ABDULKADIR ERDOGAN & ALAIN MERCIER

LES FORUMS DE QUESTIONS MATHÉMATIQUES SUR INTERNET ET LES ATTENTES SUR LE TRAVAIL DES ÉLÈVES

Abstract. Forums of Mathematical Questions on Internet and Expectations about Pupils' Work
Forums of mathematical questions on Internet appear today as a place where a need of help to the pupils' school works is crystallized. In this research, on the basis of the questions put by pupils on these forums, we want to study some possible sources of this need. In this purpose, we question about didactic stakes of the situations of the study and pupils' possible actions in the accomplishment of their stakes. Our analysis provides us some important results to reconsider the pupils' work and to reorganize the didactic situations.

Résumé. Les forums de questions mathématiques sur Internet apparaissent aujourd'hui comme des endroits où se concrétise un besoin d'aide au travail des élèves, hors temps scolaire. Dans cette recherche, en partant des questions posées par les élèves sur ces forums en vue d'obtenir une aide pour la réalisation du travail mathématique qui leur est demandé, nous nous proposons d'étudier quelques déterminations possibles de ce besoin. Notre analyse nous fournit certains résultats qui nous engagent à repenser le travail des élèves et les situations didactiques de l'étude.

Mots-clés. Forum, contrat didactique, enjeu didactique, étude, aide à l'étude, algèbre, fonctions, classe de Seconde.

Introduction

Notre recherche s'appuie sur l'observation d'un phénomène didactique concernant le travail personnel que les élèves doivent réaliser à l'extérieur de l'espace scolaire pour assurer leurs apprentissages. Le phénomène en question est celui du besoin d'*accompagnement* (Sensevy, Mercier, Schubauer-Leoni, 2000) et d'*aide à l'étude* (Chevallard, 2002a) que ressentent de nombreux élèves lors de ce travail. Le lieu où la manifestation de ce besoin est observée est celui des forums sur Internet que nous appelons « les forums de questions mathématiques ». En nous intéressant aux questions posées par les élèves sur certains forums, les plus accessibles et les plus représentatifs par le nombre des questions qui y sont traitées et leur permanence, nous nous sommes demandé quelle pouvait être la source de ce besoin et quelle

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 12, p. 147 - 163.

aide pouvait donner les forums pour que ce besoin s'y manifeste aussi massivement. Ce fut l'objet de notre mémoire de DEA (Erdogan, 2001). Dans le cadre de ce travail, au bout d'une année d'observation des échanges passés sur ces forums, nous avons procédé à la classification des questions en vue d'identifier les types de besoin qui s'y observent et nous avons tenté de définir le contrat didactique qui sous-tendait les échanges sur ces forums entre celui qui étudie et pose une question et celui qui apporte une aide à l'étude en répondant à cette question. On remarquera immédiatement que le format même des interactions est le format d'interaction sociale questions-réponses ; ordinairement, ce format n'est pas porteur d'intentions didactiques fortes : la réponse est supposée épuiser l'intérêt de l'interaction. Dans le cadre d'un contrat didactique scolaire en revanche, la réponse du destinataire de la question a pour objet de permettre le développement de l'étude engagée par le destinateur, qui ne se présente donc pas comme l'exécutant d'une tâche normalement routinière[1].

Au premier abord avec les questions posées, le besoin d'aide fortement exprimé par les élèves pour la réalisation des devoirs à la maison et des exercices scolaires donnerait pourtant à croire que leurs questions ne sont pas relatives à quelque chose à comprendre puis à apprendre, mais portent sur quelque chose à faire. Leur formulation montre qu'elles leur apparaissent comme des tâches dont il convient de s'acquitter. D'autre part, l'observation des réponses et le fait qu'elles n'appellent pas à la poursuite de l'interaction montre qu'elles sont faites sans interrogation sur des éventuelles difficultés que l'élève pourrait rencontrer s'il se mettait à étudier le contenu mathématique sous-jacent à la question. Cela ne nous étonne pas vraiment: le fonctionnement des forums relève au mieux d'un contrat faiblement didactique dont les caractéristiques ont été décrites par Brousseau (1995) :

> L'émetteur accepte d'organiser son message en fonction de certaines caractéristiques « théoriques » de son interlocuteur. Il assume certaines responsabilités quant au contenu de ce message, mais aucune quant à ses effets sur le récepteur, même s'il est conscient de modifier son système de décision.

Ainsi :

> […] L'émetteur répond à une demande du récepteur pour une utilisation qu'il ignore, il y a contrôle constant de la compétence de l'émetteur mais pas de celle du

[1] L'exemple traditionnellement donné en illustration de ce phénomène (les tâches à enjeu didactique n'ont pas pour enjeu la réussite d'une action dans le monde mais indiquent la matière d'une étude) est celui de l'enfant à qui l'on demande de mettre le couvert et qui répond : "tu m'as appris hier, je sais" (sous-entendu : je n'ai plus besoin de l'apprendre et je n'ai donc pas à le faire), retournant ainsi à son avantage sa compréhension du contrat didactique.

récepteur. L'émetteur ne sait pas s'il est vraiment compris, ni même reçu, si le récepteur ne manifeste aucune réaction…[2]

Tout ceci a pourtant débouché sur des questions importantes et nous ne prétendons pas répondre à toutes : « Quelle est la véritable culture de l'étude dans les classes de mathématiques ? » et « Comment l'institution - classe fonctionne-t-elle pour engendrer un tel besoin d'aide à l'étude ? » sont celle que nous retiendrons ici, afin de demander s'il serait possible d'intégrer, dans le travail même de la classe sous la direction du professeur, le travail conduit par les élèves à l'aide des forums dans un contrat plus fortement didactique.

Conscient des limites du premier diagnostic, nous nous sommes interrogés sur les enjeux mathématiques et didactiques des *situations scolaires d'étude* afin de déterminer certaines sources de difficulté pour les élèves. Cela nous a engagé à repenser la nature du travail attendu des élèves et à rechercher quelles sont les réelles possibilités des élèves vis-à-vis de ce travail. L'article s'intéresse donc tout particulièrement aux dimensions épistémologique et didactique du travail d'étude attendu des élèves et montre notre manière de l'étudier. Il s'appuie sur deux cas précis, chacun étant fondé sur une question posée dans un forum.

1. Des forums de questions mathématiques aux problèmes didactiques

L'ouverture des forums commence avec Internet, devenu accessible aujourd'hui à une très grande majorité de la population. L'existence des forums de questions relatives aux mathématiques scolaires semble soutenue d'une part par l'accessibilité d'autre part par la rapidité qu'ils donnent. La possibilité d'obtenir une information dans un temps relativement court a suscité un besoin d'aide dont les élèves témoignaient déjà dans leurs rapports aux Boutiques de mathématiques (Chevallard, 1990). Cependant, même en considérant les forums comme des *systèmes didactiques auxiliaires* (Chevallard, 1995)[3] par le fait qu'ils prennent en charge un besoin d'aide venu de l'étude conduite dans un système principal autre,

[2] Il faudra noter que certains de ces forums montrent aujourd'hui une évolution vers des interactions plus structurées. Nous pensons qu'elle est due à une prise de conscience, par tous les acteurs (les élèves, les aides et les responsables des forums), de la faible efficacité didactique des forums, pour de nombreux élèves (Erdogan, 2005).

[3] Nous utilisons les notions de *système didactique* et de *système d'enseignement* selon la différence marquée par Chevallard (1992, 1995) : Un système didactique comporte ou moins un sujet qui vient occuper une position d'enseignant et un sujet qui vient occuper une position d'élève, autour d'un objet appartenant à l'ensemble des enjeux didactiques pour l'institution. Mais l'existence d'un système didactique suppose un système d'enseignement qui construit « *un environnement systémique, dont le rôle est essentiellement de créer tout un ensemble de conditions nécessaires à l'existence du système didactique* » Chevallard (1992, p.97).

comprendre les conditions de satisfaction de ce besoin pose des problèmes didactiques difficiles (Félix, 2002). Quelques-uns de ces problèmes sont issus du système d'enseignement d'autres, des systèmes didactiques principaux que sont les classes. Mais surtout, le paradoxe premier de tout contrat didactique : « Tout ce qu'il [le maître] entreprend pour faire produire par l'élève les comportements qu'il attend, tend à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir. » (Brousseau, 1998) pèse plus fortement encore sur l'interaction auxiliaire. Comment alors une personne qui vient répondre aux questions posées par les élèves sur Internet - qui peut difficilement être tenue responsable du rôle didactique de son message - se comporte-t-elle pour fournir une aide sans que la responsabilité de l'élève dans l'exécution de sa tâche ne soit déniée, enlevant à celle-ci sa fonction majeure de désignation d'un enjeu didactique défini dans le système principal ? Peut-on définir *a priori* comment répondre ? Existe-t-il un critère en vertu duquel une réponse de type « Qu'as-tu déjà trouvé ? » serait préférable à une réponse qui développe complètement la démarche attendue[4] ? Doit-on considérer que l'on voit à l'oeuvre en ce lieu un déplacement de la topogenèse et que le partage des responsabilités peut être redéfini sans danger ? A-t-on trouvé dans ces dispositifs un moyen de négociation du partage topogénétique qu'il faudrait conseiller au professeur d'intégrer dans l'espace didactique principal ?

La production d'une réponse à ces questions suppose que l'on mette en place un système d'interprétation pertinent des situations didactiques ainsi créées à l'initiative des élèves. Cette ambition est hors de la portée de cet article. Partant du besoin d'aide précisé ci-dessus, nous voulons surtout nous interroger sur les enjeux didactiques des situations d'étude proposées par le moyen du *travail donné à faire à la maison*, afin de reconsidérer les actions possibles des élèves dans la réalisation de leurs enjeux. À cet effet, nous nous situons du côté d'une analyse épistémologique et didactique de ces situations qui relève de leur *analyse a priori*.

2. Analyse de deux situations d'étude

Nous allons ici étudier une question posée par un étudiant de DEUG[5] et une question posée par un élève de Seconde[6], toutes les deux venues le même jour (le 22 octobre 2000) sur le forum de l'Ecole Polytechnique[7]. Ce forum, tenu par l'association des élèves de cette Ecole, reçoit majoritairement des questions venant des élèves du lycée, des premières années universitaires, des classes préparatoires.

[4] Ces deux catégories de réponse font partie des réponses effectivement observées lors de notre travail cité ci-dessus.

[5] Les deux premières années universitaires.

[6] Première année du lycée, élèves de 15-16 ans.

[7] Pour accéder au forum : http://www.polytechnique.fr/eleves/binets/intermaths/

On peut penser que l'intérêt des polytechniciens pour cette activité est un effet de leur entraînement au concours, qui les conduit à l'étude d'un très grand corpus d'exercices et problèmes, au travers duquel ils acquièrent une maîtrise technique reconnue dans les domaines mathématiques inscrits dans leur programme de préparation. On sait que cette activité les rend sensibles à la possibilité d'accéder aux solutions d'exercices qu'ils ont échoué à résoudre mais qu'ils doivent pourtant étudier. Le forum, qui justement donne des schémas de réponse relativement complets, a reçu ce jour là douze questions dont six d'algèbre, cinq de géométrie et une de physique. Il existe au moins une réponse donnée le même jour à chacune de ces questions.

2.1. Question posée par un élève de Seconde

Envoyé par Didier le 22 Octobre 2000 à 16:15:11: sous le titre : *Maths Seconde hyper urgent*

« Bonjour, je dois faire ces deux exos et je n'y arrive pas du tout, pouvez vous m'aidez?
I/ valeur approchée de 1/(1+x), (x n'est pas égal à -1)
I/1/ Démontrer que, pour tout x pas égal à -1, on a : $1/(1+x)=1-x+(x^2)/(1+x)$
2/ Démontrer que pour tout x appartient à [-1/2;1/2] <= signifie inférieur ou égal.
a) $0<=x^2<=1/4$
b) $2/3<=1/(1+x)<=2$
c) $0<=x^2/(1+x)<=2x^2$
3/Déduire des deux questions précédentes que, pour tout x appartient à [-1/2;1/2], 1-x est une valeur approchée par défaut de 1/(1+x) à $2x^2$ près.
4/ Donner à l'aide de cette méthode des valeurs approchées des nombres suivants, en indiquant la précision (on pourra comparer les résultats obtenus avec ceux fournis par la calculatrice): 1/1,004 ; 1/0,9993 ; 1/3,006.

II/ Encadrement de sqrt(1+x), sqrt : racine carré.
Soit x un réel strictement positif. On pose:
A=sqrt(1+x); B=1+x/2; $C=x^2/8$+sqrt(1+x)
1/ Montrer que A, B et C sont strictement plus grand que 1.
2/ Comparer A^2 et B^2. En déduire que sqrt(1+x) <1+x/2.
3/ Prouver que $C^2-B^2=x^2/4$(sqrt(1+x)+$x^2/16$-1). Comparer B^2 et C^2. En déduire que 1+x/2-$x^2/8$ est inférieur à sqrt(1+x).
Note : Nous venons donc d'établir l'encadrement suivant de sqrt(1+x) :
pour x>0, 1+x/2-$x^2/8$ < sqrt(1+x) < 1+x/2.
4/ Donner sans calculatrice un encadrement de sqrt(1,0002) et une valeur approchée de sqrt(1,0000001) à 10^-14 près.
Merci beaucoup beaucoup. »
Didie

Etudions les deux questions ainsi que la forme des éléments de réponse donnés sur le forum :

<u>Re : Maths seconde hyper Urgent</u>

Envoyé par Basile le 22 Octobre 2000 à 22:22:12:
: I/ valeur approchée de 1/(1+x), (x n'est pas égal à -1)
: 1/ Démontrer que, pour tout x pas égal à -1, on a :
: $1/(1+x)=1-x+(x^2)/(1+x)$
Réduis au même dénominateur
: 2/ Démontrer que pour tout x appartient à [-1/2;1/2] <= signifie inférieur ou égal.
: a) $0<=x^2<=1/4$
Utilise la croissance de la fonction carré sur R+ et sa décroissance sur R-.

Etc. Le destinataire de la question a une attitude didactique qui consiste à nommer une technique (réduire au même dénominateur) ou un théorème (la fonction carré est croissante sur R+) qui sont supposés connus d'un élève de Seconde. Il fait donc bouger le partage topogénétique (ce qui est de la responsabilité effective du professeur et des élèves) en fournissant une *indication* supplémentaire qui permet en principe l'action autonome de l'élève. D'une certaine manière, l'énoncé faisait de même ou presque en décomposant le travail en sous-questions relevant, chacune, d'un savoir officiel de la classe de Seconde. Mais il ne nommait pas ce savoir, l'indication était plus subtile.

Cette indication était inefficace car le fait que toute question dans un problème relève d'une telle aide n'est peut-être pas connu d'un élève de Seconde : il l'apprendrait alors à cette occasion. Pour autant, l'élève arrivera-t-il à saisir, au-delà de cet apprentissage relatif au contrat didactique, un enjeu mathématique au problème. Par exemple, ce qui fait pour nous l'intérêt mathématique de son travail : comparer les encadrements des deux expressions et la manière de les obtenir, pour s'apercevoir qu'il doit y avoir là une technique, dont la généralité devra être interrogée ? Sans doute ne le fera-t-il pas : il n'est pas prévu d'étudier ce type de questions avant deux ou trois ans, lorsqu'une technique générique pourra être mise en place et s'il y arrive seul, c'est un élève remarquable ! On peut même penser qu'un tel enjeu n'est pas porté par le professeur qui a choisi l'exercice, il n'est pas sûr que les auteurs du manuel en aient été conscients. L'*indication* nécessaire est pourtant donnée deux fois : par l'énoncé puisque la question terminale est la même dans les deux, par le destinataire de la question qui termine en le disant : « comme précédemment » ; mais cette indication n'est pertinente que pour qui regarde le problème comme *développement dirigé d'une technique* et non comme occasion de mobiliser l'ensemble des techniques dont on dispose. Pour cela, il faut identifier ce que Chevallard (1999) nomme « un type de tâches, proposé à l'étude » comme la répétition de l'exercice le montre…

<u>Suite de la réponse</u>

II- Encadrement de $\sqrt{1+x}$

: Soit *x* un réel strictement positif. On pose:
: A=sqrt(1+x)
: B=1+x/2
: C=x²/8+sqrt(1+x)
: 1/Montrer que A, B et C sont strictement plus grand que 1.
A : Utilise la croissance de la fonction carré sur R+
B : Pas dur.
C : tu as C >= A >1
: 2/Comparer A² et B².
Développes et mets tout du même côté.
…/…
4/ Donner sans calculatrice un encadrement de sqrt(1,0002) et une valeur approchée de sqrt(1,0000001) à 10^-14 près.
Même méthode que précedemment.
Voila.

En effet, les gestes techniques élémentaires sont standards : « développes et mets tout du même côté », « réduis au même dénominateur », « utilise la croissance de la fonction carré », etc. Mais en suivant les étapes intermédiaires et en se rapportant à une comparaison des carrés de deux nombres positifs donnés, l'élève doit arriver à un encadrement de $\sqrt{1+x}$ en tant que formule algébrique qui permettra de faire des calculs numériques, tels que l'encadrement et la valeur approchée d'une classe de nombres pouvant être mis sous cette forme parce qu'ils sont solution d'une équation. Notons que ce genre de calcul ne pourrait être intéressant pour un élève que pour un motif numérique : lorsque le calcul dépasse la capacité de la machine. Par exemple ; pour comparer des nombres tels que A=1,000 000 000 1 et B=1/0,999 999 999 9 il sera pertinent de comparer $\frac{1}{1-x}$ et $1+x$.

En bref, l'ensemble des réponses fournies à ces questions montre non pas que l'élève peut répondre dans le cadre strict du contrat, mais que le professeur peut montrer à l'élève une réponse qui semble dans ce cadre : en quoi il se légitime d'avoir donné la tâche mais il se défausse de la responsabilité, réussir à désigner aux élèves l'enjeu de l'étude que demande la réalisation de la tâche. L'identification de la différence de leurs positions institutionnelles suppose l'analyse de ce que Chevallard (2002b) nomme *les niveaux de détermination de l'organisation mathématique étudiée*, c'est-à-dire du corps de mathématiques auquel l'un et l'autre se réfèrent dans l'analyse du problème et de ses enjeux. Le professeur travaille au niveau des grands problèmes d'un champ de problèmes ou du domaine d'une théorie quand l'élève est au niveau de la tâche isolée : que peut-il apprendre du type de tâches sous-jacent au problème, si le professeur se contente d'une démonstration de faisabilité sous contrat ?

2.2. Question posée par un étudiant de DEUG

L'énoncé de l'exercice fait la question, comme d'ordinaire sur les forums :

Soit *p* un nombre premier et *k* un entier tels que *p* et *k* sont premiers entre eux ;

a- Déterminer une relation entre C(p, k) et C(p-1, k-1)

b- En déduire que p divise C(p, k)

c-En déduire que pour tout a, b de Z, $(a+b)^p$ est congru à $a^p + b^p$ (modulo p)

d- Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$, n^p est congru à *n* (modulo p)

e- En déduire que si p ne divise pas n alors n^{p-1} est congru à *1* (modulo p)

f- Quel est le reste de la division euclidienne de 61843^{2403} par 13 ?

L'organisation de l'ensemble des questions nous montre encore (parfois même explicitement, par la consigne "en déduire") qu'il faudrait se servir de la question précédente comme hypothèse dans la résolution de la question qui la suit. Mais surtout, on pourrait remarquer que ce problème propose de faire un passage de la combinatoire scolaire au traitement algébrique de questions d'arithmétique, et c'est grâce à ce passage que l'ensemble des questions posées sera résolu. Si ici encore l'étudiant suit la progression de l'énoncé en mobilisant les savoirs sensibles de son cours au fur et à mesure, il arrivera au terme de sa tâche sans que les relations proposées par cette étude - par exemple entre les théorèmes à démontrer et les classes de congruence - soient construites. Ainsi, cette fois encore le problème ne devrait pas être pris pour une tâche à exécuter mais comme la présentation d'un *type de tâches* à étudier : nous allons voir que c'est d'autant plus le cas ici que les questions orientent vers la seule voie efficace pour un étudiant de DEUG en lui faisant démontrer des *résultats techniques* capitaux pour les problèmes de la même classe, mais qui pourtant ne font pas théorie pour ces problèmes (l'objet théorique ici est le petit théorème de Fermat, usuellement traité de manière plus directe dans les manuels).

Explicitons les étapes intermédiaires de la résolution du problème :

La première question suppose la mise en œuvre des connaissances de base de la combinatoire scolaire dont l'étude, telle que la question est formulée, ne devrait pas poser de problèmes. Mais si cette question n'avait pas été posée et si la première question avait été « Soit p un nombre premier et k un entier tels que p et k sont premiers entre eux, montrer que p divise C(p, k) », la recherche de résolution aurait pu être :

$$C_p^k = \frac{p!}{(p-k)!\,k!} = \frac{p(p-1)!}{(p-k)(p-k-1)!\,k!} = \frac{p(p-1)!}{(p-k)(p-1-k)!\,k!} = \frac{p}{p-k}.C_{p-1}^k$$

... et le mouvement aurait été interrompu d'emblée, car cela ne permet pas de conclure. Cela nous montre déjà qu'il s'agit d'entrer dans une organisation mathématique de grande envergure permettant de démontrer certains théorèmes qui pourront ensuite fonder une ou des technique(s) pour un certain type de problèmes.

$$(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k.a^{p-k}.b^k = a^p + C_p^1.a^{p-1}.b + ... + C_p^k.a^{p-k}.b^k + ... + C_p^{p-1}.a.b^{p-1} + b^p$$

Une telle manipulation implique une algébrisation qui appartient au calcul combinatoire, mais le mouvement évoqué se poursuit par la question c-) qui ouvre un travail au niveau des congruences. Compte tenu de ce que, pour tout $0 < k < p$, *p* divise C_p^k, on peut démontrer que $(a+b)^p \equiv a^p + b^p$ *(modulo p).*

Ensuite, après avoir montré par récurrence, en s'appuyant sur le résultat précédent, que pour tout *p* premier et $n \geq 1$, $n^p \equiv n$ *(modulo p)*, et après avoir démontré que, alors, $n^{p-1} \equiv 1$ *(modulo p),* la dernière question demande de déduire de ces résultats une technique pour un certain type de tâches que l'on pourrait désigner ainsi: « Comment trouver le reste de la division euclidienne par un nombre premier d'un (grand) nombre élevé à une grande puissance ? » et de la mettre en oeuvre dans un cas après avoir vérifié que ce cas en relevait. Mais pour autant, rien ne sera dit du secteur mathématique où de tels problèmes se rencontrent. Nous pouvons dire, seulement en remontant de la tâche au type de tâches puis au secteur, que l'organisation mathématique de ce type d'exercice met en jeu d'abord les démonstrations de certains théorèmes techniques qui permettent à leur tour l'élaboration d'une ou plusieurs techniques dont on ne sait dire les tâches qu'elles permettraient d'accomplir[8]. Ces techniques sont supposées prendre du sens grâce à la seule application qui en est proposée, retournant ainsi le mouvement d'enseignement traditionnel de la théorie vers la pratique. Il semble que l'on ait ici une forme didactique répandue à l'université, consistant à faire produire par l'étudiant une séquence didactique telle que le professeur aurait pu proposer dans une séance d'étude dirigée. Nous qualifierons ce geste d'enseignement en disant

[8] Par exemple, pour ce type de problèmes, trouver le nombre qui est congru à 1 se révèle souvent comme une manière rapide de former la réponse, sans pour autant qu'il y ait mise en œuvre d'une technique justifiée.

qu'il relève d'un « contrat universitaire » traditionnel en ces lieux ; notre analyse de ce geste dans le cas de la Seconde demeure cependant valide.

3. Des enjeux liés à l'enseignement/l'apprentissage des objets mathématiques

Ce que nous venons d'identifier comme des gestes d'étude attendus mais impossibles semble relever de situations vécues quotidiennement ou presque, tout au moins pour les élèves des classes à mathématiques. En effet, le contrat didactique qui est supposé régler l'étude autonome elle-même, produit - comme nous venons de le voir - une contrainte didactique sur l'organisation des énoncés de devoirs donnés « à la maison » telle que des objets mathématiques et des relations pertinentes pour donner du sens à l'activité sont écartés de la scène. Un fossé se creuse alors entre les apprentissages attendus des élèves et ce qu'ils peuvent effectivement comprendre des démarches mathématiques, qu'ils doivent étudier. Pour étudier cette hypothèse avec le soin nécessaire, nous allons nous intéresser plus particulièrement aux objets mathématiques de la question de l'élève de Seconde et au champ mathématique dont relève cette question.

3.1. Analyse du champ didactique et mathématique correspondant à la question posée par l'élève de Seconde

Si l'on voulait aller plus loin dans la comparaison des deux questions précédentes, on pourrait même remarquer que toutes les deux s'appuient sur un unique objet/concept mathématique : la relation binaire. Mais dans le deuxième cas il s'agit de relation d'équivalence alors que dans le premier, il s'agit d'une relation d'ordre qui apparaît comme concept permettant la comparaison[9]. Du point de vue du savoir mathématique en effet, l'objet *relation d'ordre* sous-tend les définitions de plus grand/plus petit élément, minorant/majorant, borne supérieure/inférieure etc. Cet objet est consubstantiel aux concepts de nombre, polynôme, graphe, variation, fonction etc. La *comparaison* est plutôt un concept scolaire, effectif sur des ensembles connus en extension, signifiant la détermination de l'ordre de deux éléments du même ensemble ordonné. Il devient, dans l'enseignement au Collège, un objet utile dans la comparaison des nombres et la résolution d'équations et inéquations. Il se traite le plus souvent par une technique de réduction au problème du signe de la différence des deux nombres. En classe de Seconde, tout en gardant son statut pour la comparaison algébrique ou pour la résolution d'équations et

[9] Une relation binaire R réflexive, antisymétrique et transitive dans l'ensemble E est appelée relation d'ordre dans l'ensemble E. Soit R une relation d'ordre dans un ensemble E, deux éléments x et y sont *comparables* si et seulement si l'une des propositions xRy ou yRx est vraie.

inéquations, cet objet est appelé à cohabiter avec les fonctions, telles que x^2 et $1/x$, couramment appelées les fonctions de référence ou les fonctions usuelles.

En effet, la partie algébrique du curriculum de la classe de Seconde s'appuie sur deux volets : le calcul algébrique, étudié depuis le début du collège, devrait gagner avec l'étude des fonctions non linéaires une certaine stabilité avant l'entrée dans l'Analyse en classe de Première ; à cette occasion, l'usage des équations et inéquations se voit élargi. Notamment, les rédacteurs des programmes notent que *"les calculs numérique et algébrique ne doivent pas constituer un chapitre de révisons systématique mais se retrouvent au travers des différents chapitres. En particulier ils seront traités en relation étroite avec l'étude des fonctions"*[10]

Le curriculum prévoit donc une étude nouvelle du calcul algébrique, en intégrant notamment les fonctions et leur étude dans les questions demandant de tels calculs qui jusque-là ne se justifiaient que d'eux-mêmes. C'est dans cette organisation nouvelle que la question posée à l'élève de Seconde semble avoir trouvé sa place. Car les questions intermédiaires qui aident l'élève demandent de comparer, à chaque fois, deux de trois nombres donnés par une expression algébrique. Par ailleurs, l'enjeu d'un encadrement de $\sqrt{1+x}$ est important car, comme la lecture même de la réponse donnée nous le montre, nous avons ici affaire aux fonctions de référence dans leur usage savant en analyse, qui est relatif au calcul numérique (Ovaert, 1988). Il s'agit bien sûr de s'appuyer sur la croissance de la fonction carré sur R+ mais aussi d'utiliser l'approximation des fonctions pour obtenir des approximations de nombres. Il nous faut donc montrer avec soin que les comparaisons demandées peuvent être très bien menées à terme par les élèves par une méthode algébrique. Soient donc les questions successives, les savoirs techniques qui peuvent être à disposition d'un élève et les manières de les utiliser dans des organisations techniques efficaces :

1) *a et b étant deux réels, l'hypothèse $a \leq b$ revient au même que l'hypothèse « la différence b-a est positive» ou b-a>0.* De là vient la méthode, appelée au niveau secondaire *« la méthode de comparaison »* ou *« la méthode de différence ».* Ainsi, le traitement algébrique de la question « comparer A^2 *et* B^2 » donnera lieu à la résolution suivante : $B^2 - A^2 = (1+\frac{x}{2})^2 - (\sqrt{1+x})^2 = \frac{x^2}{4}$, ce qui veut dire que, x^2 étant strictement *positif*, $B^2 - A^2 > 0$ D'où $B^2 > A^2$

Mais le traitement de cette question ne s'arrête pas là, puisqu'on nous demande dans la suite d'en déduire que $A < B$. Pour ce faire, nous pouvons partir de l'étape

[10] Programme de mathématiques de la classe de Seconde, Bulletin officiel hors série n°2, le 30 août 2001.

précédente en mobilisant un autre savoir, plus raffiné puisque c'est une variante de la technique de *« la quantité conjuguée »*, fondée sur une *« identité remarquable »*.

2) $B^2 - A^2 = (B - A)(B + A) > 0 \Leftrightarrow B - A > 0, (B + A > 0)$ *D'où,* $B > A$.

Ce traitement algébrique permet une démonstration rapide du sens de variation de ce qu'on appelle la fonction carré (x^2), objet d'enseignement central en classe de Seconde. En effet, pour étudier le sens de variation d'une fonction, la technique la plus connue consiste à appliquer la définition de monotonie qui en constitue aussi la technologie :

3) *Une fonction est croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I, si pour tous réels a, b appartenant à I tel que* $a \leq b$, *alors* $f(a) \leq f(b)$ *(respectivement* $f(a) \geq f(b)$ *).* La technique correspondante est à peu près impraticable parce qu'elle demande d'abord de choisir les intervalles où la fonction est croissante (ou décroissante) avant de déterminer l'ordre de *f(a)* et *f(b)* suivant l'ordre de *a* et *b,* pour démontrer cette croissance, déjà supposée. Deux traitements algébriques sont envisageables :

a) Partant des nombres *a* et *b* compris dans *I*, constituer l'ordre de *f(a)* et *f(b)* relativement à l'ordre de *a* et *b* en suivant des règles de transformation du calcul algébrique ;

b) Etudier le signe de *f(b)-f(a)* relativement au signe de *b-a*.

Suivant la deuxième méthode, pour tout réel *a et b tels que* $0 \leq a < b$, *b-a* étant positif comme *b+a*, leur produit $(b-a)(b+a)=b^2-a^2$ est positif ; d'où $b^2>a^2$ *et* $f(b)>f(a)$. C'est-à-dire que la fonction x^2 est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$. Pourtant, il ne s'agit pas de la même démonstration que la 2). Car c'est l'hypothèse réciproque qui lui correspond. Soit ; *pour tous réels a et b tels que* $0 \leq a < b$ *et* $b^2>a^2$ *alors* $b>a$. Il s'agit ici d'un savoir technique qui n'est en aucun endroit démontré dans les manuels et dont l'étude n'est pas demandée dans les programmes alors que son usage simplifie grandement le travail, comme le montre la réponse faite à l'élève de Seconde par un élève de Polytechnique pour qui cela va de soi.

Enfin, considérée du point de vue fonctionnel, la question de l'exercice est supposée mettre en œuvre des propriétés de la fonction carré, notamment ses variations ou l'étude de son extremum, dans des usages qui ne semblent jamais établis en tant que tels en classe de Seconde.

En effet, le fait d'utiliser les variations de la fonction carré pour résoudre une question algébrique relève d'un vrai défi ; d'abord parce que les variations d'une fonction s'appuient, comme nous l'avons vu, sur une définition technologique délicate à mettre en œuvre ; mais aussi parce que, dans l'état actuel du programme de Seconde, cette mise en œuvre est un enjeu imprenable. Pour montrer qu'une fonction telle que $f(x) = 9 - (x+2)^2$ est décroissante sur l'intervalle $[-2 ; +\infty[$, la technique réellement demandée serait la suivante[11] ;

Soit a et b deux réels tels que $-2 \leq a < b \Rightarrow 0 \leq a+2 < b+2$, *donc a+2 et b+2 sont deux nombres positifs, rangés dans l'ordre croissant. Comme la fonction carré est croissante sur* $[0 ; +\infty[$ *, on peut écrire ;*

$$(a+2)^2 < (b+2)^2$$

$$-(a+2)^2 > -(b+2)^2$$

$$9-(a+2)^2 > 9-(b+2)^2$$

Donc, $f(a) > f(b)$

Conclusion : Pour tout a et b de $[-2 ; +\infty[$ *tels que* $-2 \leq a < b$, $f(a) > f(b)$
Donc la fonction $f(x) = 9 - (x+2)^2$ *est décroissante sur l'intervalle* $[-2 ; +\infty[$.

Nous pouvons voir que c'est la propriété de la fonction carré qui devient le critère lorsqu'il s'agit de décider de l'ordre de deux nombres positifs élevés au carré. Mais le fait d'utiliser cette fonction carré comme référence ne va pas de soi. Parce qu'il ne s'agit pas, pour les élèves, d'un usage ordinaire en calcul numérique. Pour en faire une propriété technique il faut mobiliser le non ostensif fonction à propos d'un objet ordinairement associé au calcul littéral, prendre en compte la croissance de la fonction, et cette fonction est x^2, un objet qui ne se voit que pour qui pense *f(x)* en termes de « fonction composée ».

Il y a donc une difficulté particulière dans le fait que la technique de résolution demandée est une sorte de mélange de deux types de techniques, à savoir la technique algébrique précisée plus haut et une technique fonctionnelle qui consiste à se servir des fonctions dont les variations sont connues, dans un geste inimaginable pour qui ne connaît pas les fonctions composées ou au moins la notion de changement de variable.

La référence à la fonction carré est ici introduite par le contrat didactique dans ce sens que le professeur demande aux élèves – en fonction des injonctions officielles – de justifier par les variations de la fonction carré dont l'étude a eu lieu quelques semaines avant en lien avec la résolution d'inéquations. Ce qui fait que

---

[11] Il s'agit d'une technique de résolution observée dans des classes de Seconde dans le cadre de notre travail de thèse. L'exemple choisi est le troisième exercice dans l'introduction de cette étude dans une des classes observées.

l'activité est nécessairement dénuée de sens pour les élèves, au moins pour ce qui concerne cette étape de la résolution[12].

En résumé, la technique est essentiellement basée sur le calcul algébrique qui assure le montage de la fonction. La fonction carré dont la variation n'intervient que d'une manière non indispensable à la mise en œuvre de la technique constitue cependant l'objet du contrat, c'est-à-dire que cet usage de la fonction carré constitue l'enjeu didactique du programme et oriente le projet du professeur.

Conclusion

Au-delà du caractère éminemment problématique de l'aide que peuvent donner des systèmes auxiliaires comme les forums sur Internet, nos analyses montrent qu'il est nécessaire de s'interroger sur une partie du travail des élèves qui est considérée la plupart du temps comme allant de soi. Nous pouvons dire que le travail laissé à la charge des élèves échappe souvent aux regards didactiques, et pourtant ce travail est pour les deux actants du système d'enseignement (élève et enseignant) un enjeu institutionnel majeur.

Nous avons ainsi montré sur des exemples que ce travail a deux dimensions que la recherche didactique doit prendre en compte : une dimension liée au contrat didactique, aux gestes d'étude attendus, et une dimension épistémique relative aux objets mathématiques des situations proposées, qu'il convient de considérer comme un champ de signification et d'investigation. Dans un sens précis, nous avons montré que devant une telle situation, les objets mathématiques - certains visibles, d'autres cachés - s'agencent les uns avec les autres - à différents niveaux de profondeur - jusqu'à constituer un champ pertinent sur lequel va s'appuyer l'étude autonome de l'élève, en lui donnant les outils d'action mais aussi et c'est essentiel si l'on pense qu'un acteur humain n'agit jamais sans anticiper quelque chose des effets de son action, les moyens d'identification et de validation de ses propres démarches. Si ce champ ne se présente pas à l'élève en tant que tel, via l'enseignement dispensé et le contrat d'étude mis en place, quel sera le référentiel de l'élève dans la situation de travail à la maison où il n'y a pas de professeur pour organiser et diriger son étude ?

On se trouve alors devant une question didactique importante : comment imaginer et mettre en place une analyse qui nous permet d'identifier le champ mathématique dont relève une situation d'étude ? Comment prendre en compte les objets et les relations qui donnent du sens à l'activité et assurent la dimension autonome de la démarche suivie ? Pour répondre à cette question, nous proposons un concept

[12] Au moment du contrôle, seul un élève sur 33 arrive à réussir dans une situation semblable. Une grande partie des erreurs commises concerne cette étape de la résolution.

didactique, celui de *site mathématique*[13] qui désigne le champ des objets et des relations pertinentes, appelé par la situation, et nous proposons un modèle d'analyse autour de ce concept, consistant à identifier les objets principaux du site mathématique en question, les concepts correspondants et les techniques d'étude liées à ces concepts. Le site mathématique dans le cas de la question de l'élève de Seconde sera alors un site « algébrique – fonctionnel ». Les objets principaux de ce site seraient par conséquent constitués des objets/concepts tels que nombre, polynôme, relation/graphe, équation, fonction, variation, ordre et inéquation… Ce site s'appuierait sur un nombre important de concepts mathématiques, chacun appartenant un ou plusieurs domaines mathématiques au sens strict et ces concepts seraient convoqués en fonction des techniques qu'ils permettent de mettre en œuvre et dont ils assurent le sens, et ces techniques vont convoquer d'autres concepts, ainsi de suite.

Nous pensons qu'une telle analyse devrait tout d'abord permettre de montrer la pertinence épistémique de certains objets, les relations entre eux et étudier les relations et les objets particulièrement soutenus par le contrat didactique à propos d'une organisation didactique proposée. Par ailleurs, comme il s'agit là d'une vision assez souple et évolutive des objets mathématiques impliquées dans une situation d'étude, cette analyse devrait permettre d'étudier les objets du curriculum comme un ensemble, d'identifier les phénomènes de rupture et de continuité et les conséquences de ceux-ci sur les décisions du professeur et l'étude autonome des élèves.

---

[13] En référence à la notion du *site archéologique* où on effectue des fouilles. Pour plus d'informations au sujet de la notion de *site mathématique* et de son usage à des fins didactiques, voir Duchet & Erdogan (2005) et notre travail de thèse qui sera bientôt disponible.

Bibliographie

BROUSSEAU G. (1995), L'enseignant dans la théorie des situations didactiques. *Actes de la VIII^e^ Ecole d'été de didactique des mathématiques,* Saint - Sauve, 22-31 août.

BROUSSEAU G. (1998), *La théorie des situations didactique,* La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1990), *Notes sur la notion de « Boutique de mathématiques »,* Note interne, IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD Y. (1992), Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherche en Didactique des mathématiques* **12-1**, 73-112.

CHEVALLARD Y. (1995), Familière et Problématique, la figure du professeur. *Actes de la VIII^e^ École d'été de didactique des mathématiques*, Saint - Sauves, 22-31 août.

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques* **19-2**, 221-266.

CHEVALLARD Y. (2002a), Organiser l'étude, Structure et Fonctions. In Dorier Jean-Luc (ed) *XXI^ème^ école d'été de didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (2002b), Organiser l'étude : Ecologie et Régulation. In Dorier Jean-Luc (ed) *XXI^ème^ école d'été de didactique des mathématiques* La Pensée Sauvage.

DUCHET P. & ERDOGAN A. (2005), Pupil's autonomous studying: From an epistemological analysis towards the construction of a diagnosis. *Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME-4),* Sant Feliu de Guíxols, Spain, 17- 21 February 2005.

ERDOGAN A. (2001), *La dimension didactique des forums de questions mathématiques*, Mémoire de DEA, Université Claude Bernard- Lyon1.

ERDOGAN A. (2005), Forums on Internet: tools for teaching and learning? Proceeding in CD, *Biltek2005: International Informatics Congress,* 9-12 juin 2005, Eskisehir/Turkey.

FÉLIX CH. (2002), *Une analyse comparative des gestes de l'étude personnelle : le cas des mathématiques et de l'histoire,* Thèse du troisième cycle, Université d'Aix-Marseille I.

SENSEVY G., MERCIER A. & SCHUBAUER-LÉONI M.L. (2000), Vers un modèle de l'action didactique du professeur à propos de la course à 20, *Recherches en didactique des mathématiques* **20-3**, 263-304.

OVAERT J.-L. (1988), Histoire du calcul numérique, *Encyclopædia Universalis*.

ABDULKADIR ERDOGAN
DIDIREM – UNIVERSITÉ PARIS VII
erdogan_kadir@yahoo.fr

ALAIN MERCIER
UMR ADEF
Université de Provence, INRP,
IUFM d'Aix-Marseille
mercier@inrp.fr