CARL WINSLØW

LES PROBLÈMES DE TRANSITION DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE ET LA COMPLÉMENTARITÉ DES APPROCHES DIVERSES DE LA DIDACTIQUE

Abstract. Transition Problems in Teaching of Analysis and Complementary Didactical Approaches
This article has for aims to precise the nature of obstacles for learning Analysis at University, and to make proposals for teaching in order to overcome these obstacles. Various approaches are considered: semiotic representations, anthropologic theory of didactics, and theory of didactical situations. Taking account of distinct phenomena, they seem us complementary and allow a plurality of uses: analyzing tasks, locally and globally organizing mathematics, structuring milieu for autonomous learning.

Résumé. Cet article cherche à préciser, dans le cas de l'analyse, la nature des obstacles rencontrés par les étudiants en cours d'études supérieures scientifiques et à étudier des propositions d'enseignement pour faciliter le franchissement de ces obstacles. Plusieurs approches sont considérées : les représentations sémiotiques, la théorie anthropologique du didactique, la théorie des situations didactiques. Prenant en compte des phénomènes différents, elles nous paraissent complémentaires, et permettent une pluralité d'exploitations : analyse de tâches, organisations mathématiques locales et plus globales, structuration de milieu en vue d'apprentissages autonomes.

Mots-clés. Enseignement supérieur, analyse, approche cognitive, registres sémiotiques, théorie anthropologique du didactique, théorie des situations.

---

1. Introduction

L'étudiant de mathématiques doit vivre, en quelques années, plusieurs transitions par rapport à l'activité mathématique dans laquelle il doit s'engager. Pour des raisons institutionnelles on s'intéresse surtout aux difficultés liées au passage du secondaire vers les filières scientifiques de l'université, notamment dans les grands cours d'entrée (DEUG en France). Dans les deux contextes, l'analyse (l'étude des propriétés de fonctions réelles liées grosso modo aux processus de limite) semble porteur de bien des obstacles par sa technicité, sa complexité et le fait qu'elle reste, en tant que corpus de savoir, sur la quasi-totalité du savoir scolaire. Parmi les enseignants universitaires, il y a un « sentiment répandu » (voir par ex. Burn et al., p. 123) que l'étudiant doit, effectivement, accomplir des « sauts cognitifs » dans le

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 12, p. 189 - 204.

parcours à partir de l'analyse telle qu'elle se présente au lycée vers l'analyse abstraite étudiée à l'université (notamment dans les cours plus avancés). Cela nous amène à considérer deux questions assez larges :

1. Au-delà de la transition institutionnelle lycée/université – *en quoi consiste ce « saut », ces obstacles difficiles à franchir* ?
2. Peut-on fournir quelques principes pour *aider l'étudiant par le moyen qui devrait y servir, à savoir l'enseignement* ?

Bien sûr il n'y a pas de réponses simples à ces questions ! Aussi, ce que nous pouvons apporter ici ne sont que des remarques fort partielles. Une difficulté centrale est que la complexité des phénomènes de transition ne peut pas, selon nous, être articulée complètement dans une seule cadre théorique. Nous allons illustrer ce point en analysant trois tâches fort simples sous la lumière de trois cadres théoriques (la théorie des registres sémiotiques, la théorie anthropologique et la théorie des situations). La complémentarité de ces trois approches sera, pour ainsi dire, notre point principal.

2. Trois problèmes simples pour illustrer la problématique

Pour illustrer notre discussion de la première question, nous allons utiliser trois tâches simples mais typiques du travail en analyse que l'étudiant doit entreprendre au lycée, au début de l'université, et dans sa deuxième ou troisième année. Les voici :

(1) Montrer que la fonction définie par

$$f(t) = \frac{t}{1+t}, \quad t \neq -1$$

est croissante sur $[0, \infty)$.

(2) Montrer que si f est définie comme ci-dessus, on a $f(s+t) \leq f(s) + f(t)$ pour tous $s, t \geq 0$.

(3) Montrer que

$$d(a,b) = \frac{|a-b|}{1+|a-b|}$$

définit une distance sur $\mathbb{R}$. [Voir par ex. Carothers (2000, p. 37) pour la définition de distance.]

Le troisième problème est tiré de (Carothers, 2000, p. 38) et les deux premiers sont proposés là comme *hints* (étapes possibles pour s'acquitter de (3)). Évidemment (1) est une tâche qu'un élève de lycée accomplira en observant que $f'(t) = (1+t)^{-2} > 0$ pour tout $t \neq -1$. Ou bien, les conventions permettant, on « voit » directement sur une calculatrice graphique que f est croissante. Ou encore, ceci se déduit directement par la récriture $f(t) = 1 - 1/(1+t)$. Pour (2), on utilise une récriture semblable :

$$\frac{s+t}{1+s+t} = \frac{s}{1+s+t} + \frac{t}{1+s+t} \leq \frac{s}{1+s} + \frac{t}{1+t}$$

pour $s, t \geq 0$. Finalement pour (3), il faut vérifier les axiomes pour une distance (ibid., p. 37), dont seulement l'inégalité $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$ n'est pas immédiate dans le cas donné; pourtant comme $d(a,b) = f(|a-b|)$, et comme $|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$ par le même axiome pour la distance euclidienne sur $\mathbb{R}$, l'inégalité pour d s'ensuit directement des résultats de (1) et (2).

En voyant la simplicité de cette solution, on se demande comment un étudiant mis devant (3) – comme un des premiers exercices pratiques sur les distances métriques – peut se trouver en difficulté (même si (1) et (2) ne lui posent pas de difficultés). Dans une classe observée à la deuxième année en maths pures de l'Université de Copenhague, un étudiant a montré, au tableau et sans hésitation, sa réponse à (1). Puis, pour (2), il a proposé de définir $g(s, t) = f(s+t) - f(s) + f(t)$. Aussi, il est parvenu à démontrer, par des calculs assez longs – passant par les dérivés partiels – que g est non positive sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Il était pourtant incapable de dire en quoi cela pouvait servir pour (3), et c'était pareil pour les autres étudiants dans cette classe. Et comme l'enseignant a fini par montrer une solution dans le genre de ce qui vient d'être exposé, les étudiants – après une demi-heure de calculs pour les étapes précédentes – paraissaient perplexes et convaincus que cette exercice était difficile et, en effet, hors de leur portée.

Au moins pour un regard naïf, ces trois tâches sont assez semblables par leurs énoncés ; pour une expression donnée, il faut montrer quelque propriété. Cette similitude se confirme par la forme des solutions que nous venons d'esquisser, dans la mesure où celles-ci sont basées sur un traitement relativement simple d'inégalités et d'expressions algébriques. Comment donc expliquer cette différence « en pratique » pour les étudiants, qui disposent en principe de tous les éléments nécessaires pour les trois tâches ? Même si l'exemple est sans doute d'une grande simplicité, il nous servira pour cerner certains obstacles liés aux transitions dont nous avons parlé dans l'introduction.

3. La transition par rapport aux représentations sémiotiques

Comme noté par Tall (1996) et par nombreux d'autres auteurs, l'apprentissage de l'analyse concrète (« calculus » en anglais) dépend de façon cruciale de l'usage d'une multitude de types de *représentations* : symboliques, géométriques, graphiques, numériques et même « visuo-spatiales » comme des gestes ou des objets en mouvement. Plus précisément (cf. Duval, 1995, 2000), la *coordination* de représentations dans ces différents *registres sémiotiques* est certes une condition pour l'activité mathématique en général, mais cette condition apparaît avec une force particulière en analyse, qui réunit tous les registres que l'élève s'est approprié auparavant. En plus l'analyse est basé sur des notions (limite, dérivé,...) qui sont difficiles à saisir proprement sans un discours plus formel (définition, preuves) que ce qui est normal et nécessaire pour l'enseignement des éléments de la géométrie et de l'arithmétique. Mais pour les objets de base – fonctions réelles concrètes – on peut trouver un support efficace justement dans la multitude de représentations disponibles, à condition évidemment de la disponibilité *pour les élèves* (cf. Winsløw, 2003 et à paraître, b). Ce n'est que dans l'analyse dite « moderne » ou « abstraite » que ce support disparaît plus ou moins complètement. Les fonctions deviennent des points ou des vecteurs dans les espaces métriques, hilbertiens etc. On ne retient en général que des représentations en registres discursives (langues naturelle, symbolismes) ; les représentations non discursives (dans le sens de Duval, 2000, p. 66) sont au plus « heuristiques ». Ainsi, la flexibilité nouvellement découverte et acquise, disparaît en grand parti. On peut parler d'une « expansion suivie de réduction » par rapport aux représentations.

Pour ceux qui arrivent à l'université en vue d'étudier les mathématiques, on peut supposer la coordination de représentations pertinentes pour les fonctions concrètes, ainsi que certaines routines de traitement et de conversion, liées à des situations spécifiques. Ainsi, pour étudier la monotonicité d'une fonction donnée, l'étudiant passera à la production de graphes (conversion) et au calcul de dérivées (traitement) – de nos jours, d'ailleurs, en se servant d'une calculatrice. Par exemple l'exercice 1 (voir §2) demande la vérification – par une méthode bien travaillé au lycée (différentiation, étude du signe de la fonction dérivée) – de ce qui est déjà visible par la représentation graphique de f (fig. 1).

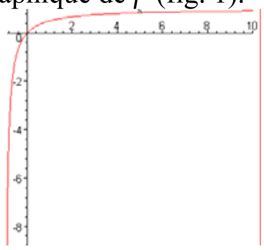

Figure 1 : Graphe de f(s) = s/(1+s).

Par contre, pour l'exercice (2), le traitement requis n'est pas routinisé et le résultat n'est pas « visible » dans la représentation graphique de *f.* Mais l'étudiant peut se ramener, avec un peu plus d'effort, dans une situation avec des stratégies routinières, en considérant la fonction *g* à deux variables. Pour ce cas il dispose de traitements semblables (quoique plus récemment routinisées) pour étudier la variation de la fonction, et d'une représentation graphique qui fait « voir » la propriété à vérifier. La production du graphe (fig. 2) nécessite, pour la plupart des étudiants, le recours à un logiciel tel que *Maple*.

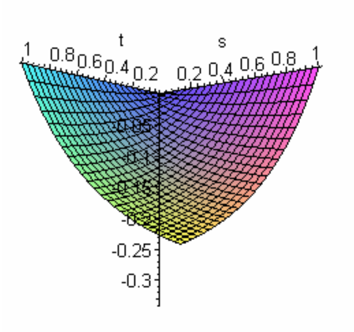

Figure 2 : Graphe de g(s,t) = f(s+t) – f(s) – f(t).

Même si la représentation graphique de *g* n'apparaît pas dans le travail de l'étudiant, elle fait partie de sa conception d'une fonction à deux variables ; en étudiant la variation il s'agit, ici, de montrer que « tout le graphe est au dessous du plan $z = 0$ ». Après une légère modification (traitement) de l'inégalité, la preuve se réduit ainsi à des routines familières de traitements (de la définition de la fonction, en registre symbolique), quoique nettement plus compliquées que l'approche suggéré en §2. Aussi la propriété à prouver se laisse exprimer dans un registre non discursif.

Malgré la similitude apparente des tâches, aucun de ces deux possibilités n'est disponible pour (3). La distance supposée $d(a, b)$ peut, en principe, être conçue comme une fonction à deux variables, mais la propriété « être une distance métrique » ne s'exprime pas dans le registre non discursive du graphe cartésien; et sa vérification ne se réduit pas à des routines de traitement familiers. En fait, il faut vérifier la propriété pièce par pièce (comme pour toute définition par axiomes) et en plus utiliser la propriété pour une métrique connue. Ce n'est pas un processus de traitements successifs qui doit être routinisé comme une algorithme. Mais l'exécution de ces traitements suppose une reconnaissance du problème et une « feuille de route » pour l'exécution, y compris un point de départ et un but d'arrivée. Sinon, les traitements requis paraissent dans l'ensemble et compliqués et sans cohérence discursive, même s'ils sont localement familiers pour les étudiants.

De ce point de vue, nous avons donc deux nouveaux obstacles pour (3) (et en partie pour (2)), qui marquent une vraie transition par rapport à (1) :

- l'absence de stratégies routinières pour organiser les traitements qui fournissent la vérification (ou plus généralement, le résultat recherché) ;
- l'absence de représentations non discursives pour la propriété à vérifier.

Ces deux phénomènes se retrouvent régulièrement dans le passage de l'analyse concrète à l'analyse moderne : les objets et leurs propriétés n'ont plus qu'une seule forme fiable de représentation, et leur étude n'admet que peu de routines de type « algorithmique ». Et ce sont là, en fait, deux ruptures profondes avec toute l'expérience précédente des étudiants avec les mathématiques et, en particulier, avec l'analyse.

4. L'approche anthropologique

Comme je l'ai expliqué ailleurs (Winsløw, à paraître, a), la théorie anthropologique du didactique (TAD) est utile pour expliquer plus globalement la nature de la transition à deux étapes entre mathématique scolaires et mathématiques universitaires. Cette explication a deux éléments :

- la particularité du contexte institutionnel pour la transposition, grosso modo la coexistence à l'université de pratiques de recherches et d'enseignement et la participation relativement volontaire à l'enseignement dans le contexte universitaire ;
- la nature des organisations mathématiques (OM), qui sont enseignées dans ce contexte, par rapport à celles qui sont enseignées dans le contexte scolaire.

Le premier élément est en partie cause du deuxième : les organisations didactiques (OD) universitaires sont développées par des constructeurs d'OM, et donc l'OM du chercheur est un idéal important (quoique pas forcément proche, cf. aussi §6) pour l'OM travaillé par l'étudiant. Pour l'enseignement pré-universitaire, la transposition est beaucoup plus complexe, avec d'autres rationalités et contraintes ; en particulier, l'enseignant y a normalement moins d'autonomie dans les choix globales et même plus locales qui déterminent l'OM enseigné.

En fait, les praxéologies exercées par les élèves à l'école et même au lycée sont concentrées sur des *blocs pratiques* (type de tâches, techniques) qui sont censés être utiles dans d'autres contextes aussi (et qui en fait font partie de praxéologies hors des seules mathématiques). Un exemple en est la différentiation comme technique d'étudier les propriétés d'une fonction, illustré par la tâche 1 (§2). Par contre à l'université, dans un cours de mathématiques pour futurs mathématiciens, la maîtrise de techniques routinières ne suffit plus. L'étudiant doit *participer* (plutôt que simplement assister) à des praxéologies plus complètes. En particulier l'étudiant est censé maîtriser – souvent dans un délai assez court – un discours technologique et théorique qui permet l'explication et la justification cohérente des blocs pratiques liés l'analyse concrète. Par exemple, le lien entre la croissance d'une fonction et sa fonction dérivée doit se comprendre par rapport à une théorie de calcul infinitésimal qui inclut une notion précise de limite et, en principe, de distance sur $\mathbb{R}$. Nous disons « en principe » car en analyse concrète n'apparaît que la distance euclidienne, et donc la notion n'est pas forcément explicite. Toutefois la première transition se caractérise par le passage à des praxéologies complètes, avec blocs théoriques situés dans des OM plus larges et plus cohérentes que dans les OM enseignés au lycée (pour une étude approfondie dans ce contexte, voir Barbé et al., 2005). Le raisonnement impliquant les *inégalités* y joue un rôle important, et la stratégie de l'étudiant pour la tâche 2 – décrit en §2 – suggère que plutôt que s'y livrer, l'étudiant cherche à se ramener dans un bloc pratique pareil à celui qui a servi pour la tâche 1 (étude de fonction par ses dérivées). Les difficultés de l'étudiant peuvent donc être lues comme un signe que cette première transition n'est peut être pas toute accomplie.

Le lien entre convergence (et plus généralement, *topologie métrisable*) et distance métrique est d'ailleurs l'essentiel pour l'analyse moderne, où la distinction entre distances dites *équivalentes* (donnant lieu à la même topologie) est beaucoup moins importante qu'en géométrie. Tandis que la distance euclidienne est la distance « naturelle » pour l'analyse concrète, où elle fait partie du discours théorique, les distances métriques deviennent elles-mêmes objets pour les tâches en analyse moderne, ainsi que dans la tâche (3). Dans l'optique des praxéologies, la deuxième transition consiste donc à développer de nouvelles praxéologies par rapport à des tâches qui ont pour objets les éléments de blocs théoriques antérieurs. En effet, avec l'exercice qui suit, dans le manuel (Carothers, 2000, p. 38), la tâche 3 de §2, on y est déjà :

(4) Soit d une distance sur un espace métrique M, et soit $f: [0,\infty)\to [0,\infty)$ une fonction qui remplit les conditions établies dans (1) et (2), et aussi $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Montrer que la fonction $f \circ d$ est une distance sur M.

Pour construire une foule de distances sur M, il suffit donc de construire des fonctions du type indiqué dans cet exercice. On peut ensuite poser la question de leur équivalence. Et cette notion (cette fois-ci, théorique) présuppose de regarder la distance métrique comme un « point » qui peut être, ou ne pas être, en relation d'équivalence avec d'autres, et dont la classe d'équivalence, plutôt que la métrique individuelle, correspond à une topologie métrisable.

L'OM « ponctuelle », dont le type de tâche est de vérifier si une fonction donnée est bien une distance, a donc pour fonction principale d'établir les distances comme objets dans une OM régionale liée aux propriétés topologiques (convergence, continuité, compacticité *etc*.) dans un espace métrique. Quoique cette perspective soit apparente pour le spécialiste enseignant, elle ne l'est évidemment pas pour l'étudiant qui rencontre l'OM locale dans une tâche comme (3). Pourtant le choix de commencer par l'OM en question est enraciné dans l'OD « traditionnelle » (ou, en fait, « moderne » dans le sens de Bourbaki…) dont le cours de Carothers est une expression, d'ailleurs assez modérée, parmi beaucoup d'autres. Historiquement la définition axiomatique d'une distance métrique (Fréchet, 1906) a suivie des recherches laborieuses sur les notions de convergence en divers contextes, et constitue ainsi une réponse générale à un questionnement qui n'apparaît que de façon implicite dans le cours. D'introduire tout de suite la réponse à ce questionnement est sans doute lié à une économie d'exposition, mais implique aussi des problèmes en fonction de l'absence, chez les étudiants, de maîtrise des blocs théoriques qui fournissent les objets des toutes premières tâches à confronter.

Les quelques éléments d'analyse du problème de transition que nous avons proposés ici et au §3 ont en commun de suggérer une transition à deux étapes. Tandis que l'analyse sémiotique ne vise que certains aspects des démarches nécessitées par les exercices, qui d'ailleurs sont cruciaux pour comprendre les obstacles cognitifs pour les étudiants, l'analyse des OM travaillés par l'étudiant permet une vision plus globale de l'enjeu épistémologique pour l'apprentissage et pour l'enseignement. Toutefois pour l'enseignement nous avons seulement cerné le problème, et en effet c'est un trait plus général de l'usage de ces deux cadres d'être surtout *descriptif*. C'est pourquoi nous nous tournons, en vue de la deuxième question posée dans l'introduction, vers une troisième approche aux problèmes de transitions, celle de la théorie des situations didactiques.

5. L'apport de la théorie des situations didactiques

La méthodologie d'*ingénierie didactique* est présentée, par M. Artigue (1988), comme un processus d'expérimentation didactique contrôlée où l'analyse des *variables didactiques* tient un rôle central. Parmi les « classiques incontournables dans ce domaine » (ibid., p. 287) sont bien sûr les recherches menées par Brousseau et son équipe, mais il est intéressant à noter que l'exemple qui est traité dans l'article provient d'un projet dans le contexte de l'enseignement des équations différentielles dans la première année du DEUG. Dans un sens plus large du point de vue méthodologique, les ingénieries liées à l'usage de logiciels dans le contexte de l'analyse concrète sont devenu un thème important de recherche internationale. D'autres travaux sur l'enseignement aux débuts de l'université ont également une perspective d'intervention contrôlée et basée dans la théorie des situations, notamment la modification du contrat nécessitée pour le *débat scientifique* en cours magistral (Legrand, 2001, 1993) ou la conception de milieux « exploratoires » pour faciliter la transition vers l'analyse concrète (par ex. Bloch, 2003, Bloch et Schneider, 2004).

L'intervention se fait par rapport à une analyse plus ou moins explicite des obstacles épistémologiques. Ainsi, Bloch (2005) propose 10 variables macro-didactiques pour caractériser la rupture secondaire/supérieure par rapport aux propriétés des milieux didactiques usuels pour l'apprentissage de l'analyse dans ces deux contextes institutionnels. Certains de ces variables indiquent, d'ailleurs, des phénomènes de transition semblables à celles que nous avons exposées ici. Pour la construction d'interventions, l'idée qui nous semble la plus intéressante est celle de *retournement de situation* qui vise à familiariser l'étudiant avec une problématique (situation initiale) avant de procéder à son traitement plus formelle (situation retournée), avec des consignes plus précises. Normalement une telle approche suppose que la situation initiale offre un accès plus « intuitif » au problème dont le savoir visé peut se concevoir comme une « réponse ».

Ainsi, pour l'exemple de §2, la possibilité de plusieurs métriques sur un même espace (comme $\mathbb{R}$) devrait de quelque manière être rendue sensible sinon « naturelle » par une situation initiale, qui devrait aussi fournir un milieu pour poser la question cruciale : quelles conditions permettent de conclure que les propriétés de convergence sont les mêmes dans deux métriques données ?

Peut-être le cas de métriques sur $\mathbb{R}^2$ sera plus illustratif. Là, la distance euclidienne d_E ainsi que, par exemple, la métrique discrète d_D et la métrique « coin »

$$d_C((x, y), (x', y')) = |x - x'| + |y - y'|$$

peuvent être présentées dans un registre non-discursif (fig. 3), et aussi moyennant des modèles plus ou moins « connues ». Par exemple, d_D se réalise comme le prix à payer pour un déplacement entre deux points dans une même zone tarifaire, et d_C comme la distance (dans le sens ordinaire !) à parcourir entre deux points avec une véhicule qui ne peut changer de direction que par angles droits (ou dans une ville dont les rues se croisent sous des angles droits). Il est aisé de « voir » que les même suites de points convergent à un point donné pour les métriques d_E et d_C (i.e., d_E et d_C sont équivalentes) mais que cela ne reste pas vrai pour celles-ci et d_D.

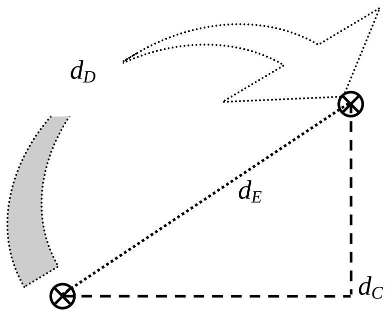

Figure 3 : Trois distances différentes dans le plan.

Pour organiser un jeu plus libre ces notions, on pourrait – après l'étude d'exemples commun comme ceux cités ci-dessus – assigner une variante du problème suivant : *produire autant de distances sur* $\mathbb{R}^2$ *que vous pouvez ; ensuite, autant de distances non-équivalentes que vous pouvez.* La deuxième partie est un retournement dans le sens que la liberté d'action se réduit dramatiquement, et on pose le problème (certes sans attendre une conclusion complète !) de *conditions* assurant l'équivalence de deux distances.

Cela illustre d'ailleurs une idée plus générale, que nous utilisons beaucoup dans le contexte des projets thématiques (Winsløw, 2005), pour favoriser le travail autonome des étudiants avec de nouvelles notions difficiles : *leur demander de construire eux-mêmes des objets mathématiques, souvent très simples, avec des propriétés données.* Dans la quasi-totalité d'exercices de manuel, comme celle que nous avons présenté en §2, les objets sont fournis et l'étudiant est censé démontrer certaines propriétés de ces objets donnés. Avec toutes les ressources sur Internet, la « construction » d'exemples par les étudiants ne dépend d'ailleurs pas entièrement de leur imagination.

Une autre question principale que pose la théorie des situations est celle du *contrat didactique.* Ce problème se pose de façon spécifique et sensible dans le contexte universitaire, et il faut peut-être s'y prendre de façon plus explicite dans ce contexte, comme souligné par exemple par Legrand par rapport à la réalisation du débat scientifique. Les attentes des étudiants sont fortes et liées à ce qu'ils perçoivent comme la rationalité de l'enseignement : leur fournir des savoirs reconnus, nécessaires et suffisants pour réussir au jeu académique proposé par le cours. Et cela à plusieurs niveaux : globalement, il existe déjà un « macro-contrat » bien établie depuis le lycée, et renforcé par les pratiques de l'enseignement universitaire, stipulant qu'une consigne ne peut être donnée aux étudiants que dans un contexte déjà présenté et exemplifié par le professeur (cf. Grønbæk et al., en lecture). Plus localement, le savoir des étudiants par rapport aux objets en question est normalement enraciné dans d'expériences variées. Pour la notion de distance dans le plan, la distance euclidienne est naturalisée depuis l'école primaire et même dans la vie ordinaire. Il faut reconnaître le conflit naturel causé par la stipulation soudaine que toute fonction sur $\mathbb{R}^2$ qui satisfait à certains axiomes soit reconnue comme étant également une « distance ». En général le pas décisif est de faire accepter aux étudiants les conditions pour s'engager dans un questionnement rationnel qui n'a pas, *a priori*, de technique toute faite et fournie en avance, et qui nécessite par moments l'abandon de repères considéré auparavant comme « naturelles » et « sûres ». Le problème de transition par rapport au contrat doit donc être considéré à (au moins) deux niveaux interdépendants : celui, local, du savoir spécifique en jeu (lié directement au milieu didactique), et celui des formes de travail proposées aux étudiants (y compris les dispositifs).

6. La nécessité d'*alignement*

Un intérêt particulier de la théorie anthropologique du didactique est de reconnaître le contexte institutionnel non pas seulement comme source de contraintes pour la réalisation didactique, mais comme l'écologie même pour les organisations mathématiques et didactiques, comprenant des mécanismes de régulation qui *déterminent* en grand traits leur vie (Chevallard, 2001). La prise en compte de ces *conditions écologiques* sont indispensables pour le didacticien qui s'intéresse à la viabilité hors laboratoire de ses ingénieries Nous n'en mentionnons ici que deux qui nous paraissent particulièrement importantes pour la deuxième question de l'introduction.

Premièrement, il nous semble indispensable, dans les contextes universitaires où nous travaillons, d'aligner toute initiative par rapport à l'enseignement avec *le système d'évaluation de l'apprentissage des étudiants* – en particulier avec les examens qui sont sinon le but au moins des marques d'étape importantes pour le travail des étudiants. Aussi, la *modification* du système et du contenu de cette évaluation est parfois souhaitable sinon nécessaire pour la réalisation d'une ingénierie substantielle. Il faut donc élargir la perspective didactique à comprendre non pas seulement les conditions (cognitives, épistémologiques, institutionnelles...) pour l'apprentissage mais *aussi celles de son évaluation formelle*. Les transitions par rapport au contrat didactique dépendent de ce que les étudiants reconnaissent l'alignement : que l'effort (peut-être considérable) demandé par les tâches qui leur sont assignées dans les situations d'enseignement contribue de façon évidente à leur apprentissage et à leur réussite dans l'évaluation. Notons qu'il y a là deux étapes *a priori* indépendantes ; les objectifs d'apprentissage et la mesure appliquée par l'évaluation. La « façon évidente » de leur relation mutuelle n'est donc en rien automatique. La description explicite des objectifs (cf. Winsløw, 2005) ainsi que l'usage de formes d'évaluation qui correspondent mieux au travail adidactique des étudiants (Grønbæk et al., en lecture) sont donc deux thèmes qui nous paraissent importants pour une approche proactive aux problèmes de transition. Grønbæk et al. (à paraître) présente un projet complète ingénierie (pour un cours d'analyse semi-avancée) basé sur ces deux pistes de travail.

Deuxièmement, la cohabitation, dans l'université, de *recherche* et *enseignement (supérieur)* est lourd de potentiels mais aussi de problèmes. Les transitions que nous avons décrites sont en partie liées aux difficultés pour l'étudiant de s'engager dans des activités qui sont, pour le chercheur, des pas indispensables vers l'analyse contemporaine. D'autre part pour l'enseignant-chercheur le décalage perçu entre ses deux activités principales – enseigner et chercher – est souvent massif. Les conditions et les modalités d'une relation plus fructueuse entre ces deux activités du professeur – et les potentiels pour le travail des étudiants dans un tel *nexus* recherche-enseignement – représentent un thème de recherche assez vif en sciences de l'éducation (voir Elton, 2001, pour une introduction). Les spécificités de ce thème pour le cas d'enseignement supérieur des mathématiques devraient le devenir en didactique – notamment en vue des problèmes de transition. Pour un début dans cette direction, basé sur la théorie anthropologique, voir (Winsløw et Madsen, à paraître).

7. La complémentarité des approches

L'existence d'une multitude de cadres théoriques en didactique des mathématiques n'est pas une spécialité francophone, bien sûr ; aussi, même dans ce contexte, nous n'avons considéré que trois cadres parmi plusieurs possibilités (tel que la théorie des champs conceptuels de Vergnaud). Ceci dit, un point principal que nous avons voulu mettre en évidence est que, même si ces cadres se formulent et se poursuivent souvent sans beaucoup d'articulation de relations réciproques, ils ne sont pas de simples alternatives voir des « paradigmes incommensurables » (dans le sens de Kuhn, cf. Gascòn, 2003 qui discute aussi commensurabilité des approches « cognitives » et « épistémologiques » en didactique). Au contraire, en examinant les tâches d'étudiant en vue de mettre en évidence les phénomènes de transition, nous avons pu découvrir des phénomènes bien différents mais aucunement indépendants en nous servant des trois cadres choisis. Essayons de faire le bilan.

Notre examen des opérations sémio-cognitives nécessitées par la résolution des trois tâches nous a amené à une analyse assez détaillée *des tâches mêmes*, ainsi que de leurs différences pour les étudiants. Ainsi, loin d'être une analyse de la psychologie imaginée des étudiants, cela nous permet d'examiner les efforts des étudiants en vue de saisir et manier le problème et avant tout les objets mathématiques à travers leurs représentations, ainsi que les obstacles que cela leur impose. Concrètement, dans le contexte de l'enseignement universitaire, nous pouvons ainsi mettre en évidence (et articuler) des démarches cruciales pour les étudiants, mais qui « vont de soi » pour le mathématicien expérimenté et habitué à manier des objets dont les représentations disent, en fait, assez peu. Même si une telle analyse a pour mérite principal de nous éclairer d'une façon assez locale sur la première question posée dans l'introduction, il peut effectivement être utile pour le mathématicien (en tant qu'enseignant) de prendre connaissance d'une telle analyse et des principes sous-jacents.

Un point de vue beaucoup plus global, lié surtout à la structuration des savoirs et des pratiques mathématiques en jeu, nous est fourni par l'approche anthropologique. Pour rendre compte des liens et des différences principales entre les trois tâches, nous avons vu comment les organisations mathématiques ponctuelles plus avancés prennent pour objet de leurs tâches des éléments théoriques provenant des organisations locales où sont situés les plus simples. Ainsi, la maîtrise des blocs pratiques de ces dernières ne suffit pas pour s'acquitter des tâches plus avancées (même si, dans une certaine logique liée au bloc théorique, ces tâches avancées consistent à tirer des « conséquences » assez directes des plus simples). Une tâche didactique assez générale consiste donc à « tourner la théorie en tâche » pour les étudiants (Winsløw, à paraître, a) dans le sens de leur engager dans des tâches qui vont au-delà de l'organisation ponctuelle.

Nous avons choisi de traiter en dernier lieu l'apport de la théorie des situations parce qu'elle permet de se diriger plus directement vers la deuxième question, celle de l'organisation des activités des élèves. Cela suppose, bien sûr, une analyse des savoirs et des obstacles qu'ils représentent pour les élèves, mais qui est – dans des façons assez différentes – fournies, au moins partiellement, par les deux autres approches. Les situations classiques de Brousseau, comme celles du puzzle ou celles relevant de la statistique fondamentale, ne cessent de surprendre par l'originalité et l'imagination qu'a demandé leur construction. Il peut être difficile à imaginer des pendants pour le contexte des espaces métriques. Pourtant la structuration successive de milieux « exploratoires » et « visant plus directement le but » (retournement de situation) paraissent être des principes qui ouvrent plus de possibilités pour le travail autonome des étudiants, sans enlever pour autant la nécessité d'une créativité professorale tout aussi rare dans l'enseignement universitaire que partout ailleurs.

En guise de conclusion, nous proposons un tableau (fig. 4) en vue de synthétiser la complémentarité que nous avons trouvée, ici et ailleurs, des trois cadres théoriques dont nous nous sommes servis. Ces cadres diffèrent, en effet, aussi bien par les phénomènes qu'elles cherchent à modéliser en générale (deuxième colonne) que par la nature des transitions et des variables caractérisant celles-ci qu'elles permettent de découvrir.

Cadre théorique	Phénomènes modélisés par la théorie	Transitions secondaire-université	Variables en transition
sémio-cognitive	démarches cognitives liées aux représentations sémiotiques	plus, puis moins, de représentations « fiables »	demandes cognitives
anthropologique	pratiques mathématiques et didactiques, visées et observées dans leur contexte institutionnel	objets des tâches travaillées par les étudiants proviennent de blocs théoriques antérieurs	écologie institutionnelle du savoir (diffusion, création,…)
des situations	réalisations de situations d'apprentissage en classe	milieux envisageables pour le savoir visé	Obstacles épistémologiques ; contrats

Figure 4 : Complémentarités de trois cadres théoriques.

Remerciements

Je tiens à remercier Isabelle Bloch pour son aide formidable pour assurer la bonne forme de cet article, dont une version préliminaire a été présentée au colloque EMF à Sherbrooke (Mai 2006).

Références

ARTIGUE M. (1988), Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **9** (3), 281-308.

BLOCH I. (2003), Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics* **52** (2003), 3-28.

BLOCH I. (2005), *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur,* Note de synthèse (HDR), Université Paris 7.

BLOCH I. & SCHNEIDER M. (2004), A various milieu for the concept of limit: from determination of magnitudes to graphic milieu allowing proof. Texte présenté à ICME 10, Copenhague.

BARBÉ J., BOSCH M., ESPINOZA L. & GASCÓN J. (2005), Didactic restrictions on teachers practice - the case of limits of functions at spanish high schools. *Educational Studies in Mathematics* **59** (1-3), 235-268.

BURN B., APPLEBY J. & MAHER P. (Eds) (1998), *Teaching undergraduate mathematics*, London, Imperial College Press.

CAROTHERS N. L. (2000), *Real Analysis,* Cambridge, Cambridge U. Press.

CHEVALLARD Y. (2002), *Organiser l'étude : écologie et régulation*. In : Dorier, J.-L. et al. (Eds), Actes de la 11e école d'été de Didactique des Mathématiques, Grenoble, La pensée sauvage.

DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels,* Bern, Peter Lang.

DUVAL R. (2000), Basic issues for research in mathematics education, In: T. Nakahara et al. (eds.), *Proceedings of PME 24*, vol. 1, 55-69. Hiroshima: Hiroshima U.

ELTON L. (2001), Research and teaching: conditions for a positive link, *Teaching in Higher Education* **6** (1), 43-56.

FRÉCHET M. (1906), Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* **22**, 1-74.

GASCÒN J. (2003), From the cognitive to the epistemological programme in the didactics of mathematics: two incommensurable scientific research programmes? *For the learning of mathematics* **23** (2), 44-55.

GRØNBÆK N. & WINSLØW C. (à paraître), Developing and assessing specific competencies in a first course on analysis, *Research in Collegiate Mathematics Education.*

GRØNBÆK N., MISFELDT M. & WINSLØW C. (en lecture), Assessment and contract-like relationships in undergraduate mathematics education. Pour O. Skovsmose et al. (eds), *University science and Mathematics Education. Challenges and possibilities*.

LEGRAND M. (1993), Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificités de l'analyse, *Repères IREM* **10**, 123-159.

LEGRAND M. (2001), Scientific debate in mathematics courses, In D. Holton (Ed.), *Teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI study,* 27-135, Dordrecht, Kluwer, 2001.

TALL D. (1996) Functions and calculus. In A. Bishop et al. (eds) *International Handbook of mathematics education* (pp. 289-325). Dordrecht: Kluwer.

WINSLØW C. (2003), Semiotic and discursive variables in CAS-based didactical engineering, *Educational Studies in Mathematics* **52**, 271-288.

WINSLØW C. (2005), Définir les objectifs de l'enseignement mathématique : La dialectique matières-compétences, *Annales de didactique et des sciences cognitives* **10**, 131-156.

WINSLØW C. (2006), Research and development of university level teaching: the interaction of didactical and mathematical organisations. In: M. Bosch (ed.) *European Research in Mathematics Education IV. Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1821-1830, Barcelona: Universitat Ramon Llull.

WINSLØW C. (à paraître, a), Transformer la théorie en tâches : la transition du concret à l'abstrait en analyse réelle, *Actes de la 13ème école d'été de didactique des mathématiques*.

WINSLØW, C. (à paraître, b), L'usage des logiciels dans l'enseignement supérieur des mathématiques : un panorama des questions du point de vue de la sémiotique, *Environnements informatiques, enjeux pour l'enseignement des mathématiques*, F. Conne et R. Floris (éds).

WINSLØW C. & MADSEN L. (à paraître), Interplay between research and teaching from the perspective of mathematicians, Actes du 5ème congrès de CERME, 2007.

Carl WINSLØW
Département de Didactique des Sciences
Université de Copenhague, Danemark
winslow@cnd.ku.dk