**CARLO MARCHINI, MARIA GABRIELLA RINALDI**

# LES PRÉCONCEPTIONS DES ENFANTS DE HUIT ANS SUR LES TRIANGLES ISOCÈLES[1]

**Abstract. Preconceptions of eight year old children on isosceles triangles**
In an experimental study about isosceles triangles, we observed pupils' solution strategies revealing different naive approaches to the problem of measure in geometry. Our experiment discovered phenomena that should be accounted in geometrical teaching.

**Résumé.** Pendant une expérimentation sur des triangles isocèles, nous avons observé les stratégies de solution des enfants. Ces stratégies nous ont montré des approches naïves différentes relatives au problème de la mesure en géométrie. Notre expérimentation a mis au point des phénomènes dont on doit tenir en compte dans l'enseignement de la géométrie.

**Mots-clés.** Géométrie, triangle isocèle, préconceptions, mesure.

## 1. La recherche

Notre groupe a étudié l'influence de l'orientation du dessin (Cooper, 1998) dans la perception du caractère isocèle pour les triangles (Marchini & alii, 2002) en collaboration avec Martin Cooper. Le même test a été utilisé en Italie et en Australie.

En Italie la recherche a été exécutée dans six classes de troisième comptant en tout 105 écoliers de huit ans. Les auteurs du présent travail et Lucia Grugnetti avaient préparé les outils et comment exécuter le test, en collaboration avec M. Cooper. Les écoles dans lesquelles nous avons opéré sont de différents endroits de l'Italie du Nord (Viadana, Parma, Cattolica). Dans chaque école nous avons choisi un couple de classes de troisième, avec le même instituteur pour les mathématiques et dans lesquelles les arguments de géométrie n'avaient pas encore été présentés. La présence de deux classes parallèles dans chaque école était nécessaire pour mettre en évidence comment l'apprentissage influence les images mentales[2] des jeunes :

[1] Travail réalisé dans le cadre des activités de l'Unité de recherche en Didactique des Mathématiques de Parme. Ce travail, sauf la Figure 2, est la traduction en français d'un article à paraître dans les Acte du CERME 4.

[2] Nous nous référons à l'image mentale dans le sens de (Fischbein, 1993) : « une représentation sensorielle d'un objet » ; dans notre opinion l'établissement d'une image mentale est le premier pas en géométrie puisque « la géométrie traite d'entités mentales (les soi disant figures géométriques), qui possèdent simultanément des caractères conceptuels et

**ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES**, volume 12, p. 5 - 16.

nous avons introduit les triangles isocèles de deux façons différentes : les «toits» (A), et les «drapeaux» (B) (Figure 1) (Les mots « toit » et « drapeau » ne furent pas utilisés dans l'expérimentation ; ici ces mots servent comme référence pour les triangles A et B, respectivement).

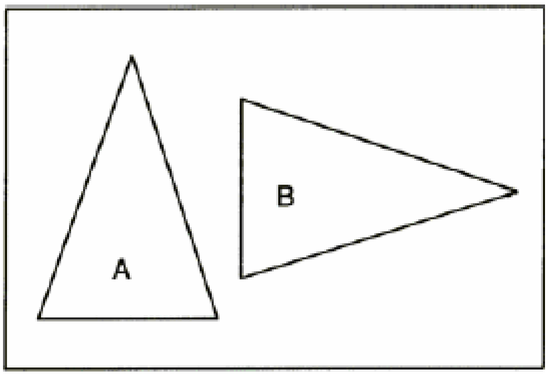


**Figure 1**

Les tests ont été exécutés en même temps dans les deux classes parallèles pour éviter l'échange d'informations entre enfants de la même école. L'entraînement avec les triangles A a concerné 49 écoliers ; les autres 56 ont eu la présentation avec les triangles B. Nous avons choisi d'introduire la notion de triangle isocèle comme triangle ayant (au moins) deux côtés égaux. Ce choix est en accord avec la tradition scolaire d'Italie, puisque la mesure des angles est introduite plus tard que la mesure des segments. Il a sussi des raisons étymologiques. Nous avons évité d'utiliser le mot «congruence» car nous pensons que ce mot est relié à des intuitions secondaires (Fischbein, 1987). Les résultats italiens et ceux de l'Australie ne sont pas comparables puisque dans l'expérimentation en Australie la condition « être isocèle » a été introduite comme l'égalité d'au moins deux angles. L'expérimentation italienne nous a donné des résultats inattendus et nous avons eu l'occasion d'observer directement la présence de fortes préconceptions au regard du triangle et de la mesure.

## 2. L'expérimentation

Nous avons conduit l'expérimentation dans l'école de Viadana (le 12 novembre et le 21 novembre 1997) dans deux classes : III C (15 écoliers) et III D (20 écoliers). Le 12 novembre, la première partie de notre intervention a été dédiée à l'entraînement et la seconde au test ; le 21 novembre nous avons commencé avec le test et poursuivi par des interviews écrites.

Nous avons demandé aux institutrices de ne pas parler du test et de ne pas traiter la géométrie entre nos deux interventions en classe. L'activité du 12 novembre a pris une heure ; celle du 21 novembre à peu près quarante minutes.

Dans ce travail nous mettons au point ce que nous avons directement observé à Viadana. La même expérimentation a eu lieu dans d'autres écoles (Parma, 12 et

figuraux ». Il est remarquable que dans *op. cit.* le premier exemple soit un triangle isocèle dessiné comme le triangle A de la Figure 1.

19 décembre 1997 ; Cattolica 23 et 30 janvier 1998) en suivant les mêmes modalités, sauf les interviews écrites, puisque dans la première expérimentation nous avons obtenu des résultats peu significatifs. Les chercheurs qui ont conduit les expérimentations dans les autres écoles nous ont confirmé la présence de comportements semblables des enfants. Pour améliorer l'engagement des écoliers nous avons présenté le test comme une compétition entre des jeunes du même âge. Nous avons commencé le 12 novembre en dessinant des triangles (isocèles ou non) au tableau noir : en III C en «toit» et en III D en «drapeau» cette activité fut brève et nous avons établi le glossaire (triangle, côté, triangle isocèle). Nous avons mis en évidence l'égalité ou la différence des côtés avec nos doigts. Ce que nous avons fait peut être placé aux niveaux 1 et 2 de Van Hiele (Van Hiele, 1986). Nous avons choisi d'utiliser un langage géométrique très pauvre avec seulement les mots «triangle», «côté» et «isocèle», dans le but d'éviter des interférences avec des modèles physiques.

Par la suite nous avons distribué à chaque écolier un petit livre pour l'entraînement (Figure 2, Annexe 1), contenant les dessins de 10 triangles en «toit» (en III C) et en «drapeau» (III D). Les triangles dessinés sur le petit livre étaient les mêmes et dans le même ordre : 5 d'entre eux étaient isocèles et les 5 autres ne l'étaient pas. Les petits livres utilisés dans les classes différaient seulement pour l'orientation des triangles qui était cohérente avec celle des dessins au tableau noir. Pour chaque triangle du petit livre nous avons spécifié s'il était isocèle ou non en montrant avec nos doigts l'égalité (ou non) des côtés. En raison de la nouveauté et de la complexité du mot « isocèle », notre présentation orale a eu le but de faciliter l'*intériorisation,* dans le sens de (Sfard, 1991), du terme géométrique et du concept qu'il véhicule en disant lentement en succession « isocèle », « isocèl… », « iso… », « i… » et en attendant que les enfants complètent le mot. Dans notre idée une dévolution progressive aux écoliers de la répétition du mot « isocèle » les aurait aidés dans la création de leur propre image mentale correcte.

La troisième étape du 12 novembre a été le test (figure 3) : nous avons donné le même petit livre à deux classes. Dans celui-ci il y avait les dessins de 20 triangles dont ceux avec les numéros 1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 15 et 19 sont des triangles isocèles (Figure 3, Annexe 2). Sur le petit livre figuraient les triangles sur les pages de droite et sur les pages de gauche, les questions (à deux réponses) le triangle est-il isocèle ou non ? Le temps dédié au test a été inférieur à 10 minutes et pour y répondre les enfants ne pouvaient utiliser qu'un stylo à bille.

Dans la deuxième rencontre avec les classes (21 novembre 1997) nous avons présenté directement le test en utilisant le même petit livre et mené seulement après le test l'interview écrite, dans laquelle on demandait s'ils avaient trouvé le test facile ou non.

Les dimensions, l'orientation et la succession des triangles dans le petit livre d'entraînement et dans le test furent décidées avec M. Cooper qui ensuite les présenta aux écoliers d'Australie. La mesure des côtés des triangles était comprise entre 8 et 12 centimètres environ et dans chaque triangle les différences de longueur entre (au moins deux de) ses côtés étaient assez petites pour ne pas être perçues et exiger que l'enfant se serve d'autres stratégies pour mesurer.

## 3. Résultats et analyse statistique de l'expérimentation

Dans (Marchini & alii 2002) on présente et commente les résultats (moyens) de l'expérimentation. Sur la base de ces résultats nous avons classifié les questions en trois catégories : « très faciles » (avec un taux de succès ≥ 75%), « facile » (avec un taux de succès ≥ 50% et < 75%) et « difficile » (avec un taux de succès < 50%). En accord avec cette classification les questions <u>Q2</u>, <u>Q5</u>, <u>Q7</u>, Q8, Q9, Q11, Q12, Q13, <u>Q14</u>, Q16 et Q18 ont été très faciles, Q3 et Q6 ont été faciles et les autres <u>Q1</u>, <u>Q4</u>, <u>Q10</u>, <u>Q15</u>, <u>Q17</u>, <u>Q19</u> et Q20 ont été difficiles. Le soulignement indique les triangles isocèles. Il nous semble évident que les écoliers ont reconnu avec difficultés le caractère d'être isocèle, ou mieux l''étrange' orientation des triangles n'a pas permis d'appliquer la métaphore du balancement, laquelle : « is so basic that all *homo sapiens* – no matter when and where they live on earth – have experienced it […] this experience [le balancement], it's working out in cultural expressions such as language, art, dance, science » (Nùñez & alii, 1999).

Nous avons relevé le taux maximum de réponses correctes pour Q9, le minimum pour Q1. Nous remarquons que Q3 a été facile pour les écoliers A et difficile pour les enfants B. La question Q1 a été la plus difficile pour les deux entraînements ; la plus facile a été Q9 pour les écoliers « toit » et Q7 pour les enfants « drapeau ». La question Q7 présente un triangle isocèle typique dans la position « toit » et les résultats globaux ont été meilleurs pour les écoliers « drapeau ». Ce résultat était inattendu. Un autre point d'intérêt a été le fait que les enfants « drapeau » ont obtenu de meilleurs résultats à toutes les questions difficiles, sauf Q20.

Seulement quatre questions parmi les seize premières ont été difficiles et trois parmi les quatre dernières. Nous supposons que le test a fatigué les écoliers. Les triangles isocèles 2, 5, 7 et 14 ont un axe de symétrie « horizontal » ou « vertical » et ces configurations sont plus proches des images mentales des enfants. Quant aux réponses erronées relatives à Q1, Q4, Q10, Q15, Q17 et Q19 il nous semble clair que la position « étrange » de ces triangles isocèles a influencé les réponses, en accord avec l'hypothèse de la recherche, qui est « l'orientation conditionne la perception ».

Les résultats moyens du deuxième test ont été meilleurs, particulièrement pour l'entraînement B. Les augmentations des valeurs moyennes ont exigé une analyse plus approfondie : une raison pourrait être une attention plus soutenue dans l'exécution du test, comme nous l'ont confirmé les autres chercheurs. Une seconde hypothèse est que l'activité d'entraînement a été suffisante pour fixer un apprentissage. La seconde hypothèse s'appuie sur :

– l'intervalle de temps entre le deux tests ;

– l'absence de commentaires sur le premier test et de leçons de géométrie dans cet intervalle ;

– et surtout le peu de temps dédié au test (15 secondes pour tourner la page, regarder le dessin et répondre à la demande), ce qui a empêché dans le second test les écoliers de se fier à leur mémoire.

Ainsi l'existence d'une amélioration des résultats nous semble notable même sans être significative du point de vue de la statistique. Pour analyser avec des outils statistiques si les réponses du premier test ont influencé les résultats du deuxième test, nous avons employé l'index de crédibilité de l'implication de Larher (Larher, 1991 ; Gras & Larher, 1993) (Figure 4, Annexe 3). Cet index est une mesure probabiliste (qui prend ses valeurs entre 0 et 1) de l'implication des deux attributs.

Nous avons pu utiliser cet index puisque les réponses des deux tests sont des ensembles de données exprimées par 0 (erronée) et 1 (exacte) ; ces ensembles peuvent être considérés comme des fonctions caractéristiques de deux sous-ensembles ou attributs. Les valeurs de l'index sont comprises entre 69.35% (Q9) et 99.88% (Q6) : nous interprétons ces valeurs comme une corroboration du fait que le premier test a influencé le second et que l'activité proposée a aidé les enfants à obtenir un apprentissage suffisant des triangles isocèles. Nous n'avons pas pu évaluer la persistance de ce type d'apprentissage avec un troisième test car le déroulement du programme scolaire prévoyait des leçons de géométrie.

## 4. Résultats et commentaires sur l'expérimentation de Viadana

La Table 1 (Annexe 3) contient des résultats statistiques relatives à l'expérimentation de Viadana (en cursif dans la Table) comparés avec les résultats de l'expérimentation entière pour prouver que l'échantillon de Viadana était cohérent avec l'échantillon total des six classes. Les valeurs moyennes que nous avons trouvées n'étaient pas loin de celles de l'expérimentation entière : l'entraînement en « drapeau » a fourni des résultats moins bons que l'entraînement en « toit » dans les deux tests. Grâce aux écoliers « toit » le résultat du deuxième test à Viadana a été meilleur que dans l'expérimentation entière : les améliorations pour les enfants « toit » et pour ceux « drapeau » ont été comparables avec une valeur plus grande pour les garçons B.

Pour les écoliers de Viadana les questions Q5, Q7, Q8, Q11, Q12, Q13, Q14, Q16 et Q18 étaient très faciles, Q2, Q3, Q6 et Q20 était faciles et enfin Q1, Q4, Q10, Q15, Q17 et Q19 étaient difficiles. La question la plus facile a été Q18 globalement, Q8 pour les écoliers « toit » avec 100% de réponses exactes et Q11 pour les enfants « drapeau ». Le pire résultat global pour les écoliers B était Q1 et Q4 pour les garçons « toit ». En comparaison avec l'expérimentation entière dans les classes de Viadana, Q2 était facile au lieu d'être très facile et Q20 était facile au lieu d'être difficile. La présence de meilleurs résultats pour les écoliers « drapeau » sur les demandes difficiles a été confirmée sauf pour Q10 et pour Q7.

Suivant les catégories introduites, globalement le test a été très facile pour trois enfants (A : 1 ; B : 2), facile pour 31 écoliers (A : 14 ; B : 17) et difficile seulement pour un garçon B. La fréquence moindre de réponses correctes était de 42.5%, la fréquence majeure 82.5% ; toutes deux furent obtenues par des écoliers « drapeau ».

Avant de commencer l'expérimentation nous avons demandé à l'institutrice de mathématiques une évaluation qualitative (très insuffisant, insuffisant, suffisant, bon, optime) des ses élèves et nous l'avons comparé ensuite avec les résultats des tests. Les évaluations de l'institutrice présentaient une dispersion plus grande que celle des résultats. Une interprétation possible peut être relative à la nature du savoir que nous avons induit avec notre activité. L'évaluation du maître rassemble beaucoup d'informations sur l'enfant (la compétence linguistique, la bosse de mathématiques, la soin et l'application,…), tandis que nous avons testé un unique aspect lié à des habiletés visuelles en évitant les compétences linguistiques. Ce qui peut justifier la similarité des résultats des tests et la dissemblance entre le test et l'évaluation de l'institutrice. Par exemple des écoliers peuvent être handicapés dans l'évaluation du maître par rapport à une compétence insuffisante sur un sujet que ne demande pas de compétence visuelle.

La présence de la préconception du triangle en « toit » se manifesta clairement chez les écoliers exécutant les tests : nous avons observé que la majorité des enfants tournait le petit livre ou bien leur tête pour placer le triangle dans la position « toit » et comparer le dessin avec leur archétype de triangle, (Medici & alii, 1986) ; nous avons observé ce comportement dans la classe « drapeau » aussi. Cette préconception pourrait prendre origine dès l'expérience : le véritable toit pourrait être un objet représentant de la meilleure façon le triangle isocèle, dans le sens de (Collin & Loftus, 1975). La différence perceptive (Arnheim, 1974) avec la préconception en « toit » nous semble justifier la présence d'une structure d'apprentissage flexible et dynamique dans le sens de (Singer, 2001). La présence de la préconception en « toit » est confirmée aussi par (Vighi, 2003 et 2004), comme une partie d'un « concept image » (Tall & Vinner, 1981). Dans notre opinion l'entraînement en « toit » soutient une intériorisation suivant des structures rigides, dans le sens de (Singer, 2001), car il renforce la préconception installée :

ainsi peut on expliquer que les garçons « drapeau » aient obtenu de meilleurs résultats dans les questions plus difficiles.

Les petites différences dans les mesures des côtés en liaison avec l'orientation « étrange » des figures que nous avons proposées ont eu pour effet d'activer les préconceptions des enfants relatives au mesurage. Nous avons observé des écoliers « transportant » des longueurs comme des peintres. Certains écoliers ont préféré « construire un compas » avec leurs doigts, même si leur institutrice n'avait pas encore introduit le compas (mécanique) dans les classes. D'autres ont utilisé leurs doigts comme une règle pour mesurer : ils ont parcouru les côtés en procédant par saccades, et dans une sorte de subdivision de la longueur, l'espace d'une saccade comme unité de mesure, ce qui correspond à une première approche de la mesure (qu'ils n'avaient pas encore vue en classe).

Dans plusieurs cas un élève a employé simultanément des stratégies différentes selon le *dictum* de (Vergnaud, 1990) : quand un sujet n'a pas les compétences requises, il utilise plusieurs schémas au même instant.

## Conclusion

L'expérimentation entière et ce qui s'est passé à Viadana ont révélé que les écoliers ont acquis un savoir grâce à ces brèves activités. Nous expliquons ces résultats par la présence de préconceptions qui ont aidé les enfants dans l'apprentissage. Ainsi le maître doit repérer les préconceptions de ses écoliers.

De plus l'expérimentation a révélé que les « outils » de mesure sont « embodied » (incorporés) et nous a montré comment la géométrie métrique a ses racines dans des préconceptions ou dans des connaissances qui naissent hors de l'école.

Selon nous, l'expérimentation a mis à jour des préconceptions importantes que le maître ne peut pas négliger. La prédominance, que nous avons vérifiée, de la conception « toit » sur celle « drapeau », est en même temps une aide et un obstacle à la conceptualisation de la figure géométrique du triangle, en tant qu'elle semble contribuer à instaurer une conception rigide qui conduit à la réussite presque uniquement dans les situations les plus typiques.

Au regard de la présence de préconceptions relatives à la mesure, avant que le sujet ne soit traité en classe, on peut penser qu'elles sont le résultat d'un apprentissage acquis avant l'école ou en dehors de l'école, en réponse aux problèmes pratiques. Ces préconceptions peuvent être objet de réflexion de la part de l'enfant, en constituant un système de croyances (*beliefs*).

Tout ça peut être un point de départ pour le maître qui doit faire comprendre à l'enfant l'importance des connaissances préexistantes comme connaissances légitimes pour l'école.

**Annexe 1**

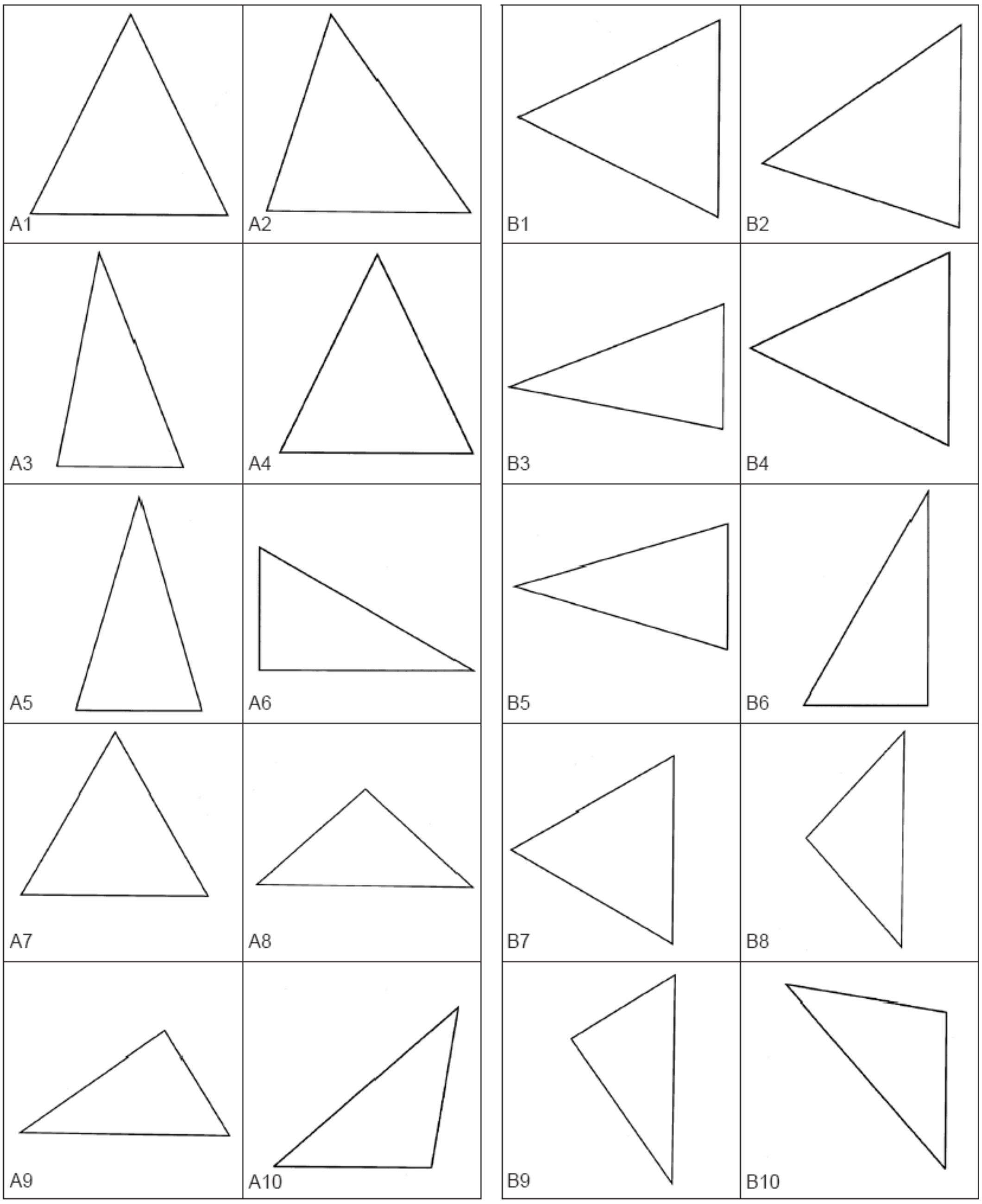


**Figure 2**

**Annexe 2**

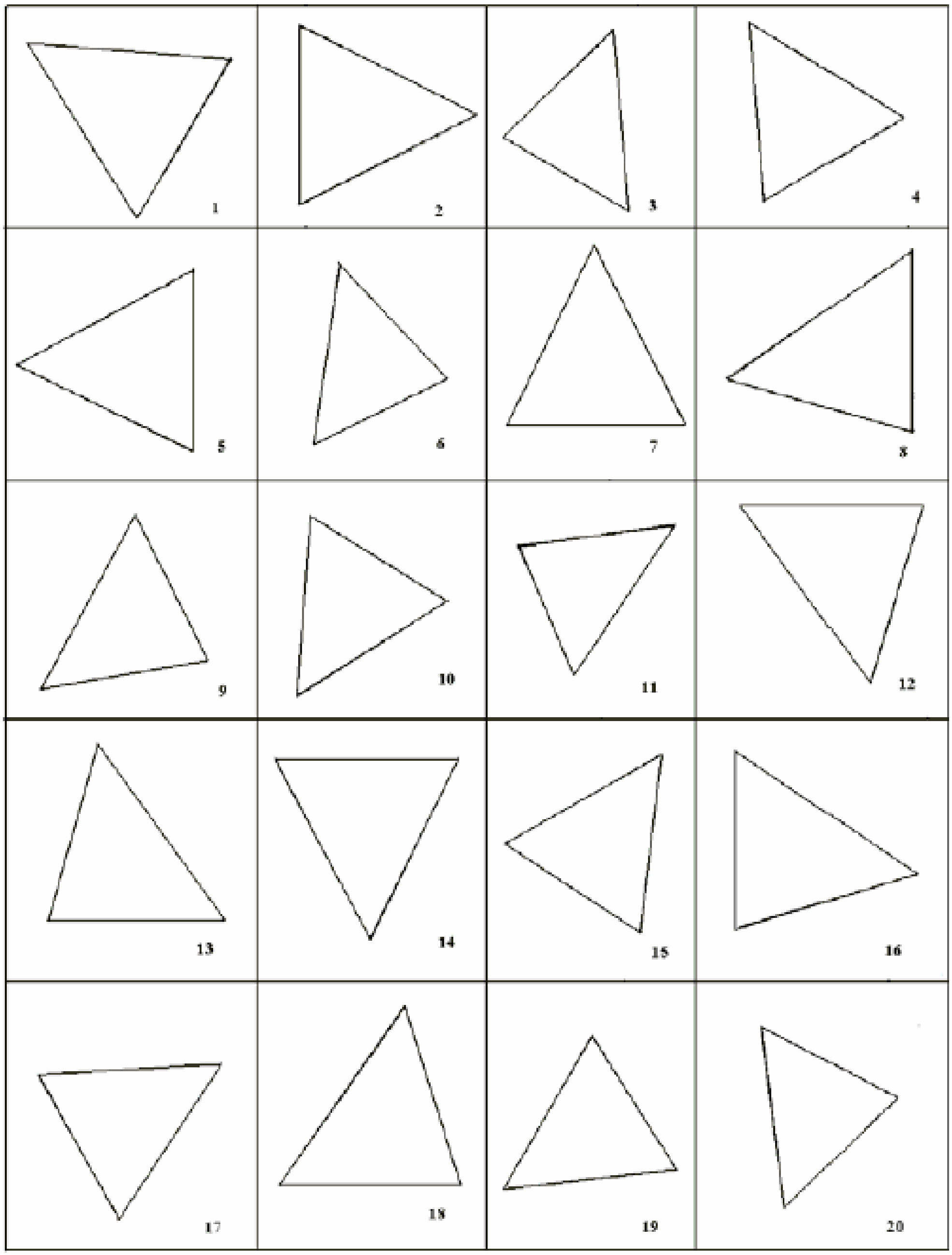


**Figure 3**

**Annexe 3**

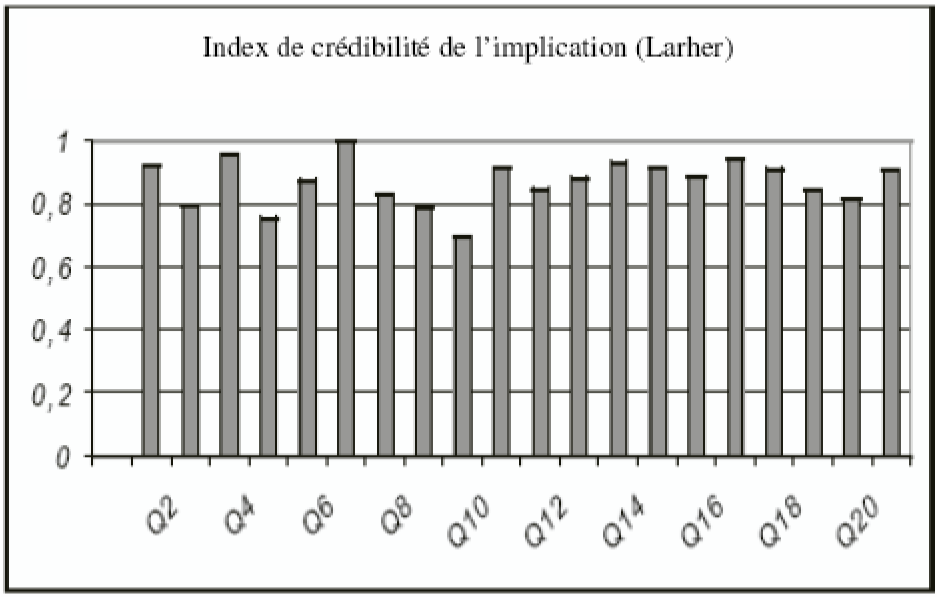


**Figure 4**

| | Global | A | B |
|---|---|---|---|
| Nombre d'écoliers | 105 | 49 | 56 |
| *Exp. de Viadana* | *35* | *15* | *20* |
| Réponses | 98.81% | 98.72% | 98.88% |
| *Exp. de Viadana* | *99.43%* | *98.83%* | *99.88%* |
| Réponses correctes | 64.53% | 64.39% | 64.65% |
| *Exp. de Viadana* | *64.21%* | *65.67%* | *63.13%* |
| Réps. correctes 1$^{er}$ test | 63.29% | 63.66% | 62.98% |
| *Exp. de Viadana* | *61.99%* | *63.82%* | *60.65%* |
| Réps. correctes 2$^{me}$ test | 65.82% | 65.12% | 66.31% |
| *Exp. de Viadana* | *66.57%* | *67.67%* | *65.75%* |

**Table 1**

## Bibliographie

ARNHEIM R. (1974), *Art and Visual Perception: a Psycology of the Creative Eye,* University of California Press, London.

COLLINS A. & LOFTUS E.F. (1975), A spreading activation theory of semantic processing, *Psychological Review* **82**, 407-428.

COOPER M. (1998), The inescapable influence of the horizontal and vertical on geometrical and other human behaviour, *L'educazione Matematica* **XIX.3**, 81-99.

LARHER A. (1991), *Implication statistique et applications à l'analyse de démarches des preuves mathématiques,* Thèse de Doctorat, Université de Rennes I.

FISCHBEIN E. (1987), *Intuition in Science and Mathematics,* D. Reidel Pubblishing Company? Dordrecht.

FISCHBEIN E. (1993), The Theory of Figural Concepts, *Educational Studies in Mathematics* **24.2**, 139-162.

GRAS R. & LARHER A. (1993), L'implication statistique, une nouvelle méthode d'analyse des donnès, *Mat. Inf. Sci. Hum.* **120**, 5-31.

MARCHINI C. (1999), La didattica della Logica, *L'educazione Matematica* **XX.1**, 156-166.

MARCHINI C. & RINALDI M.G. & BEDULLI M. & GRUGNETTI L. (2002), Tetti e bandiere, dans *Processi innovativi per la matematica nella scuola dell'obbligo,* (Eds. Malara & alii), Pitagora Editrice, Bologna, 223-236.

MEDICI D. & SPERANZA F. & VIGHI P. (1986), Sobre la formacion de los conceptos geometricos y sobre el lexico geometrico, *Enseñanza de las ciencias* **4.1**, 16-22.

NÙÑEZ R.E. & EDWARDS L.D. & MATOS J.P. (1999), Embodied cognition as grounding situatedness and context in mathemacis education, *Educational Studies in Mathematics* **39.1-3**, 45-65.

SFARD A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions (reflection on processes and objects as differents sides of the same coin), *Educational Studies in Mathematics* **22**, 1-36.

SINGER M. (2001), Thinking structures involved in mathematics learning, dans *Proceedings CERME 2* (Ed. Novotna), Part I, 92-100.

TALL D.O. & VINNER S. (1981), Concept image and concept definition in mathematics whith particular reference to limit and continuity, *Educational Studies in Mathematics* **12**, 151-169.

VAN HIELE P.M. (1959), *Structure and Insight (a theory of mathematics education),* Academic Press, New York.

VERGNAUD G. (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des mathématiques* **10**, 133-170.

VIGHI P. (2003), Pre-conceptions about the triangle, dans *Proceedings SEMT ’03* (Ed. Novotna), 152-157.

VIGHI P. (2004), The triangle as mathematical object, dans *Proceedings CERME 3*, TG7_Vighi_cerme3.pdf, Edizioni Plus, Pisa.

**CARLO MARCHINI & MARIA GABRIELLA RINALDI**
Dipartimento di Matematica dell’Università di Parma
Parco Area delle Scienze 53/A – 43100 PARMA - I
carlo.marchini@unipr.it & mariagabriella.rinaldi@unipr.it