 3,4	- 10	0,12
- 4,2					
- 5,15					
3,4					

	- 0,2	5	- 9	- 0,08	- 2,9
- 8					
- 2,1					
7,34					

L'exercice 44 a pour objectif d'amener l'élève à reconnaître une somme d'une différence et à s'entraîner à passer de l'une à l'autre. La structure « tableau » peut faciliter ce passage.

44. Compléter le tableau suivant :

Expression écrite sous la forme d'une somme	Expression écrite sous la forme d'une différence	Écriture simplifiée de l'expression	Résultat du calcul
$7 + (-6,5)$			
	$8 - (-5,2)$		
$-1,8 + (+3,7)$			
	$7 - (+6,4)$		
		$-1,9 + 3,9$	
		$-5,6 - 9,1$	
	$-4 - (-9,1)$		
$-2,6 + (-5,4)$			

L'exercice 45 est un exercice technique, à reprendre régulièrement en calcul régulier.

45. Effectuer les calculs suivants après avoir simplifié l'écriture de chaque somme ou différence :

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & & \text{b)} & & \text{c)} & & \text{d)} \\ 3 - (-8,2) & ; & 8 + (-3,2) & ; & 4,3 - (-5,8) & ; & 7,1 + (-4,3). \\ 3 + (-8,2) & ; & 8 - (-3,2) & ; & 4,3 + (-5,8) & ; & 7,1 - (-4,3). \\ -3 - (-8,2) & ; & -8 + (-3,2) & ; & -4,3 - (-5,8) & ; & -7,1 + (-4,3). \\ -3 + (-8,2) & ; & -8 - (-3,2) & ; & -4,3 + (-5,8) & ; & -7,1 - (-4,3). \end{array}$$

SOMMES ALGÈBRIQUES

Dans l'exercice 46, on donne du sens aux sommes algébriques en s'aidant d'un changement de registre ; on utilise la droite graduée en position « verticale ». On peut également l'utiliser en position horizontale, en

remplaçant haut par droite et bas par gauche, le fléchage de la gauche et de la droite étant, si besoin est, matérialisé au tableau.

46. Préparer sur une grande feuille quadrillée une droite tracée verticalement et la graduer de bas en haut de (-13) à 13 . Le calcul $3 - 6$ peut se traduire de la manière suivante : partant de 0 , je monte de 3 puis redescends de 6 . Je suis alors en -3 . On peut écrire $3 - 6 = -3$.

a) Effectuer les calculs suivants en utilisant la droite graduée :

$$7 - 8 ; -9 + 4 ; -4 - 3 ; 4 - 11 ; -8 + 5 ; 8,5 - 10,5 ; -5,5 + 4 ; 3 - 6,5.$$

b) Effectuer les calculs suivants puis les vérifier en utilisant la droite graduée :

$$-2,5 + 8 ; 4 - 5,5 ; 6 - 7 ; 11,5 - 13 ; -6 + 5,5 ; -9 + 7,5 ; -4 - 3,5 ; 8 - 15,5.$$

c) Effectuer les calculs suivants (s'aider éventuellement de la droite graduée)

$$-5 + 7 - 6 ; 8 - 5 - 3 ; -3 - 5 + 7 ; 5 - 7 + 3 ; -4,5 - 2 - 2 ; 8 - 0,5 + 1,5 ; -6,5 - 3 - 4.$$

Les exercices 47 et 48 tentent de relier les nombres relatifs à des situations « concrètes ».

47. Traduire par une somme algébrique la situation suivante :

Un ascenseur dessert 5 étages et 3 sous-sol. Parti du 2^{ème} étage, il descend de 3 étages, en remonte 4, en descend 2 puis encore 3 et en remonte 1. A quel étage se trouve l'ascenseur à la fin ?

48. Traduire par une somme algébrique les situations suivantes :

a) Un plongeur se trouve à douze mètres de profondeur. Il descend de deux mètres, remonte de trois mètres cinquante, redescend de cinq mètres. A quelle profondeur se trouve-t-il ?

b) Un avion se trouve à mille deux cents mètres d'altitude. Il remonte de quarante mètres, puis redescend de soixante-douze mètres. A quelle altitude se trouve-t-il ?

L'exercice 49 demande une étape supplémentaire : la gestion d'un calcul entre parenthèses, ce calcul étant écrit sous forme simplifiée.

49. Effectuer les calculs suivants :

a)	b)	c)	d)
$7 - (8 - 12)$	$35 - (-15 + 60)$	$7 - (2,3 - 12)$	$31,9 - (-11,9 + 60)$
$-3 - (-5 - 3)$	$-24 + (12 - 48)$	$-3 - (-1,9 - 3)$	$-24 + (12 - 42,3)$
$5 + (-9 + 15)$	$-15 - (-5 - 25)$	$1,9 + (-9 + 11,9)$	$-11,9 - (-1,9 - 21,9)$

Dans les exercices 50 à 52, on travaille les techniques de calcul. Pour les deux premiers, on fait référence aux méthodes exposées dans le cours. Pour le troisième, le choix de la méthode est libre.

50. Effectuer les calculs suivants après avoir transformé chaque expression en une somme de plusieurs termes (voir méthode du cours) :

$$A = -7 + (-9) - (-8) - 16 ; B = 100 - 200 - (-9) + (-23) ; C = -210 - (-10) - 8 - 6.$$

51. Effectuer les calculs suivants après avoir écrit chaque expression sans parenthèses (voir méthode du cours) :

$$A = 3,5 - (-8,1) + (-1,8) - 2,8 ; B = 3 - (+7) - 8 + (-9,3) ; C = -7,5 + 2,9 - (-1,8) + (-4,2).$$

52. Effectuer les calculs suivants :

$$A = 4 - 2,5 - (-7,3) + 10 ; B = -18,5 - (-29) + (-2,3) - 1,2 ; C = -4 - (-8,3) + (-7,2) + 7.$$

Exercices 53 et 54 : on n'utilise que la notation simplifiée pour l'écriture des expressions à calculer. On peut proposer deux méthodes de calcul : gérer l'expression telle qu'elle est écrite ou commencer par l'écrire sous la forme d'une somme.

53. Calculer les expressions suivantes :

$A = -3 + 4 - 7$	;	$E = 4 - 8 + 13 - 10$	;	$I = -5 + 12 + 19.$
$B = -3 - 4 + 7$	;	$F = -4 + 8 + 13 - 10$	;	$J = -5 - 12 - 19.$
$C = -3 - 4 - 7$	;	$G = -4 + 8 - 13 + 10$	;	$K = -5 - 12 + 19.$
$D = -3 + 4 + 7$	;	$H = 4 - 8 - 13 + 10$	;	$L = -5 + 12 - 19.$

54. Calculer le plus habilement possible :

$$\begin{aligned} A &= 9,3 - 7,5 + 1,8 - 5 & B &= 4,6 + 5,6 - 4,8 - 7,5 & C &= -9,5 + 10,2 + 5 - 3,6. \\ D &= -6,8 - 5,9 + 8 - 4,15 & E &= 4,6 - 5,6 - 4,8 - 7,5 & F &= 9,5 + 10,2 - 5 + 3,6. \\ G &= -6,8 + 5,9 + 8 - 4,15 & H &= 4,16 - 5,6 - 4,8 + 7,5 & I &= -9,5 + 10,2 - 5 + 3,6. \end{aligned}$$

Dans les exercices 55 à 60, on aborde l'algébrisation : remplacer une lettre par un nombre. L'élève doit apprendre à ajouter des parenthèses pour gérer correctement les calculs. Lorsque $a = -2$, il doit pouvoir

écrire que $-a = -(-2)$ et peut faire le lien entre $-a$ et $\text{opp}(a)$. La justification des réponses aux questions posées à la suite des calculs n'est pas au programme de la classe de 5^{ème}. On peut dire aux élèves qu'ils auront l'outil nécessaire à cette justification en 4^{ème}. On cherche ici à attirer leur attention sur des expressions donnant le même résultat, et des résultats opposés.

55. a) Compléter le tableau suivant :

a	b	$a - b$	$\text{Opp}(a - b)$	$b - a$
3,2	- 5			
- 7	3,1			
- 2,6	- 1,6			

b) Que remarque-t-on ?

c) Pouvait-on le prévoir ?

56. a) Compléter le tableau suivant :

a	$a - 7$	$7 - a$	$a + 7$	$- 7 - a$
3,2				
- 2				
0				

b) Que remarque-t-on ?

c) Pouvait-on le prévoir ?

57. a) Compléter le tableau suivant :

a	b	c	$a + b - c$	$\text{Opp}(a + b - c)$	$c - a - b$
3,2	- 5	2			
- 7	3,1	- 1			
- 2,6	- 1,6	4,1			

b) Que remarque-t-on ?

c) Pouvait-on le prévoir ?

58. a) Compléter le tableau suivant :

a	b	c	d	$a + b - c - d$	$b - d + a - c$
3,2	- 5	2	- 1,1		
- 7	3,1	- 1	3		
- 2,6	- 1,6	4,1	- 4,1		

b) Que remarque-t-on ?

c) Pouvait-on le prévoir ?

Dans les exercices 59 et 60, l'élève devra gérer des parenthèses emboîtées. Le résultat est prévisible pour l'œil aguerri, les erreurs se voient donc plus rapidement. La justification, en utilisant la règle de suppression des parenthèses entourant une somme précédée du signe -, est hors programme pour des élèves de 5^{ème}. On peut simplement leur dire qu'une explication leur sera donnée en classe de 4^{ème}.

59. Calculer $7 - a - (5 - a)$ pour :

a) $a = - 2$; b) $a = 10$; c) $a = - 30$; d) $a = 0$.

60. Calculer $a - (3 - a) + 3$ pour :

a) $a = 0$; b) $a = 5$; c) $a = - 10$; d) $a = 12$.

Dans les exercices 61 et 62, on doit écrire autrement les expressions proposées afin de pouvoir effectuer les calculs demandés. On utilise la commutativité de l'addition des relatifs. Ces exercices peuvent occuper les élèves rapides, régulièrement en avance....

61. Deux nombres a et b sont tels que $a - b = - 2$

a) Calculer $a - 7 - b = - 5$.

b) Calculer $5 + a - b - 3$.

c) Trouver la valeur de a si $b = - 4$.

d) Trouver la valeur de b si $a = 0$.

62. Deux nombres a et b sont tels que $a - b = 10$ et $a + b = 2$.

- Calculer $a - b - 5$.
- Calculer $a + b - 3$.
- Calculer $a - 7 - b$.
- Calculer $b - a$.
- Calculer $b + 8 - a$.

Dans les exercices 65 et 66, on approche la notion de solution d'une équation par plusieurs tests de valeurs, ce qui revient à résoudre une équation par essai-erreur. L'utilisation d'un tableur en salle informatique est un « plus » pour ces exercices.

63. a) Compléter le tableau suivant :

a	b	$a + b$	$a - b$
-7	3		
2	-1		
0	-4		
4	6		
5	-2		
2	-1		
3	-7		
2	-2		

- b) Deux nombres a et b sont tels que $a + b = -2$ et $a - b = 6$. Continuer le tableau pour trouver les valeurs de a et b vérifiant ces deux égalités.

64. a) Compléter le tableau suivant :

a	b	$a + b$	$a - b - 4$
-7	3		
2	-1		
0	-4		
4	6		
5	-2		
4	8		
1	9		
6	4		

- b) Deux nombres a et b sont tels que $a + b = 10$ et $a - b - 4 = 2$. Continuer le tableau pour trouver les valeurs de a et b vérifiant les égalités données au départ.

Sommes algébriques et algébrisation.

Cette suite d'exercices permet de revenir aux nombres relatifs, après une pause sur le chapitre traité. Elle peut aussi être utilisée en début de 4^{ème} pour réviser les différentes écritures des sommes algébriques sans trop laisser les élèves. Elle permet en outre d'aborder l'algébrisation ; on passe du registre « texte » au registre symbolique ou vice-versa et on donne du sens à la notion de variable avec des applications numériques.

Pour les élèves qui n'auraient pas encore utilisé de programmes de calculs, il est conseillé de corriger très rapidement la première colonne du tableau 1 pour vérifier que tous en ont bien compris le fonctionnement.

Dans l'exercice 65, on travaille le passage du registre « texte » au registre symbolique.

Dans le tableau 1, on utilise la notation « simplifiée » uniquement.

Dans le tableau 2, les consignes amènent à aborder la soustraction sous deux aspects.

Dans le tableau 3, on revoit la soustraction d'un nombre négatif.

65. Pour chacun des programmes de calcul suivants :

- Écrire puis effectuer les calculs demandés. Dans la dernière colonne, écrire les calculs en fonction du nombre a .
- Remplacer ce programme par un programme plus simple qui ne comporte qu'un calcul, dans la ligne raccourci.
- Écrire le programme simplifié en fonction de a .

Tableau 1

Voici un nombre	45	23	- 3	- 20	a
Lui ajouter 15	$45 + 15 = \dots$				$a + 15$
Soustraire 20 au résultat précédent					$a + 15 - 20$
Soustraire 35 au résultat précédent					

Raccourci Soustrais $a - \dots\dots\dots$

Tableau 2

Voici un nombre	4	- 32	1 000	- 3,14	a
Lui ajouter (- 20)					
Soustraire 4 au résultat précédent					
Ajouter 30 au résultat précédent					

Raccourci $a \dots\dots\dots$

Tableau 3

Voici un nombre	28	- 30	0	6,01	a
Lui soustraire (- 20)					
Soustraire 30 au résultat précédent					
Ajouter 100 au résultat précédent					

Raccourci $a \dots\dots\dots$

Exercice 66 : passage du registre symbolique au registre « texte ».

Dans le tableau 4, on n'utilise que des nombres entiers.

Dans le tableau 5, on travaille en plus sur des nombres à virgule.

Dans le tableau 6, on termine par une équation de type $x + a = b$.

66. Pour chacun des programmes de calcul suivants :

- A toi de trouver les étapes (1^{re} colonne), à l'aide de la colonne « a »
- Remplace ce programme par un programme plus simple qui ne comporte qu'un calcul.
- Écris le programme simplifié en fonction de a .

Tableau 4

Voici un nombre	a	5	- 2
Ajoute-lui	$a + 6$		
Soustrais	$a + 6 - (-16)$		
.....	$a + 6 - (-16) + 10$		

Raccourci $a + \dots\dots\dots$

Tableau 5

Voici un nombre	a	0,5	- 2,3
.....	$a - 0,4$		
.....	$a - 0,4 + (-2)$		
.....	$a - 0,4 + (-2) - (-1,6)$		

Raccourci $a \dots\dots\dots$

Tableau 6

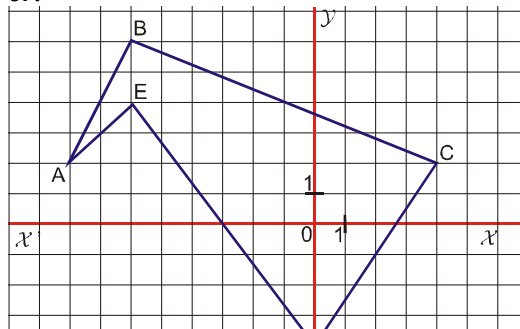
Voici un nombre	a	4	- 8
.....	$a - 4$		
.....	$a - 4 + 9$		
.....	$a - 4 + 9 + \dots\dots\dots$		

Raccourci $a + 20$

REPÉRAGE

Dans les exercices 67 à 71, on travaille le repérage dans le plan et le vocabulaire approprié ainsi que les transformations géométriques de figure. En ce qui concerne les coordonnées d'un point, le travail est fait dans les deux sens (placements de points de coordonnées données ou lectures de coordonnées). Les transformations s'appuient sur des calculs avec les relatifs. L'allure de la figure obtenue permet de vérifier l'exactitude de ces calculs.

67.



1) (xx') est l'axe des abscisses, (yy') est l'axe des ordonnées.

Reproduire la figure sur une grande feuille à petits carreaux, puis compléter le tableau suivant :

Point	A	B	C	D	E
Abscisse x					
Ordonnée y					

2) Pour chaque couple (x, y) , on définit un nouveau couple (x', y') à l'aide des formules suivantes :

- $x' = x + 11$
- $y' = y - 4$
- Compléter le tableau ci-contre, puis placer les points A', B', C', D', E' sur la figure précédente.
- Tracer en vert le polygone $A'B'C'D'E'$.

Point	A'	B'	C'	D'	E'
Abscisse x'					
Ordonnée y'					

3) Refaire les calculs avec des couples (x'', y'') tels que :

- $x'' = -12 - x$
- $y'' = 1 - y$

Placer ensuite les points A'', B'', C'', D'', E'' correspondants. Tracer en rouge le polygone obtenu.

68. a) Tracer deux axes gradués $(x'x)$ et $(y'y)$ perpendiculaires en un point O en prenant le carreau comme unité. Placer dans ce repère les points $A(1; 5)$, $B(-2; 3)$, $C(3; 0)$ et $D(0; -2)$. Tracer le quadrilatère ABCD.

b) Remplir le tableau ci-dessous puis placer les points A', B', C' et D' dans le même repère :

Points de départ	A	B	C	D
Abscisse : x				
Ordonnée : y				
Points « images »	A'	B'	C'	D'
Abscisse : $x' = 5 - x$				
Ordonnée : $y' = 1 - y$				

c) Tracer le quadrilatère $A'B'C'D'$.

d) Faire une conjecture précisant par quelle transformation on peut passer du quadrilatère ABCD au quadrilatère $A'B'C'D'$.

69. a) Tracer deux axes gradués $(x'x)$ et $(y'y)$ perpendiculaires en un point O en prenant le carreau comme unité. Placer dans ce repère les points $A(1; 5)$, $B(-2; 3)$, $C(3; 0)$ et $D(0; -2)$. Tracer le quadrilatère ABCD.

b) Remplir le tableau ci-dessous puis placer les points A', B', C' et D' dans le même repère :

Points de départ	A	B	C	D
Abscisse : x				
Ordonnée : y				
Points « images »	A'	B'	C'	D'
Abscisse : $x' = x - 2$				
Ordonnée : $y' = y - 6$				

c) Tracer le quadrilatère $A'B'C'D'$.

70. a) Tracer deux axes gradués ($x'x$) et ($y'y$) perpendiculaires en un point O en prenant le carreau comme unité. Placer dans ce repère les points A(-2 ; 0), B(-5 ; 1), C(3 ; -4) et D(0 ; 5). Tracer le quadrilatère ABCD.

b) Remplir le tableau ci-dessous puis placer les points A', B', C' et D' dans le même repère :

Points de départ	A	B	C	D
Abscisse : x				
Ordonnée : y				
Points « images »	A'	B'	C'	D'
Abscisse : $x' = x + y$				
Ordonnée : $y' = x - y$				

c) Tracer le quadrilatère A'B'C'D'.

71. a) Tracer deux axes gradués ($x'x$) et ($y'y$) perpendiculaires en un point O en prenant le carreau comme unité. Placer dans ce repère les points A(1 ; 2), B(-2 ; 5), C(4 ; 0) et D(-5 ; -2). Tracer le quadrilatère ABCD

b) Remplir le tableau ci-dessous puis placer les points A', B', C' et D' dans le même repère :

Points de départ	A	B	C	D
Abscisse : x				
Ordonnée : y				
Points « images »	A'	B'	C'	D'
Abscisse : $x' = -x$				
Ordonnée : $y' = 1 - y$				

c) Tracer le quadrilatère A'B'C'D'.

d) Faire une conjecture précisant par quelle transformation on peut passer du quadrilatère ABCD au quadrilatère A'B'C'D'.

EXERCICES DIVERS

Les exercices 72 à 75 donnent un autre but aux calculs. Ils sont extraits du manuel scolaire, classe de 5^{ème}, de l'IREM de Strasbourg, édition 1992, (collection dirigée par Françoise Mollet-Petit).

72. Compléter pour obtenir des carrés de somme magique :

a)	<table><tr><td>-7</td><td></td><td>-55</td></tr><tr><td></td><td>49</td><td></td></tr><tr><td></td><td></td><td>105</td></tr></table>	-7		-55		49				105	b)	<table><tr><td>-3</td><td></td><td>-23</td></tr><tr><td></td><td></td><td>10</td></tr><tr><td></td><td></td><td>-17</td></tr></table>	-3		-23			10			-17	c)	<table><tr><td></td><td></td><td>18,5</td></tr><tr><td>27,1</td><td>11,8</td><td>-3,5</td></tr><tr><td>5,1</td><td></td><td></td></tr></table>			18,5	27,1	11,8	-3,5	5,1			d)	<table><tr><td>2,6</td><td>a</td><td>-7,4</td></tr><tr><td>-12,9</td><td>b</td><td>c</td></tr><tr><td>1,6</td><td>d</td><td>e</td></tr></table>	2,6	a	-7,4	-12,9	b	c	1,6	d	e
-7		-55																																									
	49																																										
		105																																									
-3		-23																																									
		10																																									
		-17																																									
		18,5																																									
27,1	11,8	-3,5																																									
5,1																																											
2,6	a	-7,4																																									
-12,9	b	c																																									
1,6	d	e																																									

73. Compléter pour obtenir des carrés de somme magique :

a)

a	$-10,1$	$4,3$
c	$-1,5$	d
$-7,9$	e	f

b)

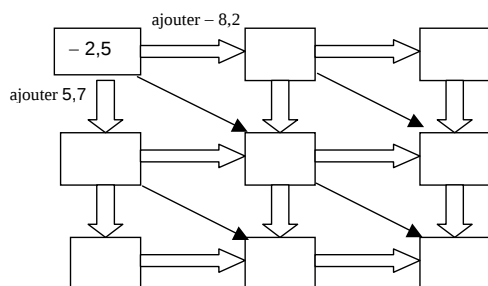
$-6,1$	5	a	$4,4$
$-5,6$	b	c	$14,6$
d	$-8,6$	e	$-7,7$
13	f	$-5,5$	g

c)

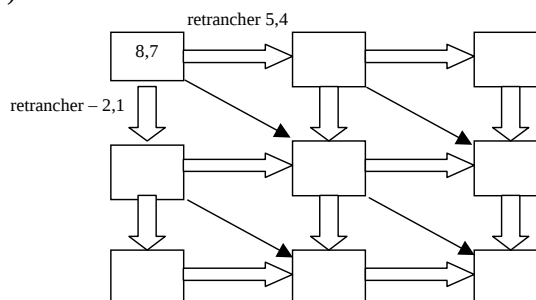
a	$-0,75$	$0,07$	b
$-0,49$	c	d	$2,03$
e	f	$1,39$	$-1,79$
$0,24$	g	$-0,55$	$-0,92$

74. Compléter en mettant des nombres dans les cases. Les flèches de même forme et la même direction ont la même signification. Indiquer ensuite ce que signifient les flèches obliques (ajouter ou soustraire quel nombre ?)

a)

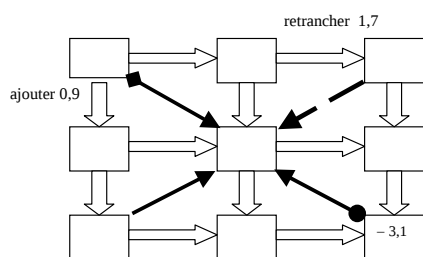


b)

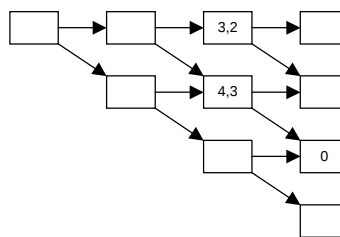


75. Compléter en mettant des nombres dans les cases. Les flèches de même forme et la même direction ont la même signification. Indiquer ensuite ce que signifient les flèches obliques (ajouter ou soustraire quel nombre ?)

a)



b)



CALCULS À ENTRETENIR

Types de calcul	Objectifs, méthodes, commentaires
$(-12) + (-35)$ $(+12) + (-35)$ $(-19) + (+28)$...sommes d'entiers relatifs à deux chiffres	Travailler régulièrement, chaque semaine et dès le début de l'année ce genre de calculs, en lien avec la droite graduée, comme dans l'activité 2, permet à l'élève de se familiariser avec la somme de deux nombres relatifs.
$(-17) + 32$ $-2,4 + (-5,8)$ $1,8 + (-6)$	On peut introduire les décimaux et certaines simplifications d'écriture lorsque ce qui précède paraît solidement acquis.
$5 - (-4,2)$...	Calculs de différences dès que cette notion a été abordée dans le chapitre, à entretenir jusqu'à la fin de l'année scolaire !
$-7,3 + 10$ $-7,3 - 10$	Calculs en écriture simplifiée dès que cette notion a été abordée dans le chapitre, à entretenir jusqu'à la fin de l'année scolaire !
$-7,4 + 10,3 + 5,2$ $-7,1 - 10 + 5$...	Encourager l'élève à choisir une stratégie pour des calculs de sommes algébriques.
$-7 - (6 - 9)$	Habituer l'élève à gérer un calcul comportant des parenthèses.
Comparer -17 -24 $-2,15$... $-2,5$	Le faire dès le début de l'année, donner une correction s'appuyant sur la droite graduée.
Compléter : $-2,1 + \dots = -5$ $3,6 + \dots = -2$	On travaille les sommes de relatifs dans un autre sens.
$a = -6$ et $b = -2,3$ $a - b = \dots$ $7 - a = \dots$	Remplacer une lettre par une valeur numérique dans une expression littérale permet de donner du sens à cette expression.

CHAPITRE 6

PROPORTIONNALITÉ

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Reconnaître une situation de proportionnalité.
- Savoir utiliser les tests du double, du triple...
- Utiliser les propriétés de linéarité de la proportionnalité.
- Donner du sens au coefficient de proportionnalité.
- Traiter un problème de proportionnalité en passant par l'image de l'unité.
- Traiter un problème de proportionnalité en utilisant un rapport de linéarité.
- Traiter un problème de proportionnalité en utilisant le coefficient de proportionnalité.
- Calculer et utiliser l'échelle d'une carte ou d'un dessin.
- Comparer des proportions.
- Calculer et utiliser un pourcentage.
- Reconnaître un mouvement uniforme à l'existence d'une relation de proportionnalité entre durée et distance parcourue, utiliser cette proportionnalité.

REPÈRES POUR LE CONTENU DU COURS

- Définition de la proportionnalité.
- Reconnaissance d'une situation de proportionnalité.
- Différentes méthodes de traitement d'un problème de proportionnalité.
- Notion de vitesse.
- Notion d'échelle.

ACTIVITÉ

ACTIVITÉ 1 : À LA DÉCOUVERTE DE LA PROPORTIONNALITÉ

Voici six situations.

1. Compléter les tableaux des situations 1 et 2.
2. Pour la situation 3, on peut calculer le prix de 75 L à l'aide d'une simple addition. Quelle est cette addition ?
3. Compléter les tableaux des situations 4 et 5.
4. Observer les tableaux des six situations. Existe-t-il un opérateur qui permet de passer des nombres de la première ligne à ceux de la deuxième ? Indiquer cet opérateur dans chaque tableau où il existe.
5. Par définition, il y a proportionnalité entre deux grandeurs lorsqu'on obtient les nombres de la seconde grandeur en multipliant par un même nombre ceux de la première grandeur.

Écrire, pour chaque situation, une phrase complète du type :

Dans la situation, (n')est (pas) proportionnel(le) à

Situation 1

Le commerçant Toufixe augmente tous les prix de 10 €.

Prix avant l'augmentation	100 €	140 €	300 €	440 €
Prix après l'augmentation	110 €			

Situation 2

Le commerçant Centage augmente tous les prix de 10 %.

Prix avant l'augmentation	100 €	140 €	300 €	440 €
Prix après l'augmentation	110 €			

Situation 3

A la station d'essence, le litre de super est vendu 1,20 €. On a relevé les prix suivants :

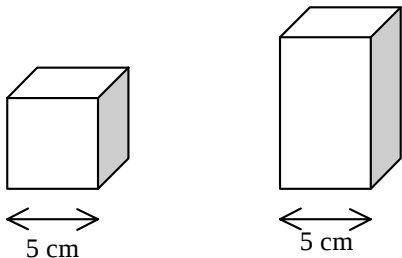
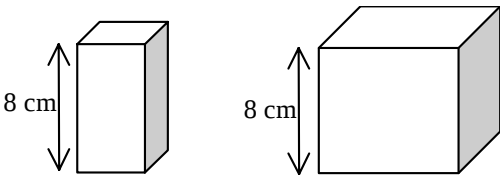
Nombre de litres d'essence	20 L	25 L	42 L	50 L	75 L
Prix à payer	24 €	30 €	50,40 €	60 €	

Situations 4 et 5

Mélanie et Noémie ont chacune une collection de boîtes (des pavés droits) qui ont pour bases des carrés.

Les boîtes de Mélanie ont toutes pour base un carré de 5 cm de côté, mais des hauteurs différentes.

Les boîtes de Noémie ont toutes la même hauteur, 8 cm, mais les dimensions du carré de base sont différentes.

Situation 4 : Boîtes de Mélanie		Situation 5 : Boîtes de Noémie	
			

Boîtes de Mélanie

Hauteur de la boîte	3 cm	4 cm	10 cm	20 cm
Volume de la boîte				

Boîtes de Noémie

Côté du carré	5 cm	6 cm	10 cm	20 cm
Volume de la boîte				

Situation 6

Sylvain retrouve dans son carnet de santé la taille qu'il avait à 6 ans, à 10 ans et à 12 ans :

âge	6 ans	10 ans	12 ans
taille	110 cm	140 cm	160 cm

Objectifs et commentaires

- Relier des situations de proportionnalité à l'existence d'un coefficient de proportionnalité.
- Énoncer explicitement le lien de proportionnalité entre deux grandeurs.

En sixième, les élèves ont déjà traité des problèmes de proportionnalité dans le cadre des grandeurs.

Cette activité vise, dans un premier temps (questions 1, 2 et 3), la création de cinq tableaux de nombres. Le sixième tableau est donné complet. Les situations 2 et 3 sont l'occasion de réinvestir des acquis de sixième : calcul d'un prix après augmentation de 10% et utilisation de la propriété additive de la linéarité.

Ces six tableaux servent ensuite de support pour la compréhension de la définition énoncée à la question 5.

La formulation du lien de proportionnalité entre deux grandeurs est demandée dans la dernière question : il est essentiel que l'élève produise de telles phrases.

On pourra proposer le « test du double » pour justifier la non proportionnalité. Ainsi, dans la dernière situation, une phrase comme « si on double l'âge, la taille n'est pas doublée », permet de donner du sens à la justification.

ACTIVITÉ 2 : DES MÉTHODES POUR UNE QUATRIÈME PROPORTIONNELLE

Dans tous les problèmes abordés dans cette activité, les grandeurs considérées sont proportionnelles.

A. Passage par l'unité

- 1) Une personne a acheté 10 m de tissu pour 23 €. Une autre personne a besoin de 14 m du même tissu. Compléter le schéma ci-contre pour connaître le prix qu'elle paiera.

	Longueur de tissu	Prix à payer
	10 m	23 €
	1 m	??
	14 m	??

- 2) Résoudre chacun des problèmes suivants en utilisant la méthode précédente. Écrire, pour chaque cas, le calcul effectué et répondre par une phrase.
- Une tige en acier de 4 mètres pèse 5 kg. Combien pèse une tige de 7 m ?
 - Une tige en acier de 4 mètres pèse 5 kg. Combien mesure une tige de 3 kg ?

B. Passage par une étape intermédiaire, autre que le passage par l'unité

- 1) Chacun des schémas ci-dessous correspond à une situation de proportionnalité. Compléter chaque schéma.

: 2 → <table><thead><tr><th>Quantité</th><th>Prix à payer</th></tr></thead><tbody><tr><td>600 g</td><td>2,6 €</td></tr><tr><td>.....</td><td>.....</td></tr><tr><td>.....</td><td>.....</td></tr></tbody></table> × 5 → <table><thead><tr><th>Quantité</th><th>Prix à payer</th></tr></thead><tbody><tr><td>600 g</td><td>2,6 €</td></tr><tr><td>.....</td><td>.....</td></tr><tr><td>.....</td><td>.....</td></tr></tbody></table>			Quantité	Prix à payer	600 g	2,6 €					Quantité	Prix à payer	600 g	2,6 €					→ <table><thead><tr><th>Quantité</th><th>Prix à payer</th></tr></thead><tbody><tr><td>300 g</td><td>1,5 €</td></tr><tr><td>.....</td><td>.....</td></tr><tr><td>400 g</td><td>.....</td></tr></tbody></table> → <table><thead><tr><th>Quantité</th><th>Prix à payer</th></tr></thead><tbody><tr><td>300 g</td><td>1,5 €</td></tr><tr><td>.....</td><td>.....</td></tr><tr><td>400 g</td><td>.....</td></tr></tbody></table>			Quantité	Prix à payer	300 g	1,5 €			400 g		Quantité	Prix à payer	300 g	1,5 €			400 g		→ <table><thead><tr><th>Quantité</th><th>Prix à payer</th></tr></thead><tbody><tr><td>300 g</td><td>1,8 €</td></tr><tr><td>.....</td><td>.....</td></tr><tr><td>250 g</td><td>.....</td></tr></tbody></table> → <table><thead><tr><th>Quantité</th><th>Prix à payer</th></tr></thead><tbody><tr><td>300 g</td><td>1,8 €</td></tr><tr><td>.....</td><td>.....</td></tr><tr><td>250 g</td><td>.....</td></tr></tbody></table>			Quantité	Prix à payer	300 g	1,8 €			250 g		Quantité	Prix à payer	300 g	1,8 €			250 g	
Quantité	Prix à payer																																																							
600 g	2,6 €																																																							
.....																																																								
.....																																																								
Quantité	Prix à payer																																																							
600 g	2,6 €																																																							
.....																																																								
.....																																																								
Quantité	Prix à payer																																																							
300 g	1,5 €																																																							
.....																																																								
400 g																																																								
Quantité	Prix à payer																																																							
300 g	1,5 €																																																							
.....																																																								
400 g																																																								
Quantité	Prix à payer																																																							
300 g	1,8 €																																																							
.....																																																								
250 g																																																								
Quantité	Prix à payer																																																							
300 g	1,8 €																																																							
.....																																																								
250 g																																																								
→ <table><thead><tr><th>Distance</th><th>Durée</th></tr></thead><tbody><tr><td>24 km</td><td>40 min</td></tr><tr><td>.....</td><td>.....</td></tr><tr><td>36 km</td><td>.....</td></tr></tbody></table> → <table><thead><tr><th>Distance</th><th>Durée</th></tr></thead><tbody><tr><td>24 km</td><td>40 min</td></tr><tr><td>.....</td><td>.....</td></tr><tr><td>36 km</td><td>.....</td></tr></tbody></table>			Distance	Durée	24 km	40 min			36 km		Distance	Durée	24 km	40 min			36 km		→ <table><thead><tr><th>Distance</th><th>Durée</th></tr></thead><tbody><tr><td>80 km</td><td>60 min</td></tr><tr><td>.....</td><td>.....</td></tr><tr><td>.....</td><td>45 min</td></tr></tbody></table> → <table><thead><tr><th>Distance</th><th>Durée</th></tr></thead><tbody><tr><td>80 km</td><td>60 min</td></tr><tr><td>.....</td><td>.....</td></tr><tr><td>.....</td><td>45 min</td></tr></tbody></table>			Distance	Durée	80 km	60 min				45 min	Distance	Durée	80 km	60 min				45 min	→ <table><thead><tr><th>Distance</th><th>Durée</th></tr></thead><tbody><tr><td>45 km</td><td>50 min</td></tr><tr><td>.....</td><td>.....</td></tr><tr><td>.....</td><td>60 min</td></tr></tbody></table> → <table><thead><tr><th>Distance</th><th>Durée</th></tr></thead><tbody><tr><td>45 km</td><td>50 min</td></tr><tr><td>.....</td><td>.....</td></tr><tr><td>.....</td><td>60 min</td></tr></tbody></table>			Distance	Durée	45 km	50 min				60 min	Distance	Durée	45 km	50 min				60 min
Distance	Durée																																																							
24 km	40 min																																																							
.....																																																								
36 km																																																								
Distance	Durée																																																							
24 km	40 min																																																							
.....																																																								
36 km																																																								
Distance	Durée																																																							
80 km	60 min																																																							
.....																																																								
.....	45 min																																																							
Distance	Durée																																																							
80 km	60 min																																																							
.....																																																								
.....	45 min																																																							
Distance	Durée																																																							
45 km	50 min																																																							
.....																																																								
.....	60 min																																																							
Distance	Durée																																																							
45 km	50 min																																																							
.....																																																								
.....	60 min																																																							

- 2) Résoudre chacun des problèmes suivants en utilisant une méthode analogue à celle utilisée dans la question 1. Écrire, pour chaque cas, le calcul effectué et répondre par une phrase.
- 700 g de poisson sont vendus 14,7 €. Calculer le prix de 1 kg de ce poisson.
 - 12 litres d'eau s'écoulent en 9 minutes. En admettant que la quantité d'eau écoulée est proportionnelle à la durée, calculer la quantité d'eau écoulée en 1 heure.

C. Passage direct

- 1) Compléter chacune des égalités suivantes de trois façons différentes et vérifier à la calculatrice :
- $4 \times \dots = 3$; b) $3 \times \dots = 4$; c) $40 \times \dots = 60$; d) $60 \times \dots = 40$.
- 2) Compléter les égalités suivantes. Vérifier avec la calculatrice :

- a) $320 \div \dots = 10$; b) $320 \div \dots = 100$; c) $60 \div \dots = 40$; d) $500 \div \dots = 25$.

3) Compléter les schémas suivants, sachant que les grandeurs sont proportionnelles :

	Longueur	Coût
	6 m	16,2 €
	15 m	

	Quantité	Coût
	300 g	16,2 €
	400 g	

	Distance parcourue	Quantité d'essence
	240 km	15 L
	100 km	

4) Résoudre chacun des problèmes suivants en utilisant une méthode analogue à celle de la question précédente. Écrire pour chaque cas le calcul effectué et répondre par une phrase.

Une machine à fabriquer les rouleaux de réglisse produit 60 rouleaux avec 16 mètres de réglisse.

- a) Combien de rouleaux peut-elle fabriquer avec 12 mètres de réglisse ?
 b) Quelle longueur de réglisse faut-il prévoir pour fabriquer 150 rouleaux ?

D. Utilisation du coefficient de proportionnalité

Au marché, on a payé 3,6 € pour 1,5 kg de raisin.

- Quelles sont les grandeurs proportionnelles ?
- Que représente le coefficient de proportionnalité pour passer de la quantité de raisin en kg au prix payé en € ?
- Calculer ce coefficient et compléter le tableau ci-dessous.

Quantité de raisin	1,5 kg	4 kg	3,1 kg			0,3 kg
Prix payé	3,6 €			4,8 €	13,2 €	

- Calculer le prix de 600 g de ce raisin.
- Calculer la quantité de raisin achetée avec 4,2 € puis avec 0,63 €.

Objectifs et commentaires

Donner différentes méthodes pour aborder un problème de proportionnalité

- Utilisation du passage par l'unité.
- Utilisation de tableaux.
- Utilisation de la langue naturelle et de schémas fléchés.
- Utilisation du coefficient de proportionnalité, lorsqu'il y a plusieurs calculs à faire. On veillera à donner un sens concret à ce coefficient.

Dans chaque problème de proportionnalité, il y a pour l'élève nécessité d'effectuer des choix (comme dans un problème ouvert) ; ces choix sont dépendants de la façon de considérer les nombres entre eux, ce qui suppose des compétences en calcul mental et une bonne disponibilité de ces compétences. La nécessité d'une nouvelle attitude face à ce type de problèmes peut être déstabilisante pour certains élèves.

C'est pourquoi nous avons choisi de consacrer chaque partie de cette activité à une méthode particulière. L'élève pourra ainsi se familiariser avec chaque méthode et l'expérimenter. Il sera, par la suite, libre de choisir celle qui lui convient le mieux dans le problème qu'il a à résoudre, mais cette liberté ne peut s'exercer que s'il a suffisamment pratiqué différentes façons de faire.

Nous avons aussi choisi de travailler dans cette activité avec des nombres tels que les calculs puissent être faits mentalement ou à l'aide d'une opération posée, simple. Le recours à la calculatrice n'est donc pas nécessaire dans ces problèmes.

Il reste, pour l'élève, la liberté du choix des nombres : ainsi, dans la partie B1, pour passer de 300 g à 250 g, certains élèves prennent comme étape intermédiaire 50 g, d'autres 100 g. Pour passer de 24 min à 36 min, les étapes intermédiaires rencontrées sont 1 min, 2 min, 6 min ou 12 min. Une comparaison de ces différents choix est essentielle lors de la correction.

La question C1 est une occasion de faire comprendre aux élèves que la réponse attendue peut être écrite sous forme fractionnaire, même si l'énoncé ne le précise pas. On pourra alors comparer les différentes réponses proposées et tester chacune d'elles. Ainsi, pour compléter « $4 \times \dots = 3$ », les réponses les plus fréquentes sont 0,75 ou $\frac{3}{4}$; on peut y ajouter des fractions égales à $\frac{3}{4}$, ce qui surprend quelques élèves.

Les égalités comme « $320 \div \dots = 10$ » ou « $60 \div \dots = 40$ » seront l'occasion de travailler par essai-erreur en faisant le lien entre multiplication et division.

Dans la question 3, on tire profit de ce qui a été vu auparavant : ainsi, le coefficient multiplicatif pour passer de 6 à 15 peut s'écrire $\frac{15}{6}$ ou $\frac{5}{2}$ ou encore 2,5. Il reste à choisir celui qui donnera le calcul le plus simple à effectuer, dans l'hypothèse d'un travail sans calculatrice. Dans le dernier schéma, l'élève est amené à effectuer le calcul $15 \div 2,4$. On l'encouragera à poser cette opération et à se montrer critique par rapport au résultat trouvé.

L'utilisation du coefficient de proportionnalité est particulièrement intéressante lorsque ce coefficient intervient dans plusieurs calculs, comme dans la partie D. Il est important que chaque élève puisse lui donner du sens : ici, il représente le prix d'un kg de raisin.

« Le calcul mental réfléchi est l'occasion de rencontrer plusieurs façons d'effectuer un même calcul et d'avoir à justifier celle qui a été choisie. La résolution mentale de problèmes constitue une aide à la construction du sens des opérations. En effet, lorsque la résolution met en œuvre des nombres et des calculs bien maîtrisés, les élèves peuvent concentrer leur attention sur les raisonnements nécessaires à cette résolution. Par ailleurs, un essai de résolution mentale d'un problème en remplaçant certaines données par des données plus petites permet parfois de mieux envisager les traitements appropriés à mettre en œuvre. La résolution de « petits problèmes » qui peuvent être résolus par le seul calcul mental est pour cela un moyen efficace » (Extraits de commentaires sur les programmes).

On pourra donc, en parallèle, travailler au début de chaque heure, à la résolution mentale de « petits problèmes » en calcul réfléchi. On pourra aussi demander aux élèves de compléter des égalités comme $40 \times \dots = 50$ ou $60 \times \dots = 40$. Dans chaque cas, on tirera profit des différentes réponses ou méthodes rencontrées dans la classe pour créer débat. Ainsi, pour la première égalité à compléter, des réponses comme $\frac{5}{4}$, 1,25 ou $\frac{50}{40}$ seront analysées.

ACTIVITÉ 3

1) Sur un circuit automobile, lors de tests, on note les temps de passage de trois véhicules.

Véhicule 1	Durées	5 min	10 min	15 min	20 min
	Distances	7 km	14 km	21 km	28 km
Véhicule 2	Durées en min	6 min	12 min	18 min	24 min
	Distances en km	7 km	14 km	21 km	28 km
Véhicule 3	Durées en min	10 min	15 min	20 min	25 min
	Distances en km	7 km	14 km	21 km	28 km

- Les véhicules 1 et 2 sont animés d'un mouvement uniforme mais le mouvement du véhicule 3 n'est pas uniforme. Comment définir un mouvement uniforme ?
- Que représente, pour les véhicules 1 et 2, le coefficient permettant de passer des durées aux distances ?
- Pour les véhicules 1 et 2, calculer la distance qu'ils parcourraient en une heure.

2) Dans le cadre d'un mouvement uniforme, compléter les tableaux suivants :

Pour une voiture parcourant 60 km en 1 heure		Pour une voiture roulant à la vitesse de 120 km/h		Pour une voiture roulant à la vitesse de 30 km par heure	
Durée	Distance	Durée	Distance	Durée	Distance
60 min		60 min		60 min	
40 min		40 min		40 min	
	35 km		34 km		45 km
	28 km		10 km		10 km

3) Quel est le nombre de kilomètres parcourus en une minute par une voiture qui roule à :

- 60 km/h ? ;
- 120 km/h ? ;
- 30 km/h ?

Objectifs et commentaires

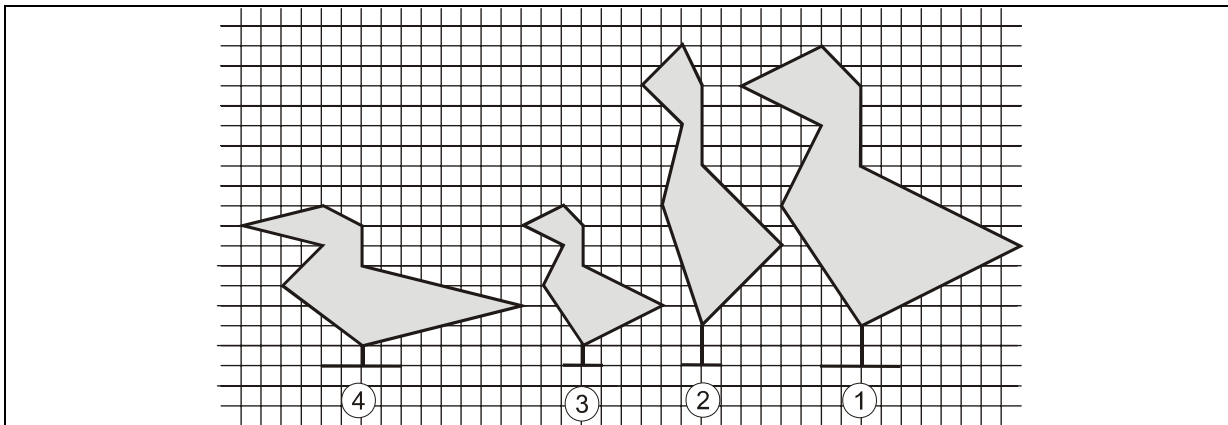
- Définir un mouvement uniforme.
- Passer des kilomètres par heure aux kilomètres par minute dans des cas courants, en dégager une correspondance simple entre kilomètres et minutes dans ces cas.

Dans la question 1, le test du double montre que le troisième tableau n'est pas un tableau de proportionnalité.

Dans la question 2, différentes formulations sont utilisées pour donner la vitesse de la voiture : 60 km en 1 heure, vitesse de 120 km/h, vitesse de 30 km par heure. Le passage de « km/h » au langage courant « en 1 h, on parcourt ... km » permet une meilleure compréhension de la situation et constitue le premier pas pour le traitement des problèmes concernant le mouvement uniforme.

ACTIVITÉ 4

- 1) **Drôles d'oiseaux.** Parmi ces oiseaux, un seul est un agrandissement du N°3. Lequel ? Pourquoi ? Quelle est l'échelle de l'agrandissement ?



- 2) figure 1

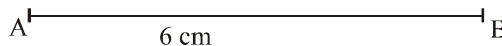
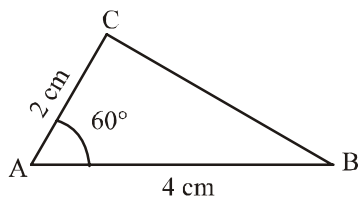


- figure 2



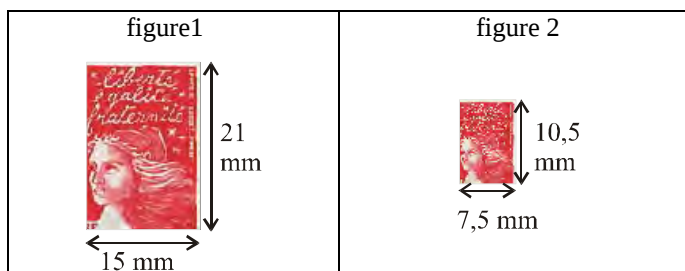
Compléter : La figurereprésente la pièce en grandeur réelle
 La figure ... est un agrandissement de la pièce en grandeur réelle.
 Quelle est l'échelle de cet agrandissement ?

- 3) Dessiner un agrandissement du triangle ABC ci-dessous pour que AB = 6 cm.



Mesurer le côté [BC] du triangle ci-contre, puis le côté [BC] du triangle agrandi. Remarque ? Quelle est l'échelle de l'agrandissement ?

- 4) a) La figure 1 représente un timbre en grandeur réelle.
La figure 2 est une réduction de la figure 1.
Quelle est l'échelle de la réduction ?



- b) Compléter en utilisant certains des nombres suivants

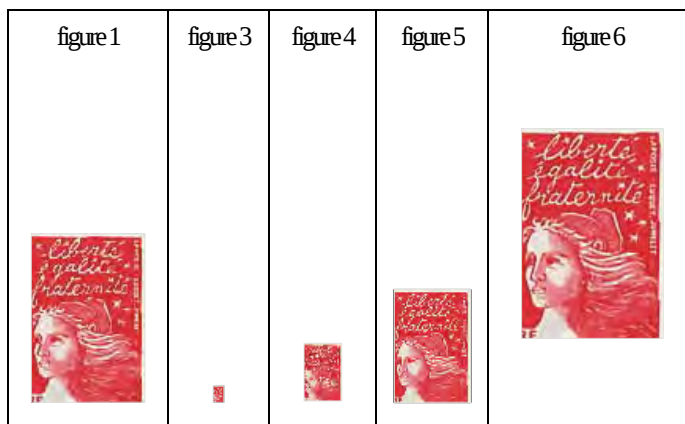
$$\frac{66}{100} ; \frac{1}{10} ; 1,25 ; \frac{5}{4} ; \frac{1}{3} ; 3 :$$

la figure 3 est une représentation de la figure 1 à l'échelle

la figure 4 est une représentation de la figure 1 à l'échelle

la figure 5 est une représentation de la figure 1 à l'échelle

la figure 6 est une représentation de la figure 1 à l'échelle



Objectifs et commentaires

- Comprendre de façon intuitive que l'agrandissement d'un dessin est un dessin qui a la même forme.
- Comprendre les notions d'agrandissement et de réduction.
- Savoir déterminer une échelle et la reconnaître comme un coefficient de proportionnalité.

Les trois premières questions visent la compréhension de la notion d'agrandissement. Dans la question 1), on attire l'attention sur le fait qu'un agrandissement conserve la forme de la figure et en particulier les angles. Dans la question 3), la construction du triangle agrandi repose précisément sur la conservation de la mesure de l'angle $\widehat{A}$ et la détermination de la longueur AC. On pourra remarquer que la longueur de [BC] a aussi été multipliée par 1,5. Certains élèves raisonnent en ajoutant 2 cm aux longueurs des côtés du triangle ABC, pensant ainsi l'agrandir de 2 cm. Le dessin obtenu leur montre que la forme du triangle a changé et que ce raisonnement ne convient pas.

Dans la question 4) on s'appuie sur un objet de la vie courante, le timbre, pour différencier une situation d'agrandissement d'une situation de réduction. Les réponses à la question b) peuvent être données dans un premier temps de manière intuitive. Ce sera l'occasion de solliciter l'esprit critique des élèves pour trouver les erreurs éventuelles et valider les réponses. Les formulations diverses qui seront utilisées pour argumenter contribuent à la bonne compréhension de la notion d'échelle.

COURS

PROPORTIONNALITÉ

Définition : Il y a *proportionnalité* entre deux grandeurs, lorsqu'on obtient les nombres de la seconde grandeur en multipliant par un même nombre ceux de la première grandeur. Ce nombre est le *coefficient de proportionnalité* de la deuxième grandeur par rapport à la première.

Exemple

Première grandeur	5	6	7	8
Deuxième grandeur	7,5	9	10,5	12

$$\frac{7,5}{5} = \frac{9}{6} = \frac{10,5}{7} = \frac{12}{8} = 1,5.$$

Les quotients correspondants de ce tableau sont tous égaux. La deuxième grandeur est proportionnelle à la première grandeur : pour obtenir les nombres de la deuxième grandeur, on multiplie ceux de la première grandeur par 1,5.

Contre-exemple

Première grandeur	5	6	7	8
Deuxième grandeur	15	20	25	30

$\frac{15}{5} = 3$ mais $\frac{20}{6}$ n'est pas égal à 3. La deuxième grandeur n'est donc pas proportionnelle à la première.

Propriétés des tableaux de proportionnalité

Exemple

1 ^{ère} grandeur	12	36	72	108	× 2,5
2 ^{ème} grandeur	30	90	180	270	

Diagram illustrating the properties of the proportionality table:

- From 12 to 36: $\times 3$
- From 30 to 90: $\times 3$
- From 36 to 72: $+$
- From 90 to 180: $+$
- From 72 to 108: $\times 1,5$ (indicated by a curved arrow from the $\times 2,5$ box)
- From 180 to 270: $\times 1,5$ (indicated by a curved arrow from the $\times 2,5$ box)

On remarque que, dans ce tableau de proportionnalité, le nombre qui correspond au triple de 12 est le triple de 30. Le nombre qui correspond à la somme de 36 et 72 est la somme de 90 et 180. Ce type de remarques est applicable à tous les tableaux de proportionnalité.

MOUVEMENT UNIFORME

Définition du mouvement uniforme : Le *mouvement* d'un mobile est dit *uniforme* si la distance parcourue est proportionnelle à la durée du parcours. Le coefficient de proportionnalité pour passer de la durée à la distance est la *vitesse* du mobile.

Exemple : Sur un circuit automobile, lors de tests, on note les temps de passage de deux véhicules.

Véhicule 1

Durées	5 min	10 min	15 min	20 min	$\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = \frac{21}{15} = \frac{28}{20} = 1,4$. Pour ce véhicule, le mouvement est uniforme. Sa vitesse moyenne est 1,4 km par minute ou 84 km par heure.
Distances	7 km	14 km	21 km	28 km	

Véhicule 2

Durées	10 min	15 min	20 min	25 min	Pour 20 min, le double de 10 min, la distance parcourue est 21 km, qui n'est pas le double de 7 km. Pour ce véhicule, le mouvement n'est pas uniforme.
Distances	7 km	14 km	21 km	28 km	

ÉCHELLES

Pour représenter certains objets ou certaines figures sur un dessin, un plan ou une carte, il est souvent nécessaire d'agrandir ou de réduire leurs dimensions.

Définition : L'*échelle* d'un dessin est le nombre par lequel il faut multiplier la distance réelle pour obtenir la distance sur le dessin, les deux distances étant exprimées *dans la même unité*.

Distance réelle en cm	$\times$ Échelle	→	Distance sur le dessin en cm
-----------------------	------------------	---	------------------------------

Si l'échelle du dessin est un nombre **supérieur à 1**, le dessin est un **agrandissement** de la réalité. Si l'échelle du dessin est un nombre **inférieur à 1**, le dessin est une **réduction** de la réalité.

Exemples

- Agrandissement à l'échelle 2.

Distance réelle en cm	$\xrightarrow{\times 2}$	Distance sur le dessin en cm
------------------------------	--------------------------	-------------------------------------

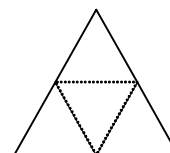
Dans le langage courant, on peut dire que la distance sur le dessin est « 2 fois plus grande que la distance réelle ».

Remarque : Sur la figure ci-contre, les côtés du triangle agrandi sont deux fois plus grands que ceux du triangle réel, mais on ne peut pas dire que le triangle agrandi est deux fois plus grand que le triangle réel : il contient quatre fois le triangle réel.

Triangle réel



Triangle agrandi

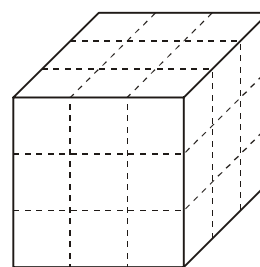


- Réduction à l'échelle 1/3.

Distance réelle en cm	$\xrightarrow{\times \frac{1}{3}}$	Distance sur le dessin en cm
	$\xrightarrow{: 3}$	

Dans le langage courant, on peut dire que la distance sur le dessin est « 3 fois plus petite que la distance réelle ».

Remarque : Sur la figure ci-contre, les arêtes du pavé réduit sont trois fois plus petites que celles du pavé réel, mais on ne peut pas dire que le pavé réduit est trois fois plus petit que le pavé réel : le pavé réel contient 27 pavés réduits.



Pavé réel



Pavé réduit

- Sur les cartes courantes (routières).

Que représente 1 cm sur une carte à l'échelle 1/1 000 000 ?

Distance réelle en cm	$\xrightarrow{\times \frac{1}{1000000}}$	Distance sur la carte en cm
	$\xrightarrow{: 1000000}$	

1 cm sur la carte représente 1 000 000 cm en réalité

1 cm sur la carte représente 10 km en réalité

POINTS DE REPÈRE / MÉTHODES

RECHERCHE D'UNE QUATRIÈME PROPORTIONNELLE

- Utilisation du passage par l'unité.

Exemple

Un coupon d'étoffe mesurant 5 m est vendu 21 €. Quel est le prix d'un coupon de 3 m de cette étoffe ?

Dans ce problème, comme dans beaucoup d'autres, il est sous-entendu que le prix de l'étoffe est proportionnel à sa longueur.

On cherche d'abord le coût d'un mètre puis celui de 3 m. On peut présenter la recherche du prix en utilisant une des deux façons suivantes :

	Longueur d'étoffe	Prix à payer
: 5	5 m	21 €
	1 m	??
× 3	3 m	??

Pour calculer le prix de 3 m, on effectue :

$$\frac{21}{5} \times 3 = 4,2 \times 3 = 12,6.$$

Le prix de 3 m de cette étoffe est 12,60 €.

- Utilisation d'une étape intermédiaire, autre que le passage par l'unité.

Exemple

Dans une recette de gâteau au chocolat, il faut 160 g de chocolat pour 120 g de sucre. Quelle quantité de sucre doit-on utiliser si on dispose de 200 g de chocolat ?

La quantité de sucre est proportionnelle à celle de chocolat. On peut utiliser un tableau pour présenter le problème.

De nombreuses procédures sont possibles.

Chacune d'elle s'appuie sur la recherche d'un diviseur commun à 160 et à 200 : on se pose la question « dans quelle table de multiplication sont à la fois 160 et 200 ? »

160 et 200 sont tous les deux multiples (« dans la table ») de 10, de 20, de 40, ... Voici trois méthodes possibles :

	Quantité de chocolat	Quantité de sucre
: 8	160 g	120 g
	20 g	??
× 10	200 g	??

La quantité cherchée est :
 $(120 \text{ g} : 8) \times 10 = 15 \text{ g} \times 10 = 150 \text{ g}.$
 ou $\frac{120 \text{ g}}{8} \times 10 = 15 \text{ g} \times 10 = 150 \text{ g}.$

	Quantité de chocolat	Quantité de sucre
: 4	160 g	120 g
	40 g	??
× 5	200 g	??

La quantité cherchée est :
 $(120 \text{ g} : 4) \times 5 = 30 \text{ g} \times 5 = 150 \text{ g}.$
 ou $\frac{120 \text{ g}}{4} \times 5 = 30 \text{ g} \times 5 = 150 \text{ g}.$

	Quantité de chocolat	Quantité de sucre
	160 g	120 g
	40 g	??
	200 g	??

On remarque que $200 \text{ g} = 160 \text{ g} + 40 \text{ g}.$
 La quantité cherchée est donc :
 $120 \text{ g} + (120 \text{ g} : 4) = 150 \text{ g}.$

- Passage direct.

Exemple

Dans une recette de gâteau au chocolat, il faut 150 g de chocolat pour 120 g de sucre. Quelle quantité de sucre doit-on utiliser si on dispose de 100 g de chocolat ?

La quantité de sucre est proportionnelle à celle de chocolat. On peut utiliser un tableau pour présenter le problème.

	Quantité de chocolat	Quantité de sucre
	150 g	120 g
× ...	100 g	??

On se pose la question : $150 \times ??? = 100.$

On peut donner la réponse sous forme fractionnaire : $\frac{100}{150}$ ou $\frac{2}{3}.$

100 g représentent les $\frac{2}{3}$ de 150 g.

La quantité de sucre est donc :

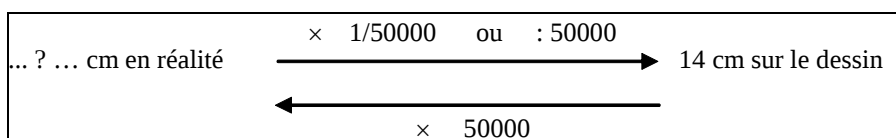
$$120 \text{ g} \times \frac{2}{3} = 80 \text{ g}.$$

PROBLÈMES LIÉS AUX ÉCHELLES

- Utilisation d'une échelle.

Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{50000}$, deux villes sont distantes de 14 cm. Quelle est la distance réelle entre ces deux villes ?

On utilise la définition de l'échelle et on remplace par les données :



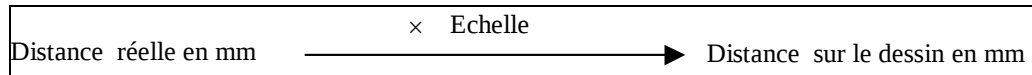
$14 \times 50\,000 = 700\,000$ donc la distance réelle entre les deux villes est de 700 000 cm soit 7 km.

- Calcul d'une échelle.

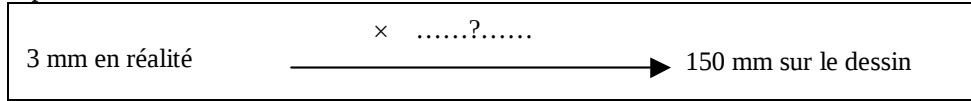
Exemple 1

Sur un dessin, 3 mm en réalité sont représentés par 15 cm. Quelle est l'échelle de ce dessin ? La distance sur le dessin est plus grande que la distance réelle. Ce dessin est un agrandissement. Les longueurs sont exprimées en centimètres et millimètres : on choisit l'unité la plus petite, pour obtenir des calculs sur les entiers et on convertit 15 cm en millimètres : $15 \text{ cm} = 150 \text{ mm}.$

On utilise ensuite la définition de l'échelle :



On remplace par les données :



On cherche donc le nombre qui, multiplié par 3 donne 150. Ce nombre est : $\frac{150}{3} = 50$.

La distance sur le dessin est 50 fois plus grande que la distance réelle. L'échelle du dessin est 50.

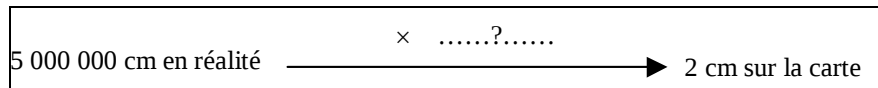
Exemple 2

Sur une carte, 50 km en réalité sont représentés par 2 cm. Quelle est l'échelle de cette carte ?

La distance sur le dessin est plus petite que la distance réelle. Ce dessin est une réduction.

On commence par convertir 50 km en centimètres : 50 km = 5 000 000 cm.

On utilise ensuite la définition de l'échelle et on remplace par les données :



On cherche donc le nombre qui, multiplié par 5 000 000 donne 2. Ce nombre est : $\frac{2}{5\,000\,000} = \frac{1}{2\,500\,000}$.

La distance sur la carte est 2 500 000 fois plus petite que la distance réelle. L'échelle de la carte est $\frac{1}{2\,500\,000}$.

Remarque : L'échelle d'une réduction se donne toujours sous la forme d'une fraction de numérateur 1. Le dénominateur indique alors par quel nombre il faut diviser les distances réelles pour obtenir les distances sur la carte.

VITESSES, DURÉES, DISTANCES

Dans chacun des exemples traités ici, le mouvement est supposé uniforme. Les distances parcourues sont donc proportionnelles aux durées et la vitesse est le coefficient de proportionnalité pour passer des durées aux distances.

Calcul d'une vitesse

Un escargot a parcouru 10 m en 16 min 40 s. Quelle est sa vitesse en m/min ?

Choix des unités

- pour les distances, on peut garder le mètre.
- pour les durées, il vaut mieux utiliser l'unité la plus petite, la seconde :
16 min 40 s = 16 × 60 s + 40 s = 960 s + 40 s = 1000 s.
- la vitesse doit être exprimée en mètres par minute.

On cherche donc le nombre de mètres que parcourt l'escargot en 1 minute soit en 60 secondes.

Durée du parcours	1000 s	60 s
Distance parcourue	10 m	?

$\curvearrowright : 100$

Pour passer de 1000 à 10, on divise par 100 donc on calcule 60 : 100 = 0,6.

L'escargot parcourt 0,6 m en 1 min. Sa vitesse est de **0,6 m/min**.

Calcul d'une distance

Un train se déplace à la vitesse de 160 km/h. Quelle distance parcourt-il en 2 h 36 min ?

La vitesse étant de 160 km/h, on sait que le train parcourt 160 km en 1 h.

On cherche la distance parcourue en 2 heures et 36 minutes.

Calcul de la distance parcourue en 2 heures :

Durée du parcours	Distance parcourue
1 h	160 km
2 h	?

$\times 2$ (sur la durée) $\times 2$ (sur la distance)

En 2 h, le train parcourt 160×2 soit 320 km.
donc en 2 h 36 min, il parcourt $320 + 96$ soit **416 km**.

Calcul de la distance parcourue en 36 minutes :

on rajoute des lignes pour passer mentalement de 60 à 36.

Durée du parcours	Distance parcourue
60 min	160 km
6 min	
36 min	?

$: 10$ (sur la durée) $\times 6$ (sur la distance) $: 10$ (sur la durée) $\times 6$ (sur la distance)

En 36 min, il parcourt : $(160 : 10) \times 6$ soit **96 km**.

Calcul d'une durée

Un piéton marche à la vitesse de 6 km/h. Combien de temps lui faut-il pour traverser un pont long de 200 m ?

La vitesse étant de 6 km/h, on sait que le piéton parcourt 6 km en 1 h.

Choix des unités

- pour les distances, on peut utiliser le mètre. On convertit : 6 km = 6000 m.
- pour les durées : 200 m seront parcourus en moins d'une heure, il vaut mieux utiliser la minute. On convertit : 1 h = 60 min.

: 100	Durée du parcours	60 min	?
	Distance parcourue	6000 m	200 m

Pour passer de 6000 à 60, on divise par 100, donc on divise 200 par 100.

$200 : 100 = 2$ donc ce piéton met **2 min** pour traverser le pont.

EXERCICES

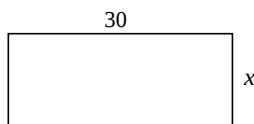
RECONNAÎTRE UNE SITUATION DE PROPORTIONNALITÉ

Dans les exercices 1 à 4, l'élève doit reconnaître une situation de proportionnalité à l'aide de tableaux à remplir ou déjà remplis et issus de situations concrètes (périmètres, aires, vitesse, prix). Le test du double suffira dans les exercices 2 et 3. Pour l'exercice 4, il faudra comparer des quotients. Ces exercices sont à relier aux activités de début de chapitre.

1. Le tableau ci-dessus indique la distance de freinage en fonction de la vitesse. La distance de freinage est-elle proportionnelle à la vitesse ? Justifier.

Vitesse en km/h	50	70	90	110
Distance de freinage en m	15	35	60	85

2. On considère des rectangles dont une dimension mesure 30 cm et dont l'autre dimension, x , est exprimée en cm.



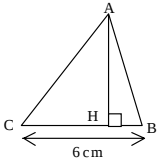
- a) Compléter le tableau ci-dessous :

x (en cm)	1	5	10	15
Aire du rectangle (en cm ²)				
Périmètre du rectangle (en cm)				

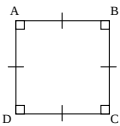
- b) L'aire de ce rectangle est-elle proportionnelle à x ? Justifier la réponse.
c) Le périmètre de ce rectangle est-il proportionnel à x ? Justifier la réponse.

- d) Exprimer l'aire de ce rectangle en fonction de x .
- e) Exprimer le périmètre de ce rectangle en fonction de x .
3. Compléter les tableaux des situations 1, 2, 3, 4, 5. Indiquer pour chaque situation s'il s'agit d'une situation de proportionnalité ou non. Justifier dans chaque cas.

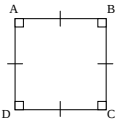
Situation 1

	AH en cm	1	2	10	15
	Aire du triangle ABC en cm^2				

Situation 2

	AB en cm	1	2	10	15
	Aire du carré ABCD en cm^2				

Situation 3

	AB en cm	1	2	10	15
	Périmètre du carré ABCD en cm				

Situation 4

Prix initial en €	100	200	300	400
Prix après une diminution de 20 €				

Situation 5

Prix initial en €	100	200	300	400
Prix après une diminution de 10 %				

4. Sur un catalogue de vente par correspondance, on donne le prix d'une parka en fonction de la taille. Y a-t-il proportionnalité entre le prix et la taille ?

Taille	Prix en euros
96	130
104	145
112	160

5. Un magasin de location de DVD propose les 2 formules suivantes :

Formule A : 3 € par film

Formule B : Abonnement de 30 € pour 12 mois et 1,50 € par film

- a) Jean loue 15 films par an. Quelle est la formule la plus avantageuse pour lui ?
- b) Inès loue 30 films par an. Quelle est la formule la plus avantageuse pour elle ?
- c) Compléter le tableau suivant :

Nombre de film(s) loué(s) en 12 mois	5	10	15	25	30	35	50
Prix payé pour la formule A							
Prix payé pour la formule B							

- d) A partir de combien de locations, la formule B semble-t-elle la plus intéressante ?
- e) Pour quelle formule, le prix payé est-il proportionnel au nombre de films ? Justifier la réponse.

UTILISER LE COEFFICIENT DE PROPORTIONNALITÉ

Dans les exercices suivants, le coefficient de proportionnalité est donné, l'élève doit se poser la question de l'opération à effectuer.

6. Du tissu d'ameublement est vendu 9 € le mètre.

- a) Compléter : dans cette situation,..... est proportionnel(le) à
- b) Compléter le tableau de proportionnalité suivant :

Longueur	1 m	1,2 m	0,6 m	2,5 m		
Prix payé					20,7 €	31,5 €

7. Des pommes sont vendues 2,4 € le kg. Compléter le tableau suivant en indiquant le calcul effectué :

Quantité de pommes	Prix payé
1 kg	
3 kg	
3,1 kg	
300 g	
	12 €
	8,4 €
	1,5 €

8. Des asperges sont vendues 6 € le kg.

- a) Calculer le prix de 1,2 kg de ces asperges.
- b) Calculer le prix de 700 g de ces asperges.
- c) Calculer la quantité d'asperges achetées avec 8,1 €.
- d) Calculer la quantité d'asperges achetées avec 5,1 €.

Pour les exercices 9 et 10, le tableau peut être rempli en utilisant les propriétés de linéarité. Le coefficient de proportionnalité intervient ensuite : on demande son calcul et son interprétation dans la situation étudiée. Il est utilisé dans deux dernières questions, présentées en langue naturelle. On veut éviter la perte de sens qui peut apparaître lors d'exercices trop systématiques utilisant des tableaux.

9. On considère le tableau de proportionnalité suivant :

Quantité de cerises	0,25 kg	0,5 kg	1 kg	1,25 kg	1,5 kg	2 kg	2,5 kg
Prix					5,7 €		

- a) Le compléter.
- b) Quel est le coefficient permettant de passer de la masse au prix ?
- c) Que représente ce coefficient de proportionnalité ?
- d) Calculer le prix de 350 g de ces cerises.
- e) Calculer la quantité de cerises achetée avec 4,56 € puis avec 2,85 €.

10. On considère le tableau de proportionnalité suivant :

Quantité de mirabelles	0,25 kg	0,5 kg	0,75 kg	1 kg	2,5 kg	3 kg	3,5 kg
Prix					6,5 €		

- a) Le compléter.
- b) Quel est le coefficient permettant de passer de la masse au prix ?
- c) Que représente ce coefficient de proportionnalité ?
- d) Calculer le prix de 650 g de ces mirabelles.
- e) Calculer la quantité de mirabelles achetée avec 3,64 € puis avec 2,08 €.

Dans l'exercice 11, on continue à travailler sous des formes diverses l'utilisation du coefficient de proportionnalité entre deux grandeurs.

11. Sur les pots de peinture en bâtiment, on peut lire que 2,5 L de peinture couvrent 26 m² de mur.

- a) Quelles sont les grandeurs proportionnelles ?
- b) Que représente le coefficient de proportionnalité qui permet d'obtenir la surface connaissant la quantité de peinture ?

- c) Calculer ce coefficient et compléter le tableau ci-dessous.

Quantité de peinture	2,5 L	3,5 L	7,5 L		
Surface peinte	26 m ²			156 m ²	208 m ²

Dans l'exercice 12, on fait le lien avec les proportions.

12. On veut réaliser un cocktail de fruits en mélangeant 35 cL de jus d'oranges et 10 cL de jus de pamplemousse.

- a) Quelle quantité de boisson obtient-on ?
b) Compléter le tableau suivant :

Quantité de boisson en cL				108	135
Quantité de jus d'orange en cL	35	42			
Quantité de jus de pamplemousse en cL			12		

- c) Quelle fraction du mélange représente la quantité de jus d'orange ?
d) Quelle fraction du mélange représente la quantité de jus de pamplemousse ?

La proportionnalité est abordée sous un autre angle dans les trois exercices suivants. Dans chaque exercice, le mot « proportion » est employé. Un lien est à faire entre « proportion » et une phrase du type « la grandeur A représente .../... de la grandeur B ». Dans l'exercice 13, « la masse de cacao représente 2/25 de la masse du dessert » doit aussi signifier pour l'élève que « la masse de dessert est 12,5 fois plus importante que la masse de cacao ». On travaille le sens des deux coefficients de proportionnalité.

13. Lors de la fabrication de dessert chocolaté, on met 2 kg de cacao pour 25 kg de crème dessert.
a) Quelles sont les grandeurs proportionnelles ?
b) Quelle est la proportion de cacao dans cette crème dessert ?
c) Quelle quantité de cacao faut-il prévoir pour fabriquer 10 kg de cette crème ? 300 kg ?
d) Quelle quantité de crème peut-on fabriquer avec 3 tonnes de cacao ?
14. Le temps autorisé pour les publicités sur les chaînes de télévision est en moyenne de 12 min par heure de diffusion.
a) Quelle est la proportion du temps passé devant de la publicité, pour une heure de diffusion ?
b) Combien de temps voyons-nous de la publicité lorsque nous regardons 3 h de télévision ?
15. Dans la classe bleue du collège Mozart, il y a 10 filles pour 25 élèves, dans la classe rouge, 12 filles et 16 garçons.
a) Quelle est la proportion de filles par rapport au nombre d'élèves dans chacune des classes ?
b) Dans quelle classe, la proportion de filles est-elle la plus grande ?

QUATRIÈME PROPORTIONNELLE

La compréhension des schémas suivants sera une aide pour la résolution des problèmes de proportionnalité pour lesquels le passage par l'unité s'avère efficace. Le passage de 0,4 m à 1 m en divisant par 0,4 est un passage délicat (certains élèves n'ont pas encore conscience que la division peut agrandir). Pour la question 16 e, il est intéressant de voir avec les élèves les deux possibilités pour trouver le prix de 1 kg, à savoir diviser par 0,5 ou multiplier par 2.

16. Compléter les schémas de proportionnalité suivants :

a) <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Longueur</th> <th>Prix</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>→</td> <td>5 m</td> <td>23 €</td> </tr> <tr> <td>→</td> <td>1 m</td> <td>....</td> </tr> <tr> <td>→</td> <td>4 m</td> <td>....</td> </tr> </tbody> </table>		Longueur	Prix	→	5 m	23 €	→	1 m		→	4 m		b) <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Masse</th> <th>Prix</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>→</td> <td>5 kg</td> <td>12 €</td> </tr> <tr> <td>→</td> <td>1 kg</td> <td>....</td> </tr> <tr> <td>→</td> <td>3,2 kg</td> <td>....</td> </tr> </tbody> </table>		Masse	Prix	→	5 kg	12 €	→	1 kg		→	3,2 kg		c) <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Longueur</th> <th>Prix</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>→</td> <td>1,2 m</td> <td>15 €</td> </tr> <tr> <td>→</td> <td>1 m</td> <td>....</td> </tr> <tr> <td>→</td> <td>3 m</td> <td>....</td> </tr> </tbody> </table>		Longueur	Prix	→	1,2 m	15 €	→	1 m		→	3 m	
	Longueur	Prix																																				
→	5 m	23 €																																				
→	1 m																																					
→	4 m																																					
	Masse	Prix																																				
→	5 kg	12 €																																				
→	1 kg																																					
→	3,2 kg																																					
	Longueur	Prix																																				
→	1,2 m	15 €																																				
→	1 m																																					
→	3 m																																					
d) <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Longueur</th> <th>Prix</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>→</td> <td>0,4 m</td> <td>3 €</td> </tr> <tr> <td>→</td> <td>1 m</td> <td>....</td> </tr> </tbody> </table>		Longueur	Prix	→	0,4 m	3 €	→	1 m		e) <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Masse</th> <th>Prix</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>→</td> <td>0,5 kg</td> <td>1,2 €</td> </tr> <tr> <td>→</td> <td>1 kg</td> <td>....</td> </tr> <tr> <td>→</td> <td>2,2 kg</td> <td>....</td> </tr> </tbody> </table>		Masse	Prix	→	0,5 kg	1,2 €	→	1 kg		→	2,2 kg		f) <table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Longueur</th> <th>Prix</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>→</td> <td>0,7 m</td> <td>1,05 €</td> </tr> <tr> <td>→</td> <td>1 m</td> <td>....</td> </tr> <tr> <td>→</td> <td>2,3 m</td> <td>....</td> </tr> </tbody> </table>		Longueur	Prix	→	0,7 m	1,05 €	→	1 m		→	2,3 m				
	Longueur	Prix																																				
→	0,4 m	3 €																																				
→	1 m																																					
	Masse	Prix																																				
→	0,5 kg	1,2 €																																				
→	1 kg																																					
→	2,2 kg																																					
	Longueur	Prix																																				
→	0,7 m	1,05 €																																				
→	1 m																																					
→	2,3 m																																					

17. a) Compléter les schémas de proportionnalité suivants :

	Quantité d'essence	Distance parcourue
	36 L	450 km
		
		100 km

	Quantité d'essence	Distance parcourue
	12 L	160 km
		
		100 km

	Quantité d'essence	Distance parcourue
	3 L	40 km
		
		100 km

b) Compléter de même en employant des opérateurs décimaux ou fractionnaires :

	Quantité écoulee	Durée
	12 L	9 min
	18 L	

	Quantité écoulee	Durée
	15 L	8 min
	25 L	

	Quantité écoulee	Durée
	20 L	6 min
	11 L	

Dans les exercices 18 à 20, l'élève pourra utiliser des schémas analogues à ceux des exercices précédents. On cherchera à comparer les différentes procédures. L'élève devra rencontrer des opérateurs entiers, décimaux ou fractionnaires.

18. Résoudre les problèmes suivants :

- Pour 4 ananas, on a payé 9,60 €. Combien paiera-t-on pour 9 ananas ?
- Une douzaine d'œufs coûte 2,4 €. Quel est le prix de 7 œufs ?
- Sept manuels scolaires identiques sont vendus 86,10 €. Calculer le prix de 3 de ces manuels.
- Voici une recette de pizza pour 4 personnes : 350 g de pâte à pain, 150 g d'olives, 4 tomates, 200 g de mozarella, 4 filets d'anchois. Calculer les quantités nécessaires pour 5 personnes.
- 4 crayons de papier coûtent 1,40 €. Combien coûtent 7 crayons de papier identiques ?

19. Résoudre les problèmes suivants :

- 4 petits pains coûtent 3,20 €. Trouve le prix de 36 petits pains identiques.
- 1,5 kg de raisins coûtent 3,60 €. Calculer le prix de 2 kg de ces raisins.
- Pour faire de la confiture d'abricots, Nina utilise 4 kg de sucre pour 6 kg d'abricots. Quelle quantité de sucre doit-elle prévoir si elle dispose de 9 kg d'abricots ?
- Dans une entreprise, les salariés perçoivent, à Noël, une prime proportionnelle à leur salaire. Arthur a un salaire de 1600 € et il a perçu 720 € de prime. Quelle sera la prime de Bertrand sachant que son salaire est de 2100 € ?
- Avec 4 kg de blé, on fabrique 3 kg de farine. Quelle quantité de farine obtient-on avec 60 kg de blé ?
- Avec 4 kg de blé, on fabrique 3 kg de farine. Quelle quantité de blé a été nécessaire pour fabriquer 150 kg de farine ?
- Une voiture a consommé 18 litres d'essence pour 250 km. En admettant que la consommation est proportionnelle au nombre de km, trouver la consommation de cette voiture aux 100 km.
- Même exercice que g) avec 6 litres pour 120 km.
- Six boîtes identiques coûtent 15 €. Combien de boîtes peut-on acheter pour 35 € ?
- Un pot de 800 g de miel est vendu 4,80 €. Calculer le prix de 1 kg de ce miel.
- A la station d'essence, 15 L d'essence coûtent 16,20 €. Calculer le prix de 10 L de cette essence.

On demandera pour chaque question s'il est plus facile de donner le résultat en minutes ou en secondes.

20. Une imprimante imprime 12 pages par minute.

- Combien de secondes met-elle pour imprimer une page ?
- En combien de temps pourrai-je imprimer un document qui contient 5 pages ?
- En combien de temps pourrai-je imprimer un document qui contient 24 pages ?
- En combien de temps pourrai-je imprimer un document qui contient 21 pages ?
- La même imprimante imprime depuis un quart d'heure exactement et s'arrête enfin. Combien de pages ai-je imprimées ?
- Elle se remet à fonctionner encore 32 secondes puis tombe en panne. Je lui avais demandé d'imprimer 8 pages. Ai-je imprimé toutes mes pages ?

PETITS PROBLÈMES

Comme l'élève a déjà pu le faire à l'école primaire, les exercices 21 à 22 l'encouragent à utiliser des raisonnements simples, liés aux propriétés de linéarité. Les opérations à utiliser sont l'addition et la multiplication ou la division par des nombres entiers simples.

21. Les avocats sont vendus à la pièce. Une personne a acheté cinq avocats ; elle a payé 4,50 €. Une autre personne a acheté trois avocats ; elle a payé 2,70 €. Moi, j'achète huit de ces avocats. Combien vais-je payer ?

22. 15 L de gazole coûtent 14,40 €. Compléter le tableau suivant en effectuant les calculs mentalement :

.....	15	45	4,5	30	34,5
.....	14,40				

23. Des croissants sont tous vendus au même prix. Douze croissants coûtent 10,20 €. Calculer le prix de 6 croissants, de 4 croissants et de 10 croissants.

Pour l'exercice 24, on veut amener l'élève à choisir la méthode la plus simple adaptée à chaque question. Si on veut résoudre l'ensemble des questions, la connaissance du prix d'un petit pain peut être intéressante, mais pour chaque item, l'utilisation de la linéarité permet de conclure plus rapidement. On comparera les méthodes au sein de la classe.

24. Comparaison de méthodes

Virginie veut acheter cinq petits pains. Elle ne se souvient plus du prix d'un petit pain mais les deux élèves, devant elle, en achètent aussi. Le premier paie 1,70 € pour 2 petits pains et le second 2,55 € pour trois petits pains.

- Combien paiera-t-elle ses cinq petits pains ?
- Combien coûtent 10 petits pains ?
- Combien coûtent 4 petits pains ?
- Combien coûtent 30 petits pains ?

PRIX A L'UNITÉ

Les exercices de ce paragraphe permettent plus particulièrement de rechercher le prix à l'unité. Différentes procédures seront envisagées. L'exercice 25 permet de revenir sur les deux opérations « $\times 0,6$ » et « $: 0,6$ » qui sont souvent source de confusions.

25. Compléter les schémas de proportionnalité suivants :

$\times 6$	Quantité 0,6 kg	Coût 3 €
$\times 0,6$	Quantité 0,6 kg	Coût 3 €
$: 0,6$	Quantité 0,6 kg	Coût 3 €

26.

- Au rayon charcuterie, Elise a payé 3 € pour 0,4 kg de saucisson. Calculer le prix d'un kg de ce saucisson.
- Au rayon fruits et légumes, Frédéric a payé 1,95 € pour 1,3 kg de pommes. Quel est le prix de 1 kg de ces pommes ?

Dans les exercices 27 et 28, on travaille le lien entre prix à l'unité, quantité et prix payé. Il peut être intéressant d'imposer à l'élève d'utiliser pour chaque cas l'unité la plus grande, afin de l'entraîner à raisonner avec des quantités décimales, inférieures à l'unité.

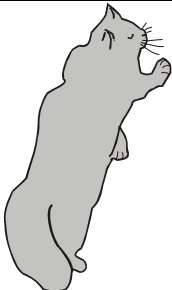
27. TOUT À UN EURO !

Le gérant d'un magasin veut organiser une foire à l'euro. Il décide de choisir une série d'articles et arrondit les prix pour tout vendre à 1 euro. Aidez-le à compléter le tableau suivant pour préparer son dépliant publicitaire :

Article	Prix de vente	Prix de référence
Dégivrant pare-brise 300 ml.	1 €	prix au litre :
Lot de ...paires de chaussettes tige courte, 65% coton, 35% polyester, du 35/38 au 43/46.	1 €	prix de la paire de chaussettes : 0,50 €.
Lot de 15 mini-stylos encre gel 3 coloris.	1 €	prix d'un mini-stylo : ...€.

Sardines ou thon en gelée pour chat 3 × 170 g.	1 €	prix du kilo : €.
Fromage ail et fines herbes 70% MG, 6 portions dont une gratuite poids total : g.	1 €	prix du kilo : 10 €.
Lot de 2 boîtes de cassoulet 2 × 800 g.	1 €	prix du kilo : €.

28. Compléter les étiquettes suivantes :

Bouchées pour chat adulte <i>Matouravi</i> au poulet ou au saumon le lot de 3 boîtes de g. 4,95 €. soit le kg : 15 €.			100 % pur jus pressé « Nectar Fruit ». la brique de 1,5 litre. 2,70 €. soit le litre
Kouglopf pur beurre, origine France la pièce de 225 g soit le kg 4,80 €		Eau de toilette <i>Florarêve</i> le flacon de 75 ml 16,20 €. soit le litre	

Une difficulté supplémentaire dans l'exercice 29 où il faut, en plus, gérer les « 15% gratuit ».

29. Offre promotionnelle ! Glace « Icemount », différents parfums au choix : 1 litre + 15% gratuit pour 4,14 €. A combien revient réellement le litre de glace ?

PROBLÈMES DIVERS

30. Un Jumbo-jet a une autonomie maximale de 12 heures. Ses réservoirs peuvent contenir 180 000 litres. Quelle est la quantité de carburant consommée pour les vols suivants :

- Paris – Cotonou (Bénin), durée 7 h.
- Paris – Le Caire, durée 4 h 30 min.
- Paris – Pékin, durée 10 h 50 min.

Pour l'exercice 31, deux possibilités : raisonner avec comme unité le kg et amener l'élève à écrire $750 \times 0,125$ ou raisonner avec les grammes et par linéarité, écrire le résultat sous la forme $((750 : 2) : 2) : 2$ pour ensuite remarquer que multiplier par 0,125 revient à diviser par 8, en s'appuyant sur les égalités $8 \times 125 = 1000$ ou $8 \times 0,125 = 1$.

31. Irem de Rennes

Pour chacune des questions suivantes on donnera la réponse qui semble correcte (valeur exacte ou valeur approchée)

- 1 kg de chocolat contient 750 g de cacao. Quelle est la masse de cacao contenue dans une tablette de 125 g faite avec le même chocolat ?
- Une voiture a consommé 43 litres d'essence pour parcourir 768 km. Quelle a été sa consommation moyenne aux 100 km ?

Dans l'exercice 32, l'élève doit d'abord comprendre que les dimensions sur la photo tirée sont proportionnelles aux dimensions sur le négatif.

32. Irem de Rennes

On dit parfois une pellicule "24 × 36". Cela veut dire que le négatif d'une photo est un rectangle de largeur 24 mm et de longueur 36 mm. La photo, une fois tirée, est un rectangle de longueur 9 cm. Quelle est sa largeur ?

Les exercices suivants permettent de rencontrer des situations où les grandeurs envisagées ne sont pas proportionnelles.

33. Un nénuphar met cinquante jours pour couvrir la moitié d'un bassin. On sait que ce nénuphar double sa surface tous les jours. Combien de jours lui faut-il, au total, pour recouvrir tout le bassin ?
34. Un magasin annonce : un tee-shirt 9 €, 3 tee-shirts 21 €. Combien paiera-t-on pour l'achat de 2 tee-shirts ? De 4 tee-shirts ?
35. Pour la location d'une voiture, on s'adresse à deux sociétés dont voici les tarifs :
Société A : 45 € au départ auxquels s'ajoute une somme de 0,40 € par km.
Société B : 1,10 € par km. Trouver le nombre de km que l'on peut parcourir avec 100 €, suivant la société choisie.

ÉCHELLES

Utilisation de l'opérateur « échelle » pour calculer des dimensions manquantes. On peut conseiller, pour chaque cas, de se reporter au paragraphe « Points de repère ». Attention aux changements d'unités. On pourra utiliser un schéma du type suivant :

..... mm en réalité $\xrightarrow{\times \text{ Echelle}}$ mm sur le dessin

36. Compléter les tableaux ci-dessous :

Échelle 10

Distance réelle	Distance sur le dessin
2 mm	
	15 cm

Échelle $\frac{1}{6}$

Distance réelle	Distance sur le dessin
3 cm	
	12 cm

Échelle 100

Distance réelle	Distance sur le dessin
1 mm	
	5 cm

Échelle $\frac{1}{1000}$

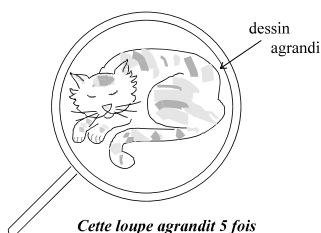
Distance réelle	Distance sur le dessin
5 m	
	1,2 cm

Dans l'exercice 37, application concrète de l'échelle, en passant par le registre géométrique.

37. a) Construire un triangle ABC tel que : CA = 5,7 cm, CB = 6 cm et AB = 7,5 cm.
b) Dessiner ce triangle à l'échelle 2.
c) Dessiner ce triangle à l'échelle $\frac{1}{3}$.
38. Un rectangle a comme dimensions 7 cm et 1,4 mm. Quelles sont ses dimensions si on le représente à l'échelle 2 ?
39. Un rectangle a comme dimensions 2,5 cm et 13 cm sur un dessin à l'échelle 4. Quelles sont les dimensions réelles de ce rectangle ?
40. Dans un livre de Sciences Naturelles, on a représenté des insectes à l'échelle 10.
a) Des insectes mesurent dans la réalité : 11 mm ; 2 mm ; 1,8 mm.
Combien mesurent leurs représentations sur le livre ?
b) Le dessin d'un insecte sur le livre mesure 3 cm. Combien mesure cet insecte dans la réalité ?
41. Une automobile miniature est à l'échelle $\frac{1}{43}$. Elle mesure 6 cm de long. Quelle est la longueur réelle de cette automobile ?

L'exercice 42 se veut ludique, même s'il n'est pas très réaliste ...

42.



Le dessin "en vraie grandeur" tient-il dans ce petit carré ?

Prolongement à la notion d'aire dans les exercices 43 et 44. Il permet d'étudier l'effet d'une réduction sur une aire.

43. Dessiner le plan d'une chambre rectangulaire à l'échelle $\frac{1}{100}$, sachant que sa longueur est de 4 m et sa largeur de 3 m. Quelle est l'aire réelle de cette chambre ? Quelle est l'aire de cette chambre sur le dessin ? Remarque ?

44. L'aire d'un rectangle mesure 15 m², trouver l'aire de ce rectangle agrandi à l'échelle 2.

45. L'échelle d'une carte est $\frac{1}{300\,000}$. Compléter :

1 cm sur la carte $\longrightarrow$ cm en réalité.

1 cm sur la carte $\longrightarrow$ km en réalité.

Distance sur la carte	Distance réelle
	18 km
12 cm	

46. L'échelle d'une carte est $\frac{1}{2\,500\,000}$. Compléter :

1 cm sur la carte $\longrightarrow$ cm en réalité.

1 cm sur la carte $\longrightarrow$ km en réalité.

Distance sur la carte	Distance réelle
	100 km
15 cm	

47. Sur un plan à l'échelle $\frac{1}{500\,000}$, deux villes sont distantes de 4 cm. Calculer la distance réelle entre ces deux villes.

48. La distance entre Colmar et Strasbourg est environ 65 km. Calculer la distance entre ces deux villes sur une carte à l'échelle $\frac{1}{250\,000}$

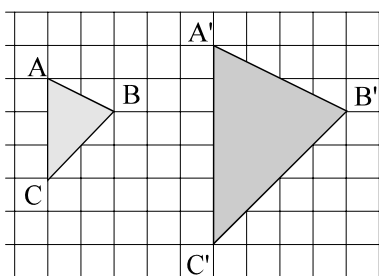
49. Sur cette carte à l'échelle $\frac{1}{10\,000}$, deux endroits sont distants de 14 cm. Quelle est la distance réelle qui les sépare ?

Dans l'exercice 50, il faut commencer par se poser la question : s'agit-il d'un agrandissement ou d'une réduction ?

50. Un terrain est représenté sur un plan : 1 cm sur le plan vaut 500 cm en réalité. Quelle est l'échelle de ce plan ?

L'exercice 51 permet de passer par le registre géométrique. La consigne est clairement donnée. On visualise ainsi concrètement un agrandissement.

51. Le triangle A'B'C' est un agrandissement du triangle ABC. Quelle est l'échelle du dessin agrandi ?



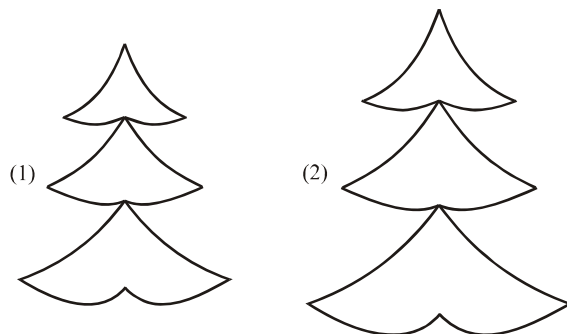
Exercice 52 : passage par le registre géométrique. Pas de données de longueurs précises, mais les opérateurs proposés permettent de lever toute ambiguïté. L'échelle attendue est $\frac{5}{4}$.

52. a) Par quel nombre ai-je multiplié toutes les dimensions du dessin (1) pour obtenir le dessin (2) ?

Propositions

$$\times 2 ; \quad \times 0,5 ; \quad \times 1,8.$$

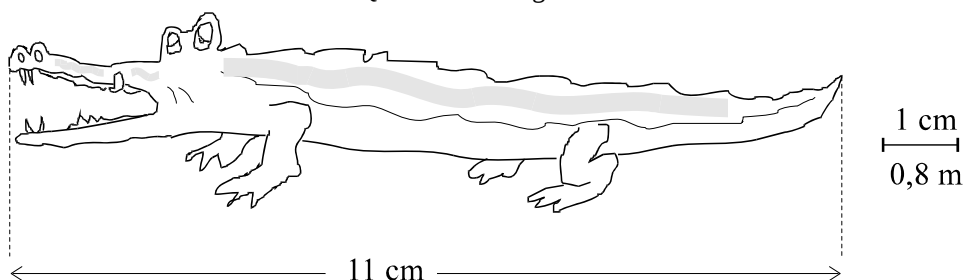
$$\times \frac{1}{3} ; \quad \times \frac{5}{4} ; \quad \times \frac{5}{3}.$$



- b) Quelle est alors l'échelle utilisée pour passer du dessin (1) au dessin (2) ?

Exercice 53 : Situation que l'on trouve lors de la lecture de cartes routières, par exemple.

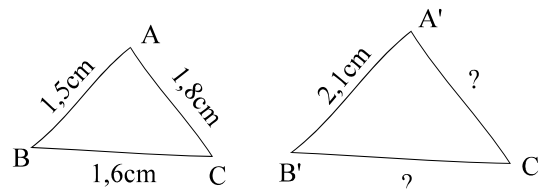
53. Quelle est l'échelle du dessin ci-dessous ? Quelle est la longueur réelle du crocodile ?



Exercice 54 : Échelle donnée par un nombre décimal. On peut proposer de construire les deux triangles en vraie grandeur, à titre de contrôle, et faire mesurer les angles.

54. On a fait un schéma à main levée du triangle ABC. On veut en réaliser un agrandissement. Pour cela, on a commencé le schéma du triangle agrandi A'B'C'

- a) Trouver l'échelle de l'agrandissement de ABC à A'B'C'.
b) Trouver les dimensions manquantes du triangle A'B'C', puis le construire en vraie grandeur.



DURÉES – DISTANCES – VITESSES

L'objectif de l'exercice suivant est de renforcer l'idée de proportionnalité entre les durées exprimées en heures et les mêmes exprimées en minutes, que dans tous les cas on passe de l'une à l'autre en multipliant ou en divisant par 60, que la durée soit écrite sous forme entière, décimale ou fractionnaire. On renforce aussi l'idée que le résultat d'une division n'est pas forcément un nombre entier ou un nombre décimal. Dans les exercices suivants, on continue à travailler les différents registres d'écritures de durées.

55. Compléter le tableau ci-dessous :

Durées en heures	2		0,3		$\frac{4}{5}$	
Durées en minutes		120		12		90

56. a) Convertir en heures : 150 min ; 50 min ; 24 min ; 1 s ; 30 s.
b) Convertir en minutes : 1,1 h ; $\frac{3}{4}$ h ; 0,2 h ; 1 s ; 30 s.

57. Compléter le tableau ci-dessous, sachant que certaines durées ne peuvent pas être écrites sous forme décimale :

Durées en fractions d'heure	$\frac{2}{5}$			$\frac{2}{3}$	
-----------------------------	---------------	--	--	---------------	--

Durées en heures décimales		0,75			
Durées en minutes			36		10

58. a) Écrire en fractions d'heures et en heures décimales lorsque c'est possible :
 40 min ; 48 min ; 30 min ; 15 min ; 5 min.

b) Écrire en minutes : 0,7 h ; $\frac{7}{12}$ h ; 0,75 h.

59. Compléter le tableau ci-dessous, sachant que certaines durées ne peuvent pas être écrites sous forme décimale :

Durées écrites sous la forme de la somme d'un nombre entier d'heures et d'une fraction d'heure inférieure à 1	$1 + \frac{1}{5}$				
Durées en fractions d'heure				$\frac{7}{3}$	
Durées en heures décimales		2,75	2,50		1,25

Dans les exercices suivants, on pourra utiliser les méthodes exposées dans « Points de repère ». Le choix de l'unité sera discuté en classe. Il est intéressant d'envisager la résolution de certains problèmes de plusieurs façons et de comparer.

60. A la vitesse moyenne de 240 km/h, calculer la distance parcourue en :

a) 2h 20 min ; b) 30 s.

61. Une voiture roule à la vitesse moyenne de 90 km/h.

a) Calculer la distance parcourue en 4 h, en 50 min, en 1 s, en 2 h 10 min.
 b) Calculer la durée d'un parcours de 540 km, 120 km et 54 km, 100 m.

62. Une voiture roule à la vitesse moyenne de 120 km/h.

a) Calculer la distance parcourue en 4 min, en 24 min, en 3 h 15 min et en 10 s.
 b) Calculer la durée d'un parcours de 45 km, 60 km, 100 m.

63. Une voiture roule à la vitesse moyenne de 80 km/h.

a) Calculer la distance parcourue en 45 min, en 3 h 15 min et en 10 min.
 b) Calculer la durée d'un parcours de 120 km, 45 km, 60 km et 20 km.

64. Calculer les vitesses des mobiles suivants, en km/h :

a) Une voiture parcourant 160 km en 1 h 20 min.
 b) Un train parcourant 400 m en 8 s.

65. Trouver, en km/h, les vitesses correspondantes :

a) Un sprinter qui parcourt 100 m en 10 s ; b) Une voiture qui parcourt 100 km en 1 h 20 min.
 c) Un cycliste qui parcourt 21 km en 36 min ; d) Un coureur qui parcourt 14 km en 1h 10 min.

Mêmes objectifs dans l'exercice 66 avec, en plus, un travail sur les différences de durées.

66. Compléter le tableau ci-dessous :

distance en km	105	5		120
heure de départ	7 h 10	8 h 55	6 h 45	9 h 35
heure d'arrivée	8 h 40		7 h 30	
durée du trajet				
vitesse moyenne en km/h		20	120	48

CALCULS À ENTRETENIR

Types de calcul	Objectifs, méthodes, commentaires
7% de 300, 11% de 500.	Comprendre que, dans le premier cas, le calcul revient à 7×3 et dans le deuxième à 11×5 . Ceci peut être relié à la proportionnalité.
7% de 110, 20% de 120.	Technique de calcul à entretenir.
120 € ↓ 20% Prix final ? 90 € ↑ 30% Prix final ?	Pour que ces objectifs soient atteints, il est important de les travailler régulièrement.
Écrire $\frac{9}{15}$ sous forme de pourcentage. De 300 à 303, augmentation de ... %.	On travaille le passage d'une fraction à une fraction de dénominateur 100 et la compréhension de la phrase « pourcentage d'augmentation ». On peut envisager, pour le deuxième calcul, un raisonnement du type : le pourcentage d'augmentation est de $\frac{3}{300}$ soit $\frac{1}{100}$ ou 1%.
Conversions de durées : 24 min en heure. 1,1 h en h min. $\frac{2}{3}$ h en min $\frac{7}{3}$ h en h min. 400 min en h min.	Il est intéressant de voir régulièrement ce genre de calculs : ils permettent d'utiliser des simplifications de fractions dans un autre objectif que celui habituellement envisagé. Pour 24 min, plusieurs réponses apparaissent : $\frac{4}{10}$ h ou $\frac{2}{5}$ h ou 0,4 h.
Compléter des schémas du type : $6 \xrightarrow{\times \dots} 9$ $8 \xrightarrow{\times \dots} 6$ $3 \xrightarrow{\times \dots} 4$ $10 \xrightarrow{\times \dots} 12$ $24 \xrightarrow{\times \dots} 4$	Savoir compléter ce genre de schémas est fondamental pour les problèmes liés à la proportionnalité. On acceptera toutes les réponses possibles et on discutera de chacune d'elles. Au départ, les élèves cherchent des nombres décimaux. Ainsi, pour le premier schéma la solution 1,5 apparaît assez naturellement. Il faut alors faire le lien avec $\frac{3}{2}$. « 9, c'est une fois 6 et la moitié de 6 » est une première approche. Le nombre qui, multiplié par 6, donne 9 est le quotient de 9 par 6, à savoir $\frac{9}{6}$, qui, simplifié, donne $\frac{3}{2}$. Pour le second, le lien est de nouveau fait entre $3/4$, $6/8$ et 0,75. Le troisième offre comme particularité de n'avoir de solution qu'un nombre en écriture fractionnaire. Après avoir compris que trouver le nombre en écriture fractionnaire est une technique finalement simple, certains élèves s'arrêtent dès l'obtention de cette écriture : ainsi, ils auront tendance à proposer $\frac{12}{10}$ pour le quatrième calcul. A nous de répertorier les autres réponses dans la classe pour les convaincre que 1,2 est une solution meilleure. De même, pour le dernier calcul, $\frac{1}{4}$ ou 0,25 seront préférés à la solution $\frac{4}{24}$. Il est cependant important de préciser que la solution $\frac{4}{24}$ est juste !
Recherche d'une quatrième proportionnelle : 600 g coûtent 1,5 €. g coûtent g coûtent 6 m coûtent 15 €. 4 m coûtent	On variera les cas et on veillera à récolter toutes les procédures possibles, d'en discuter avant de parler d'une éventuelle procédure experte. C'est la fréquence de rencontre de telles situations qui permettra à l'élève de progresser.
Mouvement uniforme : 40 km → 60 min. ... km → 45 min. 60 km → 40 min. ... km → 60 min.	Les stratégies utilisées sont souvent différentes suivant les élèves et il est intéressant, lors de la correction, de prendre en compte chacune d'elles. Ainsi, pour le premier cas, certains élèves vont chercher combien de km en 30 min, puis en 15 min et enfin en 45 min. Il faudra comparer cette méthode à celle qui consiste à voir 45 min comme $3/4$ de 60 min. De même, pour le deuxième cas, une méthode consiste à chercher d'abord le nombre de km en 10 min. Ainsi, on divise par 4 puis on multiplie par 6. On multiplie donc par $6/4$ ou $3/2$ ou 1,5.

CHAPITRE 7

TRIANGLE ET CERCLE CIRCONSCRIT

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Réviser la construction d'un triangle connaissant :
 - o la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents.
 - o les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés.
 - o les longueurs des trois côtés.
- Connaître et utiliser l'inégalité triangulaire.
- Connaître et savoir utiliser la définition de la médiatrice d'un segment.
- Connaître et savoir utiliser la propriété caractéristique d'un point de la médiatrice d'un segment.
- Construire le cercle circonscrit à un triangle.

REPÈRES POUR LE CONTENU DU COURS

- Inégalité triangulaire.
- Alignement.
- Médiatrice d'un segment.
- Cercle circonscrit à un triangle.

ACTIVITÉ

ACTIVITÉ 1 : INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

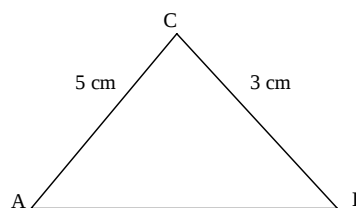
Construire, si possible, le triangle ci-contre pour :

- a) $AB = 7 \text{ cm}$; b) $AB = 5,5 \text{ cm}$; c) $AB = 8 \text{ cm}$; d) $AB = 8,1 \text{ cm}$.
 e) $AB = 4,2 \text{ cm}$; f) $AB = 8,5 \text{ cm}$; g) $AB = 2 \text{ cm}$; h) $AB = 1,8 \text{ cm}$.

Peut-on augmenter AB autant que l'on veut ?

Peut-on diminuer AB autant que l'on veut ?

Écrire la (ou les) conditions pour que l'on puisse construire le triangle ABC .



Objectifs et commentaires

- Savoir reconnaître si la construction d'un triangle est possible ou non.
- Savoir justifier l'alignement de trois points.

La première partie de l'activité amène l'élève à s'interroger sur la possibilité ou non de construire un triangle ABC , connaissant les longueurs de ses côtés. Il est important de faire, avec la classe, un bilan des différentes remarques : pour certains élèves, la construction du triangle dont les côtés mesurent 3 cm, 5 cm et 8 cm est possible, pour d'autres non. Il s'en suit un débat intéressant. On émet alors des conjectures et c'est au professeur de préciser que les propriétés (inégalité triangulaire, condition d'alignement de trois points) sur lesquelles le travail va être effectué sont admises.

ACTIVITÉ 2 : DES CERCLES ET DES POINTS

1) Avec deux points

- a) Tracer un segment $[AB]$.
 b) Tracer cinq cercles passant à la fois par les points A et B en marquant précisément leurs centres.
 Comment appelle-t-on la ligne sur laquelle sont situés ces centres ?

2) Avec trois points

- a) Sur une autre figure, tracer deux segments $[CD]$ et $[DE]$.
 b) Tracer deux cercles passant par les points C et D .
 c) Tracer deux cercles passant par les points D et E .
 d) Tracer si possible des cercles passant à la fois par les trois points C , D et E .
 e) Comment obtient-on le centre d'un tel cercle ?

3) Avec quatre points

- a) Sur une nouvelle figure, marquer quatre points F , G , H , I non alignés trois à trois.
 b) Tracer si possible un cercle passant à la fois par les points F , G , H , I .

Objectifs et commentaires

- Revoir la caractérisation de la médiatrice d'un segment à l'aide de l'équidistance, déjà rencontrée en 6^{ème}.
- Faire le lien entre centre d'un cercle passant par les points A et B et appartenance de ce centre à la médiatrice du segment $[AB]$.
- Découvrir le cercle circonscrit à un triangle.

Cette activité a pour premier objectif de mobiliser les connaissances vues en classe de sixième, à travers des problèmes de construction. On demandera aux élèves une justification, au moins orale, pour les réponses aux questions posées, sachant que la démonstration proprement dite de la propriété de la concourance des médiatrices sera faite dans l'activité suivante.

ACTIVITÉ 3 : CHOISIR UNE PROPRIÉTÉ

On rappelle ci-dessous deux propriétés relatives à la médiatrice d'un segment.

Propriété 1 : Si un point est situé sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

Propriété 2 : Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est situé sur la médiatrice de ce segment.

- 1) Tracer un triangle ABC et construire ses trois médiatrices. Que remarque-t-on ?
- 2) Le but des questions suivantes est de démontrer la réponse à la question précédente.

Sur la figure ci-contre, on sait que les droites Δ et Δ' sont les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$ et qu'elles se coupent en un point O.

On veut donc démontrer que la médiatrice du segment $[BC]$ passe par le point O, ou, autrement dit, que le point O est sur la médiatrice du segment $[BC]$.

Pour cela, compléter le tableau ci-dessous :

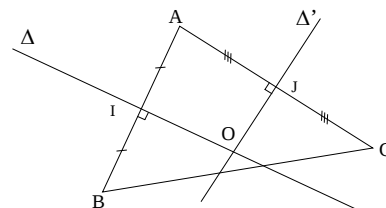


Schéma	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	Δ est la médiatrice de $[AB]$. O est sur Δ .		
			$OA = OC$.
		Propriété de l'égalité.	$OA = OB = OC$.
			O est sur la médiatrice du segment $[BC]$.

Objectifs et commentaires

- Redonner du sens aux propriétés vues en sixième.
- Comprendre que la démonstration demandée nécessite l'application successive de propriétés connues.

La présentation des raisonnements sous forme de tableau permet de comprendre le fonctionnement d'une propriété, de mieux séparer chaque pas de la démonstration et, à l'intérieur de chaque pas, d'indiquer clairement les données utilisées, la propriété qui est en jeu et la conclusion. Dans les présentations sous forme de texte, les élèves oublient souvent l'un ou l'autre de ces éléments, se contentant soit des données, soit de la propriété.

La case « schéma » permet de mettre en évidence la partie de la figure utilisée. Les sous-figures prennent ici du sens. On demandera aux élèves de coder au fur et à mesure (en rouge, par exemple) ce qui vient d'être démontré. Ici, la démarche est guidée, une case du tableau étant pré-remplie pour chacune étape. Le professeur veillera à faire une synthèse à la fin de cette activité, pour rappeler aux élèves ce qui a été démontré et leur donner une vue d'ensemble de ce travail.

Le « fonctionnement » de chaque propriété, sous forme de tableau, est précisé dans la partie cours. Ce cours doit être un outil pour les élèves lors des exercices qu'ils auront à traiter.

COURS

INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

Propriété : Dans un triangle, la longueur de chaque côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés.

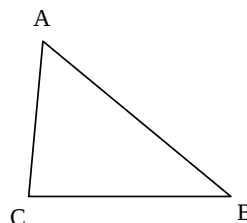
Exemple

Dans le triangle ABC ci-contre, on a :

La longueur du côté [AB] est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés : $AB < AC + BC$.

La longueur du côté [AC] est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés : $AC < AB + BC$.

La longueur du côté [BC] est inférieure à la somme des longueurs des deux autres côtés : $BC < AB + AC$.



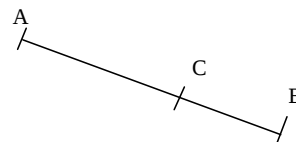
Application

Construction possible ou impossible d'un triangle (voir POINTS DE REPÈRE / MÉTHODES).

ALIGNEMENT

Propriété : A, B et C désignent trois points.

- Si le point C appartient au segment [AB], alors $AB = AC + CB$.
- Si $AB = AC + CB$, alors le point C appartient au segment [AB].



Application

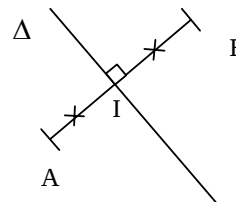
Détermination de l'alignement de trois points (voir points de repère-méthodes).

MÉDIATRICE D'UN SEGMENT

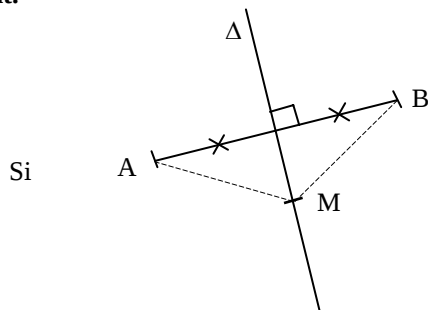
Définition : La *médiatrice* d'un segment est la droite passant par le **milieu** d'un segment et **perpendiculaire** à ce segment.

Sur la figure ci-contre, la droite Δ est la médiatrice du segment [AB] car :

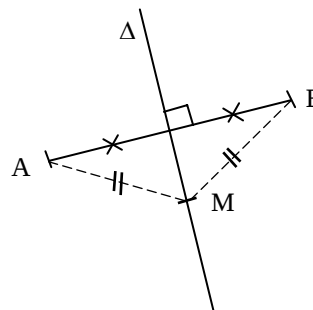
Δ est perpendiculaire à [AB].
et Δ passe par le milieu I du segment [AB].



Propriété 1 : Si un point est situé sur la médiatrice d'un segment, alors il est **équidistant** des **extrémités** de ce segment.

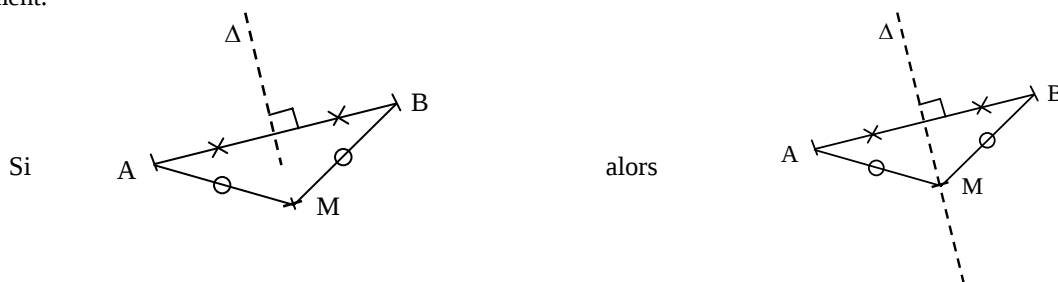


alors



Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
Δ est la médiatrice de [AB]. M est sur Δ .	Si un point est situé sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.	$MA = MB$.

Propriété 2 : Si un point est **équidistant** des **extrémités** d'un **segment**, alors il est situé sur la médiatrice de ce segment.



Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
Δ est la médiatrice de $[AB]$. $MA = MB$.	Si un point est équidistant des extrémités d'un segment , alors il est situé sur la médiatrice de ce segment.	M est sur Δ .

Propriété 3 : Si deux points sont équidistants des extrémités d'un segment, alors la droite qui passe par ces deux points est la médiatrice de ce segment.

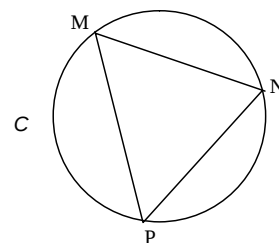


Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
$MA = MB$. $NA = NB$.	Si deux points sont équidistants des extrémités d'un segment, alors la droite qui passe par ces deux points est la médiatrice de ce segment.	(MN) médiatrice de $[AB]$.

CERCLE CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE

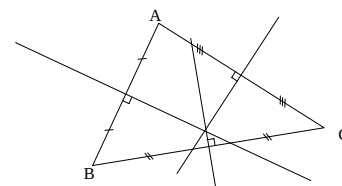
Définition : Le cercle circonscrit à un triangle est le cercle passant par les trois sommets de ce triangle.

Sur la figure ci-contre, le cercle C est le cercle circonscrit au triangle MNP .



PROPRIÉTÉ DES MÉDIATRICES D'UN TRIANGLE

Propriété : Les médiatrices des trois côtés d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est équidistant des trois sommets de ce triangle : c'est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

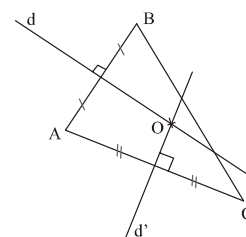


Démonstration de cette propriété

On appelle O le point d'intersection des médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$.

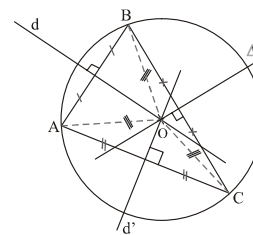
Démontrons que le point O est aussi sur la médiatrice du segment $[BC]$.

- O est sur la médiatrice de $[AB]$ donc O est équidistant de A et B ou $OA = OB$. (propriété 1).
- O est sur la médiatrice de $[AC]$ donc O est équidistant de A et C ou $OA = OC$. (propriété 1).
- Comme $OA = OB$ et $OA = OC$, on en déduit que $OA = OB = OC$.



- Comme $OB = OC$ alors O est sur la médiatrice du segment $[BC]$. (propriété 2).

Étant donné que $OA = OB = OC$, on en déduit que le point O est le centre d'un cercle qui passe par les points A , B et C .



POINTS DE REPÈRE / MÉTHODES

Savoir si la construction d'un triangle est possible.

Méthode générale

Pour savoir si la construction d'un triangle est possible, on compare la plus grande longueur à la somme des deux autres. Trois cas sont possibles :

- Si la plus grande longueur est inférieure à la somme des deux autres, alors la construction est possible.
- Si la plus grande longueur n'est pas inférieure à la somme des deux autres, alors la construction est impossible.
- Si la plus grande longueur est égale à la somme des deux autres, alors la construction est possible, mais les trois sommets du « triangle » sont alignés.

Exemple 1

Peut-on tracer le triangle ABC tel que $AB = 7$ cm, $BC = 6$ cm, $AC = 8$ cm ?

La plus grande longueur est $AC = 8$.

On calcule la somme des deux autres : $AB + BC = 7 + 6 = 13$.

Comme AC est inférieur à $AB + BC$, la construction du triangle ABC est possible.

Exemple 2

Peut-on tracer le triangle DEF tel que $DE = 1$ cm, $EF = 6$ cm, $DF = 8$ cm ?

La plus grande longueur est $DF = 8$.

On calcule la somme des deux autres : $DE + EF = 1 + 6 = 7$.

Comme DF n'est pas inférieure à $DE + EF$, la construction du triangle DEF est impossible.

Exemple 3

Peut-on tracer le triangle GHI tel que $GH = 1,3$ cm, $HI = 6$ cm, $GI = 4,7$ cm ?

La plus grande longueur est $HI = 6$.

On calcule la somme des deux autres : $GH + GI = 1,3 + 4,7 = 6$.

Comme HI est égal à la somme $GH + GI$, la construction est possible mais les points G , H et I sont alignés. De manière plus précise : comme $HI = HG + GI$, le point G appartient au segment $[HI]$.

Savoir construire le cercle circonscrit à un triangle

	On veut construire le cercle circonscrit au triangle ABC ci-contre. On utilise la propriété : Les médiatrices des 3 côtés d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est équidistant des 3 sommets de ce triangle : c'est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.
	On construit la médiatrice d'un côté, par exemple $[AC]$.

	On construit la médiatrice d'un autre côté, par exemple [BC]. Les deux médiatrices se coupent en un point O. Inutile de tracer la médiatrice du troisième côté. On sait qu'elle passe aussi par O.
	On trace le cercle de centre O qui passe par A. Il passe aussi par B et par C. Ce cercle est bien le cercle circonscrit au triangle ABC.

EXERCICES

TRACES DE TRIANGLES ET DE QUADRILATÈRES

Dans les exercices 1 et 2, on poursuit le travail entrepris en 6^{ème} pour les reproductions et tracés de figures. L'exercice 1 travaille de figure vers figure. Dans l'exercice 2, on doit tracer une figure à partir d'un texte. Pour faciliter ce changement de registre et pour avoir une bonne représentation de la figure à reproduire, on conseillera aux élèves de commencer par faire un schéma à main levée.

1. Construire en vraie grandeur les triangles suivants :

1	2	3
4	5	6

2. Construire les figures ci-dessous, après avoir dessiné un schéma résumant leurs caractéristiques :

- Un triangle ABC tel que $\widehat{BAC} = 30^\circ$, $\widehat{ACB} = 39^\circ$ et $AC = 6,1$ cm.
- Un triangle DEF tel que $\widehat{DEF} = 13^\circ$, $\widehat{EFD} = 147^\circ$ et $EF = 4,9$ cm.
- Un quadrilatère GHIJ tel que $GI = 5,8$ cm, $\widehat{HGI} = 130^\circ$, $\widehat{GIH} = 16^\circ$, $\widehat{IGJ} = 20^\circ$, $\widehat{GIJ} = 114^\circ$.
- Construire le triangle ABC rectangle en C tel que $AB = 4$ cm et $BC = 2$ cm.
 - Construire le triangle EFG isocèle en G tel que $EF = 5$ cm et $FG = 3$ cm.

4. a) Tracer un segment AB de longueur 5 cm.
 b) Tracer le cercle C_1 de centre A et de rayon 3 cm.
 c) Tracer le cercle C_2 de centre B et de rayon 4 cm.
 d) Les cercles C_1 et C_2 se coupent en D et E.
 e) Quels triangles apparaissent sur cette figure ? Lorsque c'est possible, indiquer sans mesurer les longueurs de leurs côtés. Justifier.

Dans l'exercice 5, on travaille le changement de registre de la figure géométrique vers le texte. Le film montre à l'élève sur quelle étape de la construction il doit travailler. Ainsi, dans le prolongement de ce qui a été vu en 6^{ème}, on amène l'élève à utiliser de façon rigoureuse le vocabulaire géométrique, à comprendre que pour parler du tracé d'un arc de cercle, on doit préciser le centre et le rayon. L'élève doit aussi prendre l'initiative de nommer certaines demi-droites apparaissant dans les tracés d'angles : ainsi, dans le film b, l'angle de 35° peut être nommé $\widehat{EDx}$.

5. On veut construire en vraie grandeur les figures suivantes dessinées à main levée :

figure (a)	figure (b)	figure (c)	figure (d)

Pour chacune des figures, on donne le film de la construction.

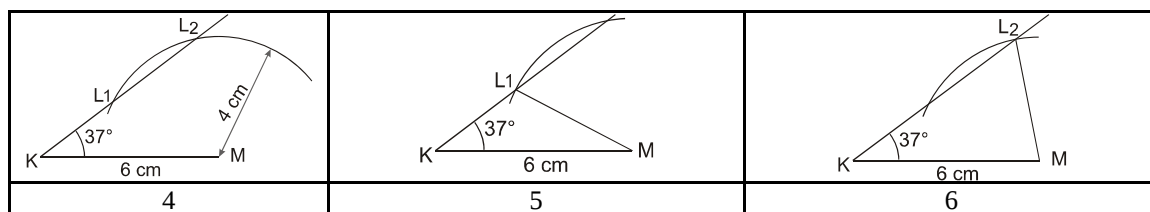
Écrire dans chaque cas des phrases décrivant les étapes de la construction.

Figure (a)					
	1	2	3	4	5

Figure (b)				
	1	2	3	4

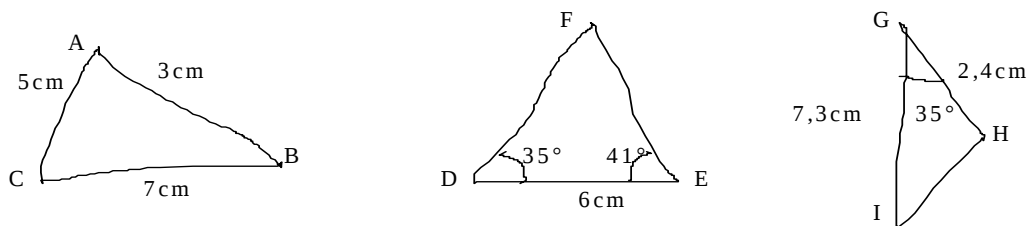
Figure (c)				
	1	2	3	4

Figure (d)			
	1	2	3



Dans l'exercice 6, on continue à travailler le changement de registre de la figure géométrique vers le texte, mais l'aide du film n'est plus là. On peut suggérer aux élèves, si besoin est, de faire ce film au brouillon à main levée.

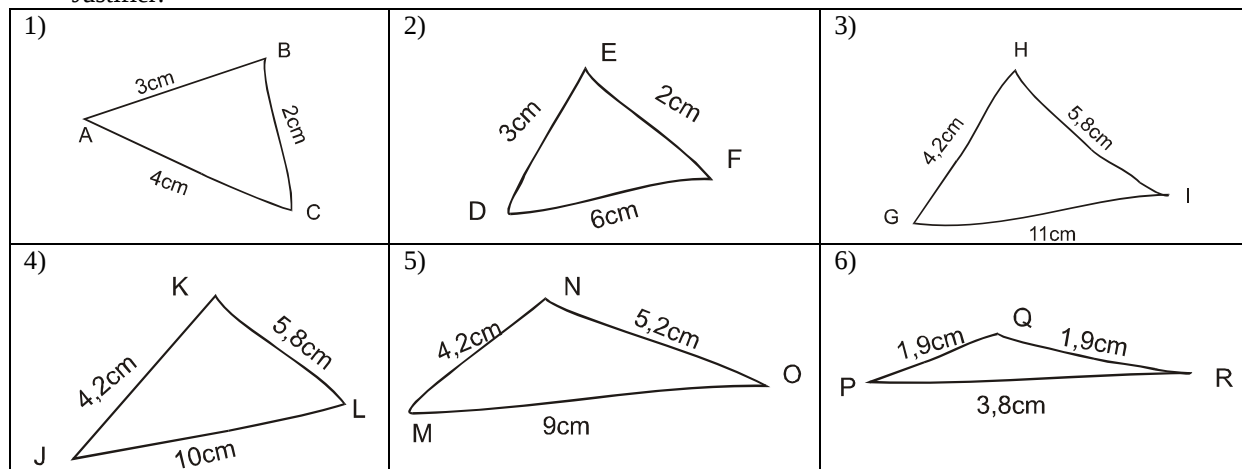
6. Écrire des énoncés qui permettent de tracer les triangles dont on a dessiné un schéma ci-dessous, puis les tracer.



INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

Dans les exercices 7 et 8, on pourra suggérer aux élèves d'utiliser le point de repères-méthode correspondant.

7. Voici des figures dessinées à main levée. Pour chacune d'elles, dire si la construction est possible ou non. Justifier.

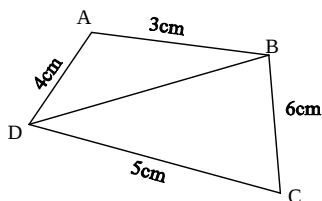


8. Construire, lorsque cela est possible, un triangle ABC tel que :
- a) $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 7 \text{ cm}$ et $AC = 9 \text{ cm}$; b) $AB = 4,5 \text{ cm}$, $BC = 9 \text{ cm}$ et $AC = 3,5 \text{ cm}$.
 - c) $AB = 3,7 \text{ cm}$, $AC = 4,8 \text{ cm}$ et $BC = 9 \text{ cm}$; d) $AB = 5,2 \text{ cm}$, $AC = 4,8 \text{ cm}$ et $BC = 9 \text{ cm}$.
- Lorsque la construction est impossible ou lorsque les points sont alignés, expliquer pourquoi.

Dans les exercices 9 à 17, on pourra procéder par essai-erreur et dégager que, dans un triangle, la longueur de chaque côté est comprise entre la différence et la somme des deux autres.

9. ABC est un triangle tel que $AB = 7,8 \text{ cm}$ et $BC = 4,3 \text{ cm}$. La longueur du côté [AC] est un nombre entier. Donner toutes les valeurs possibles de ce nombre.
10. Le côté [BC] d'un triangle ABC isocèle en A mesure 8 cm.
- a) Peut-on avoir $AB = 1 \text{ km}$? ; $AB = 3,9 \text{ cm}$? ; $AB = 4,001 \text{ cm}$?
 - b) Préciser les valeurs possibles pour la longueur AB.
11. ABC est un triangle tel que $AB = 3 \text{ cm}$ et $BC = 4 \text{ cm}$. Donner un encadrement de la longueur AC.

12. 1) IJK est un triangle isocèle en J tel que $IJ = 3$ cm. Donner un encadrement de son périmètre.
 2) Même question que 1) si IJK est isocèle en K.
13. EFG est un triangle isocèle dont un côté mesure 3cm. On sait que les autres côtés mesurent un nombre entier de centimètres. Quelles sont toutes les possibilités pour les longueurs des côtés du triangle EFG ?
14. Tracer plusieurs quadrilatères ABCD de formes différentes en respectant les longueurs des côtés indiquées. Quelle est la plus grande longueur possible de la diagonale BD ?



15. ABC est un triangle tel que $AC = 5$ cm et $BC = 9$ cm. Donner un encadrement de AB.
16. ABC est un triangle tel que $AB = 7,8$ cm et $BC = 4,3$ cm. La longueur du côté [AC] est un nombre entier. Donner toutes les valeurs possibles de ce nombre.
17. Construire tous les triangles isocèles possibles sachant que la longueur de chaque côté est un nombre entier de centimètres et que leur périmètre est 13 cm.

L'exercice 18 permet un travail à rythmes différents dans la classe : on ne cherchera pas à ce que l'ensemble de la classe termine cet exercice, mais on essaiera d'exploiter au maximum les erreurs commises. Le principal objectif est alors l'application des propriétés mises en place précédemment. Les consignes devront être clairement expliquées aux élèves, on peut les encourager à faire pour chaque cas un schéma à main levée.

18. L'unité de longueur est le centimètre. On veut tracer un triangle EFG. Les longueurs des côtés EF, FG et EG sont à choisir parmi les nombres suivants (on peut prendre plusieurs fois la même valeur) :
 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10.

Pour éviter de retrouver plusieurs fois un triangle de même forme, on décide que le plus grand côté du triangle est toujours EF et que le plus petit est toujours EG. Deux côtés distincts peuvent avoir la même longueur. Compléter le tableau. Les conditions de la dernière colonne doivent être remplies.

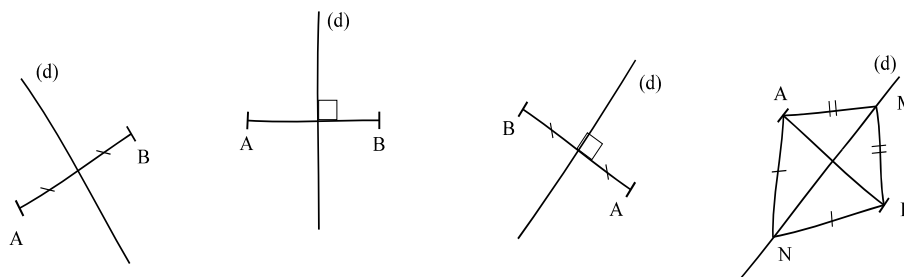
	EF	FG	EG	Conditions
triangle n°1	6	4		triangle possible et triangle isocèle en G
triangle n°2	6	4		les points E, F et G sont alignés
triangle n°3	10		3	le triangle est impossible à tracer
triangle n°4			2	les points E, F et G sont alignés
triangle n°5		2		triangle possible et triangle isocèle en G
triangle n°6	6			le triangle est impossible à tracer
triangle n°7	3			triangle possible et triangle isocèle en F
triangle n°8	10	4	3	
triangle n°9	4	3	2	
triangle n°10	8	4	4	

MÉDIATRICE ET CERCLE CIRCONSCRIT

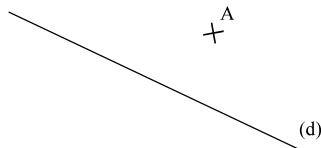
Dans les exercices 19 et 20, il s'agit de tracer ou de reconnaître sur un schéma codé une médiatrice. On travaille ainsi les deux façons de caractériser la médiatrice d'un segment : d'une part, la perpendiculaire au segment passant par son milieu et d'autre part, la droite passant par deux points équidistants des extrémités du segment. L'élève trace souvent une médiatrice en appliquant une procédure qu'il s'est appropriée, mais à laquelle il ne réfléchit pas : dans l'exercice 19, on lui demande d'identifier les propriétés qu'il utilise.

19. 1) a) Tracer un segment [AB], puis construire sa médiatrice avec la règle et l'équerre.
 b) Écrire le programme de la construction.
 c) Justifier que la droite ainsi tracée est bien la médiatrice de [AB].
- 2) a) Tracer un segment [EF], puis construire sa médiatrice avec le compas.
 b) Écrire le programme de la construction.
 c) Justifier que la droite ainsi tracée est bien la médiatrice de [EF].

20. Voici des dessins à main levée. D'après les codages, indiquer dans quels cas (d) est la médiatrice de [AB]. Justifier.



21. Construire le point B tel que (d) soit la médiatrice de [AB].

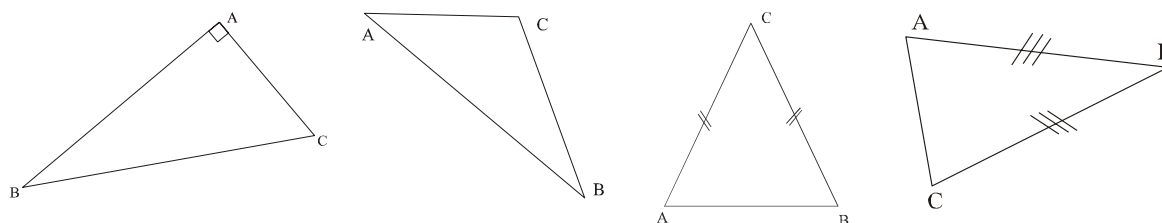


Dans l'exercice 22, on demande à l'élève de tracer la médiatrice d'un segment [AB], segment qu'il doit au préalable repérer sur la figure. On peut lui suggérer de commencer par tracer la médiatrice à main levée d'un trait léger pour bien visualiser sa position, puis de faire une construction précise au compas.

Il rencontre le cas du triangle isocèle : c'est l'occasion de justifier que la médiatrice de la base passe par le sommet principal d'un tel triangle et de constater qu'il n'en est pas de même pour la médiatrice d'un autre côté. Cet exercice peut être prolongé par le tracé d'une deuxième médiatrice et par le tracé du cercle circonscrit au triangle.

L'exercice 23 permet d'exploiter ce qui a été vu dans le cas d'un triangle isocèle et de l'appliquer à un triangle équilatéral.

22. Pour chacun des triangles suivants, construire la médiatrice du côté [AB].



23. Construire un triangle AMI équilatéral tel que $AM = 6$ cm. Construire, uniquement avec une règle graduée, les trois médiatrices du triangle AMI. Justifier.

L'exercice 24 est un exercice de traduction de la propriété d'équidistance dans différents registres. Il doit permettre aux élèves qui n'y sont pas parvenus jusque là, de mieux s'approprier le vocabulaire. Le même objectif est visé dans l'exercice 25.

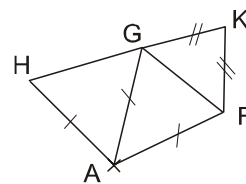
24. D'un langage à l'autre. Compléter le tableau :

Égalité entre deux longueurs	Phrase qui traduit cette égalité	Schéma codé	Phrase du type : ... est sur la médiatrice de ...
$EA = EB$.	E est équidistant de A et de B.		E est sur la médiatrice de [AB].
$IJ = JK$.			
	R est équidistant de M et de S.		
			U est sur la médiatrice de [CT].
$SF = VF$.			

25. a) Compléter les phrases suivantes en utilisant la figure ci-contre :

K est équidistant de et de
 est équidistant de H, de G et de F.

b) Compléter le tableau suivant :



	vrai	faux	on ne sait pas
A est sur la médiatrice de [FG].			
A est sur la médiatrice de [HG].			
A est sur la médiatrice de [HF].			
G est sur la médiatrice de [HF].			

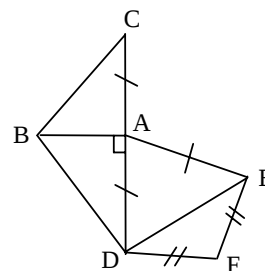
Énoncer la propriété qui justifie les réponses précédentes

Les exercices 26 à 31 ont pour objectif l'apprentissage de la démonstration.

La présentation sous forme de tableau (exercices 26 et 30) permet de mieux séparer chaque pas de la démonstration et, à l'intérieur de chaque pas, d'indiquer clairement les données utilisées, la propriété qui est en jeu et la conclusion. Dans les présentations sous forme de texte, les élèves oublient souvent l'un ou l'autre de ces éléments, se contentant soit des données, soit de la propriété. Savoir faire fonctionner correctement des définitions et propriétés connues est un objectif qui doit être atteint pour pouvoir rédiger une démonstration. Dans les exercices où le tableau n'est pas explicitement demandé, on encouragera l'élève à le faire lui-même.

26. Voici un schéma codé sur lequel les points C, A et D sont alignés.

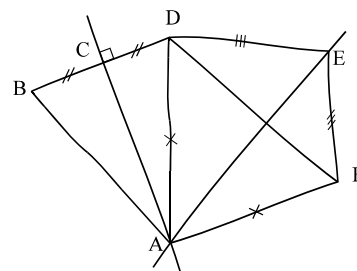
- 1) Écrire les données.
- 2) Compléter le schéma en plaçant un point H tel que $HD = HE$. Coder.
- 3 Recopier et compléter le tableau :



Je sais que	Définition ou propriété	J'en déduis que
$(AB) \perp (CD)$ A est le milieu de [CD].		
		$BC = BD$.
		(AF) est la médiatrice de [DE].
$HD = HE$.		
		Les points H, F et A sont alignés.

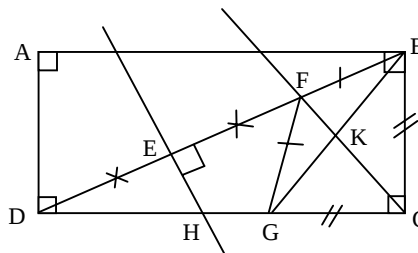
27. Voici une figure codée à main levée qui n'est pas à reproduire.

- a) Certains segments ont été dessinés avec leur médiatrice. Nommer chacun de ces segments et sa médiatrice. Justifier.
- b) Trouver tous les segments ayant même longueur que le segment [AD].



28. Voici un schéma codé sur lequel les points D, E, F et B ainsi que les points D, H, G et C sont alignés.

- a) D'après ce codage, quels sont les segments de même longueur ? Quels angles sont droits ?
- b) La droite (EH) est la médiatrice d'un segment. Lequel ? Justifier.
- c) La droite (CF) est aussi la médiatrice d'un segment. Lequel ? Justifier.



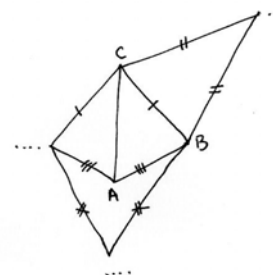
29. Voici une figure à main levée. En utilisant les renseignements codés sur la figure :

Placer le point M sachant qu'il est équidistant de B et de C ;

Placer le point N sachant que la droite (AC) est la médiatrice du segment [BN].

On nomme E le dernier point inconnu. Les points A, C, E sont-ils alignés en réalité ?

Justifier.



30. Voici une « boîte à outils » pour les exercices suivants :

- Si un point est situé sur la médiatrice d'un segment, alors il est équidistant des extrémités de ce segment.
- La médiatrice d'un segment est la droite passant par le milieu du segment et perpendiculaire à ce segment.
- Si un point est équidistant des extrémités de ce segment alors il est situé sur la médiatrice de ce segment.
- Si deux points sont équidistants des extrémités d'un segment, alors la droite qui passe par ces deux points est la médiatrice de ce segment.
- Tous les points d'un cercle sont équidistants du centre du cercle.
- On appelle losange un quadrilatère qui a les quatre côtés de même longueur.
- Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leurs milieux.

1) Tracer un cercle C de centre O et placer deux points A et B sur ce cercle. Compléter le tableau suivant pour montrer que O appartient à la médiatrice de $[AB]$.

Je sais que	Propriété ou définition	J'en déduis que
		$OA = OB$.
$OA = OB$.		

2) Tracer deux cercles C_1 et C_2 , de centres O et O' , de rayons différents et sécants en A et B . Que représente la droite (OO') pour le segment $[AB]$? Compléter le tableau suivant pour justifier la réponse.

Je sais que	Propriété ou définition	J'en déduis que
		$OA = \dots$
		$O'A = \dots$
$\dots = \dots$ et $\dots = \dots$		

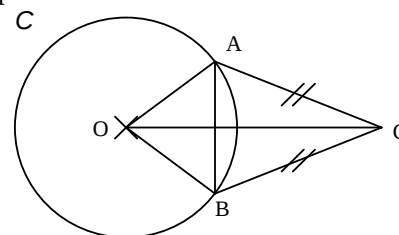
3) Tracer un losange $ABCD$ et placer un point M sur la droite (AC) mais pas sur le segment $[AC]$. Que dire des longueurs MB et MD ? Compléter le tableau suivant pour justifier la réponse.

Je sais que	Propriété ou définition	J'en déduis que
		$(AC) \perp [BD]$ et (AC) passe par le milieu de $[BD]$.
$(AC) \perp [BD]$ et (AC) passe par le milieu de $[BD]$.		
M est		

31. Sur la figure ci-dessus, on sait que le cercle C a pour centre O et que les points A et B sont sur ce cercle.

1) Démontrer que $OA = OB$.

2) Démontrer que la droite (OC) est la médiatrice du segment $[AB]$.



Les exercices 32 et 33 sont des exercices de constructions dans lesquels deux contraintes sont à respecter. Il est important d'expliciter ces contraintes et de voir comment la construction peut être organisée. On peut demander de rédiger le programme de la construction : cela permet à l'élève de bien identifier les différentes étapes de la construction et de s'entraîner à s'exprimer de manière rigoureuse.

L'exercice 32 est aussi l'occasion de bien distinguer la distance d'un point à un point (M est à 4 cm de A) de la distance d'un point à une droite, certains élèves ayant tendance à mesurer les 4 cm sur la médiatrice, à partir du milieu de [AB].

32. Construire un point M de la médiatrice de [AB] qui soit à 4 cm de A.

Même travail pour N, distant de B de 2 cm.

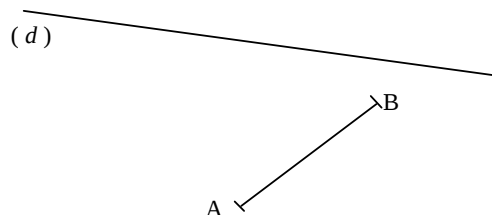


33. Tracer une droite (d) et un segment [AB] placés à peu près comme sur la figure ci-contre.

Placer, à l'aide d'une construction précise, un point C sur la droite (d) de sorte que le triangle ABC soit isocèle en C.

Y a-t-il plusieurs possibilités ?

La construction est-elle toujours possible ?



Les exercices 34 et 35 permettent d'utiliser les propriétés de la médiatrice dans un contexte plus ludique.

34. L'île au trésor

Un aventurier a découvert un document indiquant qu'un trésor a été caché sur une île, dans un puits camouflé.

Ce trésor se trouve à égale distance du rocher en forme de chat, du groupe des deux palmiers et de l'anneau où l'on peut attacher son bateau.

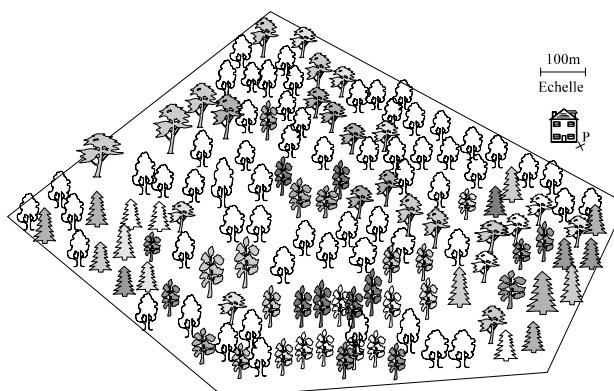
Quels tracés doit-il faire sur sa carte après avoir trouvé les trois "signes" pour découvrir l'entrée du puits ?

(source : manuel 5^{ème} Irem de Strasbourg Istra).



35. Pierre et Jean décident de construire une cabane dans la forêt et cherchent un endroit situé à la même distance de chacune de leurs maisons.

- Chercher tous les endroits possibles pour construire la cabane. Où sont-ils situés ?
- Parmi ces emplacements, quel est le plus proche des deux maisons ? A quelle distance est-il situé ?
- Parmi ces emplacements, quel est le plus éloigné des deux maisons ? A quelle distance est-il situé ?



Les exercices 36 à 43 abordent le thème du cercle circonscrit. Il s'agit essentiellement de constructions à l'aide des médiatrices. L'élève rencontre les différentes positions possibles du centre de ce cercle.

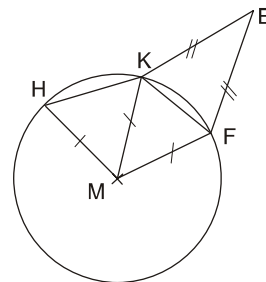
Dans l'exercice 36, c'est la définition du cercle circonscrit qui est en jeu : l'élève a souvent tendance à oublier cette définition.

L'exercice 37 a pour objectif d'entraîner l'élève à bien visualiser la position d'une médiatrice et du centre du cercle circonscrit. C'est indispensable pour effectuer par la suite des constructions soignées et précises.

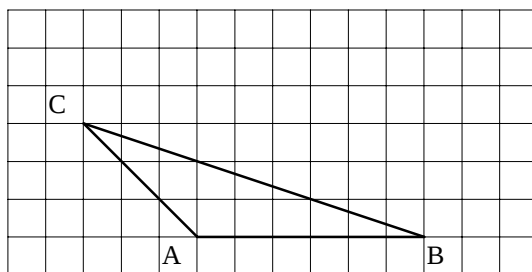
L'exercice 38 utilise un quadrillage : l'élève se familiarise ainsi de manière régulière avec les propriétés d'un quadrillage.

Dans l'exercice 43, le cas de quatre points est abordé.

36. a) Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle HKF ? Justifier.
b) Construire le cercle circonscrit au triangle EKF.



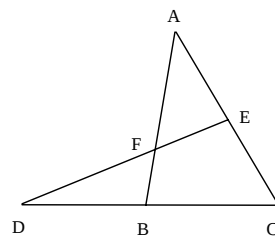
37. Tracer un triangle ABC à la règle. Tracer à main levée les trois médiatrices de ce triangle. Tracer le cercle circonscrit à ce triangle avec un compas. Recommencer jusqu'à ce que les tracés s'améliorent, c'est à dire que le cercle passe effectivement par les trois points du triangle !
38. Sans mesurer. Reproduire le triangle ABC à l'aide du quadrillage. A la règle non graduée seulement, tracer le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. A l'aide de l'équerre non graduée seulement, placer précisément le milieu du segment [BC].



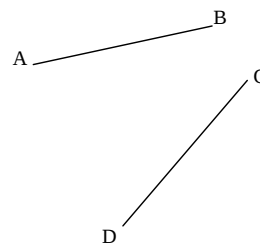
39. Tracer les triangles ci-dessous, puis leurs cercles circonscrits. Quelle conjecture peut-on faire sur la position du centre du cercle circonscrit au triangle ABC suivant la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$?

Triangle n°	AB	$\widehat{BAC}$	AC
1	4 cm	70°	3 cm
2	4 cm	80°	3 cm
3	4 cm	90°	3 cm
4	4 cm	100°	3 cm
5	4 cm	110°	3 cm

40. Placer trois points M, N et L de telle sorte que chacun soit sur la médiatrice du segment formé par les deux autres points.
41. 1) Tracer un triangle ABC tel que $AB = 5$ cm, $\widehat{BAC} = 48^\circ$ et $\widehat{ABC} = 64^\circ$.
2) Tracer sur la même figure trois triangles équilatéraux ABE, BCF et ACG qui ne recoupent pas le triangle ABC.
3) Tracer les cercles circonscrits aux triangles ABE, BCF et ACG. Si la figure est précise, ces trois cercles sont concourants en un point.
42. 1) Tracer soigneusement la figure ci-contre en prenant comme longueurs :
 $DC = 9,2$ cm ; $BC = 5$ cm ; $AB = 6$ cm.
 $AC = 8,7$ cm ; $FB = 2$ cm.
2) Tracer soigneusement les cercles circonscrits aux triangles ci-dessous et repasser dessus avec la couleur indiquée.
a) ABC en bleu.
b) DBF en vert.
c) DCE en rouge.
Si la figure est bien faite, ces trois cercles sont concourants en un point.

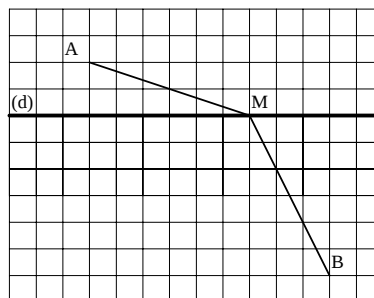


43. a) A l'aide de papier calque, reproduire les segments $[AB]$ et $[CD]$ ci-contre.
Tracer un cercle qui passe par les quatre points A, B, C et D.
- b) Refaire l'exercice en partant de deux segments $[AB]$ et $[CD]$ tracés au hasard.
Peut-on placer $[AB]$ et $[CD]$ n'importe comment ? Expliquer la réponse.

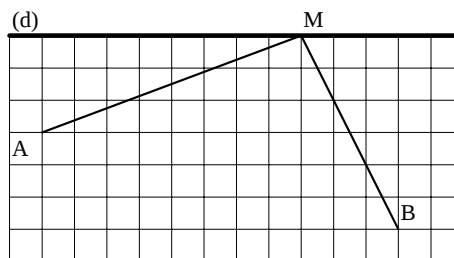


PROBLÈMES

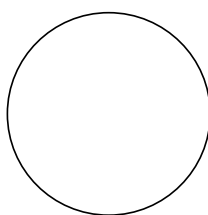
44. 1) Reproduire les points A et B ainsi que la droite (d) comme sur le quadrillage ci-contre.
- 2) Placer un point M sur la droite (d) et sur un nœud du quadrillage de telle sorte que la distance $AM + MB$ soit la plus petite possible.
- 3) Placer un point P sur la droite (d) de telle sorte que la distance $AP + PB$ soit la plus courte possible. Justifier.



45. 1) Reproduire les points A et B, ainsi que la droite (d) comme sur le quadrillage ci-contre.
- 2) Placer un point M sur la droite (d) et sur un sommet du quadrillage, de telle sorte que la distance $AM + MB$ soit la plus petite possible.
- 3) En s'aidant de l'exercice précédent et d'une symétrie orthogonale, construire précisément un point P sur la droite (d) de telle sorte que la distance $AP + PB$ soit la plus courte possible. Justifier.



46. A l'aide de papier calque, reproduire le cercle ci-contre. Retrouver sans tâtonnements, à l'aide d'une construction précise, la position de son centre. Justifier.



CHAPITRE 8

SYMÉTRIE CENTRALE

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Réinvestir les acquis sur la symétrie axiale.
- Construire l'image, par une symétrie centrale, d'un point, d'un segment, d'une droite, d'une demi-droite, d'un cercle.
- Construire ou compléter la figure symétrique d'une figure donnée.
- Dégager progressivement les propriétés invariantes dans une symétrie centrale.
- Comparer les propriétés invariantes dans les deux symétries étudiées.

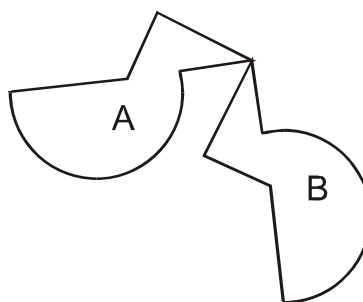
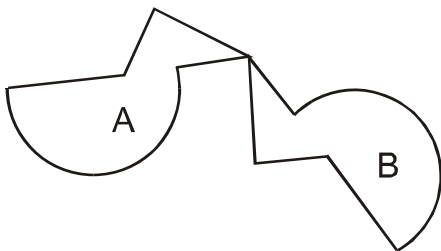
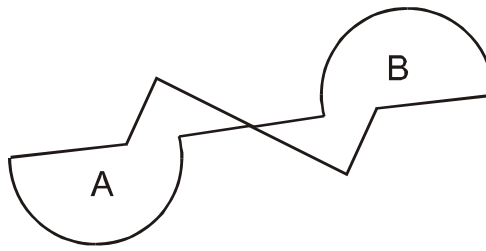
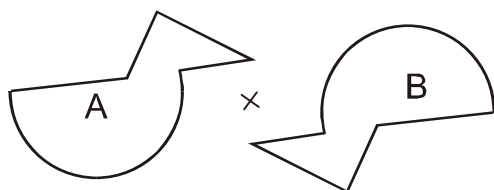
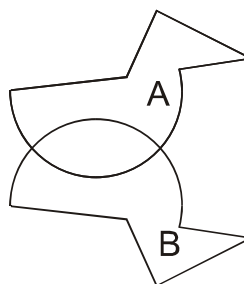
REPÈRES POUR LE CONTENU DU COURS

- Définition du symétrique d'un point.
- Propriétés de la symétrie centrale.
- Images des figures de base par les deux symétries.
- Centre et axe de symétrie d'une figure.

ACTIVITÉ

ACTIVITÉ 1

- 1) Dans deux des cas ci-dessous, la figure B est l'image de la figure A par une symétrie orthogonale d'axe Δ . Tracer la droite Δ pour ces deux cas.
- 2) Pour les autres cas, reproduire la figure A sur un calque, puis trouver un procédé permettant de passer de la figure A à la figure B. Décrire ce procédé.
- 3) Pour les quatrième et cinquième cas, tracer, en pointillés, le segment joignant chaque point à son image. Que remarque-t-on ?

1^{er} cas2^{ème} cas3^{ème} cas4^{ème} cas5^{ème} cas6^{ème} cas

Objectifs et commentaires

- Réinvestir les acquis sur la symétrie axiale.
- Découvrir la symétrie centrale.
- Se forger l'image mentale du demi-tour, qui permettra d'avoir un esprit critique sur les futurs tracés.

La première partie de cette activité vise à reprendre contact avec les éléments caractéristiques de la symétrie axiale. On pourra, en parallèle avec les questions posées, suggérer l'image mentale du pliage.

Pour amener l'élève à la notion de demi-tour, qui n'est pas immédiate suivant la figure considérée et la position du centre par rapport à cette figure, nous avons choisi d'intégrer des cas où la figure tourne autour d'un point d'un angle différent de 180° , ces rotations semblant plus faciles à identifier visuellement.

On pourra suggérer aux élèves d'utiliser la pointe du compas pour faire tourner la figure et mettre alors en évidence le rôle du point où est « piqué » le compas.

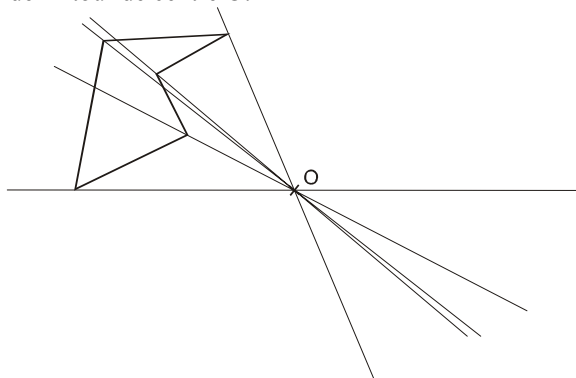
Les productions écrites de la description des procédés sont là pour susciter débat, pour faire émerger, à travers les nombreuses imperfections, une description à conserver.

Pour la question 3, le travail peut être facilité si l'élève prend l'initiative de nommer les points considérés. On lui fera remarquer cet avantage pour la rédaction.

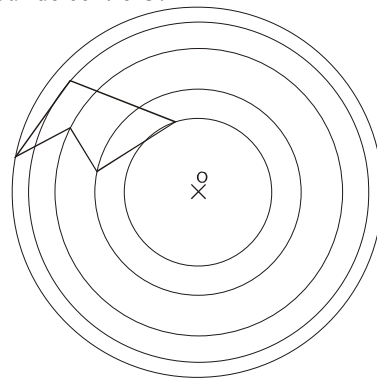
ACTIVITÉ 2 : UNE SEULE CONTRAINTE

En utilisant les remarques faites dans l'activité 1 question 3, construire l'image de la figure ci-dessous par la symétrie de centre O, en utilisant uniquement **une règle non graduée et un compas**.

Vérifier avec un papier calque que la figure a bien effectué un demi-tour de centre O.



En utilisant les remarques faites dans l'activité 1 question 3, construire l'image de la figure ci-dessous par la symétrie de centre O, en utilisant uniquement **une règle non graduée**. Vérifier avec un papier calque que la figure a bien effectué un demi-tour de centre O.



Objectifs et commentaires

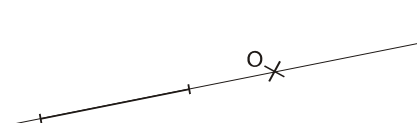
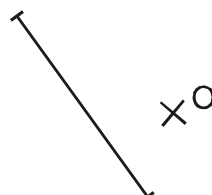
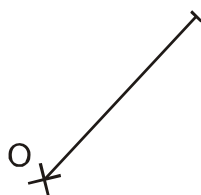
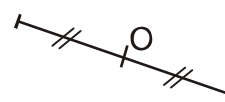
- Traiter séparément les deux contraintes liées à la construction du symétrique d'une figure.

Lors de la dernière question de l'activité précédente, l'élève a pu remarquer que le centre de la symétrie était le milieu de chaque segment joignant un point à son image, le professeur a eu alors l'occasion de l'institutionnaliser. Dans cette activité, l'élève doit mettre en œuvre ces résultats dans deux cas différents, en prenant en compte les tracés existants.

Ainsi, dans la première figure, seul le compas est nécessaire pour la construction de l'image de chaque point : on travaille l'égalité de distance entre, d'une part un point et le centre de symétrie et, d'autre part, son image et ce même centre. Dans la deuxième figure, c'est la règle qui est seule nécessaire : on travaille l'alignement d'un point, de son image et du centre de la symétrie. La vérification permet de revenir à l'image mentale du demi-tour et d'avoir un regard critique sur le travail effectué.

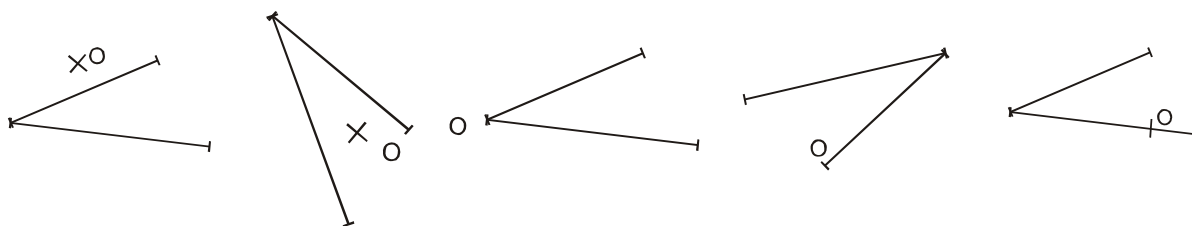
ACTIVITÉ 3 : IMAGES DE SEGMENTS

- 1) Construire dans chaque cas le symétrique du segment donné par rapport au point O.¹



¹ Activité inspirée de l'ouvrage *Apprentissages mathématiques en cinquième*, Equipe ERMEL, (1993), INRP.

2) Construire les symétriques des segments suivants par rapport au point O.



Objectifs et commentaires

- Dégager expérimentalement des propriétés de la symétrie centrale.

L'élève a déjà remarqué, au travers des activités précédentes, que l'image d'une figure par une symétrie centrale est une figure qui lui est superposable. Les propriétés de conservation des angles sont aussi intuitives.

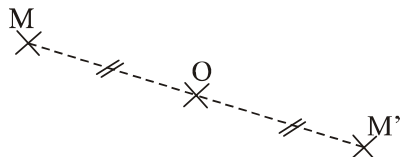
Le but de cette activité est de lister des propriétés de la symétrie centrale à partir d'images de segments et de « bi-segments » formant un angle : la conservation des angles, des longueurs, le parallélisme entre un segment et son image sont alors mis en évidence.

Le travail de mise en commun sera important : à partir des formulations données par les élèves pour une propriété, on en choisit une acceptable, on précise que cette propriété est admise (c'est en général le cas pour toutes les propriétés de la symétrie centrale) et on l'institutionnalise.

COURS

DÉFINITIONS

Symétrie centrale

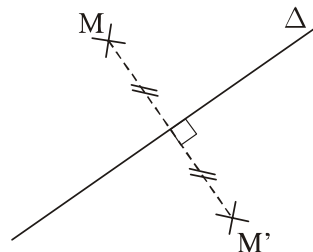


« Le point M' est le symétrique du point M par rapport au point O »,

signifie que

« le point O est le milieu du segment $[MM']$. »

Symétrie axiale



Si le point M est sur la droite Δ , alors M est son propre symétrique.

Si le point M n'est pas sur la droite Δ , « le point M' est le symétrique du point M par rapport à la droite Δ », signifie que :

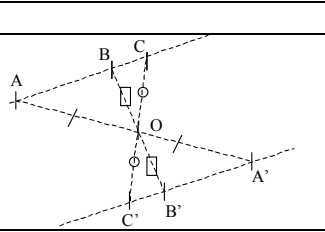
« la droite Δ est la médiatrice du segment $[MM']$. »

PROPRIÉTÉS DE LA SYMÉTRIE CENTRALE

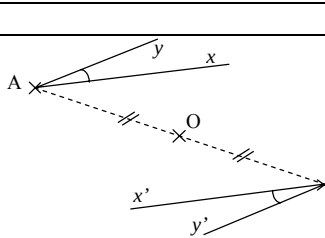
La symétrie centrale conserve les distances

	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	$[A'B']$ est le symétrique de $[AB]$ par rapport au point O .	Si deux segments sont symétriques par rapport à un point, alors ils ont la même longueur.	$A'B' = AB$.

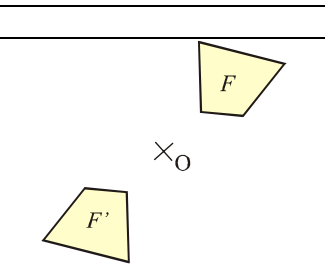
La symétrie centrale conserve l'alignement

	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	A, B et C sont alignés. A', B' et C' sont les symétriques de A, B et C par rapport au point O.	Si trois points sont alignés, alors leurs symétriques par rapport à un point sont alignés.	A', B' et C' sont alignés.

La symétrie centrale conserve les angles

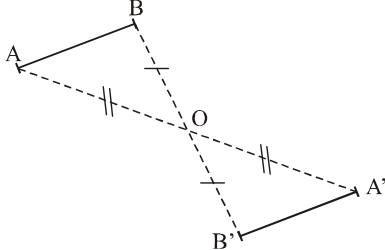
	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	$\widehat{x'A'y'}$ est le symétrique de $\widehat{xAy}$ par rapport au point O.	Si deux angles sont symétriques par rapport à un point, alors ils ont la même mesure.	$\widehat{x'A'y'} = \widehat{xAy}$.

La symétrie centrale conserve les aires

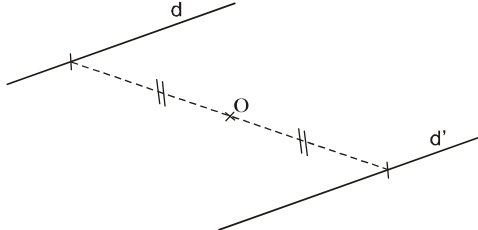
	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	La figure F' est la symétrique de la figure F par rapport au point O.	Si deux figures sont symétriques par rapport à un point, alors elles ont la même aire.	Les figures F et F' ont la même aire.

PROPRIÉTÉS DE LA SYMÉTRIE AXIALE (ADMISES)

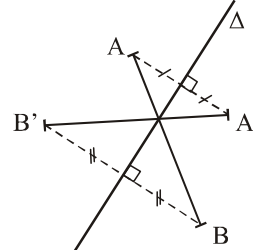
La symétrie axiale conserve les longueurs, l'alignement, les angles et les aires.

IMAGES DES FIGURES DE BASE**Symétrie centrale****Image d'un segment**

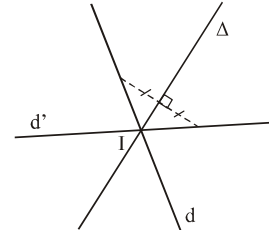
L'image d'un segment par une symétrie centrale est un segment parallèle et de même longueur.

Image d'une droite

L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle.

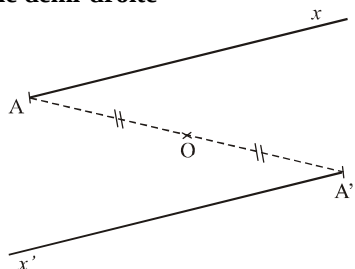
Symétrie axiale**Image d'un segment**

L'image d'un segment par une symétrie axiale est un segment de même longueur.

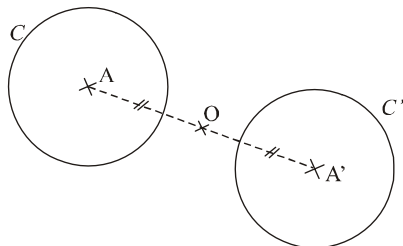
Image d'une droite

L'image d'une droite par une symétrie axiale est une droite.

Remarque : le point I est sur Δ , il est donc son propre symétrique ; la droite d' symétrique de d par rapport à Δ passe donc aussi par I.

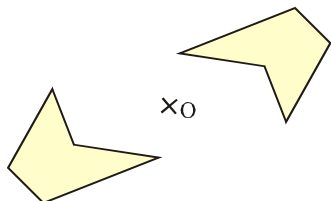
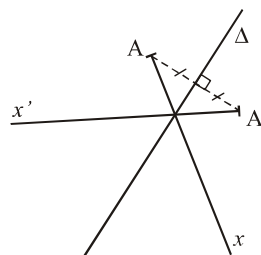
Image d'une demi-droite

L'image d'une demi-droite par une symétrie centrale est une demi-droite parallèle et de sens contraire.

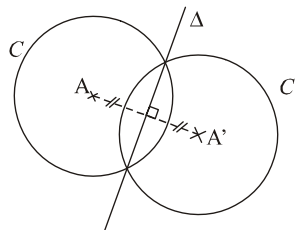
Image d'un cercle

L'image d'un cercle par une symétrie centrale est un cercle de même rayon.

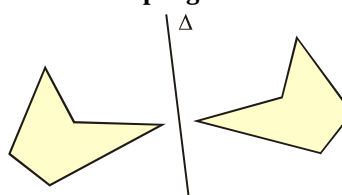
Conséquence : l'image d'une figure par une symétrie est une figure superposable à la figure de départ.

Symétrie centrale : « effet demi-tour »**Image d'une demi-droite**

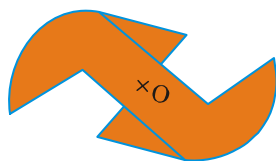
L'image d'une demi-droite par une symétrie axiale est une demi-droite.

Image d'un cercle

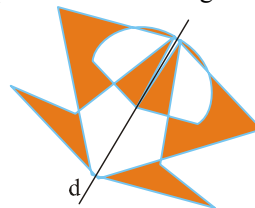
L'image d'un cercle par une symétrie axiale est un cercle de même rayon.

Symétrie axiale : « effet pliage »**CENTRE ET AXE DE SYMÉTRIE D'UNE FIGURE****Centre de symétrie d'une figure**

On dit qu'un point O est le centre de symétrie d'une figure lorsque le symétrique de chaque point de la figure par rapport à O est sur la figure elle-même.

**Axe de symétrie d'une figure**

On dit qu'une droite d est l'axe de symétrie d'une figure lorsque le symétrique de chaque point de la figure par rapport à d est sur la figure elle-même.

**POINTS DE REPÈRE / MÉTHODES****Symétrie centrale ou symétrie axiale ? Comprendre la consigne****Consigne 1**

Construire le point B, symétrique de A par rapport au point E.

Décryptage de cette consigne

On repère dans cette phrase l'expression « par rapport au point E ».

E est un point, il s'agit donc d'une symétrie centrale et E est son centre.

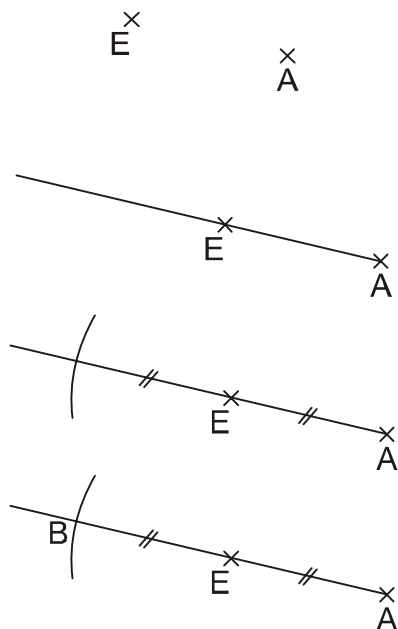
Consigne 2

Construire le point B, symétrique de A par rapport à la droite (d).

Décryptage de cette consigne

On repère dans cette phrase l'expression « par rapport à la droite (d) ».

(d) est une droite, il s'agit donc d'une symétrie axiale et (d) est l'axe de symétrie.

Savoir construire l'image d'un point par une symétrie centrale**Consigne**

Construire le point B, symétrique de A par rapport au point E.

Analyse de la consigne

« par rapport au point E » indique que E est le centre de la symétrie.

Le point E devra être le milieu du segment [AB].

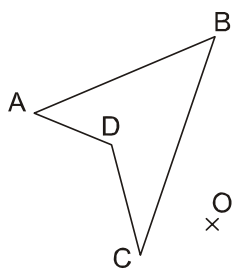
On trace la demi-droite d'origine A passant par E.

On trace un arc de cercle de centre E et de rayon EA qui coupe cette demi-droite en un point.

Ce point est le symétrique de A par rapport à E.
D'après l'énoncé, il s'appelle B.

Savoir construire l'image d'une figure par une symétrie centrale

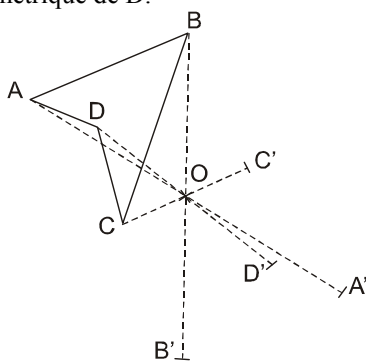
On veut construire l'image du quadrilatère ABCD par la symétrie de centre O.



On construit le symétrique de chacun des points A, B, C, D par rapport à O.

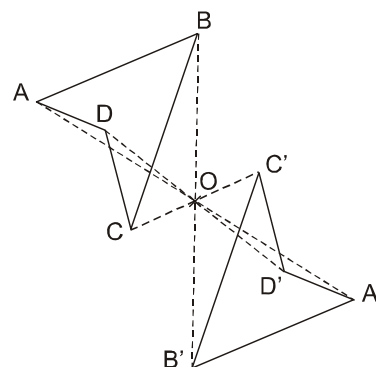
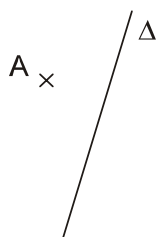
On trace les traits de construction en pointillés pour ne pas surcharger la figure.

On appelle A' le symétrique de A, B' le symétrique de B, C' le symétrique de C et D' le symétrique de D.



On trace le quadrilatère A'B'C'D'.

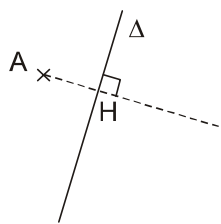
A'B'C'D' est le symétrique du quadrilatère ABCD par rapport à O.

**Savoir construire l'image d'un point par une symétrie axiale (rappel)****Consigne**

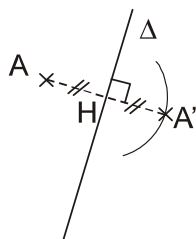
Construire le point A' symétrique de A par rapport à la droite Δ.

Analyse de la consigne

« par rapport à la droite Δ » indique que Δ est l'axe de la symétrie.
La droite Δ devra être la médiatrice du segment [AA'].



On construit la perpendiculaire à la droite Δ passant par A. On appelle H son point d'intersection avec Δ .



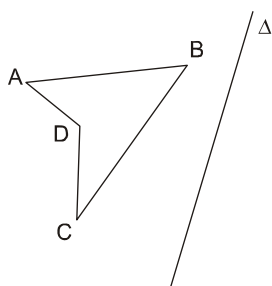
On trace un arc de cercle de centre H et de rayon HA qui coupe cette perpendiculaire.

On obtient ainsi le point A' tel que $AH = HA'$.

A' est bien le symétrique de A par rapport à Δ .

Savoir construire l'image d'une figure par une symétrie axiale (rappel)

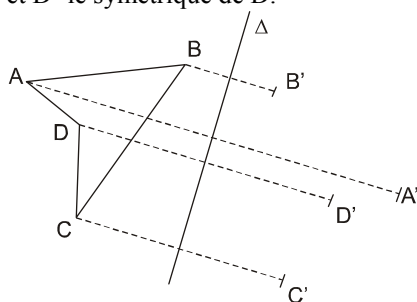
On veut construire l'image du quadrilatère ABCD par la symétrie axiale d'axe Δ .



On construit le symétrique de chacun des points A, B, C, D par rapport à Δ .

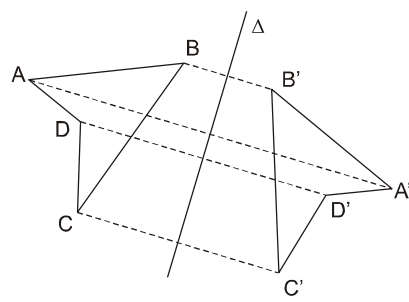
On trace les traits de construction en pointillés pour ne pas surcharger la figure.

On appelle A' le symétrique de A, B' le symétrique de B, C' le symétrique de C et D' le symétrique de D.



On trace le quadrilatère A'B'C'D'.

A'B'C'D' est le symétrique du quadrilatère ABCD par rapport à Δ .



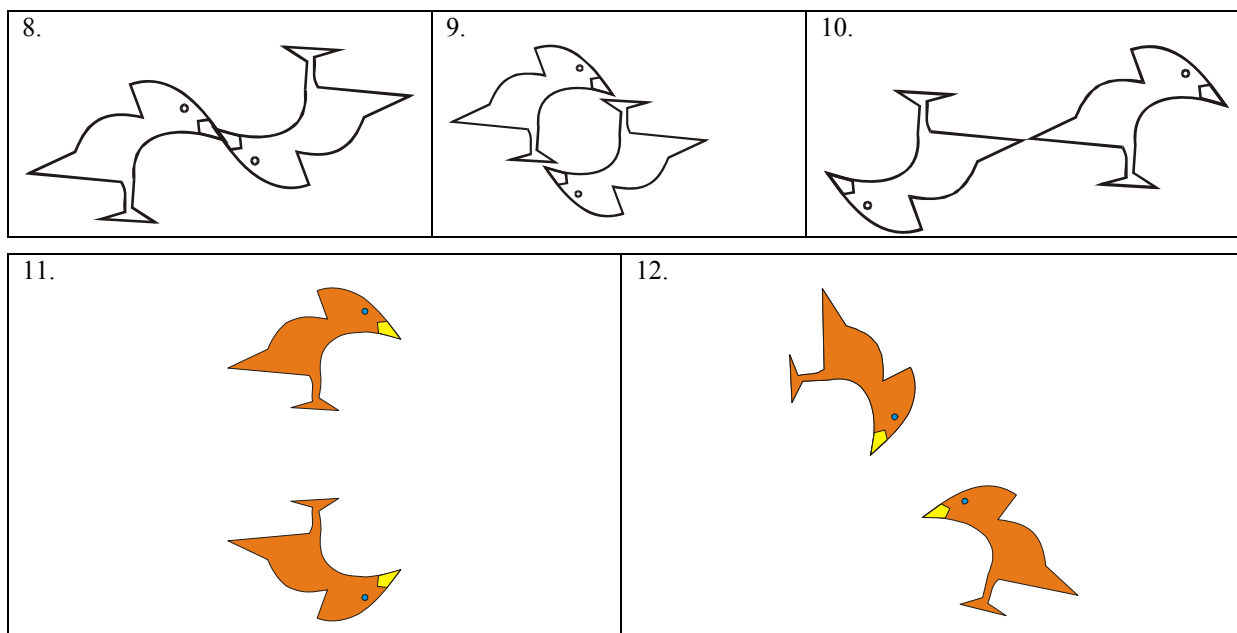
EXERCICES

DEMI-TOUR

L'objectif de l'exercice 1 est de poursuivre le travail commencé dans la première activité, pour consolider les images mentales des deux symétries.

1. Dans chacun des cas suivants, trouver le procédé permettant de passer d'une partie de la figure à l'autre :

1. 	2. 	3. 	4.
5. 	6. 	7. 	

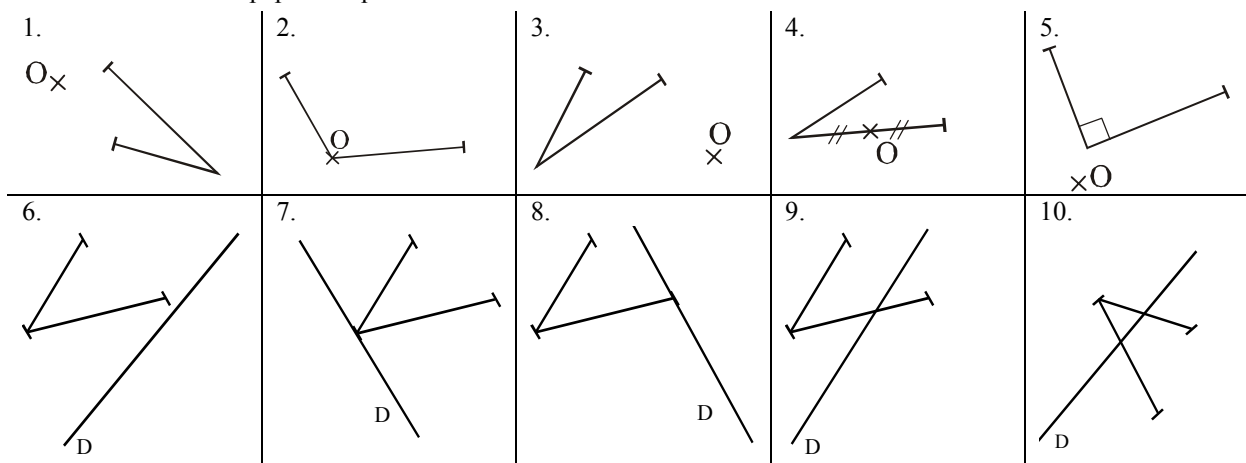


À MAIN LEVÉE

Les tracés à main levée complètent ce qui a été fait dans l'activité 2 pour installer les images mentales de demi-tour et de pliage. Avec le papier calque, l'élève pourra dès la première figure vérifier l'exactitude de l'image qu'il s'est forgée. Il va donc procéder par essai-erreur pour construire la bonne image.

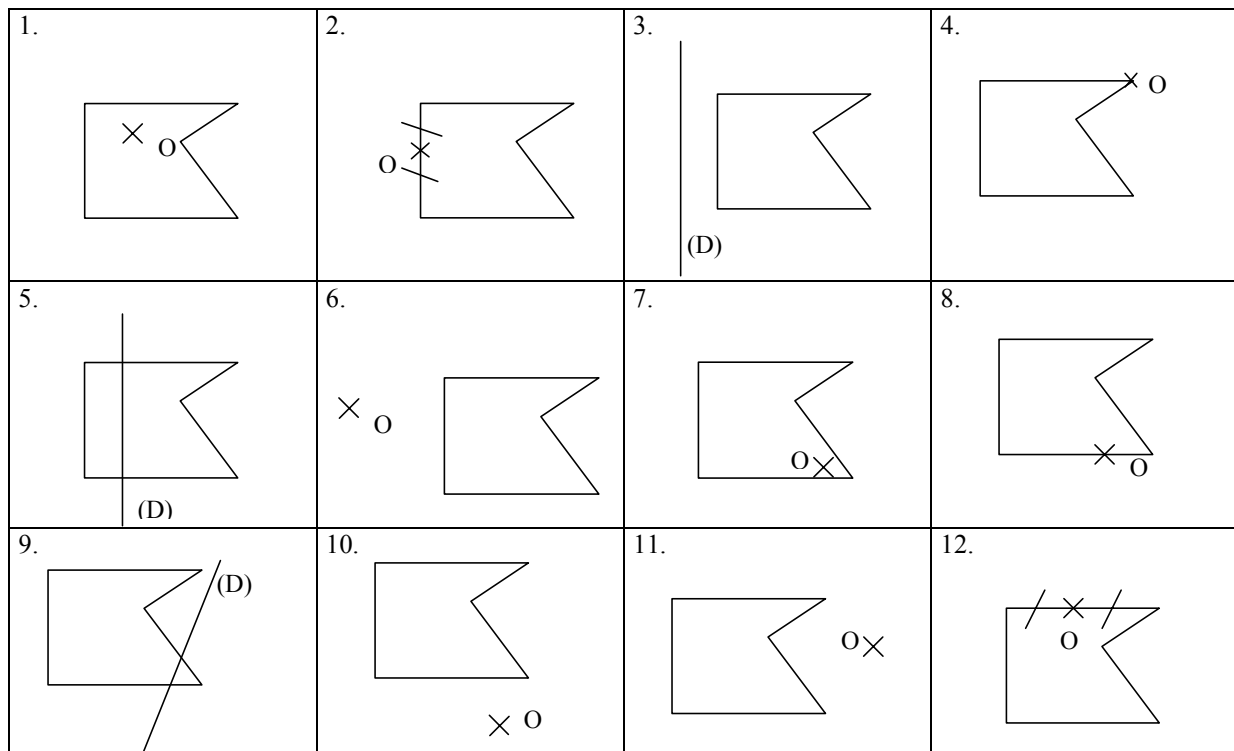
Différents cas sont envisagés, la position du centre de symétrie et l'orientation de la figure étant deux variables didactiques à prendre en considération. La correction collective pourra être faite au rétroprojecteur ou à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique et on fera alors un bilan des erreurs les plus courantes.

2. Dessiner, à main levée, le symétrique de chaque figure par rapport au point O ou par rapport à la droite D. Vérifier avec un papier calque.

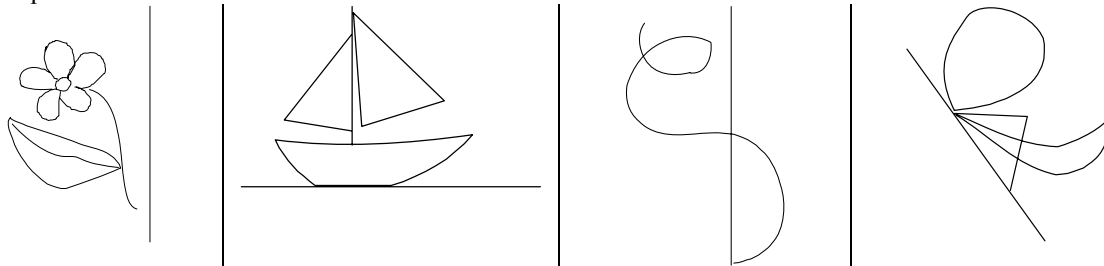


3. Pour chacune des figures du tableau :

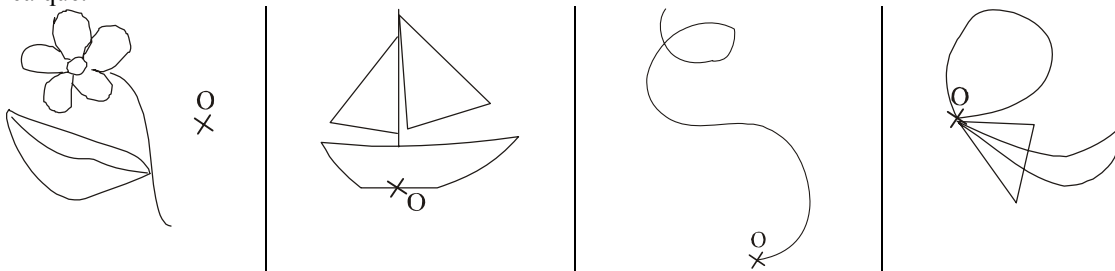
- Reproduire sur le cahier, à main levée, une figure analogue, puis la décalquer.
- Toujours à main levée, construire le plus précisément possible sur le cahier l'image de cette figure par la symétrie de centre O ou par la symétrie d'axe (D).
- Enfin, vérifier à l'aide du papier calque que la figure symétrique a été construite sans erreur (en piquant le compas sur le point O à travers le calque et en faisant tourner le calque autour du point O pour les symétries centrales, en pliant suivant D pour les symétries axiales).



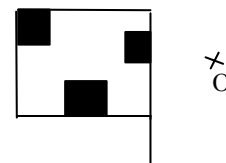
4. Dessiner, à main levée, le symétrique de chaque figure par rapport à la droite Δ . Vérifier avec un papier calque.



5. Dessiner, à main levée, le symétrique de chaque figure par rapport au point O. Vérifier avec un papier calque.



6. Dessiner à main levée le symétrique du drapeau par rapport au point O. Vérifier avec un calque.



7. A main levée, mais en utilisant le quadrillage du cahier :

- Tracer un A majuscule, puis construire son symétrique par rapport à un point O.
- Tracer un F majuscule, puis construire son symétrique par rapport à un point O.
- Tracer un A majuscule, puis construire son symétrique par rapport à une droite Δ horizontale.
- Tracer un F majuscule, puis construire son symétrique par rapport à une droite Δ suivant les nœuds du quadrillage

- e) Poursuivre le travail précédent avec des mots choisis (prénom, ...) et un centre de symétrie O ou un axe de symétrie Δ .

VOCABULAIRE

Dans les exercices 8 et 9, on travaille le vocabulaire et les définitions relatives aux deux symétries. On passe du registre « figure codée » au registre « texte ».

Dans l'exercice 8, une même propriété est exprimée de plusieurs façons, ce qui permet de travailler la forme passive. L'exercice amène aussi à remarquer que : si A est le symétrique de B, alors B est aussi le symétrique de A.

8. On considère que les points qui semblent être alignés sur la figure le sont effectivement.

Compléter les phrases suivantes :

..... est le symétrique de A par rapport à B.

..... est le symétrique de C par rapport à (AG).

..... est le symétrique de C par rapport à D.

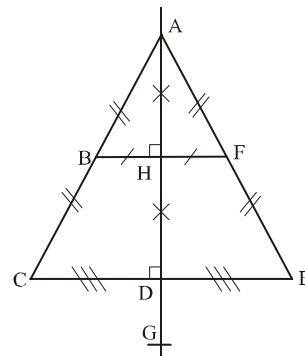
..... est le symétrique de C par rapport à B.

A et D sont symétriques par rapport à

A et E sont symétriques par rapport à

E est l'image de par la symétrie de centre F.

E est l'image de par la symétrie d'axe (AG).



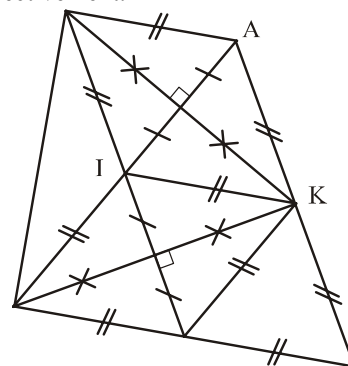
Dans l'exercice 9, on complète une figure à partir d'un texte, ce qui impose un aller-retour entre la figure et le texte. Ensuite, l'élève doit lui-même produire un texte à partir de la figure complétée. La justification de la position du point E est difficile pour des élèves de cinquième. On pourra éventuellement ajouter le tracé de la perpendiculaire à (IK) qui passe par A.

9. On considère que les points qui semblent être alignés sur la figure le sont effectivement.

- a) Sur la figure ci-contre, placer les points B, M, E, S, F sachant que :

- B est le symétrique de A par rapport à K.
- A et I sont symétriques par rapport à M.
- E est le symétrique de A par rapport à (IK).
- S est l'image de E par la symétrie de centre I.
- F est l'image de K dans la symétrie d'axe (SE).

- b) Il reste un point qui sera désigné par N.



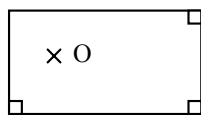
Trouver une ou plusieurs phrases permettant de situer N sur la figure (en utilisant les mots " symétrie " ou " symétrique ").

CONSTRUCTIONS SUR PAPIER BLANC

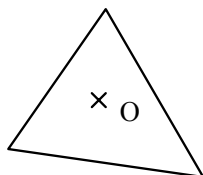
Les exercices 10 et 11 sont des exercices basiques de construction. On pourra suggérer aux élèves de vérifier avec du papier calque afin de développer leur esprit critique. L'orientation et la composition des figures ainsi que la position du centre ou de l'axe par rapport à la figure sont les variables didactiques prises en compte dans l'élaboration de ces exercices.

10. Pour chaque cas, reproduire une figure analogue puis construire l'image de cette figure par la symétrie de centre O.

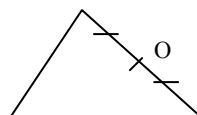
1.



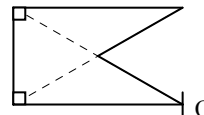
2.

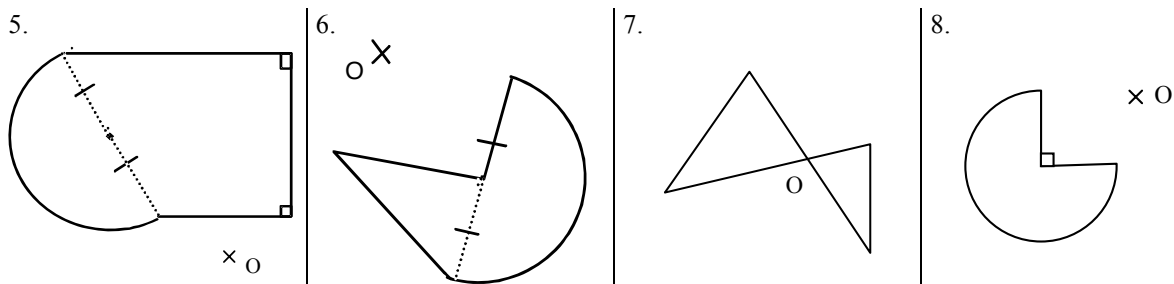


3.

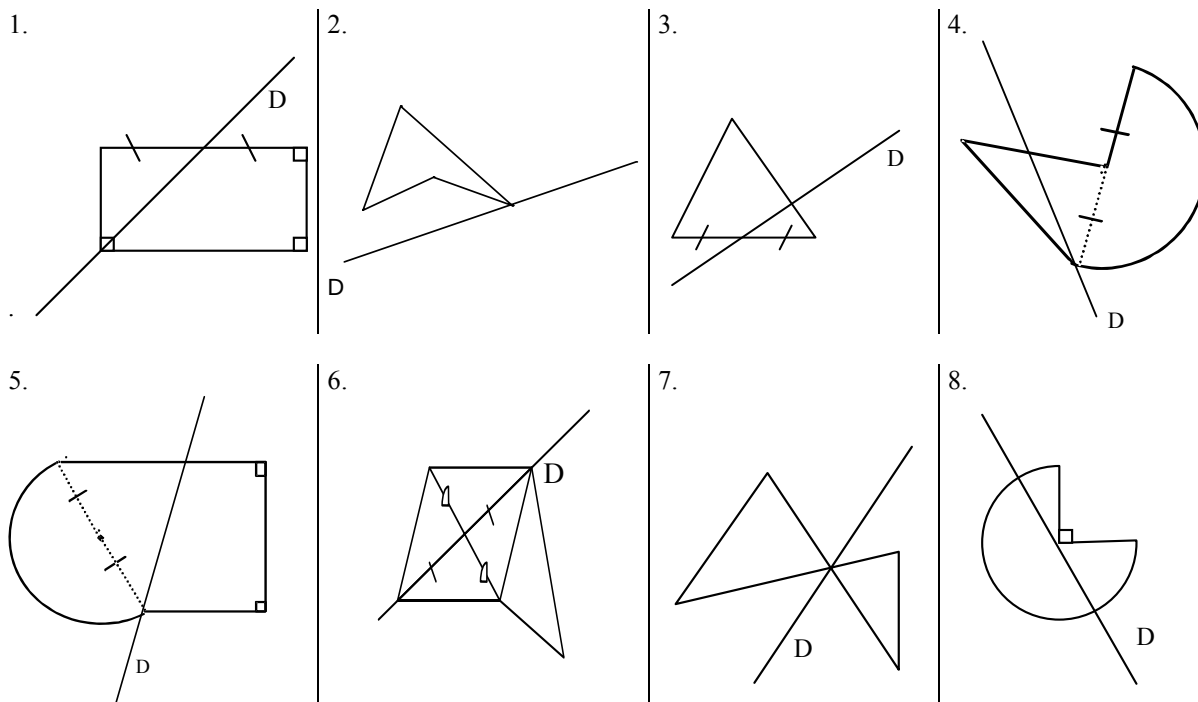


4.



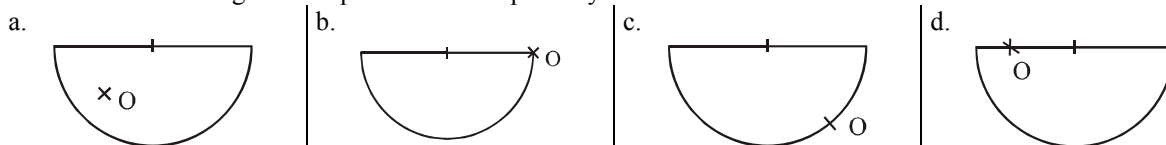


11. Pour chaque cas, reproduire une figure analogue puis construire l'image de cette figure par la symétrie d'axe D.

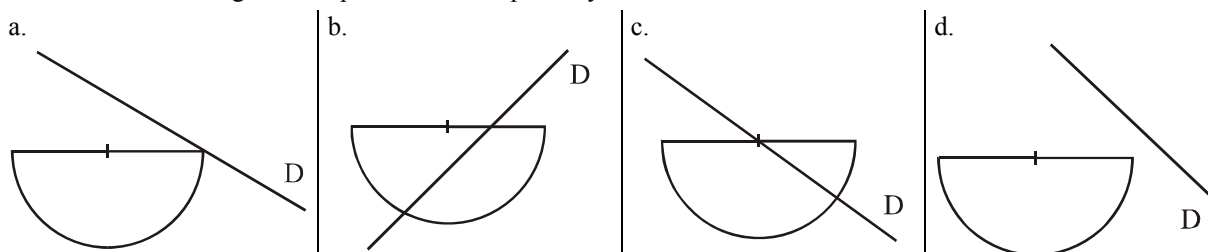


Les exercices 12 et 13 poursuivent les objectifs précédents auxquels il faut ajouter la perception de la place du demi-cercle par rapport à son diamètre ; les images mentales de demi-tour et de pliage seront ici nécessaires pour placer correctement le demi-cercle image.

12. Construire l'image de chaque demi-cercle par la symétrie de centre O :



13. Construire l'image de chaque demi-cercle par la symétrie d'axe D.



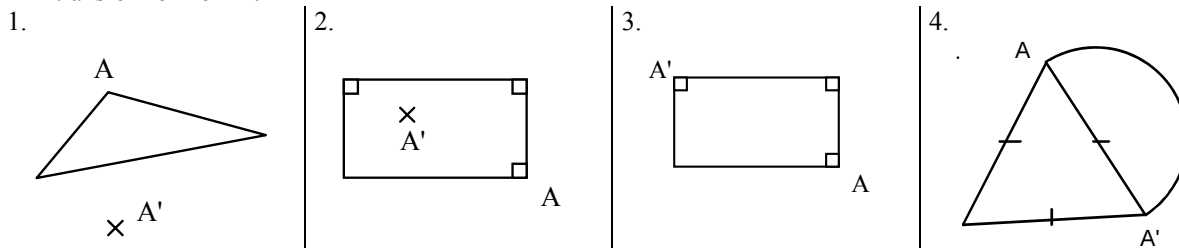
14. Construire la figure décrite ci-dessous.

- 1) ABCD est un carré de 5 cm de côté, de centre E.
- 2) F est le symétrique de E par rapport à B.
- 3) G est le symétrique de A par rapport à B.
- 4) M est le milieu de [GC]. Soit (C) le cercle de centre E passant par A.

- 5) (C) est le cercle symétrique de (C) par rapport à M . On appelle H son centre.
- 6) Compléter la figure pour qu'elle ait (EH) comme axe de symétrie.

Une difficulté supplémentaire pour les exercices 15 et 16 : il faut commencer par retrouver le centre ou l'axe de la symétrie considérée. Comme dans le cours, les exercices 17 et 18 amènent l'élève à distinguer les propriétés de la symétrie orthogonale de celles de la symétrie centrale.

15. Pour chaque cas, reproduire une figure analogue, puis l'image de cette figure par la symétrie de centre O qui transforme A en A' .

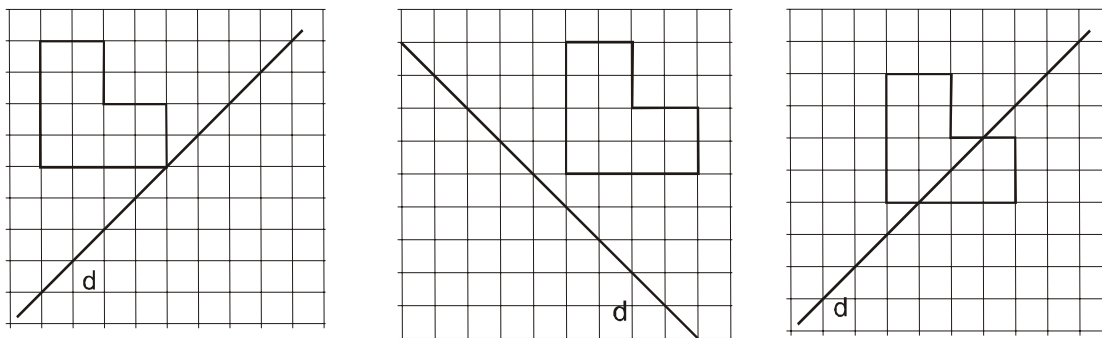


16. Même exercice que 14 en remplaçant « symétrie de centre O » par « symétrie axiale d'axe D ».
17. Tracer une demi-droite $[Ax)$, placer un point A' en dehors de cette demi-droite puis construire l'image de cette demi-droite par la symétrie centrale de centre O qui transforme A en A' .
18. Tracer une demi-droite $[Ax)$, placer un point A' en dehors de cette demi-droite puis construire l'image de cette demi-droite par la symétrie axiale d'axe Δ qui transforme A en A' .

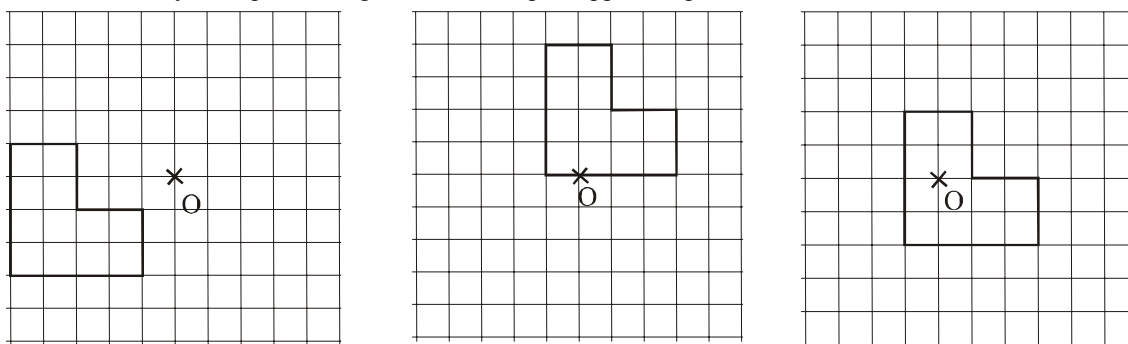
SUR QUADRILLAGE

Le travail sur quadrillage permet à l'élève de se forger des repères. C'est une occasion aussi de l'encourager à utiliser les propriétés des transformations pour construire, à se dégager du point par point, à prendre en compte l'image globale de chaque figure. Pour l'exercice 19, on veillera à justifier l'orthogonalité des diagonales d'un carreau du quadrillage ; c'est une occasion de revoir les propriétés des diagonales du carré, déjà vues en sixième. On encouragera les élèves à n'utiliser que la règle non graduée. L'axe de symétrie coupant la figure entraîne une difficulté supplémentaire. Il en est de même lorsque le centre de la symétrie est situé sur un côté de la figure.

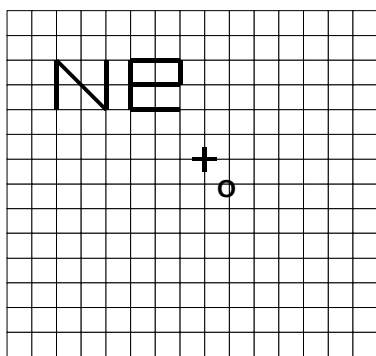
19. Construire les symétriques des figures suivantes par rapport à la droite d .



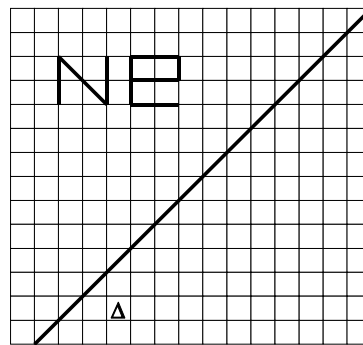
20. Construire les symétriques des figures suivantes par rapport au point O .



21. Construire l'image de la figure ci-dessous par la symétrie de centre O.



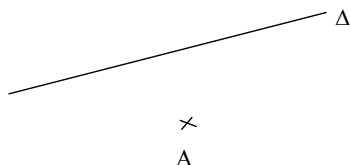
- Construire l'image de la figure ci-dessous par la symétrie d'axe Δ .



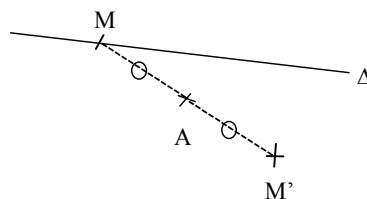
CONSTRUIRE AVEC UNE PROPRIÉTÉ

Dans les exercices précédents, les élèves ont déjà, consciemment ou non, utilisé les propriétés des symétries dans les constructions. Ici, on leur demande par écrit de décrire ou de justifier certaines constructions qui sont souvent intuitives.

22. a) Tracer le symétrique de la droite Δ par rapport au point A à l'aide d'une règle non graduée et du compas. Écrire le programme de construction et la propriété utilisée.

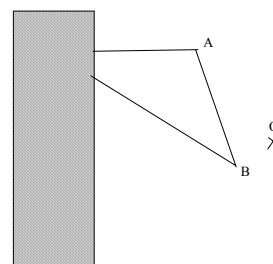


- b) Tracer le symétrique de la droite Δ par rapport au point A à l'aide d'une règle non graduée et d'une équerre. Écrire le programme de construction et la propriété utilisée.



23. a) Placer quatre points A, B, C et D sur un cercle de centre O et de rayon 3 cm puis tracer le symétrique A'B'C' du triangle ABC par rapport au point D.
b) Construire alors le cercle circonscrit au triangle A'B'C' sans tracer les médiatrices de ses côtés. Justifier.
24. Dans cet exercice, on n'a pas le droit de faire de tracés dans la zone hachurée. Le but de l'exercice est de tracer le cercle circonscrit au triangle ABC, alors que le point C est inaccessible !

- 1) Tracer le symétrique A'B'C' du triangle ABC par rapport à O.
- 2) Construire le centre du cercle circonscrit au triangle A'B'C'.
- 3) En déduire le tracé du cercle circonscrit au triangle ABC.



APPLIQUER UNE PROPRIÉTÉ

Pour chacun des exercices suivants, il est fondamental de séparer la phase de recherche de la propriété de la phase de rédaction, avec ou sans tableau. On pourra commencer par une recherche en groupes sur les propriétés à utiliser et les différentes étapes du raisonnement. On fera ensuite une mise en commun dans la classe en comparant les différentes approches. Une fois ce travail effectué, le tableau pourra être donné. Ce tableau n'est pas une fin en soi, c'est un outil transitoire. Il constitue une aide, à la fois pour la rédaction et pour l'appropriation du fonctionnement des propriétés, en particulier parce qu'il permet à l'élève de structurer ses déductions et d'identifier les différents statuts (donnée, propriété et déduction).

Dans le cours, les propriétés sont présentées dans un tableau qui montre leur utilisation. L'objectif des exercices qui suivent est aussi d'apprendre aux élèves à utiliser leur cahier de cours pour repérer la (ou les)

propriété(s) en jeu dans l'exercice traité. Les présentations semblables du cours et des exercices devraient faciliter cette tâche.

Les exercices 25 à 28 utilisent un tableau pour présenter le raisonnement. Les élèves sont guidés.

25. Tracer un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 7$ cm et $AC = 3$ cm, puis construire les points E et F symétriques respectifs des points A et B par rapport au point C.

a) Expliquer pourquoi $CE = 3$ cm à l'aide du tableau ci-dessous :

Je sais que	Propriété ou définition	J'en déduis
		$CE = 3$ cm.

- b) On veut expliquer pourquoi $EF = 7$ cm. Pour cela, compléter les phrases ainsi que le tableau qui suit.
E est le symétrique de ... par rapport à C ; F est le symétrique de ... par rapport à C, donc [EF] est le symétrique de ... par rapport à C.

Je sais que	Propriété ou définition	J'en déduis
		$EF = 7$ cm.

- c) Expliquer pourquoi le triangle CEF est rectangle en E. On pourra utiliser un tableau analogue au précédent.
d) Calculer l'aire du quadrilatère ABEF. Justifier.

26. a) Tracer un triangle ABC tel que $AB = 5$ cm, $AC = 4$ cm et $BC = 6$ cm.

b) Placer le point I milieu du segment [BC] puis le point D symétrique de A par rapport à I.

c) Quelle est la longueur du segment [BD] ? Justifier en utilisant le tableau suivant :

Je sais que	Propriété ou définition	J'en déduis
		B est le symétrique de C par rapport à I.
		$BD = \dots$

27. a) Tracer un triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $\widehat{ABC} = 50^\circ$ et $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Placer le point I milieu de [BC] et le point D symétrique de A par rapport à I.

- b) On veut expliquer pourquoi $\widehat{BCD} = 50^\circ$. Pour cela, compléter les phrases et le tableau qui suivent.
B est le symétrique de ... par rapport à
C est le symétrique de ... par rapport à ...
D est le symétrique de ... par rapport à ... donc $\widehat{BCD}$ est le symétrique de ... par rapport à ...

Je sais que	Propriété ou définition	J'en déduis
		$\widehat{BCD} = 50^\circ$.

Dans l'exercice 28, on utilise la propriété « Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors ces deux droites sont parallèles entre elles. ». Celle-ci doit être rappelée.

28. a) Tracer un trapèze EFGH de bases [EF] et [GH]

b) Placer les points I et J, symétriques respectifs de H et G par rapport à F.

c) Expliquer pourquoi les droites (EF) et (JI) sont parallèles en utilisant le tableau suivant

Je sais que	Propriété ou définition	J'en déduis
		$(HG) \parallel (EF)$.
		$(HG) \parallel (IJ)$.
		$(EF) \parallel (IJ)$.

Pour les exercices 29 et 30, l'usage du tableau est laissé à l'initiative de l'élève.

29. a) Tracer un triangle ABC tel que $AB = 8$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm. Construire le point E symétrique de C par rapport à la droite (AB). Expliquer pourquoi $AE = 5$ cm.

30. a) Tracer un triangle ABC tel que $AB = 8$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm. Placer le point I milieu de [BC] et le point D symétrique de A par rapport à I.

b) Expliquer pourquoi $BD = 5$ cm.

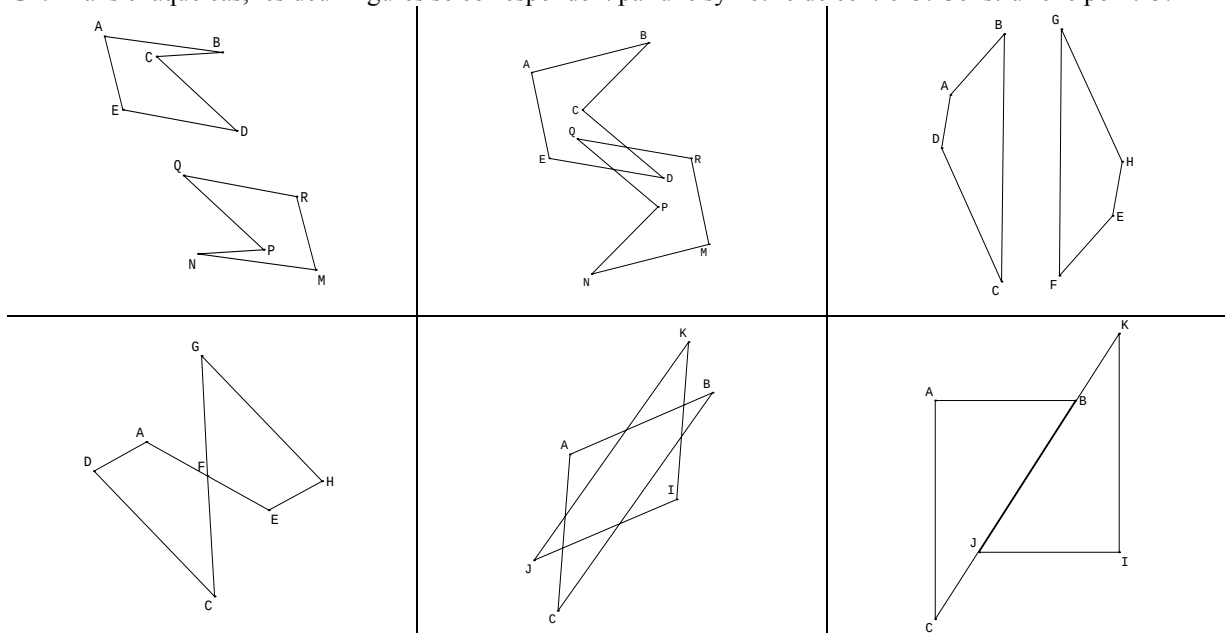
c) Construire le point F symétrique de C par rapport à la droite (AI). Que représente la droite (AI) pour le segment [CF] ?

d) Expliquer pourquoi $AF = 5$ cm.

CENTRE ET AXE DE SYMÉTRIE

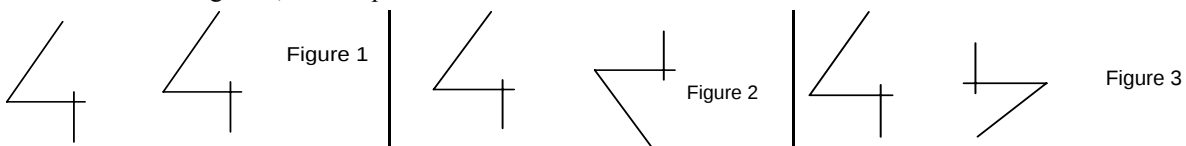
On commence par un exercice où l'élève sait qu'il y a un centre de symétrie...

31. Dans chaque cas, les deux figures se correspondent par une symétrie de centre O. Construire le point O.



... puis on continue par un exercice où l'élève sait qu'il n'y a pas de centre de symétrie.

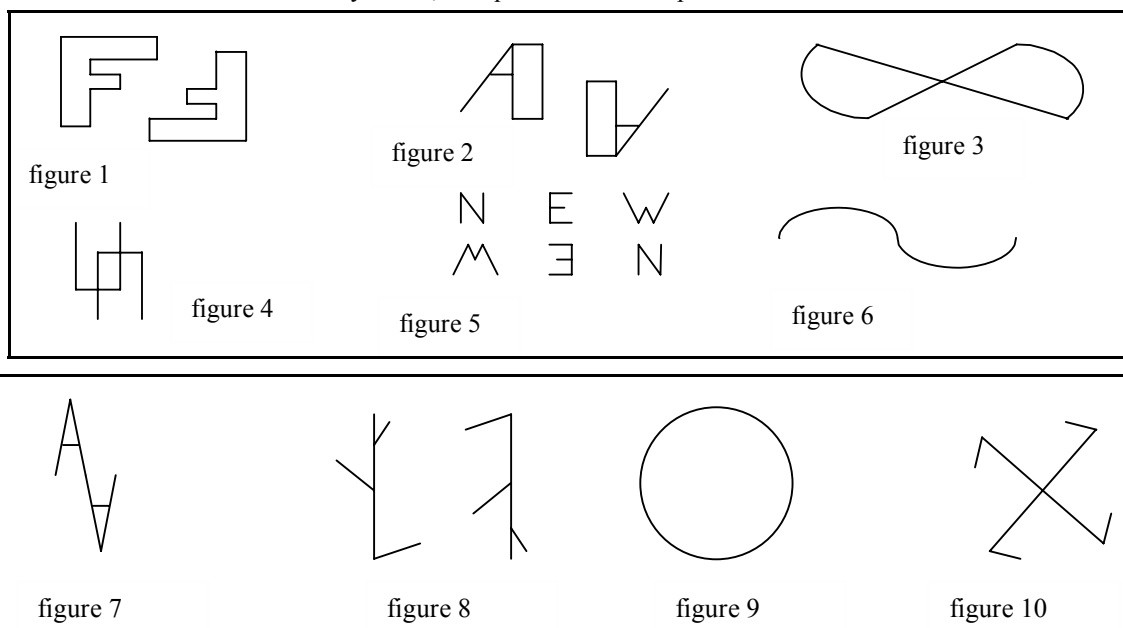
32. Les figures ci-dessous n'admettent pas de centre de symétrie. Pour les figures 1 et 2, donner une bonne raison. Pour la figure 3, donner plusieurs bonnes raisons.

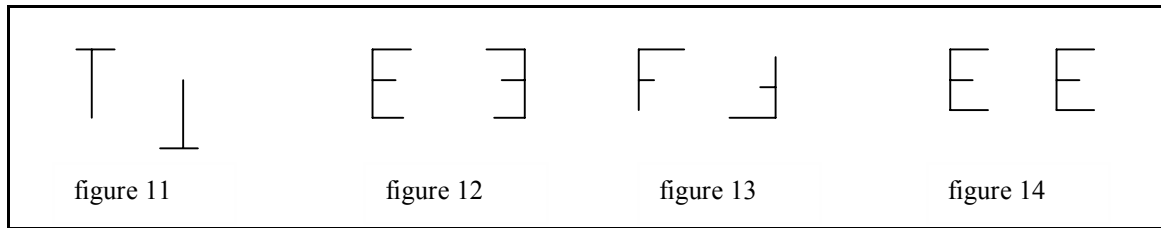


Enfin des exercices où l'on ne précise pas si les figures admettent ou non des centres et des axes de symétrie. La figure 9 permet de réinvestir la recherche du centre d'un cercle à l'aide de médiatrices.

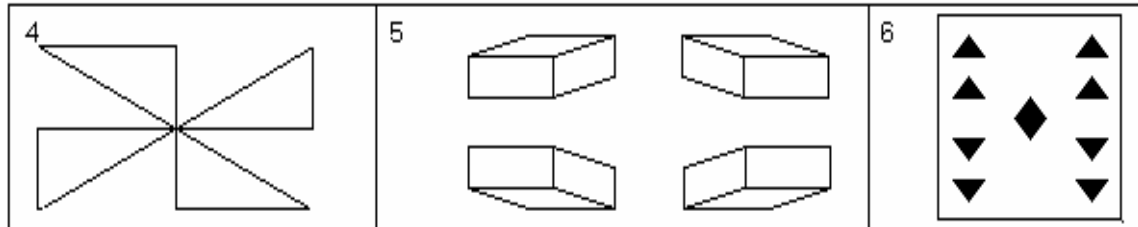
33. Pour chacune des figures suivantes, indiquer :

- si elle admet un ou des axe(s) de symétrie, indiquer leur nombre par écrit et les construire.
- si elle admet un centre de symétrie, indiquer leur nombre par écrit et les construire.

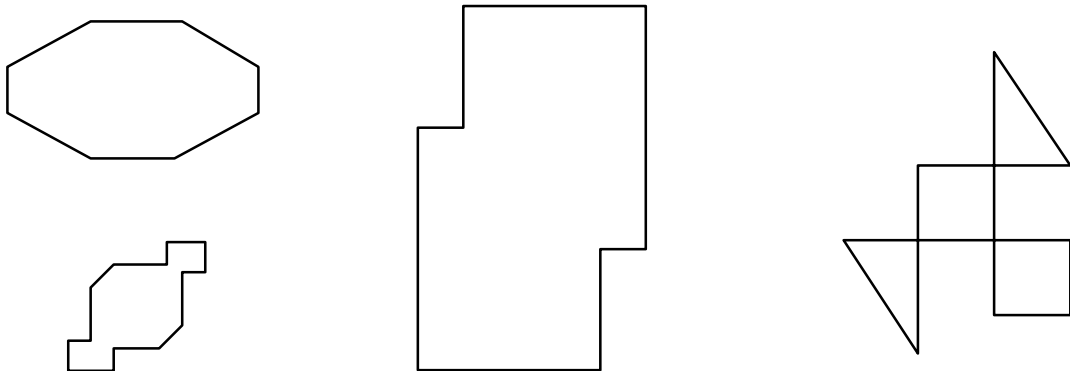




34. Même exercice que 33.



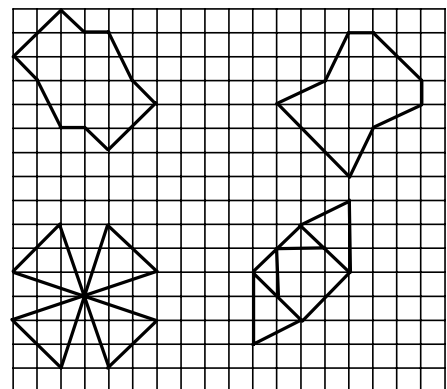
35. Même exercice que 33.



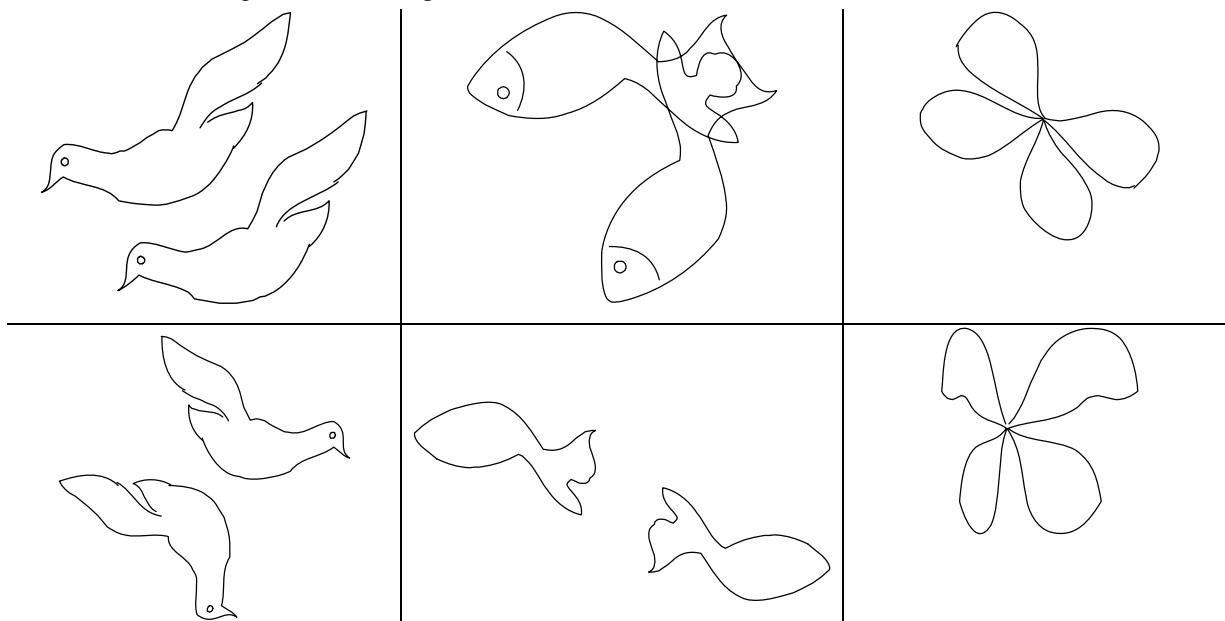
36. Les figures ci-contre ont été tracées en se servant du quadrillage. Toutes les extrémités des segments sont des sommets de carrés du quadrillage.

Sans faire aucune mesure, pour chacune des quatre figures ci-dessus :

- 1) Tracer en vert tous les axes de symétrie, s'ils existent, et indiquer leur nombre.
- 2) Tracer en bleu tous les centres de symétrie, s'ils existent, et écrire leur nombre.



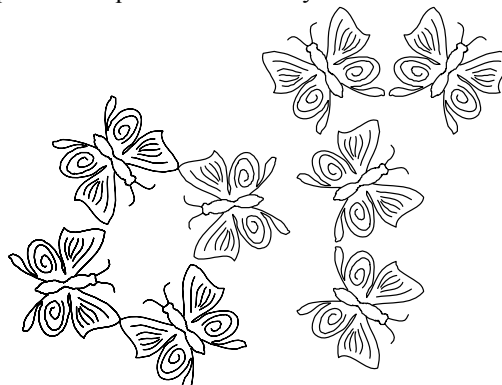
37. Même exercice que 36 avec les figures suivantes.



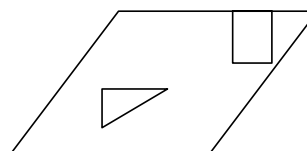
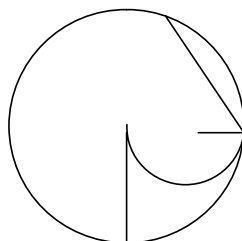
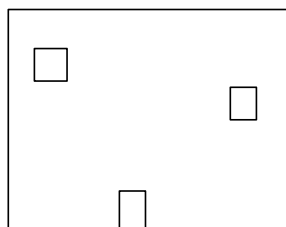
38. Colorier d'une même couleur les papillons ou les groupes de papillons qui sont symétriques par rapport à une droite. Dessiner les axes de symétrie.



Colorier d'une même couleur les papillons ou les groupes de papillons qui sont symétriques par rapport à un point. Marquer le centre de symétrie.



39. Compléter les figures suivantes pour qu'elles admettent chacune un centre de symétrie (marquer ce dernier en vert sur la figure).

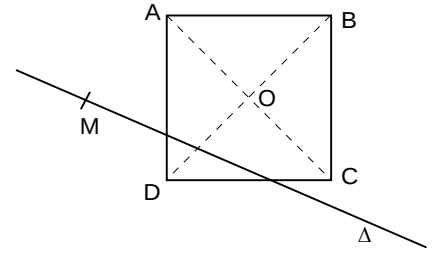


L'exercice 40 est un exercice de recherche utilisant la conservation de l'alignement. On peut le simplifier en donnant des indices : importance du mot « sécante » ou appeler I et J les points d'intersections de Δ avec [AD] et [DC].

40. ABCD est un carré. O est son centre de symétrie. Δ est une droite sécante aux droites (AD) et (DC) et M est un point de Δ .

Construire, ci-contre, en utilisant uniquement une règle non graduée, le symétrique de M par rapport à O. Laisser les traits de construction.

Expliquer soigneusement la méthode.



L'exercice 41 utilise, outre la conservation de l'alignement, la propriété de conservation des longueurs.

On pourra donner aux élèves une figure de départ où des points C et I sont placés de sorte que le piquet C' soit effectivement sur la terre ferme et du même côté de la rivière que les autres piquets.

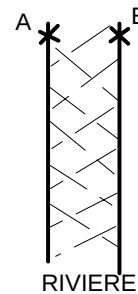
41. Cette figure incomplète explique comment Alain a fait pour mesurer la largeur de la rivière (distance entre les piquets A et B) sans avoir à la traverser.

Tout d'abord, il a placé un piquet en un point C aligné avec les points A et B.

Puis il a placé un piquet en un point I non aligné avec les points A, B et C.

Ensuite, à l'aide de ficelle, il a placé un piquet au point B', symétrique du point B par rapport au point I.

De même, il a placé un piquet au point C', symétrique du point C par rapport au point I.



- 1) Compléter la figure ci-dessus avec les points C, I, B' et C'.
- 2) Construire le point A' tel que le point I soit le milieu du segment [AA'] **en utilisant uniquement la règle non graduée (le compas est interdit)** et en laissant les traits de construction. Expliquer **comment** la construction a été faite et **pourquoi** elle est valable.
- 3) Expliquer comment Alain a pu mesurer la largeur de la rivière et indiquer quelle propriété il a utilisée.

CHAPITRE 9

ANGLES DU TRIANGLE

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Connaître et utiliser, dans une situation donnée, le résultat sur la somme des angles d'un triangle.
- Savoir l'appliquer aux cas particuliers du triangle équilatéral, du triangle rectangle, du triangle isocèle.
- Construire un triangle connaissant la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents.
- Construire un triangle connaissant la longueur de deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés.
- Reconnaître des angles adjacents, complémentaires et supplémentaires.

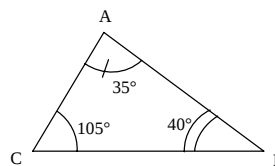
REPÈRES POUR LE CONTENU DU COURS

- Vocabulaire : angles adjacents, complémentaires et supplémentaires.
- Somme des angles d'un triangle.
- Angles du triangle isocèle et réciproque.
- Angles du triangle équilatéral et réciproque.
- Angles du triangle rectangle et réciproque.

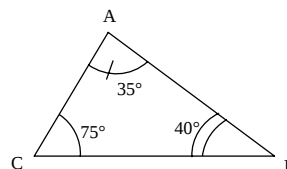
ACTIVITÉ 1 : ANGLES D'UN TRIANGLE QUELCONQUE

Partie 1

- 1) Il est possible de tracer plusieurs triangles vérifiant les conditions données ci-contre. En construire au moins trois et faire des remarques.



- 2) Essayer de construire un triangle vérifiant les conditions données ci-contre. Faire des remarques.



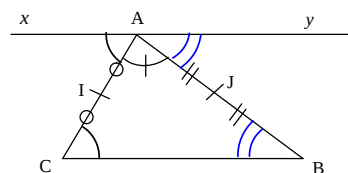
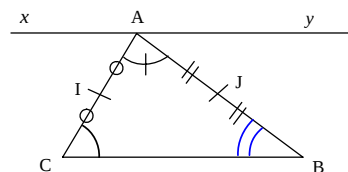
- 3) Compléter le tableau ci-dessous, puis faire une conjecture :

AB	AC	BC	$\widehat{A}$ mesuré au rapporteur	$\widehat{B}$ mesuré au rapporteur	$\widehat{C}$ mesuré au rapporteur	Somme des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$
10 cm	9 cm	6 cm				
10 cm	8 cm	6 cm				
10 cm	7 cm	6 cm				
10 cm	6 cm	6 cm				

Partie 2

On a représenté ci-contre un triangle ABC, avec les milieux I et J de [AC] et [AB] et la droite (xy) parallèle à (BC) passant par A. On veut démontrer que la somme des angles du triangle ABC est égale à 180° .

- 1) On considère la symétrie de centre I :
- Quel est le symétrique du point C ?
 - Quel est le symétrique de la droite (BC) ? Justifier.
 - Quel est le symétrique de l'angle $\widehat{ACB}$?
- 2) Justifier maintenant le nouveau codage de la figure.
- 3) En déduire la somme des angles $\widehat{xAC}$, $\widehat{CAB}$ et $\widehat{BAy}$, puis celle des angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ACB}$.



Objectifs et commentaires

- Prendre conscience qu'un triangle n'est pas parfaitement déterminé par la donnée des mesures de ses trois angles.
- Prendre conscience que lorsque deux angles d'un triangle sont donnés, le troisième est fixé.
- Conjecturer puis démontrer que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° .

La première partie de cette activité vise à remplir les deux premiers objectifs cités plus haut, ainsi que celui de la conjecture sur la somme des angles d'un triangle. On pourra insister sur le fait que la donnée de trois angles ne détermine pas un triangle. C'est aussi une occasion de revoir la construction d'angles de mesures données.

Pour la première construction, on s'intéressera à la forme des différents triangles. On pourra parler alors d'agrandissement et de réduction, en précisant que rien ne peut le justifier, les impressions étant visuelles. La deuxième construction permettra de voir qu'on ne peut pas donner trois mesures quelconques pour les trois angles d'un triangle, que deux mesures étant données, la troisième est fixée.

La troisième question permet d'établir une conjecture sur la somme des angles d'un triangle, en voyant également le cas particulier d'un triangle isocèle. Le deuxième cas donne un triangle rectangle, mais rien ne peut le justifier en classe de cinquième, ce sera important de le préciser.

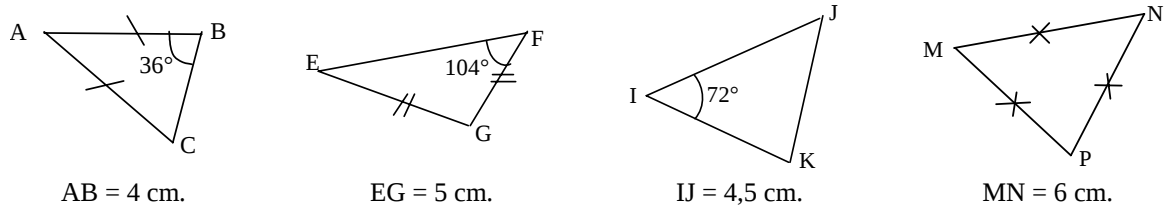
On peut remplacer les tracés et mesures de la troisième question par des observations faites à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

La deuxième partie vise à démontrer la conjecture énoncée plus tôt. On évitera tout excès de rigueur, en ayant conscience que, par exemple, la question 1b est difficile.

On pourra aussi se contenter d'une démonstration orale, mais il est primordial de donner un statut à cette propriété : admise ou démontrée.

ACTIVITÉ 2 : ANGLES D'UN TRIANGLE ISOCÈLE

Voici des schémas de triangles. Leurs propriétés sont codées et les mesures connues sont indiquées.



1) En utilisant la propriété : Si un triangle est isocèle, alors ses angles à la base sont égaux, compléter le tableau :

Triangle	isocèle ou non	sommet principal	Angles égaux
ABC	isocèle		
EFG			
IJK			
MNP			

2) Pour chaque triangle, déterminer, lorsque c'est possible, la mesure de chacun de ses angles.

Objectifs et commentaires

- Savoir repérer les angles à la base d'un triangle isocèle indépendamment de sa position sur la feuille de travail.
- Savoir utiliser la propriété des angles d'un triangle isocèle.

La propriété des angles d'un triangle isocèle n'est pas justifiée dans cette activité. Elle est considérée connue des élèves, mais on pourra la rappeler et montrer comment elle découle des propriétés de la symétrie axiale.

Dans la première question, l'élève doit d'abord s'assurer que le triangle est isocèle en interprétant le codage, puis repérer les angles à la base. Cette étape est importante pour la bonne compréhension des calculs qui seront effectués dans la suite.

Le cas du triangle équilatéral donne lieu à discussion et permet de rappeler qu'un triangle équilatéral est isocèle en ses trois sommets.

Dans la deuxième question, l'élève est amené à utiliser l'égalité de certaines mesures d'angles pour trouver la mesure de tous les angles des triangles, lorsque c'est possible. Dans le triangle IJK, notamment, ce n'est pas possible : on pourra faire construire aux élèves deux triangles différents qui remplissent les deux conditions :

$$\widehat{I} = 72^\circ \text{ et } IJ = 4,5 \text{ cm.}$$

La mise en forme des calculs peut être faite plus tard : l'objectif ici est la détermination des mesures des angles suivie de la vérification sur la figure en vraie grandeur.

Pour la mise en forme des calculs et de leur justification, on pourra amener les élèves à utiliser un tableau comme ci-dessous. Les deux propriétés mises en œuvre apparaissent alors clairement et on voit qu'elles ne sont pas utilisées dans le même ordre :

	Données	Propriété	Conclusion
Pour le triangle ABC :	ABC est isocèle en A.	Si un triangle est isocèle, alors ses angles à la base sont égaux.	$\widehat{B} = \widehat{C}$. Donc $\widehat{C} = 36^\circ$.
	Triangle ABC. $\widehat{B} = 36^\circ$ et $\widehat{C} = 36^\circ$.	La somme des mesures des trois angles d'un triangle est 180°	$\widehat{A} = 180 - (36 + 36)$. $= 180 - 72 = 108$. $\widehat{A} = 108^\circ$.
Pour le triangle EFG :	Triangle EFG. $\widehat{G} = 104^\circ$.	La somme des mesures des trois angles d'un triangle est 180°	$\widehat{E} + \widehat{F} = 180 - 104 = 76$. $\widehat{E} + \widehat{F} = 76^\circ$.
	EFG est isocèle en G.	Si un triangle est isocèle, alors ses angles à la base sont égaux.	$\widehat{E} = \widehat{F} = 76 : 2 = 38$. $\widehat{E} = \widehat{F} = 38^\circ$.

ACTIVITÉ 3

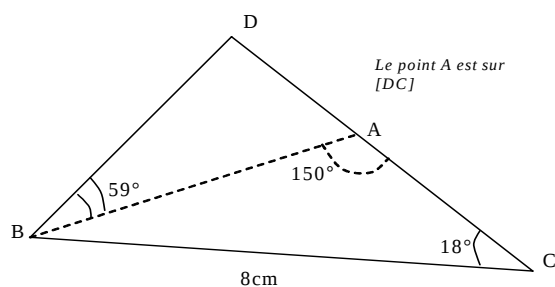
Pour la figure ci-contre, on souhaite :

- savoir si le triangle BDC est rectangle.
- construire ce triangle.

Données :

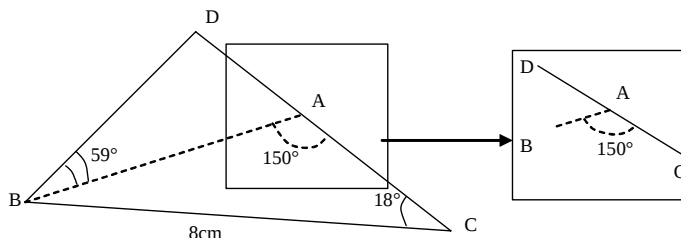
- A est sur [DC].
- $\widehat{DBA} = 59^\circ$.
- $\widehat{BAC} = 150^\circ$.
- $\widehat{ACB} = 18^\circ$.
- BC = 8 cm.

Attention : le schéma n'est pas à l'échelle.

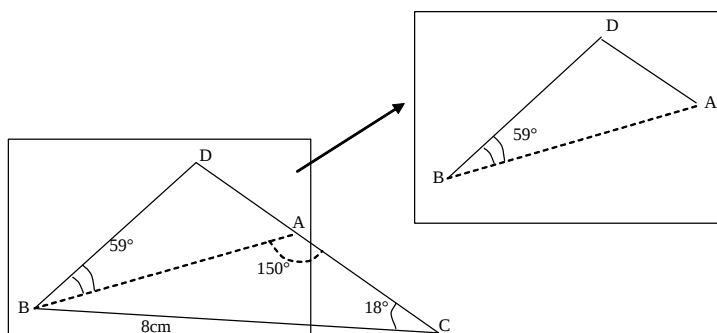


A. Voici une démarche possible pour savoir si le triangle BCD est rectangle

- Calcul de l'angle $\widehat{BAD}$.
 - Quelles sont les données de l'énoncé de départ que nous allons utiliser ?
 - D'après le schéma ci-contre, quelle propriété va-t-on utiliser ?
 - En déduire le calcul de l'angle $\widehat{BAD}$.



- Calcul de l'angle $\widehat{BDC}$.
 - Quelles sont les données de l'énoncé de départ que nous allons utiliser ?
 - Quelle donnée issue de la question précédente va-t-on utiliser ?
 - D'après le schéma, quelle propriété va-t-on utiliser ?
 - En déduire le calcul de l'angle $\widehat{BDC}$.



- Conclusion** : que peut-on en conclure pour le triangle BDC ? Justifier la réponse.

B. Construction du triangle

Construire la figure, en effectuant les calculs nécessaires à côté de la construction.

Objectifs et commentaires

- Apprendre à décomposer les étapes d'une démonstration à l'aide de sous-figures extraites de la figure principale.
- Distinguer les données de départ des données obtenues au fur et à mesure de la résolution.

Dans cette activité, on choisit de guider l'élève en lui imposant les étapes de la démonstration. Une autre stratégie de démonstration est possible et pourra être évoquée avec les élèves. Mais imposer les étapes permet ici de guider le regard de l'élève vers une partie choisie de la figure.

Dans la question 1b, $\widehat{DAB} + \widehat{BAC} = \widehat{DAC}$ et $\widehat{DAC}$ est un angle plat, d'où la propriété attendue : un angle plat mesure 180° .

Dans la question 2b, on fait apparaître le changement de statut de certaines propositions : la « conclusion de l'étape précédente » devient une « donnée nécessaire à l'étape suivante ».

En décomposant la figure de départ en sous-figures, on décompose le raisonnement en étapes simples, associées à une unique propriété dont la sous-figure est l'illustration géométrique. On apprend à lire une figure.

L'élève aura enfin l'initiative de la stratégie lors de la construction. On allège les justifications nécessaires en ne demandant que les calculs d'angles et pas les démonstrations complètes.

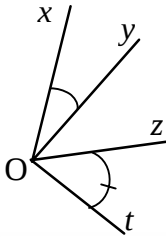
COURS

VOCABULAIRE : ANGLES COMPLÉMENTAIRES, SUPPLÉMENTAIRES, ADJACENTS

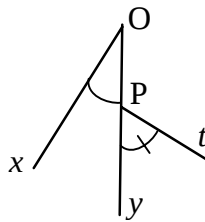
Définition On dit que deux angles sont *adjacents* lorsque :

- ils ont le même sommet ;
- ils ont un côté commun ;
- ils sont situés de part et d'autre du côté commun.

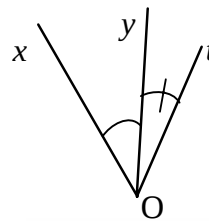
Exemples



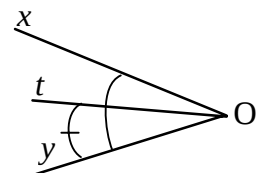
$\widehat{xOy}$ et $\widehat{zOt}$ ne sont pas adjacents.



$\widehat{xOy}$ et $\widehat{yPt}$ ne sont pas adjacents.



$\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOt}$ sont adjacents.

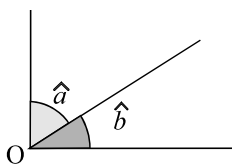


$\widehat{xOy}$ et $\widehat{yOt}$ ne sont pas adjacents.

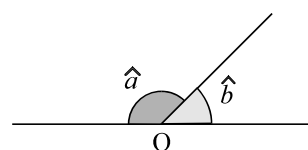
Définitions : On dit que deux angles sont *complémentaires* si la somme de leurs mesures est égale à 90° . On dit que deux angles sont *supplémentaires* si la somme de leurs mesures est égale à 180° .

Exemples

Angles complémentaires : $\widehat{a} + \widehat{b} = 90^\circ$.

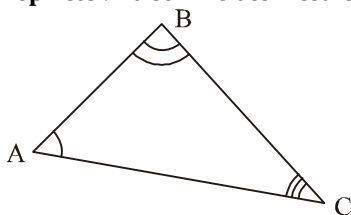


Angles supplémentaires : $\widehat{a} + \widehat{b} = 180^\circ$.



ANGLES D'UN TRIANGLE QUELCONQUE

Propriété : La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .



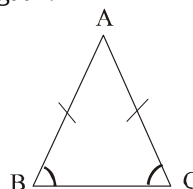
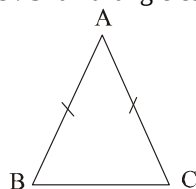
$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ.$$

Application au calcul de la mesure du troisième angle d'un triangle

	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	Dans le triangle ABC, $\widehat{BAC} = 59^\circ$ et $\widehat{ABC} = 72^\circ$.	La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° .	$\widehat{ACB} = 180^\circ - (72^\circ + 59^\circ)$ $= 180^\circ - 131^\circ = 49^\circ$.

ANGLES D'UN TRIANGLE ISOCÈLE

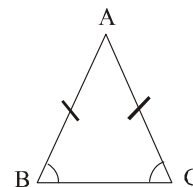
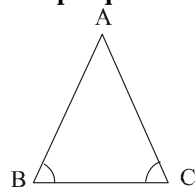
Propriété : Si un triangle est isocèle, alors les deux angles à la base sont égaux.



Application

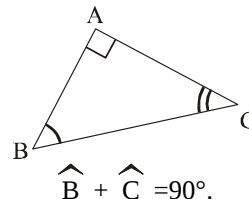
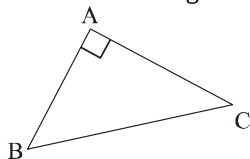
	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	Le triangle MNP isocèle en M, $\widehat{MNP} = 48^\circ$.	Si un triangle est isocèle, alors ses angles à la base ont la même mesure.	$\widehat{MPN} = \widehat{MNP} = 48^\circ$
	$\widehat{MPN} = \widehat{MNP} = 48^\circ$	La somme des angles d'un triangle est égale à 180° .	$\widehat{PMN} = 180 - 2 \times 48 = 94^\circ$.

Propriété réciproque : Si un triangle a deux angles égaux, alors il est isocèle.



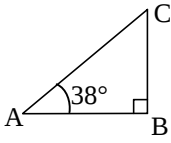
ANGLES D'UN TRIANGLE RECTANGLE

Propriété : Si un triangle est rectangle, alors la somme des deux angles aigus vaut 90° .



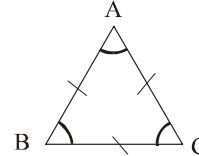
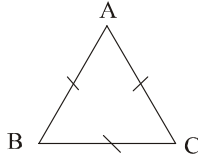
$$\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ.$$

Application

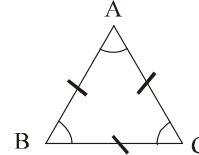
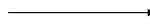
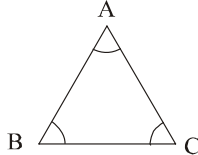
	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	Le triangle ABC est rectangle en A. $\widehat{BAC} = 38^\circ$.	Si un triangle est rectangle, alors la somme de ses deux angles aigus est égale à 90° .	$\widehat{ACB} = 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ$.

ANGLES D'UN TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

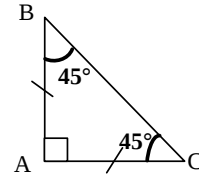
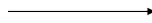
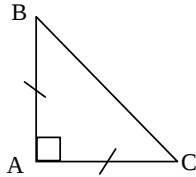
Propriété : Si un triangle est équilatéral, alors ses trois angles sont égaux. Chaque angle mesure 60° .



Propriété réciproque : Si un triangle a tous ses angles égaux, alors il est équilatéral.

**ANGLES D'UN TRIANGLE RECTANGLE ISOCÈLE**

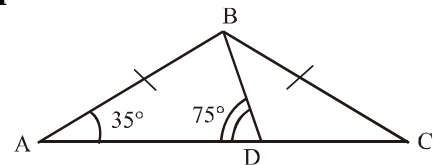
Propriété : Si un triangle est rectangle et isocèle, alors ses deux angles aigus mesurent chacun 45° .

**POINTS DE REPÈRE / MÉTHODES****Savoir calculer la mesure des angles d'une figure complexe.****Énoncé**

ABC est un triangle isocèle en B. D est un point du segment [AC].

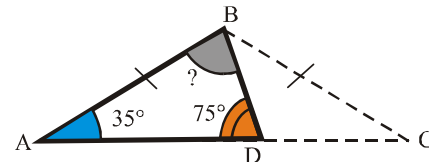
$$\widehat{BAC} = 35^\circ, \widehat{BDA} = 75^\circ.$$

Calculer la mesure des angles $\widehat{ABD}$, $\widehat{BDC}$, $\widehat{BCD}$.



1) Calcul de la mesure de l'angle $\widehat{ABD}$.

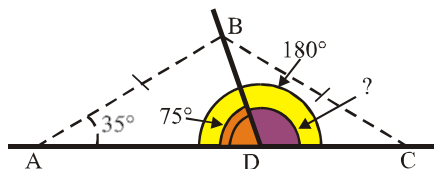
Recherche : L'angle $\widehat{ABD}$ est un angle du triangle ABD et on connaît la mesure des deux autres angles de ce triangle.

**Solution**

Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
Dans le triangle ABD, $\widehat{BAC} = 35^\circ$ et $\widehat{BDA} = 75^\circ$.	La somme des angles d'un triangle est égale à 180° .	$\widehat{ABD} = 180^\circ - (35^\circ + 75^\circ)$ $= 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. Conclusion : $\widehat{ABD} = 70^\circ$.

2) Calcul de la mesure de l'angle $\widehat{BDC}$.

Recherche : L'angle $\widehat{BDC}$ est adjacent à l'angle $\widehat{BDA}$ et les points C, D et A étant alignés, l'angle $\widehat{CDA}$ est plat.



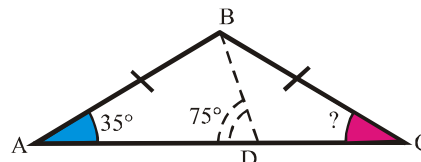
Solution

Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
$\widehat{BDA} = 75^\circ$ et $\widehat{CDA}$ est plat.	Un angle plat mesure 180° .	$\widehat{BDC} = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$. Conclusion : $\widehat{BDC} = 105^\circ$.

3) Calcul de la mesure de l'angle $\widehat{BCD}$.

Recherche : L'angle $\widehat{BCD}$ est un angle du triangle BCD, mais ce triangle BCD n'a pas de particularité et on ne connaît qu'un seul de ses angles.

L'angle $\widehat{BCD}$ est aussi un angle du triangle ABC et on sait que ce triangle est isocèle en B. L'angle $\widehat{BCD}$ est un angle à la base de ce triangle et on connaît la mesure de l'autre angle à la base.



Solution

Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
Le triangle ABC est isocèle en B et $\widehat{BAC} = 35^\circ$. Si un triangle est isocèle, alors ses angles à la base ont la même mesure.	$\widehat{BCA} = \widehat{BAC} = 35^\circ$. Conclusion : $\widehat{BCD} = 35^\circ$.	

EXERCICES

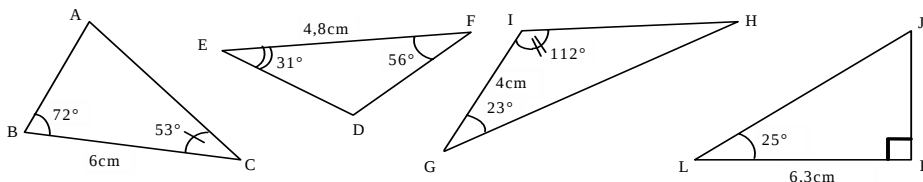
CONSTRUCTIONS

De nombreux exercices de ce chapitre ont été extraits ou inspirés du livre de l'IREM de Strasbourg, édité en 1992 aux éditions ISTR.

Abus de langage : dans certains exercices, on demande clairement de calculer la mesure de l'angle cherché, dans d'autres, on commet l'abus de langage consistant à confondre l'angle avec sa mesure. Il est recommandé d'en avertir l'élève pour qu'il en ait conscience.

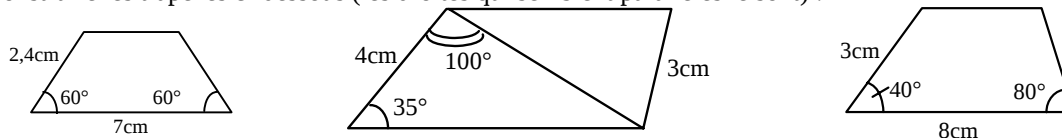
L'exercice 1 fait travailler le passage d'une figure à une figure, le codage et les renseignements écrits devant être respectés. On vise ici un des objectifs du programme, qui est la construction d'un triangle connaissant deux angles et le côté adjacent à ces deux angles.

1. Reproduire les triangles ci-dessous grandeur réelle :



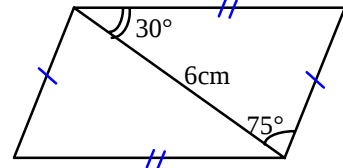
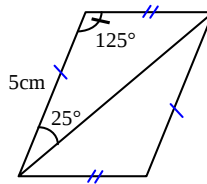
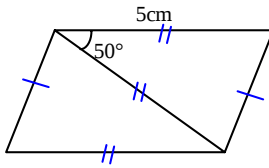
On poursuit, dans l'exercice 2 les objectifs de l'exercice 1, avec une contrainte supplémentaire : la prise en compte de droites parallèles. On pourra suggérer, le moment venu, de nommer les différents sommets.

2. Construire les trapèzes ci-dessous (les droites qui semblent parallèles le sont) :



On ne mentionne pas que les figures de l'exercice 3 sont en réalité des parallélogrammes ; pour les construire, il suffit de respecter le codage. Il s'agit aussi de comprendre que la construction peut se faire triangle par triangle et de prendre conscience que le quadrilatère en vraie grandeur n'a pas forcément la même forme que sur le dessin codé.

3. Construire les quadrilatères ci-dessous :



Dans l'exercice 4, on incitera les élèves à commencer par faire un schéma à main levée traduisant la situation, afin de faciliter le passage du registre de la langue naturelle au registre géométrique.

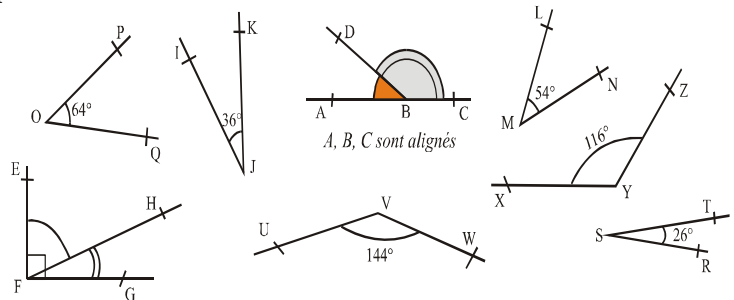
4. 1) Tracer un triangle ABC tel que : $AB = 3\text{cm}$, $AC = 4,7\text{cm}$, $\widehat{BAC} = 49^\circ$.
- 2) Tracer un triangle EFG tel que : $EF = 5,3\text{cm}$, $\widehat{GEF} = 29^\circ$, $\widehat{GFE} = 63^\circ$.
- 3) Tracer un quadrilatère HIJK tel que : $HI = 3\text{cm}$, $HK = 5\text{cm}$, $IJ = 4,2\text{cm}$, $\widehat{IHK} = 61^\circ$, $\widehat{JIK} = 27^\circ$.
- 4) Tracer un quadrilatère LMNO tel que : $OM = 5\text{cm}$, $\widehat{LOM} = 120^\circ$, $\widehat{LMO} = 25^\circ$, $\widehat{MON} = 34^\circ$, $\widehat{OMN} = 107^\circ$.

ANGLES ADJACENTS, COMPLÉMENTAIRES ET SUPPLÉMENTAIRES

L'exercice 5 vise à faire travailler le nouveau vocabulaire.

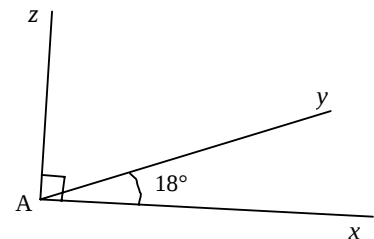
5. Parmi les angles ci-contre, citer toutes les paires :

- a) d'angles complémentaires.
- b) d'angles supplémentaires.
- c) d'angles adjacents complémentaires.
- d) d'angles adjacents supplémentaires.



Dans les exercices 6 à 11, on continue à faire travailler le vocabulaire et on ajoute des calculs d'angles. Ces calculs peuvent être présentés sous forme de tableaux à deux colonnes, comme suggéré dans l'exercice 6, afin que l'élève pointe correctement les angles utilisés pour le calcul à effectuer. On en profite également pour revoir la notion de bissectrice d'un angle. On pourra exiger la construction de la bissectrice à la règle et au compas, après en avoir rappelé la justification à l'aide de propriétés de la symétrie axiale.

6. 1) Reproduire cette figure de manière précise et la compléter en traçant la bissectrice de l'angle $\widehat{yAz}$. Nommer cette bissectrice [At].
- 2) En présentant sous la forme d'un tableau à deux colonnes : *Données* et *Calculs*, calculer la mesure des angles :
 - a) $\widehat{yAz}$; b) $\widehat{zAt}$; c) $\widehat{tAx}$

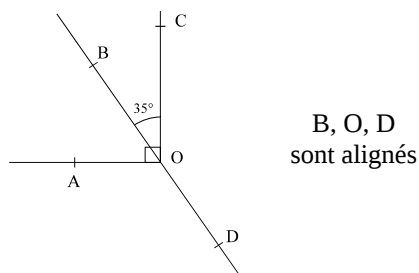


Pour le dernier angle, on peut trouver deux méthodes.

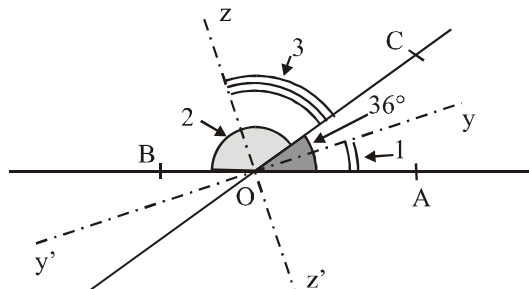
7. a) Indiquer :

- des angles complémentaires,
- des angles supplémentaires,
- des angles adjacents.

b) Calculer les mesures en degrés des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$.

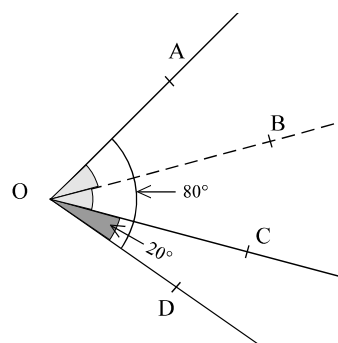


8. Dans la figure ci-contre, A, O, B sont alignés, (yy') est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOC}$ et (zz') est la bissectrice de l'angle $\widehat{COB}$. Calculer les angles $\widehat{AOy}$ (angle 1), $\widehat{AOC}$, $\widehat{COB}$ (angle 2) puis $\widehat{Coz}$ (angle 3)



9. Sur la figure ci-contre, $\widehat{DOA}$ mesure 80° et $\widehat{DOC}$ mesure 20° .

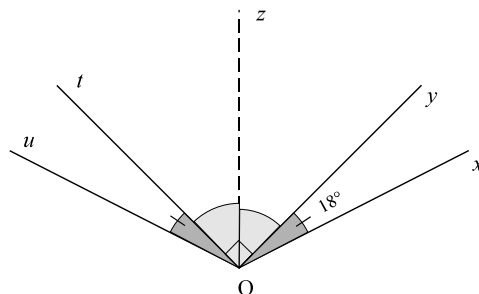
- a) Quel nom peut-on donner à la demi-droite [OB) ?
- b) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{DOB}$.



10. a) Calculer les mesures des angles

$$\widehat{tOz}, \widehat{tOx}, \widehat{uOy} \text{ et } \widehat{uOx}.$$

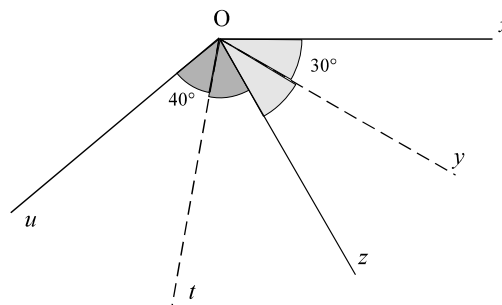
- b) Quelle est la bissectrice de l'angle $\widehat{uOx}$? de l'angle $\widehat{tOy}$? Justifier les réponses.



11. a) Calculer les mesures des angles

$$\widehat{xOz}, \widehat{xOt}, \widehat{xOu} \text{ et } \widehat{yOt}.$$

- b) Exprimer $\widehat{yOt}$ en fonction de $\widehat{xOu}$.

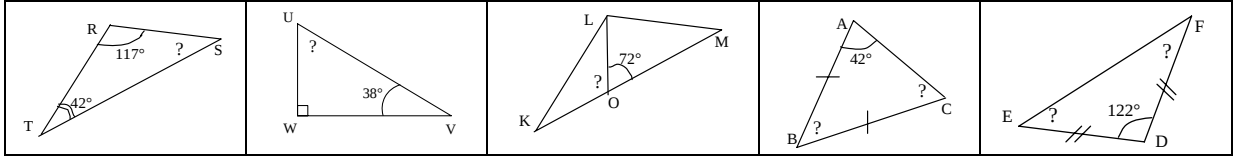


CALCULER DES ANGLES

Dans les exercices 12 à 22, on demande des calculs sans rédaction : celle-ci représente en effet une difficulté supplémentaire et pas la moindre. On va donc s'assurer, dans un premier temps, que les calculs d'angles, dans différentes situations, sont relativement bien maîtrisés, que les situations de base sont reconnues dans les figures plus complexes.

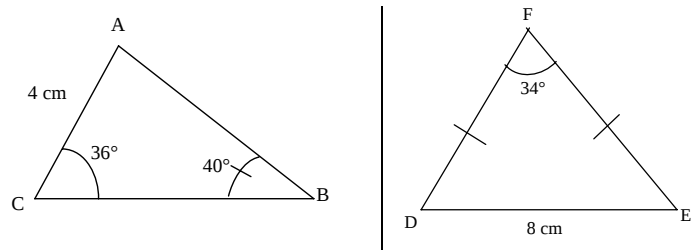
L'objectif de l'exercice 12 est de familiariser l'élève à des situations « basiques » qu'il retrouvera en « sous-figures » dans des situations plus complexes : ainsi, le cas des angles supplémentaires à « l'intérieur » d'un triangle, et le cas d'un triangle isocèle avec plusieurs orientations possibles de ce triangle. Dans ce dernier cas, on demandera à l'élève de commencer par coder les deux angles égaux, après avoir, par exemple, colorié la base de ce triangle.

12. Calculer les mesures des angles marqués avec un point d'interrogation :



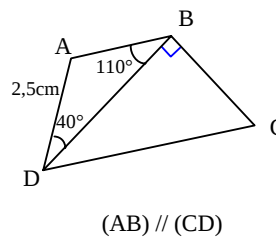
Dans l'exercice 13, les calculs sont nécessaires pour reproduire les deux triangles. On laissera, dans un premier temps, l'élève affronter cette difficulté : pour le premier triangle, il commencera ainsi à tracer le segment $[AC]$, puis un angle $\widehat{ACx}$ mesurant 36° , et c'est là qu'il s'apercevra de la nécessité de calculer l'angle $\widehat{A}$.

13. Construire les deux triangles ci-contre :



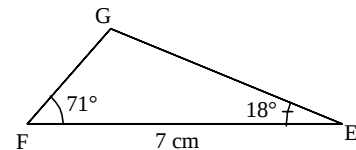
Mêmes objectifs que dans l'exercice 13, avec, pour la construction, la gestion d'une contrainte supplémentaire : la prise en compte des parallèles.

14. Construire le trapèze ci-contre :



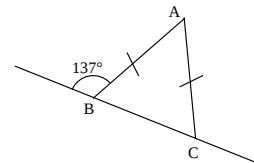
Dans l'exercice 15, le calcul de l'angle manquant se fait après la construction, pour justifier la réponse à la question posée.

15. Reproduire la figure. Le triangle EFG est-il rectangle ? Pourquoi ?



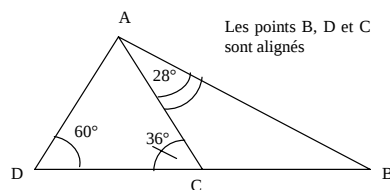
Deux situations basiques dans l'exercice 16 : angles supplémentaires et triangle isocèle. On peut suggérer aux élèves de commencer par coder sur la figure les angles égaux, en précisant oralement la propriété utilisée.

16. Compléter la figure en indiquant les mesures manquantes des angles. Écrire les calculs effectués.



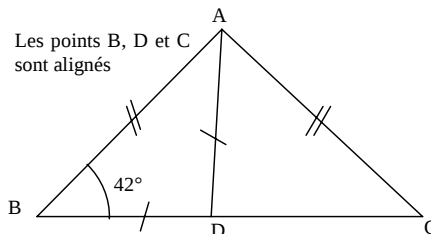
Trois situations « clés » dans l'exercice 17 : angles supplémentaires et deux situations triangulaires triangle isocèle. On peut suggérer aux élèves de commencer par identifier et dessiner à main levée chacune de ces trois situations, l'ordre des calculs effectués dépend de cette identification (Voir activité 3).

17. 1) Reproduire cette figure sachant que $CD = 4$ cm et que les points D, C et B sont alignés.
 2) Citer deux angles supplémentaires.
 3) Compléter la figure en indiquant les mesures manquantes des angles. Écrire les calculs effectués.



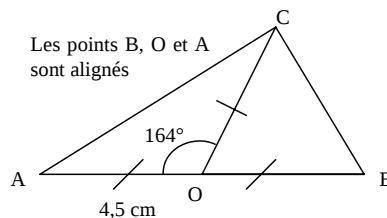
L'exercice 18 combine les objectifs des exercices 16 et 17. On pourra suggérer la même démarche que dans les exercices précédents.

18. 1) Reproduire la figure avec $AB = 5,5$ cm.
 2) Compléter la figure en indiquant les mesures manquantes des angles. Écrire les calculs effectués.



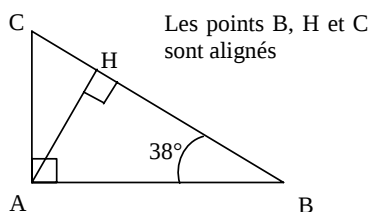
Toujours la même démarche dans l'exercice 19, avec, pour terminer, un dernier calcul d'angle pour justifier la nature du triangle ABC.

19. Compléter la figure en indiquant les mesures manquantes des angles. Écrire les calculs effectués. Que peut-on en conclure ?



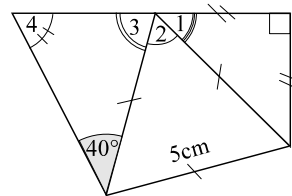
Dans l'exercice 20, on pourra suggérer aux élèves de tracer à main levée les différents triangles rectangles apparaissant sur la figure, en indiquant les angles connus pour chacun d'eux. Plusieurs stratégies sont possibles, il est intéressant de les comparer.

20. a) Reproduire cette figure sachant que $AB = 6$ cm.
 b) Compléter la figure en indiquant les mesures manquantes des angles. Écrire les calculs effectués, sans les rédiger.
 c) Citer des paires d'angles complémentaires.



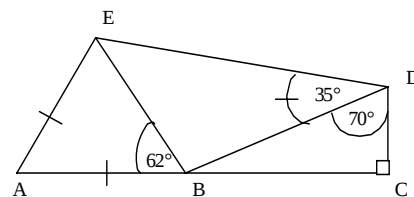
Dans l'exercice 21, on commence par demander aux élèves de mettre les noms des points sur la figure, ce qui leur permet de mieux s'approprier cette figure.

21. 1) D'après les indications suivantes et les codages de la figure, placer les points A, B, C, D, E sur la figure ci-contre :
 • A, E, B sont trois points alignés ;
 • BDE est un triangle rectangle isocèle ;
 • DCB est un triangle équilatéral.
 2) Reproduire la figure en vraie grandeur.
 3) Calculer la valeur des angles 1), 2), 3), 4) en indiquant les propriétés utilisées.
 4) Le triangle ABC est-il isocèle ? Justifier.

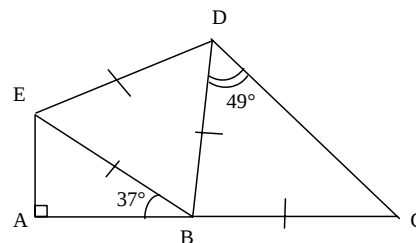


Dans les exercices 22 et 23, on poursuit les objectifs précédents avec des figures plus complexes. Il est important de noter la différence de statut de l'alignement des points dans les deux figures : dans la première, l'alignement est une donnée, dans la seconde, c'est la conclusion de l'exercice.

22. On sait que A, B et C sont alignés. Compléter ce croquis en indiquant les mesures manquantes des angles. Écrire les calculs effectués.



23. 1) Compléter la figure en indiquant les mesures manquantes des angles. Écrire les calculs effectués, sans les rédiger
- 2) Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier.



APPRENDRE A RÉDIGER

Dans l'exercice 24, on travaille les changements de registre entre schéma géométrique et texte.

L'objectif de cet exercice, qui est un préalable à la rédaction, est d'amener l'élève à justifier la nature d'un triangle, et, pour cela, de choisir entre une définition et une propriété. On encouragera les élèves à mettre en évidence ce qu'ils utilisent. Afin de faciliter le travail, on pourra numéroter les propriétés du cours.

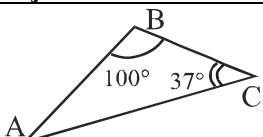
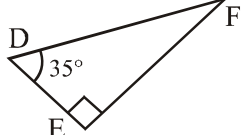
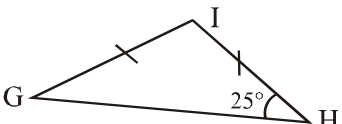
24. Compléter le tableau suivant :

Ce que je sais		Règle utilisée	Ce que je déduis
Données sous forme de phrases	Données sous forme de schéma	Définition ou propriété	Nature du triangle
Triangle IRO tel que $RO = OI$		Définition du triangle isocèle.	IRO est isocèle en
Triangle CKO tel que $KO = CK$ et $\widehat{KCO} = 90^\circ$			
Triangle MAT tel que $\widehat{AMT} = \widehat{MTA}$			
		Définition du triangle équilatéral.	EQU est

Dans l'exercice 25, la structure du tableau permet à l'élève de s'interroger sur le sens de chaque propriété, sur les données nécessaires à son utilisation et sur la déduction qu'elle entraîne. On commence par la rédaction de calculs dans des figures « clé », comme dans la partie précédente. Le cas du triangle isocèle est analysé dans la partie activités. On pourra suggérer, comme dans la partie précédente, de commencer par coder les angles égaux dans le cas de triangles isocèles.

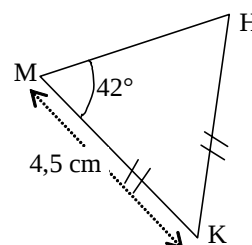
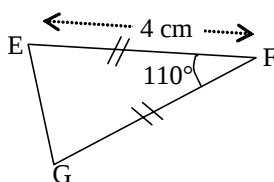
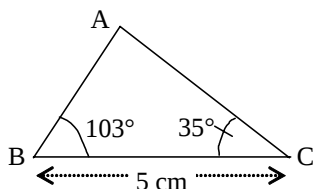
Pour les triangles IGH et KLM, le raisonnement comporte deux étapes (deux pas de déduction), d'où la subdivision de certaines lignes du tableau. Il faut rendre les élèves attentifs à cette difficulté supplémentaire. Le tableau n'est pas l'outil le plus adapté à un enchaînement de pas de déduction ; il faut veiller à réserver cette présentation à des situations qui ne comportent pas plus de deux pas de déduction.

25. Compléter le tableau suivant :

Ce que je sais : Données connues	Propriétés	Ce que je déduis : Calculs d'angles
		$\widehat{BAC} =$
		
		$\widehat{IGH} =$
		$\widehat{GIH} =$

On poursuit les objectifs précédents dans l'exercice 26.

26. Voici trois triangles donnés à l'aide de schémas.



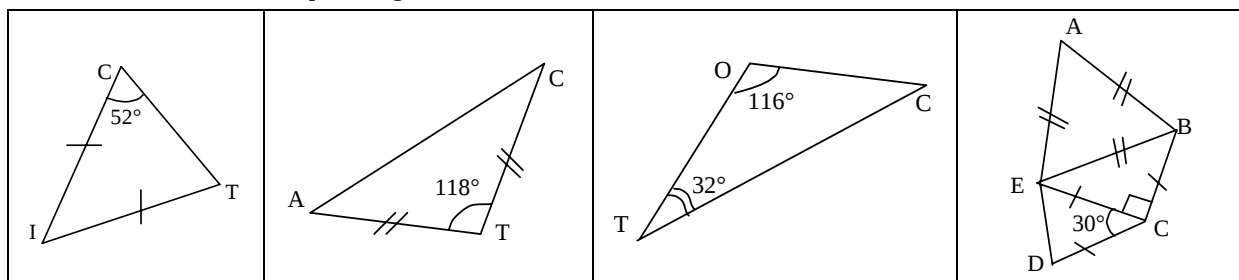
a) Faire un tableau comme celui ci-dessous et calculer la mesure des angles $\widehat{A}$, $\widehat{E}$, $\widehat{G}$, $\widehat{H}$, $\widehat{K}$.

Triangle	Ce que je sais	Propriétés	Ce que je déduis
ABC			
EFG			
MHK			

b) Construire ces trois triangles sur papier non quadrillé.

Dans l'exercice 27, on complète les objectifs précédents, on y ajoute la reconnaissance d'un triangle isocèle. Pour le dernier cas, l'élève aura à faire un raisonnement dans chaque triangle, il lui restera à conclure par l'alignement des points A, E et D qui se justifie par la propriété : « Si l'angle $\widehat{AED}$ est plat, alors les points A, E et D sont alignés. »

27. Voici les schémas de quatre figures.



- 1) a) Pour les triangles TIC, TAC et TOC, calculer les mesures d'angles qui manquent et justifier. Présenter le raisonnement dans un tableau à trois colonnes : **Données utilisées, Propriété, Calculs.**
- b) Le triangle TOC est-il isocèle ? Justifier.

- 2) Pour la quatrième figure,
 a) écrire les données
 b) les points A, E, D sont-ils alignés ?

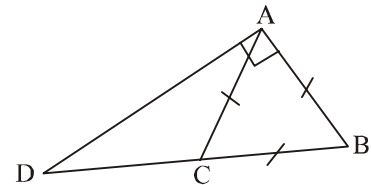
La justification nécessite plusieurs étapes. Les présenter dans un tableau comme dans la question précédente.

Dans l'exercice 28, après avoir traité la première question, l'élève doit comprendre que pour répondre à la question posée, il doit calculer les trois angles du triangle ACD. On lui fera remarquer qu'il peut procéder, comme dans la partie « calculer sans rédiger », en traçant un schéma à main levée de la figure clé utilisée pour le calcul de chaque angle. Il lui restera alors à rédiger chaque calcul en utilisant la structure du tableau.

28. La figure ci-contre n'est pas exacte, mais on sait que :

- le triangle ABC est équilatéral.
- La droite (AD) est perpendiculaire à la droite (AB).
- Les points B, C, D sont alignés.

- 1) Calculer, en complétant le tableau ci-dessous, la mesure des trois angles du triangle ACD.



- 2) Le triangle ACD est-il isocèle ? Pourquoi ?

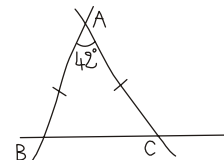
Angles	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
$\widehat{\text{CAD}}$	Triangle ABC		$\widehat{\text{BAC}} =$
			$\widehat{\text{CAD}} =$
$\widehat{\text{ACD}}$			$\widehat{\text{ACB}} =$
			$\widehat{\text{ACD}} =$
$\widehat{\text{ADB}}$			$\widehat{\text{ADB}} =$

RÉDIGER DES CALCULS D'ANGLES

Dans les exercices suivants, la rédaction peut se faire en utilisant ou non un tableau.

Les cas des exercices 29 à 32 ont déjà été évoqués dans les deux parties précédentes.

29. Calculer la mesure des angles $\widehat{\text{ABC}}$ et $\widehat{\text{BCA}}$. Rédiger ces calculs.

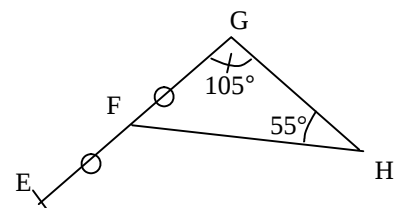


30. Indiquer dans chaque cas la particularité du triangle ABC. Rédiger les calculs.

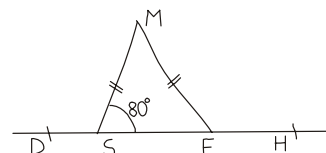
- a) $\widehat{\text{A}} = 32^\circ$ et $\widehat{\text{B}} = 58^\circ$.
 b) $\widehat{\text{B}} = 37^\circ$ et $\widehat{\text{A}} = 106^\circ$.
 c) $\widehat{\text{A}} = \widehat{\text{C}} = 45^\circ$.
 d) $\widehat{\text{B}} = 58^\circ$ et $\widehat{\text{C}} = 61^\circ$.
 e) $\widehat{\text{B}} = 73^\circ$ et $\widehat{\text{C}} = 17^\circ$.

31. Sur la figure ci-contre, on sait que F est le milieu de [EG].

- 1) Calculer la mesure des angles $\widehat{\text{GFH}}$ et $\widehat{\text{HFE}}$.
 Rédiger les calculs dans un tableau.
 2) Reproduire la figure sachant que $\text{FG} = 4 \text{ cm}$.



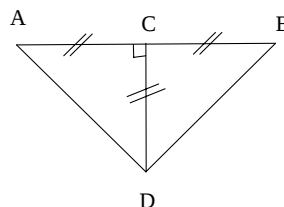
32. Sur cette figure, les points D, S, F et H sont alignés. Calculer la mesure des angles $\widehat{MFS}$, $\widehat{SMF}$, $\widehat{MFH}$ et $\widehat{MSD}$. Rédiger les calculs.



Les objectifs des exercices 33 et 34 reprennent ceux des exercices précédents. On y ajoute le tracé de figures, la construction de bissectrices et l'utilisation, dans un raisonnement, de la définition de la bissectrice d'un angle. On pourra suggérer l'utilisation d'un tableau plus particulièrement pour la rédaction de cette partie.

33. 1) Tracer un triangle ABC tel que $AB = 8$ cm, $\widehat{BAC} = 48^\circ$ et $\widehat{ABC} = 62^\circ$, calculer $\widehat{ACB}$.
 2) Tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$, elle coupe le côté [AB] en E. Calculer les mesures des angles des triangles AEC et BEC.
34. 1) Tracer un triangle ABC isocèle en A, tel que $\widehat{BAC} = 40^\circ$ et $AC = 7$ cm.
 2) Calculer $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.
 3) Tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$. Elle coupe [AB] en E.
 4) Calculer les mesures des angles des triangles AEC et BEC. Rédiger ces calculs.

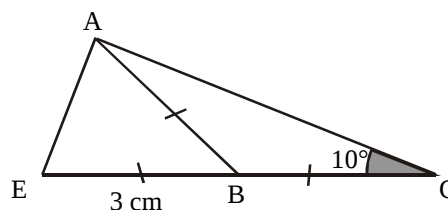
35. Dans la figure ci-contre, ABD est un triangle, C est le milieu du segment [AB]. Les droites (CD) et (AB) sont perpendiculaires et les segments [AC] et [CD] ont la même longueur.



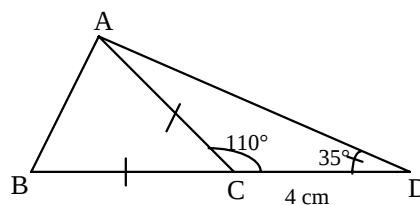
- a) Calculer les mesures des angles $\widehat{CAD}$ et $\widehat{CDA}$, puis celles des angles $\widehat{CBD}$ et $\widehat{CDB}$.
 b) Quelle est la nature du triangle ABD ? Justifier la réponse.

Les exercices 36 à 38 sont des variations autour du même thème : la découverte, dans des cas particuliers, de propriétés ou caractérisations du triangle rectangle, propriétés qui seront établies dans le programme de quatrième. La démarche avec les calculs d'angles a déjà été explicitée dans les exercices précédents. Dans l'exercice 38, les angles sont précisément nommés, dans l'exercice 37, on parle d'angles de triangles, dans l'exercice 48, l'ordre des calculs est laissé à la liberté de l'élève.

36. Dans la figure ci-contre, ACE est un triangle et B est le milieu du côté [EC].
- a) Reproduire la figure en vraie grandeur.
 b) Calculer les mesures des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{ABE}$, $\widehat{BAE}$.
 c) Quelle est la nature du triangle EAC ? Justifier la réponse.

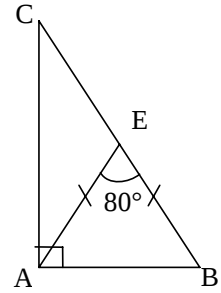


37. On sait que B, C et D sont alignés.
- a) Reproduire cette figure en vraie grandeur.
 b) Calculer les mesures des angles des triangles ACD et ABC. Rédiger les calculs.
 c) Quelle est la particularité du triangle ACD ? Justifier.
 d) Quelle est la particularité du triangle ABD ? Justifier.
 e) Que représente le point C pour le segment [BD] ? Justifier.



38. Sur la figure ci-contre, on sait que le triangle ABC est rectangle en A, que le triangle AEB est isocèle en E et que les points B, E et C sont alignés.

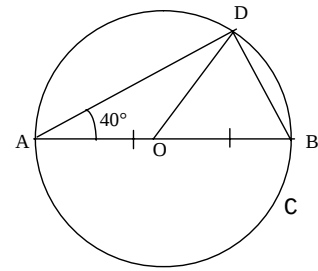
- Calculer les mesures de tous les angles de la figure.
- Le triangle AEC est-il isocèle ? Justifier.



Les exercices 39 et 40 permettent, dans ces cas particuliers, de voir des propriétés liant cercle et triangle rectangle.

39. On sait, sur cette figure, que O est le centre du cercle C, que D est un point de ce cercle et [AB] un diamètre.

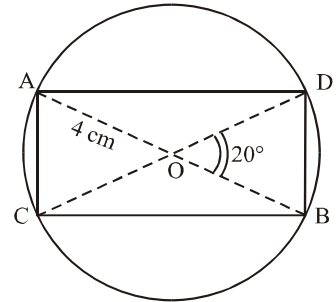
- Expliquer pourquoi les triangles AOD et BOD sont isocèles en O.
- Calculer les mesures des angles du triangle OAD.
- Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BOD}$.
- Expliquer pourquoi le triangle ABD est rectangle en D.



40. Les points A, B, C, D sont sur un cercle de centre O et de rayon 4 cm.

[AB] et [CD] sont deux diamètres de ce cercle ; $\widehat{DOB} = 20^\circ$.

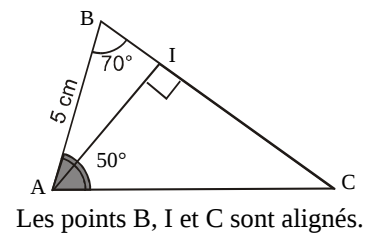
- Construire la figure en vraie grandeur.
- Calculer les mesures des angles des triangles OBD, OAD, OAC et OCB.
- Calculer les mesures des angles du quadrilatère ADCB.



Les exercices 41 à 43 apportent une grande variété de situations. L'objectif général reste le même. Selon la formulation de l'énoncé, les calculs d'angles sont précisément nommés ou laissés au choix de l'élève. Dans ce dernier cas, il aura à gérer l'ordre de ces calculs. Le fait de demander la propriété en jeu pour le calcul permet à l'élève de rester dans la logique de la géométrie déductive.

41. Dans la figure ci-contre, I est un point de [BC] et les droites (AI) et (BC) sont perpendiculaires.

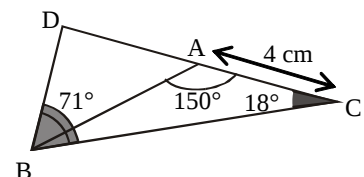
- Reproduire la figure en vraie grandeur.
- Quelle propriété permet de calculer $\widehat{BCA}$? Calculer $\widehat{BCA}$.
- Quelle propriété permet de calculer $\widehat{IAC}$? Calculer $\widehat{IAC}$.
- Quelle propriété permet de calculer $\widehat{IBA}$? Calculer $\widehat{IBA}$.



Les points B, I et C sont alignés.

42. Dans la figure ci-contre, BCD est un triangle, A est un point de [CD] tel que l'angle $\widehat{BAC}$ mesure 150° .

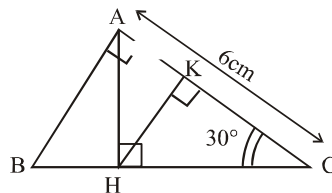
- Reproduire la figure en vraie grandeur
- Quelle semble être la nature du triangle BCD ?
- Quelle propriété permet de calculer $\widehat{BDC}$? Calculer $\widehat{BDC}$. Conclure.



Les points D, A et C sont alignés.

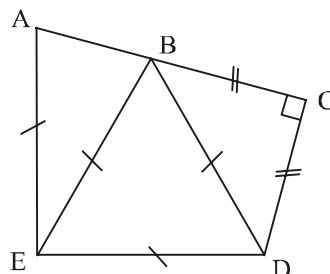
43. Sur cette figure, les points B, H et C sont alignés, de même que les points A, K et C.

- Reproduire en vraie grandeur la figure ci-contre.
- Calculer les mesures, en degrés, des angles des triangles ABH, ACH, AHK et HKC.



Dans l'exercice 44, l'élève doit comprendre que pour calculer l'angle $\widehat{AEB}$, il doit d'abord calculer tous les autres angles de la figure.

44. Reproduire la figure ci-contre sachant que $BD = 5$ cm et A, B et C sont alignés. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{AEB}$.



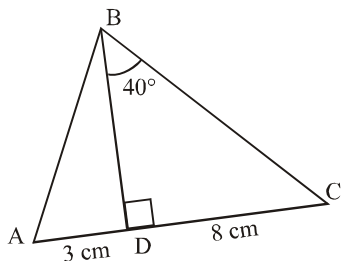
PROBLÈMES

Les exercices 45 à 47 nécessitent, en préalable à la construction demandée, des calculs d'angles.

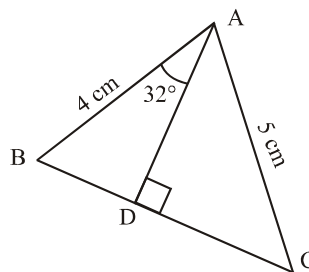
Les programmes de construction peuvent faire l'objet, pour leur vérification, d'un travail en classe avec un logiciel de géométrie dynamique.

Dans l'exercice 45, pour la première figure, il faut calculer la mesure de l'angle $\widehat{C}$ du triangle rectangle DBC et pour la deuxième figure, il faut calculer la mesure de l'angle $\widehat{B}$ dans le triangle ADB.

45. 1) Construire en vraie grandeur les figures suivantes :



Les points A, D et C sont alignés.



Les points B, D et C sont alignés.

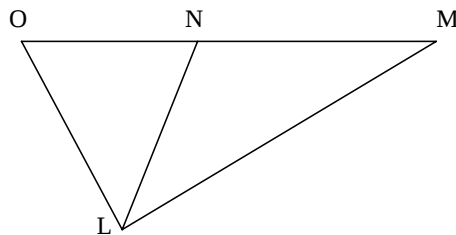
2) Rédiger un programme de construction pour chaque figure.

Dans l'exercice 46, on demande à l'élève de marquer lui-même les mesures données sur le schéma. Deux démarches sont possibles pour construire le point N : calculer, soit l'angle $\widehat{MLN}$, soit l'angle $\widehat{OLN}$. Dans les deux cas, le calcul nécessite deux étapes.

46. OLM est un triangle. Le point N appartient au segment [OM].

De plus, $\widehat{ONL} = 50^\circ$, $\widehat{OLM} = 100^\circ$, $\widehat{OML} = 30^\circ$ et $LM = 15$ cm.

- Marquer sur le schéma ci-contre toutes les mesures données.
- Construire cette figure en vraie grandeur. Expliquer la méthode utilisée.



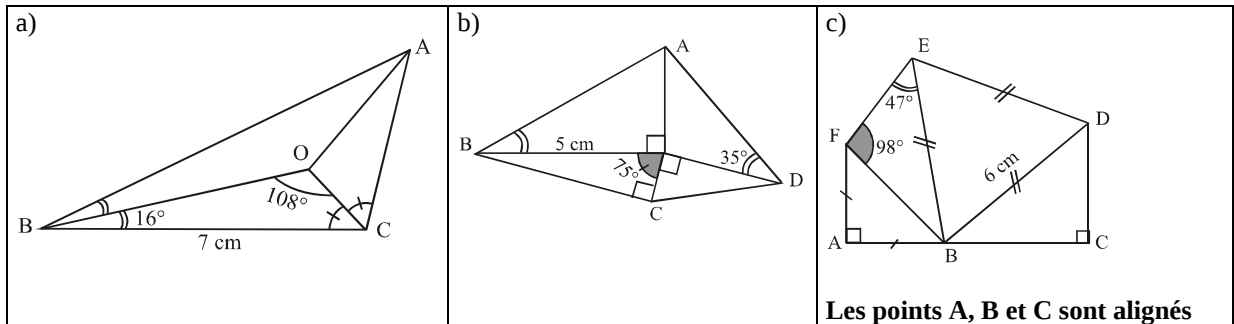
Exercice 47 : Même exercice que le numéro 46 sur des figures un peu plus complexes.

Pour la figure a, il faut calculer la mesure de l'angle $\widehat{BCO}$.

Pour la figure b, beaucoup plus difficile, le gros problème est de réussir à placer le point D. Pour cela, il faut penser à la mesure d'un tour complet, pour pouvoir calculer la mesure de l'angle $\widehat{DEA}$ et ensuite, celle de l'angle $\widehat{EAD}$.

Pour la figure c, pour pouvoir construire le point A, l'élève doit reconnaître la propriété des angles d'un triangle rectangle isocèle.

47. Même consigne que dans l'exercice précédent, pour les trois figures suivantes :



L'exercice 48 est un bon exercice de recherche, abordable pour un grand nombre d'élèves.

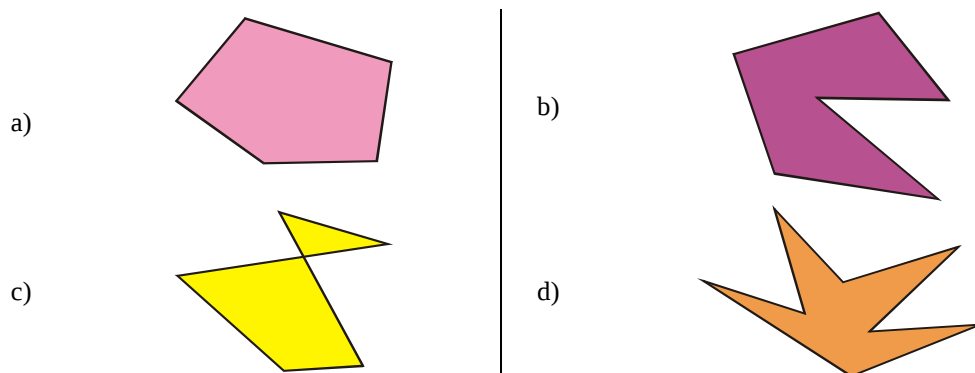
48. Tracer un quadrilatère, puis calculer (sans utiliser le rapporteur), la somme des mesures des angles du quadrilatère. Envisager les deux cas suivants :



Exercice 49 : Cet exercice se fera de préférence après l'exercice 48.

(généralisation de la démarche à des polygones de plus de 4 côtés : a et c des pentagones, l'un croisé, l'autre non croisé, un hexagone et un octogone).

49.



L'exercice 50 est un exercice de recherche qui peut être fait sans calcul de mesure d'angle ; il permet de construire la bissectrice d'un angle en utilisant les propriétés de triangles isocèles bien choisis.

- 1) Dans cette première question, les segments $[AB']$ et $[AC']$ ne sont volontairement pas encore tracés, ils sont inutiles pour cette première construction.
- 2) Pour ne pas surcharger la figure, le tracé du cercle circonscrit n'est pas demandé.
- 3) Par contre, les tracés des segments $[AO]$, $[C'O]$ et $[B'O]$ sont demandés. (Pour amener l'élève à penser qu'ils constituent des rayons d'un même cercle, d'où l'égalité des longueurs...)
- 5) Chaque triangle isocèle équivaut à une égalité de mesure de deux angles. Le mot « marquer » indique qu'aucun calcul n'est nécessaire. En revanche pour pouvoir coder une figure, il faut avoir justifié ce codage. L'élève repère à cinq reprises la figure (triangle isocèle) illustrant la propriété du cours. La

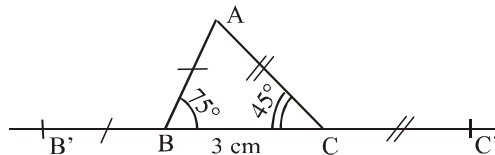
première justification peut être mise en forme, puis rédigée en classe, et les autres justifications peuvent être menées à l'oral (c'est la même propriété appliquée à différents triangles, repérés dans la question précédente).

6) La conclusion attendue apparaît assez naturellement, mais pour aboutir à une justification, des questions intermédiaires peuvent être ajoutées par exemple :

A l'aide des codages en déduire les égalités d'angles suivantes :

$$\widehat{BAO} = \widehat{BB'O} \quad ; \quad \widehat{CAO} = \widehat{CC'O} \dots$$

50. 1) Reproduire cette figure en vraie grandeur :
- 2) Tracer le triangle $AB'C'$, puis construire le centre O du cercle circonscrit au triangle $AB'C'$.
- 3) Tracer les segments $[AO]$, $[B'O]$ et $[C'O]$.
- 4) Chercher sur la figure obtenue **tous** les triangles isocèles (préciser le sommet principal)
- 5) Marquer d'une même couleur les angles de même mesure.
- 6) En déduire ce que constitue la droite (AO) pour l'angle $\widehat{BAC}$.



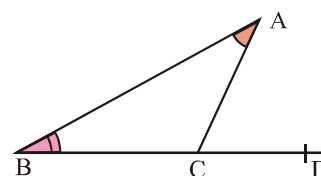
Exercice 51 : A travers cet exercice, l'élève est amené à exprimer une mesure d'angle en fonction des mesures des deux autres angles d'un triangle. Après les activités menées en classe, l'élève a compris que si deux mesures des angles d'un triangle sont fixées, alors la troisième l'est aussi par une relation qui les lie.

Ici, on renforce cette notion en allant plus loin : on généralise la formule avec des lettres : on touche au calcul littéral. Pour atteindre ce niveau d'abstraction on peut réitérer les calculs en examinant différents cas (c'est à dire recommencer le travail fait en 1).

La question 3 peut poser problème, la figure facilite la visualisation, une preuve par le calcul littéral semble trop abstraite. Pour renforcer les choses on peut à nouveau faire des essais de calculs. (Tout en précisant à l'élève que ce n'est pas une preuve).

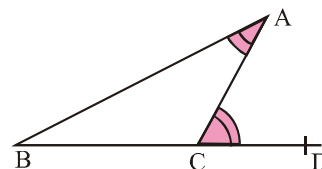
51. a et b désignent respectivement les mesures en degrés des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BAC}$.

- 1) Choisir des valeurs pour a et b, puis calculer la mesure de $\widehat{ACB}$.
- 2) En remplaçant les valeurs choisies précédemment par les lettres a et b, en déduire une expression de la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$ en fonction de a et de b.
En s'appuyant sur le résultat précédent **et** la figure, en déduire la mesure de l'angle $\widehat{ACD}$ en fonction de a et de b. Justifier le résultat.



les points B, C et D sont alignés

52. Expliquer pourquoi cette figure est nécessairement fausse.



les points B, C et D sont alignés

CHAPITRE 10

ANGLE ET SYMÉTRIE

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Connaître et utiliser les propriétés relatives aux angles formés par deux parallèles et une sécante.
- Connaître et utiliser le vocabulaire : angles opposés par le sommet, angles correspondants, angles alternes internes.
- Connaître et utiliser les caractérisations angulaires du parallélisme de deux droites.

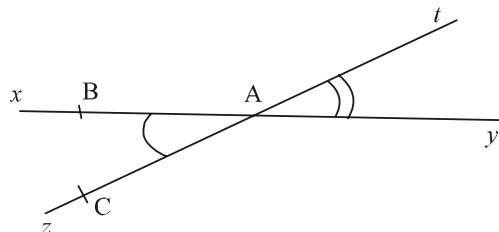
REPÈRES POUR LE CONTENU DU COURS

- Angles opposés par le sommet.
- Angles alternes internes.
- Angles correspondants.
- Reconnaître le parallélisme de deux droites.

ACTIVITÉ

ACTIVITÉ 1 : SYMÉTRIQUE D'UN ANGLE PAR RAPPORT À SON SOMMET

Les droites (xy) et (zt) , sécantes en A, forment les angles $\widehat{xAz}$ et $\widehat{tAy}$ indiqués ci-contre. On dit que ces angles sont opposés par le sommet.



- 1) Quelle conjecture peut-on faire pour les mesures de ces angles ?
- 2) On cherche maintenant à démontrer cette conjecture.
 - a) On choisit un point B sur $[Ax)$ et un point C sur $[Az)$. Construire les points D et E symétriques respectifs des points B et C par rapport au point A. Où se situe le point D ? Où se situe le point E ? Justifier.
 - b) Quel est le symétrique de l'angle $\widehat{BAC}$? Justifier la réponse.
 - c) Que peut-on en déduire pour les mesures des angles $\widehat{xAz}$ et $\widehat{tAy}$? Justifier.

Objectifs et commentaires

- Faire le lien entre angles opposés par le sommet et angles symétriques.

Pour 2a) : D est le symétrique de B par rapport à A signifie que A est le milieu de $[BD]$ (définition de la symétrie centrale).

Donc B, A, D sont alignés et D est sur la droite (xy) .

Même raisonnement pour justifier que C, A, E sont alignés.

En 2b), on note que le symétrique de l'angle $\widehat{BAC}$ est $\widehat{DAE}$.

En 2c), on identifie avec les angles $\widehat{xAz}$ et $\widehat{tAy}$ et on conclut que ces angles ont la même mesure.

ACTIVITÉ 2 : CONFIGURATIONS PARTICULIÈRES ET ANGLES DE MÊME MESURE

Sur toutes les figures qui suivent, les droites (EC) et (FD) sont coupées par la droite (GH) . Les points A et B sont leurs points d'intersection.

- 1) Les angles $\widehat{ABF}$ et $\widehat{BAC}$ marqués sur la figure 1 sont appelés des angles alternes internes. Les angles marqués sur les figures 2 et 3 ne sont pas alternes internes. Trouver d'autres angles alternes internes et les marquer sur la figure 4.
- 2) Les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{GAC}$ marqués sur la figure 5 sont appelés des angles correspondants. Les angles $\widehat{GAE}$ et $\widehat{ABF}$ marqués sur la figure 6 sont appelés des angles correspondants. Les angles marqués sur les figures 7 et 8 ne sont pas correspondants. Trouver d'autres angles correspondants et les marquer sur la figure 4.
- 3) Reproduire une figure analogue à la figure ci-dessus, en appelant I le point d'intersection des droites (EC) et (FD) . Observer la configuration formée par les droites (GH) et (FD) qui sont coupées par la droite (EC) . Trouver des angles alternes internes et des angles correspondants dans cette configuration.

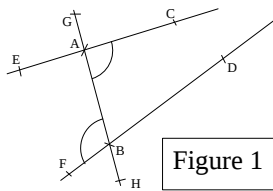


Figure 1

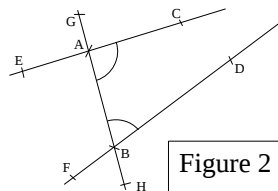


Figure 2

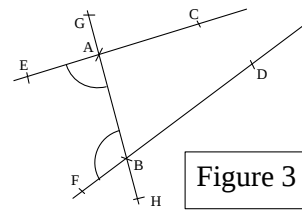


Figure 3

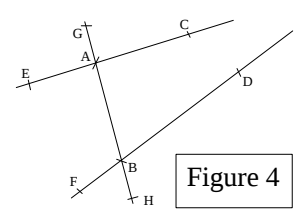


Figure 4

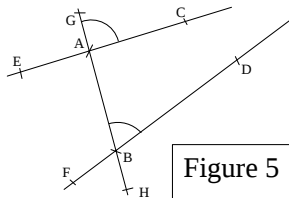


Figure 5

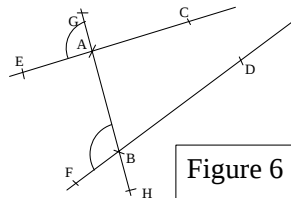


Figure 6

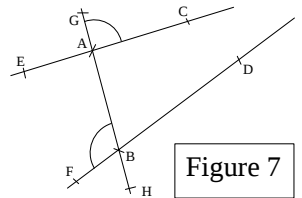


Figure 7

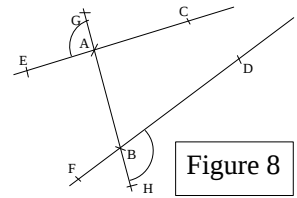


Figure 8

Objectifs et commentaires

- Reconnaître des angles alternes internes ou correspondants dans différentes configurations.

Dans la question 1 : amener les élèves à bien repérer des angles alternes internes de part et d'autre d'une sécante considérée à deux autres droites.

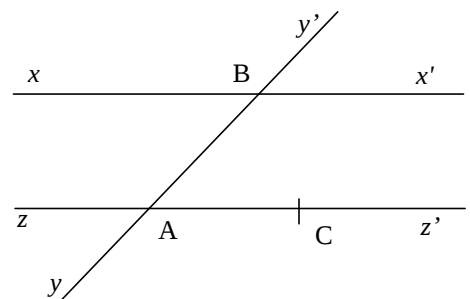
Dans la question 2 : pour les angles correspondants : bien travailler dans un demi-plan délimité par une sécante.

Dans la question 3 : on change de sécante, d'où l'importance de bien la situer (les angles sont plus difficiles à repérer).

ACTIVITÉ 3 : ANGLES ALTERNES INTERNES ET DROITES PARALLÈLES

Tracer deux droites parallèles (xx') et (zz') et une droite (yy') sécante à (xx') en B et (zz') en A. Placer un point C sur la demi-droite [Az') et le point I milieu de [AB].

- Quelle conjecture peut-on faire pour les angles alternes internes de cette figure ?
- On cherche maintenant à démontrer cette conjecture pour les angles $\widehat{xBy}$ et $\widehat{z'Ay'}$:
 - Sur quelle droite se situe le point D, symétrique de C par rapport à I ? Justifier la réponse.
 - Quel est le symétrique de la demi-droite [Az') par rapport à I ? Justifier la réponse.
 - Quel est le symétrique de l'angle $\widehat{xBy}$ par rapport à I ? Justifier la réponse.
 - Qu'en déduit-on sur la mesure des angles $\widehat{xBy}$ et $\widehat{z'Ay'}$? Justifier la réponse.



Objectifs et commentaires

- Faire le lien entre angles alternes internes et angles symétriques dans le cas de droites parallèles.

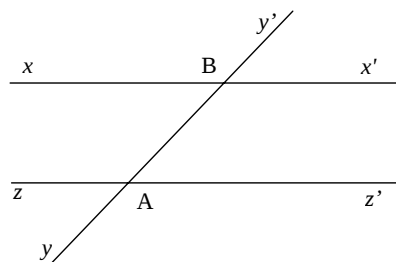
Comme dans l'activité 1, le raisonnement demandé dans la question a est assez complexe. L'élève doit d'abord comprendre que les droites (xx') et (yy') sont symétriques par rapport au point I : la droite (xx') passant par le point B, son image est une droite parallèle à (xx'), elle doit passer par l'image de B.

La suite demande des raisonnements plus classiques, déjà abordés dans le chapitre sur la symétrie centrale.

ACTIVITÉ 4 : ANGLES CORRESPONDANTS ET DROITES PARALLÈLES

Sur la figure ci-contre, les droites (xx') et (zz') sont parallèles, la droite (yy') est sécante à (xx') en B et à (zz') en A.

- 1) Quelle conjecture peut-on faire pour les angles correspondants de cette figure ?
- 2) Démontrer que $\widehat{xBy} = \widehat{zAy}$ en utilisant les résultats des activités 1 et 3.



Objectifs et commentaires

- Démontrer que des angles correspondants formés par deux parallèles et une sécante ont la même mesure.

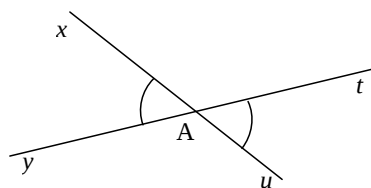
Dans la question 2, on ne cherche à établir qu'une seule égalité, les autres pourront être établies oralement. On pourra alors coder d'une même couleur tous les angles égaux à $\widehat{xBy}$.

COURS

ANGLES OPPOSÉS PAR LE SOMMET

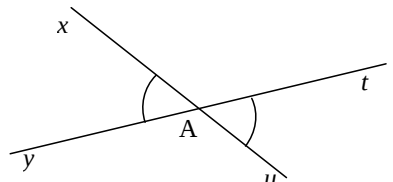
Reconnaissance

Les angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{tAu}$ sont *opposés par le sommet* : ils ont le même sommet A et les côtés de l'un sont dans le prolongement des côtés de l'autre.



Propriété : Si deux angles sont opposés par le sommet, alors ils ont la même mesure.

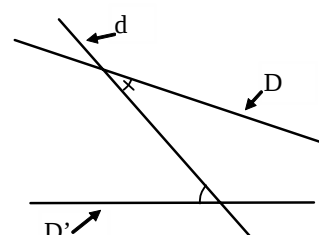
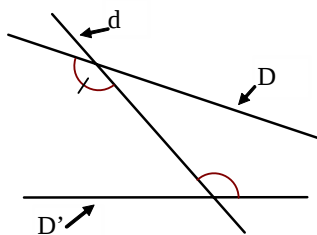
Application

Schéma	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	Les angles $\widehat{xAy}$ et $\widehat{tAu}$ sont opposés par le sommet.	Si deux angles sont opposés par le sommet, alors ils ont la même mesure.	$\widehat{xAy} = \widehat{tAu}$

ANGLES FORMÉS PAR DEUX DROITES ET UNE SÉCANTE : ANGLES ALTERNÉS INTERNES

Reconnaissance

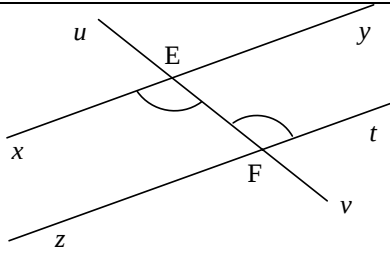
Les angles marqués symboliquement sur chacune des figures ci-contre sont appelés *angles alternés internes* : ils sont situés entre deux droites D et D' et de part et d'autre d'une sécante d à ces deux droites.



La droite d est sécante aux droites D et D'.

Propriété : Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors elles déterminent des angles alternés internes de même mesure.

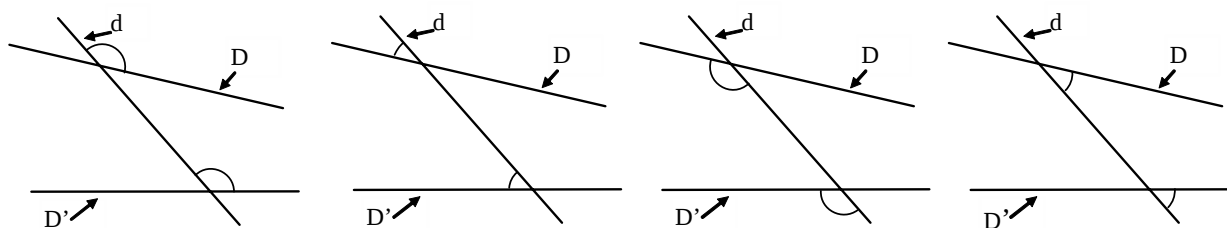
Application

Schéma	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	Les droites (xy) et (zt) sont parallèles et elles sont coupées par la sécante (uv). Les angles $\widehat{xEF}$ et $\widehat{EFt}$ sont alternes internes.	Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors elles déterminent des angles alternes internes de même mesure.	$\widehat{xEF} = \widehat{EFt}$

ANGLES FORMÉS PAR DEUX DROITES ET UNE SÉCANTE : ANGLES CORRESPONDANTS

Reconnaissance

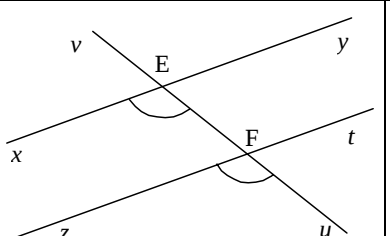
Les angles marqués symboliquement sur chacune des figures ci-dessous sont appelés *angles correspondants* : l'un des angles est situé entre les deux droites D et D', l'autre est à l'extérieur de ces deux droites et ils sont tous les deux d'un même côté d'une sécante d à ces deux droites.



La droite d est sécante aux droites D et D'.

Propriété : Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors elles déterminent des angles **correspondants** de même mesure.

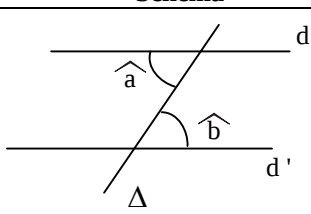
Application

Schéma	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	Les droites (xy) et (zt) sont parallèles et elles sont coupées par la sécante (uv). Les angles $\widehat{xEF}$ et $\widehat{zEu}$ sont correspondants.	Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors elles déterminent des angles correspondants de même mesure.	$\widehat{xEF} = \widehat{zEu}$

RECONNAÎTRE LE PARALLÉLISME DE DEUX DROITES

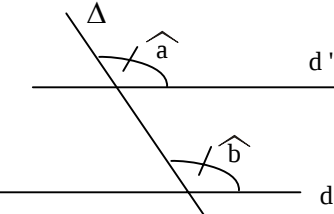
Propriété 1 : Si deux droites sont coupées par une sécante en formant deux angles alternes internes de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.

Application

Schéma	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	Les angles $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ sont alternes internes, formés par les droites d et d' et la sécante Δ ; $\widehat{a} = \widehat{b}$.	Si deux droites sont coupées par une sécante en formant deux angles alternes internes de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.	$d // d'$

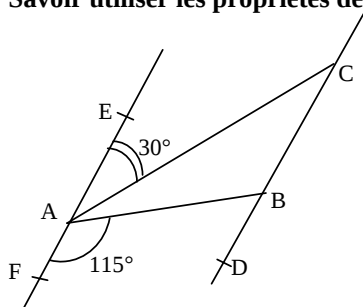
Propriété 2 : Si deux droites sont coupées par une sécante en formant deux angles correspondants même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.

Application

Schéma	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	les angles $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ sont correspondants , formés par les droites d et d' et la sécante Δ ; $\widehat{a} = \widehat{b}$.	Si deux droites sont coupées par une sécante en formant deux angles correspondants même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.	$d // d'$

POINTS DE REPÈRE / MÉTHODES

Savoir utiliser les propriétés des angles formés par deux droites parallèles et une sécante.



Énoncé

Les points E, A, F sont alignés ; les points C, B, D sont alignés.

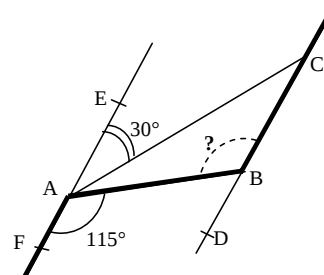
Les droites (EF) et (CD) sont parallèles.

$\widehat{EAC} = 30^\circ$, $\widehat{FAB} = 115^\circ$.

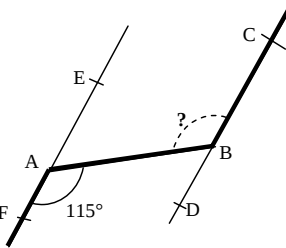
Déterminer la mesure de chacun des angles du triangle ABC. Justifier.

1) Mesure de l'angle $\widehat{B}$ du triangle ABC.

Recherche : L'angle $\widehat{ABC}$ est alterne-interne avec l'angle $\widehat{FAB}$ lorsqu'on considère les droites (EF) et (DC) et leur sécante (AB).

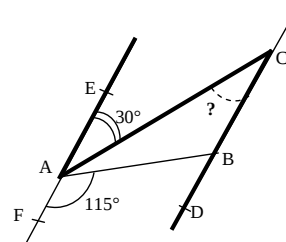


Solution

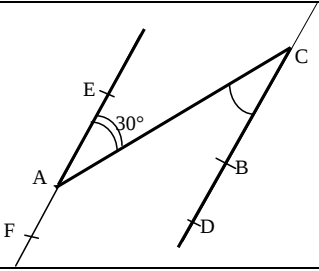
Schéma	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	Les droites (EF) et (CD) sont parallèles. Elles sont coupées par la sécante (AB). Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{FAB}$ sont alternes internes.	Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors elles déterminent des angles alternes internes de même mesure.	$\widehat{ABC} = \widehat{FAB}$.
	$\widehat{FAB} = 115^\circ$.		$\widehat{ABC} = \widehat{FAB} = 115^\circ$ Conclusion : $\widehat{ABC} = 115^\circ$.

2) Mesure de l'angle $\widehat{C}$ du triangle ABC.

Recherche : L'angle $\widehat{ACB}$ est alterne-interne avec l'angle $\widehat{EAC}$ lorsqu'on considère les droites (EF) et (CD) et leur sécante (AC).



Solution

Schéma	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	Les droites (EF) et (CD) sont parallèles. Elles sont coupées par la sécante (AC). Les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{EAC}$ sont alternes internes.	Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors elles déterminent des angles alternes internes de même mesure.	$\widehat{ACB} = \widehat{EAC}$.
	$\widehat{EAC} = 30^\circ$.		$\widehat{ACB} = \widehat{EAC} = 30^\circ$ Conclusion : $\widehat{ACB} = 30^\circ$.

3) Mesure de l'angle $\widehat{A}$ du triangle ABC.

Recherche : Dans le triangle ABC, on connaît maintenant la mesure de deux angles. On peut calculer la mesure du troisième en utilisant la propriété de la somme des mesures des trois angles d'un triangle.

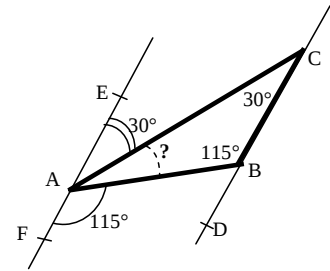
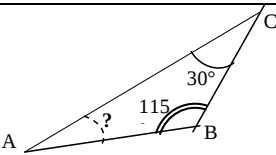
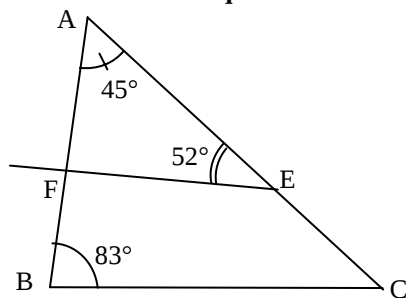
**Solution**

Schéma	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	Dans le triangle ABC, $\widehat{ABC} = 115^\circ$ et $\widehat{ACB} = 30^\circ$.	La somme des angles d'un triangle est égale à 180° .	$\widehat{BAC} = 180^\circ - (115^\circ + 30^\circ)$ $= 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$. Conclusion : $\widehat{BAC} = 35^\circ$.

Savoir démontrer que deux droites sont parallèles**Énoncé**

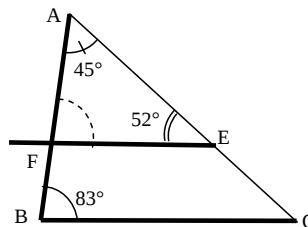
Le schéma ci-contre représente un triangle ABC dont les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ mesurent respectivement 45° et 83° . E est un point du segment [AC]. F est le point du segment [AB] tel que $\widehat{AEF} = 52^\circ$.

Démontrer que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

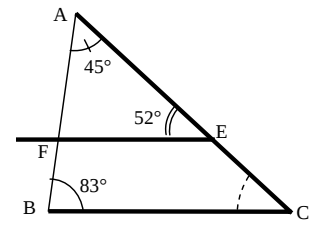
Recherche : On repère sur la figure des angles correspondants.

Il y a deux possibilités, illustrées sur les figures ci-contre.

On choisit l'une des deux et on prouve que les angles correspondants ainsi choisis sont égaux.

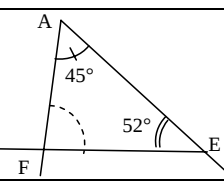
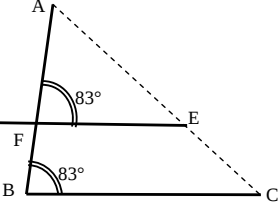


Les droites (EF) et (BC) forment avec la sécante (AB) les angles correspondants $\widehat{AFE}$ et $\widehat{ABC}$.



Les droites (EF) et (BC) forment avec la sécante (AC) les angles correspondants $\widehat{AEF}$ et $\widehat{ACB}$.

Solution (lorsqu'on choisit la première possibilité)

Schéma	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	Dans le triangle AEF, $\widehat{FAE} = 45^\circ$ et $\widehat{AEF} = 52^\circ$.	La somme des angles d'un triangle est égale à 180° .	$\widehat{AFE} = 180^\circ - (45^\circ + 52^\circ)$ $= 180^\circ - 97^\circ = 83^\circ$. Conclusion : $\widehat{AFE} = 83^\circ$.
	Les droites (EF) et (BC) forment avec la sécante (AB) les angles correspondants $\widehat{AFE}$ et $\widehat{ABC}$. $\widehat{AFE} = 83^\circ$ et $\widehat{ABC} = 83^\circ$.	Si deux droites sont coupées par une sécante en formant deux angles correspondants de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles.	<u>Les droites (EF) et (BC) sont parallèles.</u>

EXERCICES

VOCABULAIRE

Les exercices 1 à 3 font travailler le nouveau vocabulaire à travers le changement de registre de la langue naturelle vers le registre géométrique, dans le cas général où les droites ne sont pas parallèles.

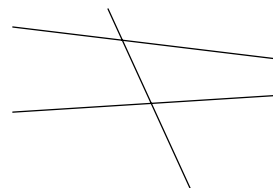
1. La figure ci-contre représente des droites sécantes deux à deux. Marquer :

En vert : deux angles opposés par le sommet.

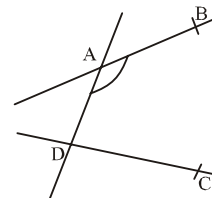
En rouge : deux angles alternes internes.

En bleu : deux angles correspondants.

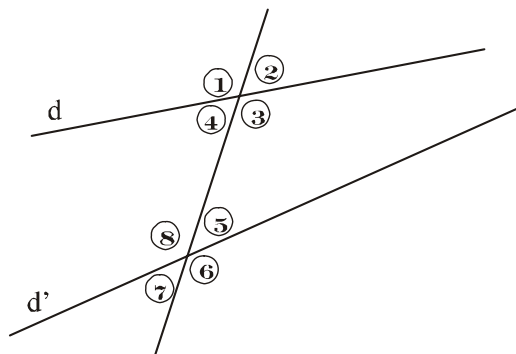
En noir : deux angles supplémentaires.



2. a) Marquer en bleu un angle alterne interne à $\widehat{DAB}$.
b) Marquer en vert un angle correspondant à $\widehat{DAB}$.

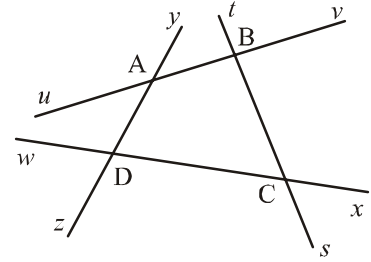


3. Les droites d et d' sont coupées par une sécante. Compléter les phrases suivantes :
Les angles 1 et 3 sont
Les angles 3 et 6 sont
Les angles 8 et sont correspondants.
Les angles 4 et 5 sont
Les angles 8 et sont alternes internes.
Les angles 7 et sont opposés par le sommet.



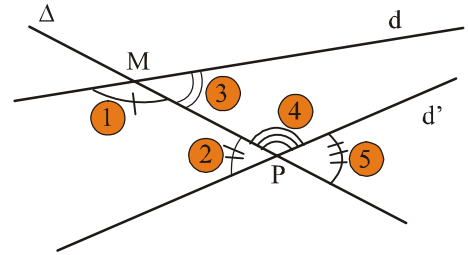
Dans l'exercice 4, on ajoute aux objectifs précédents la recherche d'une sous-figure.

4. Marquer en noir deux angles alternes internes déterminés par les droites (uv) et (wx) et la sécante (BC) .



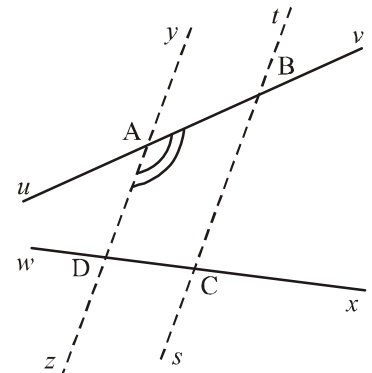
L'exercice 5 continue à faire travailler le vocabulaire, avec la difficulté supplémentaire consistant à citer les angles par paires.

5. Sur la figure ci-contre, la droite Δ est sécante aux droites d et d' en M et P.
- 1) Citer sur cette figure des angles adjacents.
 - 2) Citer sur cette figure des angles supplémentaires.
 - 3) Citer sur cette figure des angles opposés par le sommet.
 - 4) Citer sur cette figure des angles alternes internes.
 - 5) Citer sur cette figure des angles correspondants.



L'exercice 6 est à faire une fois qu'on a étudié le cas particulier des parallèles. On pourra comparer les mesures des angles alternes internes à $\widehat{DAB}$ suivant la configuration choisie.

6. Sur la figure ci-contre, les droites (AD) et (BC) sont parallèles.
- 1) Marquer en bleu un angle alterne interne à $\widehat{DAB}$ et qui a même mesure que $\widehat{DAB}$.
 - 2) Marquer en vert un angle correspondant à $\widehat{DAB}$ et qui a même mesure que $\widehat{DAB}$.

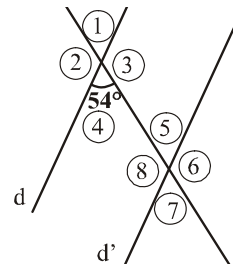


RECONNAISSANCE DE SITUATIONS

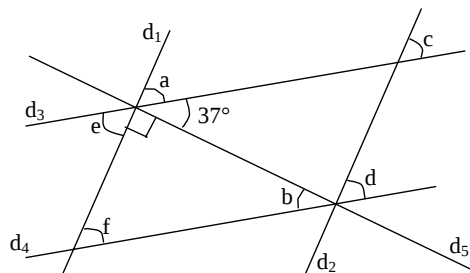
Dans les exercices 7 à 11, on continue le travail précédent, dans le cas de parallèles. On amène les élèves à repérer l'image visuelle du « $\angle$ » pour les angles alternes internes, celle du « F » ou encore du « 7 » pour les angles correspondants. On reste dans le travail de reconnaissance ou dans le travail heuristique avec des exigences minimales dans la rédaction qui sera travaillée plus particulièrement dans une autre rubrique : on se contentera de justifications du type : « l'angle.... mesure...° car les angles ...et ... sont alternes internes », on ne précisera pas ici les parallèles ni la sécante utilisées.

On prêtera une attention plus particulière aux différentes démarches possibles pour trouver la mesure d'un même angle.

7. Sur la figure ci-contre, les droites d et d' sont parallèles. Trouver les mesures des angles numérotés de 1 à 7 (l'ordre de calcul n'est pas forcément celui de la numérotation).

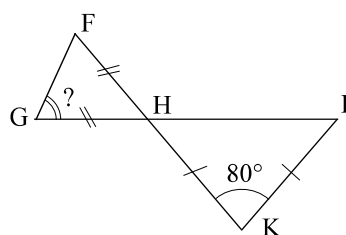


8. Sur la figure ci-contre, les droites d_1 et d_2 sont parallèles, de même que les droites d_3 et d_4 . Calculer les mesures des angles notés a , b , c , d , e et f

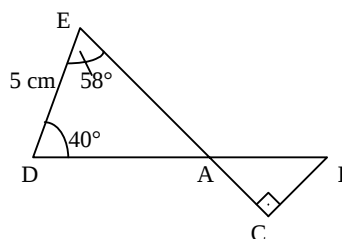


Pour les exercices 9, 10 et 11, on ajoute aux objectifs précédents une reprise du travail sur les angles du triangle, isocèle ou non, avec des exigences minimales pour la rédaction, le but visé étant encore ici la reconnaissance de situations de base. On pourra donner, comme aide aux élèves en difficulté, le nom et l'ordre des angles à calculer et se contenter de réponses du type $\widehat{LHK} = \widehat{HLK} = \frac{180 - 80}{2}$ (triangle HLK isocèle en K), puis $\widehat{LHK} = \widehat{FHG}$ (opposés par le sommet).

9. Calculer l'angle $\widehat{FGH}$.

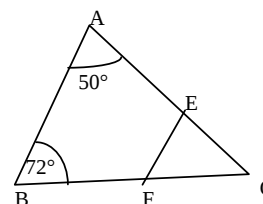


10. Les points E, A, C sont alignés et les points D, A, B sont alignés.
a) Reproduire la figure.
b) Calculer les angles du triangle ABC.



Dans l'exercice 11, on pourra accepter : $\widehat{CEF} = \widehat{CAB} = 50^\circ$ car ce sont des angles correspondants, l'objectif de l'exercice étant là encore la reconnaissance de ces angles.

11. a) Reproduire la figure sachant que $AB = 8$ cm, $AE = 5$ cm et $(EF) \parallel (AB)$.
b) Calculer les angles du triangle CEF.



RÉDACTIONS DE CALCULS

On distinguera, dans chacun des exercices suivants, **deux phases de travail** :

- **La phase de recherche**, qui entraîne les élèves dans la reconnaissance de situations de bases, les engage à trouver un ordre dans les calculs à effectuer, à relier chaque calcul à une propriété. Dans cette partie, le travail peut être mené en groupes, les résultats intermédiaires peuvent être notés au brouillon.
- **La phase de rédaction** pour laquelle on encouragera les élèves à prendre le cours comme « modèle », à éventuellement utiliser des tableaux pour rédiger les calculs, comme dans le point de repère - méthode.

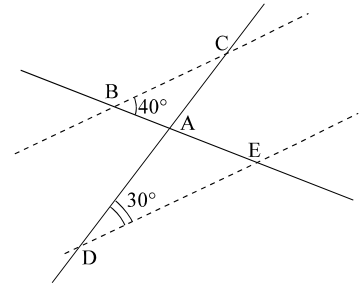
Ces deux phases de travail doivent être séparées : une synthèse collective s'impose après la phase de recherche, avant de passer à la rédaction.

Les exercices 12 à 15 sont des exercices qui demandent des raisonnements assez similaires, qui prolongent ceux qui ont été menés dans la rubrique précédente.

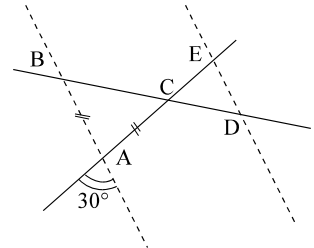
On veillera, lors de la synthèse suivant la phase de recherche, à mettre en évidence et à comparer les différentes démarches possibles pour arriver au résultat.

On pourra faire remarquer aux élèves qu'on a deux triangles dont les angles ont la même mesure, mais que ces triangles ne sont pas superposables.

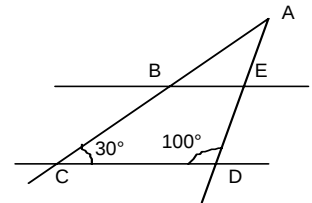
12. Sur la figure ci-contre, les droites (BC) et (DE) sont parallèles, les droites (BE) et (CD) sont sécantes en A. Calculer les mesures de tous les angles inconnus des triangles ABC et ADE.



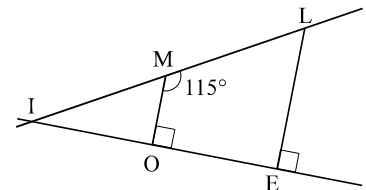
13. Sur la figure ci-contre, les droites (AB) et (DE) sont parallèles, les droites (BD) et (AE) sont sécantes en C, le triangle ABC est isocèle en A. Quelle est la nature du triangle CDE ?



14. Sur la figure ci-contre, les points A, B et C sont alignés, de même que les points A, E et D, les droites (BE) et (CD) sont parallèles. Calculer les angles du triangle AEB et ceux du quadrilatère BEDC.

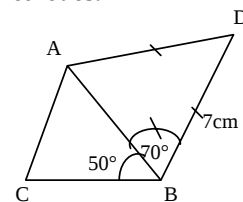


15. Sur la figure ci-contre, les points I, M et L sont alignés, de même que les points I, O et E.
a) Quelle est la nature du quadrilatère MOEL ? Justifier.
b) Calculer les angles des triangles IMO et ILE.

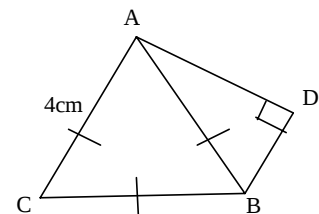


Trois situations comparables dans les exercices 16 à 18. On pourra suggérer aux élèves de repasser les parallèles, les « Z » ou les « F » en couleur et, là encore, on comparera les méthodes.

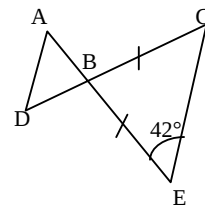
16. a) Reproduire la figure sachant que $(BD) \parallel (AC)$.
b) Calculer les angles des triangles ABD et ABC. Justifier.



17. a) Reproduire la figure sachant que : $(BD) \parallel (AC)$.
b) Calculer les angles du triangle ABD. Justifier.

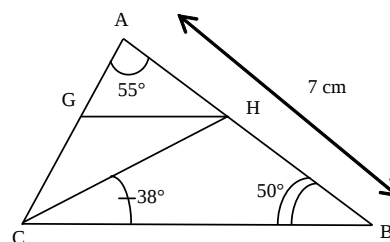


18. a) Reproduire la figure, sachant que : $BC = 6 \text{ cm}$; $AB = 3 \text{ cm}$; les droites (EC) et (AD) sont parallèles ; les droites (AE) et (DC) sont sécantes en B.
 b) Que peut-on dire du triangle ADB ? Justifier.



Les situations abordées dans les exercices 19 et 20 sont assez voisines. Dans l'exercice 20, l'énoncé est donné sous forme de texte, un schéma à main levée est alors conseillé pour commencer.

19. 1) Reproduire la figure ci-contre, sachant que : $(HG) \parallel (BC)$, le point H est sur le segment $[AB]$ et le point G sur le segment $[AC]$.
 2) Trouver un angle de même mesure que l'angle $\widehat{ABC}$. Justifier.
 3) Trouver un angle de même mesure que l'angle $\widehat{BCH}$. Justifier.
 4) Calculer les angles $\widehat{AGH}$, $\widehat{HGC}$ et $\widehat{HCG}$. Justifier.

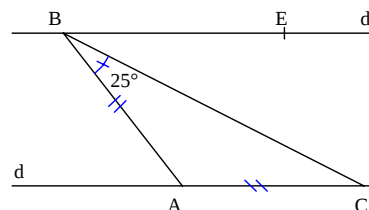


20. Tracer un triangle ABC tel que $BC = 7 \text{ cm}$, $\widehat{ACB} = 80^\circ$ et $\widehat{ABC} = 50^\circ$. Tracer la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$, elle coupe le côté $[AB]$ en E. Tracer la parallèle à la droite (BC) passant par E, elle coupe le côté $[AC]$ en F.
 1) Citer 2 angles correspondants de même mesure.
 2) Citer 2 angles alternes internes de même mesure. Calculer les angles du triangle EFC . Rédiger ces calculs en utilisant la présentation donnée dans le cours.
 3) Calculer les angles du triangle AEF . Rédiger ces calculs en utilisant la présentation donnée dans le cours.
 4) Quelles sont les particularités des triangles EFC et EBC ? Justifier.

RECONNAÎTRE DES PARALLÈLES

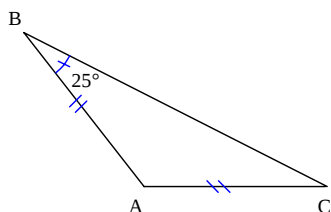
Dans l'exercice 21, l'élève est amené à trouver à l'aide de deux propriétés différentes les valeurs des angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{EBC}$. C'est alors seulement, qu'il pourra avec la proposition adéquate prouver le parallélisme droites.

21. Sur la figure ci-contre, le triangle ABC est isocèle en A et la droite (BC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABE}$.
 Les droites d et d' sont-elles parallèles ? Rédiger les calculs en utilisant la présentation donnée dans le point-repère.

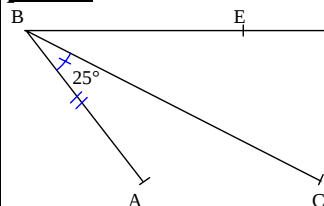


On pourra, en face de difficultés, décomposer l'exercice en trois parties, chacune devant être complétée :

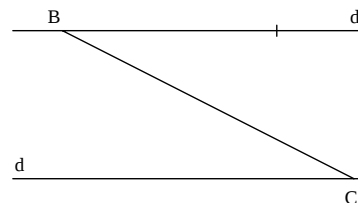
partie 1



partie 2



partie 3



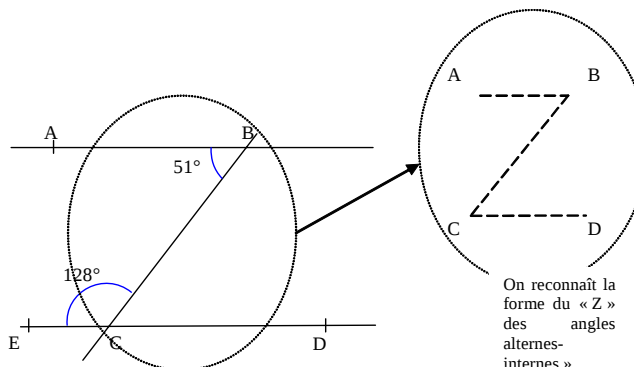
UTILISATION D'UN EXERCICE MODÈLE

Pour prouver que deux droites ne sont pas parallèles, on a recours à la contraposée de la propriété donnée dans le cours. Cette logique est très difficile pour un élève de cinquième, elle doit être accompagnée. Aussi, nous proposons d'abord un exercice résolu, qui pourra être pris comme modèle pour la résolution de l'exercice suivant.

22. Exercice modèle

Énoncé les points E, C et D sont alignés.

Sur la figure ci-dessus, les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

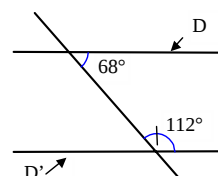
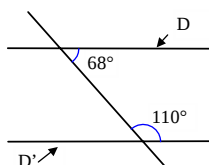


Solution

Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
l'angle $\widehat{ECD}$ est plat.	Un angle plat mesure 180° .	$\widehat{BCD} = 180 - \widehat{ECD} = 180 - 128 = 52^\circ$.

Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
Les droites (AB) et (DC) sont coupées par la sécante (DB). Les angles alternes internes $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ n'ont pas la même mesure.	<i>On ne peut pas utiliser la propriété du cours qui dit que :</i> <i>« Deux droites (d) et (d') sont coupées par une même sécante. Si deux angles alternes internes ont la même mesure, alors les droites (d) et (d') sont parallèles. »</i> <i>En effet, cette propriété ne donne un renseignement que si les angles alternes internes ont la même mesure.</i> On utilise le fait que la propriété du cours suivante est contredite : <i>« Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors elles déterminent des angles alternes internes de même mesure. »</i> Si les droites (AB) et (CD) étaient parallèles, alors les angles alternes internes auraient la même mesure. Mais comme les angles alternes internes $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ n'ont pas la même mesure, les droites (AB) et (CD) ne peuvent pas être parallèles.	(AB) et (CD) ne peuvent pas être parallèles.

23. Dans chacun des deux cas ci-dessous, dire si les droites D et D' sont parallèles. Justifier la réponse. Dans le cas où elles ne le sont pas, utiliser l'exercice modèle 22.

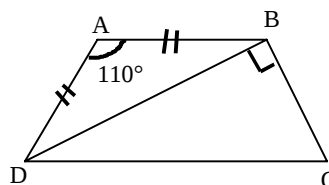


EXERCICES AVEC AIDE

Les exercices 24 à 27 doivent, dans un premier temps, être proposés tels quels, afin de lancer tous les élèves dans la phase de recherche. Face aux difficultés, on pourra alors différencier le travail en proposant, pour certains élèves, une ou plusieurs des aides suggérées.

24. Sur la figure ci-contre, les droites (AB) et (DC) sont parallèles, $AB = 5\text{cm}$.

- Réaliser la figure grandeur nature en tenant compte du codage.
- Calculer les mesures de tous les angles de la figure.
- Que représente la droite (DB) pour l'angle $\widehat{ADC}$?



1^{ère} aide

Partie de la figure utilisée	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	Triangle ABD. $\widehat{BAD} = 110^\circ$.		$\widehat{ABD} + \widehat{ADB} = \dots\dots$
			$\widehat{ABD} = \widehat{ADB} = \dots\dots$

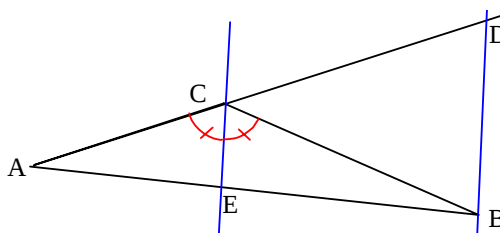
2^{ème} aide

Partie de la figure utilisée	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	Les droites (AB) et (DC) sont Elles sont coupées par la sécante Les angles et sont		

3^{ème} aide

Partie de la figure utilisée	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
		Si une droite partage un angle en deux angles de même mesure alors cette droite est la bissectrice de l'angle.	

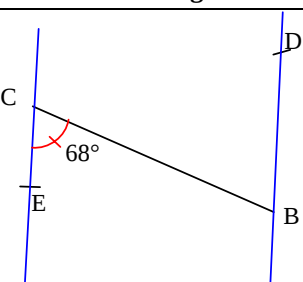
25. ABC est un triangle tel que $\widehat{ACB} = 136^\circ$. La bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$ coupe le segment [AB] au point E. La parallèle à la droite (CE) passant par le point B coupe la droite (AC) au point D. Montrer que le triangle BCD est isocèle en C.



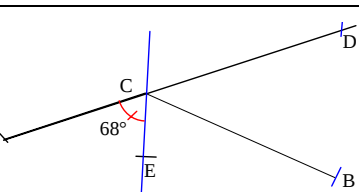
1^{ère} aide

Partie de la figure utilisée	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	La droite (CE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$. $\widehat{ACB} = 136^\circ$		

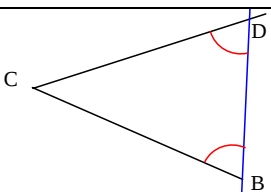
2^{ème} aide

Partie de la figure utilisée	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	Les droites (...) et (...) sont parallèles Elles sont coupées par la sécante Les angles et..... sont		

3^{ème} aide

Partie de la figure utilisée	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	Les droites (...) et (...) sont parallèles Elles sont coupées par la sécante Les angles ... et..... sont		

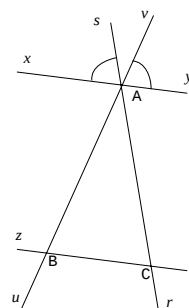
4^{ème} aide

Partie de la figure utilisée	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
			Le triangle BCD est donc isocèle en C.

26. On sait que :

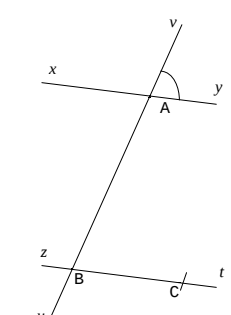
- les droites (xy) et (zt) sont parallèles.
- $\widehat{xAs} = \widehat{vAy}$

Le but de cet exercice est de démontrer que le triangle ABC est isocèle en A.

1^{ère} aideOn pose $\widehat{vAy} = 65^\circ$.

- Calculer la mesure des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$. Justifier la réponse en utilisant une propriété.
- Démontrer que le triangle ABC est isocèle en A.

2^{ème} aide

Partie de la figure utilisée	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
			$\widehat{vAy} = \widehat{ABC}$

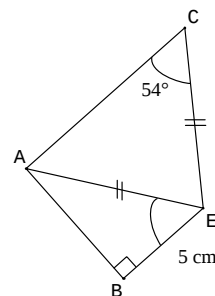
3^{ème} aide

Partie de la figure utilisée	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
			$\widehat{sAx} = \widehat{ACB}$

4^{ème} aide

Partie de la figure utilisée	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
			Le triangle ABC est isocèle en A.

27. 1) Démontrer que les droites (AC) et (BE) sont parallèles.
2) Construire cette figure en vraie grandeur.

1^{ère} aide

Partie de la figure utilisée	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
			$\widehat{CAE} = \dots\dots\dots$

2^{ème} aide

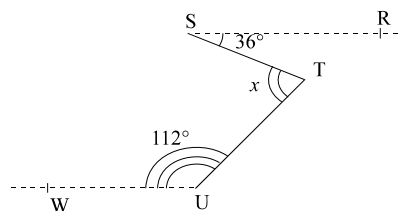
Partie de la figure utilisée	Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis

PROBLÈMES

L'exercice 28 pourra être donné, dans un premier temps, sans indication.

28.

Trouver la mesure de l'angle $\widehat{x}$, sachant que les demi-droites en pointillés sont parallèles.
(Indication : tracer une parallèle.)



29.

Tracer un triangle ABC, puis les bissectrices [Bx) et [Cy) des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.
La parallèle à [Bx) passant par A coupe (BC) en D et la parallèle à [Cy) passant par A coupe (BC) en E.
Démontrer que le périmètre du triangle ABC est égal à DE.

CHAPITRE 11

PARALLÉLOGRAMMES

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Connaître et utiliser une définition et les propriétés relatives aux côtés, aux diagonales et aux angles du parallélogramme.
- Construire, sur papier non quadrillé, un parallélogramme donné en utilisant ses propriétés.
- Solliciter les connaissances relatives aux parallélogrammes dans des problèmes de construction pour justifier les procédures de construction.

REPÈRES POUR LE CONTENU DU COURS

- Définition du parallélogramme.
- Propriétés du parallélogramme.
- Propriétés pour reconnaître un parallélogramme.

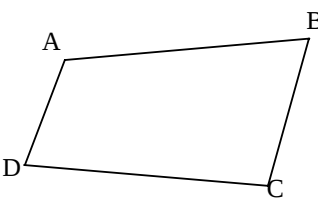
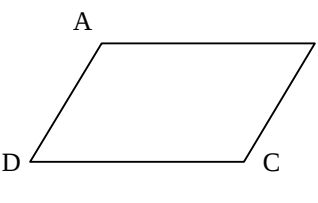
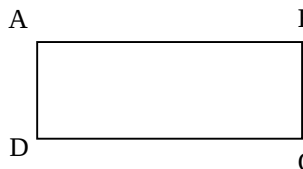
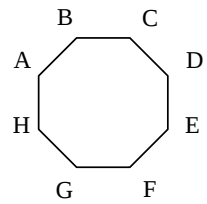
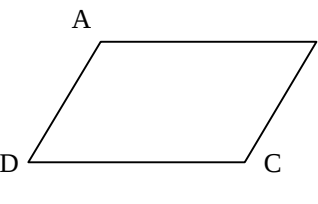
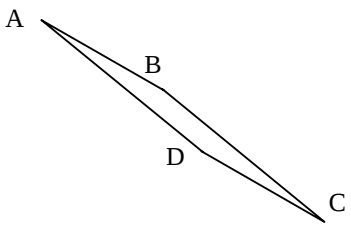
ACTIVITÉ

ACTIVITÉ 1 : RECONNAISSANCE D'UN PARALLÉLOGRAMME À L'AIDE DE LA DÉFINITION

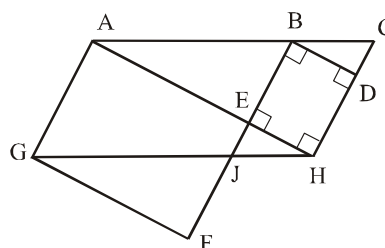
- 1) Sur chacune des figures, coder les renseignements donnés par le texte (pour coder deux côtés parallèles, les repasser de la même couleur, pour coder deux autres côtés parallèles sur la même figure, utiliser une autre couleur).
- 2) En utilisant les codages et la définition ci-dessous, indiquer si les figures suivantes représentent des parallélogrammes.

Voici la définition du parallélogramme :

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.

1.  $(AD) \parallel (BC)$	2.  $(AB) \parallel (CD)$ et $(AD) \parallel (BC)$	3.  ABCD est un rectangle
4.  $(AB) \parallel (EF)$, $(BC) \parallel (GF)$, $(CD) \parallel (HG)$ et $(AH) \parallel (DE)$	5.  $(AB) \parallel (CD)$	6.  $(BC) \parallel (DA)$, $(DC) \parallel (BA)$

- 3) La droite (FB) coupe les droites (AC), (AH) et (GH) respectivement en B, E et J.
Les points C, D, H sont alignés.
On a : $(AC) \parallel (GH)$ et $(AG) \parallel (FB)$. Reconnaître tous les parallélogrammes de la figure ci-contre.



Objectifs et commentaires

- Travailler la définition du parallélogramme en tant que condition nécessaire et suffisante.

Le codage permet de s'appropriier la figure en faisant un changement de registre du texte vers la figure codée. Le changement de registre figure codée vers texte se trouve dans les exercices. L'utilisation des couleurs permet de visualiser les côtés parallèles.

Une seule paire de côtés parallèles ne suffit pas à faire du quadrilatère un parallélogramme (figures 1 et 5), la figure 5 permettant d'insister sur le fait que les informations prises en compte proviennent uniquement du texte ou du codage.

Dans la figure 3, on se base sur la définition du rectangle revue en sixième : un rectangle a quatre angles droits. On justifiera ainsi le parallélisme avec la propriété « si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors ces deux droites sont parallèles ».

La figure 4 insiste sur la nécessité de partir d'un quadrilatère : la multiplicité des paires de côtés parallèles ne donne pas forcément un parallélogramme.

Dans la question 3, on travaille la représentation mentale du parallélogramme en les recherchant à l'intérieur d'une figure complexe. On pourra suggérer aux élèves de coder en couleur les droites parallèles. Pour le rectangle, on fera référence à la figure 3 de la question 2.

ACTIVITÉ 2

Première partie

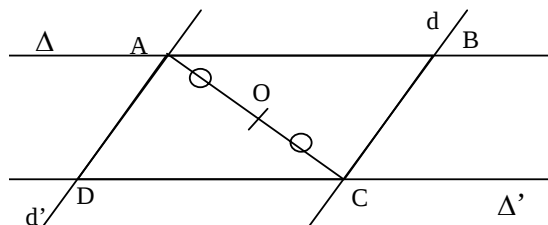
Construire plusieurs parallélogrammes, puis faire une conjecture sur leurs diagonales.

Deuxième partie

Démonstration de la conjecture précédente.

Sur la figure ci-contre, on sait que :

- ABCD est un parallélogramme.
- Les points A et B sont sur la droite Δ .
- Les points C et D sont sur la droite Δ' .
- Les points A et D sont sur la droite d .
- Les points B et C sont sur la droite d' .
- Le point O est le milieu du segment [AC].



On veut démontrer que le point O est aussi le milieu du segment [BD].

1) Compléter le tableau suivant :

Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
		Le symétrique de A par rapport à O est C.
		Les droites Δ et Δ' sont parallèles.
		La droite symétrique de Δ par rapport à O est la droite Δ' .

2) Compléter :

De la même façon, on démontre que la droite symétrique de ... par rapport à O est la droite

3) Compléter le texte suivant qui a pour but de démontrer que le point O est le milieu du segment [BD] :

Le point ... est le point d'intersection des droites d et Δ , son symétrique par rapport au point O est donc le point d'intersection des droites ... et ... c'est à dire le point

On en déduit ainsi que le point ... est le milieu du segment [...].

Objectifs et commentaires

- Démontrer que les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu.

Dans la première partie, on pourra utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour alléger le travail. On veillera à prendre en compte des réponses comme « les diagonales d'un parallélogramme ont même longueur » et d'en examiner la validité en montrant un contre-exemple.

La démonstration est difficile pour un élève de cinquième. Aussi, pour permettre à chaque élève de rester en contact avec le fil du raisonnement, le travail est très encadré dans la deuxième partie.

ACTIVITÉ 3

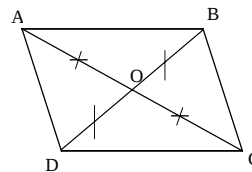
Première partie

Tracer plusieurs quadrilatères dont les diagonales ont le même milieu. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de ces quadrilatères ?

Deuxième partie

Démonstration de la conjecture précédente.

Sur la figure ci-contre, on sait que le point O est le milieu des segments [AC] et [BD]. On veut démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.



Compléter :

Dans la symétrie de centre O,

A a pour image

B a pour image

donc [AB] a pour image

A a pour image

D a pour image

donc [AD] a pour image

Quelle propriété permet de déduire que les segments [AB] et [CD] sont parallèles ? Que les segments [AD] et [BC] sont parallèles ?

Quelle propriété permet d'affirmer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme ?

Objectifs et commentaires

- Démontrer la propriété réciproque de la précédente.

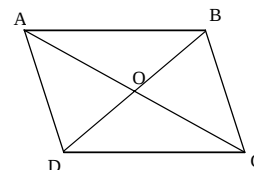
Dans la première partie, certains élèves traceront des diagonales vérifiant une propriété supplémentaire à celle demandée (perpendiculaires, de même longueur...). Ainsi le quadrilatère obtenu semble être *parfois* un rectangle mais *toujours* un parallélogramme. Ce sont ces adverbes, *parfois* et *toujours*, qui font la différence. L'apport d'un logiciel de géométrie dynamique est important pour dégager la bonne conjecture et visualiser les contre-exemples.

Dans la deuxième partie, on s'attache surtout à ce que l'élève reconnaisse les propriétés en jeu.

ACTIVITÉ 4

- Quelle conjecture peut-on faire sur les côtés opposés d'un parallélogramme ?
- Démontrons que les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur :

Sur la figure ci-contre, on sait que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme et que le point O est le point d'intersection des segments [AC] et [BD].



- Quelle est la propriété qui permet de dire que le point O est le milieu des segments [AC] et [BD] ?
- Compléter :

Dans la symétrie de centre O,

A a pour image

B a pour image

donc [AB] a pour image

A a pour image

D a pour image

donc [AD] a pour image

- Quelle propriété permet de déduire que les segments [AB] et [CD] ont la même longueur ? Que les segments [AD] et [BC] ont la même longueur ?

Objectifs et commentaires

- Démontrer que les côtés opposés d'un parallélogramme ont la même longueur.

Cette démonstration, comme la précédente, permet de réinvestir les propriétés de la symétrie centrale.

Les activités 2, 3 et 4 s'inscrivent dans un objectif plus général, visant à fixer clairement les règles du jeu en géométrie déductive : les propriétés mises en évidence sont ou démontrées ou admises. Ici, elles sont démontrées. Si on les admet, il convient de le préciser clairement aux élèves et d'en donner les raisons.

ACTIVITÉ 5

1) On considère les quadrilatères suivants :

1.	2.	3.	4.	5.

- Au vu du codage, quelle est la propriété commune à tous ces quadrilatères ?
- Voici un énoncé : « Si un quadrilatère a deux côtés de même longueur, alors ce quadrilatère est un losange ».

Cet énoncé est-il vrai ? Justifier la réponse.

- Voici un énoncé : « Si un quadrilatère a deux côtés de même longueur, alors ce quadrilatère est un parallélogramme ».

Cet énoncé est-il vrai ? Justifier la réponse.

- Dessiner cinq quadrilatères ayant deux côtés parallèles (On pourra se contenter d'un schéma codé).
 - Trouver les énoncés vrais parmi ceux qui suivent. Justifier.
 - « Si un quadrilatère a deux côtés parallèles, alors ce quadrilatère est un parallélogramme ».
 - « Si un quadrilatère a deux côtés parallèles, alors ce quadrilatère est un trapèze ».
 - « Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux, alors ce quadrilatère est un parallélogramme ».
 - Voici un énoncé : « Si un quadrilatère a quatre angles droits, alors ce quadrilatère est un parallélogramme ».
- Cet énoncé est-il vrai ? Justifier la réponse.

Objectifs et commentaires

- Comprendre des textes du type « si un quadrilatère.....alors ce quadrilatère est... ».
- Justifier des affirmations.

Dans cette activité, on met en œuvre un changement de registre entre un texte en langue naturelle et une figure géométrique.

C'est par l'intermédiaire de cette figure que le texte va prendre du sens.

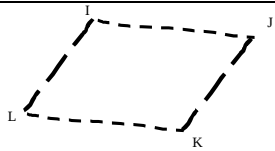
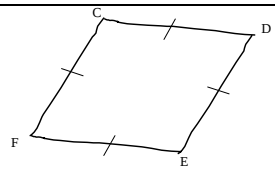
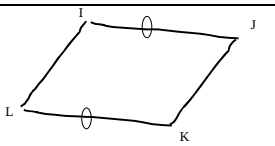
Un des objectifs est de comprendre que, dans les énoncés, l'article indéfini « un » placé devant le mot quadrilatère signifie « n'importe quel » quadrilatère et non un quadrilatère particulier auquel on peut penser.

Un autre objectif est de prendre conscience que le mot « est » dans les textes de propriétés signifie « est toujours » et non pas « peut être ». On pourra suggérer à l'élève en difficulté d'écrire « toujours » à côté de « est » pour parfaire ce sens.

L'élève devra prouver les énoncés vrais et utiliser un contre-exemple qu'il pourra trouver dans les figures de départ pour mettre en défaut un énoncé faux. La recherche d'un contre-exemple fait appel aux règles de la logique : il s'agit de trouver un exemple qui vérifie les hypothèses de l'énoncé et qui ne vérifie pas la conclusion.

ACTIVITÉ 6

Compléter le tableau suivant

Données sous la forme d'un texte et de symboles mathématiques.	Schéma codé : par convention, ici, les droites parallèles sont tracées en pointillés.	Renseignements sur les côtés et/ou sur les diagonales de ce quadrilatère.	Parallélogramme ou non. Propriété utilisée : utiliser les numérotations du cours.
Un quadrilatère ABCD tel que $(AB) \parallel (CD)$			
			
			
Un quadrilatère ABCD tel que $[AC]$ coupe $[BD]$ en O et O est le milieu de $[BD]$.			
			
		Les côtés opposés ont même longueur deux à deux.	
Un quadrilatère IJKL tel que les segments $[IK]$ et $[JL]$ ont le même milieu O.			

Objectifs et commentaires

- Comprendre une situation géométrique dans plusieurs registres : celui des figures et celui de la langue naturelle.
- Reconnaître un parallélogramme à l'aide de propriétés.
- Utiliser le cours pour cette reconnaissance, l'écriture de ce cours utilisant les différents registres considérés.

On prolonge ici l'activité précédente : lorsque l'élève doit considérer un quadrilatère ABCD tel que $(AB) \parallel (CD)$, il doit avoir à l'esprit que seul le parallélisme de ces deux côtés doit être pris en considération pour conclure. Des particularités supplémentaires peuvent apparaître sur les schémas, il faudra alors que l'élève comprenne qu'elles ne peuvent pas être prises en compte dans le raisonnement. On veillera à ce que l'élève travaille avec le cours à côté de lui pour bien identifier les propriétés en jeu.

Dans la première colonne, le texte est en partie en langue naturelle « un quadrilatère tel que », l'autre partie étant en langage symbolique « ABCD, $(AB) \parallel (CD)$ » pour la première ligne.

Dans la troisième colonne, on attend uniquement de la langue naturelle : ainsi, dans la première ligne, on attend de la part de l'élève, qu'il écrive « deux côtés sont parallèles ». Il n'utilise pas, dans cette colonne, le langage symbolique, comme ABCD ou $(AB) \parallel (CD)$.

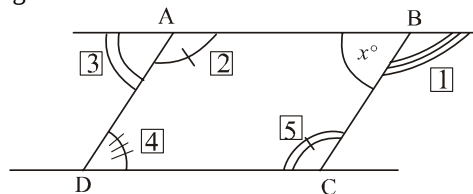
Dans l'avant dernière ligne, l'élève devra prendre l'initiative de désigner les sommets du quadrilatère par des lettres. Il faudra lui montrer que le quadrilatère obtenu n'est pas nécessairement un parallélogramme, ce quadrilatère pouvant être croisé.

ACTIVITÉ 7 : ANGLES DU PARALLÉLOGRAMME

Première partie : à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, dessiner un parallélogramme, mesurer ses angles, faire varier la position d'un des sommets, demander alors aux élèves de faire des conjectures sur les propriétés des angles du parallélogramme.

Deuxième partie : démonstration des propriétés angulaires du parallélogramme.

La figure ci-contre représente un parallélogramme : les droites (AB) et (CD) sont parallèles, de même que les droites (AD) et (BC).



- 1) On choisit $x = 70$
 - a) Quels sont les angles de cette figure qui semblent aussi mesurer 70° ?
 - b) Quelle propriété permet d'affirmer que l'angle numéroté **3** mesure 70° ?
 - c) Quelle propriété permet d'affirmer que l'angle numéroté **4** mesure 70° ?
 - d) Combien mesure l'angle numéroté **1** ? Justifier la réponse.
 - e) Quels sont les angles de cette figure qui semblent aussi mesurer 110° ?
 - f) Quelle propriété permet d'affirmer que l'angle numéroté **2** mesure 110° ?
 - g) Quelle propriété permet d'affirmer que l'angle numéroté **5** mesure 110° ?
- 2) On raisonne maintenant avec x quelconque :
Quels sont les angles de la figure mesurant x° ?
Quelle est la mesure des angles numérotés **1**, **2** et **5** ?

Objectifs et commentaires

- Faire une conjecture concernant les angles du parallélogramme.
- Démontrer cette conjecture.

Cette activité permet de réinvestir les propriétés angulaires de la symétrie centrale. On ne cherche pas ici une rédaction parfaite : l'objectif est de montrer que les propriétés des angles du parallélogramme découlent des propriétés de la symétrie centrale, en particuliers celles concernant les angles alternes internes ou correspondants formés par deux parallèles coupées par une sécante. La question 2 généralise le résultat ; on fera remarquer que les propriétés pour justifier sont les mêmes que celles utilisées dans la question 1.

COURS

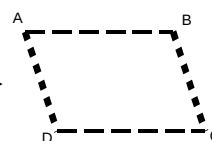
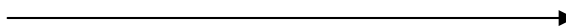
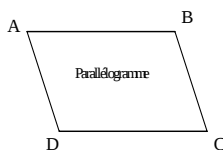
DÉFINITION

Un *parallélogramme* est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.



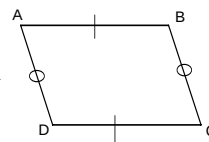
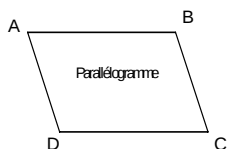
PROPRIÉTÉS DES PARALLÉLOGRAMMES

Propriété p1 : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.



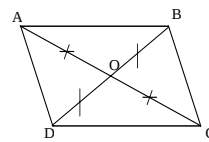
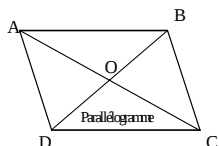
Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
ABCD parallélogramme.	Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés sont parallèles deux à deux.	(AB) // (CD). (AD) // (BC).

Propriété p2 : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés ont la même longueur.



Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
ABCD parallélogramme.	Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés opposés ont la même longueur.	$AB = DC$. $AD = BC$.

Propriété p3 : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.

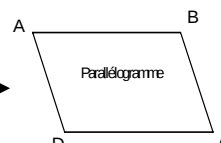
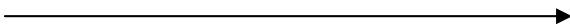
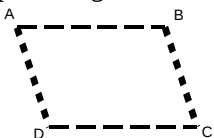


Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
ABCD parallélogramme. [AC] et [BD] se coupent en O.	Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.	O milieu de [AC] et de [BD].

Définition : Le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme s'appelle le *centre* de ce parallélogramme.

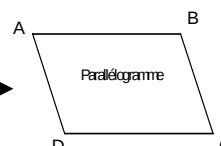
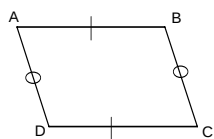
PROPRIÉTÉS POUR RECONNAITRE DES PARALLÉLOGRAMMES

Propriété rp1 : Si un quadrilatère a ses côtés parallèles deux à deux, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.



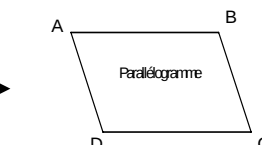
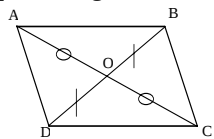
Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
$(AB) \parallel (CD)$. $(AD) \parallel (BC)$.	Si un quadrilatère a ses côtés parallèles deux à deux, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.	ABCD parallélogramme.

Propriété rp2 : Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.



Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
ABCD non croisé. $AB = DC$. $AD = BC$.	Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de même longueur, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.	ABCD parallélogramme.

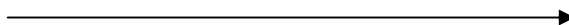
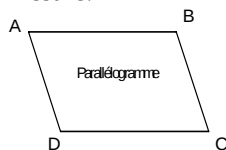
Propriété rp3 : Si dans un quadrilatère les diagonales se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.



Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
O milieu de [AC] et de [BD].	Si dans un quadrilatère les diagonales se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.	ABCD parallélogramme.

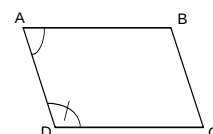
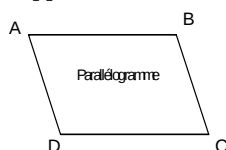
PROPRIÉTÉS ANGULAIRES DES PARALLÉLOGRAMMES

Propriété des angles opposés : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles opposés ont la même mesure.



Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
ABCD parallélogramme.	Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles opposés ont la même mesure.	$\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$. $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$.

Propriété des angles consécutifs : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles consécutifs sont supplémentaires.



Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
ABCD parallélogramme.	Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses angles consécutifs sont supplémentaires (c'est à dire que la somme de leurs mesures est égale à 180°).	$\widehat{BAD} + \widehat{ADC} = 180^\circ$.

POINTS DE REPÈRE / MÉTHODES

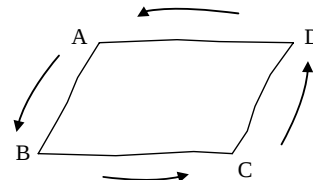
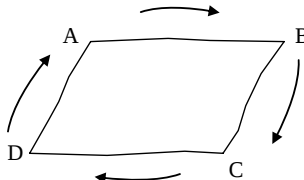
Savoir nommer un parallélogramme

Voici un parallélogramme tracé à main levée :



On veut nommer ce parallélogramme ABCD.

Pour cela, il faut placer le nom des sommets en suivant les côtés : on tourne dans un sens ou dans l'autre.



Savoir tracer un parallélogramme lorsque trois sommets sont donnés et les instruments imposés

Méthode générale

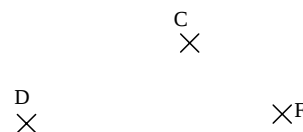
- 1) On commence par faire un schéma et on repère les côtés qu'on peut tracer.
- 2) On repère les propriétés du parallélogramme que les instruments autorisés permettent de respecter pour terminer la construction.

Lorsque la figure est terminée, on vérifie que le nom du parallélogramme est bien celui de l'énoncé.

- 1) Tracé d'un parallélogramme à l'aide d'une règle non graduée et d'une équerre.

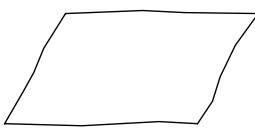
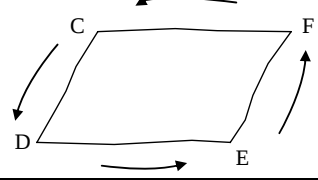
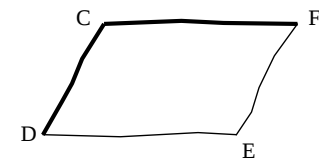
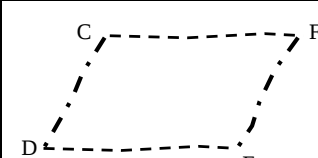
Énoncé

Les points C, D et F sont donnés. Tracer le parallélogramme CDEF à l'aide d'une règle non graduée et d'une équerre.

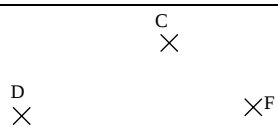
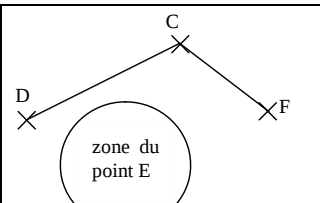
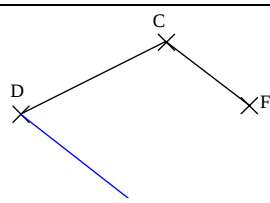
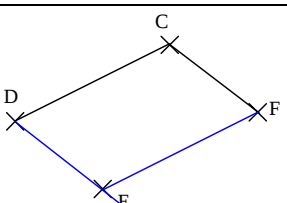


Recherche

1) On fait un schéma :

1. On trace un parallélogramme à main levée :	2. On nomme ce parallélogramme <u>CDEF</u> , en plaçant les deux premiers points C et D un peu comme sur la figure de départ :	3. On repère les <u>côtés</u> qu'on peut tracer avec les points donnés C, D et F : ce sont [CD] et [CF].
		
2) La règle non graduée et l'équerre permettent de tracer <u>les côtés opposés parallèles</u> .		

Film de la construction

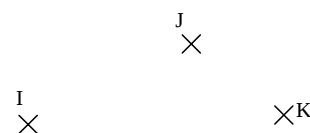
Figure de départ	On trace les côtés connus [CD] et [CF]. On repère la zone dans laquelle doit se trouver le point E.	On trace la parallèle au côté [CF] passant par le point D.	On trace la parallèle au côté [DC] passant par le point F. Il ne reste plus qu'à nommer E le point d'intersection des deux droites tracées.
			

On vérifie : Le parallélogramme obtenu s'appelle bien CDEF.

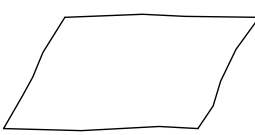
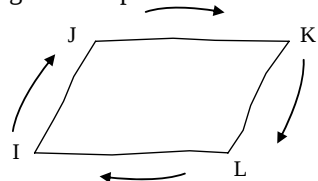
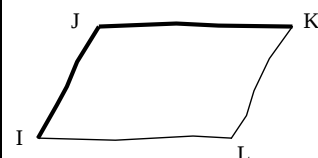
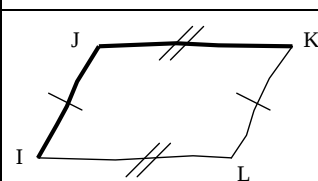
2) Tracé d'un parallélogramme à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas.

Énoncé

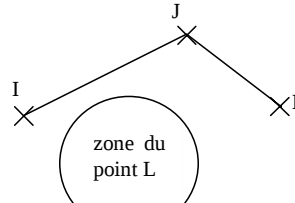
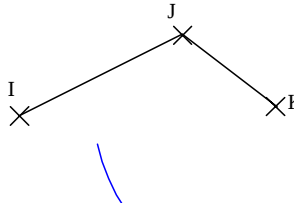
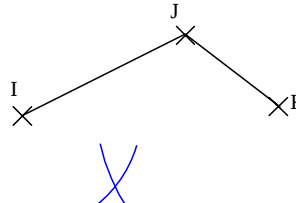
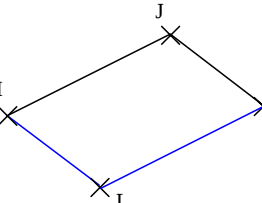
Les points I, J et K sont donnés. Tracer le parallélogramme IJKL à l'aide d'une règle non graduée et d'un compas.

**Recherche**

1) On fait un schéma :

1. On trace un parallélogramme à main levée :	2. On nomme ce parallélogramme <u>IJKL</u> , en plaçant les deux premiers points I et J un peu comme sur la figure de départ :	3. On repère les <u>côtés</u> qu'on peut tracer avec les points donnés I, J et K : ce sont [IJ] et [JK].
		
2) La règle non graduée et le compas permettent de tracer <u>les côtés opposés de même longueur</u> .		

Film de la construction

 Figure de départ : On trace les côtés [IJ] et [JK], et on localise la zone où se situe le point L.	 On trace un arc de cercle de centre K et de rayon IJ dans la zone du point L.	 On trace un arc de cercle de centre I et de rayon EH dans la zone du point L.	 On appelle L le point d'intersection des deux arcs de cercle. Il ne reste plus qu'à tracer [IL] et [LK].
---	--	---	---

On vérifie : Le parallélogramme obtenu s'appelle bien IJKL.

Savoir tracer un parallélogramme lorsque deux sommets et son centre sont donnés**Énoncé**

Les points R, S et O sont donnés. Tracer le parallélogramme RSTU de centre O.

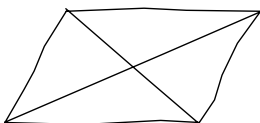
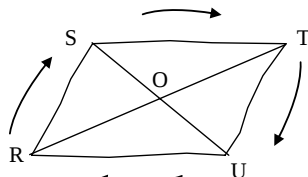
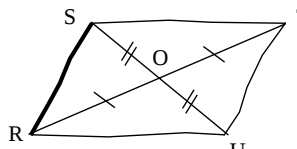
S ×

R ×

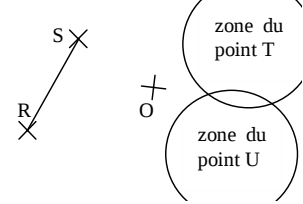
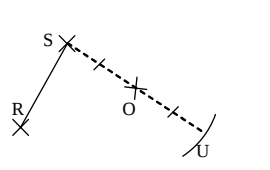
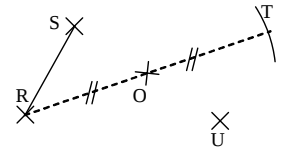
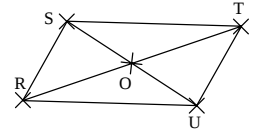
O

Recherche

On fait un schéma :

1. On trace un parallélogramme à main levée, ainsi que ses diagonales : 	2. On nomme ce parallélogramme RSTU et le point d'intersection des diagonales O. 	
3. On analyse la figure pour trouver ce qu'on peut tracer à partir des points S, R et O : - on peut tracer le côté [RS] - le point O étant le milieu des diagonales, on peut tracer le point U, symétrique de S par rapport à O et le point T, symétrique de R par rapport à O.		

Film de la construction

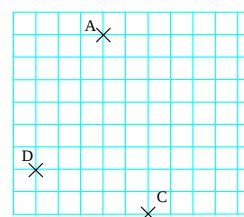
 Figure de départ : On trace le côté [RS]. On repère la zone de chacun des points T et U.	 On trace le symétrique du point S par rapport à O.	 On trace le symétrique du point R par rapport à O.	 Il ne reste plus qu'à tracer [ST], [TU] et [UR].
---	---	--	---

On vérifie : le parallélogramme s'appelle bien RSTU.

Savoir tracer un parallélogramme à l'aide d'un quadrillage**Énoncé**

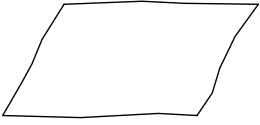
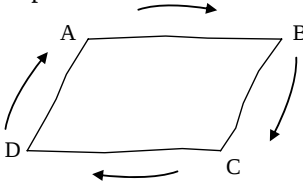
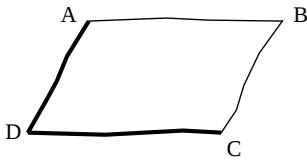
Les points A, C et D sont des nœuds du quadrillage.

Tracer le parallélogramme ABCD en s'aidant du quadrillage.

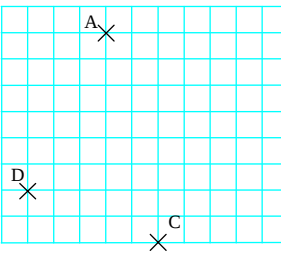
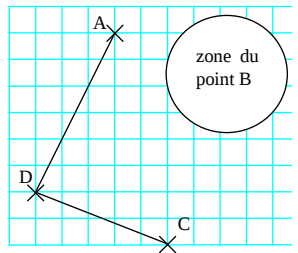
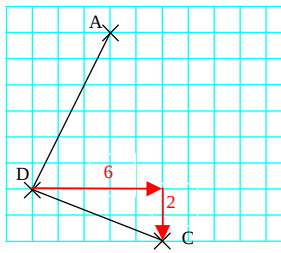
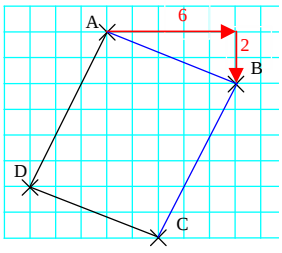


Recherche

On fait un schéma :

1. On trace un parallélogramme à main levée : 	2. On nomme ce parallélogramme ABCD : les points C et D se suivent dans le nom du parallélogramme ; on les place un peu comme sur la figure de départ : 	3. On repère les <u>côtés</u> qu'on peut tracer avec les points donnés A, C et D : ce sont [AD] et [DC]. 
--	--	---

Film de la construction

 Figure de départ	 On trace les côtés connus [CD] et [DA]. On repère la zone dans laquelle doit se trouver le point B.	 On repère un déplacement suivant les lignes du quadrillage qui va de D vers C : 6 carreaux horizontalement. 2 carreaux verticalement.	 On effectue le même déplacement pour aller de A vers B. Il ne reste plus qu'à tracer le parallélogramme.
---	--	---	---

On vérifie : le parallélogramme s'appelle bien ABCD.

EXERCICES

CONSTRUCTIONS

De nombreux exercices de cette partie peuvent être considérés comme des « problèmes de construction ». Un problème de construction se résout en trois étapes : l'analyse du problème, la construction et la synthèse.

Ici, il s'agit de construire des parallélogrammes. Dans la phase d'analyse, on utilise donc des énoncés relevant des « propriétés du parallélogramme » pour déduire, à partir des données, de nouvelles propriétés de la figure qui seront utiles pour effectuer la construction. Dans la phase de synthèse, on justifie que la construction effectuée donne bien un parallélogramme : les énoncés utilisés relèvent donc des « propriétés pour reconnaître un parallélogramme ». Cette distinction est délicate pour les élèves. La phase d'analyse se fait en général sur le schéma, par un codage, sans que la propriété utilisée soit écrite. Par contre, dans certains exercices, on demande d'écrire la propriété qui permet de justifier que le quadrilatère construit est bien un parallélogramme : c'est la phase de synthèse qu'on vise dans ce type de question.

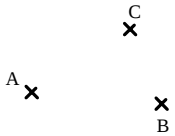
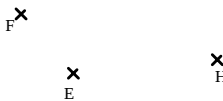
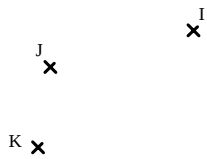
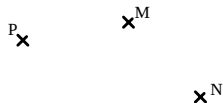
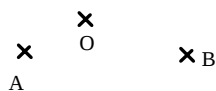
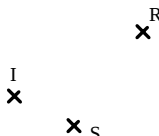
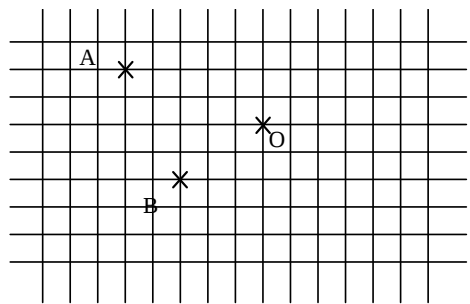
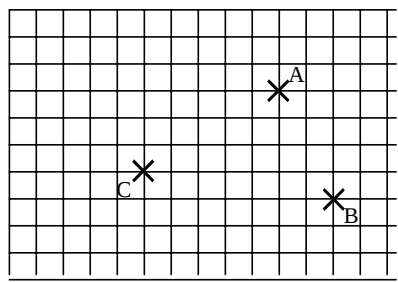
L'exercice 1 est un entraînement au tracé de parallélogrammes.

Aucun côté n'étant tracé, le démarrage correct de la figure constitue une réelle difficulté. L'élève peut, en effet, tracer un segment qui n'est pas un côté du parallélogramme demandé et obtenir une figure erronée. Une analyse préalable du problème à l'aide d'un schéma est nécessaire. Ce passage du registre texte au registre figure permet de nommer correctement le parallélogramme et de repérer la région du plan où se situera le quatrième sommet (voir le point de repère/méthodes consacré à ce sujet).

Les méthodes de construction d'un parallélogramme étant nombreuses, on impose ici les instruments à utiliser dans le but de faire fonctionner les trois propriétés caractéristiques du parallélogramme citées dans le cours : côtés opposés parallèles, côtés opposés de même longueur dans un quadrilatère non croisé, diagonales de même milieu. L'élève est ainsi amené à faire le lien entre le type de tracé que permettent les instruments choisis et les propriétés qu'il donne à sa figure.

En réalisant de telles constructions, il peut mieux comprendre que quelques propriétés suffisent pour qu'un quadrilatère soit un parallélogramme et s'approprier le cours.

1. Tracer le parallélogramme demandé en n'utilisant que les instruments indiqués. Commencer par faire un schéma.

Avec la règle non graduée et l'équerre, construire le parallélogramme ABCD. 	Avec la règle non graduée et l'équerre, construire le parallélogramme EFGH. 
Avec la règle non graduée et le compas, construire le parallélogramme IJKL. 	Avec la règle non graduée et le compas, construire le parallélogramme MNOP. 
Avec la règle graduée seule, construire le parallélogramme ABCD de centre O. 	Avec la règle non graduée et le compas, tracer le parallélogramme RSTU de centre I. 
Avec le quadrillage et la règle non graduée, construire le parallélogramme ABCD de centre O. 	Avec le quadrillage et la règle non graduée, construire le parallélogramme ABCD. 

Les exercices 2 à 4 ont les mêmes objectifs que l'exercice 1 et nécessitent une analyse préalable du problème à l'aide d'un schéma.

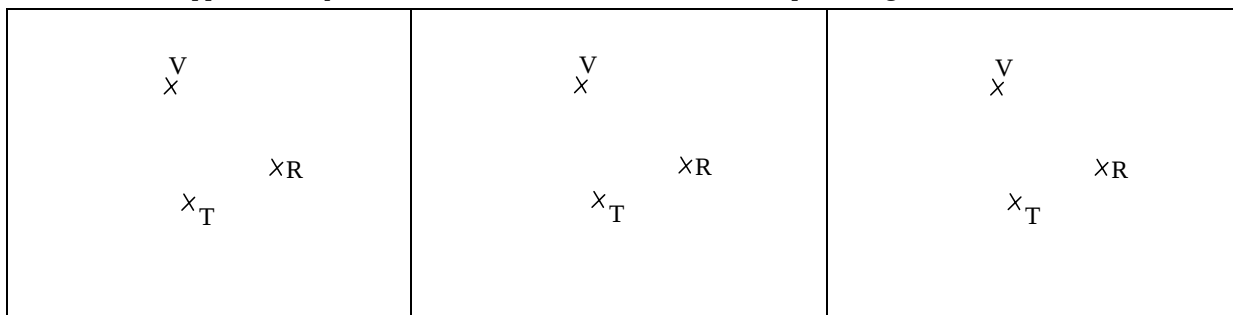
Écrire le programme de construction permet à l'élève de passer du geste à une formulation mathématique et au professeur de vérifier que l'élève fait correctement le lien entre tracés et propriétés respectées. On pourra demander le codage de ces propriétés.

2.
 - a) Tracer un triangle ABC tel que $AB = 4$ cm, $AC = 6$ cm et $BC = 3$ cm.
 - b) Construire, à la règle et à l'équerre, le point D tel que ABCD soit un parallélogramme.
 - c) Écrire le programme de construction de D.
3.
 - a) Tracer un triangle EFG tel que $EF = 5$ cm, $FG = 2$ cm et $EG = 4,5$ cm.
 - b) Construire, à la règle et au compas, le point H tel que EFGH soit un parallélogramme.
 - c) Écrire le programme de construction de H.

4. a) Tracer un triangle KLM tel que $KL = 3$ cm, $KM = 6,2$ cm et $LM = 4$ cm.
 b) Construire, à la règle graduée seule, le point P tel que KLPM soit un parallélogramme.
 c) Écrire le programme de construction de P.

L'objectif de l'exercice 5 est de faire prendre conscience à l'élève que, lorsque leur ordre n'est pas précisé, trois points ne suffisent pas pour déterminer un parallélogramme.

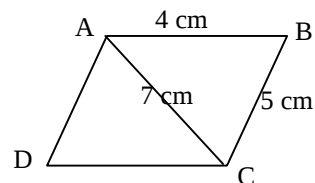
5. Compléter les trois figures ci-dessous pour obtenir trois parallélogrammes différents qui ont V, R et T pour sommets. Appeler A le quatrième sommet et écrire le nom des trois parallélogrammes obtenus.



Comme dans les exercices 1 à 4, les élèves n'ont pas le choix des instruments dans les deux exercices qui suivent. La démarche attendue est donc la même, mais, de plus, on demande que la propriété qui permet de justifier que la figure obtenue est bien un parallélogramme soit énoncée. Ces exercices doivent permettre de pointer la cohérence (ou non) entre les propriétés données à la figure au moment de sa construction et l'un des énoncés rp1, rp2, rp3 du cours.

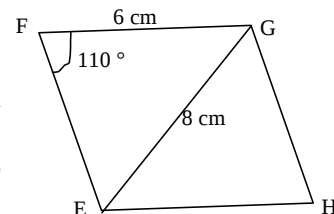
6. ABCD est un parallélogramme tel que $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm et $AC = 7$ cm.

- a) Construire ABCD en vraie grandeur. Pour le point D, seuls le compas et la règle non graduée sont autorisés.
 b) Écrire la propriété du cours qui permet d'être sûr que le quadrilatère construit est bien un parallélogramme.



7. EFGH est un parallélogramme tel que $FG = 6$ cm, $GE = 8$ cm et $\widehat{EFG} = 110^\circ$.

- a) Construire EFGH en vraie grandeur. Pour le point H, seules l'équerre et la règle non graduée sont autorisées.
 b) Écrire la propriété du cours qui permet d'être sûr que le quadrilatère construit est bien un parallélogramme.



La figure de l'exercice 8 ne peut être réalisée sans un schéma et une analyse du problème. La présence simultanée des questions c) et d) permet de vérifier la cohérence de la démarche de l'élève.

8. IJKL est un parallélogramme de centre O tel que $IK = 8,4$ cm, $JL = 5$ cm et $\widehat{IOJ} = 72^\circ$.

- a) Faire un schéma.
 b) Construire IJKL en vraie grandeur.
 c) Écrire le programme de la construction.
 d) Écrire la propriété du cours qui permet d'être sûr que le quadrilatère construit est bien un parallélogramme.

Les constructions des exercices 9 et 10 permettent aux élèves de comprendre que certaines données ne conduisent pas à un parallélogramme unique mais à une famille de parallélogrammes, famille dans laquelle on pourra, lors de la correction, faire apparaître le rectangle comme un parallélogramme parmi d'autres et donc comme un parallélogramme particulier.

9. Construire trois parallélogrammes non superposables dont les côtés mesurent 7 cm et 2 cm.
 10. Construire trois parallélogrammes non superposables dont une diagonale mesure 3 cm et dont l'autre diagonale mesure 5 cm.

Contrairement aux exercices précédents, dans les exercices 11 à 15, on obtient un unique parallélogramme. Ces exercices visent à faire prendre conscience aux élèves que d'une part un schéma est utile pour aboutir rapidement à la figure demandée et que d'autre part il est important de connaître et d'utiliser les propriétés caractéristiques des parallélogrammes.

11. Construire un parallélogramme ABCD tel que :

- a) $AB = 5 \text{ cm}$; $BC = 7 \text{ cm}$; $\widehat{ABC} = 40^\circ$; b) $AB = 4 \text{ cm}$; $AD = 3 \text{ cm}$; $AC = 5 \text{ cm}$;
 c) $AB = 6 \text{ cm}$; $AD = 5 \text{ cm}$; $\widehat{ABC} = 99^\circ$; d) $AB = 5 \text{ cm}$; $AC = 6 \text{ cm}$; $\widehat{BAC} = 84^\circ$;
 e) $AB = 4 \text{ cm}$; $AC = 3 \text{ cm}$; $\widehat{ABC} = 50^\circ$; f) $AB = 4 \text{ cm}$; $AC = 7 \text{ cm}$; $BD = 8 \text{ cm}$.

12. Tracer un parallélogramme MNPQ de centre I tel que $IN = 2,5 \text{ cm}$, $IP = 4 \text{ cm}$ et $\widehat{MIQ} = 70^\circ$.

13. Tracer un parallélogramme ABCD de centre J tel que $AJ = 7 \text{ cm}$, $JD = 3 \text{ cm}$ et $BC = 5 \text{ cm}$.

14. Tracer un parallélogramme ABCD de centre I tel que $AC = 8 \text{ cm}$, $BD = 5 \text{ cm}$ et $\widehat{BIC} = 38^\circ$.

15. Tracer un triangle ABC puis construire le parallélogramme BCDE de centre A.

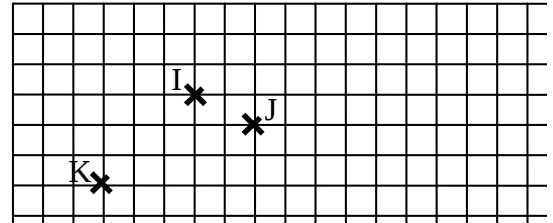
Dans les exercices 16 à 20, les tracés sur quadrillages permettent, en théorie, de se débarrasser de la contrainte des instruments pour les tracés de parallèles ou les reports de longueurs. Pour les élèves en difficulté, il est souvent utile de préciser que les points cherchés doivent être sur des nœuds du quadrillage.

La tâche à effectuer revient à décomposer un vecteur de translation (par exemple $\vec{AB}$) en somme de deux vecteurs, l'un « horizontal », l'autre « vertical ».

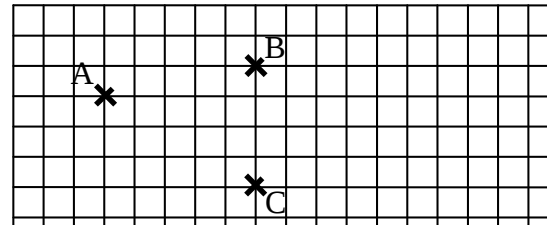
Les exercices 16 et 17 sont de difficulté croissante.

Dans l'exercice 16, il suffit de suivre l'ordre des points donnés. Dans l'exercice 17, par contre, le point cherché est le troisième, voire le deuxième nommé. Il faut donc imaginer la figure terminée ou faire un schéma donnant l'ordre des points et le placement des côtés.

16. Reproduire la figure ci-contre et tracer les parallélogrammes suivants en se servant du quadrillage :
 IJKA ; IKJB ; JIKC.

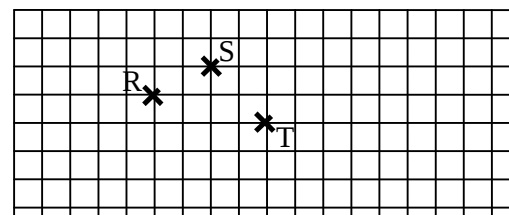


17. Reproduire la figure ci-contre et tracer les parallélogrammes suivants en se servant du quadrillage :
 ABLC ; CAMB ; BCPA.



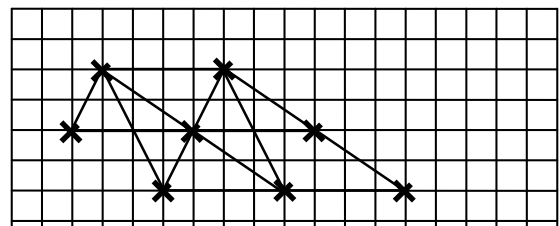
Dans l'exercice 18, on donne deux sommets et le centre du parallélogramme. Un schéma de chaque situation est à conseiller.

18. Reproduire la figure ci-contre et tracer les parallélogrammes suivants en se servant du quadrillage :
 RTAB de centre S.
 SRCD de centre T.
 ESTF de centre R.



L'exercice 19 est un exercice de recherche. L'indice qui permet de trouver est dans la dernière phrase : ABHG est un parallélogramme de centre E.

19. Reproduire la figure ci-contre sur laquelle on a tracé des parallélogrammes.
 Retrouver le nom des points à l'aide des indications suivantes (ne pas tracer de parallélogramme supplémentaire) :
 DEHG, BCHG, HGEF sont des parallélogrammes.
 ABHG est un parallélogramme de centre E.



L'exercice 20 consiste à construire trois parallélogrammes ayant une diagonale commune. Le seul indice dans l'énoncé qui permette de trouver une stratégie efficace est le placement du milieu O du segment donné qui est la diagonale commune à tous les parallélogrammes.

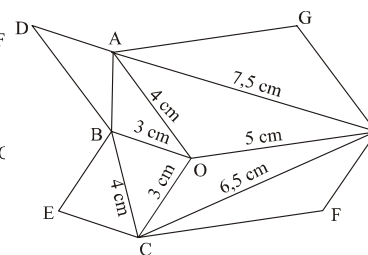
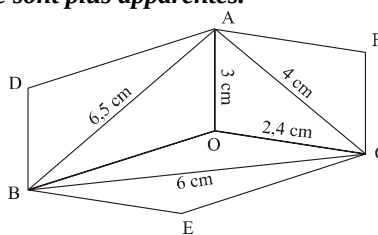
20. Tracer un segment $[EF]$ de 6 cm de longueur et placer son milieu O . Sur cette figure tracer trois parallélogrammes non superposables $EGFH$, $EIFK$ et $ELFM$.

L'exercice 21 est une variante des exercices 16 et 17, avec pour objectif, un tracé précis avec les instruments imposés : règle et équerre.

21. Tracer un triangle ABC puis construire, à la règle et à l'équerre, les parallélogrammes $ABCD$, $ABEC$, $AFBC$. Si la figure est juste, A est le milieu de $[DF]$, B celui de $[EF]$ et C celui de $[DE]$.

L'exercice 22 est un exercice de construction qui demande de trouver l'ordre des tracés. Pour la figure 1, il faut penser à construire le triangle ABC , dont les côtés ne sont pas des côtés des parallélogrammes cherchés. Dans la figure 2, les sous figures à extraire sont plus apparentes.

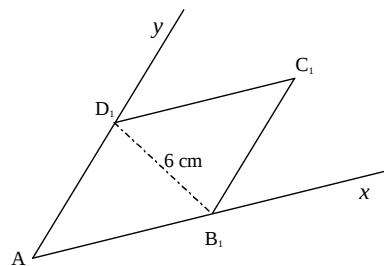
22. a) Reproduire la figure 1 sachant que $AOCF$, $BOCE$ et $AOBD$ sont des parallélogrammes.
b) Reproduire la figure 2 sachant que $AOVG$, $OCFV$, $OBEC$ et $AOBD$ sont des parallélogrammes.



Dans les exercices 23 à 25, on propose des constructions de parallélogrammes en lien avec les différentes caractérisations : le choix de la caractérisation entraîne aussi le choix des instruments, il faudra attirer l'attention des élèves sur ce point.

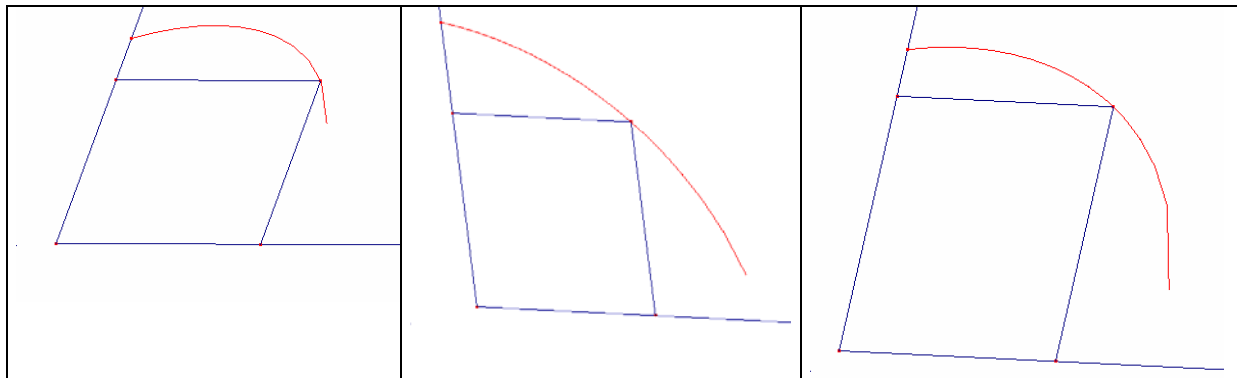
La réalisation d'une courbe par points est un enjeu qui est susceptible de motiver un grand nombre d'élèves.

23. 1) Reproduire la figure ci-contre, sachant que l'angle entre les droites $[Ax)$ et $[Ay)$ est égal à 70° , que B_1 est sur $[Ax)$, D_1 sur $[Ay)$ et que $AB_1C_1D_1$ est un parallélogramme, utiliser uniquement la règle non graduée et l'équerre.
2) Placer un point B_2 sur $[Ax)$ et un point D_2 sur $[Ay)$ tels que $B_2D_2 = 6$ cm puis construire le parallélogramme $AB_2C_2D_2$ à la règle non graduée et à l'équerre.
3) Recommencer plusieurs fois la question 2, avec des points $B_3, B_4, B_5, \dots$ sur $[Ax)$, des points $D_3, D_4, D_5, \dots$ sur $[Ay)$, tels que $B_3D_3 = B_4D_4 = B_5D_5 = \dots = 6$ cm et tels que $AB_3C_3D_3, AB_4C_4D_4, AB_5C_5D_5, \dots$ soient des parallélogrammes.



24. Reprendre l'exercice 29, avec un angle de 100° entre les demi-droites et $B_1D_1 = 9$ cm en utilisant pour la construction des parallélogrammes la règle non graduée et le compas.
25. Reprendre l'exercice 29, avec un angle de 80° entre les demi-droites et $B_1D_1 = 8$ cm en utilisant pour la construction des parallélogrammes uniquement la règle graduée.

Ci-dessous, voici un aperçu réduit du résultat obtenu avec un logiciel de géométrie.



CHOISIR LA BONNE PROPRIÉTÉ

Dans l'exercice 26, on utilise un tableau pour aider l'élève à organiser ses idées.

En codant ses schémas, l'élève commence par mettre en évidence les données ; ce changement de registres lui permet de s'approprier l'exercice.

L'utilisation du codage permet aussi de relier un schéma à une figure clé, elle-même associée à un théorème ; cette illustration facilite la distinction entre une propriété et sa réciproque.

Pour valider le choix d'une propriété, l'élève doit procéder à deux vérifications :

- *s'assurer que les données de l'énoncé correspondent aux prémisses d'une propriété,*
- *puis vérifier que la conclusion de cette propriété corresponde à la conclusion recherchée dans l'exercice.*

26. Dans chacun des cas suivants, faire un schéma codé correspondant aux données et écrire la propriété permettant d'en déduire la conclusion.

	Données	Schéma	Propriété permettant de déduire la conclusion	Conclusion
(1)	ABCD est un parallélogramme. [AC] et [BD] se coupent au point H.			H est le milieu de [AC] et de [BD].
(2)	R, S, T et U sont 4 points. (RS) // (UT). (RU) // (ST).			UTSR est un parallélogramme.
(3)	EFGH est un quadrilatère. [EG] et [FH] se coupent au point M. M est le milieu de [EG] et [FH].			EFGH est un parallélogramme.
(4)	MONI est un parallélogramme. ON = 10 cm.			MI = 10 cm.
(5)	[AC] et [BD] se coupent au point H. AH = HC = 4 cm. BH = HD = 6 cm.			ABCD est un parallélogramme.
(6)	PRST est un parallélogramme.			(PR) // (ST).

L'exercice 27 s'appuie sur une phrase qui traduit un raisonnement commençant par la conclusion et faisant un retour en arrière sur les données. Dans cet exercice, l'élève apprend à distinguer une cause d'une conséquence en comprenant la structure d'une phrase : en effet les mots de liaison déterminent le statut des propositions.

27. Pierre finit son exercice en écrivant : « Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme car O milieu de [AC] et de [BD]. » Voici deux propriétés :

Propriété 1 : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.

Propriété 2 : Si dans un quadrilatère les diagonales se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Laquelle de ces deux propriétés Pierre a-t-il utilisée ? Justifier la réponse.

Dans l'exercice 28 deux objectifs sont visés :

- *aborder la question des cas particuliers.*

L'élève est amené à comprendre que des figures particulières induisent des idées fausses et peuvent alors devenir un obstacle au raisonnement. En effet, l'élève apprend à ne pas « lire » sur la figure de nouvelles données qui ne font pas partie de l'énoncé. Il est ainsi amené à faire des allers et retours entre la figure et l'énoncé.

- *démontrer les conjectures retenues en choisissant la propriété adaptée.*

28. Tracer un triangle ABC, placer le point O milieu de [BC], puis tracer la droite d passant par le point B et parallèle à la droite (AC) et la droite Δ passant par le point C et parallèle à la droite (AB). Les droites d et Δ se coupent en un point D.

Voici plusieurs conjectures possibles :

- ABDC est un rectangle.
- ABDC est un losange.
- ABDC est un carré.
- ABDC est un parallélogramme.
- Les points A, O et D sont alignés.

- Le point O est le milieu du segment [AD].
- a) Trouver parmi ces conjectures celles qui semblent toujours vraies.
- b) Voici quatre propriétés :

Propriété 1 : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.

Propriété 2 : Si dans un quadrilatère les diagonales se coupent en leur milieu, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Propriété 3 : Si un quadrilatère a ses côtés parallèles deux à deux, alors ce quadrilatère est un parallélogramme.

Propriété 4 : Si un quadrilatère est un parallélogramme, alors ses côtés sont parallèles deux à deux.

Justifier les conjectures vraies à l'aide des propriétés adéquates.

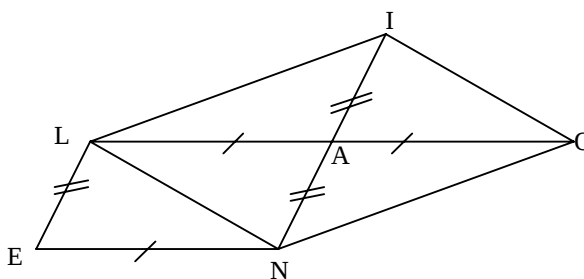
Dans l'exercice 29, la première question suit la démarche inverse de celle de l'exercice 26 : on commence par transcrire des codages de la figure dans le registre de la langue naturelle.

Dans la troisième question, on extrait des sous figures : tous les parallélogrammes (pour mieux visualiser les parallèles tracées à la question 2, on pourra les repasser dans une même couleur).

En prolongement de la question 4, on peut demander de préciser la position du point K et de justifier.

29. On donne la figure ci-contre.

- 1) Nommer tous les segments de la figure dont le codage indique qu'ils ont la même longueur.
- 2) Tracer la parallèle à (IA) passant par O et la parallèle à (AO) passant par I. Ces deux droites se coupent en un point qu'on appelle F.
- 3) Nommer tous les parallélogrammes de la figure et énoncer chaque fois la propriété qui permet de le justifier.
- 4) Construire le point K tel que KLIN soit un parallélogramme.

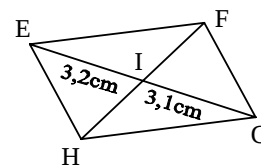
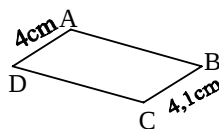


30. Tracer un parallélogramme ABCD puis tracer la droite passant par le point A et parallèle à la droite (BD). Cette droite coupe (DC) en E et (BC) en F.

- a) Écrire toutes les paires de droites parallèles de la figure. Justifier chaque affirmation à l'aide d'une propriété ou d'un élément de l'énoncé.
- b) Nommer tous les parallélogrammes de la figure et justifier.
- c) Comparer les longueurs BD et AF, BD et AE. Justifier la réponse à l'aide d'une propriété.
- d) Que peut-on en déduire pour le point A ?

Dans l'exercice 31, on propose d'utiliser les contraposées de deux propriétés.

31. Les quadrilatères ABCD et EFGH ne peuvent pas être des parallélogrammes. Expliquer pourquoi, en citant la propriété des parallélogrammes qui n'est pas vérifiée.



DÉMONSTRATIONS

On distinguera, dans chacun des exercices suivants, **deux phases de travail** :

- **La phase de recherche**, qui entraîne les élèves dans la reconnaissance de situations de base, de figures-clés et les engage à trouver un ordre dans les propriétés à utiliser. Dans cette partie, le travail peut être mené en groupes, les conclusions intermédiaires peuvent être notées au brouillon.
- **La phase de rédaction** pour laquelle on encouragera les élèves à prendre le cours comme « modèle », à éventuellement utiliser des tableaux pour rédiger.

Ces deux phases de travail doivent être séparées : une synthèse collective s'impose après la phase de recherche, avant de passer à la rédaction.

32. Tracer un cercle C de centre O , de rayon 3 cm et un cercle C' de centre O et de rayon 5 cm. Tracer un diamètre $[AB]$ de C et un diamètre $[CD]$ de C' . Que peut-on dire du quadrilatère $ACBD$? Justifier la réponse.
33. a) Tracer un parallélogramme $ABCD$ de centre O tel que $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm et $BD = 10$ cm puis construire le parallélogramme $AECF$ tel que $AE = 7$ cm et $EC = 5$ cm.
 b) Quel est le centre du parallélogramme $AECF$? Justifier la réponse.
 c) Que peut-on dire du quadrilatère $BEDF$? Justifier la réponse.
34. Tracer un segment $[AC]$ puis construire plusieurs parallélogrammes AB_1CD_1 , AB_2CD_2 , $AB_3CD_3, \dots$. Quelle conjecture peut-on faire pour les segments $[B_1D_1]$, $[B_2D_2]$, ... ? Justifier cette conjecture.
35. Soit un triangle ABC tel que (AB) et (AC) soient perpendiculaires. Placer M milieu de $[AC]$. Placer D de façon que M soit le milieu de $[BD]$. Démontrer que (DC) est perpendiculaire à (AC) .

Une aide peut être proposée aux élèves pour la recherche de démonstrations, adaptée à leur niveau individuel ou au niveau du groupe (lors d'un travail en groupes homogènes). Par exemple, pour l'exercice 35 :

Fiche-aide 1

- 1) Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
- 2) Démontrer que (DC) est perpendiculaire à (AC) .

Fiche-aide 2

- 1) Démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme.
- 2) Démontrer que (AB) est parallèle à (DC) .
- 3) Démontrer que (DC) est perpendiculaire à (AC) .

ANGLES

Dans les exercices 36 à 41, on propose des constructions de parallélogrammes à partir d'angles et de côtés. Il y a parfois plusieurs constructions possibles. Un schéma préalable à la construction est nécessaire, l'élève s'en convaincra facilement après plusieurs essais infructueux.

Un raisonnement pourra être nécessaire afin d'effectuer la construction. La propriété de la somme des angles d'un triangle sert à effectuer les calculs. Une aide possible pourra donc consister à faire dessiner une diagonale afin de faire apparaître un triangle.

36. Tracer un parallélogramme $ABCD$ tel que $AC = 4$ cm, $\widehat{BAC} = 30^\circ$ et $\widehat{ACB} = 70^\circ$. Calculer les angles $\widehat{ABC}$, $\widehat{ADC}$ et $\widehat{DAB}$.
37. Tracer un parallélogramme $ABCD$ tel que $AB = 7$ cm, $\widehat{BAC} = 40^\circ$ et $\widehat{DAC} = 90^\circ$. Calculer les angles $\widehat{ACD}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{ABC}$, et $\widehat{ADC}$.
38. Construire un parallélogramme $ABCD$ tel que $AB = 6$ cm, $\widehat{ABC} = 70^\circ$ et $AD = 4$ cm. Construire ensuite la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$, elle coupe la droite (DC) en un point F et la droite (BC) en un point E . Quelles sont les particularités des triangles AFD et EFC ? Justifier la réponse en calculant tous les angles de la figure.
39. a) Tracer un parallélogramme $ABCD$ tel que $AB = 7$ cm et $\widehat{ABC} = 55^\circ$. Tracer la perpendiculaire à la droite (AD) passant par B , elle coupe la droite (DC) en E et la droite (AD) en F .
 b) Calculer les angles $\widehat{BAD}$, $\widehat{ADC}$, $\widehat{EBC}$, $\widehat{BCE}$, $\widehat{CEB}$, $\widehat{FBA}$ et $\widehat{FAB}$.
40. a) Construire un parallélogramme $ABCD$ tel que $AB = 8$ cm, $AD = 5$ cm et $\widehat{DAB} = 120^\circ$. Placer le point E du segment $[AB]$ tel que $AE = AD$. Coder la figure à l'aide de ces renseignements.
 b) La droite (DE) coupe la droite (BC) en H . Calculer tous les angles de la figure et reconnaître alors des triangles isocèles.
41. a) Construire un parallélogramme $ABCD$ tel que $AB = 7$ cm, $AD = 4$ cm et $\widehat{BAD} = 100^\circ$.
 b) Placer le point E sur le segment $[AB]$ tel que $AE = 4$ cm. Coder la figure.
 c) Que représente la droite (DE) pour l'angle $\widehat{ADC}$? Justifier la réponse.

CHAPITRE 12

PARALLÉLOGRAMMES PARTICULIERS

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Connaître et utiliser une définition et les propriétés relatives aux côtés, aux diagonales, éléments de symétrie du carré, du rectangle, du losange.
- Construire, sur papier uni, un carré, un rectangle, un losange en utilisant ses propriétés.
- Faire apparaître chacune des figures (rectangle, losange, carré) comme un parallélogramme doté de propriétés particulières, notamment en ce qui concerne les diagonales.

REPÈRES POUR LE CONTENU DU COURS

- Définition du rectangle, du losange, du carré.
- Propriétés du rectangle, du losange, du carré.
- Propriétés pour reconnaître un rectangle, un losange, un carré.

ACTIVITÉ

ACTIVITÉ 1

1) Rappeler pourquoi le rectangle, le losange et le carré sont des parallélogrammes.

2) Compléter le tableau ci-dessous :

Quadrilatère	Losanges, rectangles et carrés sont des parallélogrammes. Ils ont donc toutes les propriétés des parallélogrammes, à savoir :		De plus :
LOSANGE	côtés	(Parallélisme) Les côtés opposés sont	
		(Longueurs) Les côtés opposés	Les côtés.....
	diagonales	Les diagonales	Les diagonales sont
	angles	Les angles opposés	
RECTANGLE	côtés	(Parallélisme) Les côtés opposés sont	
		(Longueurs) Les côtés opposés	
	diagonales	Les diagonales.....	Les diagonales.....
	angles	Les angles opposés	Les angles.....
CARRE	côtés	(Parallélisme) Les côtés opposés sont	
		(Longueurs) Les côtés opposés.....	Les
	diagonales	Les diagonales	Les
	angles	Les angles opposés	Les

Objectifs et commentaires

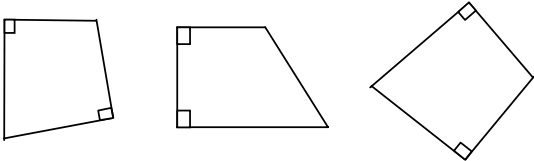
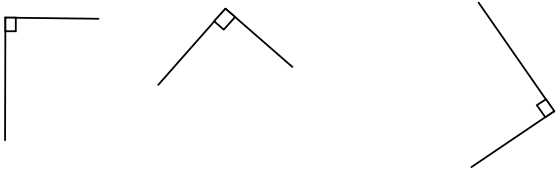
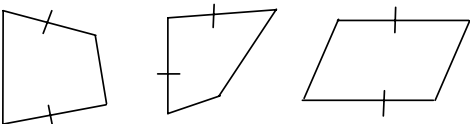
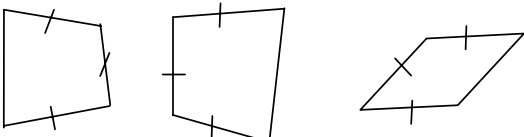
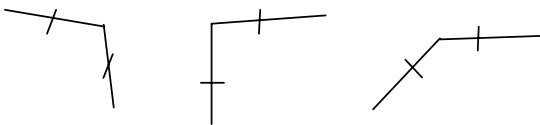
- Organiser les propriétés des losanges, rectangles et carrés en faisant la distinction entre les propriétés communes à tous les parallélogrammes et celles qui leur sont spécifiques.
- Renforcer l'idée que losanges, rectangles et carrés sont des parallélogrammes particuliers.

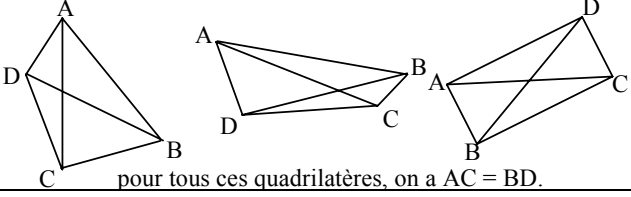
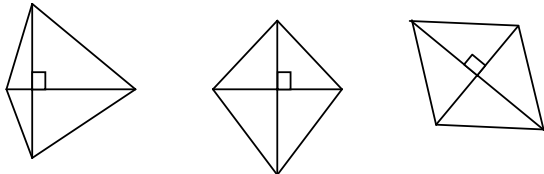
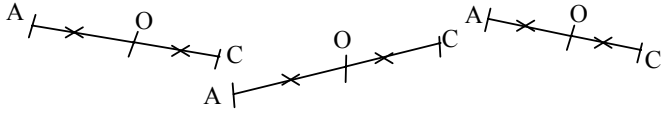
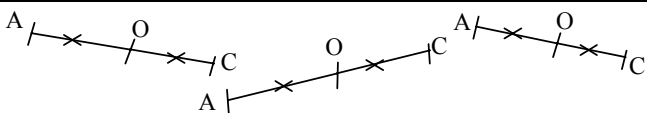
Les élèves ont étudié le losange, le rectangle et le carré en sixième et les propriétés de ces quadrilatères ont été explicitées. De plus, dans le chapitre parallélogramme, ces quadrilatères ont déjà été vus comme des parallélogrammes particuliers. Il s'agit ici de reconnaître quelles propriétés relèvent du parallélogramme et quelles sont les propriétés particulières que possède en plus chacun de ces quadrilatères.

Avant de compléter ce tableau, on peut faire construire au moins un quadrilatère de chaque sorte pour réactiver les connaissances et avoir un support visuel.

ACTIVITÉ 2 : DES CONJECTURES

Remplir le tableau ci-dessous :

	Tracés, avec les instruments, trois quadrilatères « différents » vérifiant les renseignements donnés dans la colonne suivante	Renseignements sur les côtés ou sur les diagonales de ce quadrilatère	Conjectures sur la nature du quadrilatère
1.		<i>Un quadrilatère avec un angle droit</i>	
2.			
3.		<i>Un quadrilatère avec trois angles droits.</i>	
4.	 <i>Compléter ces parallélogrammes à l'aide de tracés de parallèles.</i>	<i>Un parallélogramme avec un angle droit.</i>	
5.			
6.			
7.		<i>Un quadrilatère avec les quatre côtés de même longueur</i>	
8.	 <i>Compléter ces parallélogrammes à l'aide de tracés de parallèles.</i>	<i>Un parallélogramme avec deux côtés consécutifs de même longueur.</i>	

9.	 pour tous ces quadrilatères, on a $AC = BD$.		
10.		Un parallélogramme avec les diagonales de même longueur.	
11.			
12.	 Compléter ces figures sachant que $[AC]$ est une diagonale de chaque parallélogramme.	Un parallélogramme avec les diagonales perpendiculaires.	
13.	 Compléter ces figures sachant que $[AC]$ est une diagonale de chaque parallélogramme.	Un parallélogramme avec les diagonales de même longueur et perpendiculaires.	

Objectifs et commentaires

- Revoir les définitions des parallélogrammes particuliers.
- Faire apparaître chacune des figures (rectangle, losange, carré) comme un parallélogramme doté de propriétés particulières.
- Donner du sens aux mots « quadrilatère » et « parallélogramme » à travers le changement de registre de la langue naturelle vers les figures géométriques et réciproquement.

Le professeur choisira, parmi les treize lignes, celles qui lui conviennent. Une partie de ce travail pourra être donné à faire à la maison.

Dans le chapitre parallélogramme, le rectangle, le losange et le carré ont déjà été vus comme des parallélogrammes particuliers. Ici, on cherche des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un parallélogramme soit un rectangle, un losange ou un carré.

Le passage de la figure au registre de la langue naturelle, demandé, par exemple, dans la ligne 2, permet de donner du sens aux objets rencontrés : ici, ce sont des quadrilatères ayant deux angles droits, ces deux angles pouvant être opposés ou consécutifs (dans ce dernier cas, le quadrilatère obtenu est un trapèze rectangle, cette particularité pourra être évoquée).

On s'appuiera sur les erreurs commises par les élèves pour différencier les informations contenues dans les mots « quadrilatère » et « parallélogramme ». Ainsi, dans le quatrième cas, deux renseignements doivent être pris en compte dans la figure : c'est un parallélogramme et il a un angle droit. L'élève qui ne tient pas compte du premier renseignement revient au premier cas : il faut qu'il en soit conscient. Il apparaît alors qu'il semble suffire d'un angle droit pour qu'un parallélogramme soit un rectangle. On reste, dans cette activité, au stade de la conjecture, les démonstrations pourront se faire dans un deuxième temps : on précisera alors si la propriété mise en évidence est admise ou sera démontrée.

Les tracés demandés sont attendus en « vraie grandeur » : on demande trois quadrilatères pour éviter de n'en avoir qu'un et que celui-ci soit déjà trop particulier. Ceci n'empêchera pas d'obtenir trois quadrilatères « trop

particuliers », ce sera l'occasion de signaler aux élèves qu'on préfère, en général, ne pas ajouter de particularités à celles données dans l'énoncé.

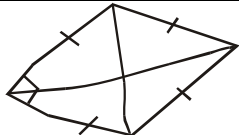
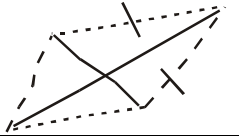
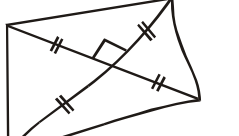
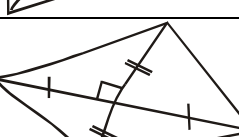
Dans les lignes 10 à 13, le parallélogramme doit être vu comme un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu. Les propriétés relatives aux diagonales du rectangle, du losange et du carré ont déjà été vues dans la classe de sixième, on peut s'y référer.

ACTIVITÉ 3 : DÉCODER

Pour chacun des quadrilatères ci-dessous, dessinés à main levée, on a codé des propriétés (les droites parallèles sont en pointillés).

- 1) Traduire les codages par des phrases, dans le tableau ci-dessous.
- 2) Préciser, si possible, la nature de chaque quadrilatère en donnant le numéro de la ou des caractérisations utilisées.

		Renseignements sur les côtés	Renseignements sur les diagonales	Nature et caractérisation utilisée
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

9.				
10.				
11.				
12.				
13.				
14.				

Objectifs et commentaires

- Reconnaître et traduire par des phrases les informations données par des figures codées.
- Utiliser ces informations pour reconnaître des parallélogrammes particuliers et identifier dans chaque cas la propriété pertinente.
- Habituer les élèves à utiliser le cours.

Le professeur choisira, parmi les quatorze lignes, celles qui lui conviennent.

Cette activité se pratique en utilisant le cours. Elle est adaptée au cours donné dans cette brochure.

- Dans un premier temps, on travaille le changement de registre schéma codé → texte (en langue naturelle).
Les figures sont dessinées sans nommer les sommets, pour favoriser l'utilisation d'un vocabulaire précis, qu'on retrouvera dans l'énoncé des théorèmes « généraux ». Les figures sont volontairement déformées pour que les élèves se concentrent sur les codages et non sur les propriétés « apparentes ». Pour faciliter la recherche de l'élève, on classe séparément les propriétés des côtés et celles des diagonales. On ne prévoit pas de colonne spécifique pour les angles, pour éviter une erreur fréquente : lorsqu'un élève écrit : « un quadrilatère a un angle droit », il ne fait pas toujours la différence entre « côtés consécutifs perpendiculaires » et « diagonales perpendiculaires ». Dans la ligne 4 par exemple, on écrira donc dans la colonne « côtés » : le quadrilatère a trois angles droits. D'autre part, on sera attentif aux confusions fréquentes entre « diagonales de même milieu » et « diagonales de même longueur ».
- Dans un deuxième temps, à l'aide du cours, on cherchera la nature des figures proposées et on repérera la ou les propriétés utilisées. Dans les lignes 6, 9, 10 et 13, la reconnaissance demande deux pas de déduction qui s'enchaînent.
Très souvent, les élèves proposent plusieurs réponses pour une même figure, réponses qu'ils pensent « disjointes » : losange ou carré par exemple pour la figure 2. On retrouve là, la difficulté à comprendre la classification des parallélogrammes, en particulier les propriétés d'inclusion des différentes catégories. Beaucoup d'élèves, à cause des images mentales forgées dans les années antérieures, n'admettent pas par exemple qu'un carré est aussi un rectangle.

ACTIVITÉ 4

	Données sur le quadrilatère ABCD	Schéma codé	Nature du quadrilatère et propriété utilisée : utiliser les numérotations du cours.
1.	$(AB) \parallel (CD)$ et $(AD) \parallel (BC)$.		
2.	$[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu O. $AC = BD$.		
3.	$AB = BC = CD = AD$.		
4.	$[AC]$ et $[DB]$ ont même milieu I.		
5.	$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 90^\circ$. $AB = BC$.		
6.	$[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu O. $(AC) \perp (BD)$.		
7.	$AB = BC = CD = AD$. $\widehat{A} = 90^\circ$.		
8.	$[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu O $(AC) \perp (BD)$. $AC = BD$.		
9.	$(AB) \parallel (CD)$ et $(AD) \parallel (BC)$. $CA = BD$.		

Objectifs et commentaires

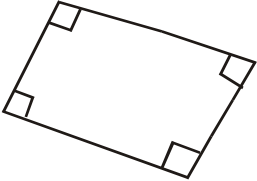
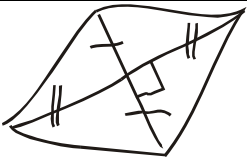
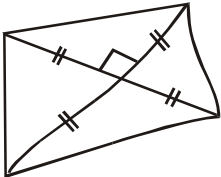
- Reconnaître et traduire par des figures codées les informations données par des phrases « symboliques ».
- Utiliser ces informations pour reconnaître des parallélogrammes particuliers et identifier dans chaque cas la propriété pertinente.
 - Cette activité est complémentaire de l'activité 2 et travaille le changement de registre inverses : texte (avec symboles mathématiques) $\rightarrow$ schémas codés. Contrairement à l'activité 2, tous les quadrilatères sont nommés à l'aide de lettres désignant les sommets. Cela permet de donner les informations sous forme plus synthétique et de travailler sur la façon de nommer un quadrilatère. L'élaboration des

schémas pose souvent de grandes difficultés, car la « forme » finale du quadrilatère n'est pas connue. Certains élèves, par confort ou par paresse, représentent à chaque cas un rectangle ou même un carré, surtout si le travail est fait sur feuille quadrillée.

- Il peut être utile d'ajouter une colonne supplémentaire pour traduire les informations en langue naturelle.

Cela renvoie plus facilement les élèves vers le registre « texte » des propriétés du cours, car ils ne peuvent pas s'appuyer sur la forme de la figure, qui, elle, renvoie au registre « schéma codé ».

ACTIVITÉ 5 : ACTIVITÉ ALTERNATIVE AUX PRÉCÉDENTES

Données écrites en français	Données sous forme de schéma	Propriété utilisée	Nature du quadrilatère
Les quatre côtés ont la même longueur.			
Les diagonales se coupent en leur milieu.			
			
Les côtés opposés sont parallèles deux à deux.			
Les côtés et les angles			carré
			
Les diagonales se coupent en leur milieu et ont même longueur.			
			

Objectifs et commentaires

Si on souhaite donner un cours plus succinct et/ou si le temps est trop compté, cette activité peut être une alternative aux précédentes. Les propriétés rr3 et rl3 s'appuyant sur une reconnaissance préalable de parallélogrammes ne sont pas utilisées, pas plus que les propriétés rc2 et rc3.

On travaille dans des registres différents. Les sommets des quadrilatères ne sont pas nommés, pour privilégier l'usage de la langue naturelle dans le registre « texte ».

Les situations sont volontairement limitées aux propriétés « de base » sur les côtés et les diagonales.

COURS

RECTANGLE

Définition : Un *rectangle* est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

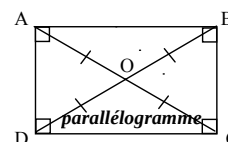
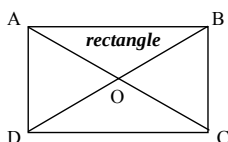


Propriétés des rectangles

Propriété pr1 : Si un quadrilatère est un rectangle, alors c'est un parallélogramme.

Propriété pr2 : Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses quatre angles sont droits.

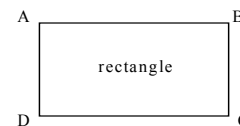
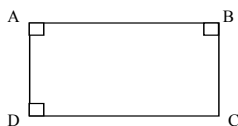
Propriété pr3 : Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur.



Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
ABCD rectangle. [AC] et [BD] se coupent en O.	Si un quadrilatère est un rectangle, alors • c'est un parallélogramme. pr1.	ABCD parallélogramme.
	• ses quatre angles sont droits. pr2.	$\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = 90^\circ$.
	• ses diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur. pr3.	O milieu de [AC] et de [BD] AC = BD.

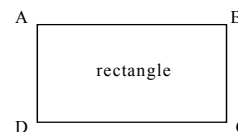
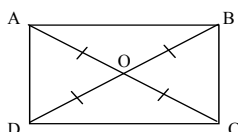
Propriétés pour reconnaître des rectangles

Propriété rr1 : Si un quadrilatère a trois angles droits, alors ce quadrilatère est un rectangle.



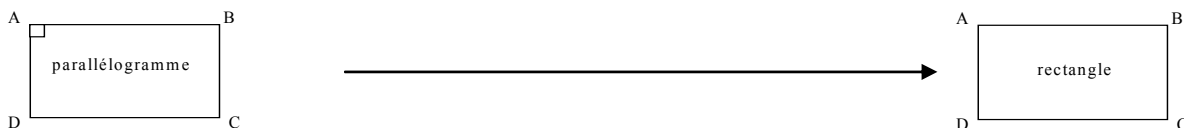
Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
$\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$.	Si un quadrilatère a trois angles droits, alors ce quadrilatère est un rectangle.	ABCD rectangle.

Propriété rr2 : Si dans un quadrilatère les diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur, alors ce quadrilatère est un rectangle.



Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
O milieu de [AC] et de [BD]. AC = BD.	Si dans un quadrilatère les diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur, alors ce quadrilatère est un rectangle.	ABCD rectangle.

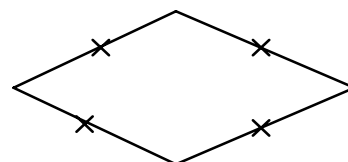
Propriété rr3 : Si un parallélogramme a un angle droit, alors ce parallélogramme est un rectangle.



Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
ABCD parallélogramme. $\widehat{BAD} = 90^\circ$.	Si un parallélogramme a un angle droit, alors ce parallélogramme est un rectangle.	ABCD rectangle.

LOSANGE

Définition : Un losange est un quadrilatère dont les quatre côtés ont la même longueur.

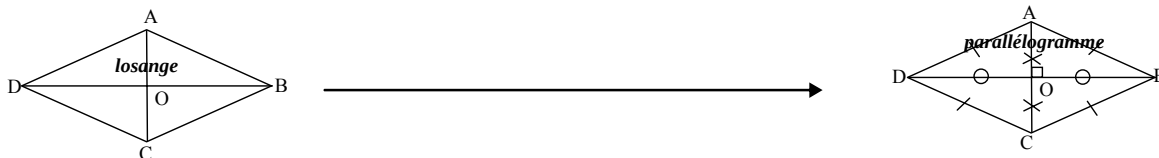


Propriétés des losanges

Propriété pl1 : Si un quadrilatère est un losange, alors c'est un parallélogramme.

Propriété pl2 : Si un quadrilatère est un losange, alors ses quatre côtés ont la même longueur.

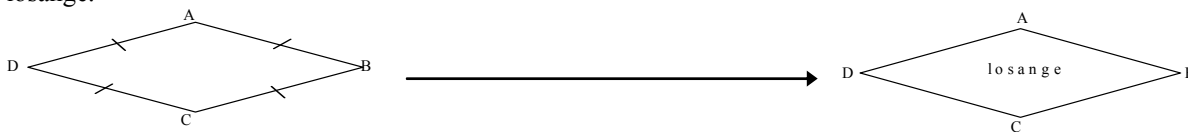
Propriété pl3 : Si un quadrilatère est un losange, alors ses diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires.



Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
ABCD losange [AC] et [BD] se coupent en O	Si un quadrilatère est un losange, alors	
	• c'est un parallélogramme pl1	ABCD parallélogramme
	• ses quatre côtés ont la même longueur pl2	$AB = BC = CD = DA$
	• ses diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires pl3	O milieu de [AC] et de [BD] $(AC) \perp (BD)$

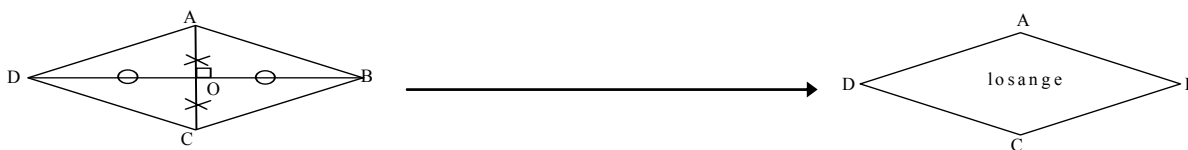
Propriétés pour reconnaître des losanges

Propriété rl1 : Si dans un quadrilatère les quatre côtés ont la même longueur, alors ce quadrilatère est un losange.



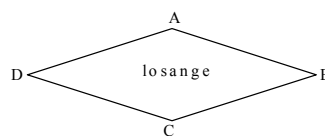
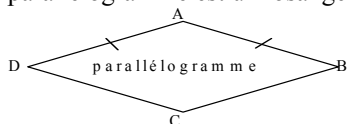
Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
$AB = BC = CD = AD$.	Si dans un quadrilatère les quatre côtés ont la même longueur, alors ce quadrilatère est un losange.	ABCD losange.

Propriété rl2 : Si dans un quadrilatère les diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires, alors ce quadrilatère est un losange.



Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
O milieu de [AC] et de [BD] $(AC) \perp (BD)$	Si dans un quadrilatère les diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires, alors ce quadrilatère est un losange.	ABCD losange

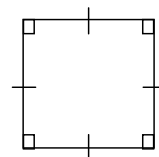
Propriété rl3 : Si dans un parallélogramme deux côtés consécutifs ont la même longueur, alors ce parallélogramme est un losange.



Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
ABCD parallélogramme. $AB = AD$.	Si dans un parallélogramme deux côtés consécutifs ont la même longueur, alors ce parallélogramme est un losange.	ABCD losange.

CARRE

Définition : Un carré est un quadrilatère qui a quatre angles droits et les quatre côtés de la même longueur.



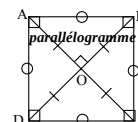
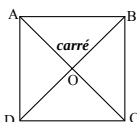
Propriétés des carrés

Propriété pc1 : Si un quadrilatère est un carré, alors c'est un parallélogramme.

Propriété pc2 : Si un quadrilatère est un carré, alors ses quatre angles sont droits.

Propriété pc3 : Si un quadrilatère est un carré, alors ses quatre côtés ont la même longueur.

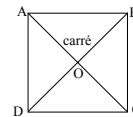
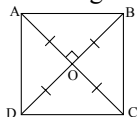
Propriété pc4 : Si un quadrilatère est un carré, alors ses diagonales se coupent en leur milieu, ont la même longueur et sont perpendiculaires.



Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
ABCD carré. [AC] et [BD] se coupent en O.	Si un quadrilatère est un carré, alors	
	• c'est un parallélogramme pc1.	ABCD parallélogramme.
	• ses quatre angles sont droits. pc2.	$\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{ADC} = 90^\circ$.
	• ses quatre côtés ont la même longueur. pc3.	$AB = BC = CD = DA$.
	• ses diagonales se coupent en leur milieu, ont même longueur et sont perpendiculaires. pc4.	O milieu de [AC] et de [BD] $AC = BD$. $(AC) \perp (BD)$.

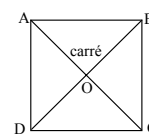
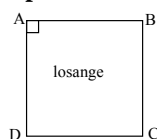
Propriétés pour reconnaître des carrés

Propriété rc1 : Si dans un quadrilatère les diagonales se coupent en leur milieu, sont perpendiculaires et ont la même longueur, alors ce quadrilatère est un carré.



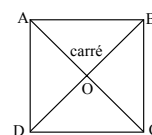
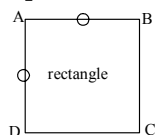
Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
O milieu de [AC] et de [BD]. $AC = BD$ et $(AC) \perp (BD)$.	Si dans un quadrilatère les diagonales se coupent en leur milieu, sont perpendiculaires et ont la même longueur, alors ce quadrilatère est un carré.	ABCD carré.

Propriété rc2 : Si un losange a un angle droit, alors ce losange est un carré.



Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
ABCD losange. $\widehat{BAD} = 90^\circ$.	Si un losange a un angle droit, alors ce losange est un carré.	ABCD carré.

Propriété rc3 : Si un rectangle a deux côtés consécutifs de même longueur, alors ce rectangle est un carré.



Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
ABCD rectangle. $AB = AD$.	Si un rectangle a deux côtés consécutifs de même longueur, alors ce rectangle est un carré.	ABCD carré.

COURS DU RECTANGLE À COMPLÉTER PAR LES ÉLÈVES

RECTANGLE

Définition : Un *rectangle* est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

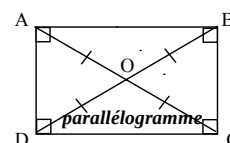
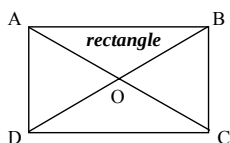


Propriétés des rectangles

Propriété pr1 : Si un quadrilatère est un rectangle, alors c'est un parallélogramme.

Propriété pr2 : Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses quatre angles sont droits.

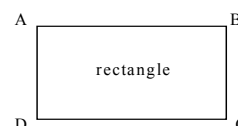
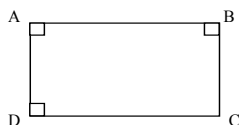
Propriété pr3 : Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur.



Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis
	Si un quadrilatère est un rectangle, alors	

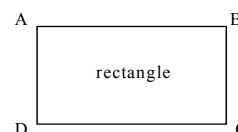
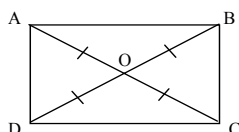
Propriétés pour reconnaître des rectangles

Propriété rr1 : Si un quadrilatère a trois angles droits, alors ce quadrilatère est un rectangle.



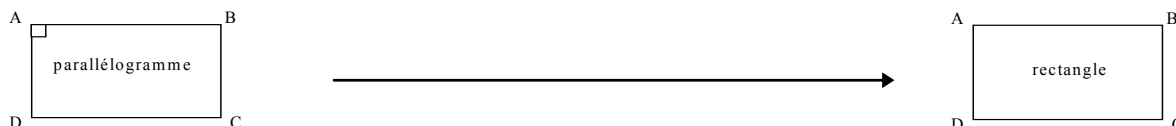
Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis

Propriété rr2 : Si dans un quadrilatère les diagonales se coupent en leur milieu et ont la même longueur, alors ce quadrilatère est un rectangle.



Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis

Propriété rr3 : Si un parallélogramme a un angle droit, alors ce parallélogramme est un rectangle.



Ce que je sais	Propriété	Ce que je déduis

EXERCICES

CONSTRUCTIONS

Dans l'exercice 1, on vise l'utilisation des propriétés des différents quadrilatères évoqués. Un schéma préalable est indispensable et permet d'éviter des erreurs concernant la position des sommets. Le fait que les figures soient déjà tracées en partie introduit une contrainte très forte pour le placement des points. Les élèves ne peuvent pas se repérer par rapport aux bords de la page.

1. Compléter pour obtenir le losange LOSA:	2) Compléter pour obtenir le rectangle RECT:	3) Compléter pour obtenir le carré CIRE:
---	---	---

L'exercice 2 permet de travailler les propriétés des diagonales des quadrilatères.

2. Construire :
 - a) Un losange dont les diagonales mesurent 8 cm et 6 cm.
 - b) Un rectangle dont les diagonales mesurent 8 cm et font un angle de 70° .
 - c) Un carré dont les diagonales mesurent 8 cm.

Un des objectifs des exercices 3 à 11 est d'inciter les élèves à prendre l'initiative de commencer le travail par un schéma à main levée. Le codage du schéma met en évidence les propriétés en jeu.

3. Construire un rectangle PARC sachant que [PR] et [AC] se coupent en O, $PR = 7$ cm et $\widehat{POA} = 42^\circ$.
4. Construire un losange ABCD dont les côtés mesurent 3,5 cm et tel que l'angle $\widehat{BAD}$ mesure 38° .
5. Construire un carré TRAP tel que [RP] mesure 6,4 cm.
6.
 - a) Tracer un triangle équilatéral ABC tel que $AB = 5$ cm.
 - b) Construire le losange ABCD.
7.
 - a) Construire un triangle ABC isocèle en A tel que $BC = 7$ cm et $\widehat{ABC} = 70^\circ$.
 - b) Construire le rectangle BCDE de centre A.
8. Construire un losange ABCD de centre O tel que :
 - a) $AC = 5$ cm et $\widehat{BAC} = 35^\circ$
 - b.) $AC = 5$ cm et $BD = 9$ cm

9. Construire un rectangle ABCD tel que :

- a) $AC = 5\text{ cm}$ et $\widehat{BAC} = 35^\circ$
- b) $AB = 6\text{ cm}$ et $\widehat{BAC} = 55^\circ$
- c) $AD = 4\text{ cm}$ et $\widehat{BAC} = 30^\circ$
- d) $AC = 9\text{ cm}$ et $\widehat{BOA} = 50^\circ$, où O est le centre du rectangle

10. Tracer un segment $[AC]$ mesurant 8 cm, puis sans utiliser l'équerre, construire plusieurs rectangles ayant $[AC]$ pour diagonale. Où sont situés les sommets de ces rectangles ? Expliquer.

L'exercice 11 est difficile. Il demande de l'initiative de la part des élèves. On pourra rajouter O, centre du rectangle, pour aider les élèves les plus en difficulté.

11. Construire un rectangle ABCD tel que $AB = 5\text{ cm}$ et $AC = 8\text{ cm}$, sans utiliser l'équerre. Écrire le programme de construction.

On introduit quelques calculs d'angles et d'aires pour réinvestir des notions déjà étudiées.

12. Construire un rectangle ABCD de centre O tel que $AC = 8\text{ cm}$ et $\widehat{AOB} = 50^\circ$. Calculer les angles du triangle AOB. Justifier.

13. Construire un losange ABCD de centre O tel que $AC = 4\text{ cm}$ et $BD = 8,2\text{ cm}$. Calculer l'aire de ce losange. Justifier.

14. Construire un carré ABCD tel que $AC = 6,2\text{ cm}$. Calculer l'aire de ce carré.

CHOISIR LA BONNE PROPRIÉTÉ

L'exercice 15 est un prolongement des activités 2 et 3. Il s'agit de reconnaître des quadrilatères particuliers et de trouver les propriétés correspondantes.

On travaille dans des registres différents. Dans la colonne « renseignements... », on pourra comparer les réponses des élèves. Certains préféreront la langue naturelle, même si la ligne du quadrilatère MNOP les incite à utiliser un langage symbolique.

15. Compléter le tableau suivant. Énoncer dans chaque cas la propriété permettant de trouver la nature du quadrilatère (dans les codages donnés, les droites parallèles sont en pointillés)

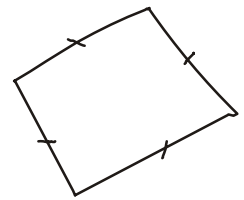
Quadrilatère	Schéma codé	Renseignements sur les côtés, les diagonales	Propriété	Nature du quadrilatère
ABCD				
EFGH				
MNOP		MO = NP. K milieu de [MO]. K milieu de [NP].		

RSTU			Si, dans un quadrilatère, les quatre côtés ont la même longueur, alors ce quadrilatère est un.....	
VWXY			Si, dans un quadrilatère, les diagonales	Carré.

Les exercices 16 et 17 ont pour objectif de faire comprendre à l'élève que c'est à partir du codage et en utilisant des propriétés du cours que les raisonnements se construisent.

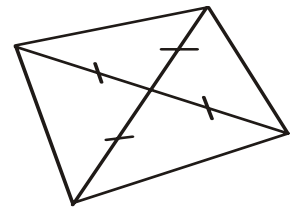
16. Le quadrilatère ci-contre est désigné par BLEU.

- Placer les sommets B, L, E, U sur le schéma.
- Quelle est la nature de ce quadrilatère ? Justifier.
- Les segments [LU] et [BE] ont-ils même milieu ?
- Les droites (LU) et (BL) sont-elles perpendiculaires ? Justifier.
- Est-il possible que les segments [LU] et [BE] aient la même longueur ?



17. Le quadrilatère ci-contre est désigné par QUAD.

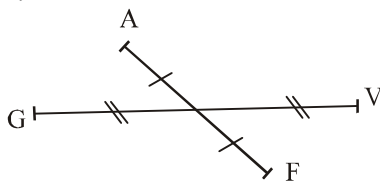
- Placer les sommets Q, U, A, D sur le schéma.
- Quelle est la nature de ce quadrilatère ? Justifier.
- Les segments [QU] et [DA] ont-ils même longueur ? Les droites (QU) et (UA) sont-elles perpendiculaires ? Justifier les deux réponses.
- Est-il possible que les segments [QU] et [UA] aient la même longueur ?



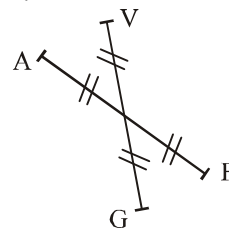
Pour résoudre l'exercice 18, le passage par la langue naturelle est indispensable. L'élève doit comprendre que seul le codage est à prendre en compte : il n'y a pas de losange, contrairement aux apparences.

18. D'après les informations portées sur les dessins, trouver la nature du quadrilatère AVFG dans chacun des cas en indiquant la propriété utilisée :

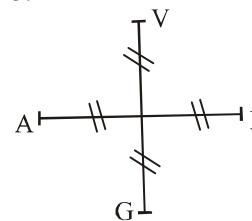
1.



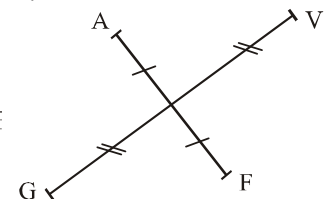
2.



3.



4.



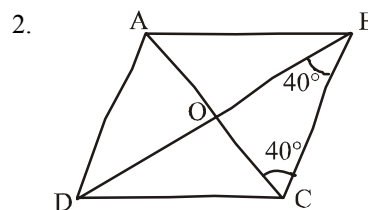
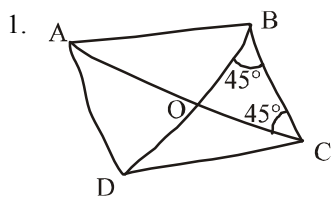
Dans l'exercice 19, on commence par tracer une figure à partir d'un programme de construction, on code cette figure avec les renseignements de l'énoncé, puis on raisonne comme dans l'exercice précédent.

19. Tracer un segment [EF] de 5 cm. Appeler I son milieu. Tracer la droite (d) perpendiculaire à (EF) et passant par I. Marquer sur cette droite (d) deux points G et H tels que IG = 3 cm et IH = 3 cm. Tracer le quadrilatère EHFG.

- Coder les données sur la figure.
- Quelle est la nature de EHFG ? Justifier.

Une étape supplémentaire dans l'exercice 20 : déduire les propriétés des diagonales des quadrilatères à partir des données sur les angles et des propriétés des angles d'un triangle.

20. Chaque schéma ci-contre représente un parallélogramme ABCD. En utilisant les indications données sur ces schémas, dire, dans chaque cas, quelle est la nature précise du parallélogramme ABCD. Justifier.



Dans les exercices 21 à 23, on construit un parallélogramme à partir d'un triangle dont on donne des renseignements sur des longueurs de côtés ou sur des mesures d'angles.

Pour faciliter le repérage de la propriété à utiliser, on veillera à ce que les figures soient codées avec les renseignements de l'énoncé ; pour « parallélogramme », on pourra écrire ce mot dans ou sous la figure, comme dans le cours.

21. Tracer un parallélogramme IJKL tel que $IJ = JK = 5,3$ cm et $IK = 8$ cm. Quelle est la particularité du parallélogramme IJKL ? Expliquer.
22. Tracer un parallélogramme ABCD tel que $AB = 8$ cm, $AD = 3$ cm et $\widehat{BAD} = 90^\circ$. Quelle est la particularité du parallélogramme ABCD ? Expliquer.
23. Tracer un parallélogramme RSTU de centre O tel que $OU = 3,5$ cm, $RU = 6$ cm et $\widehat{ROU} = 90^\circ$. Quelle est la particularité du parallélogramme RSTU ? Expliquer.

Dans l'exercice 24, on procède comme précédemment, avec une étape supplémentaire : un calcul d'angle dans un triangle

24. Tracer un parallélogramme EFGH de centre O tel que $EH = 7$ cm, $\widehat{HEO} = 65^\circ$ et $\widehat{EHO} = 25^\circ$.
Calculer la mesure de l'angle $\widehat{EOH}$. Quelle est la particularité du parallélogramme EFGH ? Expliquer.

Dans les exercices 25 et 26, on commence par démontrer que le quadrilatère est un parallélogramme, avec deux caractérisations différentes suivant l'exercice.

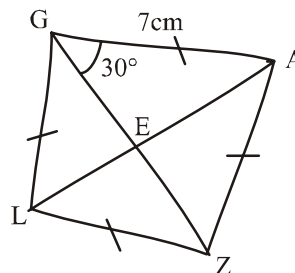
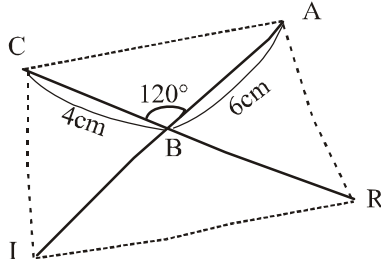
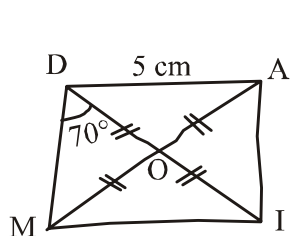
25. a) Tracer un triangle EFG, isocèle en F tel que $EF = 6$ cm et $\widehat{GFE} = 105^\circ$. Tracer la parallèle à (EF) passant par G puis la parallèle à (FG) passant par E. Ces deux droites se coupent en un point qu'on appelle H.
b) Pourquoi EFGH est-il un parallélogramme ? Justifier.
c) Quelle est, plus précisément, la nature de EFGH ? Justifier.

Une difficulté supplémentaire dans l'exercice 26 : l'absence de données numériques.

26. a) Tracer un triangle IJK, rectangle en I. Marquer le point M, milieu de [JK]. Construire le point L, symétrique de I par rapport à M. Tracer les segments [LK] et [LJ].
b) Pourquoi IJLK est-il un parallélogramme ? Ecrire la propriété du cours qui permet de le justifier.
c) Quelle est, plus précisément, la nature de IJLK ?

L'exercice 27 est de bon niveau, demandant beaucoup de rigueur aux élèves. Il se fait en deux temps : il faut d'abord reconnaître la nature du quadrilatère schématisé, puis utiliser les propriétés de ce quadrilatère pour arriver à le construire.

27. Voici trois quadrilatères (les droites en pointillés sont parallèles) :



- a) A l'aide des renseignements codés sur les côtés ou les diagonales, trouver la nature de chacun de ces quadrilatères et justifier votre réponse. Pour cela, compléter le tableau suivant :

Quadrilatère	Données permettant d'appliquer la propriété	Propriété utilisée (l'énoncer en entier)	Nature du quadrilatère
DAIM			
CARI			
.....			

- b) Construire les trois quadrilatères en vraie grandeur sur papier non quadrillé. Pour y arriver, il faut utiliser des propriétés qui ne sont pas codées sur les figures données.
 Pour chaque quadrilatère, écrire les propriétés utiles pour la construction.
 Les faire apparaître par des codages de couleur verte sur les figures en vraie grandeur.

DÉMONSTRATIONS

On distinguera, dans chacun des exercices suivants, **deux phases de travail** :

- **La phase de recherche**, qui entraîne les élèves dans la reconnaissance de situations de bases, de figures-clés et les engage à trouver un ordre dans les propriétés à utiliser. Dans cette partie, le travail peut être mené en groupes, les conclusions intermédiaires peuvent être notées au brouillon.
- **La phase de rédaction** pour laquelle on encouragera les élèves à prendre le cours comme « modèle », à éventuellement utiliser des tableaux pour rédiger.

Ces deux phases de travail doivent être séparées : une synthèse collective s'impose après la phase de recherche, avant de passer à la rédaction.

28. Tracer un triangle ABC rectangle en A, placer le point D symétrique de B par rapport à A et le point E symétrique de C par rapport à A. Que peut-on dire du quadrilatère BCDE ? Le démontrer.
29. Même exercice que 28 avec ABC isocèle en A.
30. Même exercice que 28 avec ABC rectangle et isocèle en A.
31. Tracer un triangle ABC rectangle en A, placer le point I milieu du segment [BC] et le point D symétrique de A par rapport à I. Que peut-on dire du quadrilatère ABDC ? Expliquer.
32. Tracer un triangle ABC rectangle et isocèle en A, placer le point I milieu du segment [BC] et le point D symétrique de A par rapport à I. Que peut-on dire du quadrilatère ABDC ? Le démontrer.
33. Tracer un triangle ABC tel que $AC = 6$ cm, $\widehat{ACB} = 46^\circ$ et $\widehat{BAC} = 67^\circ$. Placer le point I milieu de [AB] et le point D symétrique de C par rapport à I. Que peut-on dire du quadrilatère ACBD ? Le démontrer.
34. Tracer un triangle ABC tel que $AC = 6$ cm, $\widehat{ACB} = 34^\circ$ et $\widehat{BAC} = 56^\circ$. Tracer la parallèle à la droite (AB) passant par C et la parallèle à la droite (CB) passant par A. Ces deux droites se coupent en D. Que peut-on dire du quadrilatère ABCD ? Le démontrer.
35. Tracer un triangle ABC rectangle et isocèle en A. Tracer la parallèle à la droite (AC) passant par B et la parallèle à la droite (AB) passant par C. Ces deux droites se coupent en D. Que peut-on dire du quadrilatère DBAC ? Justifier.
36. a) Tracer un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 5 cm puis placer deux points A et B sur ce cercle. Expliquer pourquoi on a $OA = OB$.
 b) Placer le point I milieu du segment AB puis construire le point E, symétrique de O par rapport à I. Que peut-on dire du quadrilatère OAEB ? Justifier.
37. Tracer deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de centres respectifs O et O' et de même rayon. Ces deux cercles sont sécants en A et B. Que peut-on dire du quadrilatère OAO'B ? Expliquer.

CHAPITRE 13

AIRES

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Connaître et utiliser la définition d'une médiane et d'une hauteur d'un triangle.
- Calculer l'aire d'un parallélogramme.
- Calculer l'aire d'un triangle connaissant un côté et la hauteur associée.
- Calculer l'aire d'un disque de rayon donné.
- Calculer l'aire d'une surface plane ou celle d'un solide, par décomposition en surfaces dont les aires sont facilement calculables.

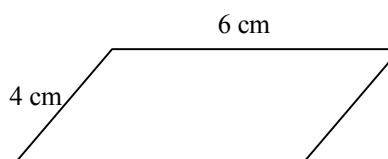
REPÈRES POUR LE CONTENU DU COURS

- Aire du parallélogramme.
- Médiane et hauteur d'un triangle.
- Aire du triangle.
- Aire du disque.

ACTIVITÉ

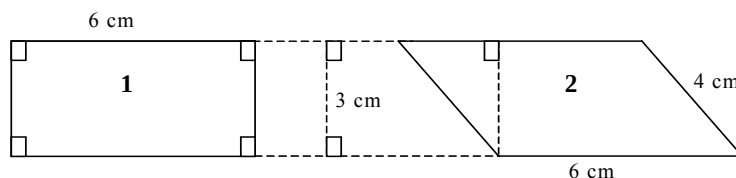
ACTIVITÉ 1 : AIRE DU PARALLÉLOGRAMME

- 1) Tracer trois parallélogrammes vérifiant les conditions ci-contre.
- 2) Ces parallélogrammes ont-ils le même périmètre ?
- 3) Ces parallélogrammes ont-ils la même aire ?



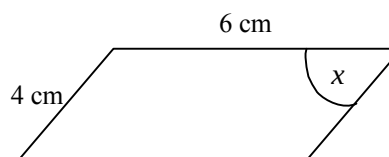
- 4) On a représenté ci-contre deux parallélogrammes, dont un rectangle.

- a) Comparer les périmètres de ces parallélogrammes. Justifier.



- b) Comparer les aires de ces parallélogrammes. Justifier à l'aide d'un découpage.

- 5) Tracer un parallélogramme vérifiant les conditions ci-contre avec $x = 30^\circ$.
Faire ensuite les mesures nécessaires pour déterminer une valeur approchée de son aire.



- 6) Recommencer la question 5 avec $x = 60^\circ$ et $x = 140^\circ$.

Objectifs et commentaires

- Comparer les aires et les périmètres de parallélogrammes donnés.
- Dédire l'aire du parallélogramme de celle du rectangle.
- Comprendre les données nécessaires au calcul de l'aire d'un parallélogramme.

Dans les questions 1 à 3, l'objectif est de montrer que des parallélogrammes ayant même périmètre n'ont pas forcément la même aire. La discussion se situera au niveau du sens de l'aire : il apparaîtra clairement, de façon visuelle que tel parallélogramme dessiné « contient plus de cm^2 » qu'un autre. On s'attachera à prendre en compte l'erreur consistant à dire qu'un parallélogramme de côtés 6 cm et 4 cm a une aire de 24 cm^2 , en comparant visuellement les aires des différents parallélogrammes. On pourra conclure que le calcul d'une aire ne se réduit pas à une technique vide de sens, que dans ce cas, l'aire d'un parallélogramme n'est pas égale au produit des longueurs deux de ses côtés. Lors de la synthèse concernant cette partie, on mettra en évidence que ce qui est vrai pour les périmètres ne l'est pas forcément pour les aires.

Dans la question 4, les périmètres sont immédiatement accessibles, ainsi que l'aire du rectangle, alors qu'un découpage est nécessaire pour visualiser que l'aire du parallélogramme est égale à celle du rectangle. On mettra en évidence que les deux figures considérées ont la même aire mais des périmètres différents.

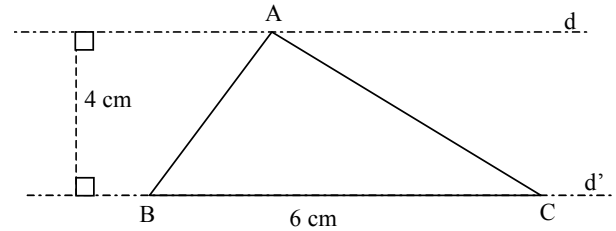
La vision du découpage est réinvestie dans les deux dernières questions pour trouver une valeur approchée de l'aire des parallélogrammes considérés. Le lien entre la valeur de l'aire et le produit d'un côté par la hauteur correspondante sera mis en évidence lors de la synthèse suivant cette partie. On veillera à mettre en garde les élèves que la valeur obtenue, dépendant d'une mesure, n'est pas la valeur exacte de cette aire, en leur signifiant qu'ils pourront avoir accès à cette valeur en classe de quatrième, et, si les circonstances le permettent, on pourra leur donner cette valeur.

ACTIVITÉ 2 : AIRE DE TRIANGLES D'UNE MÊME FAMILLE

On s'intéresse à la famille de triangles schématisée ci-dessous. Les droites d et d' sont parallèles, le point A appartient à la droite d , les points B et C à la droite d' . La distance entre les deux droites est 4 cm

Première partie

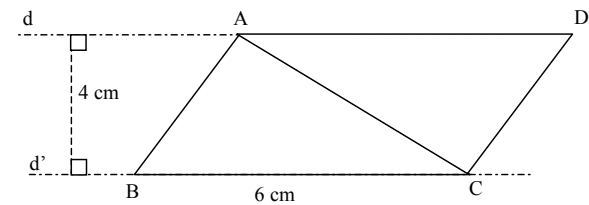
- 1) Tracer, en deux exemplaires, un triangle ABC de cette famille avec $AB = 5$ cm.
- 2) Découper ces deux triangles et les assembler pour former un parallélogramme. Il y a plusieurs assemblages possibles.
- 3) Recommencer les questions 1 et 2 avec $AB = 7$ cm.
- 4) Quelle conjecture peut-on faire quant à l'aire des triangles précédents ?



Deuxième partie

Sur la figure précédente, on a placé le point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme. Le point D est sur la droite d .

- 1) Démontrer que les triangles ABC et ADC ont la même aire.
- 2) Calculer cette aire commune.



Objectifs visés et commentaires

- « Voir » un triangle comme la moitié d'un parallélogramme.
- Émettre une conjecture sur les aires de triangles « d'une même famille ».
- Démontrer cette conjecture.

Dans la première partie, on amène l'élève à voir un triangle comme la moitié d'un parallélogramme. Il y a plusieurs possibilités d'assemblage, mais une seule d'entre elles permet de conclure quant à l'aire du triangle. On réinvestit ainsi ce qui a été fait dans l'activité précédente.

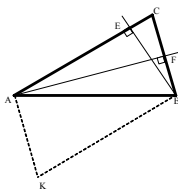
Dans la deuxième partie, la symétrie de centre O , milieu de $[AC]$, permet de démontrer la conjecture émise dans la première partie. Pour prolonger, on pourra demander aux élèves de tracer d'autres triangles ayant la même aire que les précédents, afin de renforcer le rôle des droites parallèles. L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique est également enrichissant.

ACTIVITÉ 3 : AIRE DU TRIANGLE

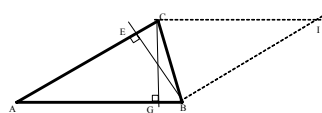
Première partie

On cherche à calculer l'aire d'un triangle ABC de plusieurs façons différentes :

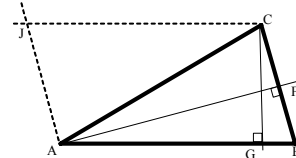
- 1) a) Écrire l'aire du parallélogramme $ACBK$ en fonction de AC .
- b) Écrire l'aire du parallélogramme $ACBK$ en fonction de BC .



- 2) a) Écrire l'aire du parallélogramme $ACIB$ en fonction de AC .
- b) Écrire l'aire du parallélogramme $ACIB$ en fonction de BC .



- 3) a) Écrire l'aire du parallélogramme $ABCJ$ en fonction de AB .
- b) Écrire l'aire du parallélogramme $ABCJ$ en fonction de BC .



- 4) En déduire l'aire du triangle ABC :
 - a) en fonction de AB.
 - b) en fonction de AC.
 - c) en fonction de BC.
- 5) Écrire un texte donnant une méthode pour calculer l'aire du triangle ABC.

Deuxième partie

- 1) Tracer un triangle ABC tel que $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm et $BC = 6$ cm.
- 2) Tracer les trois hauteurs de ce triangle, puis faire les mesures nécessaires pour calculer une valeur approchée de son aire de trois façons différentes. On pourra tracer d'une même couleur un côté et la hauteur associée.
- 3) Reprendre les questions 1 et 2 avec un triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $BC = 10$ cm et $AC = 5$ cm.

Objectifs et commentaires

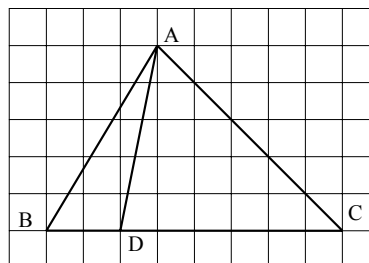
- Comprendre les données nécessaires au calcul de l'aire d'un triangle.
- Visualiser les trois hauteurs d'un triangle et les différentes façons de calculer son aire.

Dans la première partie, l'objectif est d'établir le lien entre aire du triangle, côté et hauteur associée à ce côté. L'utilisation de couleurs permet de visualiser cette association. La concourance des trois hauteurs sera mise en évidence, elle sera ensuite admise. On précisera qu'elle pourra être démontrée en quatrième. La formule de l'aire du triangle est ainsi dégagée.

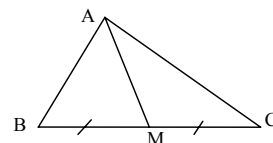
Dans la deuxième partie, on passe à l'application de la formule précédente. On veillera, lors de la correction, à prendre en compte les différentes propositions, à repérer les erreurs pour pointer leurs origines : erreur de tracé ? Erreur due à une mauvaise compréhension du concept de hauteur ? Erreur de calcul ? Erreur de mesure ? Erreur due à une mauvaise association base-hauteur ? C'est en répondant à ces questions que la formule prend du sens.

ACTIVITÉ 4 : MÉDIANES

- 1) Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle donné sur un quadrillage et D est un point du segment [BC].
 - a) En prenant comme unité d'aire le carreau, calculer les aires des triangles ADC et ADB. Ces deux triangles ont-ils la même aire ?
 - b) Peut-on placer un point E sur le segment [BC] pour que les triangles AEC et AEB aient la même aire ? Si oui, préciser la position du point E et justifier.



- 2) Dans le triangle ABC, (AM) est la médiane issue de A. On veut démontrer que les triangles ABM et AMC ont la même aire.



a) On trace la perpendiculaire à (BC) passant par A. Elle coupe (BC) en H.	b) On exprime l'aire du triangle ABM :	c) On exprime l'aire du triangle AMC :
	Côté choisi : Hauteur correspondante : Aire du triangle ABM.	Côté choisi : Hauteur correspondante : Aire du triangle AMC.

- 4) Comparer l'aire des deux triangles ABM et AMC.
- 5) Énoncer la propriété qui vient d'être démontrée.

Objectifs et commentaires

- Découvrir puis démontrer qu'une médiane d'un triangle le partage en deux triangles de même aire.

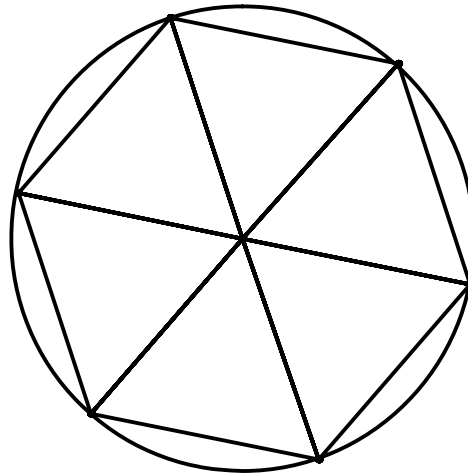
Dans un premier temps, on étudie un cas particulier pour s'approprier le problème. La présence du quadrillage permet plusieurs stratégies pour le calcul de l'aire des deux triangles.

La suite est une démonstration guidée de la propriété.

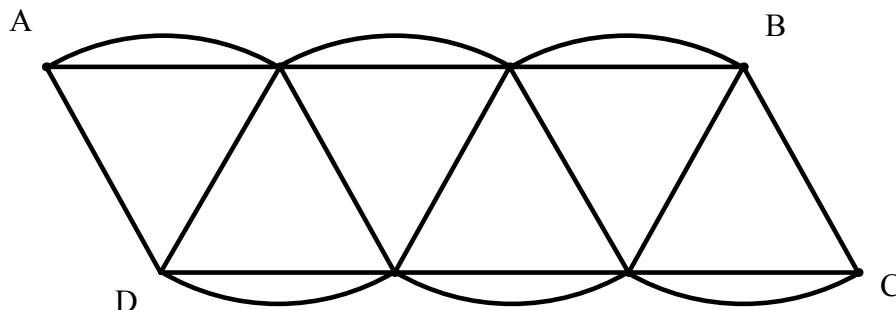
ACTIVITÉ 5 : APPROCHE EXPÉRIMENTALE DE L'AIRES DU DISQUE

On cherche à calculer une mesure approchée de l'aire du disque en calculant des aires de parallélogrammes. Toutes les mesures sont à effectuer au millimètre près. **Dans toute l'activité, le rayon du cercle mesure 3 cm.**

- 1) Quel est le périmètre de ce cercle ?
- 2) a) On trace à l'intérieur du disque un polygone régulier à six côtés. Comment appelle-t-on un tel polygone ?

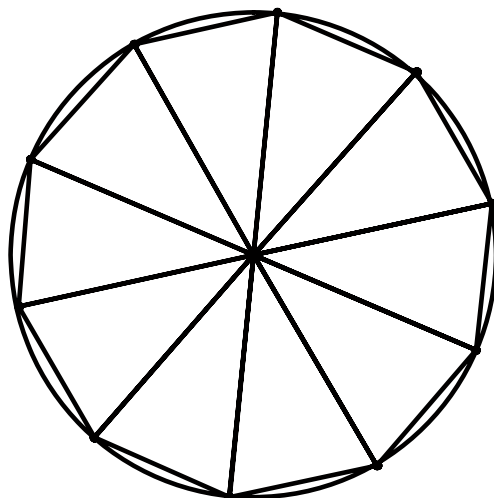


- b) Ce polygone est constitué de six triangles identiques. En les alignant « tête-bêche » les uns à côté des autres, on obtient le parallélogramme ABCD (on a laissé sur le dessin les arcs de cercle).
- c) Quelle est alors la longueur des trois arcs de cercle joignant D à C ?



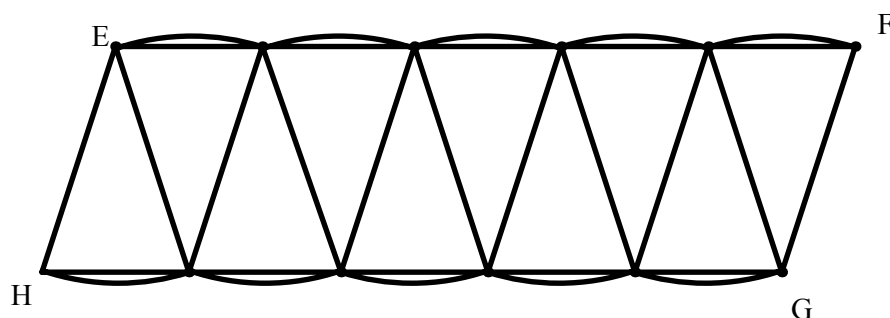
- d) En mesurant sur le dessin la hauteur et la base associée, calculer une valeur approchée de l'aire du parallélogramme ABCD.

- 3) On effectue le même travail en inscrivant un polygone régulier à 10 côtés dans le même disque.
a) Comment s'appelle un tel polygone ?



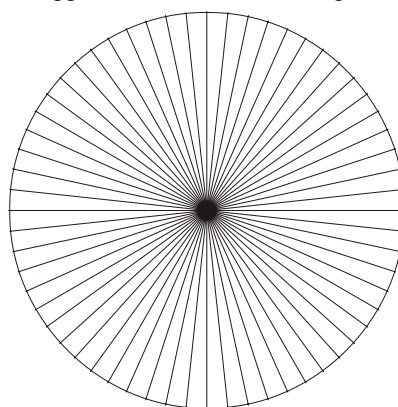
On obtient la figure ci-contre en effectuant la même réorganisation des triangles que dans la question 2.

- b) Quelle est la longueur des cinq arcs de cercle joignant H à G ?
c) En mesurant sur le dessin la hauteur et la base associée, calcule l'aire du parallélogramme EFGH.



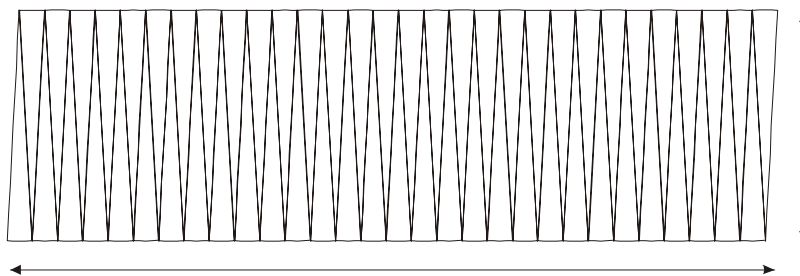
- 4) Utiliser les questions précédentes pour donner deux valeurs approchées de l'aire du disque.

On obtient la figure suivante : Le rayon du disque n'a pas changé. Son périmètre a-t-il changé ?



Le parallélogramme obtenu est le suivant. On ne distingue pratiquement plus les arcs de cercle.

La mesure de l'aire de ce parallélogramme est une nouvelle approximation de l'aire du disque. Calculer une valeur approchée de cette aire.



- 5) La formule du calcul de l'aire du disque est alors obtenue de la manière suivante : on considère qu'avec une infinité de côtés, le polygone inscrit dans le cercle a la même aire que le disque. Le parallélogramme a donc pour base la moitié du périmètre du cercle, donc $\pi \times R$. Sa hauteur est alors égale au rayon R du disque.

En calculant l'aire de ce parallélogramme très particulier, on obtient l'aire du disque :

$$A = \pi \times R \times R = \pi \times R^2$$

A l'aide de cette formule, calcule l'aire du disque de départ. Comparer avec les résultats des questions 1, 2 et 4.

Objectifs et commentaires

- Faire comprendre la méthode par laquelle on obtient la formule de l'aire du disque.

En effectuant les comparaisons des longueurs des bases des parallélogrammes au demi périmètre du cercle, les élèves voient la précision de l'approximation augmenter. L'augmentation du nombre de côtés du polygone régulier est alors naturelle, on recherche la précision la plus grande possible. Les passages à la limite peuvent être détaillés davantage selon le temps et les interrogations des élèves.

COURS

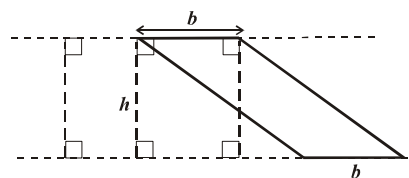
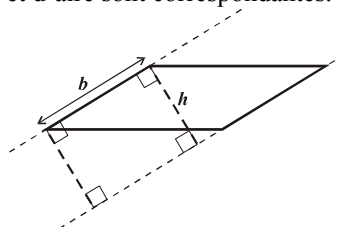
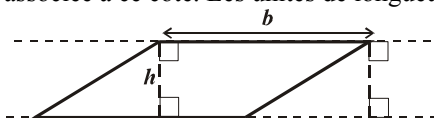
AIRE DU PARALLÉLOGRAMME

Propriété : Pour calculer l'aire d'un parallélogramme, on multiplie la longueur d'un côté (appelé base) par la longueur de la hauteur associée à ce côté, les unités de longueur et d'aire étant correspondantes.

On a la relation

$$A = b \times h$$

A désigne l'aire du parallélogramme, b la longueur d'un côté, appelé base, et h la longueur de la hauteur associée à ce côté. Les unités de longueur et d'aire sont correspondantes.

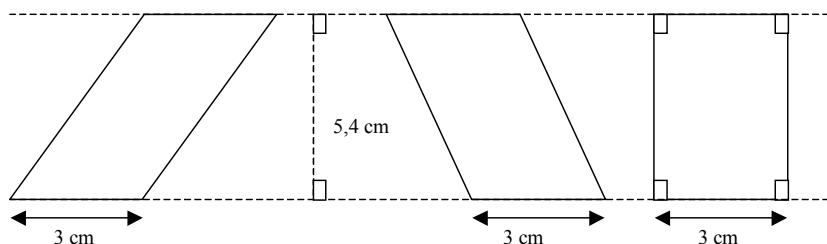


Exemple

Les trois parallélogrammes ci-contre ont la même aire :

$$3 \text{ cm} \times 5,4 \text{ cm} = 16,2 \text{ cm}^2.$$

Le rectangle a le périmètre le plus petit, le premier parallélogramme représenté a le périmètre le plus long.

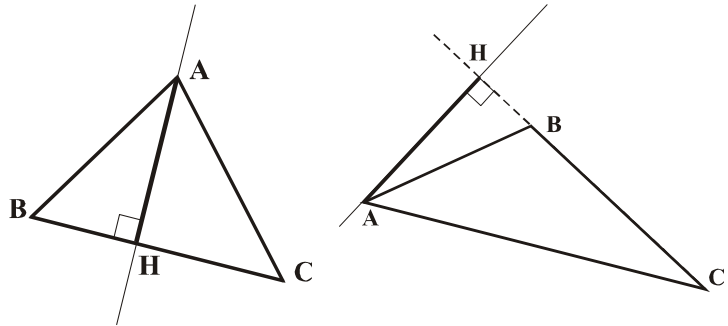


HAUTEUR D'UN TRIANGLE

Définition : On appelle *hauteur d'un triangle* une droite passant par un sommet de ce triangle et perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

Dans les deux cas ci-contre, H est le **piéd** de la **hauteur issue** de A. (AH) est la hauteur **relative** à [BC].

Remarque : Dans le deuxième cas, la hauteur (AH) est à l'extérieur du triangle ABC car l'angle $\widehat{ABC}$ est obtus.



Remarque : Le mot *hauteur* désigne aussi bien la droite considérée, que le segment considéré ou que la longueur de ce segment.

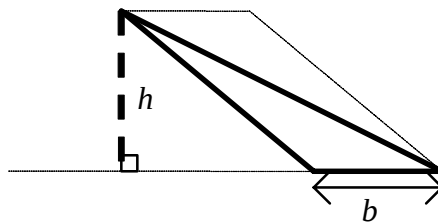
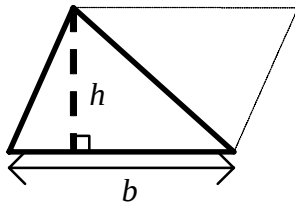
AIRE DU TRIANGLE

Propriété : Pour calculer l'aire d'un triangle, on multiplie la longueur d'un côté (appelé base) par la longueur de la hauteur associée à ce côté, et on divise le résultat par deux, les unités étant correspondantes.

On a la relation

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

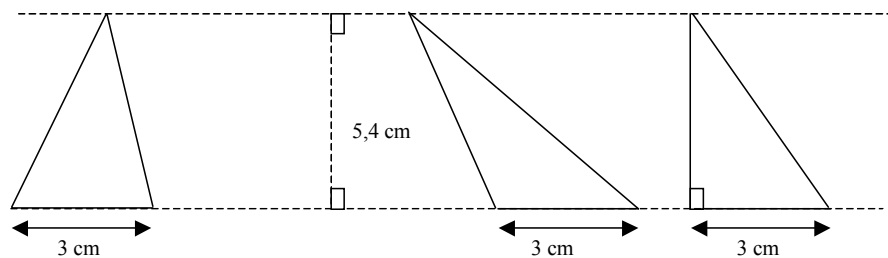
A désigne l'aire du triangle, b la longueur d'un côté, appelé base, et h la longueur de la hauteur associée à ce côté. Les unités de longueur et d'aire sont correspondantes.



Exemple

Les trois triangles ci-contre ont la même aire :

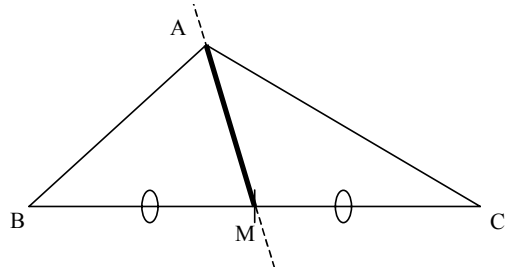
$$\frac{5,4 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}}{2} = 8,1 \text{ cm}^2.$$



MÉDIANE D'UN TRIANGLE

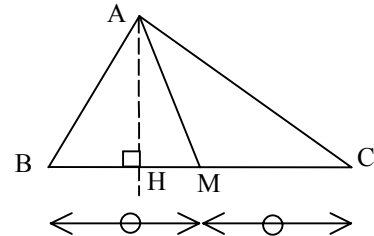
Définition : On appelle *médiane* d'un triangle une droite passant par un sommet de ce triangle et par le milieu du côté opposé à ce sommet.

Dans la figure ci-contre,
M est le **piéd** de la **médiane issue de A**.
(AM) est la **médiane relative à [BC]**.



Remarque : une médiane d'un triangle partage ce triangle en deux triangles de même aire.
Pour la figure ci-contre, la droite (AM) est la médiane issue de A dans le triangle ABC, les aires des triangles ABM et AMC sont égales à

$$\frac{MB \times AH}{2} \text{ ou } \frac{MC \times AH}{2}.$$



AIRE DU DISQUE

Propriété : Pour calculer l'aire d'un disque, on multiplie le carré du rayon ($R \times R$) de ce disque par π .

On a la relation

$$A = \pi \times R \times R = \pi R^2$$

A désigne l'aire du disque, **R** le rayon de ce disque. Les unités de longueur et d'aire sont correspondantes.

Exemple : Le rayon du disque ci-contre est 5 cm, son aire mesure :

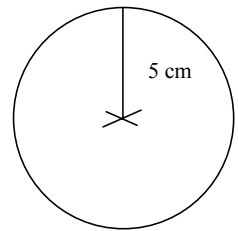
$$\pi \times 5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} = \pi \times 25 \text{ cm}^2 = 25\pi \text{ cm}^2$$

L'aire de ce disque mesure $25 \times \pi \text{ cm}^2$, soit :

environ $3 \times 25 \text{ cm}^2$ ou 75 cm^2 si on choisit 3 comme valeur approchée de π .

environ $3,14 \times 25 \text{ cm}^2$ ou $78,5 \text{ cm}^2$ si on choisit 3,14 comme valeur approchée de π .

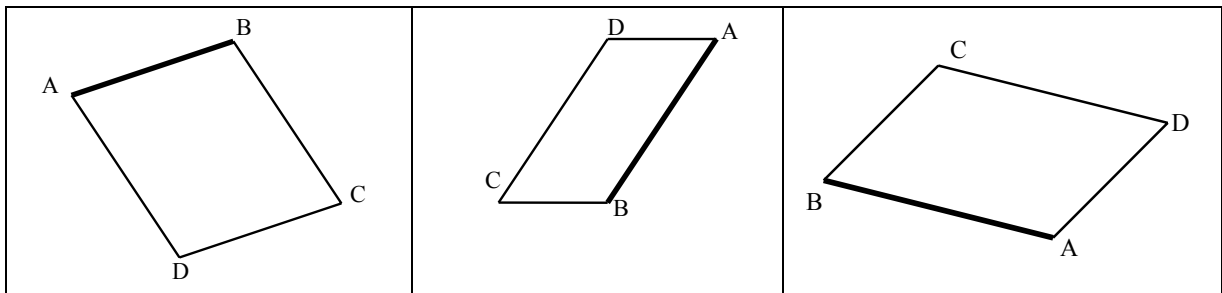
environ $78,53981635 \text{ cm}^2$ si on choisit 3,141592654 comme valeur approchée de π .



POINTS DE REPÈRE / MÉTHODES /

Savoir repérer la hauteur d'un parallélogramme correspondant à un côté donné

Dans un parallélogramme ABCD, on veut repérer la hauteur correspondant au côté [AB].



On repère sur la figure ou on trace **une perpendiculaire à la droite (AB)**.

Cette droite peut passer ou non par un sommet du parallélogramme.

La hauteur correspondant au côté [AB] est la **longueur du segment de cette perpendiculaire compris entre (AB) et (DC)**.

Côté : $[AB]$. Hauteur : AH ou DN ou CM .	Côté : $[AB]$. Hauteur : DN ou FE ou CM .	Côté : $[AB]$. Hauteur : AH ou CM ou EF .

Savoir repérer la hauteur d'un triangle correspondant à un côté donné

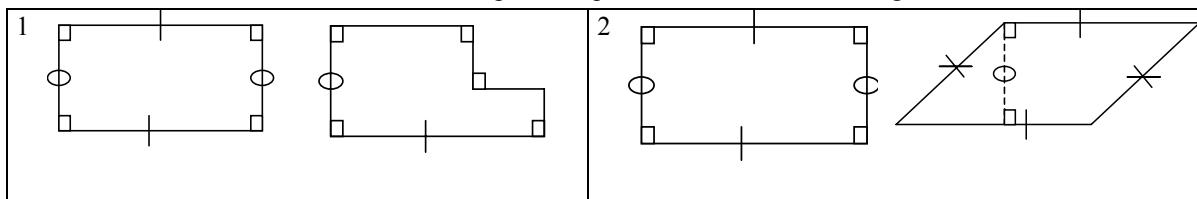
Triangle : ABC. Côté donné : $[AC]$	Triangle : EFG Côté donné : $[EF]$	Triangle : EFG Côté donné : $[FG]$
On repère le sommet opposé au côté $[AC]$. C'est B. On trace alors <u>la perpendiculaire à (AC) passant par B</u>. On appelle K son point d'intersection avec (AC).	On repère le sommet opposé au côté $[EF]$. C'est G. On trace alors <u>la perpendiculaire à (EF) passant par G</u>. Il faut prolonger le segment $[EF]$. On appelle L son point d'intersection avec (EF).	On repère le sommet opposé au côté $[FG]$. C'est E. On trace alors <u>la perpendiculaire à (FG) passant par E</u>. Il faut prolonger le segment $[FG]$. On appelle M son point d'intersection avec (FG).
La hauteur relative au côté $[AC]$ est la longueur BK.	La hauteur relative au côté $[EF]$ est la longueur GL.	La hauteur relative au côté $[FG]$ est la longueur EM.

EXERCICES

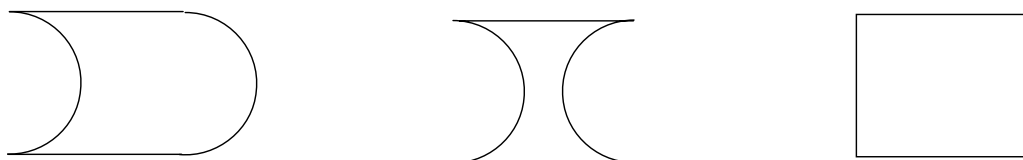
TRAVAIL SUR LE SENS

Dans les exercices 1 à 4, on cherche à donner du sens aux notions de périmètre et d'aire, à faire en sorte que l'élève ne réduise pas ces notions à des applications de formules. Comparer des périmètres et des aires permet de donner le sens voulu et de conjecturer que ces deux grandeurs ne se comportent pas de façon identique. Par exemple deux figures peuvent avoir la même aire sans avoir le même périmètre.

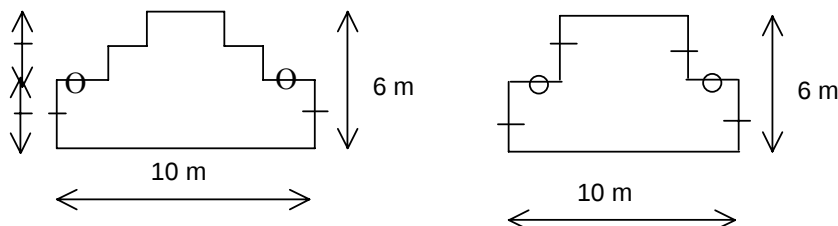
1. Dans chacun des deux cas suivants, comparer les périmètres et les aires des figures :



2. Les figures ci-dessous sont obtenues à partir d'un même rectangle et de demi-cercles ayant pour diamètre un côté de ce rectangle. Comparer leurs périmètres et leurs aires.



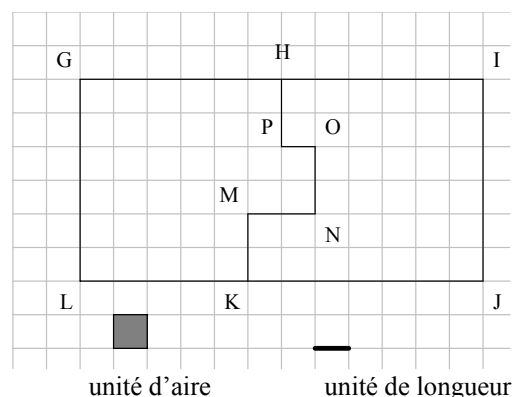
3. Les deux figures ci-contre sont formées de segments perpendiculaires. Comparer leurs aires et leurs périmètres.



Dans l'exercice 4, on précisera que l'unité d'aire est l'aire d'un carreau du quadrillage et que l'unité de longueur est la longueur d'un côté d'un carreau de ce quadrillage.

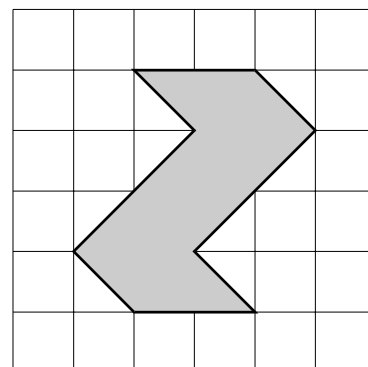
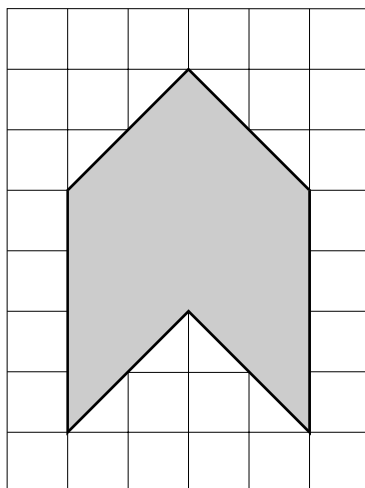
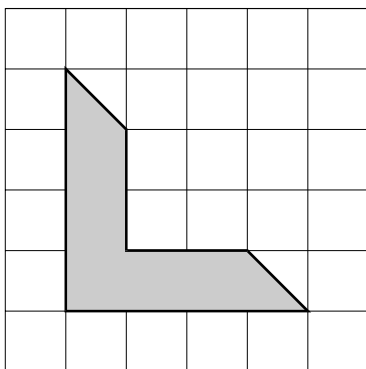
4. Inspiré d'un exercice donné à l'évaluation en sixième

- Comparer les aires des polygones GHPONMKL et HIJKNOP.
- Comparer les périmètres des deux polygones précédents.
- L'aire du polygone GHPONMKL est-elle égale à la moitié de l'aire du rectangle GIJL ? Pourquoi ?
- Le périmètre du polygone GHPONMKL est-il égal à la moitié de l'aire du rectangle GIJL ? Pourquoi ?



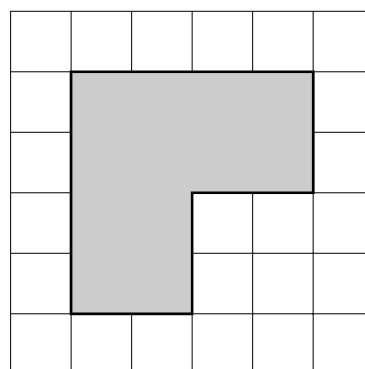
Dans l'exercice 5, on cherche à déterminer des aires à l'aide de recombinaisons de figures. On pourra mettre à profit la comparaison des différentes démarches : certains élèves compteront les carreaux, d'autres déplaceront des parties de figures. Cet exercice, ainsi que les exercices 6, 57, 58 et 59, sont extraits d'une thèse de Virginia PADILLA SANCHEZ « L'influence d'une acquisition de traitements purement figuratifs pour l'apprentissage des mathématiques » (1992), IRMA, 230 p., Strasbourg.

5. On choisit comme unité d'aire le carreau. Déterminer les aires de chacune des figures ci-dessous. Expliquer chaque démarche.

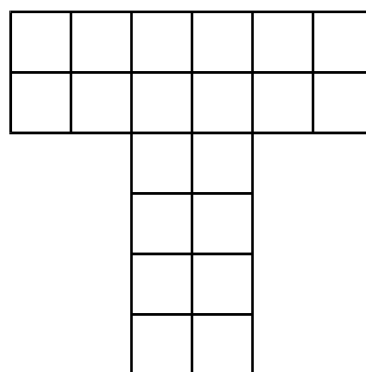


Les exercices 6 et 7 continuent à faire travailler le sens de la notion d'aire, on favorise ici la prise d'initiative de l'élève qui pourra procéder par essais et erreurs successifs.

6. Peut-on découper la figure grisée en quatre morceaux superposables ? Marquer les traits de découpage sur la figure.



7. Découper cette figure en 4 morceaux superposables. Marquer les traits du découpage sur la figure.



UNITÉS

Dans l'exercice 8, on cherche à redonner du sens aux unités d'aires : les figures permettent à l'élève de prendre conscience des éventuelles erreurs. On comptera les dixièmes de cm^2 , les centièmes de cm^2 , en faisant référence aux carreaux ou lignes correspondants, ce qui permet de vérifier. On pourra faire remarquer, dans la question b, que 20 cm^2 ne sont pas égaux à 2 dm^2 , car il n'y a pas un dm^2 dans 20 cm^2 , le dm^2 étant par ailleurs représenté.

8. a) Dessiner, sur une feuille de papier millimétré, trois carrés dont les aires respectives sont 1 mm^2 , 1 cm^2 et 1 dm^2 .

- b) Dessiner, sur cette feuille, un rectangle de 10 cm de long et 2 cm de large. Combien contient-il de cm^2 ? De mm^2 ? De dm^2 ?
- c) Dessiner, sur cette feuille, un carré de côté 8 mm. Combien contient-il de mm^2 ? De cm^2 ? De dm^2 ?
- d) Dessiner, sur cette feuille, un rectangle de 10 cm de long et 12 cm de large. Combien contient-il de cm^2 ? De mm^2 ? De dm^2 ?
- e) Dessiner, sur cette feuille, un rectangle de 5 cm de long et 8 mm de large. Combien contient-il de cm^2 ? De mm^2 ? De dm^2 ?

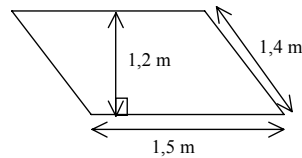
Après le travail sur le sens, place à la technique...

9. Convertir en m^2 : 3 a ; 5,4 ha ; 0,07 a ; 0,08 ha ; 15 cm^2 ; 204 dm^2 ; 1000 cm^2 .
 Convertir en cm^2 : 0,07 m^2 ; 2,4 m^2 ; 0,24 dm^2 ; 3,4 mm^2 ; 1,5 dm^2 ; 15,3 mm^2 .
 Convertir en dm^2 : 15243 mm^2 ; 152 cm^2 ; 1,52 m^2 ; 0,0152 m^2 ; 143,1 cm^2 .

PARALLÉLOGRAMME

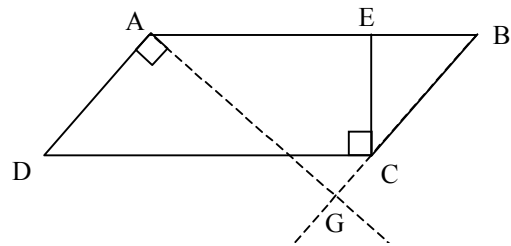
L'exercice 10 est une application directe, comportant une donnée inutile pour le calcul de l'aire du parallélogramme, mais nécessaire pour caractériser la figure.

10. Calculer l'aire de ce parallélogramme.



11. ABCD est un parallélogramme.

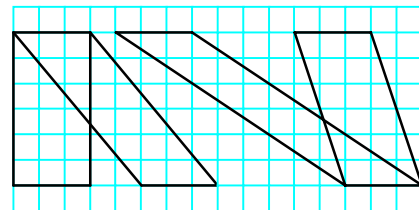
- a) Quelle est la hauteur associée au côté [AB] ?
- b) Quelle est la base associée à la hauteur [AG] ?
- c) Écrire deux formules qui permettent de calculer l'aire du parallélogramme ABCD de deux façons différentes.



Dans les exercices 12 et 13, on pourra suggérer de colorier d'une même couleur la base et la hauteur associée pour chaque parallélogramme. On prolonge les conjectures faites dans l'activité 1.

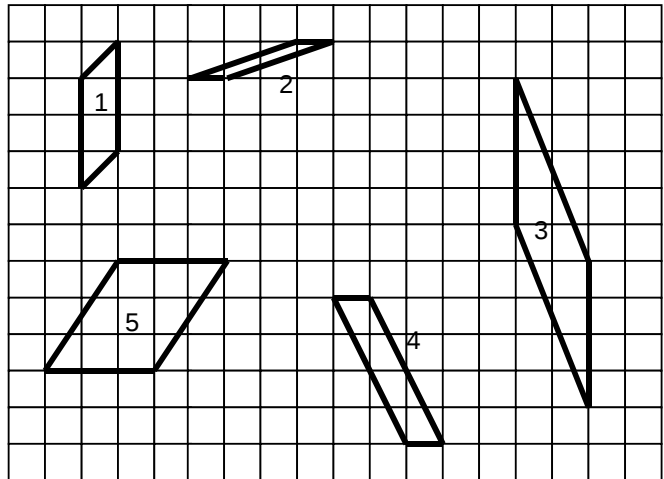
12. On choisit comme unité d'aire un carreau.

- 1) Calculer les aires des parallélogrammes ci-contre.
- 2) Ces parallélogrammes ont-ils le même périmètre ?



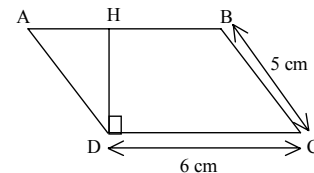
13. On choisit comme unité d'aire un carreau de ce quadrillage.

- Calculer l'aire, exprimée en carreau, de ces cinq parallélogrammes en utilisant le quadrillage.
- Sachant que chaque carreau a pour côté 5mm, donner l'aire de chaque parallélogramme en cm^2 .
- Tracer trois parallélogrammes ayant la même aire que le parallélogramme 1.
- En ne modifiant qu'une des 2 dimensions du parallélogramme 1, tracer un parallélogramme qui a pour aire le double de celle du parallélogramme 1. Le périmètre a-t-il doublé ?



Dans l'exercice 14, on commence par renforcer l'idée que l'aire d'un parallélogramme ne dépend pas que de ses côtés. Pour le calcul de la hauteur, on pourra fonctionner par essai-erreur et écrire une égalité du type $6 \times DH = 15$

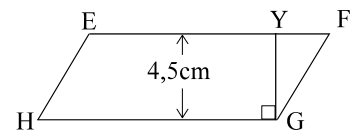
- Reproduire trois parallélogrammes de « tailles différentes » vérifiant les conditions ci-contre.
- Calculer DH, sachant que l'aire de ABCD est 15 cm^2 puis construire le parallélogramme correspondant.



Dans les exercices 15 et 16, les élèves sont amenés à calculer une hauteur pour pouvoir construire le parallélogramme donné. On pourra comparer les figures obtenues dans l'exercice 17, suivant la hauteur calculée.

15.

- EFGH est un parallélogramme.
 - Son aire est de 36 cm^2 .
 - $YF = 2 \text{ cm}$.
- Faire une figure en vraie grandeur.
 - Indiquer les calculs effectués pour réaliser le dessin.

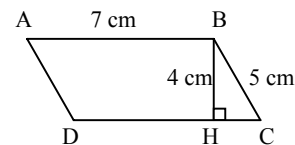


16. Construire un parallélogramme ABCD tel que :

- $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 8 \text{ cm}$ et l'aire mesure 35 cm^2 .
- $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = 5 \text{ cm}$ et l'aire mesure 24 cm^2 .

17. a) Reproduire ce parallélogramme en vraie grandeur.

- Calculer son aire.
- Tracer la hauteur correspondant au côté [BC] puis calculer la longueur de cette hauteur.

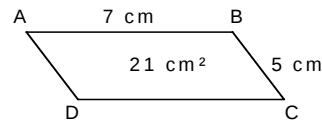
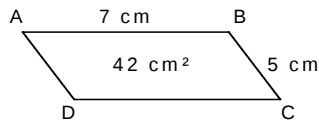
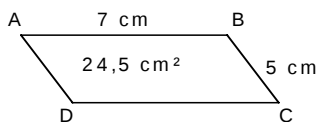


18. Construire quatre parallélogrammes ABCD, ABEF, ABGH, et ABIJ non superposables tels que $AB = 7 \text{ cm}$ et leur aire est égale à $27,7 \text{ cm}^2$.

Dans l'exercice 19, on amène l'élève à faire des conjectures sur les valeurs possibles de l'aire d'un parallélogramme de côtés donnés. On pourra faire remarquer aux élèves que cette conjecture ne dépend pas de la hauteur choisie.

19. a) Reproduire en vraie grandeur les parallélogrammes ci-dessous.

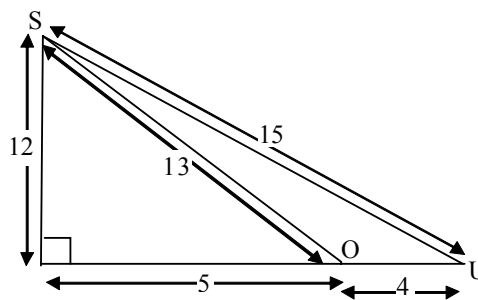
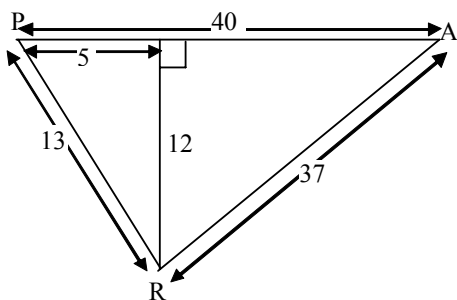
- Pour quelles valeurs de l'aire la construction d'un parallélogramme de côtés 7 cm et 5 cm est-elle possible ?



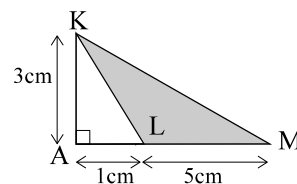
TRIANGLES

Dans les exercices 20 à 22, il faut choisir les données pertinentes pour le calcul de l'aire d'un triangle. On pourra comparer les différentes méthodes de calcul : utilisation ou non de décompositions. Pour chaque question, on pourra colorier d'une même couleur la base et la hauteur associée.

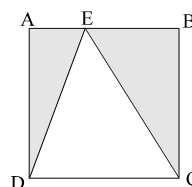
20. Calculer les aires des triangles PAR et SOU schématisés ci-dessous avec les dimensions de chacun de leurs côtés. Les mesures sont en cm.



21. Calculer l'aire du triangle grisé KLM.

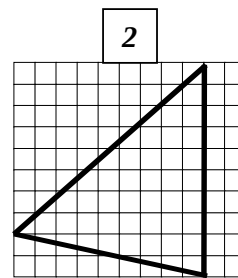
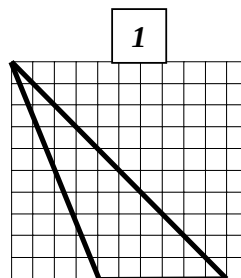


22. ABCD est un carré de 6 cm de côté. On donne : AE = 2 cm. Calculer l'aire du triangle ECD.



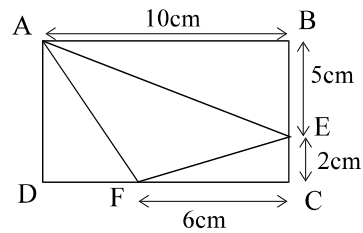
Dans l'exercice 23, on pourra colorier d'une même couleur la base et la hauteur associée.

23. On choisit comme unité d'aire un carreau. Calculer les aires des triangles ci-contre.



Dans l'exercice 24, l'élève est amené à changer de point de vue pour le calcul de l'aire du triangle AEF : pas de base, ni de hauteur pour ce triangle...

24. ABCD est un rectangle. Calculer l'aire du triangle AEF.



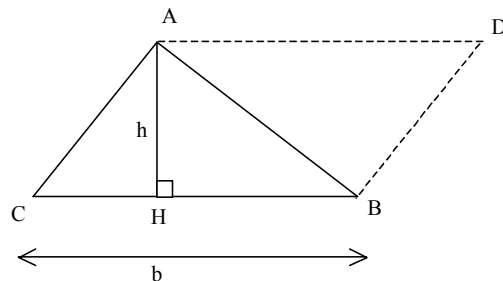
Suite à l'activité 3, on continue à prendre en compte des situations où la hauteur peut être identifiée comme distance entre deux droites parallèles, on amènera l'élève à conjecturer que, quelle que soit la place du point M sur le segment [CD], l'aire du triangle ABM est égale à la moitié de celle du parallélogramme ABCD.

25. ABCD est un parallélogramme et l'aire de ABCD est égale à 15 cm^2 . Soit M un point du côté [DC]. Calculer l'aire du triangle ABM.

L'exercice 26 a pour objectif de donner une méthode de calcul de la hauteur d'un triangle connaissant l'aire de ce triangle et la base associée à la hauteur cherchée, en passant par le parallélogramme associé.

26. On considère le triangle ABC, la hauteur [AH] associée au côté [BC] et le parallélogramme ABCD.

- 1) On ne connaît pas b et h et on sait que l'aire du triangle ABC est 10 cm^2 . Quelle est alors la mesure de l'aire du parallélogramme ACBD ? Donner alors plusieurs valeurs possibles pour b et h . Justifier les réponses.
- 2) On sait que l'aire du triangle ABC mesure 15 cm^2 et que $b = 4 \text{ cm}$. Quelle est de l'aire du parallélogramme ACBD ? Calculer h .



- 3) On sait que l'aire du triangle ABC mesure 18 cm^2 et que $b = 4,5 \text{ cm}$. Calculer h .

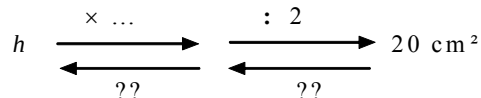
Dans l'exercice 27, on propose une autre méthode de calcul d'une hauteur : une méthode par essai-erreur. Le dernier cas envisagé montre les limites de cette méthode, la hauteur obtenue n'étant pas décimale. Ce sera l'occasion d'un débat dans la classe.

27. Dans chacun des cas suivants, on connaît l'aire d'un triangle et la longueur d'un côté. Calculer la hauteur associée au côté donné par « essai-erreur ».
- a) L'aire du triangle est 12 cm^2 , un côté de ce triangle mesure 8 cm .
 - b) L'aire du triangle est 17 cm^2 , un côté de ce triangle mesure 4 cm .
 - c) L'aire du triangle est 10 cm^2 , un côté de ce triangle mesure 3 cm .

Dans l'exercice 28, on propose encore une autre méthode de calcul d'une hauteur : l'utilisation de schémas fléchés qui permettent de mettre en évidence les opérations « inverses » qui sont en jeu dans le calcul de la hauteur.

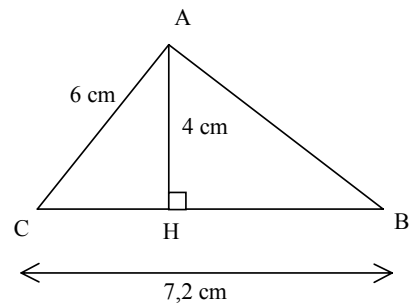
28. Dans chacun des cas suivants, calculer la hauteur associée à l'aide d'un schéma fléché.

- a) L'aire du triangle est 20 cm^2 , un côté de ce triangle mesure 8 cm .
- b) L'aire du triangle est 17 cm^2 , un côté de ce triangle mesure 5 cm .
- c) L'aire du triangle est 40 cm^2 , un côté de ce triangle mesure 7 cm .



Dans les exercices 29 et 30, pas de méthode imposée pour le calcul de la hauteur, on pourra comparer les différentes façons de faire.

29. a) Reproduire ce triangle en vraie grandeur.
b) Calculer son aire.
c) Tracer la hauteur correspondant au côté [AC] et calculer sa longueur.

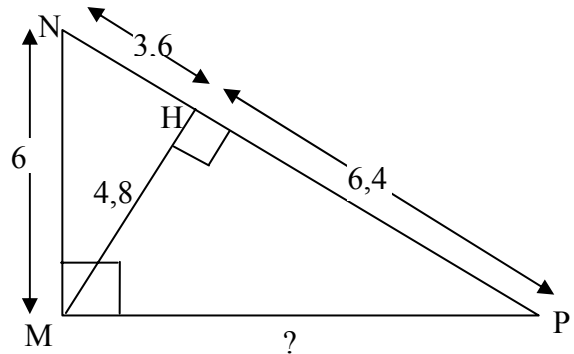


30. Sur le schéma ci-contre, le triangle MNP est rectangle en M.

(MH) est la hauteur issue de M.

L'unité de longueur est le cm.
 $MN = 6$; $NH = 3,6$; $PH = 6,4$; $MH = 4,8$

- Calculer l'aire du triangle MNP.
- Calculer la longueur MP.

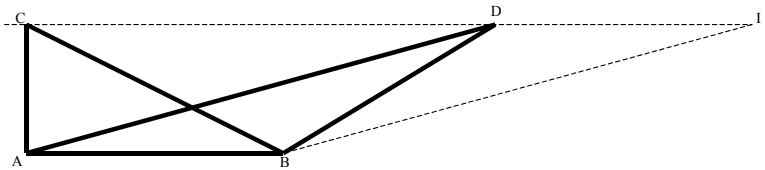


Dans les exercices 31 à 33, c'est l'élève qui doit prendre l'initiative du calcul d'une hauteur.

31. a) Construire un triangle ABC tel que $AB = 4$ cm, $AC = 5$ cm et dont l'aire mesure 6 cm².
b) Construire un triangle ABC tel que $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm et dont l'aire mesure 12 cm².
32. Tracer un segment [BC] mesurant 5 cm, puis construire trois triangles ABC, DBC et EBC ayant une aire égale à 12 cm².
33. Construire un triangle isocèle ayant un côté de 8 cm et dont l'aire est 12 cm². Construire toutes les formes possibles.

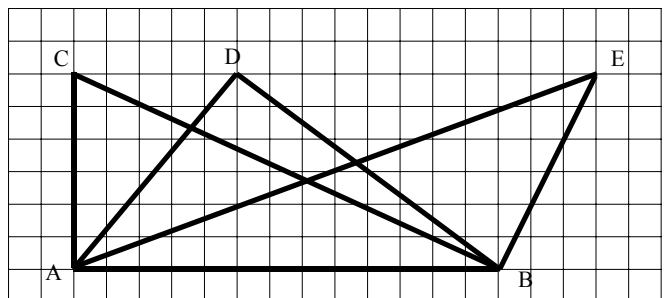
Dans les exercices 34 à 36, on prolonge le travail commencé dans l'activité 2 sur le repérage de triangles de même aire.

34. Sur la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en A, les droites (CD) et (AB) sont parallèles, les points C, D et I sont alignés.

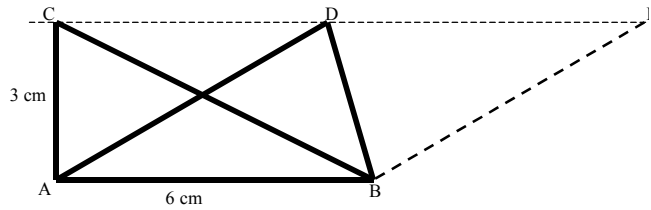


Comparer les aires des triangles ABC et ABD à celle du parallélogramme ABID.

35. 1) On choisit comme unité le carreau. Calculer les aires des triangles ABC, ABD, et ABE en utilisant des triangles rectangles que l'on mettra en évidence avec des couleurs. Quelle remarque peut-on faire ?
- 2) Placer deux points F et G de telle sorte que les triangles ABF et ABG aient la même aire que le triangle ABC. Où sont placés ces points ?



36. Sur la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle en A, les droites (CE) et (AB) sont parallèles, de même que les droites (AD) et (BE).



- 1) Quelle conjecture peut-on faire pour les aires des triangles ABD et ABC ? Le but des questions suivantes est de démontrer cette conjecture.
- 2) Calculer l'aire du triangle ABC.
- 3) Quelle est la nature du quadrilatère ABED ? Justifier.
- 4) Démontrer que les triangles ABD et DBE ont la même aire.
- 5) Calculer l'aire du parallélogramme ABED puis celle du triangle ABD.
- 6) Quelle conclusion peut-on tirer pour les aires des triangles ABD et ABC ?
- 7) Où placer un point E pour que le triangle ABE ait la même aire que les triangles ABD et ABC

HAUTEURS ET MÉDIANES

Les exercices 37 à 43 ont pour objectif de donner du sens aux notions de médianes et de hauteurs d'un triangle. On pourra utiliser un logiciel de géométrie dynamique et un video-projecteur pour visualiser les conjectures possibles.

37. Tracer les 3 hauteurs de chacun des triangles ci-dessous :

- 1) triangle ABC tel que $AB = 3$ cm, $AC = 5$ cm et $\widehat{BAC} = 50^\circ$
- 2) triangle ABC tel que $AB = 5$ cm, $AC = 8$ cm et $\widehat{BAC} = 150^\circ$
- 3) triangle ABC tel que $AB = 7$ cm, $AC = 5$ cm et $\widehat{BAC} = 100^\circ$

38. Tracer le triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $AC = 7$ cm et $BC = 8$ cm. Tracer la hauteur issue de A au triangle ABC et la hauteur issue de B à ce même triangle. Ces deux hauteurs se coupent en D. Que représente la droite (AC) pour le triangle BDC ? Justifier.

39. Tracer les trois médianes des triangles suivants :

- 1) le triangle ABC tel que $AB = 6$ cm, $AC = 7$ cm et $BC = 8$ cm
- 2) le triangle ABC tel que $AB = 3$ cm, l'angle $\widehat{BAC} = 130^\circ$ et $AC = 8$ cm

40. ABCD est un parallélogramme de centre O. Quelle est la médiane du triangle ABC ? Justifier.

41. ABC est un triangle et M, N et P sont les milieux respectifs de [BC], [AB] et [AC]. Que représente la droite (AM) pour le triangle ABC ? De quel triangle, la droite (MN) est-elle la médiane ? Comparer les aires des triangles MNB, MNA, MAP et MPC.

42. ABC est un triangle tel que $BC = 8$ cm. Sur le segment [BC] on place trois points S, T et U tels que $BS = ST = TU = 2$ cm

De quels triangles, la droite (AM) est-elle la médiane ?

Quelle est la médiane du triangle ABM ?

Comparer les aires des triangles ABS et ABM, puis celles de ABS et ABT.

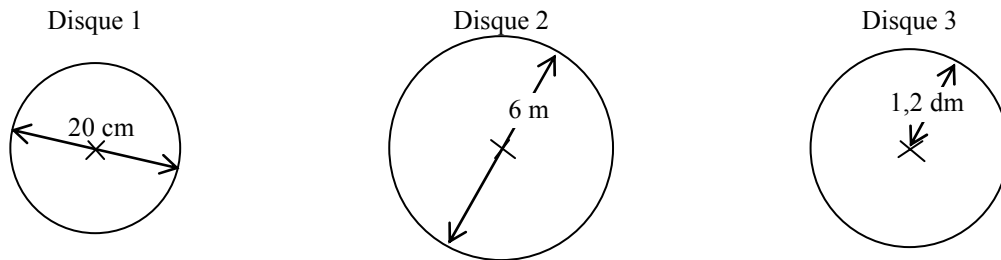
43. ABC est un triangle. Le point F est le symétrique de A par rapport à B et E est le symétrique de B par rapport à C. Que représente la droite (AC) pour le triangle ABE ? Justifier. De quel triangle (EC) est-il la médiane ?

AIRE DU DISQUE

Dans tous les exercices concernant l'aire du disque, on habituera l'élève à écrire d'abord une suite de calculs utilisant le nombre π et à donner ensuite seulement une valeur approchée du résultat. Dans les premiers exercices, $\pi \approx 3$ est une approximation suffisante qui permet d'effectuer les calculs mentalement. Par la suite, l'utilisation de la calculatrice et de la touche π mène à une meilleure précision du résultat et peut être l'occasion d'un travail sur les arrondis.

L'exercice 44 est un exercice de base d'utilisation de la formule de l'aire d'un disque. Il permet de bien différencier diamètre et rayon et d'être attentif aux unités.

44. Calculer l'aire de chacun des disques schématisés ci-dessous :



Dans l'exercice 45, l'élève construit des figures de formes différentes ayant la même aire. On pourra l'encourager à trouver deux rectangles différents, deux parallélogrammes différents, deux triangles différents.

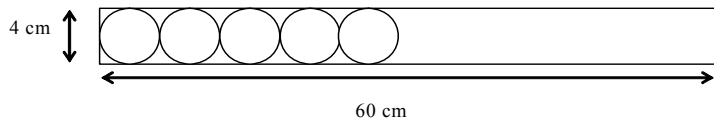
Pour le disque, on peut se contenter de la valeur approchée 3 de π , ce qui mène à rechercher un nombre dont le carré est 3.

45. Construire, sur papier millimétré, un carré, un rectangle, un parallélogramme, un triangle et un disque ayant chacun pour aire 9 cm^2 . Indiquer les longueurs utilisées.

Dans les exercices 46 à 50 les aires demandées ne résultent pas de la simple application d'une formule, mais s'obtiennent par différence, par addition ou en recomposant la figure. C'est l'occasion de retravailler la notion d'aire.

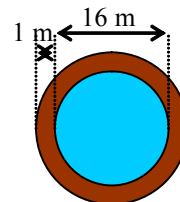
46. Dans une plaque de tôle rectangulaire de dimensions 60 cm et 4 cm, on découpe le plus grand nombre possible de rondelles de 4 cm de diamètre.

- a) Trouver le nombre de rondelles.
- b) Calculer l'aire de la surface de tôle inutilisée.

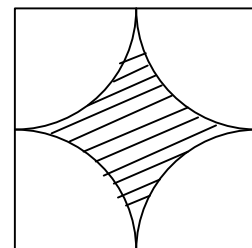


47. Un bassin circulaire a 16 m de diamètre. Il est entouré d'une allée qui a 1 m de largeur.

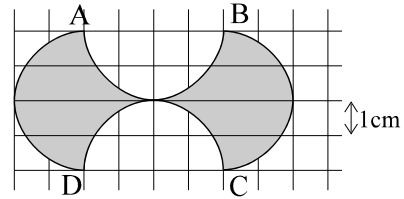
- a) Calculer l'aire de la surface du bassin.
- b) Calculer l'aire de l'allée.



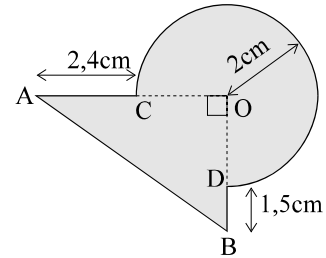
48. Dans chaque angle d'un carré de 18 cm de côté, on enlève un quart de disque de 9 cm de rayon. Calculer l'aire de la surface restante.



49. a) Reproduire la figure ci-contre en vraie grandeur, sur papier quadrillé.
b) Calculer son aire.



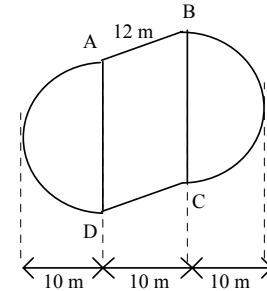
50. Calculer l'aire de la surface grisée ci-contre.



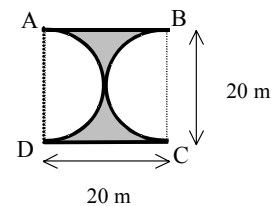
AIRE ET PÉRIMÈTRE

Dans les exercices 51 à 55, les calculs de l'aire et du périmètre sont demandés. C'est l'occasion de revenir sur ces deux notions et de les différencier. On pourra encourager les élèves, d'une part à colorier les surfaces étudiées et, d'autre part à repasser en couleur les lignes dont on cherche la longueur.

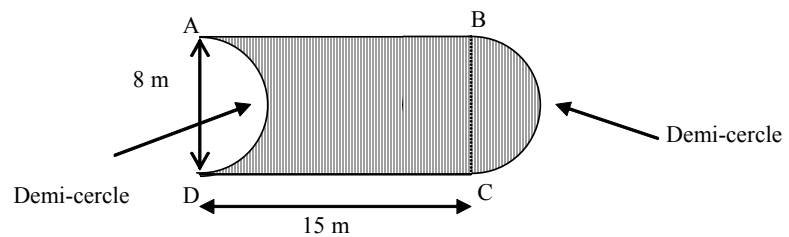
51. ABCD est un parallélogramme. Il est entouré de deux demi-cercles. Calculer le périmètre et l'aire de cette figure.



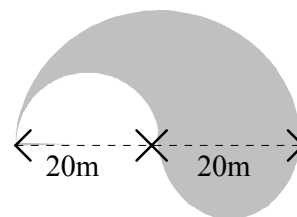
52. Calculer l'aire et le périmètre de la figure grisée sachant que ABCD est un carré.



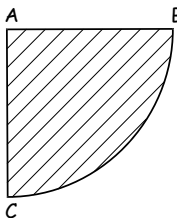
53. ABCD est un rectangle. Calculer le périmètre de la figure hachurée ci-contre.



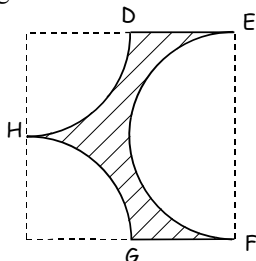
54. Calculer le périmètre et l'aire de cette figure composée de demi-cercles.



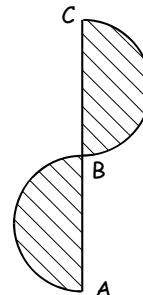
55. Les figures suivantes sont composées de segments, de quarts de cercles et de demi-cercles. Calculer le périmètre et l'aire de chacune de ces figures.



a) $AB = 6 \text{ cm}$



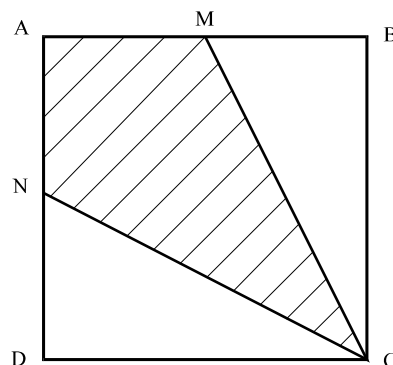
b) Le carré a pour côté 10 cm



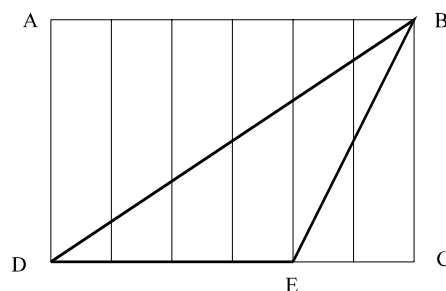
c) $AB = 4 \text{ cm}$

PROBLÈMES DIVERS

56. La figure représente un carré ABCD avec deux milieux de côtés, M et N. Quelle fraction de l'aire du carré la partie hachurée ? Justifier la réponse.



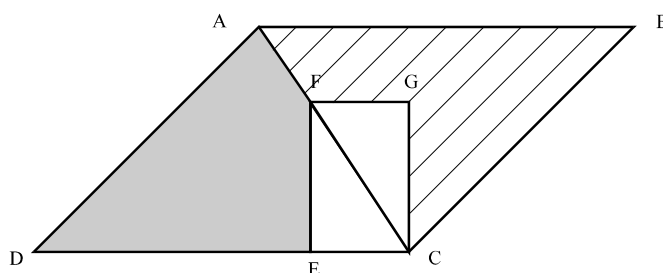
57. On a partagé un rectangle ABCD en bandes égales. Quelle est la fraction de l'aire du rectangle que représente l'aire du triangle BED ? Justifier la réponse.



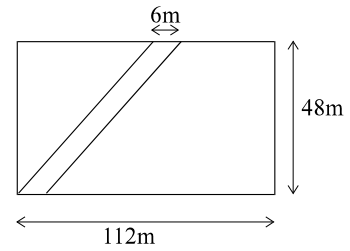
58. Sur la figure, ABCD est un parallélogramme, le point F appartient à la diagonale (AC) et CEFG est un rectangle. Comparer l'aire hachurée et l'aire pointillée.

Cocher la case correspondant à la réponse

- a) l'aire pointillée est le plus grande ☐
 b) l'aire hachurée est le plus grande ☐
 c) les deux aires sont égales ☐

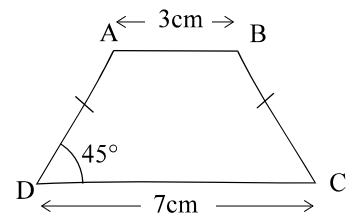


59. Un jardin rectangulaire est traversé par une allée à bords parallèles. Calculer l'aire de la surface cultivable.

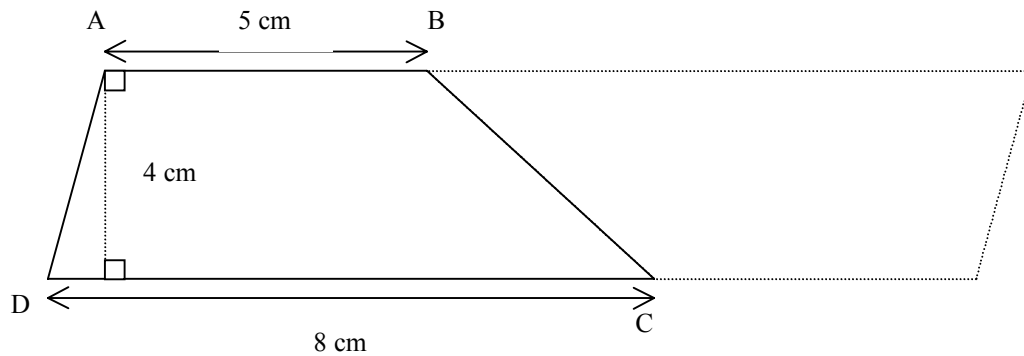


60. ABCD est un trapèze isocèle tel que $AD = BC$.

- Faire une figure en vraie grandeur.
- Calculer l'aire du trapèze ABCD.



61. Calculer l'aire du trapèze ABCD ci-dessous :



CHAPITRE 14

SOLIDES

OBJECTIFS DU CHAPITRE

- Représenter, décrire et construire un prisme droit ou un cylindre de révolution.
- Fabriquer un prisme droit dont la base est un triangle ou un parallélogramme.
- Fabriquer un cylindre de révolution dont le rayon du cercle de base est donné.
- Dessiner à main levée une représentation en perspective cavalière de ces deux solides.
- Calculer le volume d'un prisme droit, en particulier celui d'un parallélépipède rectangle.
- Calculer le volume d'un cylindre de révolution.
- Effectuer pour des volumes des changements d'unités de mesure.
- Calculer l'aire latérale d'un prisme droit ou d'un cylindre de révolution.

REPÈRES POUR LE CONTENU DU COURS

- Prisme droit, description, représentations et patrons.
- Cylindre de révolution, description, représentation et patron.
- Unités de volume.
- Volume du prisme droit.
- Volume du cylindre de révolution.

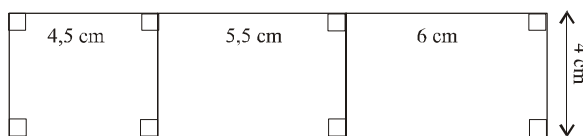
ACTIVITÉ

ACTIVITÉ 1 : PRISME DROIT

A. Construction de prismes

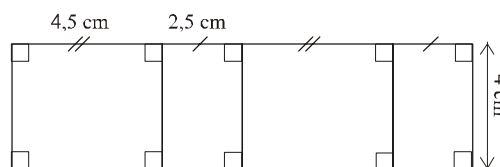
1) Voici le patron d'une boîte sans fond ni couvercle.

- Reproduire ce patron en vraie grandeur sur papier épais, puis construire cette boîte.
- A part, dessiner et découper un fond pour la boîte. Vérifier le résultat obtenu.
- Construire un patron complet de la boîte avec fond et couvercle.



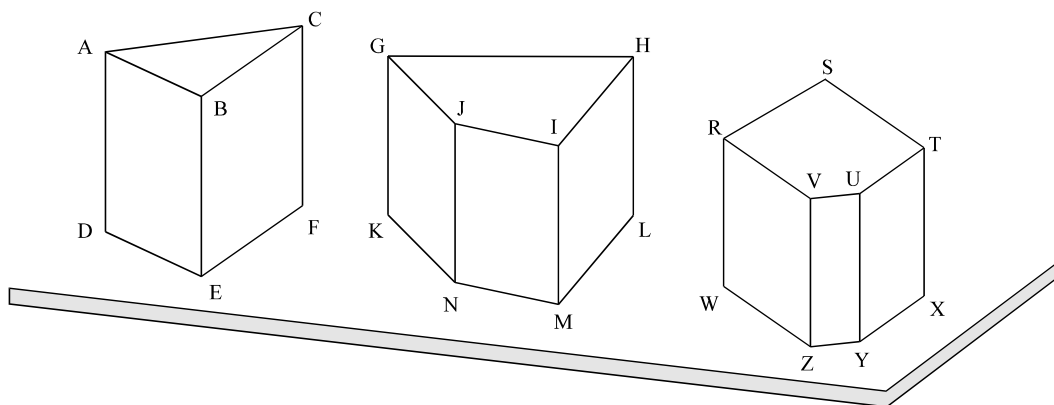
2) Voici le patron d'une autre boîte sans fond ni couvercle.

- Construire cette boîte avec du papier épais. Construire à part un fond rectangulaire. Construire un patron complet de la boîte avec fond et couvercle.
- Peut-on "déformer" la boîte sans son fond pour que ce fond ne soit pas un rectangle ? Si oui dessiner un tel exemple de fond puis construire le patron complet correspondant avec fond et couvercle.



B. Représentation en perspective

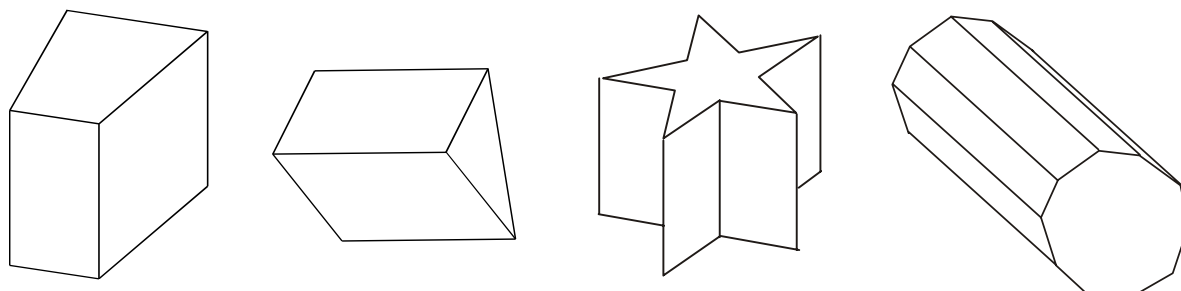
1) a) Voici des dessins en perspective de prismes droits. Colorier en rouge leurs *bases* visibles. Colorier en vert leurs faces *latérales* visibles.



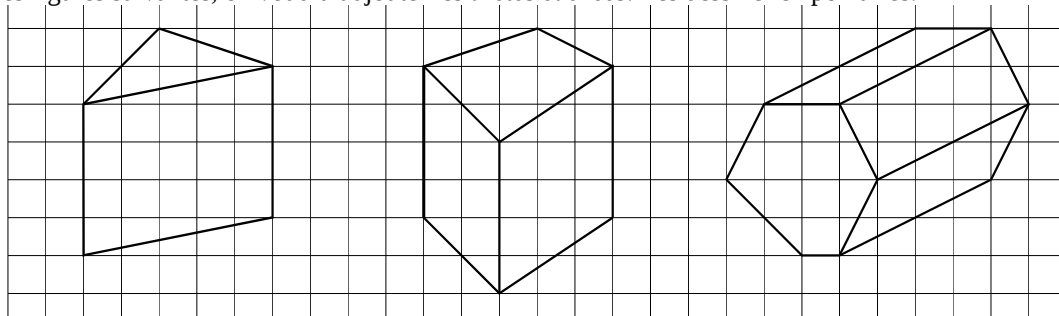
b) Pour chacune des figures de l'exercice précédent, nommer les *sommets* visibles, la *base* visible, les *hauteurs* visibles.

2) Voici d'autres dessins en perspective de prismes droits.

Colorier en rouge la *base* visible. Colorier en bleu les *hauteurs* visibles.



3) Sur les figures suivantes, on voudrait ajouter les *arêtes cachées*. Les dessiner en pointillés.



Objectifs et commentaires

- Construire une image mentale du prisme droit, à travers plusieurs registres différents : maquette, patron, représentation en perspective.

La partie A permet des allers-retours entre la maquette et le patron. Il est indispensable que les élèves construisent, manipulent et vérifient leurs constructions. Dans la question 1, il n'existe qu'une seule solution. En première approche, les élèves peuvent trouver les contours approximatifs des fonds et couvercles. On peut ensuite demander une construction précise d'un des deux triangles avec règle et compas.

Dans la question 2, on pourra confronter les résultats obtenus dans la classe et évoquer les propriétés des parallélogrammes ainsi construits.

On peut prolonger l'activité en demandant de construire un patron complet (avec les bases) d'un des prismes précédents.

Dans la partie B, on travaille le vocabulaire à partir de la représentation en perspective, d'abord en s'intéressant uniquement aux faces visibles (questions 1 et 2), puis en ajoutant les arêtes cachées. Dans la question 1, les prismes sont tous posés sur une base, mais il n'en est pas de même dans la question 2.

La question 3 présente des difficultés pour beaucoup d'élèves. Pour les aider, on peut leur proposer plusieurs stratégies, soit en privilégiant les bases, soit en privilégiant les hauteurs. Dans les deux cas, il faut rappeler les règles de la perspective parallèle (voir point-méthode). On pourra en profiter pour montrer aux élèves comment utiliser le quadrillage pour le tracé de segments parallèles et de même longueur.

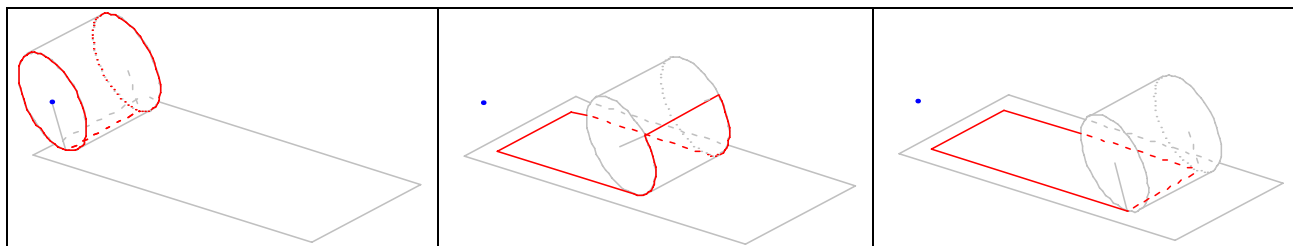
Remarques

- Cette activité peut être pratiquée dès le début de l'année scolaire. Elle permet alors de revenir sur la géométrie plane de 6^{ème}, et de construire des triangles et des quadrilatères avec les instruments.
- Pour les élèves en difficulté, on peut proposer de construire d'abord les patrons sur du papier quadrillé.

ACTIVITÉ 2 : CYLINDRE DE RÉVOLUTION

Première partie

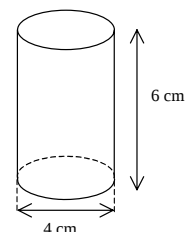
Les images ci-dessous montrent le développement de la surface latérale d'un cylindre de révolution à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. Sur l'image, qui est une représentation en perspective de la réalité, la surface obtenue est un parallélogramme. En réalité, c'est un rectangle.



Prendre une feuille de papier rectangulaire et « l'enrouler » pour obtenir un cylindre sans couvercle ni fond : c'est toujours possible. Un rectangle est toujours le développement de la surface latérale d'un cylindre de révolution.

Deuxième partie

- 1) Tracer un cercle de 6 cm de diamètre et découper le disque correspondant.
- 2) Tracer et découper les rectangles suivants, dont on donne les dimensions :
 - a) Longueur : 12 cm ; Largeur : 10 cm.
 - b) Longueur : 18,8 cm ; Largeur : 10 cm.
 - c) Longueur : 20 cm ; Largeur : 18,8 cm.
 - d) Longueur : 10 cm ; Largeur : 20 cm.
- 3) Parmi les rectangles découpés, lesquels semblent accepter le disque découpé comme base ? Quelle est alors leur hauteur ?
- 4) Quelles sont les dimensions du rectangle correspondant au développement de la surface latérale du cylindre ci-contre ? Justifier la réponse.

**Objectifs et commentaires**

- Connaître le développement de la surface latérale d'un cylindre de révolution.
- Établir le lien entre le périmètre du cercle de base et une des dimensions de ce développement.

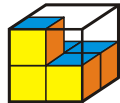
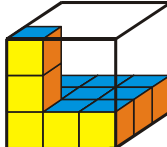
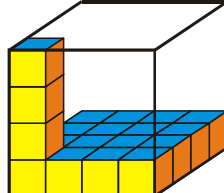
On complètera la première partie par une animation avec un logiciel de géométrie dynamique.

Dans la deuxième partie, on veillera à laisser manipuler les élèves, afin qu'ils puissent établir par l'expérience la conjecture qui établit le lien entre une des dimensions du rectangle et le périmètre du cercle de base : on amène les élèves à passer du registre de la maquette réelle au registre des figures planes de géométrie. On pourra créer un débat sur l'exactitude de la dimension en question.

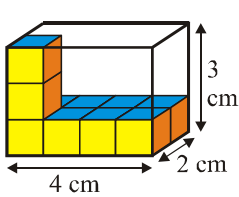
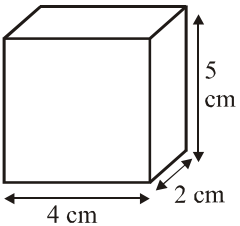
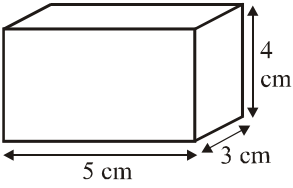
La question 5 vise à mettre en œuvre les acquis précédents.

ACTIVITÉ 3 : VOLUMES

- 1) Compléter le tableau ci-dessous :

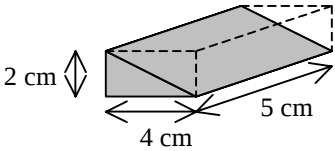
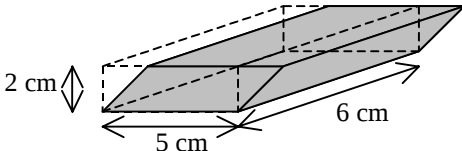
	Cube de 1 cm d'arête	Cube de 2 cm d'arête	Cube de 3 cm d'arête	Cube de 4 cm d'arête	Cube de 5 cm d'arête	Cube de 10 cm d'arête
						
Nombre de cm ³ contenus dans la « base » du cube.						
Nombre de cm ³ nécessaires pour remplir le cube.						

2) Compléter le tableau ci-dessous :

			
Nombre de cm^3 contenus dans la « base » du parallélépipède.			
Nombre de cm^3 nécessaires pour remplir le parallélépipède.			

3) Quelle conjecture peut-on faire pour le calcul du volume d'un cube ? d'un parallélépipède rectangle ?

4)

 On a représenté ci-dessus, en gris, un prisme droit dont la base est un triangle rectangle. a) Quelle est la hauteur de ce prisme ? b) Quel est le volume de ce prisme ? Justifier.	 On a représenté ci-dessus, en gris, un prisme droit dont la base est un parallélogramme. a) Quelle est la hauteur de ce prisme ? b) Quel est le volume de ce prisme ? Justifier.
--	--

5) La formule donnant le volume d'un prisme est $V = B \times h$, avec V volume du prisme, B aire de la base de ce prisme et h hauteur de ce prisme.
Appliquer cette formule aux prismes précédents et vérifier que les résultats obtenus correspondent à ceux trouvés dans la question 4.

Objectifs et commentaires

- Redonner du sens à la notion de volume.
- Faire découvrir le lien entre volume, aire de la base et hauteur, pour un cube, un parallélépipède rectangle et un prisme droit.
- Valider les formules.

Les questions 1 et 2 permettent de redonner du sens à la notion de volume, notion qui a commencé à être vue en classe de sixième et qui est loin d'être installée. On recommence, si besoin est, à compter le nombre de cubes de 1 cm d'arête contenus dans certains pavés : la formule qui a été vue en sixième n'est pas encore acquise chez de nombreux élèves. On pourra construire ou faire construire les cubes correspondants en vraie grandeur (prévoir alors de nombreux cubes de 1 cm d'arête) : de nombreux élèves ont besoin de manipuler l'objet réel pour pouvoir conduire leur raisonnement. On laissera chacun agir selon sa méthode (formule ou non) et on fera une synthèse pour dégager le sens de la notion de volume ainsi que pour établir et généraliser le lien entre volume, aire de la base et hauteur d'un pavé droit.

Dans la question 4, le premier prisme droit peut être vu comme la moitié d'un parallélépipède rectangle. C'est par décomposition et recombinaison que le volume du deuxième prisme peut être dégagé.

Les élèves ne pouvant en aucun cas démontrer les formules de volume, on les leur donne dans la question 5 (on leur précise alors que les mathématiciens les ont démontrées), afin qu'ils les appliquent pour vérifier l'exactitude ou non des résultats trouvés dans la question 4.

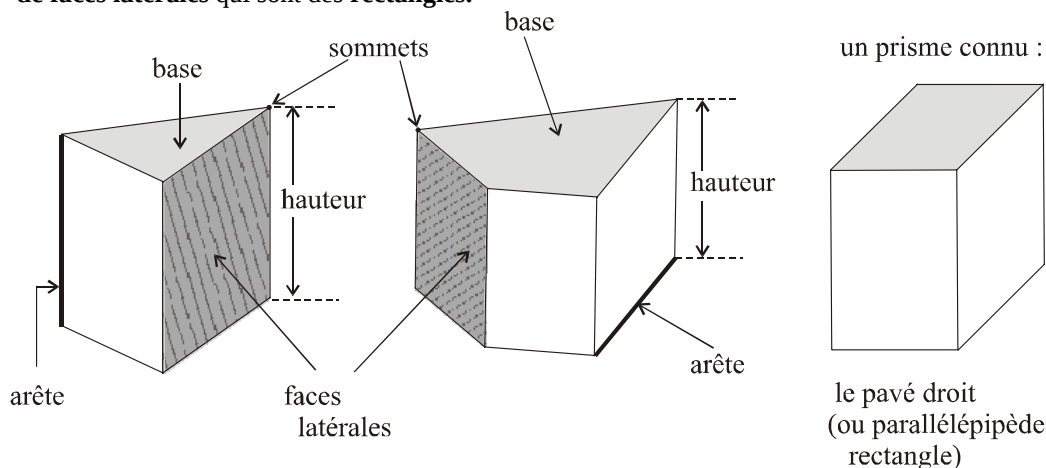
L'ensemble de cette activité gagne en compréhension et en sens s'il est accompagné de modèles concrets (maquettes).

COURS

PRISME DROIT

Description : Un *prisme droit* est un solide formé :

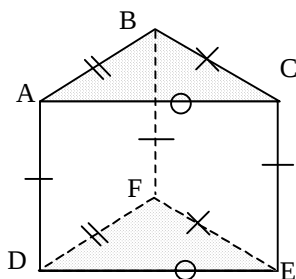
- de deux bases superposables et parallèles qui sont des polygones
- de faces latérales qui sont des rectangles.



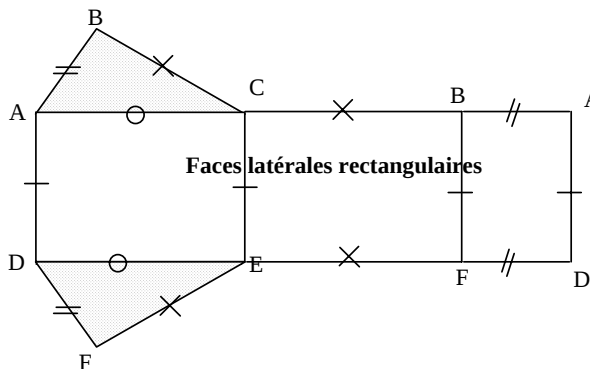
Remarques: Le nombre de *faces latérales* est égal au nombre de côtés d'une base. Toutes les *arêtes latérales* ont la même longueur. La *hauteur* d'un prisme droit est la longueur commune à toutes les arêtes latérales. Un *parallélépipède rectangle* est un prisme droit dont les bases sont des rectangles. L'*aire latérale* d'un prisme droit est la somme des aires de toutes les faces latérales.

Exemples de patrons

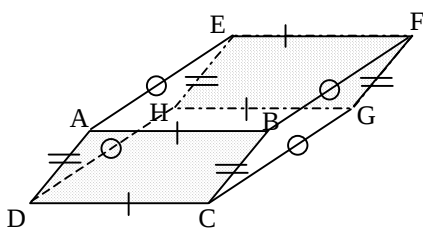
Représentation en perspective d'un prisme droit à base triangulaire, posé sur une de ses bases.



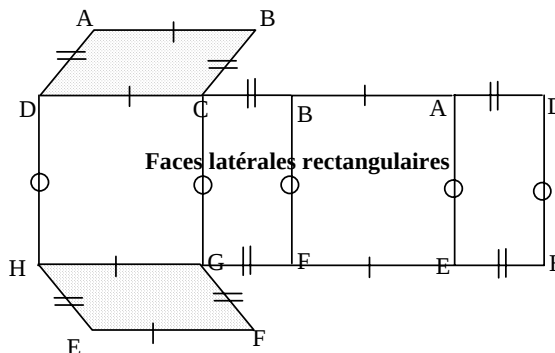
Un patron possible du prisme ci-contre



Représentation en perspective d'un prisme droit dont les bases sont des parallélogrammes, ces bases sont vues de face.



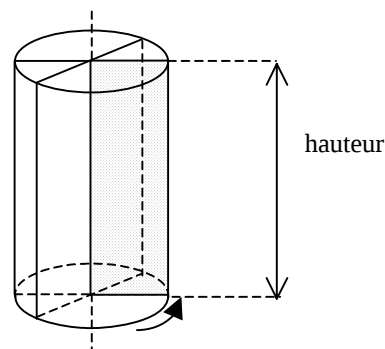
Un patron possible du prisme ci-contre



CYLINDRE DE RÉVOLUTION

Description : Un cylindre de révolution est un solide formé de deux bases parallèles qui sont des disques de même rayon et d'une surface latérale dont le "développement" est un rectangle.

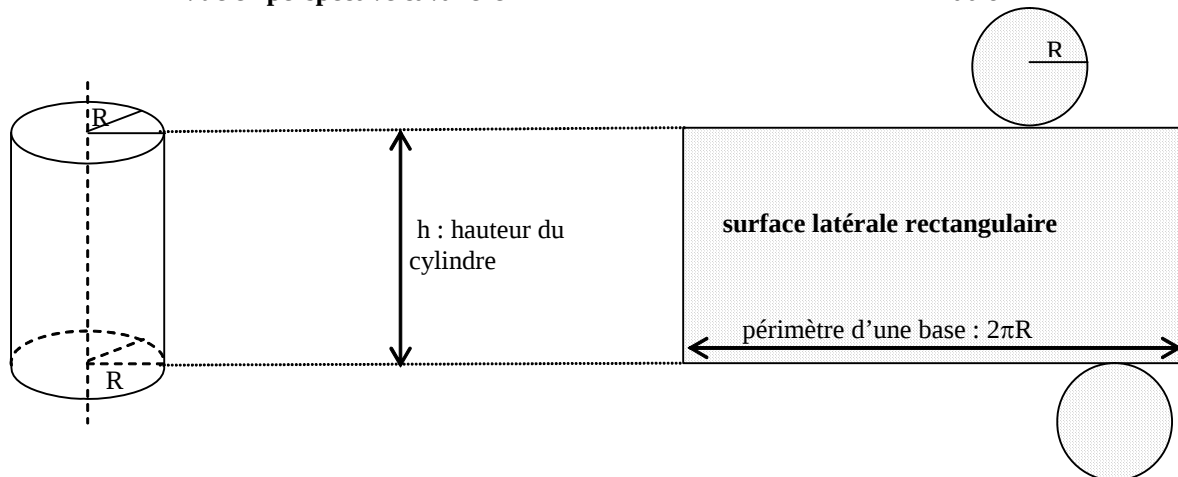
Remarque : Un cylindre de révolution est un solide obtenu par la rotation d'un rectangle qui tourne autour d'un de ses côtés.



Patron d'un cylindre de révolution

Vue en perspective cavalière

Patron



Le patron d'un cylindre est constitué d'un rectangle et de deux disques de même rayon.

L'une des dimensions du rectangle est égale au périmètre d'un des disques de base ; l'autre dimension du rectangle est la hauteur du cylindre.

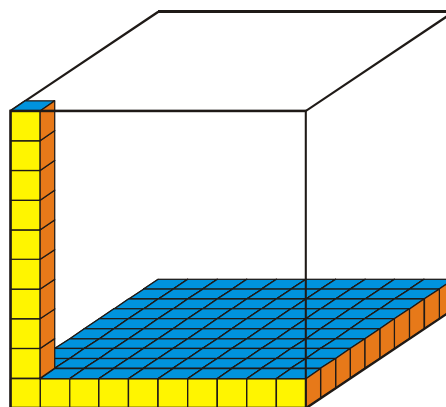
VOLUMES

Unités de volume

Un **mètre cube** est le volume d'un cube d'arête 1 m ; le mètre cube est noté : m^3 .



arête du cube : 1 cm
volume du cube : 1 cm^3



arête du cube : 10 cm ou 1 dm
volume du cube : $1\,000 \text{ cm}^3$ ou 1 dm^3

Un **litre** est le volume d'un cube d'arête 1 dm ou 10 cm, c'est à dire 1 dm^3 ou $1\,000 \text{ cm}^3$.

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$$

$$1 \text{ cm}^3 = \frac{1}{1000} \text{ dm}^3 = 0,001 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ L}$$

$$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = \frac{1}{1000} \text{ m}^3 = 0,001 \text{ m}^3$$

Conversion des unités de volume

km ³	–	–	hm ³	–	–	dam ³	–	–	<table><tr><td>m³</td></tr><tr><td>kL</td></tr></table>	m ³	kL	–	–	<table><tr><td>dm³</td></tr><tr><td>L</td></tr></table>	dm ³	L	–	–	<table><tr><td>cm³</td></tr><tr><td>mL</td></tr></table>	cm ³	mL	–	–	mm ³
m ³																								
kL																								
dm ³																								
L																								
cm ³																								
mL																								
									hL	daL		dL		cL										

$$1 \text{ dm}^3 = 10 \text{ dL}$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

Exemples

$$1,3 \text{ m}^3 = 1,3 \times 1000 \text{ dm}^3 = 1300 \text{ dm}^3 = 1300 \text{ L}$$

$$12 \text{ mL} = 12 \text{ cm}^3 = \frac{12}{10} \text{ cL} = 1,2 \text{ cL}$$

VOLUME DU PRISME DROIT

Propriété : Pour calculer le volume d'un prisme droit, on multiplie l'aire de la base par la hauteur. Les unités de longueur, d'aire et de volume doivent se correspondre.

On a la relation

$$V = B \times h$$

V désigne le volume du prisme, B l'aire de la base de ce prisme, et h la hauteur de ce prisme.

Exemple : Aire du triangle de base de ce prisme :

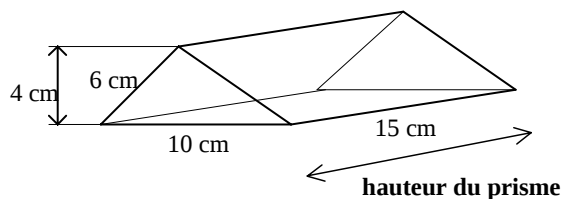
$$\frac{10 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}}{2} = 20 \text{ cm}^2.$$

Volume de ce prisme :

$$20 \text{ cm}^2 \times 15 \text{ cm} = 300 \text{ cm}^3$$

Les unités se correspondent bien : longueurs en cm,

aire en cm² et volume en cm³.



VOLUME DU CYLINDRE

Propriété : Pour calculer le volume d'un cylindre, on multiplie l'aire de la base ($\pi \times R^2$) par la hauteur. Les unités de longueur, d'aire et de volume doivent se correspondre.

On a la relation

$$V = B \times h = \pi \times R^2 \times h$$

V désigne le volume du cylindre, B l'aire de la base de ce cylindre, R le rayon de ce cylindre, et h la hauteur de ce cylindre.

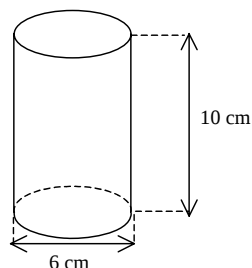
Exemple : Le diamètre de ce cylindre mesure 6 cm, son rayon mesure 3 cm.

Volume de ce cylindre :

$$\pi \times 3^2 \text{ cm}^2 \times 10 \text{ cm} = 90 \times \pi \text{ cm}^3.$$

Si on choisit 3 comme valeur approchée de π , le volume de ce cylindre est environ égal à 270 cm³.

Si on choisit 3,14 comme valeur approchée de π , le volume de ce cylindre est environ égal à 282,6 cm³.



POINTS DE REPÈRE / MÉTHODES

Règles de la perspective parallèle

- 1) Les droites parallèles dans l'espace sont représentées par des droites parallèles sur le dessin.
- 2) Des points alignés sur un objet sont représentés alignés sur le dessin.
- 3) Un rapport de longueurs sur une même droite ou sur des droites parallèles de l'espace est conservé sur le dessin.

Exemples : Si un point est le milieu d'une arête sur l'objet, on le représente sur le dessin au milieu de l'arête.

Si un point est placé au tiers d'une arête sur l'objet, on le représente sur le dessin au tiers de l'arête.

Deux segments parallèles de même longueur sur l'objet sont représentés sur le dessin parallèles et de même longueur.

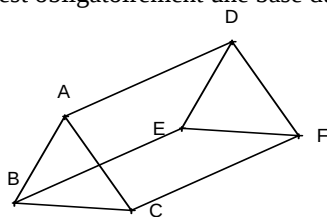
Attention : Deux segments non parallèles et de même longueur sur le solide ne sont pas forcément de même longueur sur le dessin en perspective. Lorsqu'on ne se situe pas dans le plan de face, les angles sont déformés et les longueurs sont modifiées.

Reconnaître les bases et les faces latérales d'un prisme droit sur un dessin en perspective parallèle

Les faces latérales d'un prisme droit sont des rectangles : elles sont donc représentées sous forme de parallélogrammes sur le dessin en perspective.

1^{er} cas

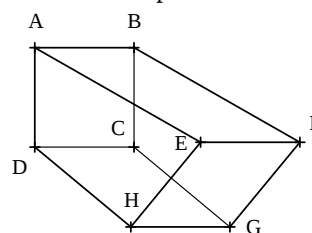
Une des faces dessinées n'est pas un quadrilatère : cette face est obligatoirement une base du prisme.



Le triangle ABC est une base du prisme.

2^{ème} cas

Toutes les faces dessinées sont des quadrilatères et une face n'est pas un parallélogramme : cette face est obligatoirement une base du prisme.

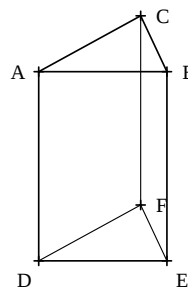


Le quadrilatère AEHD est une base du prisme.

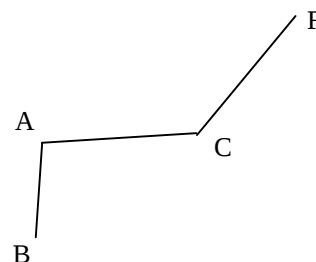
Compléter une représentation en perspective d'un solide à partir d'une vue donnée en perspective parallèle

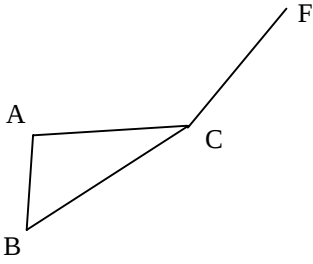
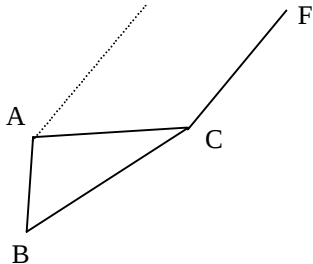
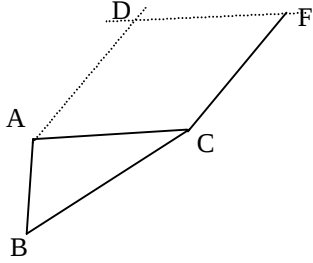
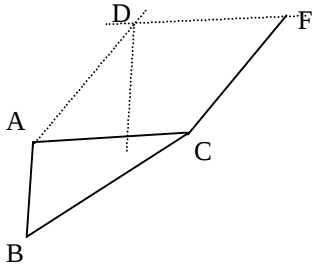
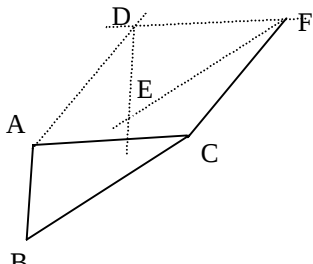
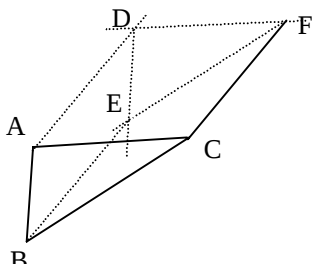
On considère le prisme droit représenté en perspective ci-contre.

Une des faces latérales est vue de face.



Compléter la représentation en perspective ci-contre de ce même prisme, une base étant vue de face.



1) Colorier d'une même couleur les arêtes parallèles sur le dessin de départ. 2) ABC est une base triangulaire dont on connaît deux côtés. Compléter le triangle.	
3) Les arêtes [AD] et [CF] sont parallèles. Tracer la parallèle à (CF) passant par A.	
4) Les arêtes [DF] et [AC] sont parallèles. Tracer la parallèle à (AC) passant par F. On obtient le sommet D.	
5) Repérer les arêtes dessinées, leurs noms et leurs couleurs. 6) Les arêtes [AB] et [DE] sont parallèles. Tracer la parallèle à (AB) passant par D.	
7) Les arêtes [BC] et [EF] sont parallèles. Tracer la parallèle à (BC) passant par F. On obtient E.	
8) Tracer [BE].	

EXERCICES

VOCABULAIRE ET PERSPECTIVE

De la représentation en perspective à la langue naturelle

Les exercices 1 à 5 proposent un changement de registre de la représentation en perspective à la langue naturelle. La recherche et la description de la nature de la base dans des cas variés (notamment lorsque le prisme n'est pas posé sur une de ses bases) permettent une meilleure représentation mentale du prisme droit.

1. a) On a représenté ci-contre les parties visibles d'un prisme droit.

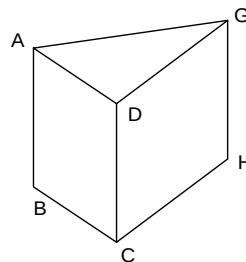
Compléter les phrases suivantes avec des mots choisis parmi : arête, sommet, face latérale, base.

Le quadrilatère DGHC est

Le triangle ADG est

Le segment [CH] est

Le point G est



- b) Combien ce prisme droit a-t-il de bases en réalité ?

- c) Combien ce prisme droit a-t-il de faces latérales en réalité ?

2. a) Écrire un prisme droit :

– ses bases : combien en a-t-il ? Comment sont-elles ?

– les autres faces : quelle est leur nature ? Comment les appelle-t-on ?

- b) Le dessin ci-contre représente un prisme droit.

- c) Compléter les phrases suivantes avec un des mots : arête, sommet, face latérale, base (et un article).

L'hexagone ABCDEF est

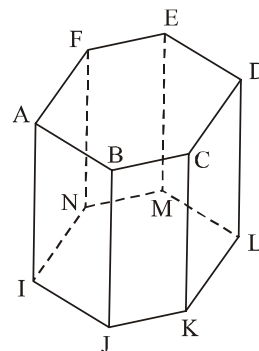
Le segment [KL] est

Le quadrilatère ABJI est

Le point D est

- d) Nommer deux arêtes perpendiculaires à [DC] :

- e) Nommer trois arêtes parallèles à [CK] :

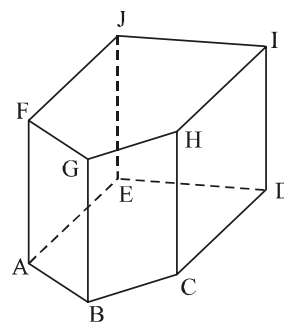


3. Le dessin ci-contre représente un prisme droit.

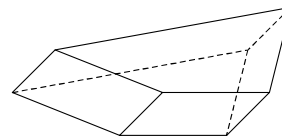
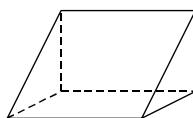
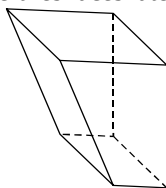
- a) Indiquer le nombre de sommets de ce prisme droit, le nombre d'arêtes et le nombre de faces.

- b) Nommer deux arêtes perpendiculaires à [FG].

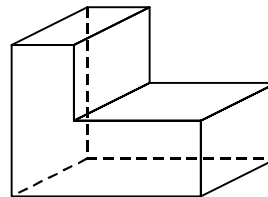
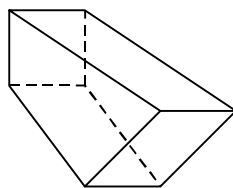
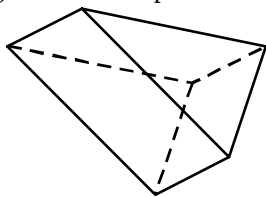
- c) Nommer trois arêtes parallèles à [HC].



4. a) Voici des représentations de prismes droits. Sur chacune d'elles, colorier en rouge la base visible, en vert les faces latérales visibles et en bleu la hauteur.



- b) Décrire les prismes suivants en précisant la nature de leur base.



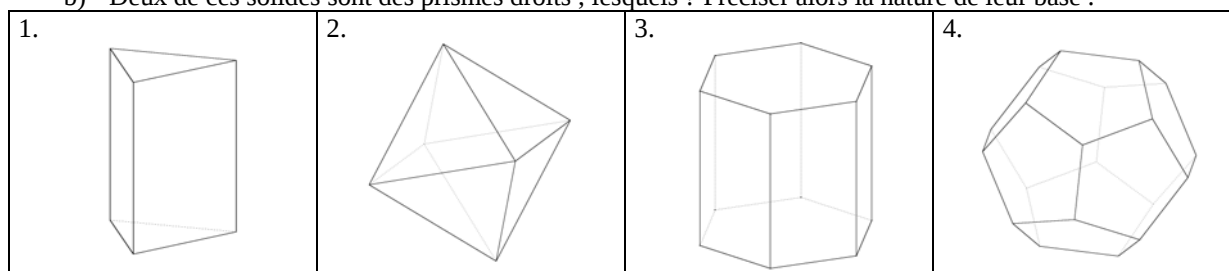
5. a) Dessiner, à main levée, en perspective parallèle un prisme droit à base triangulaire, un prisme droit à base rectangulaire, puis un prisme droit dont la base est un pentagone.
b) Recopier et compléter le tableau suivant :

Nature de la base	Nombre de côtés de la base	Nombre d'arêtes	Nombre de faces	Nombre de sommets du prisme	Nombre de rectangles du patron
triangle	3				

- c) Pour un prisme ayant pour base un polygone à 12 côtés, peut-on prévoir le nombre d'arêtes, le nombre total de faces, le nombre de sommets et le nombre de faces rectangulaires ?

Dans l'exercice suivant, du fait de la perte d'informations due à la représentation en perspective, on doit préciser que deux des solides sont des prismes droits.

6. a) Donner le nombre total de faces de chacun des quatre solides ci-dessous.
b) Deux de ces solides sont des prismes droits ; lesquels ? Préciser alors la nature de leur base .



De la langue naturelle à la représentation en perspective

Dans l'exercice 7, on effectue le changement de registre dans l'autre sens. Une utilisation judicieuse du quadrillage du cahier est un bon outil pour accélérer la compréhension de la perspective.

7. Tracer à main levée une représentation en perspective des prismes droits suivants :
- un prisme droit à base triangulaire, une face rectangulaire vue de face ;
 - un prisme droit à base triangulaire, une base vue de face ;
 - un prisme droit qui a pour base un parallélogramme, une base vue de face ;
 - un prisme droit qui a pour base un trapèze, une base vue de face ;
 - un prisme droit qui a pour base un pentagone, une face rectangulaire vue de face ;
 - un prisme droit qui a pour base un hexagone, une face rectangulaire vue de face.

PATRONS DE PRISMES DROITS

Pour chacun des exercices abordés dans cette partie, l'élève pourra réaliser le patron, le découper et réaliser le solide demandé pour vérifier. Les résultats obtenus sont d'autant plus motivants pour l'élève qu'ils sont tangibles.

Dans l'exercice 8, pour faciliter le tracé du patron, on pourra reporter les dimensions données dans le texte sur un schéma. L'élève est amené à d'abord repérer les bases triangulaires puis à discerner les faces latérales. Il doit alors se rappeler qu'elles sont rectangulaires, par définition du prisme, ce qu'il ne peut pas lire sur un schéma en perspective.

Dans la deuxième question, lorsque l'élève assemble le patron obtenu, il constate ses éventuelles erreurs et est amené à s'auto corriger. Ce travail critique autonome est très formateur, il voit la nécessité de raisonner (comme comprendre quels sont les segments qui vont se superposer...).

De la représentation en perspective au patron.

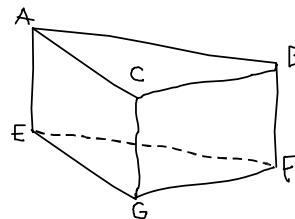
8. Le dessin à main levée ci-contre représente un prisme droit.

1) Tracer avec précision un patron de ce prisme, sachant que :

$$AB = 2,5 \text{ cm} ; \quad BC = 2 \text{ cm} ;$$

$$AC = 3 \text{ cm} ; \quad AE = 1,5 \text{ cm}.$$

2) Assembler le patron obtenu et vérifier qu'on obtient bien un prisme.

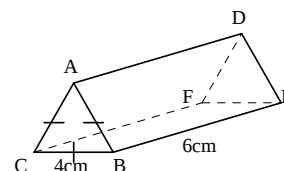


Comme dans l'exercice précédent, on travaille sur un prisme à base triangulaire, mais ici, le prisme est n'est pas « posé » sur sa base.

9. On a représenté ci-contre un prisme droit en perspective.

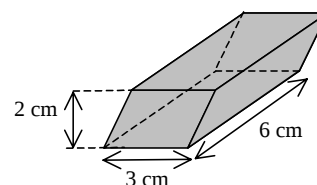
a) Faire un patron de ce solide.

b) Calculer l'aire latérale de ce prisme.



Dans cet exercice, on réinvestit la construction d'un parallélogramme et le calcul de son aire.

10. On a représenté ci-contre un prisme droit en perspective. Faire un patron de ce solide, sachant que sa base est un parallélogramme.

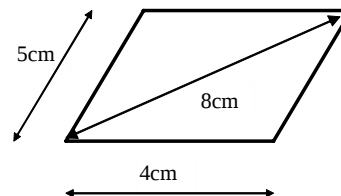


Dans les quatre exercices suivants, on pourra encourager l'élève à produire une représentation en perspective à main levée du solide pour faciliter le travail. Ainsi, on passera du registre de la langue naturelle à celui de la représentation en perspective, pour aboutir au registre du patron.

De la langue naturelle au patron

11. a) Dessiner en grandeur réelle le patron d'un prisme droit dont la hauteur mesure 3,5 cm et dont la base est le parallélogramme représenté ci-contre.

b) Calculer l'aire latérale de ce prisme.



12. Construire le patron d'un prisme droit sachant que sa hauteur est de 5 cm et que chaque base est un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit mesurent 4,5 cm.

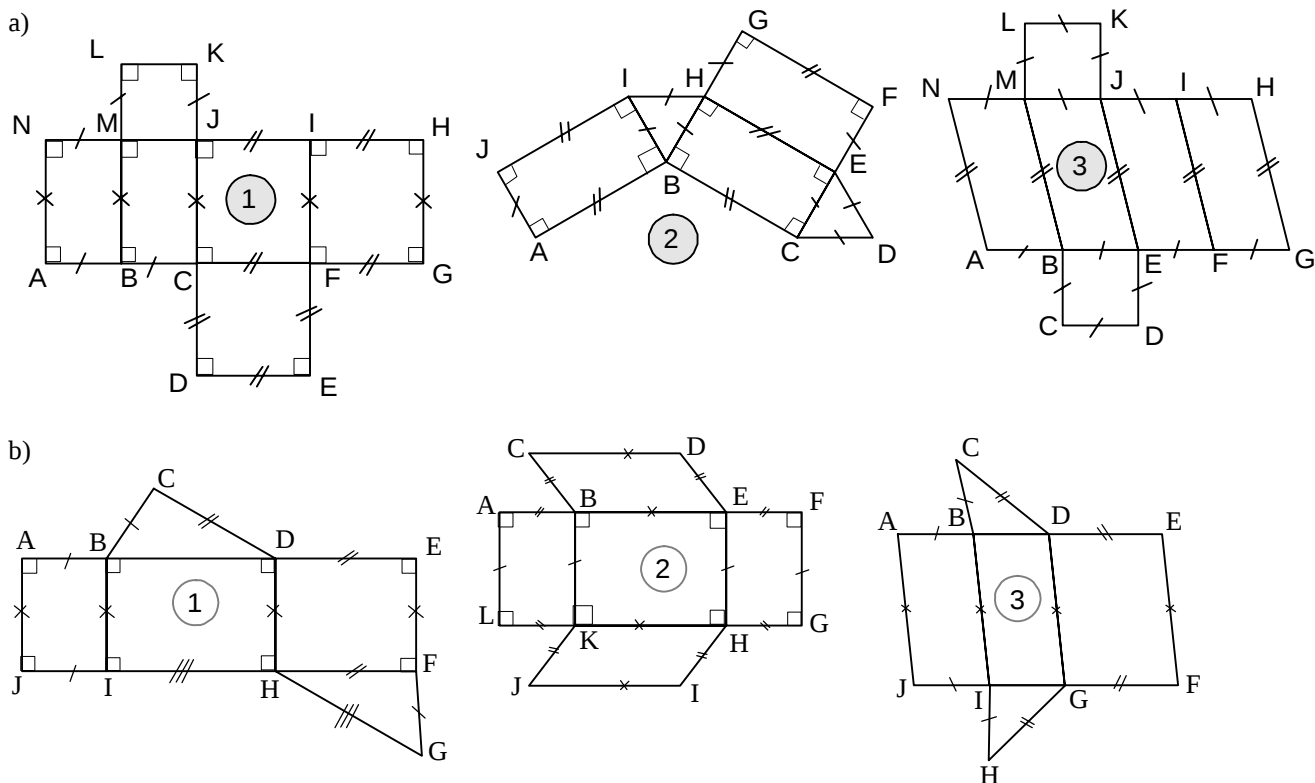
13. Tracer le patron d'un prisme droit dont chaque base est un losange de côté 3 cm et dont la hauteur mesure 4 cm.

Dans l'exercice 14, pour valider un patron d'un prisme, l'élève doit mobiliser de plusieurs connaissances, en effet, il doit vérifier

- l'existence de deux bases superposables,
- le nombre de faces latérales qui doivent être des rectangles,
- la cohérence des dimensions.

14. Pour chacune des trois figures ci-dessous,

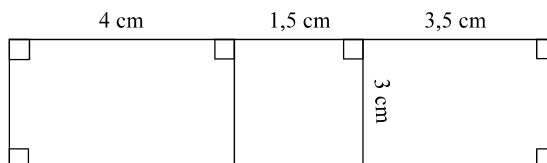
- si c'est le patron d'un prisme droit, indiquer ses bases et ses faces latérales.
- sinon, dire pourquoi ce n'est pas le patron d'un prisme droit.



D'une partie du patron au patron entier.

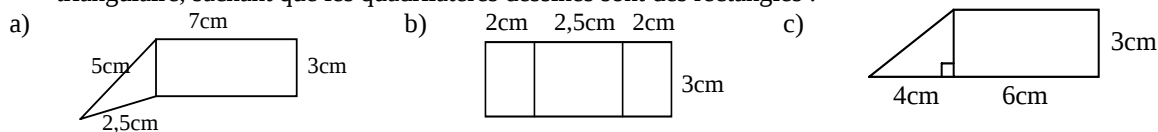
Les cinq prochains exercices sont dans l'esprit de l'activité 1.

15. Les trois rectangles ci-contre sont les faces latérales du patron d'un prisme droit. Dessiner en vraie grandeur une des bases de ce prisme droit.

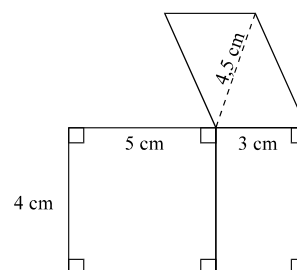


Pour le cas b, un aller- retour entre le texte et le schéma est nécessaire, en effet la donnée « un prisme à base triangulaire » détermine entièrement le solide qui sans cette donnée aurait pu être un pavé droit.

16. Reproduire en vraie grandeur, puis compléter les figures pour obtenir le patron d'un prisme droit à base triangulaire, sachant que les quadrilatères dessinés sont des rectangles :



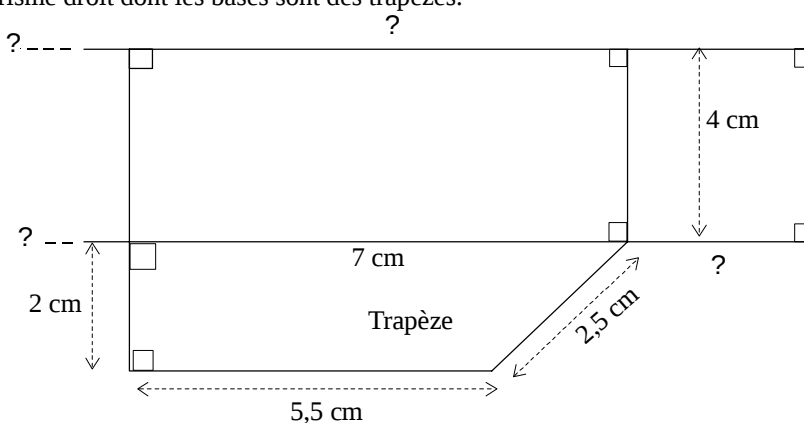
17. Reproduire en vraie grandeur et compléter la figure ci-contre pour obtenir le patron d'un prisme, sachant que sa base est un parallélogramme. Attention : le croquis ci-contre n'est pas en vraie grandeur.



Dans cet exercice, on réinvestit la définition d'un trapèze.

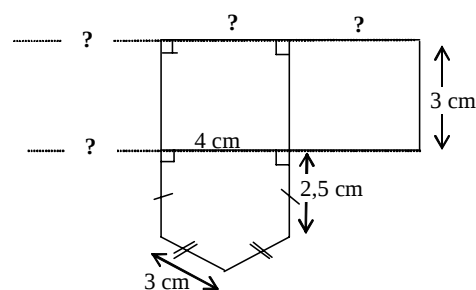
18. Voici un patron incomplet d'un prisme droit dont les bases sont des trapèzes.

- Combien ce prisme a-t-il de faces latérales en réalité ?
- Reproduire ce dessin en vraie grandeur et compléter le patron de ce prisme droit.



19. Voici un patron incomplet d'un prisme droit dont les bases sont des pentagones (le schéma n'est pas à l'échelle).

- Combien ce prisme a-t-il de faces latérales en réalité ?
- Construire en vraie grandeur le patron complet de ce prisme droit.



PERSPECTIVES DE PRISMES DROITS

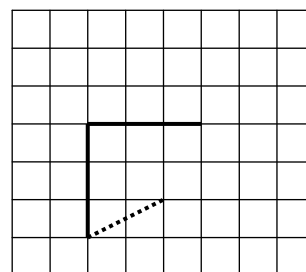
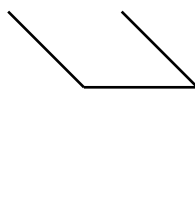
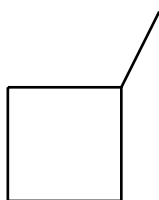
Dans les exercices 20 à 24, il s'agit de compléter des représentations en perspective de prismes droits.

L'exercice 20 permet de revoir des représentations du cube. Les quatre exercices suivants sont consacrés aux prismes.

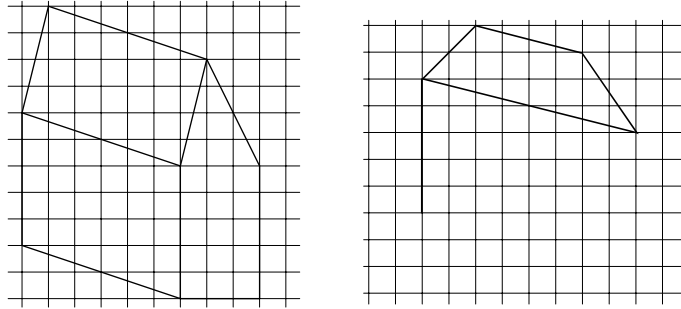
L'objectif est d'entraîner les élèves au respect des règles de dessin en perspective parallèle, en particulier la conservation du parallélisme et des longueurs sur des arêtes parallèles. On pourra privilégier soit le repérage des bases, soit celui des hauteurs.

La présence de maquettes, mises à disposition, permet aux élèves de les manipuler en particulier de les tourner, de repérer par exemple les arêtes parallèles sur l'objet et de faire le lien avec la représentation qu'ils cherchent à compléter.

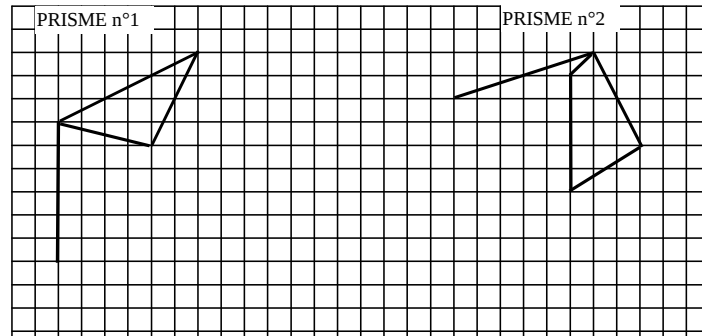
20. On a commencé des vues en perspective d'un cube. Compléter ces vues. Dessiner en pointillés les arêtes cachées.



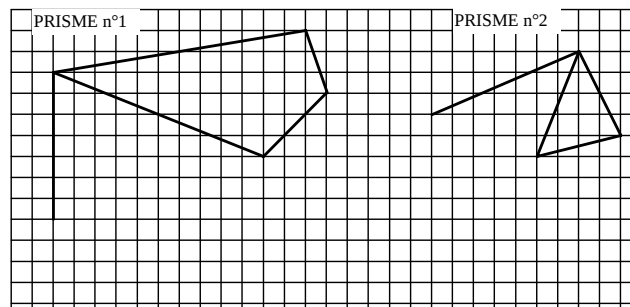
21. On a commencé les dessins en perspective de deux prismes droits. Compléter ces dessins ; représenter en pointillés les arêtes cachées.



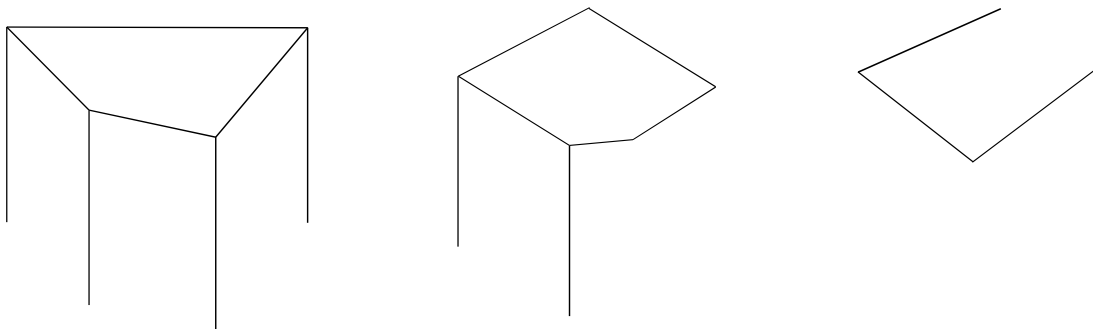
22. On a commencé les dessins en perspective de deux prismes droits. Le prisme n° 1 a pour base un triangle, et le prisme n° 2 a pour base un quadrilatère. Compléter ces dessins.



23. On a commencé les dessins en perspective des deux prismes ci-contre. Le prisme n°1 a pour base un quadrilatère, et le prisme n°2 a pour base un triangle. Compléter ces dessins.



24. Terminer les dessins en perspective des prismes droits ci-dessous :



Dans les exercices 25 à 27, on demande à l'élève de représenter un même prisme sous des points de vue différents.

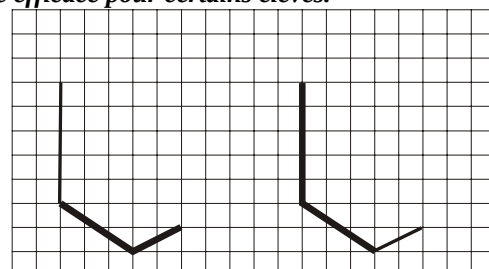
Dans l'exercice 27, une aide possible est de conseiller de compléter d'abord les bases.

Dans les exercices suivants, la présence des noms des sommets permet de se repérer et de compléter une base ou de tracer des arêtes latérales.

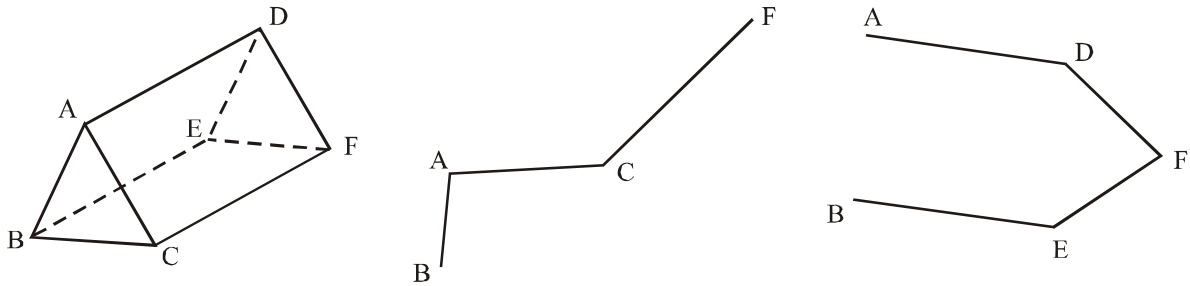
Des allers-retours avec une maquette peuvent constituer une aide efficace pour certains élèves.

25. Terminer les dessins en perspective de ces prismes droits à base triangulaire, sachant que les segments épais sont des arêtes d'une des bases.

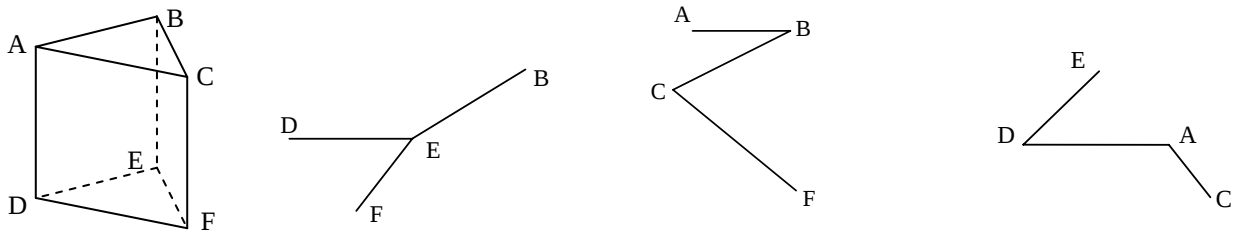
Tracer les arêtes cachées en pointillés.



26. Voici trois vues en perspective parallèle d'un même prisme droit à base triangulaire. Compléter les vues en perspective incomplètes. Tracer les arêtes cachées en pointillés.

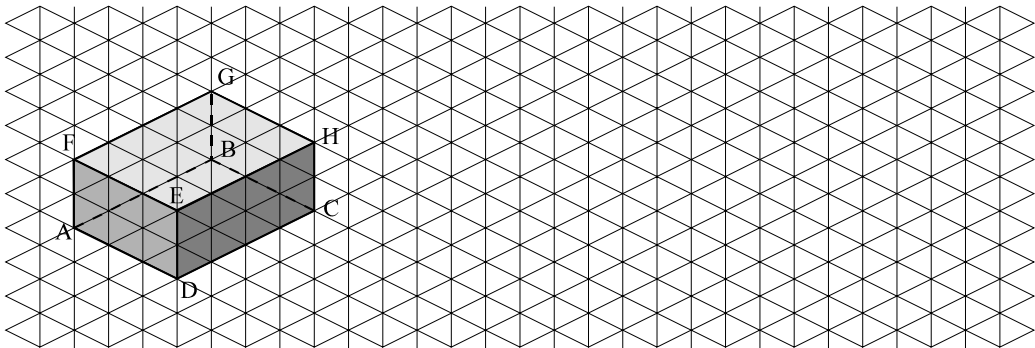


27. Voici quatre vues en perspective parallèle d'un même prisme droit à base triangulaire. Compléter les vues en perspective incomplètes. Tracer les arêtes cachées en pointillés.

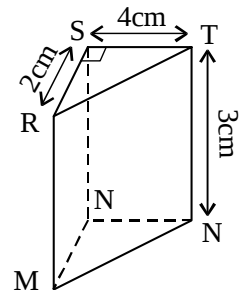


Les exercices 28 et 29 laissent davantage d'initiative à l'élève, puisque les figures ne sont pas commencées. Dans l'exercice 28, le réseau triangulaire permet de tracer facilement les arêtes en respectant les proportions. Dans l'exercice 29, la face RST, étant la face avant, doit être représentée en vraie grandeur.

28. Un parallélépipède ABCDEFGH repose ici sur sa face ABCD. Le dessiner reposant sur ADEF, puis sur CDEH.



29. Dessiner en perspective le prisme représenté ci-contre, de telle sorte que la face RST soit la face avant.



L'exercice 30 permet de revenir, à la fois, sur la définition d'un prisme droit et sur les règles de dessin en perspective.

30. On a représenté ci-contre deux solides en perspective cavalière. Les pointillés ont été volontairement omis dans la figure 1. Expliquer pourquoi ce ne sont pas des représentations de prismes droits.

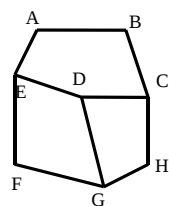


FIGURE 1

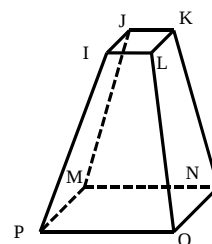


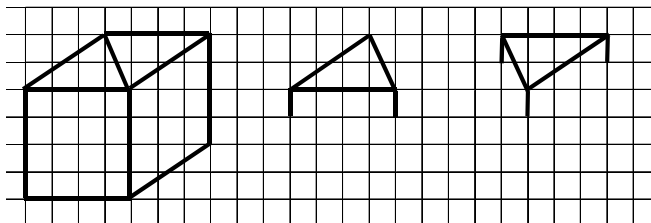
FIGURE 2

Les exercices 31 à 34 sont inspirés d'un travail de François Drouin, professeur de mathématiques dans l'académie de Nancy-Metz. Ils visent à faire acquérir une meilleure vision du cube à l'aide de découpes diverses de celui-ci.

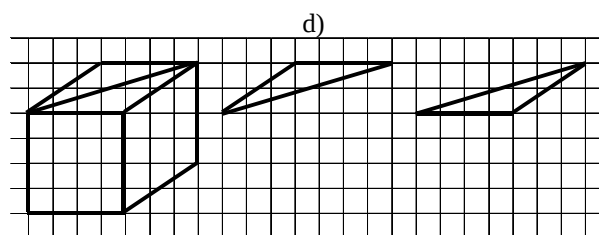
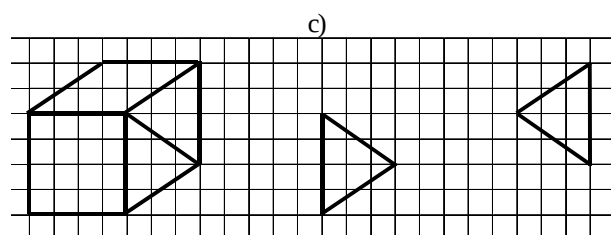
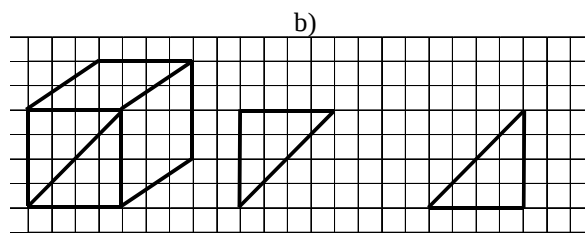
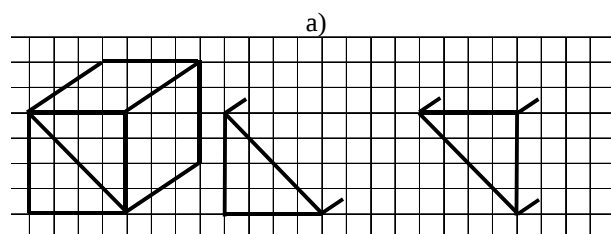
Dans les exercices 31 et 32, comme dans les exercices 33 et 34, le même prisme est alors vu sous différents angles. On pourra, dans un premier temps, présenter deux découpes réelles d'un cube effectivement scié, afin d'assurer une bonne représentation de la réalité.

31. J'ai pris un cube de 5 cm d'arête, je l'ai scié et j'ai séparé les deux morceaux. Ces deux morceaux sont des prismes droits.

- Quelle est la nature de leurs bases respectives ?
- Faire un patron de ces deux prismes et les réaliser. Vérifier « l'assemblage ».
- Compléter les dessins en perspective des morceaux séparés.
- Dans les trois dessins, tracer en rouge les arêtes cachées.

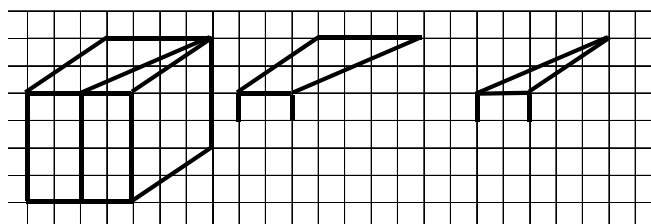


32. J'ai pris un cube, je l'ai scié et j'ai séparé les deux morceaux. Ces deux morceaux sont des prismes droits. Reprendre les questions c) et d) de l'exercice précédent.

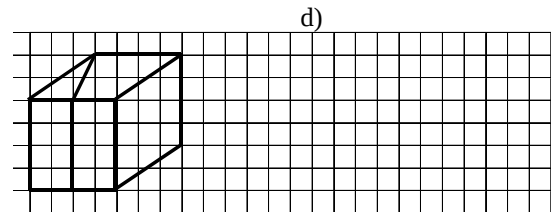
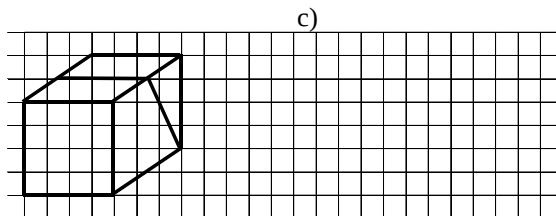
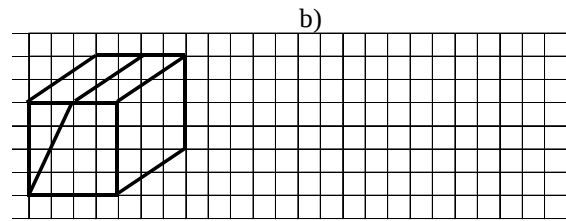
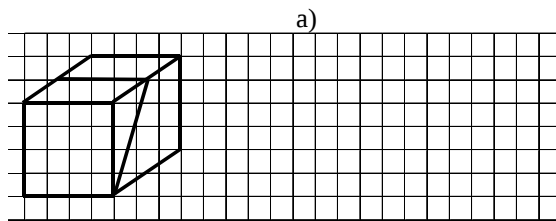


33. J'ai pris un cube de 5 cm d'arête, je l'ai scié et j'ai séparé les deux morceaux. Ces deux morceaux sont des prismes droits.

- Quelle est la nature de leurs bases respectives ?
- Faire un patron de ces deux prismes et les réaliser. Vérifier « l'assemblage ».
- Compléter les dessins en perspective des morceaux séparés.
- Dans les trois dessins, tracer en rouge les arêtes cachées.



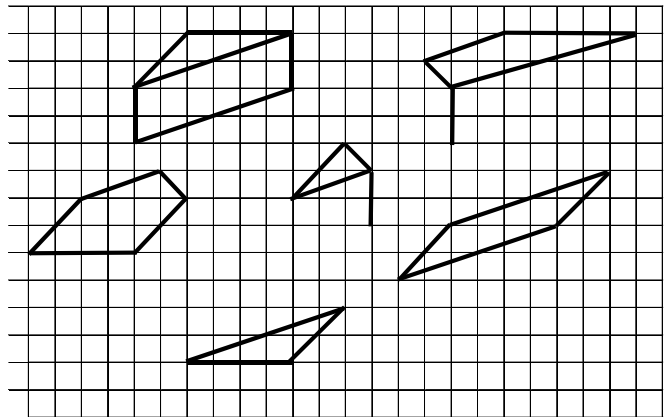
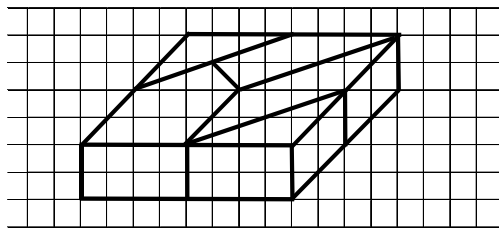
34. J'ai pris un cube, je l'ai scié et j'ai séparé les deux morceaux. Ces deux morceaux sont des prismes droits. Reprendre les questions c et d de l'exercice précédent.



Les exercices 35 et 36 sont des prolongements du travail précédent.

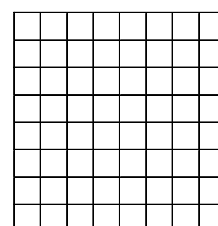
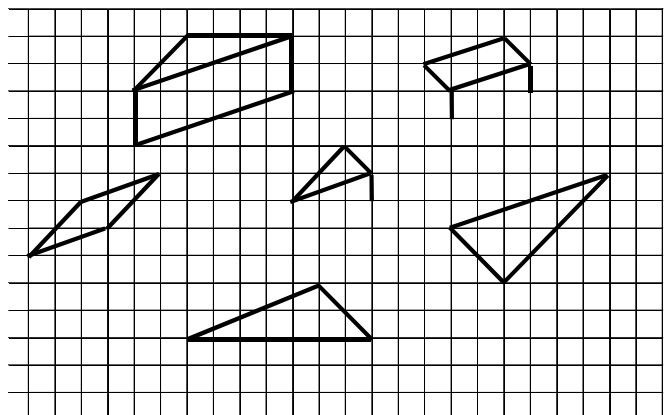
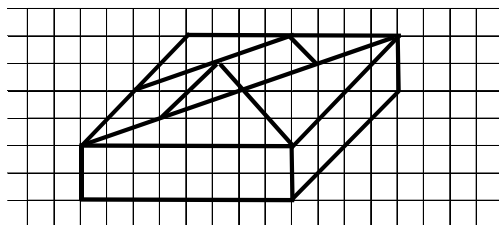
35. On a représenté ci-dessous un parallélépipède rectangle à base carrée. Ce parallélépipède, en bois, a été scié suivant les traces apparentes. On obtient ainsi cinq morceaux ayant chacun la forme d'un prisme droit.

- a) Les dessins en perspective de ces cinq morceaux ont été commencés ci-contre. Terminer ces dessins.
- b) Colorier d'une même couleur les faces qui ont même direction.



36. On a représenté ci-dessous un parallélépipède rectangle à base carrée. Ce parallélépipède, en bois, a été scié suivant les traces apparentes. On obtient ainsi sept morceaux ayant chacun la forme d'un prisme droit.

- a) Les dessins en perspective de ces cinq morceaux ont été commencés ci-contre. Terminer ces dessins.
- b) Colorier d'une même couleur les faces qui ont même direction.



Tracer dans le carré ci-contre les traits de scie faits dans le bois.

VISION DANS L'ESPACE

Les exercices suivants sont extraits de la brochure « Voir et raisonner : A la conquête de l'espace au collège », (1997), 53 p., GROUPE COLLÈGE de IREM de Strasbourg.

L'objectif des exercices 37, 38, 39 est de faire prendre conscience aux élèves qu'un même triangle se présente sous des apparences différentes suivant sa position dans le cube ou suivant le point de vue adopté pour représenter le cube.

Aussi, pour déterminer la nature d'un triangle tracé dans un cube, on ne pourra pas se fier aux apparences, mais une analyse précise de la position des côtés du triangle dans le cube sera nécessaire.

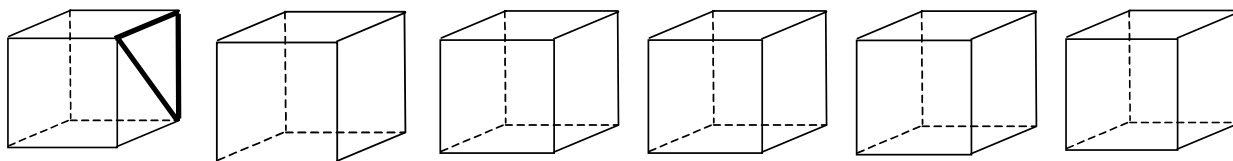
Pour ces trois exercices, il est souhaitable que chaque élève dispose d'un cube transparent de 5 cm d'arête par exemple et d'un feutre effaçable : il pourra ainsi tracer le triangle donné sur son cube, puis faire tourner le cube.

L'expression « triangles superposables » devra être explicitée par le professeur, en précisant notamment que de tels triangles ont des longueurs de côtés respectivement égales.

L'exercice 37 présente une première situation. Le recours au cube transparent n'est pas forcément nécessaire pour tous les élèves, mais tracer le triangle sur le cube transparent, puis le faire tourner, constitue une aide précieuse pour certains.

On demande à l'élève d'expliciter sa démarche. La mise en commun permet de préciser que ce triangle, quelle que soit sa position sur le cube, a deux côtés qui sont des arêtes consécutives du cube et le troisième côté qui est une diagonale d'une face du cube. On pourra alors préciser sa nature et faire observer qu'il se présente sous des apparences très différentes sur les six cubes de l'exercice.

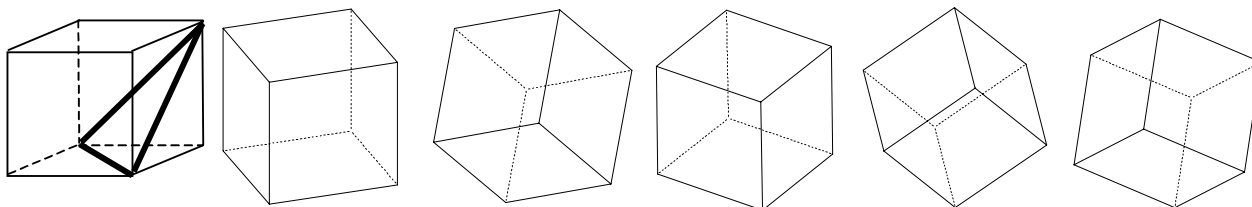
37. On a représenté ci-dessous un cube en perspective, avec le dessin d'un triangle. Sur chacun des cinq cubes suivants, dessiner un triangle superposable au triangle du premier cube. Utiliser sur chaque cube une autre face. Expliquer comment procéder pour dessiner un tel triangle.



L'exercice 38 présente une deuxième situation. Le recours au cube transparent est ici décisif : pour tracer le triangle sur le cube, l'élève est amené à observer la position de chacun de ses côtés sur le cube. Il entre ainsi dans l'analyse de la situation. Le constat que chaque côté du triangle est une diagonale d'une face du cube permet alors de terminer l'exercice.

Dans un deuxième temps, on pourra comme précédemment préciser la nature de ce triangle.

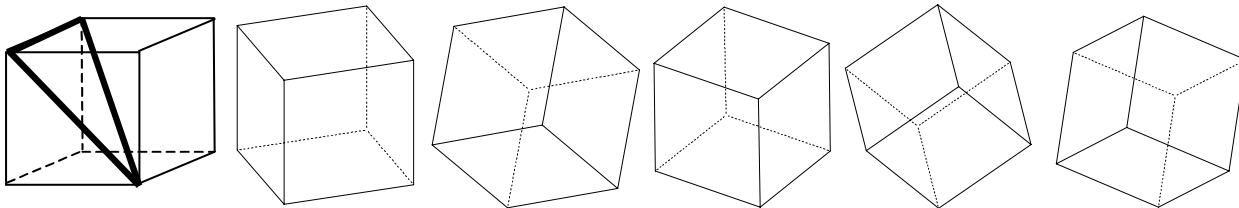
38. On a représenté ci-dessous un cube en perspective, avec le dessin d'un triangle. Dessiner, sur chacun des cinq cubes suivants, un triangle superposable au triangle du premier cube. Expliquer comment procéder pour dessiner un tel triangle.



L'exercice 39 présente une troisième situation. Les élèves s'aperçoivent rapidement qu'il est impossible de dessiner l'un des côtés du triangle sur le cube transparent. On les invite alors à analyser la position de chaque côté du triangle par rapport au cube. Cette analyse, clairement énoncée, permet de justifier que les triangles tracés sont bien superposables. C'est l'occasion de différencier « diagonale d'une face du cube » et « diagonale du cube ».

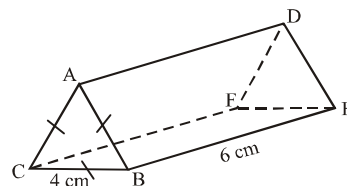
La question de la nature du triangle est plus délicate ici, mais les élèves ont tous les éléments pour justifier qu'il n'est pas isocèle.

39. On représenté ci-dessous un cube en perspective, avec le dessin d'un triangle. Sur chacun des cinq cubes suivants, dessiner un triangle superposable au triangle dessiné sur le premier cube. Expliquer votre méthode.

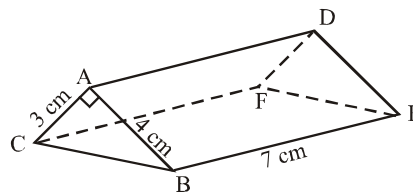


Dans les exercices 40 à 42, on amène les élèves à passer de la représentation en perspective à une représentation plane extraite du solide.

40. On a représenté ci-contre un prisme droit en perspective. Dessiner en vraie grandeur le triangle ABC, les quadrilatères ABED, BCFE, ADFC, les triangles ABD, CBF, BEF et AFB.



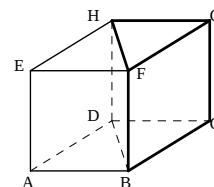
41. On a représenté ci-contre un prisme droit en perspective. Dessiner en vraie grandeur le triangle ABC, les quadrilatères ABED, BCFE, ADFC, les triangles BEA, BCF, BFD et BAF.



Dans l'exercice 42, on pourra utiliser un cube « articulé », qui peut être confectionné à partir de fil électrique, par exemple. On pourra tenter une généralisation permettant de prendre en compte les particularités perceptives de deux types de triangles extraits du cube :

- ceux dont les trois côtés sont des diagonales de faces ;
- ceux dont un côté est une arête, un autre côté une diagonale de face.

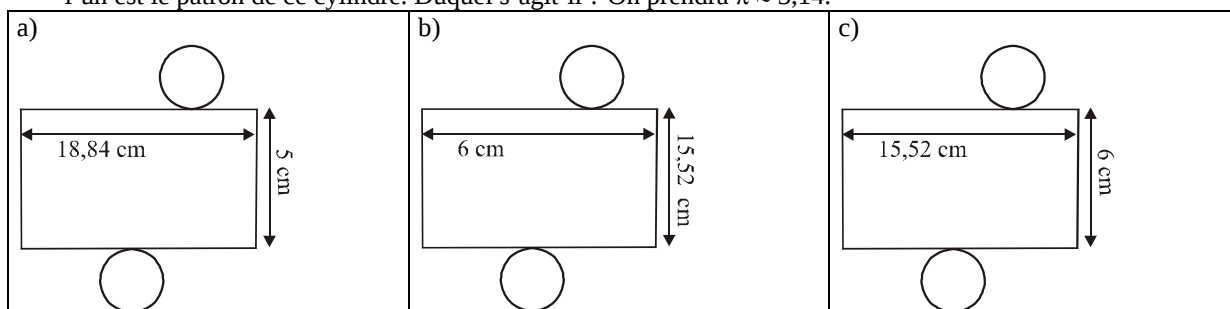
42. On a représenté ci-contre un cube de 5cm d'arête, en perspective.
- Dessiner en vraie grandeur les triangles ABD, ACG, HFB et BGE.
 - Dessiner en vraie grandeur le quadrilatère FHDB.



CYLINDRES DE RÉVOLUTION

L'exercice 43 demande à l'élève de différencier, dans un patron de cylindre de révolution, les côtés du rectangle associés à la hauteur et au diamètre du disque de base. Les calculs ne sont pas nécessaires, il suffit de repérer comme hauteur le côté sans disque.

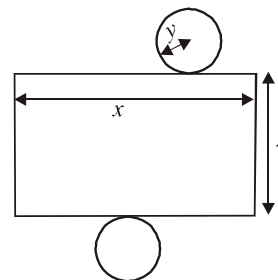
43. On considère un cylindre de révolution de 5cm de diamètre et de hauteur 6cm. Parmi les patrons suivants, l'un est le patron de ce cylindre. Duquel s'agit-il ? On prendra $\pi \approx 3,14$.



Les exercices 44 à 49 demandent à l'élève d'effectuer différents calculs donnant les dimensions du patron connaissant les dimensions du cylindre, ou inversement.

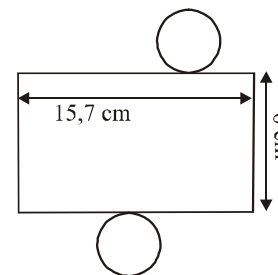
44. On a représenté ci-contre le patron d'un cylindre de révolution dont le diamètre de la base est de 6 cm et dont la hauteur mesure 5 cm.

Calculer les valeurs de x , y et z en précisant les calculs effectués. Les réponses seront données arrondies au centième près.



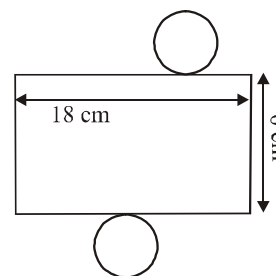
45. Ce dessin, composé d'un rectangle et de deux cercles, représente le patron d'un cylindre de révolution.

Calculer une valeur approchée du rayon de ce cylindre en choisissant 3,14 comme valeur approchée de π .



46. Ce dessin représente le patron d'un cylindre de révolution.

- Calculer le rayon de ce cylindre.
- Il existe un autre cylindre ayant la même surface latérale. Faire un schéma représentant son patron, indiquer les dimensions connues. Calculer le rayon de ce deuxième cylindre.



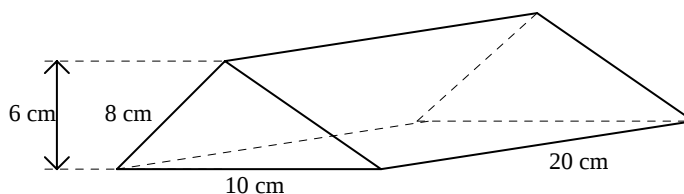
47. Un cylindre a une base de rayon 1,5 cm et pour hauteur 7 cm. Quelles sont les dimensions de la face latérale du patron de ce cylindre ?
48. Calculer l'aire latérale et l'aire totale d'un cylindre de révolution dont le rayon de la base mesure 6 cm et dont la hauteur mesure 4 cm. On arrondira les résultats au millièbre le plus proche.
49. L'aire latérale d'un cylindre mesure 125,6 cm² et sa hauteur 10 cm. Calculer le rayon de ce cylindre.

UNITÉS

Pratiquer régulièrement, en début d'heure, des conversions d'unités, dans les moments de calcul mental ou de calcul réfléchi, avec une prise en compte des erreurs, permet de réels progrès.

VOLUMES

50. Calculer le volume de ce prisme droit.

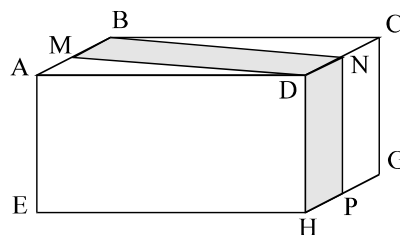


51. Il est tombé 3 mm de pluie sur une cour carrée de 10 mètres de côté. Calculer le volume d'eau, en m³ puis en litres.
52. Un cylindre de révolution a 2 cm de rayon et 5 cm de hauteur. Calculer le volume de ce cylindre.
53. Un cylindre contient 62,8 cL. Son rayon mesure 10 cm. Calculer sa hauteur.

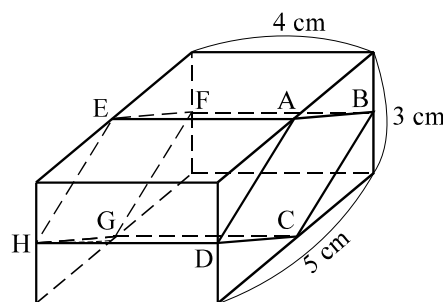
54. Un cube a 10 cm d'arête.
- Calculer son aire et son volume.
 - On augmente chaque arête de 10% de sa longueur. De quel pourcentage augmente son volume ?
55. On verse 1 litre et demi d'eau dans un vase cylindrique de 10 cm de diamètre et 30 cm de hauteur. Quelle sera la hauteur d'eau dans le vase ? Quelle quantité d'eau faut-il ajouter pour le remplir à ras bord ?
56. On a versé un litre d'eau dans une casserole cylindrique de 20 cm de diamètre. Calculer la hauteur d'eau dans cette casserole.

PROBLÈMES

57. ABCDEFGH est un pavé droit.
 $AB = 5$ cm ; $BC = 6$ cm ; $AE = 3$ cm..
 M, N, P sont les milieux respectifs de [AB], [DC] et [HG].
 En coupant le pavé suivant les plans (MDH) et (BNP), on obtient un prisme dont MBND est une base.



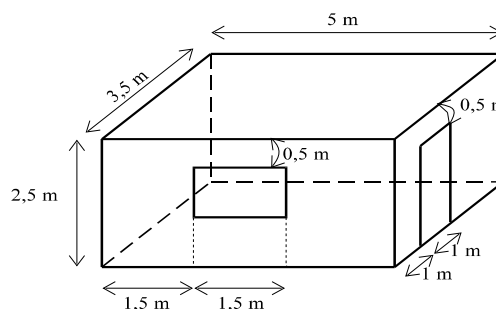
- Dessiner le quadrilatère MBND en vraie grandeur.
 - Quelle est la nature de MBND ? Justifier.
 - Réaliser un patron du prisme de base MBND.
 - Calculer l'aire et le volume du prisme de base MBND.
58. A, B, C, D, E, F, G, H sont des milieux d'arêtes dans le pavé droit ci-contre (voir dessin).
- Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
 - Dessiner en vraie grandeur le quadrilatère ADHE.
 - Calculer l'aire et le volume du prisme de bases ABCD et EFGH.



59. Une pièce a la forme d'un pavé droit. La surface au sol est de 30 m^2 et la hauteur est de 2,40 m. Quel est le volume d'air total qu'elle contient ?
60. Sur une « brique » de jus de fruits, on indique qu'elle contient un volume de 1 L.
 Vérifier cette affirmation en prenant les mesures sur un tel emballage de votre choix. On assimilera la brique considérée à un pavé.

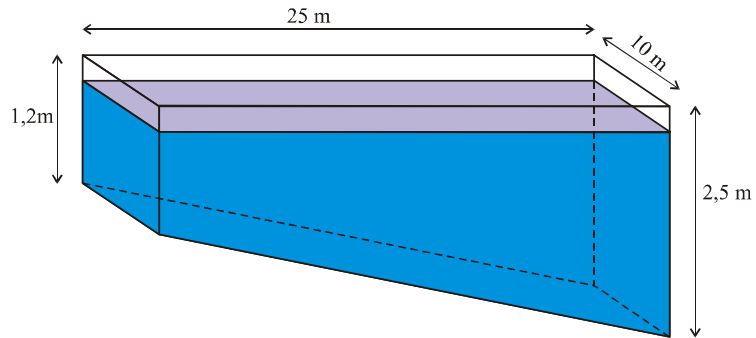


61. On veut tapisser la pièce suivante avec du papier peint sans raccord.
 Chaque rouleau de papier fait 50 cm de large et 10 m de long.
- Combien faudra-t-il de rouleaux pour tapisser cette pièce ?
 - Quelle sera la dépense sachant que chaque rouleau coûte 17,50 € et qu'il faut 13 € de colle ?



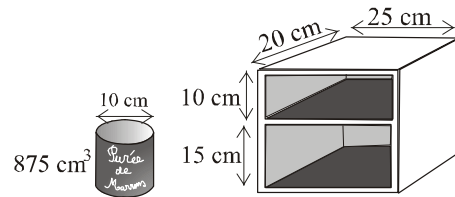
62. La piscine

Calculer le volume d'eau nécessaire pour remplir la piscine jusqu'à 20 cm du bord supérieur.



63. Une casserole a une capacité de 2 litres et une hauteur de 8 cm. Un couvercle de 9 cm de rayon peut-il la recouvrir ? Justifier la réponse

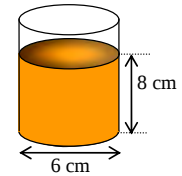
64. Peut-on ranger cette boîte de conserve sur un des rayons de cette étagère (sans la coucher) ? Justifier la réponse.



65. Des glaçons ont la forme d'un cube de 2,5 cm de côté.

a) Calculer le volume d'un glaçon.

b) On verse deux glaçons dans un verre cylindrique contenant du liquide (voir ci-contre). Sachant que la glace fondue occupe un volume 1,1 fois moins grand que la glace, de quelle hauteur le niveau du liquide va-t-il augmenter dans le verre ?



BIBLIOGRAPHIE

Gilles BOURDENET (2007), Le calcul mental, *Activités Mathématiques et Scientifiques*, **61**, 5–32.

Gérard COMBIER, Jean-Claude GUILLAUME, André PRESSIAT (1996), *Les débuts de l’algèbre au collège*, INRP.

Document d’accompagnement des programmes de l’école primaire : le calcul mental.

Document d’accompagnement des programmes de l’école primaire : articulation école-collège.

Documents d’accompagnement des programmes du collège : la proportionnalité, du numérique au littéral, les nombres au collège.

Équipe ERMEL (1993), *Apprentissages mathématiques en cinquième*, INRP.

Jean-Luc GASSER (2003), Évolution de la notion de nombre au collège, *Repères*, **50**, 59–103.

GROUPE COLLÈGE (1997), *Voir et raisonner : à la conquête de l’espace au collège*, **S 172**, IREM de Strasbourg.

GROUPE COLLÈGE de Mulhouse (1996), *La proportionnalité au collège*, **S 171**, IREM de Strasbourg.

GROUPE « LIVRE » (2002), *Ressources pour le programme de sixième*, **S 185**, IREM de Strasbourg.

GROUPE MATH-FRANÇAIS (1996), *Problèmes de mise en équations : ces charades dont la solution est un système à deux inconnues*, **S 165**, IREM de Strasbourg.

INRP et ADIREM (2003), *Faire des mathématiques en classe ?*, Didactique et analyse de pratiques enseignantes, ouvrage coordonné par Jacques COLOMB, Jacques DOUAIRE et Robert NOIRFALISE.

INSPECTION GÉNÉRALE (2004), *le calcul au collège*, Rapport du groupe mathématique.

Rémi JOST (2004), Le calcul numérique en question, *bulletin APMEP*, **452**, 330–338.

Rapport d’étape sur le calcul par la COMMISSION DE RÉFLEXION SUR L’ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES.

Joëlle VLASSIS et Isabelle DEMONTY (2002), *L’algèbre par des situations problèmes au début du collège* », Éditions De Boeck.

